



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Sulla stima delle frequenze di riscatto:
evoluzioni metodologiche per l'analisi del Dynamic
PolicyHolder Behavior

Facoltà di Ingegneria dell'Informazione, Informatica e Statistica
Corso di Laurea Magistrale in Scienze Attuariali e Finanziarie

Candidato

Andrea Santoro

Matricola 1754930

Relatore

Prof. Fabio Baione

Correlatore

Prof. Salvatore Forte

Anno Accademico 2020/2021

Sulla stima delle frequenze di riscatto: evoluzioni metodologiche per l'analisi del Dynamic PolicyHolder Behavior

Tesi di Laurea Magistrale. Sapienza – Università di Roma

© 2021 Andrea Santoro. Tutti i diritti riservati

Questa tesi è stata composta con L^AT_EX e la classe Saphthesis.

Email dell'autore: andreasantoro997@gmail.com

Indice

1	Introduzione	1
1.1	Lapse Risk: alcuni risultati nella letteratura	6
1.2	Aspetti tecnici	8
1.3	Normativa	9
1.3.1	Solvency II	9
1.3.2	Principali articoli di interesse per lo sviluppo della tesi	10
1.4	Struttura dell'elaborato	13
2	Evoluzione dei modelli	14
2.1	Modello Statico: Frequenze	14
2.2	GLM: da modello statico a dinamico	17
2.2.1	Introduzione	17
2.2.2	Il modello GLM	19
2.2.3	Esempi accademici di distribuzioni usate per il riscatto	20
2.2.4	GLM: Modello Dinamico One Stage	22
2.2.5	Calibrazione del modello	23
3	Modello Dinamico Two Stage	25
3.1	Alcuni semplici modelli: arctangent, parabolic e step increase	26
3.2	Funzioni Sigmoide: Logistic, Exponential e Hyperbolic Tangent . . .	26
3.3	Doppia Sigmoide: Logistic, Exponential e Hyperbolic Tangent	28
3.4	Double Linear	30
3.5	Copula Regression	31
3.5.1	Introduzione alla Copula Regression	31
3.5.2	Funzione copula regression lineare	33
3.5.3	Funzione copula regression non lineare	35
3.5.4	Un approccio alternativo per la determinazione dei valori . . .	36
4	Applicazioni	37
4.1	La calibrazione	38
4.1.1	Metodo di Gauss-Newton	39
4.1.2	Metodo della discesa del gradiente	40
4.1.3	Breve approfondimento sulla calibrazione della copula regression	40
4.2	Risultati della calibrazione	41
4.2.1	Modello Arctangent	41
4.2.2	Modello Parabolico	42

4.2.3	Modello Step Increase	43
4.2.4	Modello Sigmoidale (S-Shaped)	43
4.2.5	Modello Doppia Sigmoidale	44
4.2.6	Modello Double Linear	46
4.2.7	Modello Copula Regression	48
4.3	Confronto tra modelli: differenze nei risultati	49
5	Problema di stima nel cambio di misura	52
5.1	BEL ed SCR	53
5.2	Esemplificazioni numeriche	54
5.2.1	La dinamica considerata e le ipotesi sottostanti	54
5.2.2	Esempio 1	55
5.2.3	Esempio 2	58
6	Conclusioni	60
A	Software	61
A.1	Codici	61
A.2	Funzioni e Metodi	76
B	Famiglia Esponenziale Lineare	80
C	La simulazione di traiettorie	81
C.1	Le probabilità Real World e Risk Neutral	81
C.2	I Processi di diffusione (i.e. processi diffusivi)	82
C.3	Il Metodo Monte Carlo e lo schema di Eulero	82
C.4	Obbligazioni: Modello di Cox, Ingersoll e Ross per contratti IRS	84
C.5	Azioni: estensione del modello Black&Scholes	86
D	Le Copule statistiche	88
D.1	Introduzione alle Copule	88
D.2	Le famiglie di Copule	92
D.2.1	Famiglia FGM	92
D.2.2	Famiglia Frank	92
D.2.3	Famiglia Gaussiana	93
D.3	La Copula Empirica	93
D.4	Stima del parametro della copula	94
	Bibliografia	95

Sommario

L'evoluzione della normativa e la sempre maggiore importanza attribuita al conseguimento di una stima accurata dei flussi di cassa di una compagnia, ha portato alla necessità di andare ad analizzare più dettagliatamente diversi elementi dell'attività della stessa, tra cui il lapse risk.

Il core dello studio è costituito dall'impiego e dall'analisi di diverse metodologie atte a descrivere il Policy Holder Behavior (Statico e Dinamico) – più precisamente, le frequenze di riscatto – presentando modelli utilizzati nella pratica, trattati nella letteratura e meno noti, confrontando quelli che possono essere i pro e i contro di ciascuno di essi nella applicazione e nella fase di calibrazione – che verranno osservate esclusivamente per la componente dinamica del rischio di riscatto.

Secondariamente, sarà poi descritto un problema di rilevante importanza, ovvero la distorsione che si va a generare in situazioni come la stima delle frequenze di riscatto quando si utilizza sotto la misura di probabilità Risk Neutral un modello calibrato con valori Real World.

Capitolo 1

Introduzione

Il susseguirsi di crisi finanziarie ha elevato l'importanza dell'analisi e gestione del rischio. In particolare, con l'avvento di SolvencyII (spiegato più dettagliatamente nella Sezione 1.3) il concetto di rischio ha ottenuto sempre più spazio, diventando un tema centrale per la sana, prudente e corretta gestione dell'impresa.

Da un punto di vista normativo, vi è stata l'esigenza di poter effettuare ipotesi che siano il più possibile realistiche e, all'interno delle polizze assicurative, possono essere presenti diverse opzioni che, se esercitate, possono influenzare significativamente i flussi di cassa dell'assicuratore. Tra queste opzioni, va ad inserirsi uno dei principali rischi derivanti dal comportamento dell'assicurato: il lapse risk.

La definizione di lapse risk non è univoca, anzi, più precisamente essa assume diversa connotazione nella letteratura, da articolo ad articolo. Nel già citato impianto SolvencyII, il modulo del lapse risk è definito come segue

CEIOPS: QIS5 Technical Specifications (Brussels, 5 July 2010)

Lapse risk is the risk of loss or change in liabilities due to a change in the expected exercise rates of policyholder options. In relation to the policyholder options that the lapse sub-module covers, a comprehensive approach is taken. The module takes account of all legal or contractual policyholder options which can significantly change the value of the future cash-flows. This includes options to fully or partly terminate, decrease, restrict or suspend the insurance cover as well as options which allow the full or partial establishment, renewal, increase, extension or resumption of insurance cover.

Esso include quindi tutte le opzioni legali o contrattuali che possono portare – totalmente o parzialmente – alla terminazione, riduzione, limitazione o sospensione della copertura assicurativa, nonché opzioni che – totalmente o parzialmente – consentono la costituzione, il rinnovo, l'aumento, la proroga o la ripresa della copertura stessa.

In [Milhaud & Dutang 2018], viene riportata una citazione della Normativa Europea che definisce il lapse come "la scadenza di tutti i diritti e gli obblighi derivanti da un contratto assicurativo se l'assicurato non adempie a determinati obblighi necessari per mantenerli".

In [KPMG: First Impressions (ed.2020), IFRS17] è fornita una panoramica del nuovo standard IFRS17, dove a pagina 13 si ha la seguente definizione

Il "lapse risk" o "persistency risk" è il rischio che il contraente annulli il contratto in un momento diverso da quello previsto dall'emittente al momento della determinazione del prezzo del contratto.

Originariamente, il termine "lapse" denotava la cessazione di una polizza assicurativa derivante dalla perdita della copertura per mancato pagamento dei premi da parte dell'assicurato.

Con il passare del tempo, nella letteratura, è diventato sempre più comune denotare col termine "lapse" sia il suo concetto originario di risoluzione senza pagamento, che la risoluzione di una polizza seguita dal pagamento di un valore di riscatto dalla compagnia all'assicurato (i.e. i riscatti) – tuttavia, è possibile trovare anche ulteriori estensioni nel suo utilizzo.

Nel presente elaborato, più precisamente, l'oggetto di studio sono proprio i riscatti, i quali appartengono al modulo underwriting della normativa SolvencyII e sono definiti come la risoluzione prematura di un contrattivo assicurativo, richiesta dall'assicurato, seguita dal pagamento da parte della compagnia di un valore di riscatto pattuito in sede di stipula.

Per quanto sopra spiegato, si può affermare che i riscatti costituiscono solo una delle possibili cause del lapse – inteso come risoluzione del contratto – insieme a morte, mancato pagamento dei premi, scadenza,... Tuttavia, considerando ormai la varietà di significati attribuiti al termine "lapse", e in virtù del fatto che – come spiegato in [Milhaud & Dutang 2018] – molti studi mostrano come il tasso di riscatto sia preponderante nel descrivere il lapse nelle compagnie vita, le cui traiettorie sono significativamente influenzate dalle decisioni dei soggetti e meno da altri eventi definiti involontari e che rimangono relativamente stabili nel tempo, in quanto segue "lapse" sarà inteso come sinonimo di "riscatto/i"¹.

I riscatti costituiscono un possibile pregiudizio per l'attività assicurativa e i rischi da essi derivanti sono di grande valenza economica per diverse ragioni, infatti

1. Qualora dovessero esserci costi o spese iniziali sostenuti dalla compagnia e non ancora coperti con l'acquisizione dei premi, vi è il rischio che questi non vengano recuperati.
2. In caso di riscatti di massa, possono sorgere problemi di liquidità, legati alla richiesta di denaro da parte dell'assicurato e la necessità di vendere attività per onorare l'impegno.
3. Vi è la possibilità di perdita dei profitti futuri, specialmente nel caso in cui l'assicuratore – come già sottolineato in precedenza – non sia in grado di recuperare i costi di acquisizione
4. Può sorgere un problema di adverse selection perché gli assicurati che sono a conoscenza della loro situazione e della loro necessità di copertura assicurativa

¹O quantomeno così sarà per la componente dinamica del lapse.

tendono a non riscattare la propria polizza. E' stato dimostrato in diversi articoli – come [Conwill, Furuya, Ito 2013]– che individui che hanno necessità di una copertura assicurativa – i.e. maggiormente soggetti al rischio – riscattano con una frequenza ridotta in virtù di questa loro esposizione e, per tale motivo, si va a creare una anti-selezione nel momento in cui i tassi diventano alti a sufficienza da rendere conveniente il riscatto per soggetti non particolarmente esposti.

5. I riscatti riducono l'efficacia della gestione del rischio attraverso il pooling, andando a creare problemi nelle stime.
6. Ultimo, ma non meno importante, può sorgere un danno reputazionale (rischio reputazionale): un elevato numero di riscatti inevitabilmente rovina la reputazione di una compagnia e ciò può generare un effetto a catena che porta altri soggetti a riscattare, rovinando ulteriormente la reputazione della compagnia, ecc...

In altre parole, l'esercizio dei riscatti può impattare sulle compagnie assicurative sotto diversi aspetti come la riservazione, i flussi di cassa (che siano essi attività o passività), il requisito di capitale,... e concretizzarsi in un assorbimento di capitale più o meno rilevante a seconda delle circostanze.

Per fronteggiare queste difficoltà, le compagnie inseriscono tipicamente delle penali che disincentivano i riscatti e che consentono di recuperare i costi inizialmente sostenuti, riducendo la perdita in termini di profitti attesi.

Osservazione 1.0.1. Da un punto di vista gestionale, nell'ambiente assicurativo – principalmente nel caso vita – la gestione dei cash-flow avviene in un sistema ALM (Asset-Liability Management)² e le compagnie, qualora sia esercitata l'opzione, sono vincolate al dover pagare un determinato valore di riscatto definito nella polizza: possono allora sorgere difficoltà legate al valore degli assets nel momento in cui il contratto viene riscattato e alla necessità di copertura delle liabilities.

In un framework market-consistent, la valutazione dei flussi di cassa è coerente con quella che è la valutazione proposta sul mercato finanziario e perciò, per i motivi sopracitati, risulta necessario modellizzare correttamente le frequenze di riscatto: in questo modo sarà possibile prevedere le dinamiche future di questo fenomeno, reagendo repentinamente ad eventuali movimenti sfavorevoli dei flussi di attività e passività. Questo tipo di modellizzazione è proprio l'obiettivo del presente studio, nel quale si intende analizzare lo sviluppo della metodologia per il calcolo delle frequenze di riscatto, ponendo particolare enfasi sul Dynamic PolicyHolder Behavior (DPHB), ovvero quella componente del comportamento dell'assicurato legata agli sviluppi economico-finanziari.

Osservazione 1.0.2. E' interessante osservare anche il punto di vista dell'assicurato. Nella maggior parte dei casi le coperture finanziarie caso vita presentano un elevato premio iniziale e, se presenti, spese relativamente basse in seguito: di conseguenza, l'assicurato che riscatta la polizza non solo deve pagare una penale per la sua decisione,

²In alcuni articoli, come in [Conwill, Furuya, Ito 2013], viene spiegato come il valore dell'opzione può essere replicato da contratti: nell'articolo citato si utilizzano le swaptions.

ma subisce anche una perdita relativa alle spese già pagate anticipatamente andando ad assumere una decisione sub-ottimale.

Nel caso di assicurazioni attinenti alla vita umana, i contratti potrebbero rimanere nel portafoglio molto a lungo e, per tale motivo, tipicamente si distingue tra una componente strutturale e una temporale: questa distinzione è ampiamente discussa nella letteratura.

Come spiegato in [Cerchiara et al. 2009], il rischio lapse può essere diviso in due componenti, una irrazionale e una razionale:

- Componente irrazionale: considerata come una base del lapse risk, essa è indipendente dagli sviluppi del mercato finanziario³ e, per tale motivo, tipicamente è definita come scenario-indipendent.
- Componente razionale: questa componente, che distingue il modello dinamico da quello statico, collega il lapse rate al comportamento razionale dell'assicurato che, ovviamente, è scenario-specific. In questo modo si ha un legame diretto con l'ambiente finanziario e l'assicurato viene visto come un soggetto razionale in grado di riscattare quando risulta vantaggioso (i.e. il valore di riscatto è superiore a quello di continuazione).⁴ In altre parole, nel Rational Behavior⁵ si assume che il soggetto assicurato
 - si comporti come un investitore neutrale al rischio che decide di riscattare nel momento in cui il valore di esercizio dell'opzione supera il valore di continuazione⁶. In questa logica, poiché gli assicurati massimizzano il valore dell'investimento, nel momento in cui si lavora con portafogli omogenei rispetto a caratteristiche – come il rendimento della polizza – allora si potrà passare da una situazione in cui nessun soggetto riscatta, ad una in cui tutti riscatteranno insieme.
 - si comporti come un investitore avverso al rischio e, in tal caso, il suo obiettivo diventerebbe massimizzare l'utilità attesa.

Questo tipo di caratteristica viene analizzata dagli optimal dynamic lapse rate models, i quali presuppongono l'assenza di una componente irrazionale e osservano il comportamento dei soggetti seguendo uno di questi due approcci.

³Nell'analisi che si svolge, si considerano parti di questa componente le caratteristiche contrattuali, quelle dell'assicurato e le Emergency Fund Hypothesis.

⁴Da un punto di vista normativo, SolvencyII e i principi CFO richiedono esplicitamente di analizzare la correlazione tra il lapse risk e altri rischi tipici dell'impresa, come ad esempio il market risk.

⁵Si sottolinea, ovviamente, che quella razionale può essere considerata esclusivamente come una possibile componente del lapse risk e non come la componente principale, perché altrimenti non sarebbero spiegati alcuni comportamenti degli assicurati (definiti nella componente irrazionale), come il fatto che nel momento in cui il valore di riscatto supera quello di continuazione, tutti gli assicurati dovrebbero riscattare in blocco.

⁶Seguendo la stessa logica presente nelle opzioni di tipo Americano.

Similmente, in [Bacinello 2005] la distinzione avviene tra componente endogena ed esogena, dove

- Endogena: legata a processi decisionali interni al soggetto, perciò paragonabile alla componente irrazionale precedentemente definita.
- Esogena: legata a elementi esterni alle caratteristiche del soggetto e di conseguenza corrispondente alla componente razionale (i.e. dinamica)

Nel Paragrafo 2.2.4 e Capitolo 3 si andranno ad osservare modelli sub-ottimali per il tasso di riscatto, ovvero modelli che descrivono il comportamento dei riscatti non solo in funzione di fattori economici esogeni, ma anche di elementi endogeni quali ad esempio le caratteristiche contrattuali e dell'assicurato. In questi modelli, il riscatto dinamico avviene ancora assumendo la razionalità dell'assicurato ma in un ambiente real world – e non più in una logica risk-neutral o risk-averse come nei modelli ottimali.

Per concludere, in [Eling, Kochanski 2013], nel rispetto di quanto spiegato in precedenza per la suddivisione tra componente razionale e irrazionale, vengono riportate tre fondamentali ipotesi che possono essere considerate nella pratica (i.e. nel framework empirico) per modellizzare le frequenze di riscatto

- (i) Interest Rate Hypothesis: l'assicurato esercita il riscatto come risposta a cambiamenti nei tassi di interesse⁷. Sotto questa ipotesi, una variazione dei tassi di interesse genera degli effetti sui riscatti che potranno a loro volta generare vantaggi o svantaggi all'impresa stessa.

Una ipotesi di questo tipo si può trovare, ad esempio, in [Conwill, Furuya, Ito 2013], dove si suppone che in qualsiasi scenario di aumento dei tassi, è probabile che vi sia un aumento anche dei tassi di riscatto.

In [Barsotti et al. 2016] il processo dell'intensità dei lapse dipende dalla traiettoria seguita dai tassi di interesse e, come nel caso che si esamina nel presente elaborato, viene definito uno spread tra i tassi di interesse di mercato e il tasso di credito contrattuale in modo che quando questo supera una determinata soglia, è probabile che l'assicuratore subisca un numero maggiore di riscatti.

- (ii) Policy Replacement Hypothesis: queste ipotesi sono molto legate alle prime, infatti all'aumentare dei tassi di interessi, il valore dei premi di equilibrio diminuisce e perciò l'assicurato decide di riscattare, e quindi di rescindere il contratto, per poter stipulare un nuovo contratto più redditizio (in termini di rendimento o di premio minore).

- (iii) Emergency Fund Hypothesis: un soggetto razionale è portato a riscattare esclusivamente quando può trarre beneficio dall'esercizio dell'opzione, tuttavia possono generarsi situazioni in cui vi sia necessità improvvisa di liquidità. Sebbene sia possibile far coniugare, almeno teoricamente, il bisogno imminente

⁷L'andamento dei tassi di interesse dipende da una molteplicità di elementi che rendono impossibile effettuare una previsione precisa dell'andamento futuro di questi: da un punto di vista pratico, tuttavia, esistono modelli come il CIR, il Vasicek, il CIR++, il CIR traslato,... che provano a descriverne la dinamica.

di fondi e la logica dell'investitore razionale, nella maggior parte dei casi, le condizioni contrattuali in essere nelle compagnie assicurative difficilmente creano una situazione di vantaggio per l'assicurato nell'esercitare il riscatto e perciò questa opzione, spesso esercitata in situazioni di emergenza, genera una situazione che esce dalla logica razionale.

1.1 Lapse Risk: alcuni risultati nella letteratura

Il tema del lapse risk è stato affrontato nella letteratura anche in casi specifici, di cui riporterò alcuni dei principali risultati.

In [Pinquet, Guillén, Ayuso 2011] viene osservato il rischio di riscatti all'interno di un portafoglio in run-off (i.e. chiuso al nuovo business) di contratti assicurativi individuali Long Term Care⁸ di una compagnia spagnola, con copertura non pienamente finanziata (fully funded). Una particolarità evidenziata per la maggior parte dei contratti in questa tipologia contrattuale, è l'elevato valore delle spese iniziali sostenute dall'assicurato (i.e. valore elevato del premio) e, per tale motivo, risulta necessaria una disamina del lapse behavior in quanto vi è il rischio concreto che riscattando l'assicurato possa subire perdite. In [Pinquet, Guillén, Ayuso 2011] si giunge alla conclusione che una conoscenza insufficiente dei prodotti finanziari possa essere una delle principali cause dei riscatti e perciò vi è la necessità di un miglioramento della conoscenza del rischio e dei prodotti per coprirlo.

In [Conwill, Furuya, Ito 2013] si va a vedere come varia il valore dell'opzione di riscatto in funzione dell'evoluzione dei tassi e del PHB e si osserva come il valore della opzione sia guidato principalmente dal TVFOG (Time Value of Financial Options and Guarantees⁹): si è osservato come una variazione del valore dell'opzione sia legata alla variazione della sensitività del dynamic lapse.

In [Nolte, Schneider 2017] si studia la propensione al riscatto di un collettivo di assicurati con contratti vita di tipo partecipativo (i.e. con partecipazione agli utili) andando ad osservare il legame che si ha tra il riscattare e la cultura finanziaria, la consulenza finanziaria e il processo decisionale euristico a seguito di uno shock sul reddito¹⁰. L'ipotesi del riscatto, ovviamente, si concretizza nel momento in cui l'assicurato che ha subito lo shock non ha fondi a sufficienza per coprire la perdita subita e trova nel valore di riscatto della polizza una soluzione al problema. Gli autori hanno osservato come, anche se alcuni investitori scelgono di riscattare il contratto come ultima possibilità, ve ne sono molti che anche se presentano altre attività liquide preferiscono comunque coprire perdite inattese mediante il riscatto contrattuale e ciò va a confutare l'idea che delle necessità economiche possano spiegare il lapse risk nella sua interezza. Inoltre, un maggiore affidamento alle decisioni euristiche aumenta la probabilità di riscatto, mentre la cultura finanziaria ha invece un effetto riduttivo sui riscatti. Discorso a parte viene effettuato per la consulenza finanziaria,

⁸Come noto, questa tipologia contrattuale copre rischi rari e la fine del contratto è stabilita unilateralmente, per tutelare l'assicurato.

⁹Questa è una misura del valore dell'opzione di riscatto legata all'incertezza presente all'interno dei mercati finanziari.

¹⁰Questo infatti, come spiegato dagli autori, comporta una necessità economica e porta a riconsiderare le decisioni finanziarie.

che riduce la probabilità di riscatto, ma solo in tempi di difficoltà finanziarie, i.e. in situazioni di shock.

In [MacKay et al. 2017] gli autori si concentrano sul lapse risk sotto un'altra luce, infatti in questo articolo si osserva come l'assicuratore - o meglio, la compagnia assicuratrice - può ridurre questo rischio mediante un opportuno design del prodotto assicurativo venduto, in particolare sulle rendite variabili, ovvero prodotti assicurativi a contenuto finanziario. L'obiettivo degli autori è, infatti, spiegare come costruire un prodotto che sia vendibile sul mercato e appetibile per gli assicurati, ma allo stesso tempo che disincentivi l'esercizio dell'opzione di riscatto anche nel worst case: in tal modo, proprio perché si assume che l'assicurato rimanga nel portafoglio, non è richiesto all'assicuratore di modellare il riscatto in fase di pricing e hedging del contratto. Questo ha un duplice vantaggio: da una parte si riduce il rischio di scegliere il modello sbagliato per il lapse, dall'altra si semplifica la fase di risk management del contratto.

In [Kim 2005] si osserva come, oltre ad alcune variabili endogene (come l'età e il genere dell'assicurato) e all'andamento dei tassi di interesse, vi siano altri elementi esogeni rilevanti ai fini della stima dei tassi di riscatto come i tassi di disoccupazione, tassi di crescita economica, effetti stagionali e l'antidurata (ovvero l'età della polizza rispetto alla data di emissione). Per tale motivo, sul dataset da loro utilizzato, viene mostrato come, rispetto ai modelli di mercato che utilizzano il solo tasso di interesse come variabile indipendente dinamica, i modelli di regressione logit e complementary log-log sono preferibili¹¹. Tuttavia, l'autore precisa come non vi sia un unico modello corretto per descrivere l'andamento dei tassi di riscatto, ma che questo dipenda anche dalla tipologia di contratto assicurativo che si considera e dalle variabili a disposizione.

In [Barsotti et al. 2016] si introduce una modellizzazione del lapse risk basata sull'integrazione del DPHB e si osserva la dipendenza dell'intensità dei riscatti rispetto alle condizioni macroeconomiche. L'obiettivo dell'analisi è l'impatto del PHB sulla solvibilità di una Compagnia di Assicurazioni.

In [Milhaud, Loisel & Maume-Deschamps 2011] si cercano delle caratteristiche statiche discriminanti per la tematica dei riscatti. Gli autori hanno evidenziato come le persone più anziane e gli assicurati che pagano un premio periodico tendano a riscattare maggiormente, inoltre, per motivazioni evidentemente differenti, gli individui molto poveri e molto ricchi non sono interessati a riscattare¹². E' stato inoltre osservato come il maggior numero di riscatti avviene temporalmente quando cessano i vincoli economici, come le penali. In conclusione, lo studio ha dimostrato come gli assicurati che presentavano l'opzione del beneficio senza scopo di lucro riscattavano in misura inferiore rispetto a coloro che presentavano l'opzione del beneficio del profitto (PB), ciò perché se si è interessati al profitto è ragionevole supporre che si passi al prodotto che fornisce un profitto maggiore, oppure che si riscatti quando il valore supera il rendimento¹³.

In [Milhaud & Dutang 2018] si cerca di fornire una previsione dei tempi di riscat-

¹¹Si farà un rapido riferimento a questi due modelli nel Capitolo 2.

¹²I primi per la perdita che avrebbero pagando le penali, i secondi perché non interessati.

¹³Si potrebbe ad esempio fare un parallelo con il valore di continuazione e quello di esercizio.

to dell'assicurato, utilizzando un approccio a rischi concorrenti¹⁴, ovvero adottando una analisi della probabilità di permanenza/sopravvivenza dei rischi nel portafoglio relativa ai riscatti, utilizzando diverse fonti di rischio tra loro indipendenti e che si escludono a vicenda. Viene inoltre illustrato come la stima dell'intensità dei riscatti può subire delle distorsioni in seguito alla stima errata delle intensità delle altre fonti di rischio (seppur meno probabili).

1.2 Aspetti tecnici

Come già spiegato, il comportamento dell'assicurato è un elemento fondamentale in un portafoglio di polizze vita¹⁵. Questo comportamento è sicuramente legato ad una componente statica, ma oltre a questa è possibile andare ad analizzare anche ciò che accade e le decisioni che assume l'assicurato a seguito di variazioni delle condizioni del mercato finanziario nel tempo.

All'interno del mercato ci sono diversi suboptimal lapse rate models, i quali considerano sia la componente dinamica che quella statica (i.e. deterministica) e, in linea generale, possono essere sintetizzati in due macrocategorie:

1. Tasso di riscatto

La presente analisi segue questa linea e, come si vedrà meglio nel Capitolo3, il tasso di riscatto viene calcolato come il prodotto di una componente di base – corrispondente a quella deterministica – aggiustata per una opportuna funzione di fattori dinamici – in letteratura noti come Dynamic Lapse Multipliers (DLM).

2. Intensità di riscatto

Non è il caso in esame, ma è interessante citare ancora [Barsotti et al. 2016]. Questi modelli, noti come modelli a decremento multiplo, lavorano sull'intensità di riscatto andando a dividerla nella componente dinamica e quella deterministica

$$r_t = 1 - e^{\int_{t-1}^t [\mu^{Det}(s) + \mu(s, \theta)] ds}$$

con θ vettore di variabili dinamiche.

Nel mercato, per quanto concerne i modelli sub-ottimali basati sul tasso di riscatto, vi sono due pratiche principali

- one-stage models: in questa tipologia di modelli si va a stimare la frequenza di riscatti, sempre considerando la presenza di una componente statica e una dinamica, in un unico passaggio. Tipicamente ciò è quel che avviene nei modelli GLM, ampiamente trattati in letteratura e brevemente discussi in seguito¹⁶.
- two-stage models: si stima prima la componente di base (idiosincronica) riguardante le caratteristiche della polizza e quelle individuali del contraente. Poi si tiene conto di un fattore correttivo (tipicamente moltiplicativo) che considera elementi di carattere economico-finanziario, come la differenza tra il

¹⁴Come già osservato, il rischio lapse è composto da più elementi e per tale ragione è lecito aspettarsi che questi possano tra loro influenzarsi.

¹⁵Basti pensare all'effetto che può avere, ad esempio, sulle riserve tecniche.

¹⁶Si anticipa che, nella fattispecie dei riscatti, il modello GLM tipicamente utilizzato è il logit.

valore del rendimento di mercato (definito da un asset o un indice finanziario di benchmark) e il rendimento della polizza: in particolare, su questa variabile definita spread di mercato ($\Delta_{mkt,t}$) si basa lo studio che si andrà a condurre in seguito.

Il vantaggio di questo secondo approccio risiede nella possibilità di avere una maggiore consistenza economica nel rispetto dei vincoli presenti per la relazione funzionale tra i tasso di riscatto e spread di mercato – anche se da un punto di vista puramente statistico, questi vincoli possono risultare penalizzanti.

1.3 Normativa

Negli anni recenti, il lapse risk è diventato uno dei principali rischi per le Compagnie Vita e ciò perché i riscatti hanno un impatto diretto su quelle che sono le performance finanziarie e sono fondamentali per chi investe nella compagnia. L'introduzione del fair value, di nuovi vincoli di riserva e dei requisiti patrimoniali regolamentari più restrittivi – come richiesto in SolvencyII – hanno portato alla necessità per le compagnie assicurative di monitorare e aggiornare regolarmente, nei modelli interni, le ipotesi circa il comportamento degli assicurati.

1.3.1 Solvency II

La Direttiva Solvency II ¹⁷ impatta sul settore assicurativo per quanto concerne la vigilanza prudenziale, essa infatti si basa su un approccio di tipo risk-based, ovvero nel quale il tema centrale sono i rischi presenti all'interno dell'impresa – che siano essi dell'attivo o del passivo – tenendo in considerazione anche la struttura di dipendenza che si ha tra questi (approccio total balance sheet).

Come spiegato in [IVASS: Solvency II]:

L'impianto normativo del regime Solvency II, a livello sovranazionale, è articolato in più livelli:

- Direttiva Quadro 2009/138/UE che riporta i principi fondamentali del nuovo regime
- Regolamento 2015/35/UE (cd. Atti Delegati – misura di secondo livello) che reca previsioni di dettaglio sul nuovo regime, di recente modificato dal Regolamento delegato UE 2016/467
- Implementing Technical Standard (ITS) che [...] reca misure volte a disciplinare più in dettaglio disposizioni del nuovo regime in un'ottica di convergenza regolamentare¹⁸
- Linee guida emanate dall'EIOPA, che come misure di terzo livello sono volte anche queste a supportare la convergenza dell'attività di vigilanza.

¹⁷Entrata in vigore il 01/01/2016, ha sostituito 14 direttive precedenti e 28 regolamentazioni nazionali.

¹⁸Per la convergenza e omogeneizzazione a livello Somunitario, si parla di SRP (Supervisory Review Process).

In sintesi, l'obiettivo è gestire al meglio i rischi (*"in maniera efficace ed efficiente"*¹⁹) presenti nell'ambiente assicurativo, determinando il cd. Solvency Capital Requirement (SCR), ovvero il requisito di capitale ²⁰ nel rispetto dell'obiettivo principale, ovvero la tutela del consumatore (i.e. l'assicurato).

L'impianto definito si regge su tre pilastri che corrispondono ai requisiti quantitativi, ai requisiti qualitativi (ovvero la governance, l'internal control e il risk management) e ai requisiti di informativa – che sia essa all'Autorità di Vigilanza, nel quale caso si parla di Supervisory Reporting, oppure al pubblico, ovvero la Public Disclosure²¹.

Osservazione 1.3.1. La Direttiva 2009/138/UE e le linee guida emanate da EIOPA non hanno effetto diretto sui singoli Paesi e devono perciò essere recepite nella normativa nazionale. Nell'ordinamento italiano, per quanto concerne la Direttiva ciò è avvenuto mediante l'aggiornamento del Codice delle Assicurazioni, mentre per quanto concerne le linee guida dell'EIOPA, queste sono state recepite dall'IVASS attraverso l'emanazione e/o la modifica di Regolamenti

1.3.2 Principali articoli di interesse per lo sviluppo della tesi

Si riportano ora i principali articoli che costituiranno una importante base per le considerazioni che verranno effettuate in seguito.

Nel [Regolamento Delegato (UE) 2015/35], per quanto concerne il lapse risk, sono definiti i seguenti:

Articolo 26 - Comportamento dei contraenti

Nel determinare la probabilità che i contraenti esercitino le opzioni contrattuali, fra cui l'estinzione anticipata e il riscatto, le imprese di assicurazione e di riassicurazione effettuano un'analisi del comportamento passato dei contraenti e una valutazione prospettica del comportamento atteso di tali contraenti. L'analisi tiene conto di tutti i seguenti aspetti:

- (a) quanto sia stato e quanto sarà vantaggioso l'esercizio delle opzioni per i contraenti nelle circostanze esistenti al momento di tale esercizio;
- (b) l'influenza di condizioni economiche passate e future;
- (c) l'impatto di misure di gestione passate e future;
- (d) ogni altra circostanza che potrebbe influenzare le decisioni dei contraenti sulla possibilità di esercitare le opzioni.

La probabilità è ritenuta indipendente dagli elementi di cui alle lettere da a) a d) solo se sussistono prove empiriche a sostegno di tale ipotesi.

¹⁹Citando [IVASS: Solvency II].

²⁰Questo può essere calcolato in diversi modi, a seconda delle preferenze e delle possibilità della Compagnia si può infatti preferire un modello interno (totale o parziale) o l'utilizzo della standard formula, si potrebbero utilizzare anche, laddove possibile, i cd. Undertaking Specific Parameters nel No-Life....

²¹Per maggiori informazioni si invita alla lettura di [IVASS: guida a Solvency II]

Articolo 30 - Incertezza dei flussi di cassa

La proiezione dei flussi di cassa utilizzata nel calcolo della migliore stima, esplicitamente o implicitamente, tiene conto di tutte le incertezze dei flussi di cassa, ivi comprese tutte le seguenti caratteristiche:

[...]

- (e) l'incertezza riguardante il comportamento dei contraenti;
- (f) la correlazione tra due o più cause di incertezza;
- (g) la correlazione tra flussi di cassa e circostanze prima della data del flusso di cassa.

Articolo 32 - Opzioni contrattuali e garanzie finanziarie

Nel calcolare la migliore stima, le imprese di assicurazione e di riassicurazione tengono conto di tutto quanto segue:

- (a) tutte le garanzie finanziarie e le opzioni contrattuali incluse nelle loro polizze di assicurazione e di riassicurazione;
- (b) tutti i fattori che possono influire sulla probabilità che i contraenti eserciteranno le opzioni contrattuali o escuteranno le garanzie finanziarie.

Articolo 34 - Metodi di calcolo

[...]

2. La scelta dei metodi attuariali o statistici per il calcolo della migliore stima si basa sull'idoneità a riflettere i rischi che influiscono sui flussi di cassa sottostanti e la natura delle obbligazioni di assicurazione e di riassicurazione. I metodi attuariali e statistici sono in linea con tutti i dati pertinenti disponibili per il calcolo della migliore stima e si avvalgono di tutti questi dati.

[...]

4. Le imprese di assicurazione e di riassicurazione analizzano la misura in cui il valore attuale dei flussi di cassa dipende dall'esito previsto di eventi e sviluppi futuri e dal modo in cui l'esito effettivo in alcuni scenari potrebbe discostarsi dall'esito previsto.

5. Qualora il valore attuale dei flussi di cassa dipenda da eventi e sviluppi futuri di cui al paragrafo 4, per il calcolo della migliore stima dei flussi di cassa le imprese di assicurazione e di riassicurazione usano un metodo che tenga conto di tali correlazioni.

Nella [IVASS: Lettera al mercato 05/06/2018] per i riscatti è spiegato

4. Ipotesi sottostanti al calcolo delle riserve tecniche

[...] Nell'ambito della proiezione dei flussi di cassa assumono tuttavia un ruolo preponderante, oltre che le ipotesi richiamate, anche quelle relative ai riscatti e al comportamento degli assicurati (Policyholder Behaviour). In merito alle ipotesi di riscatto si evidenzia la necessità che le imprese effettuino le calibrizioni su serie storiche di dati robuste, individuando un numero di cluster appropriatamente bilanciato al fine di generare ipotesi aderenti alle caratteristiche di ciascuna classe omogenea di contratti e consentire, allo stesso tempo, analisi statistiche affidabili. [...]

In generale, per migliorare la calibrazione delle ipotesi alle varie epoche di valutazione, le frequenze di riscatto dovranno essere verificate ex-post mediante opportune analisi di coerenza (ad es. backtesting), da condurre separatamente per ciascuno dei cluster individuati in fase di definizione delle ipotesi. [...]

Per quanto riguarda il Policyholder Behaviour, deve essere posta particolare attenzione a valutare il grado di consapevolezza dei contraenti rispetto al valore delle opzioni contrattuali e delle possibili relazioni con le variabili che descrivono l'andamento dei mercati finanziari. Pertanto, qualora l'effetto di tali fattori di dinamicità non sia ritenuto rilevante, la scelta deve essere adeguatamente argomentata e supportata da valutazioni appropriate.

A titolo esemplificativo possono essere utilizzate analisi di correlazione tra il comportamento degli assicurati e il differenziale tra i rendimenti attribuiti in polizza e i rendimenti conseguibili da investimenti alternativi (investimenti benchmark).

Anche per quanto riguarda la modellizzazione dei fattori di dinamicità, è necessario procedere, laddove necessario, ad una clusterizzazione del portafoglio coerente con i differenti comportamenti messi in atto da ciascun segmento di contratti.

L'art.26 del [Regolamento Delegato (UE) 2015/35] trova ulteriore supporto nell'art. 41 del Regolamento IVASS 18/2016, dove si spiega

Art. 41 - Ipotesi sul comportamento dei contraenti

1. Le ipotesi relative al comportamento dei contraenti di cui all'articolo 26 degli Atti delegati sono supportate da evidenze statistiche ed empiriche.
2. Ai fini del comma 1, l'impresa considera che i contraenti possano esercitare le opzioni contrattuali in maniera economicamente razionale. A tal fine, l'impresa tiene conto della consapevolezza dei contraenti rispetto al valore delle opzioni contrattuali e delle loro possibili reazioni alla mutevole situazione finanziaria dell'impresa.

Ultimo, ma non meno importante, è ciò che viene spiegato all'interno della Direttiva Solvency II ([Direttiva 2009/138/EC])

Articolo 79 - Valutazione delle garanzie finanziarie e delle opzioni contrattuali incluse nei contratti di assicurazione e di riassicurazione

Quando calcolano le riserve tecniche, le imprese di assicurazione e di riassicurazione tengono conto del valore delle garanzie finanziarie e di tutte le opzioni contrattuali incluse nelle polizze di assicurazione e di riassicurazione.

Qualsiasi ipotesi fatta dalle imprese di assicurazione e di riassicurazione rispetto alla probabilità che i contraenti esercitino le opzioni contrattuali, comprese le estinzioni anticipate e i riscatti, è realistica e basata su informazioni attuali e credibili. Le ipotesi tengono conto, esplicitamente o implicitamente, dell'impatto che le future variazioni delle condizioni finanziarie e non finanziarie potrebbero avere sull'esercizio di tali opzioni.

1.4 Struttura dell'elaborato

Sebbene il presente elaborato si concentri principalmente sul dynamic lapse rate, per poterne capire bene l'importanza risulta doveroso introdurre e spiegare l'argomento nella sua interezza. A tale scopo

- Nel Capitolo2 vengono mostrate alcune tecniche di stima che si concentrano sulla sola componente deterministica e si introduce una estensione che contempla la possibilità di utilizzare variabili finanziario-economiche per il calcolo del tasso di riscatto – passando in tal modo ad un modello dinamico.
- Nel Capitolo3 si entra nel vivo della discussione e si svolge una disamina di quelli che sono alcuni dei metodi principalmente adottati nella letteratura e nella pratica per la modellizzazione del dynamic lapse rate – metodi nei quali saranno separate la componente deterministica dai cosiddetti DLM (Dynamic Lapse Multipliers).
In questa sezione si introduce anche una metodologia nuova – non trovata in letteratura – che utilizza funzioni copula regression per stimare il legame dinamico tra tasso di riscatti e spread di mercato.
- Nel Capitolo4 vengono calibrati i modelli del dynamic lapse – o meglio, del "fattore di aggiustamento dinamico"– sulla base di osservazioni reali e viene effettuato un confronto tra questi modelli.
- Nel Capitolo5 si introduce invece il tema, ancora aperto, circa le problematiche che si riscontrano nelle analisi quando i modelli calibrati su dati storici in ambiente Real World vengono utilizzati in ambienti Risk Neutral.

Capitolo 2

Evoluzione dei modelli

Nella prassi attuariale, più spesso in passato che ai giorni d'oggi, le compagnie (ri)assicuratrici utilizzavano modelli deterministici per la stima delle frequenze di riscatto. Un esempio è offerto nella Sezione 2.1 dove ciò che interessa ai fini della stima è esclusivamente l'antidurata.

Il passaggio successivo, è stato l'ampliare le variabili da prendere in considerazione, come mostrato nella Sezione 2.2, pur sempre rimanendo all'interno delle caratteristiche contrattuali e dell'assicurato.

Non essendo il core del presente elaborato, ci si limita solo a descrivere questi due modelli statici, mostrando quella che è stata l'evoluzione della analisi statica per poi svolgere un ulteriore passaggio, nel Paragrafo 2.2.4, considerando anche delle componenti di carattere dinamico mediante un approccio di tipo one stage – ovvero, come già spiegato, un approccio nel quale il valore delle frequenze di riscatto è calcolato con un unico passaggio.

Prima di procedere, si sottolinea che nei modelli che si vedranno si darà per svolta la suddivisione in Homogeneous Risk Groups (HRG), ovvero in classi di rischio omogenee rispetto a elementi rilevanti per il riscatto – tipicamente per la componente statica sono delle caratteristiche contrattuali, mentre per la dinamica potrebbe ad esempio essere il grado di avversione al rischio.

2.1 Modello Statico: Frequenze

Dato un contratto assicurativo, l'eliminazione dal contratto può avvenire per conclusione del rapporto o per cause diverse, definite anomale. Più dettagliatamente si farà riferimento alle prime quando la prestazione viene pagata o decorre il tempo previsto, le seconde invece saranno raggruppate nel tasso di riscatto (r_k).

Considerando quindi un gruppo chiuso soggetto a due cause di eliminazione, la legge di permanenza è definita, nella forma più generale, da un modello moltiplicativo per il quale

$$l_{(x)+k} = l_{(x)+k-1} \cdot (1 - q_{x+k-1}) \cdot (1 - f_k) \quad (2.1)$$

dove (x) è l'età dei soggetti che sottoscrivono il contratto¹, k è l'antidurata dalla data di emissione del contratto, q_j è la probabilità di morte tra l'età j (esclusa) e $j + 1$ e f_k è la frequenza (o, in ottica frequentista, la probabilità) di eliminazione per la causa anomala nel periodo $(k - 1, k]$, che da adesso in poi verrà rappresentata dalla notazione r_k .

Dalla (2.1) è possibile ottenere le frequenze di riscatto con semplici passaggi

$$\begin{aligned} r_k &= \frac{l_{(x)+k-1} - l_{(x)+k} - l_{(x)+k-1} \cdot q_{x+k-1}}{l_{(x)+k-1} \cdot (1 - q_{x+k-1})} = \\ &= 1 - \frac{l_{(x)+k}}{l_{(x)+k-1} \cdot (1 - q_{x+k-1})} \end{aligned} \quad (2.2)$$

che mostra come questa frequenza è definita dal rapporto tra il numero di soggetti eliminati per causa anomala rispetto al numero totale degli esposti al rischio, ovvero coloro che nel corso dell'anno non muoiono per causa naturale.

Per evidenti motivi, utilizzando le definizioni date si generano problemi nel calcolo di numeratore e denominatore in quanto non vi è disponibilità di un adeguato numero di contratti per ogni classe di età e bisogna perciò ridurre la precisione del modello andando a considerare le generazioni di contratti esclusivamente sulla base dell'antidurata.

Mantenendo inalterata la logica precedentemente utilizzata, si definisce allora CE_k il numero di contratti eliminati al k -esimo anno dalla stipula per cause anomale (il numeratore della (2.2)), mentre per il denominatore si ha che il numero di polizze esposte al rischio è

$$N_{k-1} - \frac{1}{2}U_k$$

Dove N_{k-1} è il numero di polizze in vigore a inizio anno e U_k è il numero di polizze uscite nel k -esimo anno.

Osservazione 2.1.1. Ovviamente, qualora il contratto permettesse riattivazioni, bisognerebbe considerare al denominatore anche i contratti riattivati come se fosse una popolazione aperta a nuovi ingressi.

In questo modo, nel calcolare le frequenze ed effettuare previsioni, si utilizza la seguente

$$r_k = \frac{CE_k}{N_{k-1} - \frac{1}{2}U_k} \quad (2.3)$$

Le frequenze calcolate applicando la (2.3) ai dati storici sono frequenze grezze che, sebbene siano estremamente importanti e informative circa il comportamento del contraente, devono costituire solo un punto di partenza per l'effettiva analisi da svolgere.

L'obiettivo è andare a determinare l'espressione analitica della funzione perequatrice, in modo da poter effettuare previsioni del tasso di riscatto su valori non osservati

¹La forma generale definita nella (2.1) fa quindi riferimento a gruppi di coetanei all'iscrizione.

dell'antidurata limitando gli errori e le irregolarità. Per agevolare i passaggi, tipicamente si osserva l'andamento delle differenze prime delle trasformate logaritmiche delle frequenze grezze

$$r_k \longrightarrow \ln(r_k) \longrightarrow \Delta \ln(r_k) = \ln(r_{k+1}) - \ln(r_k)$$

Poichè non è possibile, ovviamente, riscattare appena stipulato il contratto ($r_0 = 0$) o quando l'antidurata supera il periodo di copertura del contratto (nel qual caso il rapporto assicurativo è concluso, $r_\infty = 0$), allora

$$\begin{cases} \lim_{k \rightarrow 0} \Delta \ln(r_k) = +\infty \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta \ln(r_k) = -\infty \end{cases}$$

Per descrivere l'andamento di r_k e perciò ottenere un modello che consenta di estrapolare i valori in periodi futuri, si può dunque utilizzare l'equazione alle differenze finite

$$\Delta \ln(r_k) = \frac{1}{k} + b - ck \quad c > 0$$

ottenendo così l'equazione differenziale

$$\frac{d}{dk} \ln(r_k) = \frac{1}{k} + b - ck \quad c > 0 \quad (2.4)$$

da cui

$$\begin{aligned} \ln(r_k) &= \int \frac{d}{dx} \ln(r_k) dk = \int \left[\frac{1}{k} + b - ck \right] dk = \\ &= \int \frac{1}{k} dk + b \int dk - c \int k dk = \ln(k) + bk - \frac{1}{2} ck^2 + a \end{aligned} \quad (2.5)$$

dove con a si è indicata la costante dell'integrazione.

Considerando l'esponenziale, si ottiene la funzione per r_k

$$r_k = k \cdot \exp\left\{bk - \frac{1}{2}ck^2\right\} \cdot e^a \quad (2.6)$$

che rispetta le condizioni precedentemente definite per il comportamento di r_k agli estremi e, inoltre, considerata la continuità e derivabilità della funzione, per il teorema di Rolle vi è almeno un punto in cui la derivata si annulla che, considerata la positività di r_k , è necessariamente un punto di massimo.

La derivata di r_k è

$$\frac{d}{dk} r_k = \frac{r_k}{k} [1 + bk - ck^2]$$

che si annulla quando il fattore $[1 + bk - ck^2]$ si annulla, ovvero per le radici

$$k_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4c}}{2c}$$

ma solo una di queste due radici è positiva, perciò si può dire che il punto di massimo è raggiunto all'antidurata

$$k = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4c}}{2c} \quad (2.7)$$

Prima di procedere alla calibrazione, per ridurre l'errore commesso nell'utilizzare le funzioni grezze si può dapprima calcolare una stima $\hat{r}_k, \forall k$ da utilizzare in seguito. Nello svolgere questo passaggio, tra i casi più semplici è opportuno citare la media aritmetica tra antidurate adiacenti, o anche una media ponderata per valori assunti dalle frequenze grezze, con pesi (simmetrici o meno) che si riducono nel tempo

$$\hat{r}_k = \frac{\sum_{t=-m}^m r_{k+t}}{2m+1} \quad \text{oppure} \quad \hat{r}_k = \sum_{t=-m}^m r_{k+t} \cdot w_t \quad , \text{ con } \sum_{t=-m}^m w_t = 1$$

Osservazione 2.1.2. Questo passaggio, noto come perequazione meccanica o perequazione per medie mobili, non è necessario ma consente di ridurre l'errore commesso.

Osservando la (2.6) si possono individuare 3 parametri (a, b e c), motivo per cui una volta individuate le stime \hat{r}_k , si determina l'equazione della curva imponendo la condizione di appartenenza di questa a 3 punti. Per la calibrazione del modello è computazionalmente più agevole procedere dalla (2.5), la stima dei parametri avviene allora risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \ln\left(\frac{\hat{r}_{k_1}}{k_1}\right) = a + bk_1 - \frac{1}{2}ck_1^2 \\ \ln\left(\frac{\hat{r}_{k_2}}{k_2}\right) = a + bk_2 - \frac{1}{2}ck_2^2 \\ \ln\left(\frac{\hat{r}_{k_3}}{k_3}\right) = a + bk_3 - \frac{1}{2}ck_3^2 \end{cases} \quad (2.8)$$

2.2 GLM: da modello statico a dinamico

2.2.1 Introduzione

In questa sezione si va a spiegare l'utilizzo dei Modelli Lineari Generalizzati (GLM), analizzando quella che è la dipendenza empirica tra i fattori di rischio tecnico e calibrare il modello sulla base di elementi contrattuali quali ad esempio l'età, l'anno di calendario, le prestazioni, l'antidurata,...

Il modello GLM costituisce una scelta robusta e relativamente semplice per analizzare l'effetto che diverse variabili hanno sull'evento osservato, nel caso in esame le frequenze di riscatto: ciò che viene effettivamente fatto è utilizzare un modello per ottenere un valore per la grandezza di interesse come funzione di alcuni fattori. Nell'applicare un simile modello, si va ad osservare quella che è l'esperienza storica e, sulla base di questa esperienza passata, effettuare previsioni circa la dinamica futura.

Nella pratica assicurativa, tipicamente le compagnie analizzano la correlazione tra fattori di rischio di carattere tecnico presenti all'interno di diverse classi di prodotti (distinguendo ad esempio tra Unit Linked, Polizze rivalutabili e non,...)².

²Si tenga presente che spesso si ha una forte correlazione tra il valore delle prestazioni e le altre variabili, perciò ciò che si va a fare è considerare diverse classi di prestazioni: nella proiezione dei valori, infatti, diventa fondamentale l'ammontare di queste e, di conseguenza, la costruzione di modelli che stimino correttamente gli effetti apportati da tali prestazioni.

Nei GLM questo concetto può essere esteso e tra le variabili da utilizzare nel modello possiamo trovare

- Anno di calendario
- Antidurata
- Valori della polizza, come
 - Ammontare delle prestazioni, osservando in questo modo cosa accade al variare di questa grandezza e quanto questa influenzi le altre
 - Opzioni contrattuali
 - Durata del contratto
 - Premio: in [Cerchiara et al. 2009] è stato osservato come un aumento dei premi comporti un aumento dei riscatti, tuttavia poiché molte variabili sono legate a quella che è la definizione del premio, è necessario prestare attenzione agli effetti che comporta inserire questa variabile nel modello.
- Dati dell'assicurato, come
 - Età: in [Cerchiara et al. 2009] è stato osservato come i riscatti siano legati all'età in quanto soggetti più giovani sono più propensi a riscattare, probabilmente perché attratti dalla ricerca di possibilità di maggiore guadagno presenti sul mercato³.
 - Comportamento: inteso come esposizione al rischio direttamente osservabile dopo almeno un anno che la polizza è nel portafoglio.
- Dati della compagnia, come
 - Distribuzione e capillarità sul territorio
 - Altre tipologie di polizze presenti nell'offerta della Compagnia

Considerando più variabili oltre alle classiche anno di calendario e antidurata, potrà quindi aumentare la precisione della stima, la trasparenza nei calcoli e la robustezza del modello.

Osservazione 2.2.1. Sebbene non sarà trattata nel presente elaborato, una estensione dei GLM è costituita dai modelli semiparametrici con Quasi-verosimiglianza (QL). In questa particolare classe di modelli non viene definita la forma distributiva della variabile risposta, ma solo i primi due momenti: ciò consentirà di definire le stime della media e della varianza della variabile dipendente, tuttavia non sarà possibile, generalmente, ottenere una forma distributiva stimata di questa⁴.

Ovviamente, come già anticipato, a partire dal modello costruito con tali variabili sarà possibile estendere il concetto a variabili dinamiche, ovvero a variabili legate agli scenari economico-finanziari presenti e futuri: ciò verrà mostrato nel Paragrafo 2.2.4.

³Diventa interessante allora estendere il modello e, rimanendo nel tema dei GLM, considerare anche l'andamento del mercato, come fatto nella sezione successiva.

⁴Ulteriori informazioni possono essere trovate in [Nelder J.A. 1985]

2.2.2 Il modello GLM

La necessità di introdurre un modello GLM nasce dalle problematiche presenti nel classico modello di regressione lineare (LM)⁵ o, più precisamente, le ipotesi restrittive che esso presenta, ovvero:

- Linearità tra X e Y ($\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$) con parametri fissi per la relazione: ciò non consente di cogliere eventuali relazioni non lineari⁶.
- Additività degli effetti dei termini di errore ($\mathbf{E}[\boldsymbol{\varepsilon}] = 0$): ipotesi che consente di ottenere la correttezza in media del modello.
- Omoschedasticità e correlazione nulla tra termini di errore diversi ($Var[\boldsymbol{\varepsilon}] = \mathbf{E}[\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}'] = \sigma^2 I$): la varianza degli errori è ipotizzata costante nel tempo, indipendente dalla varianza delle variabili esplicative ($Var[\varepsilon_j] = \sigma^2 \quad \forall j$) e non sono presenti legami lineari tra i termini di errore ($Cov[\varepsilon_j, \varepsilon_k] = 0 \quad \forall j \neq k$), ovvero non vi sono legami lineari tra le variabili dipendenti.
- Distribuzione Normale per il termine di errore ($\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 I)$): il termine di errore e , conseguentemente, la distribuzione della variabile risposta seguono una distribuzione Gaussiana⁷ ($\mathbf{Y} \sim N(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 I)$).

Anche nei GLM si va a osservare quella che è l'influenza di un set di variabili indipendenti (o esplicative) \mathbf{X} sulla distribuzione della variabile dipendente \mathbf{Y} , ma ampliando la possibilità di scelta della forma distributiva a tutte le distribuzioni appartenenti alla famiglia esponenziale lineare e rilassare alcune delle ipotesi precedentemente definite nei LM, infatti nei GLM

- Le variabili Y_i e Y_j , con $i \neq j$, sono indipendenti e presentano distribuzioni appartenenti alla stessa famiglia esponenziale lineare (AppendiceB).
- Definendo $\mu_i = \mathbf{E}[Y_i]$, si ha

$$g(\mu_i) = \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} \longrightarrow \mu_i = g^{-1}(\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta})$$

dove \mathbf{x} è il vettore delle realizzazioni delle variabili esplicative e $g(\cdot)$ è definita link function ed è invertibile.

-

$$Var[Y_i] = \frac{\phi}{\omega_i} V(\mu_i)$$

dove V è la Variance Function ed è una funzione del valore atteso della variabile risposta⁸.

⁵ $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$

In questa formula \mathbf{Y} è il vettore della variabile dipendente, \mathbf{X} è la matrice delle variabili indipendenti, $\boldsymbol{\beta}$ è il vettore dei parametri e $\boldsymbol{\varepsilon}$ è il vettore stocastico degli errori.

⁶Si noti che in alcuni casi il modello può essere linearizzabile tramite la relazione $\mathbf{Y} = f(\mathbf{X})\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$, oppure essere intrinsecamente non lineare $\mathbf{Y} = f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\varepsilon}$

⁷Ciò risulta particolarmente utile per l'applicazione del metodo della Massima Verosimiglianza in fase di stima dei parametri.

⁸Si noti che la $V(\cdot)$ è caratterizzante della distribuzione considerata per la variabile risposta.

Osservazione 2.2.2. La definizione della giusta funzione link consente notevoli semplificazioni, rendendo la struttura complessiva della funzione anche lineare, additiva o moltiplicativa.

La link function g è una funzione invertibile e di variabile reale che deve rispettare le condizioni di monotonia e continuità delle derivate prima e seconda.

Osservazione 2.2.3. $\mathbf{x}'_i\boldsymbol{\beta} = \beta_0 + \beta_1x_{i,1} + \dots + \beta_mx_{i,m}$ è anche definito predittore lineare ed è indicato con η_i , dove il vettore dei parametri è certo, ma incognito.

2.2.3 Esempi accademici di distribuzioni usate per il riscatto

Nella fattispecie, ponendo

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1(1) & x_2(1) & \dots & x_m(1) \\ x_1(2) & x_2(2) & \dots & x_m(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_m(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{E}[\mathbf{r}] = \begin{bmatrix} \hat{r}(1) \\ \hat{r}(2) \\ \dots \\ \hat{r}(t) \\ \dots \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_m \end{bmatrix}$$

Sulla base di quanto definito fino ad ora, il modello per la variabile aleatoria tasso di riscatto (r) nel tempo può essere definito come:

$$\hat{r}_t = \mathbf{E}[r_t] = g^{-1}(\beta_0 + \mathbf{x}(t)\boldsymbol{\beta}) = g^{-1}\left(\beta_0 + \sum_{i=1}^m \beta_i x_i(t)\right) \quad (2.9)$$

nella quale formula si è separata l'intercetta dagli altri parametri del predittore lineare⁹.

Perciò si ha

$$g(\mathbf{E}[r_t]) = \beta_0 + \mathbf{x}(t)\boldsymbol{\beta} = \beta_0 + \sum_{i=1}^m \beta_i x_i(t) \quad (2.10)$$

Con la (2.9) e la (2.10), andando ad utilizzare \hat{r}_t per indicare lo stimatore del tasso di riscatto ($\hat{r}_t = \mathbf{E}[r_t]$), ed essendo la variabile risposta di tipo binomiale (i soggetti riscattano o non riscattano) si riportano i seguenti esempi di funzioni link

(i) Funzione link logaritmica ($g(x) = \log(x)$)

$$\log(\hat{r}_t) = \beta_0 + \sum_{i=1}^m \beta_i x_i(t)$$

dalla quale

$$\hat{r}_t = e^{\beta_0 + \sum_{i=1}^m \beta_i x_i(t)} \quad (2.11)$$

Il vantaggio del modello logit è la semplicità della forma funzionale, che fornisce un legame semplice tra la variabile e il predittore lineare. Tuttavia, è bene sottolineare che per garantire il valore di \hat{r}_t in $(0,1)$ è necessario porre il vincolo $0 \leq \hat{r}_t \leq 1$

⁹In questo caso vi è $\mathbf{x}(t)\boldsymbol{\beta}$ anziché $\mathbf{x}'(t)\boldsymbol{\beta}$ perché $\mathbf{x}(t)$ è definito come vettore riga.

(ii) Funzione link logit ($g(x) = \text{logit}(x)$)

$$\text{logit}(\hat{r}_t) = \log\left(\frac{\hat{r}_t}{1 - \hat{r}_t}\right) = \beta_0 + \sum_{i=1}^m \beta_i x_i(t)$$

dalla quale

$$\hat{r}_t = \frac{e^{\beta_0 + \sum_{i=1}^m \beta_i x_i(t)}}{1 + e^{\beta_0 + \sum_{i=1}^m \beta_i x_i(t)}} \quad (2.12)$$

Con questa funzione link è garantito il valore di \hat{r}_t nell'insieme $(0,1)$ e perciò non servono vincoli aggiuntivi.

(iii) Funzione link probit ($g(x) = \Phi^{-1}(x)$)

Sebbene sia possibile utilizzare l'inversa di una qualsiasi funzione di ripartizione per ottenere i valori nell'intervallo desiderato, molto diffuso è l'utilizzo di una funzione di ripartizione Gaussiana.

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(\hat{r}_t) &= \beta_0 + \sum_{i=1}^m \beta_i x_i(t) \\ \hat{r}_t &= \Phi\left(\beta_0 + \sum_{i=1}^m \beta_i x_i(t)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\beta_0 + \sum_{i=1}^m \beta_i x_i(t)} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \end{aligned} \quad (2.13)$$

Ovviamente, anche con questa funzione link si ha il vantaggio di ottenere un valore di \hat{r}_t compreso in $(0,1)$ senza porre vincoli.

(iv) Funzione link loglog complementare ($g(x) = \log(-\log(1 - x))$)

$$\log(-\log(1 - \hat{r}_t)) = \beta_0 + \sum_{i=1}^m \beta_i x_i(t)$$

da cui,

$$\hat{r}_t = 1 - e^{-e^{\beta_0 + \sum_{i=1}^m \beta_i x_i(t)}}$$

E' possibile dimostrare che questa funzione link è asimmetrica e spesso fornisce risultati differenti dalle dalle funzioni di collegamento precedentemente definite.

2.2.4 GLM: Modello Dinamico One Stage

Nel modello dinamico single stage, il valore atteso del tasso di riscatto r_t di un assicurato al tempo t è calcolato mediante un GLM su un set di parametri β calibrati sui dati

$$\hat{r}_t = g^{-1}(\mathbf{x}'_t \beta)$$

dove $g(\cdot)$ è la link function.

In questo modo, sarà possibile entrare più nel dettaglio ed estendere gli esempi forniti nel Paragrafo 2.2.3.

Come visto in precedenza, un vantaggio che si ottiene andando ad utilizzare il metodo GLM è la possibilità di considerare simultaneamente tutti i fattori, considerando quindi automaticamente la struttura di correlazione presente nei dati, cercando i coefficienti che fittano al meglio i dati. Qualora, oltre alla componente statica – come le diverse variabili contrattuali elencate in precedenza – si volesse considerare una componente dinamica legata all'evoluzione del mercato, si potrebbero aggiungere anche il livello dei mercati finanziari, il valore economico delle garanzie, il valore di eventuali bonus...¹⁰

Riprendendo il discorso definito nella Paragrafo 2.2.3, è possibile allora considerare un set di m parametri scomposto come segue

$$m = m_U + m_M \quad m_M = m - m_U$$

dove m_U è il numero di parametri della componente tecnica (Underwriting), ovvero quelli utilizzati in precedenza, e m_M è il numero di parametri relativi al mercato (Market).

In questo modo, il calcolo di \hat{r}_t può essere suddiviso nella somma o prodotto di due parti. Se si ipotizza che entrambe abbiano stessa funzione link, allora considerando ad esempio i casi di link logit e probit definiti in precedenza, le rispettive formule diventano

(i) Funzione link logit

In questo caso, dalla 2.12 non si riesce ad ottenere una forma funzionale semplice nella scomposizione delle due componenti, infatti

$$\hat{r}_t = \frac{e^{\beta_0 + \sum_{i=1}^{m_U} \beta_i X_i(t)}}{1 + e^{\beta_0 + \sum_{i=1}^{m_U} \beta_i X_i(t)}} \cdot \frac{1 + e^{\beta_0 + \sum_{i=1}^{m_U} \beta_i X_i(t)}}{e^{\beta_0 + \sum_{i=1}^{m_U} \beta_i X_i(t)}} \frac{e^{\beta_0 + \sum_{i=1}^m \beta_i X_i(t)}}{1 + e^{\beta_0 + \sum_{i=1}^m \beta_i X_i(t)}} \quad (2.14)$$

dove si osserva che nel definire la componente finanziaria, si utilizza comunque il reciproco della componente tecnica.

Sebbene la forma funzionale definita in tale maniera possa sembrare più complicata, si sottolinea che questa mantiene la proprietà di avere $\hat{r}_t \in [0, 1]$.

¹⁰Sebbene vi siano diversi elementi che possono concorrere alla componente dinamica, questi possono essere "raggruppati" in un unico fattore: lo spread che si ha tra il rendimento del mercato e il rendimento della polizza. Questo punto di vista è il core dell'analisi e verrà trattato approfonditamente nel Capitolo 3.

Osservazione 2.2.4. Si osserva che, nella prassi assicurativa, questo è il modello che si va ad utilizzare maggiormente per modellizzare i tassi di riscatto.

(ii) Funzione link probit

La iii viene scomposta dividendo l'integrale

$$\hat{r}_t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{\beta_0 + \sum_{i=1}^{m_U} \beta_i X_i(t)} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \int_{\beta_0 + \sum_{i=1}^{m_U} \beta_i X_i(t)}^{\beta_0 + \sum_{i=1}^m \beta_i X_i(t)} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right] \quad (2.15)$$

Tuttavia, il vero vantaggio che si ottiene nel separare la regressione sulle variabili statiche dalle dinamiche è la possibilità di utilizzare funzioni link differenti in modo tale da lavorare in modo più opportuno sia sulla componente underwriting che su quella dinamica, modellizzando le interazioni tra i diversi risk factor. Nei GLM, così facendo, si riesce a comprendere come possa cambiare il PolicyHolder Behavior rispetto a caratteristiche "offline" e rispetto ai movimenti dettati dal mercato.

Per quanto concerne la calibrazione del modello, qualora ci fosse la stessa distribuzione per le due componenti, viene utilizzato il metodo della massima verosimiglianza, presentato di seguito nel Paragrafo 2.2.5: l'unica differenza che si avrà con la stima del modello statico sarà la presenza, tra le variabili esplicative considerate, di alcune variabili economico-finanziarie – come quelle precedentemente introdotte. Qualora la modellizzazione per componente statica e dinamica utilizzasse due funzioni link differenti, si procede ancora tramite verosimiglianza, ma con le dovute modifiche a seconda dei coefficienti che si intende stimare.

2.2.5 Calibrazione del modello

La stima dei parametri della distribuzione della variabile dipendente e dei parametri del modello GLM trova un grande vantaggio nell'utilizzo di distribuzioni appartenenti alla famiglia lineare esponenziale (Appendice B) poiché è possibile utilizzare procedure come la stima di Massima Verosimiglianza, ma con semplificazioni nei calcoli in considerazione delle relazioni tra le grandezze:

1. Stimando β si stima il predittore lineare η

$$\mathbf{x}'\boldsymbol{\beta} = \eta$$

2. Stimando η si stima μ con l'inversa della link function

$$g^{-1}(\eta) = \mu$$

3. Stimando μ è possibile allora stimare il parametro canonico γ

$$\gamma = b'^{-1}(\mu) = b'^{-1}(g^{-1}(\mathbf{x}'\boldsymbol{\beta}))$$

Date n realizzazioni della variabile risposta, è possibile definire la log-verosimiglianza di una distribuzione della famiglia lineare esponenziale come

$$\ell(\mathbf{y}; \gamma, \phi, \omega) = \log L(\mathbf{y}; \gamma, \phi, \omega) = \sum_{k=1}^n \left[\frac{\omega_k}{\phi} [y_k \gamma_k - b(\gamma_k)] + \log(c(y_k; \phi, \omega_k)) \right] \quad (2.16)$$

ipotizzando ϕ fissato.

In virtù dei legami precedentemente definiti, la stima del parametro canonico avviene risolvendo il sistema delle equazioni di verosimiglianza, partendo dalla stima dei β . Definendo $\ell(\beta)$ la log-verosimiglianza scritta in funzione del vettore di parametri β , per ogni β_j si pone

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell(\beta)}{\partial \beta_j} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial \ell_k(\beta)}{\partial \beta_j} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial \ell_k}{\partial \gamma_k} \frac{\partial \gamma_k}{\partial \mu_k} \frac{\partial \mu_k}{\partial \nu_k} \frac{\partial \nu_k}{\partial \beta_j} \end{aligned} \quad (2.17)$$

e, ovviamente, si deve avere la matrice Hessiana $[\frac{\partial^2 \ell(\beta)}{\partial \beta_k \partial \beta_h}]_{k,h}$ definita negativa.

Non ci si soffermerà ulteriormente sulla calibrazione dei modelli GLM e sui metodi utilizzati per la stima, si sottolinea solo che la soluzione si ottiene per via numerica tramite software statistici: due degli algoritmi iterativi più famosi implementati nei software e utilizzati per questi scopi sono il Newton-Raphson¹¹ e lo Scoring di Fisher.

¹¹Questo metodo, noto anche come metodo delle tangenti, calcola la soluzione di una equazione definita come $f(x)=0$, dopo aver definito l'intervallo in cui la funzione presenta una sola radice. In questo metodo si sostituisce la curva con la sua tangente attraverso la relazione di ricorrenza $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, i.e. il valore aggiornato di x_n è il valore in cui la tangente incontra l'asse delle ascisse e si procede iterativamente fino alla convergenza.

Capitolo 3

Modello Dinamico Two Stage

Ampliando ora quanto visto, in [Eling, Kochanski 2013] il tasso di riscatto viene distinto in due componenti: una è la componente di riscatto deterministica, non specifica dello scenario in cui ci si cala e, perciò, calcolabile "offline" (ovvero sulla base di elementi statici), e l'altra è la componente dinamica, dove si trovano risk-drivers specifici dello scenario in cui ci si trova.

I suboptimal surrender rate models, nella pratica, utilizzano un approccio two-stage. Il primo passo è costituito dalla definizione di un tasso base - o strutturale, riguardante la componente irrazionale - calcolato con meccanismi deterministici (come quelli definiti nella Sezione 2.1), mentre il secondo passo è la costruzione di un fattore di aggiustamento - noto in letteratura come conjectural rate.

Nella Sezione 2.1 sono stati mostrati diversi modi per calcolare la componente statica, motivo per cui il focus di questa sezione - nonché tema centrale del presente studio - è la componente dinamica.

Per poter modellare il tasso di riscatto dinamicamente, si andrà ad utilizzare la seguente

$$r_t = r_t^{Base} \cdot f(\Delta_{mkt,t}; \beta) \quad (3.1)$$

dove si è assunta come componente di base - legata all'individuo, alle sue necessità e al contratto da lui sottoscritto - il valore di r_t^{Base} e si è definito il fattore correttivo $f(\Delta_{mkt,t}; \beta)$ come funzione di un set di parametri - racchiusi nel vettore β - e dello spread di mercato $\Delta_{mkt,t}$, definito come differenza tra un tasso di mercato selezionato come benchmark e il tasso di rendimento della polizza.

A seconda del valore assunto $\Delta_{mkt,t}$, ovviamente il valore del fattore correttivo sarà più o meno grande e, in particolare, visto che r_t assume valori compresi tra 0 e 1, si devono avere dei limiti per $f(\Delta_{mkt,t}; \beta)$, ovvero

$$r_t \in [0, 1] \quad \implies \quad f(\Delta_{mkt,t}; \beta) \in \left[0, \frac{1}{r_t^{Base}}\right]$$

Nel seguito, per una minore pesantezza notazionale delle formule, si adotterà

$$f(\Delta_{mkt,t}; \beta) = f(\Delta_{mkt,t})$$

La stima dei parametri ai modelli che di seguito saranno descritti verrà spiegata nel Capitolo 4.

3.1 Alcuni semplici modelli: arctangent, parabolic e step increase

I primi modelli che vengono descritti, sono dei modelli ampiamente utilizzati nella pratica e/o sono dei modelli suggeriti dai regolatori [EIOPA 2019]. Sebbene vi sia una ampia gamma tra cui scegliere, si riportano tre dei principali modelli che utilizzano esclusivamente $\Delta_{mkt,t}$, in quanto, considerando che questa è la sola variabile indipendente che si ha nel dataset, la definizione di altri modelli non troverebbe la possibilità di essere discussa in seguito.

1. Arctangent model

$$f(\Delta_{mkt,t}) = a + b \cdot \arctan(c \cdot \Delta_{mkt,t} - d) \quad (3.2)$$

2. Parabolic model

$$f(\Delta_{mkt,t}) = a + b \cdot \text{sign}(\Delta_{mkt,t}) \cdot \Delta_{mkt,t}^2 \quad (3.3)$$

3. Step increase model (anche noto come bounded linear increase model)

$$f(\Delta_{mkt,t}) = \min \left(f_{max}; \max \left(\frac{\Delta_{mkt,t} - a_2}{a_1 - a_2} \cdot f_{min}; f_{min} \right) \right) \quad (3.4)$$

3.2 Funzioni Sigmoide: Logistic, Exponential e Hyperbolic Tangent

Le funzioni sigmoidi logistiche sono spesso utilizzate nella teoria e nella pratica in diversi campi. Il motivo di questo diffuso utilizzo è legato al comportamento della curva, la quale presenta inizialmente una crescita lenta e monotona, seguita da una crescita maggiore al centro (i.e. la derivata avvicinandosi ai valori centrali assume valori sempre più grandi) con punto di massima inclinazione nel punto centrale, dove si ha un flesso, per poi rallentare nuovamente la crescita fino al limite.

Per la rappresentazione della curva logistica, si utilizza una funzione a quattro parametri definita come

$$\begin{aligned} f(\Delta_{mkt,t}) &= f_{min} + \frac{f_{max} - f_{min}}{1 + e^{-a\Delta_{mkt,t} + b}} \\ &= f_{min} + \frac{f_{max} - f_{min}}{1 + e^{-a(\Delta_{mkt,t} - c)}} \end{aligned} \quad (3.5)$$

con parametri: il valore centrale c (dove è situato il punto di flesso), il parametro che identifica la velocità con cui accelera la crescita/decrecita a^1 e gli asintoti superiore e inferiore.

Come spiegato in [Baione et al. 2021], per ottenere un comportamento coerente con

¹Tanto più grande è questo parametro, tanto più rapidamente reagirà il fattore di aggiustamento a variazioni dello spread.

l'andamento dei mercati, si devono avere $f_{min} < f_{max}$ e $a > 0$ per la quale è agevole calcolare derivata rispetto alla $\Delta_{mkt,t}$

$$\begin{aligned} f'(\Delta_{mkt,t}) &= \frac{d}{d\Delta_{mkt,t}} f(\Delta_{mkt,t}) = \frac{a(f - f_{min})(f_{max} - f)}{f_{max} - f_{min}} \\ &= \frac{(f_{max} - f_{min})ae^{-a(\Delta_{mkt,t}-c)}}{(1 + e^{-a(\Delta_{mkt,t}-c)})^2} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Si specifica che con f si intende abbreviare $f(\Delta_{mkt,t})$.

Dalla (3.6) si osserva maggiormente l'importanza che assume il parametro a nella definizione della funzione.

Una rappresentazione alternativa della (3.5) è fornita dalla seguente

$$\begin{aligned} f(\Delta_{mkt,t}) &= f_{min} + \frac{f_{max} - f_{min}}{2} \left[1 + \tanh \left(\frac{\Delta_{mkt,t} - \frac{b}{a}}{\omega} \right) \right] \\ &= f_{min} + \frac{f_{max} - f_{min}}{2} \left[1 + \tanh \left(\frac{\Delta_{mkt,t} - c}{\omega} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.7)$$

con $\omega = \frac{2}{a}$ strettamente positivo.

Dimostrazione 3.2.1. Si dimostra ora la relazione tra a e ω

$$f_{min} + \frac{f_{max} - f_{min}}{1 + e^{-a(\Delta_{mkt,t}-c)}} = f_{min} + \frac{f_{max} - f_{min}}{2} \left[1 + \tanh \left(\frac{\Delta_{mkt,t} - c}{\omega} \right) \right]$$

sottraendo f_{min} da entrambi i lati e dividendo per $(f_{max} - f_{min})$

$$\frac{1}{1 + e^{-a(\Delta_{mkt,t}-c)}} = \frac{1}{2} \left[1 + \tanh \left(\frac{\Delta_{mkt,t} - c}{\omega} \right) \right]$$

ponendo $x = \frac{\Delta_{mkt,t}-c}{\omega}$ e sempre precisando $\omega \neq 0$

$$\frac{1}{1 + e^{-a\omega x}} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \frac{2}{e^x + e^{-x}} \right] = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right] = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \right]$$

Sviluppando e moltiplicando per i denominatori, si ottiene

$$\begin{aligned} 2(e^{2x} + 1) &= (1 + e^{-a\omega x})(e^{2x} + 1) + (1 + e^{-a\omega x})(e^{2x} - 1) \\ e^{-a\omega x+2x} &= 1 \\ -a\omega x + 2x &= 0 \end{aligned}$$

da cui, dividendo per x , segue la tesi.

Il parametro c , in precedenza definito come valore centrale, è il punto di flesso, in cui la funzione assume il valore

$$f(c) = \tilde{f} = \frac{f_{max} - f_{min}}{2}$$

ed è proprio in questo punto che la funzione quadratica (3.6) presenta la maggiore pendenza

$$c = \operatorname{argmax} \left\{ \frac{\partial f(\Delta_{mkt,t})}{\partial \Delta_{mkt,t}} \right\}$$

In virtù di quanto appena mostrato, considerando la (3.6), la pendenza massima che viene raggiunta è

$$f'(c) = (f_{max} - f_{min}) \frac{ae^{-a(c-c)}}{(1 + e^{-a(c-c)})^2} = (f_{max} - f_{min}) \frac{a}{4}$$

che mostra il collegamento presente tra la a e la pendenza di $f(\Delta_{mkt,t})$

La distanza presente tra \tilde{f} e i due estremi corrisponde a $\delta = \frac{f_{max} - f_{min}}{2}$. In questo modo si ha, ovviamente

$$f_{min} = \tilde{f} - \delta \quad f_{max} = \tilde{f} + \delta$$

Osservazione 3.2.1. In [Lipovetsky 2010] viene mostrata una scrittura alternativa della (3.5) che consente di ottenere maggiore semplicità nella costruzione di forme con minori parametri di una funzione doppia-S

$$f(\Delta_{mkt,t}) = \tilde{f} + 2\delta \left(\frac{1}{1 + e^{-a\Delta_{mkt,t} + b}} - \frac{1}{2} \right) \quad (3.8)$$

Per la stima dei parametri è possibile utilizzare metodi "classici" come ad esempio la stima di massima verosimiglianza o la stima ordinary least square.

3.3 Doppia Sigmoide: Logistic, Exponential e Hyperbolic Tangent

Il modello doppia sigmoide è un modello continuo e differenziabile che trova applicazione in diversi campi, alcuni esempi sono lo studio della transizione degli stati della Terra ([Roper 2000]) o il confronto tra i profili di fatica ottenuti nei muscoli isolati del soleo a contrazione lenta ed estensore lungo delle dita a contrazione rapida nei topi ([Cairns et al. 2008]).

In entrambi questi esempi è stato osservato come, considerati i dataset a disposizione nei due articoli, un modello a doppia sigmoide si adatta meglio ai dati rispetto ad altri modelli.

Nel caso di lapse risk, un modello a doppia sigmoide (doppia-S) – e più in generale i modelli con step intermedio, come il double linear che si vedrà in seguito – si adatta bene ai dati nel rispetto dei vincoli economici qualora sussistano le seguenti condizioni:

1. Per valori piccoli dello spread (i.e. $\Delta_{mkt,t} \approx 0$), la componente di base non viene corretta in quanto le motivazioni per cui il soggetto esercita il riscatto non sono legate ad andamenti economico-finanziari.

2. Per valori negativi dello spread (i.e. $\Delta_{mkt,t} < 0$), il tasso di riscatto ovviamente decresce. Risulta allora necessario fissare un asintoto inferiore f_{min} per limitare ovviamente l'andamento di questo fenomeno.
3. Per valori positivi dello spread (i.e. $\Delta_{mkt,t} > 0$), al contrario del caso precedente, il tasso di riscatto aumenta in virtù di maggiore "appetibilità" per i rendimenti che offre il mercato. Anche in questo caso risulta necessario fissare un asintoto superiore f_{max} per limitare il numero di polizze che vengono riscattate.

Un modello a doppia-S può essere costruito come prodotto di due logits differenti (3.10) o come somma di due diverse logits, che siano esse espresse in forma esponenziale (3.9) o di tangente iperbolica (3.11).

Nel caso logistic il numero di parametri da utilizzare è pari a 7 (e non a 8, come si potrebbe immaginare lavorando con due distinte curve): due parametri centrali, due parametri per il tasso di crescita e tre parametri, legati ai livelli inferiore – per $\Delta_{mkt,t} \rightarrow -\infty$, intermedio e superiore – per $\Delta_{mkt,t} \rightarrow +\infty$ – che vengono raggiunti dalla curva.

La curva double logistic presenta perciò una area centrale appiattita, corrispondente alla fine della prima curva e all'inizio della seconda.

Malgrado gli evidenti vantaggi di tale modello, si tenga presente che tipicamente le stime dei parametri e, in particolare, di f_{max} e f_{min} sono valutate anche sulla base del giudizio di esperti. Inoltre, a differenza del caso del modello Double Linear, i parametri della Doppia Sigmoide non sono di immediata comprensione e, per tale ragione, se ne fornirà una spiegazione più tecnica di quanto sarà fatto nel caso successivo.

Come già introdotto, e riallacciandosi a quanto osservato nella Sezione 3.2, una curva a doppia S può essere costruita in modo agevole a partire da due sigmoidi. La prima rappresentazione che si riporta deriva dalla somma di due funzioni logistiche

$$\begin{aligned} f(\Delta_{mkt,t}) &= f_{min} + \frac{f_{mid} - f_{min}}{1 + e^{-a_1 \Delta_{mkt,t} + b_1}} + \frac{f_{max} - f_{mid}}{1 + e^{-a_2 \Delta_{mkt,t} + b_2}} \\ &= f_{min} + \frac{f_{mid} - f_{min}}{1 + e^{-a_1(\Delta_{mkt,t} - c_1)}} + \frac{f_{max} - f_{mid}}{1 + e^{-a_2(\Delta_{mkt,t} - c_2)}} \end{aligned} \quad (3.9)$$

dove il nuovo parametro f_{mid} rappresenta il livello di saturazione intermedia.

Osservazione 3.3.1. In [Lipovetsky 2010] sono suggerite costruzioni più semplici per una curva a doppia S a partire dalla sigmoide logistica, nelle quali viene utilizzato un numero inferiore di parametri. Tuttavia, sebbene l'autore vada a sottolineare come siano valide per la maggior parte dei casi, in questa sede si è preferito riportare la rappresentazione più generica.

Inoltre, nel medesimo articolo viene suggerito di standardizzare i dati a disposizione per avere una stima non lineare dei parametri più precisa.

Alternativamente, in letteratura sono presenti anche altri metodi per ottenere una rappresentazione a doppia-S, ad esempio utilizzando il prodotto tra due funzioni logistiche

$$f(\Delta_{mkt,t}) = \frac{1}{f_{mid}} \cdot \left(f_{min} + \frac{f_{mid} - f_{min}}{1 + e^{-a_1 \Delta_{mkt,t} + b_1}} \right) \cdot \left(f_{mid} + \frac{f_{max} - f_{mid}}{1 + e^{-a_2 \Delta_{mkt,t} + b_2}} \right) \quad (3.10)$$

nel quale si va ad utilizzare ancora una rappresentazione esponenziale, oppure mediante una rappresentazione in tangente iperbolica

$$f(\Delta_{mkt,t}) = f_{mid} + \frac{1}{2} \left[(f_{mid} - f_{min}) \cdot \tanh\left(\frac{\Delta_{mkt,t} - \frac{b_1}{a_1}}{\omega_1}\right) + (f_{max} - f_{mid}) \cdot \tanh\left(\frac{\Delta_{mkt,t} - \frac{b_2}{a_2}}{\omega_2}\right) \right] \quad (3.11)$$

Osservazione 3.3.2. La versione simmetrica della doppia sigmoide definita nella (3.11) si ottiene quando $\omega_1 = \omega_2$.

Osservazione 3.3.3. In [Baione et al. 2018] viene mostrata una parametrizzazione diversa della (3.11)

$$f(\Delta_{mkt,t}) = \alpha + \beta \left[\tanh\left(\frac{\Delta_{mkt,t} - \gamma_1}{\omega_1}\right) \cdot d_1 + \tanh\left(\frac{\Delta_{mkt,t} - \gamma_2}{\omega_2}\right) \cdot d_2 \right] \quad d_1, d_2, \omega_1, \omega_2 > 0 \quad (3.12)$$

con

$$\alpha = \frac{f_{max} + f_{min}}{2} \quad \beta = \frac{f_{max} - f_{min}}{2(d_1 + d_2)} \quad d_1 = (f_{mid} - f_{min}) \quad d_2 = (f_{max} - f_{mid})$$

3.4 Double Linear

Se il comportamento degli assicurati dovesse essere come quello definito nella Sezione 3.3, può essere utilizzato nel mercato anche un modello più semplice da costruire, ovvero quello basato su una funzione double-linear.

Affinché il modello possa essere considerato adatto, tuttavia, devono essere rispettate le forti ipotesi economiche, introdotte nella Sezione 3.3: si può pensare di utilizzare questo modello quando, ad esempio per variazioni piccole dello spread di mercato il valore di $f(\Delta_{mkt,t})$ si attesta ad un valore intermedio f_{mid} , mentre per variazioni maggiori, negative o positive, vi sarà un decremento dei riscatti – fino ad un livello minimo – o un aumento – fino ad un livello massimo.

Per definire tale modello, si utilizzano dei parametri rispetto cui a variazioni della variabile indipendente $\Delta_{mkt,t}$, si hanno variazioni sul comportamento della variabile risposta: questi valori – per seguire la notazione adottata in [Baione et al. 2021] – saranno indicati con $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ e saranno 4 diversi valori assumibili dallo spread di mercato, per i quali si ha $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \beta_4$.

$$f(\Delta_{mkt,t}) = \begin{cases} \max\left(\frac{\Delta_{mkt,t} - \beta_2}{\beta_1 - \beta_2} \cdot f_{min}; f_{min}\right) & \Delta_{mkt,t} < \beta_2 \\ f_{mid} & \Delta_{mkt,t} \in [\beta_2, \beta_3] \\ \min\left(\frac{\Delta_{mkt,t} - \beta_3}{\beta_4 - \beta_3} \cdot f_{max}; f_{max}\right) & \Delta_{mkt,t} > \beta_3 \end{cases} \quad (3.13)$$

Graficamente, questa funzione $\mathcal{R} \rightarrow [f_{min}, f_{max}]$ è una funzione continua che presenta un andamento costante fino al punto β_1 , dove cresce con la pendenza $\frac{1}{\beta_1 - \beta_2}$, poi nuovamente costante a livello f_{mid} nell'intervallo $[\beta_2, \beta_3]$, nuovamente crescente con pendenza $\frac{1}{\beta_4 - \beta_3}$ fino a β_4 per poi stabilizzarsi sul livello f_{max} .

Il principale svantaggio di questo modello è la non derivabilità nei punti in cui

cambia la pendenza, mentre nei restanti punti la curva è sempre non decrescente e perciò si ha una derivata maggiore o uguale a 0. La non derivabilità dell'intera curva, comporta difficoltà nella stima dei parametri e nel calcolo dell'incertezza relativa a questi e perciò, considerati questi problemi, vengono tipicamente adottati metodi metaeuristici e dispendiosi in termini di tempo: tra questi metodi, ampiamente diffuso è l'algoritmo Differential Evolution (DE) spiegato in AppendiceA.2. Inoltre, si sottolinea come anche in questo caso la stima ottenuta dei parametri deve essere giudicata da esperti.

3.5 Copula Regression

Per studiare il fenomeno di interesse può essere utilizzato un qualsiasi strumento che fornisca una relazione causa-effetto, tuttavia l'utilizzo di funzioni di regressione copula per la modellizzazione del comportamento dinamico dei riscatti – almeno sulla base della mia conoscenza – non trova riscontro nella letteratura e nella pratica e perciò la presente analisi vuole mostrare la possibilità di un suo utilizzo in questo contesto: ovviamente, come ogni modello esso non sarà il migliore in ogni caso, in alcune circostanze sarà preferibile ad altri, mentre in altre saranno preferibili altri modelli.

Visto il ridotto utilizzo di tale approccio in generale, si è scelto di dedicare la AppendiceD per descrivere le principali caratteristiche e alcune proprietà di tale strumento, in modo da facilitarne la comprensione.

Nello svolgere una analisi sulla forma funzionale che lega una variabile dipendente e una risposta, può interessare sia il comportamento marginale delle variabili, che la loro dinamica congiunta ed è in questi casi che vengono utilizzate le copule.

Uno dei principali vantaggi attribuiti ai modelli di regressione copula bivariata è che si assumono risposte indipendenti a framework più generali, dunque in questo approccio la specificazione del modello di regressione è separato da quella che è la struttura di dipendenza tra le variabili.

Nel caso in esame si osserva come la variabile $f(\Delta_{mkt,t})$ e $\Delta_{mkt,t}$ si influenzano, tenendo in considerazione la dinamica congiunta.

Si sottolinea come, delle famiglie di copule presentate in AppendiceD, si è scelto di procedere lavorando sulla regressione per la famiglia di copule Frank: questa decisione nasce dalla sua minore trattazione in letteratura, nonché dal fatto che la regressione con questa famiglia è non lineare².

3.5.1 Introduzione alla Copula Regression

Per lo scopo prefissato occorre poi definire la funzione di regressione copula e, poiché ciò che interessa è l'analisi tra due variabili, è possibile riprendere la definizione data in [Sungur 2005] operando una semplice modifica della notazione per evitare di generare confusione.

²Questi dettagli saranno meglio spiegati in seguito.

Definizione 3.5.1. Sia (U, V) una variabile aleatoria bivariata con distribuzioni marginali uniformi in $[0,1]$ e copula C . La funzione copula regression di V rispetto ad U sarà definita come

$$\tau_C(u) = \mathbf{E}_C[V|U = u]$$

Osservazione 3.5.1. Si sottolinea la differenza grafica tra r_t che indica la frequenza di riscatto al tempo t e $\tau_C(u)$.

Ora, date $f(\Delta_{mkt,t})$ e $\Delta_{mkt,t}$ con distribuzioni continue G_0 e G_1 – come osservato in Appendice, rispettivamente una Weibull e una Gaussiana –, distribuzione congiunta H e copula C allora si ha

(i) La distribuzione condizionata di V , dato U è

$$C_u(v) = P[V \leq v|U = u] = \frac{\partial C(u, v)}{\partial u} \quad (3.14)$$

(ii) La funzione di regressione copula di V rispetto ad U si calcola come

$$\tau_C(u) = \mathbf{E}_C[V|U = u] = 1 - \int_0^1 C_u(v)dv \quad (3.15)$$

Ovviamente, a partire da questi risultati è poi possibile risalire ai medesimi, ma rispetto alle distribuzioni originarie delle variabili di interesse, ottenendo

(i) La distribuzione condizionata di $f(\Delta_{mkt,t})$, dato $\Delta_{mkt,t}$

$$\begin{aligned} P[f(\Delta_{mkt,t}) \leq y|\Delta_{mkt,t} = x] &= P[V \leq G_0(y)|U = G_1(x)] \\ &= \frac{\partial C(u, v)}{\partial u} \Big|_{u=G_1(x), v=G_0(y)} \\ &= C_u(v) \Big|_{u=G_1(x), v=G_0(y)} \end{aligned} \quad (3.16)$$

(ii) La funzione di regressione di $f(\Delta_{mkt,t})$ rispetto a $\Delta_{mkt,t}$

$$\begin{aligned} \hat{f}(\Delta_{mkt,t}) &= \mathbf{E}[f(\Delta_{mkt,t})|\Delta_{mkt,t} = x] = G_0^{-1} \left(1 - \int_0^1 C_u(v)dv \Big|_{u=G_1(x)} \right) \\ &= G_0^{-1}(\tau_C(G_1(x))) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Si riportano ora alcune proprietà della funzione copula regression, le cui dimostrazioni possono essere trovate in [Sungur 2005]

(i) Data una copula bidimensionale indipendente $C^0(u, v)$, corrispondente alla funzione di ripartizione di due variabili indipendenti e uniformi in $[0,1]$

$$C^0(u, v) = uv \implies \tau_0(u) = \frac{1}{2}$$

(ii) Data una situazione di perfetta dipendenza positiva, è possibile utilizzare la copula comonotonica $C^+(u, v)$ per cui

$$C^+(u, v) = \min(u, v) \implies \tau_+(u) = u$$

- (iii) Data una situazione di perfetta dipendenza negativa, è possibile utilizzare la copula contro-monotonica $C^-(u, v)$ per cui

$$C^-(u, v) = \max(u + v - 1, 0) \implies \tau_-(u) = 1 - u$$

- (iv) Definendo $C_{u_0}^{(l)}(v) = \frac{\partial^l C_u(v)}{\partial u^l} \Big|_{u=u_0}$ e u_s un punto interno all'intervallo che lega u e u_0

$$\tau_C(u) = \mathbf{E}_C[V|U = u] = 1 - \int_0^1 [C_{u_0}(v) + \sum_{l=1}^{n-1} \frac{C_{u_0}^{(l)}(v)}{l!} (u-u_0)^l + \frac{C_{u_s}^{(n)}(v)}{n!} (u-u_s)^n] dv$$

- (v)

$$\tau_C(u) = \mathbf{E}_C[V|U = u] \geq s(1 - C_u(s)) \quad \forall s \in (0, 1)$$

- (vi)

$$\mathbf{E}[V] = \int_0^1 \mathbf{E}_C[V|U = u] du = \int_0^1 \tau_C(u) du = \frac{1}{2}$$

- (vii) Denotando con ρ_C il coefficiente di correlazione di Pearson

$$\rho_C = 3 \left\{ 1 - 4 \int_0^1 \left[\int_0^u \tau_C(w) dw \right] du \right\}$$

3.5.2 Funzione copula regression lineare

L'insieme delle funzioni di regressione copula lineari ξ_L , è definito come

$$\xi_L = \left\{ C : 1 - \int_0^1 \frac{\partial C(v, u)}{\partial u} dv = \alpha + \beta u \right\} \quad (3.18)$$

Invertendo l'integrale definito con la derivata, spostando l'1 dall'altro lato dell'uguaglianza e integrando ambo i lati rispetto ad u si ottiene

$$\begin{aligned} 1 - \int_0^1 \frac{\partial C(u, v)}{\partial u} dv &= \alpha + \beta u \\ \frac{\partial}{\partial u} \int_0^1 C(u, v) du &= 1 - \alpha - \beta u \\ \int_0^1 C(u, v) du &= (1 - \alpha)u - \beta \frac{u^2}{2} + k \end{aligned}$$

e per determinare la costante di integrazione k si utilizza la condizione iniziale $C(1, v) = v$

$$\int_0^1 C(1, v) dv = \int_0^1 v dv = \frac{1}{2}$$

di conseguenza in $u = 1$ si deve avere

$$\frac{1}{2} = (1 - \alpha) \cdot 1 - \beta \frac{1}{2} + k \implies k = \frac{1}{2} - (1 - \alpha) + \frac{\beta}{2}$$

E' possibile inoltre definire una relazione tra α e β , infatti, utilizzando la proprietà $\mathbf{E}[V] = \frac{1}{2}$

$$\int_0^1 \left[1 - \int_0^1 C_u(v) dv \right] du = \frac{1}{2} \implies \int_0^1 \int_0^1 C_u(v) dv du = \frac{1}{2}$$

Utilizzando i risultati ottenuti in precedenza

$$\int_0^1 (1 - \alpha - \beta u) du = \frac{1}{2} \implies \beta = 1 - 2\alpha$$

e perciò, per le funzioni copula regression lineari, si ottiene il seguente risultato

$$\int_0^1 C(u, v) = (1 - \alpha)u - (1 - 2\alpha)\frac{u^2}{2} \quad (3.19)$$

e si può affermare che una copula presenta una funzione di regressione lineare se e solo se

$$\mathbf{E}_C[V|U = u] = \tau_C(u) = \alpha + (1 - 2\alpha)u \quad (3.20)$$

o, alternativamente scrivendo $\alpha = \frac{1-\beta}{2}$

$$\mathbf{E}_C[V|U = u] = \tau_C(u) = \frac{1-\beta}{2} + \beta u$$

Ultimo, ma non meno importante, fatto statistico da considerare è che nelle funzioni di copula regression lineari i coefficienti sono collegati alla correlazione

$$C \in \xi_L \implies \rho_C = 1 - 2\alpha$$

$$C \in \xi_L \implies \tau_C(u) = \frac{1-\rho_C}{2} + \rho_C u$$

Di conseguenza si avrà

$$\tau_C(0) = \frac{1-\rho_C}{2} \quad \tau_C\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad \tau_C(1) = \frac{1+\rho_C}{2}$$

Supponendo di voler predire il valore di V , dato $U = u$, come spiegato in [Sungur 2005], la scelta ottimale sarebbe procedere come per i modelli fino ad ora introdotti, ovvero utilizzando la $f_{CR}(u)$ che minimizza la RSS o, analogamente, il MSE ($MSE = \mathbf{E}[V - g(U)]^2$), ma in questo modo si ha la limitazione di dover conoscere C . Nel caso di funzione copula regression di tipo lineare, in virtù delle considerazioni precedenti, questo problema può essere risolto, o quantomeno ridotto, limitandosi all'utilizzo della correlazione di Pearson, la quale è facilmente stimabile a partire dai dati.

Esempio 3.5.1. FGM

In [Sungur 2005], sono riportati alcuni risultati per una copula appartenente alla famiglia Farlie-Gumbel-Morgenstern, infatti la correlazione di Pearson corrisponde a $\rho_C = \frac{\theta}{3}$ e la funzione copula regression, in forma esplicita e in termini dell'intercetta di regressione ($\beta_0 = \alpha$) può essere scritta come

$$\begin{aligned} f_{CR}(u) &= \frac{3-\theta}{6} + \frac{\theta}{3}u \\ &= \beta_0 + (1 - 2\beta_0)u \end{aligned} \quad (3.21)$$

dove $\beta_0 = \frac{3-\theta}{6}$.

3.5.3 Funzione copula regression non lineare

Nel caso di funzioni di regressioni copula non lineari la situazione si complica leggermente rispetto al caso precedente e si decide perciò di riportare un esempio

Esempio 3.5.2. Una famiglia famosa di funzioni copula regression non lineari è la famiglia Rodriguez-Lallena&Ubena-Flores, dove si ha

$$C(v, u) = vu + f_1(u)f_0(v) \quad (3.22)$$

con le seguenti proprietà

1. $f_1(0) = f_1(1) = f_0(0) = f_0(1) = 0$
2. h e g sono due funzioni assolutamente continue
3. $\min[\alpha\delta, \beta\gamma] \geq 1$

con

$$\begin{aligned} \alpha &= \inf\{f'(u) : u \in A\} < 0 & \beta &= \sup\{f'(u) : u \in A\} > 0 \\ \gamma &= \inf\{g'(v) : v \in B\} < 0 & \delta &= \sup\{g'(v) : v \in B\} > 0 \\ A &= \{u \in [0, 1] : h'(u) \text{ esiste}\} & B &= \{v \in [0, 1] : g'(v) \text{ esiste}\} \end{aligned}$$

Per questa famiglia si ha

$$\tau_C = \frac{1}{2} - f'_1(u) \int_0^1 f_0(v) dv \quad (3.23)$$

$$\rho_C = 12 \int_0^1 f_1(u) du \int_0^1 f_0(v) dv \quad (3.24)$$

$$C_{u_0}^{(l)}(v) = \frac{\partial^l C_u(v)}{\partial u^l} \Big|_{u=u_0}$$

Un risultato importante da citare è stato raggiunto in [Cuadras 1992], che ha spiegato come linearizzare la funzione di regressione di una variabile aleatoria bivariata utilizzando trasformazioni separate di ciascuna variabile. Questo risultato è stato poi utilizzato in [Sungur 2005] ottenendo una approssimazione lineare della funzione di regressione copula

$$\tau_C(u) \approx 1 - \int_0^1 C_{u_0}(v) dv + u_0 \int_0^1 C_{u_0}^{(1)}(v) dv - u \int_0^1 C_{u_0}^{(1)}(v) dv \quad (3.25)$$

Esempio 3.5.3. Nel caso di famiglia Rodriguez-Lallena&Ubena-Flores, la (3.25) diventa

$$\tau_C(u) \approx \left[\frac{1}{2} - (f'_1(u_0) - u_0 h''(u_0)) \int_0^1 f_0(v) dv \right] + \left[-f''_1(u_0) \int_0^1 f_0(v) dv \right] u \quad (3.26)$$

3.5.4 Un approccio alternativo per la determinazione dei valori

La media condizionata di $f(\Delta_{mkt,t})$ dato $\Delta_{mkt,t}$, seguendo [Noh, El Ghouh & Bouezmarni 2013], può essere effettuata utilizzando le densità. A partire dai risultati già osservati, è infatti possibile calcolare la densità condizionata di $f(\Delta_{mkt,t})$ dato $\Delta_{mkt,t}$ come

$$g_0(f(\Delta_{mkt,t})|\Delta_{mkt,t} = x) = g_0(y) \frac{c(G_0(y), G_1(x))}{c_{\Delta_{mkt,t}}(G_1(x))} = g_0(y) \frac{c(u, v)}{c_{\Delta_{mkt,t}}(u)} \quad (3.27)$$

con

$$c_{\Delta_{mkt,t}}(u) = \frac{\partial C(u, 1)}{\partial u}$$

che rappresenta la densità di copula della variabile $\Delta_{mkt,t}$, che nel caso bivariato, poiché si ha $C(u, 1) = u$

$$C(u, 1) = u \implies \frac{\partial C(u, 1)}{\partial u} = \frac{u}{\partial u} = 1$$

A partire da queste grandezze, il valore medio condizionato di $f(\Delta_{mkt,t})$ dato $\Delta_{mkt,t}$ è calcolato come il rapporto tra un numeratore che cattura la dipendenza media tra $f(\Delta_{mkt,t})$ e $\Delta_{mkt,t}$ – tipicamente ipotizzando indipendenza tra le covariate, ma in questo caso è una sola – e un denominatore – che tipicamente dovrebbero catturare la dipendenza interna tra le X, ma che, come già visto, nel caso in esame è uguale a 1.

$$\begin{aligned} \hat{f}(\Delta_{mkt,t}) &= \mathbf{E}[f(\Delta_{mkt,t})|\Delta_{mkt,t} = x] = \\ &= \mathbf{E} \left[f(\Delta_{mkt,t}) \frac{c(u, v)}{c_{\Delta_{mkt,t}}(u)} \right] = \\ &= \frac{\int_0^1 G_0^{-1}(v) c(u, v) dv}{c_{\Delta_{mkt,t}}(u)} = \int_0^1 G_0^{-1}(v) c(u, v) dv \end{aligned} \quad (3.28)$$

Si ha perciò che, date le distribuzioni marginali, si può ottenere la funzione di regressione media di $f(\Delta_{mkt,t})$ su $\Delta_{mkt,t}$ direttamente dalla densità della copula.

Osservazione 3.5.2. Si osservi che, nel caso generale, la media condizionata è, banalmente, una media pesata con pesi $\omega(u_0, \mathbf{u}) = \frac{c(u_0, \mathbf{u})}{c_X(\mathbf{u})}$

Esempio 3.5.4. FGM

Se la copula appartiene alla famiglia Farlie-Gumbel-Morgenstern, allora

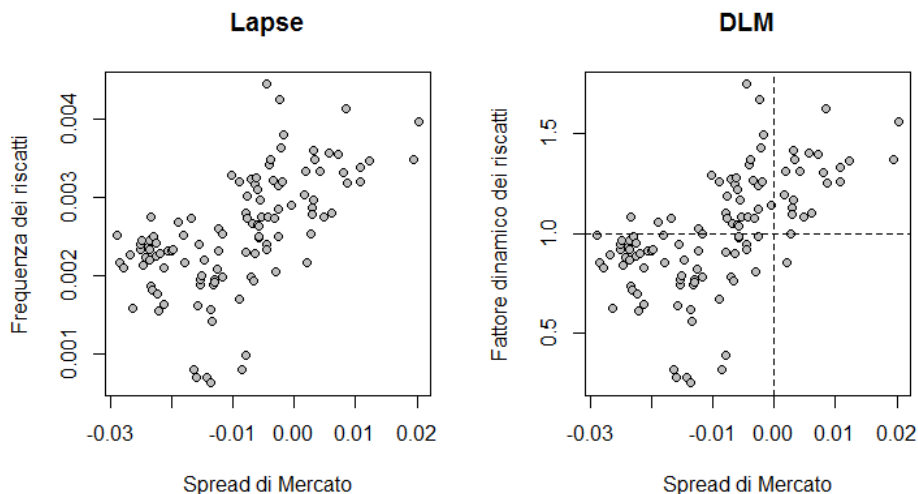
$$\hat{f}(\Delta_{mkt,t}) = \mathbf{E}[f(\Delta_{mkt,t})] + \theta(2G_1(x) - 1) \int G_0(y)(1 - G_0(y)) dy$$

Sebbene vi sia anche questa strada alternativa, nel Paragrafo 4.1.3, si utilizzerà l'approccio mediante copula condizionata.

Capitolo 4

Applicazioni

Si osserva ora una applicazione pratica, per la quale si considera un dataset con il quale è possibile studiare il Dynamic PolicyHolder Behavior (DPHB) e vedere quale dei modelli precedentemente definiti meglio si adatta ai dati a disposizione¹. Il dataset a disposizione² presenta dati di una impresa assicurativa italiana. Esso è costituito da 2 colonne, una indicante il valore dello spread osservato e l'altra il corrispondente tasso di riscatto, e da 114 righe, ovvero i 114 periodi in cui sono stati osservati tali valori, ordinati per il valore assunto dallo spread. Come già spiegato in precedenza, in questa sede con spread si intende la differenza presente tra il rendimento benchmark di un titolo di mercato e il rendimento presente nella tipologia contrattuale che si sta analizzando.



Si specifica che nella costruzione di un modello dei tassi di riscatto, il dato grezzo da cui partire è l'evoluzione di questo tasso nel tempo. Grazie a questa informazione, è infatti possibile selezionare il benchmark di mercato più adatto, confrontando la dinamica del riscatto con gli andamenti di diversi indici del mercato, studiandone

¹Si tenga presente che a seconda del dataset un modello sarà preferito ad un altro, non vi è un unico modello sempre valido: si assume perciò che tutte le osservazioni che verranno effettuate lo saranno limitatamente ai dati osservati.

²Si ringrazia il Professore Fabio Baione per la disponibilità nel fornire il dataset.

le dipendenze e prendendo il migliore, i.e quello con una maggiore dipendenza³. Tuttavia, il dataset a disposizione per la presente analisi era già lavorato e perciò, non avendo una serie storica per muoversi in tale direzione, è stato considerato lo spread già presente.

Nel caso in esame, il confronto appena definito avviene con una cadenza mensile e riguarda il rendimento di una gestione separata e il rendimento di un BTP decennale nel periodo Gennaio 2010 - Giugno 2019.

Per quanto concerne la componente r_t^{Base} , non avendo informazioni riguardo gli altri fattori utili per il suo calcolo, si andrà ad ipotizzare che per descrivere la componente statica si possa utilizzare la media dei valori del tasso di riscatto, ovvero 0.25388%.

Perciò si assume

$$r_t^{Base} = 0.25388\% \approx 0.254\%$$

Come già spiegato brevemente nel Capitolo1, in virtù del dataset a disposizione, l'utilizzo di modelli GLM non consentirebbe di studiare il legame che si ha tra più variabili e come queste cambiano insieme, grande vantaggio di questa metodologia, rendendoli dei modelli di regressione univariata e non lineare, come lo sono anche altri. Per tale ragione, nell'effettuare questo tipo di analisi verranno considerati esclusivamente i modelli two-stage, legati alla componente dinamica (di mercato) e presentati nel Capitolo3, tuttavia si precisa che un confronto utilizzando regressioni GLM univariate può essere effettuato, sebbene a quel punto siano largamente preferiti altri modelli.

Osservazione 4.0.1. Sebbene dipenda dalla calibrazione, gli spread su cui si applicano i modelli tipicamente sono calcolati a partire dai rendimenti espressi su base annua: ciò deriva semplicemente dalla convenzione adottata che vede l'anno come periodo temporale di riferimento.

Nel rispetto della lettera [IVASS: Lettera al mercato 05/06/2018], nuovamente si sottolinea che nel dataset che si andrà ad utilizzare si assumerà già svolta la suddivisione in HRG anche per la componente dinamica, come se si stesse lavorando su un determinato dataset di soggetti che reagiscono allo stesso modo davanti al rischio.

4.1 La calibrazione

La calibrazione è la procedura con la quale, a partire da un dataset di valori osservati, si ricavano i parametri di un modello. In questa fase, dunque, ciò che si va a fare è stimare i parametri Real World per il tasso di riscatto a partire dalle osservazioni.

In generale, la soluzione del problema di calibrazione non è unica ma dipende dal metodo utilizzato che, nel caso in esame, va ad utilizzare la minimizzazione di una funzione obiettivo. In una calibrazione tramite funzione obiettivo, la selezione

³Ad esempio, in [Baione et al. 2021] viene utilizzata la 10 years maturity Italian Treasury Bullet Bond "BTP" yield to maturity perché, dai test condotti, risulta che questo indice presentava una maggiore dipendenza – misurata tramite l'indice di Kendall-Tau – con i tassi di riscatto osservati.

dei parametri avviene minimizzando una misura dell'errore, ovvero la distanza tra i fattori di aggiustamento stimati dal modello e quelli osservati nella realtà.

Sebbene poi saranno osservate anche altre misure per la bontà di adattamento, in questa sede si è scelto di stimare i parametri mediante la minimizzazione della somma dei residui al quadrato (Residual Sum of Squares, RSS)

$$\min_{\beta \in B} \sum_i (y_i - f(x_i; \beta))^2 = \min_{\beta \in B} \sum_i (res_i(\beta))^2$$

dove y_i è il valore osservato per l' i -esimo fattore moltiplicativo, $f(x_i; \beta)$ è il valore stimato con il set di parametri β e $B \subseteq \mathbb{R}^k$ è il dominio di ammissibilità per i k parametri del modello.

La stima avviene ricercando il minimo con algoritmi numerici, come i metodi riportati nei prossimi paragrafi, basati su iterazioni che, a partire o meno da un set di approssimazioni iniziali dei parametri, mirano ad ottenere la convergenza tra il valore stimato e quello osservato: ovviamente le stime ottenute sono solo un'approssimazione dei valori reali, ma saranno considerate più che valide per il tipo di analisi che si intende condurre.

Di seguito si riportano due dei principali algoritmi e metodi utilizzati per questo tipo di analisi e nel descriverli sarà adottata, per una maggiore semplicità, la seguente notazione:

$$f = f(\beta) = f(\Delta_{mkt,t}; \beta) \quad \beta = \{\beta_1, \beta_2, \dots\} = \text{Set dei parametri} \quad z^{(j)} = \text{Punto di } \mathbb{R}^k$$

ovviamente questi non sono gli unici metodi, altri vengono descritti sinteticamente in AppendiceA.2.

Inoltre, è riportato anche un sintetico approfondimento sulla calibrazione nel caso di modello copula regression.

4.1.1 Metodo di Gauss-Newton

Celeberrimo algoritmo utilizzato nel campo dei minimi quadrati non lineari, l'algoritmo di Gauss-Newton iterativamente cerca i valori dei parametri minimizzando la somma dei residui al quadrato precedentemente definita.

Assunzione necessaria, da svolgere prima di procedere, è che il numero di osservazioni sia maggiore del numero dei parametri da stimare: ciò risulta fondamentale affinché la matrice Jacobiana dei residui \mathbf{J}_{res}

$$\mathbf{J}_{res} = \begin{bmatrix} \frac{\partial res_1}{\partial \beta_1} & \frac{\partial res_1}{\partial \beta_2} & \dots & \frac{\partial res_1}{\partial \beta_{tot}} \\ \frac{\partial res_2}{\partial \beta_1} & \frac{\partial res_2}{\partial \beta_2} & \dots & \frac{\partial res_2}{\partial \beta_{tot}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial res_n}{\partial \beta_1} & \frac{\partial res_n}{\partial \beta_2} & \dots & \frac{\partial res_n}{\partial \beta_{tot}} \end{bmatrix}, \text{ con } \frac{\partial res_i}{\partial \beta_j} = \frac{\partial res_i(\beta^{(k)})}{\partial \beta_j}$$

possa essere tale per cui $\mathbf{J}_{res}^T \mathbf{J}_{res}$ sia invertibile e la soluzione sia unica.

Indicando con $res(\beta^{(k)})$ il vettore dei residui quando i parametri sono quelli della k -esima iterazione, si ha

$$\beta^{(k+1)} = \beta^{(k)} + (\mathbf{J}_{res}^T \mathbf{J}_{res})^{-1} \mathbf{J}_{res}^T res(\beta^{(k)})$$

4.1.2 Metodo della discesa del gradiente

Come noto, il gradiente è una funzione a valore vettoriale che descrive la pendenza della tangente alla curva di una funzione, ovvero rappresenta una derivata che indica l'inclinazione della funzione di costo.

Il gradiente, quindi è il vettore composto dalle derivate parziali della funzione rispetto ad una serie di incognite, che nel caso in esame sono i k parametri:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \beta_1} \\ \frac{\partial f}{\partial \beta_2} \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial \beta_k} \end{bmatrix}$$

Si osservi che ciascuna componente indica qual è la direzione della pendenza maggiore per ciascuna delle variabili della funzione e perciò, nel suo complesso, il gradiente si muove nella direzione in cui la funzione aumenta maggiormente. Di conseguenza, la direzione di massima discesa in un determinato punto è determinata dall'opposto del gradiente in quel punto ($-\nabla f(z^{(j)})$).

Per poter minimizzare la f , in questo algoritmo si ha bisogno di specificare (come input, se non già presente di default) il tasso di apprendimento (in inglese: learning rate) o passo di discesa, denotato con d_j : un basso tasso di apprendimento consente di spostarsi nella direzione del gradiente negativo in quanto viene ricalcolato con frequenza maggiore, tuttavia, questa maggiore precisione avrà un costo in termini di tempo computazionale.

L'algoritmo di discesa gradiente moltiplica il gradiente ∇f per la velocità di apprendimento in modo da determinare il punto successivo nello spazio k -dimensionale dei parametri, muovendosi, come già detto, nella direzione opposta al gradiente e aggiornando così i valori dei parametri

$$z^{(j+1)} = z^{(j)} - \nabla f(z^{(j)}) \cdot d_j$$

Quanto spiegato, viene ripetuto fino a che la funzione costo "si stabilizza" in un punto dello spazio dei parametri, le cui coordinate corrispondono ai valori migliori che possono assumere i parametri.

4.1.3 Breve approfondimento sulla calibrazione della copula regression

A partire dalla generica forma (3.28), per poter ottenere $\hat{f}(\Delta_{mkt,t})$ tramite densità, bisogna trovare degli stimatori per G_0 , G_1 e $c(u, v)$ ⁴, che definiremo \hat{G}_0 , \hat{G}_1 e $\hat{c}(u, v)$.

La stima sarà allora

$$\begin{aligned} \hat{f}(\Delta_{mkt,t}) &= \int_0^1 y \cdot \hat{c}(\hat{u}, \hat{v}) d\hat{v} = \int_0^\infty y \cdot \hat{c}(\hat{G}_1(x), \hat{G}_0(y)) d\hat{G}_0(y) \\ &= \int_0^\infty \hat{G}_0^{-1}(\hat{G}_0(y)) \cdot \hat{c}(\hat{G}_1(x), \hat{G}_0(y)) d\hat{G}_0(y) \\ &= \int_0^1 \hat{G}_0^{-1}(\hat{v}) \cdot \hat{c}(\hat{u}, \hat{v}) d\hat{v} \end{aligned} \quad (4.1)$$

⁴Nel caso più generale, lo stimatore da definire è $\hat{\omega}(u_0, \mathbf{u}) = \frac{\hat{c}(u_0, \mathbf{u})}{\hat{c}_X(\mathbf{u})}$

dove l'ultimo passaggio è giustificato dalla monotonicità della funzione di ripartizione.

Tuttavia, come già precedentemente spiegato, ci si concentrerà sulla copula condizionata (3.14), che nel caso della famiglia Frank è definita come

$$C_u(v) = \frac{(1 - e^{-\theta u})e^{-\theta v}}{-(1 - e^{-\theta u})(1 - e^{-\theta v}) - e^{-\theta} + 1} \quad (4.2)$$

e, ricordando che,

$$\hat{f}(\Delta_{mkt,t}) = G_0^{-1} \left(1 - \int_0^1 C_u(v) dv \Big|_{u=G_1(x)} \right)$$

è possibile ottenere una stima mediante semplici passaggi

1. Poiché si ha $v \sim Unif[0, 1]$ e u è fissato per ogni stima, è possibile utilizzare la simulazione Monte Carlo per risolvere l'integrale

$$\int_0^1 C_u(v) dv \Big|_{u=G_1(x)} = \mathbf{E}^{Unif}[C_u(v)] \quad (4.3)$$

infatti lo stimatore è

$$\hat{\mathbf{E}}_u^N = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N C_u(v_j) \quad (4.4)$$

2. L'argomento di G_0^{-1} , per ogni u , viene semplicemente calcolato come $1 - \hat{\mathbf{E}}_u^N$
3. Si calcola G_0^{-1} , dove, essendo G_0 la funzione di ripartizione di una Weibull con parametro di scala λ e parametro di forma κ , si ha

$$G_0(y) = 1 - e^{-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^\kappa} \quad G_0^{-1}(v) = \lambda \left[\ln \left(\frac{1}{1-v} \right) \right]^{\frac{1}{\kappa}}$$

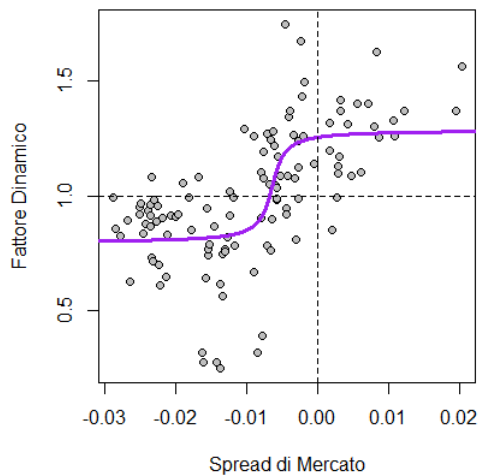
4.2 Risultati della calibrazione

Per calibrare i modelli è stato utilizzato il linguaggio di programmazione, nonché ambiente di sviluppo, R (Versione 4.1.1). Gli script contenenti i codici, la spiegazione delle funzioni usate per la calibrazione e dei metodi su cui queste si basano sono riportati in AppendiceA

4.2.1 Modello Arctangent

Come noto, l'arcotangente è una funzione definita sull'insieme dei numeri reali per cui $\mathcal{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Si può osservare, in virtù del valore assunto dal pvalue del t-test, la grande significatività dei parametri a e b , mentre i parametri c e d seppur utili hanno una significatività minore. Ciò, probabilmente, è dovuto al fatto che la funzione è limitata e perciò si ottengono valori dei p-value alti per i coefficienti che vengono utilizzati all'interno di *arctan* – perché le grandi variazioni sono effettuate dagli altri parametri.

Questa curva, riportata sul grafico precedente, mostra il seguente andamento
Modello Arc tangente



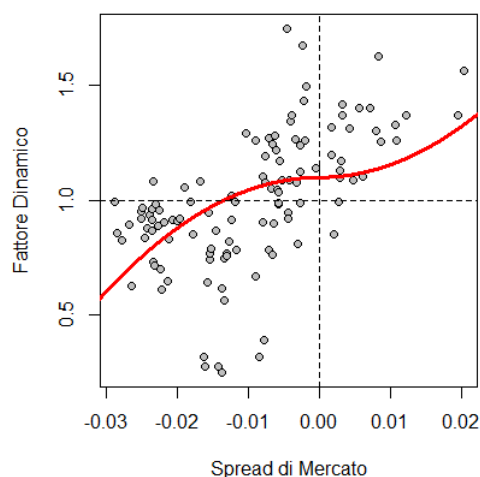
<i>Parametro</i>	<i>Valore stimato</i>	<i>Pvalue</i>
<i>a</i>	1.0418	0
<i>b</i>	0.156665	$5.366e^{-10}$
<i>c</i>	751.648	0.1854
<i>d</i>	-4.79214	0.1917

L'andamento della curva è a S, con il flesso prima del valore $\Delta_{mkt,t} = 0$ e un valore che si stabilizza ad un livello nettamente superiore a 1 ancor prima che si annulli il livello dello spread. L'asimmetria tra variazioni positive e negative dello spread è evidente: per valori negativi di questo si ha un piccolo margine di stabilità e poi una riduzione importante del fattore dinamico, il che implica una forte contrazione del tasso di riscatto, mentre per valori positivi, indipendentemente dalla loro entità, si ha un valore stabile del fattore dinamico che aumenta il tasso dei riscatti.

4.2.2 Modello Parabolico

Il modello parabolico si presenta come una funzione continua e crescente, i cui parametri, a seguito del t-test, sono risultati entrambi significativi. E' curioso notare che l'andamento di questa funzione è differente da quello proposto dagli altri modelli che saranno osservati, infatti

Modello Parabolico



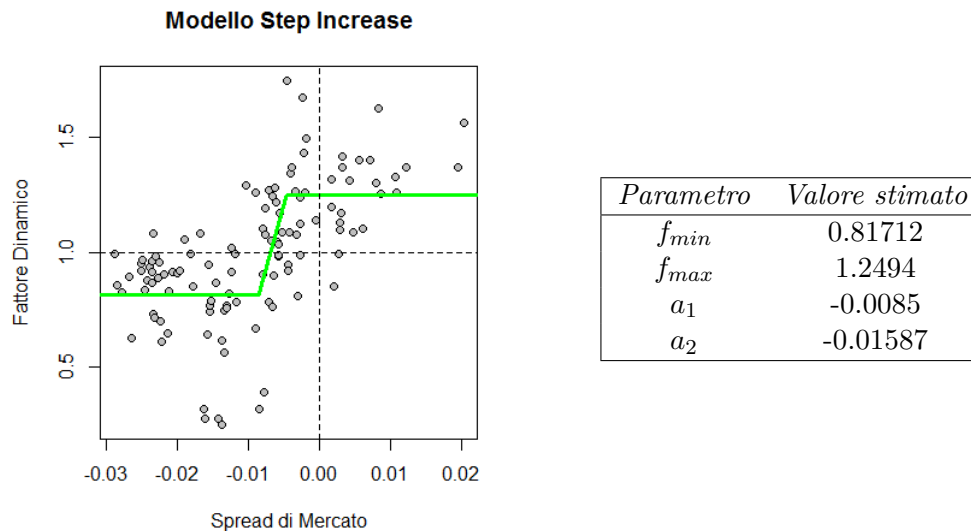
<i>Parametro</i>	<i>Valore stimato</i>	<i>Pvalue</i>
<i>a</i>	1.10	$<2e^{-16}$
<i>b</i>	553.94	$8e^{-08}$

è possibile osservare che tra tutti i modelli è l'unico a non avere un andamento ad S o doppia S – che siano queste S continue o spezzate.

In questo caso, si ottiene una simmetria attorno a valori nulli dello spread, ma nuovamente per variazioni piccole si ha un fattore dinamico non propriamente razionale, con valori che si aggirano poco sopra l'1.

4.2.3 Modello Step Increase

Nel modello Step Increase, a causa della procedura stocastica che è stata utilizzata, non si hanno valori dei pvalue da riportare e perciò non è stato possibile svolgere commenti sulla significatività dei coefficienti. Tuttavia, questo è il primo dei due modelli spezzati che si incontrano ed è interessante osservarlo graficamente

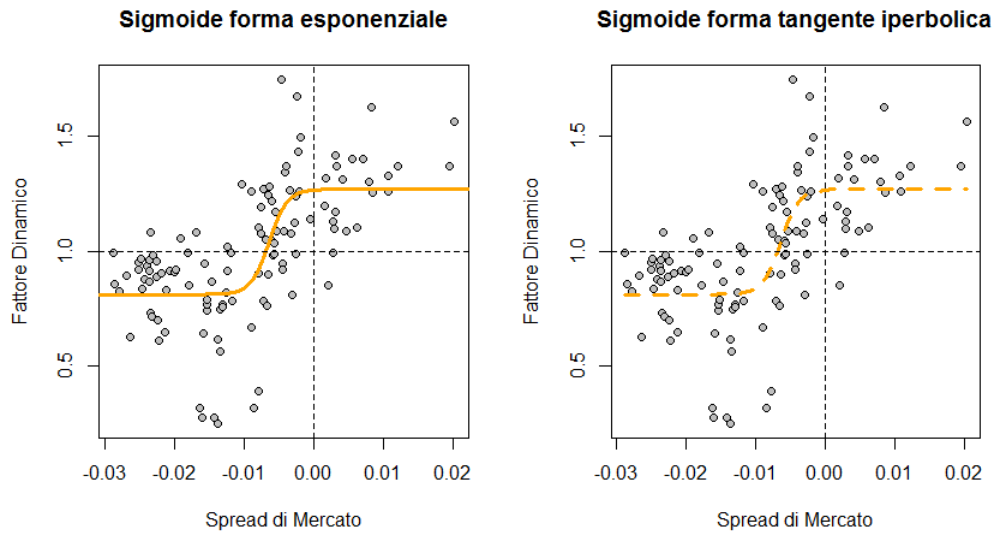


I valori dei parametri in cui cambia l'andamento del modello sono entrambi antecedenti al valore nullo dello spread – -0.01587 e -0.0085 – intorno al quale comunque la curva si stabilizza su un valore del fattore dinamico abbastanza elevato ($f_{max} \approx 1.25$). Come nel modello arcotangente, anche qui risulta evidente l'asimmetria per valori positivi e negativi dello spread, infatti

- (i) valori negativi: rapida decrescita del fattore dinamico che si stabilizza a circa 0.817 per spread inferiori a -0.01587
- (ii) valori positivi: si ha una stabilità su un livello poco inferiore a 1.25 della componente dinamica

4.2.4 Modello Sigmoidale (S-Shaped)

Del modello sigmoide sono state riportate diverse rappresentazioni analitiche, che come già spiegato sono tra loro collegate e riconducibili allo stesso modello. Utilizzando i valori calibrati sul dataset, si può osservare come i due modelli presentano il medesimo andamento e, perciò, si ha anche una conferma grafica che le due rappresentazioni della sigmoide conducono allo stesso risultato: il perché si passa da una rappresentazione ad un'altra può essere legato a motivi computazionali o, ancora più semplicemente, estetici.



Parametro	Valore stimato	Pvalue
f_{min}	0.81279	$<2e^{-16}$
f_{max}	1.27031	$<2e^{-16}$
a	764.85944	0.063
c	-0.00635	$4e^{-15}$
ω	0.002615	0.06274

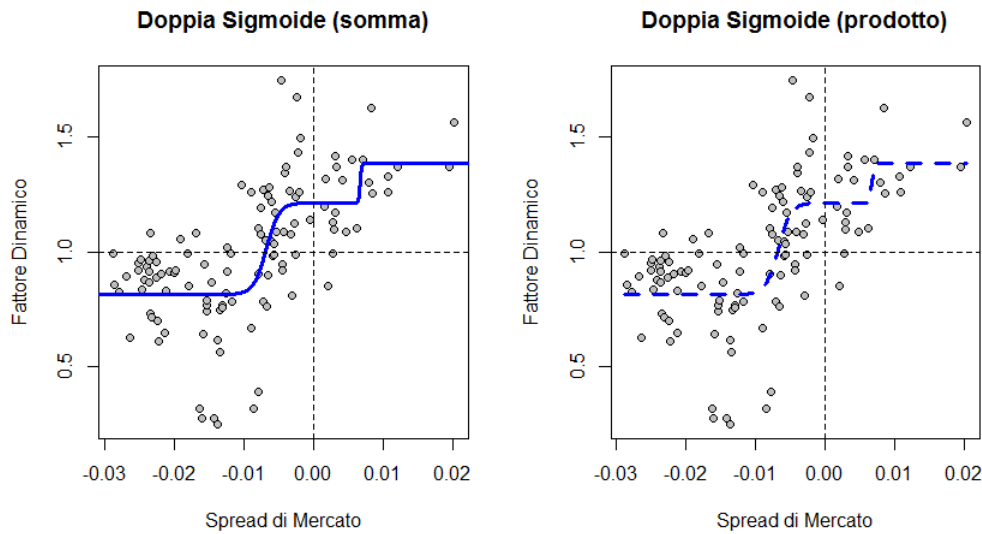
Anche in questo modello, così come nei precedenti, è possibile osservare che variazioni di piccola entità intorno al valore benchmark perturbano la situazione dei riscatti, ancora una volta perché la stabilità intorno ad un valore massimo è raggiunta prima del valore nullo dello spread, ancora una volta con una asimmetria comportale per variazioni positive e negative di questo.

Per i motivi sopracitati, risulta necessario considerare le estensione dei modelli fino ad ora descritti, estensioni introdotte proprio con lo scopo di rimediare a questi problemi.

Osservazione 4.2.1. E' interessante osservare i pvalue dei parametri stimati in quanto, sebbene siano tutti molto bassi a prova della significatività di ciascuno di essi, due in particolare non solo non sono piccoli come gli altri, ma sono anche simili tra loro: a e ω . Questo proprio in virtù del legame tra le due rappresentazioni e, in particolare, tra i due parametri.

4.2.5 Modello Doppia Sigmoide

Come nel caso della sigmoide, anche per la doppia sigmoide sono state riportate diverse rappresentazioni e perciò si procede nuovamente ad una analisi grafica che mostri come sia indifferente il modo in cui la funzione è definita perché, che sia essa derivata da una somma o da un prodotto, la curva che si ottiene è sempre la stessa



<i>Parametro</i>	<i>Valore stimato</i>	<i>Pvalue</i>
f_{min}	0.815024	0
f_{mid}	1.21475	0
f_{max}	1.38771	0
a_1	1091.7	0.1371
c_1	-0.00672355	0
a_2	9128.06 / 9128.01	0.9673
c_2	0.00674922	0.4413

Per il parametro a_2 il valore assunto dal pvalue è veramente molto alto e ciò giustifica la piccola differenza nella stima di questa grandezza nei due modelli, stima che dipende dalle funzioni R utilizzate in fase di calibrazione. Graficamente, per a_2 , è possibile apprezzare quanto sia ripida la pendenza nel passaggio da f_{mid} a f_{max} , quasi diventando una linea spezzata che unisce questi due valori del fattore dinamico.

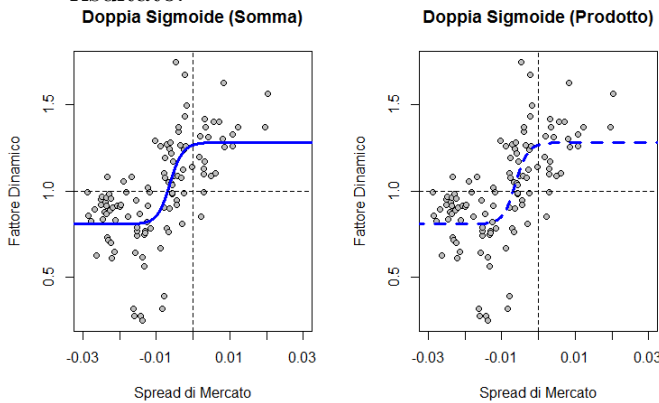
Anche il pvalue di c_2 è particolarmente elevato e ciò porterebbe a pensare che una seconda S potrebbe non essere strettamente necessaria per una regressione sui dati che si stanno studiando.

Per quanto riguarda il comportamento economico dei soggetti, si può osservare come, sebbene i parametri c_1 e c_2 siano quasi equidistanti dal centro⁵, essendo i parametri di "pendenza" a_1 e a_2 diversi (il secondo è circa 8.36 volte il primo), gli assicurati reagiscono diversamente a valori positivi e negativi dello spread, assumendo quindi decisioni diverse sulla base del rendimento del proprio contratto assicurativo rispetto al benchmark— diversamente dai modelli visti in precedenza (escluso l'arcotangente), dove per spread positivi era già stata raggiunta la stabilità sul valore massimo.

Sempre parlando di ciò che sarebbe economicamente razionale, come spiegato in precedenza, in linea teorica questo modello non dovrebbe comportare stime del fattore dinamico che portino a variazioni della componente di base quando $\Delta_{mkt,t} \approx 0$

⁵Si ricorda che questi valori descrivono il valore in cui le due S raggiungono la massima pendenza.

e perciò si potrebbe pensare di "forzare" f_{mid} ad essere uguale ad 1, con il seguente risultato:



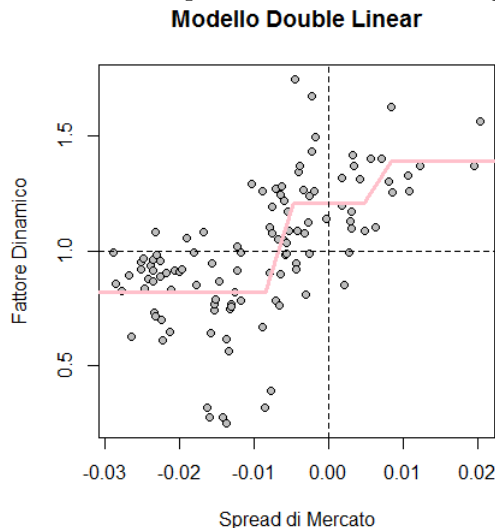
Parametro	Mod. Somma	Mod. Prodotto
f_{min}	0.808494	0.808933
f_{mid}	1	1
f_{max}	1.28275	1.28151
a_1	711.637	717.233
c_1	-0.00661935	-0.00674299
a_2	500.926	506.315
c_2	-0.00597428	-0.00618164

Sebbene l'indice RSS assuma un valore di circa 5.3 – in linea con i valori assunti dai modelli nella Sezione 4.3 – già graficamente si osserva che imponendo tale comportamento, il modello che si ottiene, fondamentalmente, è una sigmoide. Il valore intermedio pari a 1, esiste per un piccolo intervallo dello spread e, inoltre, si ha prima di quando questo si annulla. Altra considerazione viene fatta per i pvalue, che per a_1 , a_2 , c_1 e c_2 sono elevati⁶, ciò a dimostrare come il modello non sia adeguato operando questa forzatura.

Una soluzione al nuovo problema economico potrebbe essere l'inserimento di ulteriori vincoli ai valori di c_1 e c_2 , ma questi comporterebbero ulteriori difficoltà al modello – difficoltà che non sono lo scopo del presente elaborato.

4.2.6 Modello Double Linear

Si mostrano ora i risultati del secondo modello "spezzato" – il Double Linear – per il quale, come nel caso del modello Step Increase, non è stato possibile riportare il valore dei pvalue considerando l'algoritmo di stima utilizzato



Parametro	Valore stimato
f_{min}	0.81885
f_{mid}	1.2109
f_{max}	1.3905
β_1	-0.0085
β_2	-0.0047
β_3	0.0048
β_4	0.0084

Graficamente, il diverso comportamento economico degli assicurati è descritto da diverse evoluzioni per valori positivi o negativi dello spread: quando il rendimento di

⁶Sebbene non siano stati riportati, si segnala che il minore di questi valori è circa 0.49

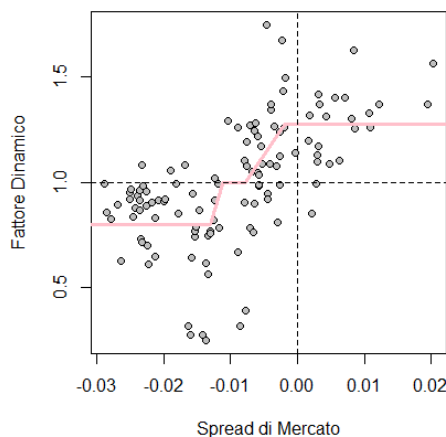
mercato è maggiore del rendimento del contratto assicurativo, la pendenza è minore e, inoltre, tende a stabilizzarsi più velocemente rispetto al caso in cui si ha un valore negativo del medesimo spread.

Sebbene attorno a variazioni piccole dello spread di mercato, sia nel modello double sigmoid che in quello double linear, vi sia coerenza circa il valore di f_{mid} , proprio il valore che questo assume mostra come – sulla base di quanto spiegato nella Sezione 3.3 in merito a quando è ottimo il fit di questi modelli – nel caso in esame bisognerebbe svolgere una analisi più accurata per comprendere le motivazioni dietro questo risultato, il quale altrimenti non appare in linea con il comportamento economico razionale del soggetto.

Tuttavia, come si vedrà meglio in seguito, questi due modelli sono quelli che fittano meglio i dati.

Come per la doppia sigmoide, anche in questo caso è possibile imporre un comportamento economico di una situazione intermedia dove si mantiene stabilità attorno alla frequenza base dei riscatti ($f_{mid} = 1$), ottenendo il seguente andamento

Modello Double Linear



<i>Parametro</i>	<i>Valore stimato</i>
f_{min}	0.80055
f_{mid}	1
f_{max}	1.2741
β_1	-0.013
β_2	-0.01112
β_3	-0.00779
β_4	-0.00194

che presenta ancora una volta un valore dell’RSS in linea con gli altri (RSS=5.2476).

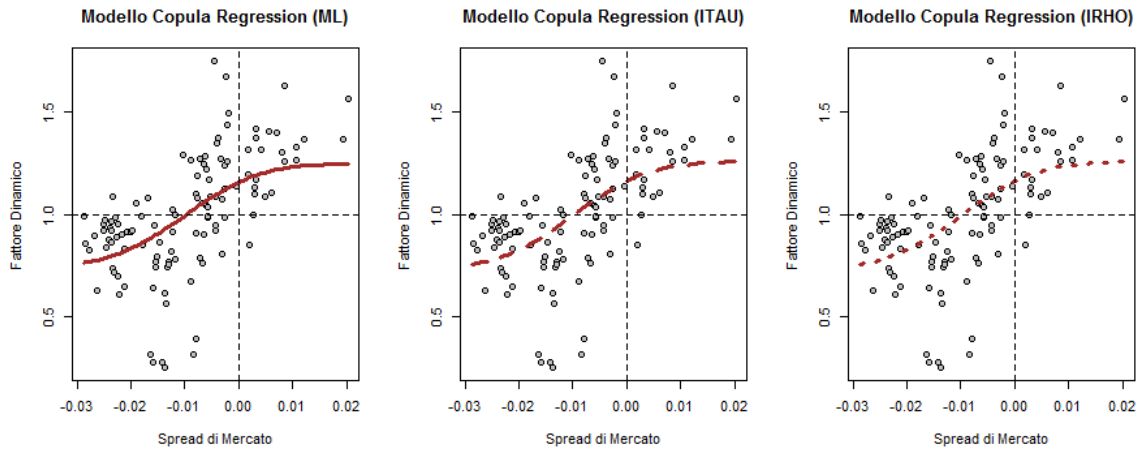
Osservando il grafico, anche qui sarebbe necessario porre ulteriori vincoli per "spostare" l’intervallo in cui si ottiene un comportamento economico razionale, tuttavia ci si limita a spiegare ancora una volta che un simile approccio renderebbe solo il modello meno adatto a fittare il reale comportamento dei dati.

4.2.7 Modello Copula Regression

Per la stima del modello, da A.1.7, risulta che per la funzione di ripartizione della Weibull G_0 i parametri calibrati sono $\lambda \approx 1.1$ e $\kappa \approx 3.8$.

Per quanto concerne la stima del parametro θ che caratterizza la famiglia Frank, sono stati forniti 3 diversi risultati da altrettante differenti procedure di stima: $\theta_{ml} \approx 4.76$, $\theta_{itau} \approx 5.01$ e $\theta_{irho} \approx 5.41$

Al variare del parametro, sono stati ottenuti i seguenti grafici



dove, almeno da una prima analisi meramente visiva, la differenza è minima.

L'andamento dei tre grafici è S-shaped, con punto di flesso evidentemente prima di un valore nullo dello spread. Come in tutti i modelli precedenti, anche in questo il comportamento economico razionale dell'assicurato non è rispettato e ciò si desume ancora una volta dal fatto che in $\Delta_{mkt,t} = 0$ il valore del fattore dinamico è maggiore di 1.

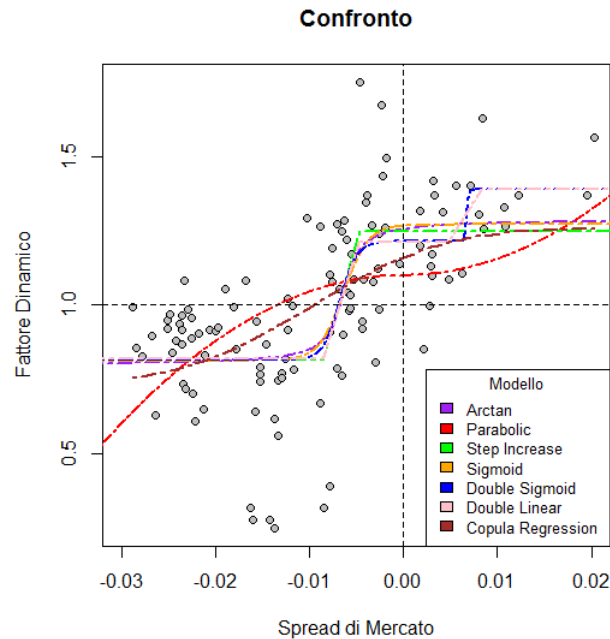
Prima di procedere a mostrare il confronto tra tutti i modelli, occorre selezionare il parametro più idoneo che "rappresenti" il modello copula regression. Per fare ciò, si riportano i valori assunti da alcuni indici al variare del parametro

<i>Parametro</i>	<i>RSS</i>	<i>MSE</i>	<i>MAD</i>
θ_{ml}	6.279618	0.05508437	0.1770333
θ_{itau}	6.254065	0.05486022	0.1771403
θ_{irho}	6.228202	0.05463335	0.1775053

A giudicare da questa tabella, la scelta migliore è θ_{irho} perché il criterio utilizzato per il fitting negli altri modelli è basato sulla minimizzazione della somma dei residui al quadrato (RSS).

4.3 Confronto tra modelli: differenze nei risultati

Prima di procedere con l'analisi di alcuni indici che misurano la bontà di adattamento di ciascun modello ai dati, risulta interessante operare un confronto grafico tra questi



Si ricordi che con la scelta di un modello si formula una ipotesi economica circa l'andamento di determinati fenomeni e come questi influiscono in un sistema, per tale ragione già da questa prima analisi grafica è possibile trarre alcune conclusioni circa i modelli utilizzati. Per il dataset di riferimento, il modello parabolico sembrerebbe completamente inadeguato e non in linea con gli andamenti proposti dagli altri modelli. Inoltre, degli altri modelli, gli unici a presentare comportamenti ragionevoli come la stabilità attorno ad un valore piccolo dello spread per poi cambiare sia per variazioni positive che negative di queste sono il Double Sigmoid e il Double Linear. Tuttavia, nessuno dei modelli proposti fitta al meglio quello che è il comportamento economico razionale definito in precedenza per la componente dinamica, ovvero la "non reazione" per un intorno di $\Delta_{mkt,t} = 0$, essendo sempre presente in tal punto una frequenza superiore alla media (che si ricorda aver ipotizzato $\bar{r}_t = r_t^{Base}$)

$$f(0) > 1 \implies r_t = r_t^{Base} \cdot f(0; \beta) > \bar{r}_t$$

Le motivazioni dietro tali risultati possono essere molteplici, come ad esempio si potrebbe ipotizzare che il cliente, iscritto ad una gestione separata, aveva per il fondo assicurativo aspettative di performance ampiamente maggiori di quelle del mercato e, considerando una percentuale di commissioni, non si ritiene soddisfatto della gestione motivo per cui decide di riscattare comunque anche quando i due rendimenti sono uguali. Questa è solo una delle possibili ipotesi, per le quali andrebbe poi osservata la veridicità.

Tuttavia, seppur non rispettino comportamenti economici razionali, i modelli fittano i dati in tal maniera e perciò, nello scegliere tra i presentati, per poter stabilire numericamente una preferenza su quali siano i migliori per il dataset considerato, si procede con il calcolo di alcuni importanti indici di confronto. Si ricordi che per calibrare i modelli è stata utilizzata la minimizzazione della sommatoria dei residui al quadrato e, per tale motivo, il criterio RSS è uno dei principali criteri utilizzati per stabilire un ordine di preferenza. Tuttavia, tale criterio non è il solo, infatti vi sono anche il criterio Mean Squared Error (MSE) e il criterio Mean Absolute Deviation (MAD), definiti come

$$MSE = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i^{oss} - \hat{y}_i)^2}{n} \quad MAD = \frac{\sum_{i=1}^n |y_i^{oss} - \hat{y}_i|}{n}$$

Quindi il MSE mostra la distanza quadratica media fra i valori osservati dei dati ed i valori stimati, mentre il MAD utilizza la sommatoria delle "distanze positive" di ciascun valore dalla stima, mostrando quindi la differenza complessiva in valore assoluto.

Dalle formule che li definiscono, risulta lapalissiano spiegare che l'obiettivo è minimizzare tali quantità.

<i>Modello</i>	<i>RSS</i>	<i>MSE</i>	<i>MAD</i>
<i>Arctan</i>	5.3038	0.046525	0.16741
<i>Parabolic</i>	7.54	0.06614	0.19437
<i>Step Increase</i>	5.2859	0.046368	0.16742
<i>Sigmoid</i>	5.29	0.046404	0.16594
<i>Double Sigmoid</i>	5.1014	0.044749	0.16317
<i>Double Linear</i>	5.0795	0.044557	0.16348
<i>Copula Regression</i>	6.228202	0.05463335	0.1775053

Da questi valori risulta evidente che, tra quelli proposti, i modelli più adatti a descrivere l'andamento del fenomeno sono il Double Linear e il Double Sigmoid.

Osservazione 4.3.1. Probabilmente, un valore così deludente per il modello copula regression potrebbe essere dovuto all'aver forzato una distribuzione Weibull per descrivere il fattore dinamico. Questa scelta, tuttavia, è stata dettata dalla necessità di individuare la forma distributiva più idonea tra quelle note e, tra le proposte nel software R, è risultata essere proprio la distribuzione Weibull.

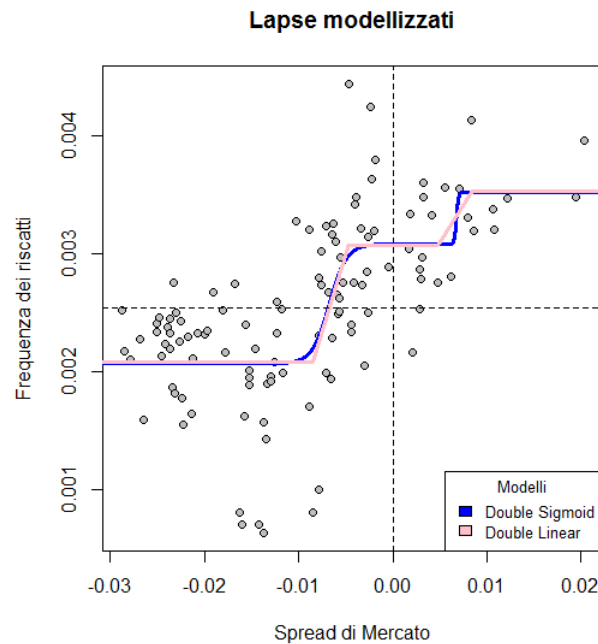
Da un punto di vista economico, si evidenzia come sia il double linear che il double sigmoid evidenziano una maggiore propensione dinamica a uscire dal contratto e riscattare in quanto

- (i) $\Delta_{mkt,t} \geq 0$ (ma anche per valori poco negativi): si propende ad uscire dal contratto per opportunità maggiori o uguali di guadagno⁷, ma il correttivo moltiplicativo massimo che si raggiunge si stabilizza intorno a 1.21 per entrambi.

⁷Ipotizzando l'esempio di prima, questi ragionamenti potrebbero tenere in considerazione che parte del guadagno viene dato come commissione ai gestori del fondo, oppure, se ciò è già considerato, potrebbe derivare "semplicemente" da performance inadeguate.

- (ii) $\Delta_{mkt,t} \ll 0$: i soggetti propendono a rimanere nel contratto per valori sufficientemente bassi dello spread tanto che il fattore dinamico in questo caso raggiunge 0.82 circa in entrambi i modelli, valore che riduce la componente base del riscatto, ma non in grande misura.

Graficamente, la stima delle frequenze di riscatto adottando questi due modelli è allora



dove si osserva in modo evidente la "vicinanza" tra i due, tanto che spesso si sovrappongono.

In virtù dei risultati trovati, per l'analisi che segue, nel fitting della componente dinamica del riscatto si preferirà adottare il modello Double Sigmoide in quanto presenta maggiore semplicità nell'implementazione – considerata la derivabilità – ed una buona adattabilità ai dati.

Capitolo 5

Problema di stima nel cambio di misura

Nel Capitolo 4 è stato osservato come i modelli Double Linear e Double Sigmoid rappresentassero, in modo più dettagliato rispetto ad altri modelli, il comportamento dinamico del tasso di riscatto. Ora, a partire da questo risultato, si vuole evidenziare una importante problematica legata alla stima di questi modelli.

La calibrazione dei parametri, così come effettuata nella sezione precedente, avviene in un ambiente Real World – i dati, infatti, sono osservati e i valori assunti sono quindi realizzati – mentre per il calcolo delle Best Estimate Liabilities e dell'SCR, nella Normativa Solvency II, ciò che viene utilizzato è un approccio Risk Neutral.

Nel passaggio da una misura all'altra, si genera un rilevante problema: tipicamente il lapse rate risk neutral, in proiezione, risulta superiore al lapse rate medio osservato e ciò crea una distorsione quando si vuole testare la bontà del modello che utilizza questi tassi, stimati in ambiente Real World, sui dati passati nella misura Risk Neutral.

Alcune soluzioni al problema sono state proposte in letteratura, come l'introduzione di un parametro volto alla riduzione della distorsione, ma ancora nessuna di queste soluzioni ha trovato conferma.

Osservazione 5.0.1. Si evidenzia come tale problema sia molto sentito nelle polizze unit linked: infatti, in questa tipologia di polizze tipicamente non si valuta la componente dinamica del riscatto.

Visto che è pratica comune identificare il tasso spot in t con $r(t)$ ¹, per evitare di generare confusione si specifica che esclusivamente per questa sezione e per la Appendice C, il tasso di riscatto sarà denotato dalla lettera l (da "lapse").

¹Si ricordi che il tasso spot, più precisamente, è una intensità e presenta una sola quantità temporale. Esso, in generale, è definito come $r(t) = \lim_{T \rightarrow t} \delta(t, T) = \lim_{T \rightarrow t} h(t, T)$, dove $h(t, T)$ è l'intensità di rendimento a scadenza e $\delta(t, T)$ è l'intensità istantanea di rendimento, legate al fattore di sconto periodale mediante le seguenti

$$v(t, T) = \frac{1}{[1 + i(t, T)]^{T-t}} = e^{-h(t, T)(T-t)} = e^{-\int_t^T \delta(t, u) du}$$

con $i(t, T)$ tasso di interesse, su base annuale, del periodo considerato.

5.1 BEL ed SCR

La Normativa SolvencyII spiega che ai fini della valutazione devono essere considerati dei flussi aggiustati per il rischio. Il passaggio al "mondo" Risk Neutral comporta un azzeramento delle componenti di rischio e, in tale ottica, un soggetto che investe in titoli rischiosi non riceve un premio per il suo investimento².

Per quanto concerne il calcolo delle Best Estimate Liabilities nell'istante di valutazione t (V_t), nella normativa SolvencyII qualora dovesse esserci indipendenza tra risk drivers finanziari e tecnici, ad eccezione di un legame tra l'andamento finanziario e il tasso dei riscatti, questo viene effettuato utilizzando la formula

$$V_t = C_t \mathbf{E}_t^{\mathbf{Q}}[\Phi_{t;T} R(\mathbf{X}^M) e^{-\int_t^T r(u)_{BEL} du}] \cdot \mathbf{E}_t^{\mathbf{P}}[\mathbf{1}_{\varepsilon_T}]$$

dove:

- $R(\mathbf{X}^M)$ costituisce la componente di riscatto dipendente dall'andamento dei mercati finanziari.
- $\mathbf{E}_t^{\mathbf{P}}[\mathbf{1}_{\varepsilon_T}]$ costituisce la componente attuariale del rischio, ovvero il verificarsi dell'evento contemplato nella polizza. Questa componente di rischio include, ovviamente, la componente base del rischio di riscatto.
- C_t è il valore del capitale assicurato, noto nell'istante t -esimo.
- $r(u)_{BEL}$ è il tasso spot inclusivo del volatility spread, utilizzato per il calcolo delle Best Estimate Liabilities³.
- $\Phi_{t;T}$ è il fattore di rivalutazione: ovviamente riguarda esclusivamente le polizze il cui capitale può essere rivalutato (Polizze rivalutabili, Unit linked e Index linked) e, se non dovesse esserci rivalutazione, viene posto uguale a 1. Nella definizione di questo fattore periodale sono considerati i meccanismi di rivalutazione periodale considerati, eventuali garanzie, ecc...

Osservazione 5.1.1. Se dovesse esserci indipendenza totale tra il rischio finanziario e quello di riscatto – i.e. sia nullo l'effetto della componente dinamica dei riscatti, essendo questi indipendenti dall'andamento economico-finanziario – il problema non esisterebbe in quanto la fattorizzazione consentirebbe di tenere separati i due rischi e considerare un modello statico (come quelli definiti in Sezione 2.1) per la stima del tasso dei riscatti.

Analogamente, guardando un quadro più ampio di attività e passività, anche nel calcolo dell'SCR viene adottata una misura Risk Neutral e, per tale ragione, anche nel definire questa grandezza si presenta il problema definito in precedenza.

²Il cambio di misura può essere definito come un "escamotage" matematico che consente di stimare il valore di uno strumento basandosi sulle filtrazioni, semplificando i calcoli ed eliminando il problema delle diverse aspettative tra i soggetti: con la dinamica Risk Neutral, tutti si aspettano di "arrivare" allo stesso valore.

³Per la definizione di questa struttura e le metodologie di calcolo si rimanda a [EIOPA: Risk-free interest rate term structures]

Più in generale, questa situazione sorge nel momento in cui si vanno a stimare le frequenze di riscatto usando modelli calibrati in un ambiente Real World \mathbf{P} e si desidera valutare il Dynamic Policyholder Behavior nell'ambiente Risk Neutral \mathbf{Q} , come calcolarlo? Perché si ottengono differenze?

Come già detto, la prima domanda non ha ancora trovato una risposta, mentre per la seconda è evidente che in un ambiente Risk Neutral lo spread sia molto schiacciato in virtù della definizione stessa di questa misura di probabilità – nella quale il rendimento di titoli rischiosi e non rischiosi deve essere lo stesso⁴.

Con degli esempi veramente basilari, si andrà ora ad osservare la differenza che si ottiene nel calcolare gli spread utilizzando proiezioni Real World e Risk Neutral, e vedere così come risulta distorto un modello calibrato su dinamiche reali quando applicato nella misura rischio-neutrale.

Per quanto semplici, i risultati che saranno mostrati sono sufficienti a spiegare il fenomeno che avviene nella realtà, quando si considerano tutti gli elementi facenti parte della vita della compagnia assicurativa.

Si tenga presente che come componente di base si utilizza ancora una volta la media delle frequenze di riscatto osservate.

5.2 Esemplicazioni numeriche

5.2.1 La dinamica considerata e le ipotesi sottostanti

Prima di iniziare, si sottolinea che in quanto segue si ipotizza valido il principio di assenza di arbitraggi e si ipotizza la completezza del mercato.

Il modello considerato per la dinamica del portafoglio è il seguente

$$\mathcal{P} \quad \begin{cases} dr_t = \alpha(\gamma - r_t)dt + \sigma^r \sqrt{r_t} dZ_t^r \\ dS_t = \mu S_t dt + \sigma^S S_t dZ_t^S \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\mathcal{Q} \quad \begin{cases} dr_t = \alpha(\gamma - r_t)dt + \sigma^r \sqrt{r_t} dZ_t^r \\ dS_t = r_t S_t dt + \sigma^S S_t dZ_t^S \end{cases} \quad (5.2)$$

con (Z_t^r, Z_t^S) Moto Browniano bidimensionale, nel quale si tiene conto della correlazione nell'evoluzione del processo bivariato.

Per la selezione dei parametri della dinamica Real World sono state utilizzate ipotesi verosimili, cercando di ispirarsi a dinamiche reali, che permettessero il rispetto dei "vincoli" legati all'applicazione di determinati modelli – ad esempio, il CIR prevede solo tassi spot positivi – e che mostrassero più chiaramente gli andamenti che si intende sottolineare.

Per la dinamica Risk Neutral, analogamente, si è optato per dei parametri verosimili che consentissero il rispetto dei modelli utilizzati.

⁴Nella pratica, considerando ad esempio i titoli con cedola, si procede ad una variazione dei flussi, ovvero cambia il mapping del titolo per permettere ai rendimenti di essere gli stessi in ambiente risk neutral.

Osservazione 5.2.1. Si sottolinea che un modello realistico che descriva l'evoluzione delle grandezze di interesse deve essere semplice da trattare analiticamente, ma anche efficace per poter cogliere le informazioni presenti nella realtà economico-finanziaria.

Per quanto concerne il processo bivariato, è necessario individuare la correlazione tra le due asset class considerate: azioni e obbligazioni

- se $\rho > 0$: indice di Borsa e rendimento delle obbligazioni salgono entrambi, motivo per cui, a causa della relazione inversa tra prezzo e rendimento di un bond, scende il loro prezzo. Ovviamente vale anche il viceversa, cioè se l'indice borsistico scende di valore, diminuirà anche il rendimento delle obbligazioni.
- se $\rho < 0$: quando l'indice di Borsa sale, il rendimento delle obbligazioni diminuisce e di conseguenza il loro prezzo sale; Ovviamente vale anche in questo caso il viceversa.

In [2] viene confrontato l'andamento di un indice borsistico con quello del rendimento a scadenza di alcune obbligazioni (i.e. yield to maturity) dal 1964 al 2019, giungendo ai seguenti risultati

1. La correlazione oscilla nel tempo passando da valori positivi a negativi
2. La correlazione tra azioni e obbligazioni è mediamente nulla e ciò può essere dimostrato anche per sottoperiodi circa decennali
3. Negli ultimi anni la correlazione sta decrescendo

In virtù di tale risultato, nel campionare i valori per il Moto Browniano bidimensionale si terrà conto di una correlazione praticamente nulla e, per tale ragione, si potrà campionare separatamente da due normali standard.

5.2.2 Esempio 1

Nel presente esempio si è ipotizzato che l'assicurato investa in una gestione separata priva di garanzie, in cui il valore iniziale del portafoglio assicurativo è di 200€ ed è investito per l'80% secondo una logica bank account⁵ (160€) e per il restante 20% in titoli azionari (40€). Tuttavia, l'assicurato ha davanti a sé la possibilità di un investimento alternativo sul mercato finanziario, può infatti decidere di riscattare la polizza e investire autonomamente nel bank account, se questo dovesse essere più remunerativo della gestione del portafoglio assicurativo.

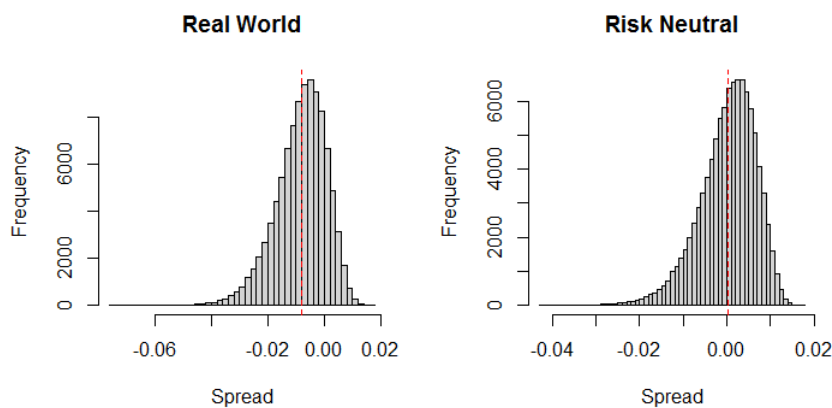
Si suppone, inoltre, che il tasso spot iniziale r_0 sia 0.01 e che non solo non vi siano penali in caso di riscatto anticipato, ma anche che non vi siano commissioni per la gestione: in questo modo sarà possibile mostrare più chiaramente l'effetto che comporta sullo spread il cambio di misura, senza essere influenzato da altri fenomeni. Semplificando il discorso, si può immaginare che in questo modo l'assicurato prenda una decisione esclusivamente sulla base dell'andamento economico-finanziario dei due investimenti.

⁵In questa logica è come se si avesse una somma depositata in un conto corrente e in cui la formazione del rendimento segue la dinamica indicata: nel caso in esame, il CIR.

I parametri adottati nell'analisi sono riportati nella seguente

<i>Parametro</i>	<i>Valore Real World</i>	<i>Valore Risk Neutral</i>
α	0.1	0.05
γ	0.02	0.04
σ^r	0.07	0.07
μ	0.05	//////
σ^S	0.1	0.1

Utilizzando i codici riportati in Appendice A e un numero $N = 10^5$ simulazioni, sono state ottenute le seguenti distribuzioni per gli spread dei rendimenti dopo 10 anni



Si osserva che la stima media che si ha per la dinamica Real World è $\Delta_{mkt,t} < 0$ e ciò è comprensibile in quanto, sotto questa misura, la componente azionaria ha un rendimento superiore a quello della componente obbligazionaria.

Per quanto concerne la dinamica Risk Neutral, in media, il valore dello spread dopo 10 anni è nullo.

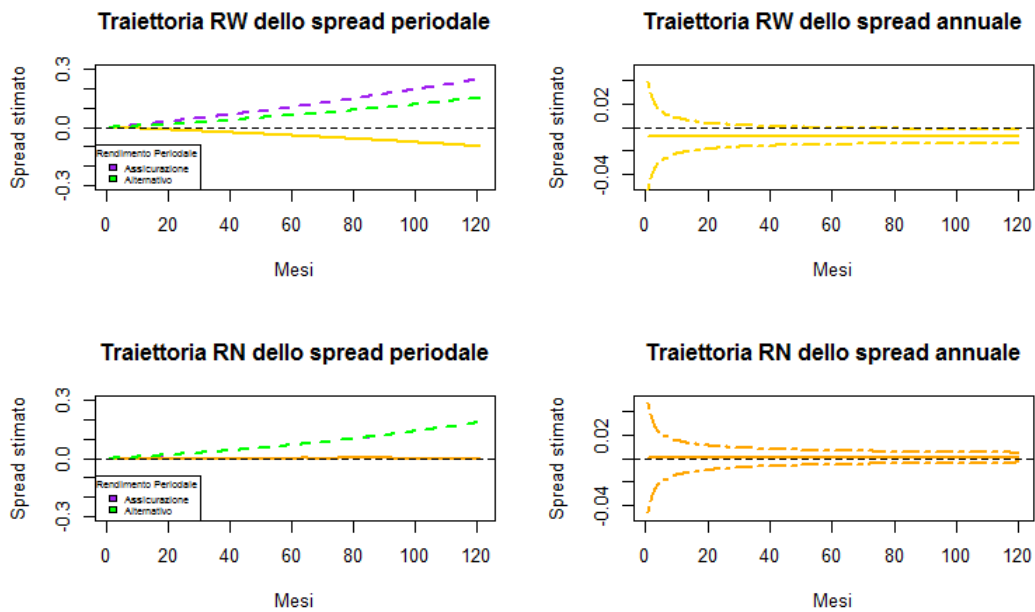
Osservazione 5.2.2. Un valore $\Delta_{mkt,t} > 0$ si potrebbe ottenere, ad esempio, quando si considera una componente di commissione: in tal caso, infatti, questa andrebbe a ridurre la dimensione del portafoglio e il suo rendimento indipendentemente dal tipo di dinamica considerata.

Giunti a questo punto è evidente che nelle due dinamiche si ottengano stime differenti per le due misure di probabilità, ma una visione più ampia può essere fornita dalla rappresentazione dell'andamento degli spread dei rendimenti espressi su base periodale e annua⁶

⁶La formula utilizzata per il passaggio da rendimento periodale a annuale è

$$\begin{cases} Rend_{year} = Rend_{period} \cdot \frac{1}{Period} & Period \leq 1 \text{ anno} \\ Rend_{year} = (1 + Rend_{period})^{\frac{1}{Period}} - 1 & Period > 1 \text{ anno} \end{cases}$$

dove, ad esempio, la mensilità è considerata come $Period = \frac{1}{12}$ e l'ultimo anno come $Period = 5$.

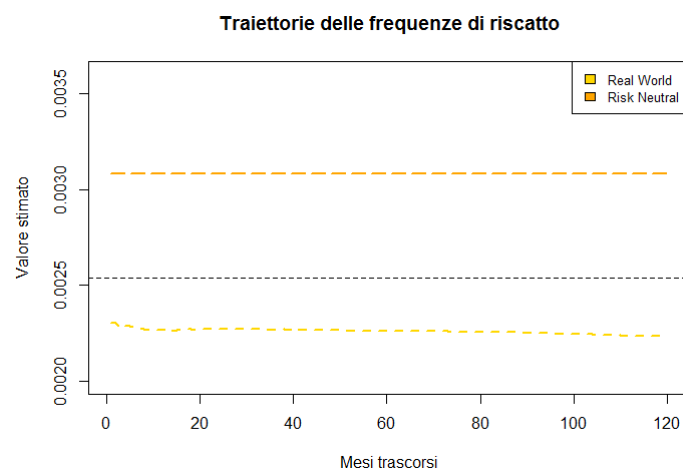


dove per la dinamica annua sono stati inseriti anche gli intervalli di confidenza del 25% e 75%.

Da questi grafici è possibile osservare come nella dinamica Real World la performance periodale del portafoglio progressivamente aumenta in media riducendo sempre più lo spread, mentre per la dinamica Risk Neutral questo si attesta sempre intorno 0 per i motivi già citati.

Quando si osservano gli andamenti annuali, si ha una certa stabilità con piccole oscillazioni legate alle simulazioni, ma è palese come anche in questo caso lo spread Real World e quello Risk Neutral presentino interpretazioni analoghe all'andamento periodale.

Si può allora andare a modellizzare l'andamento delle frequenze di riscatto nei 120 mesi presenti nei 10 anni,



Nella dinamica Real World si osserva come le frequenze dei riscatti siano costantemente sotto la media ad indicare che nel periodo considerato si ha un maggiore

rendimento del portafoglio assicurativo rispetto all'investimento auto-gestito. Al contrario, osservando la dinamica Risk Neutral, le frequenze di riscatto rimangono stabilmente sopra all'andamento medio e ciò perché lo spread rimane intorno allo 0 e il modello considerato, come visto in precedenza, già da situazioni di spread lievemente negativo considera un fattore dinamico moltiplicativo maggiore di 1.

Risulta allora evidente che utilizzando lo stesso modello per le due dinamiche le frequenze di riscatto stimate nella misura risk neutral saranno nettamente superiori a quelle della misura real world. In altre parole, sembrerebbe che cambiando la misura con cui si valuta un contratto, cambi anche il numero di riscatti, cosa che non accade nella realtà...

5.2.3 Esempio 2

E se l'assicurato decidesse di investire in un paniere, sempre con un rendimento complessivamente inferiore, ma comunque meno rischioso rispetto al portafoglio assicurativo?

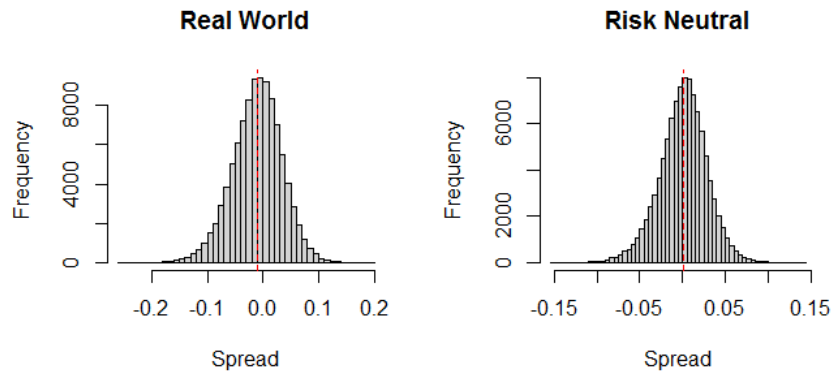
In questo secondo esempio, l'investimento iniziale nella gestione separata è ancora di 200€, ma composto per il 60% dal bank account (120€) e per il restante 40% da titoli azionari (80€). Il portafoglio assicurativo e l'investimento presente sul mercato presentano la stessa dinamica per la parte non azionaria (analoga al caso precedente), mentre per la parte azionaria si differenziano come segue

	<i>Parametro</i>	<i>Valore Real World</i>	<i>Valore Risk Neutral</i>
<i>Portafoglio Assicurativo</i>	μ	0.11	//////
	σ	0.173	0.173
<i>Portafoglio di Mercato</i>	μ	0.09	//////
	σ	0.14	0.14

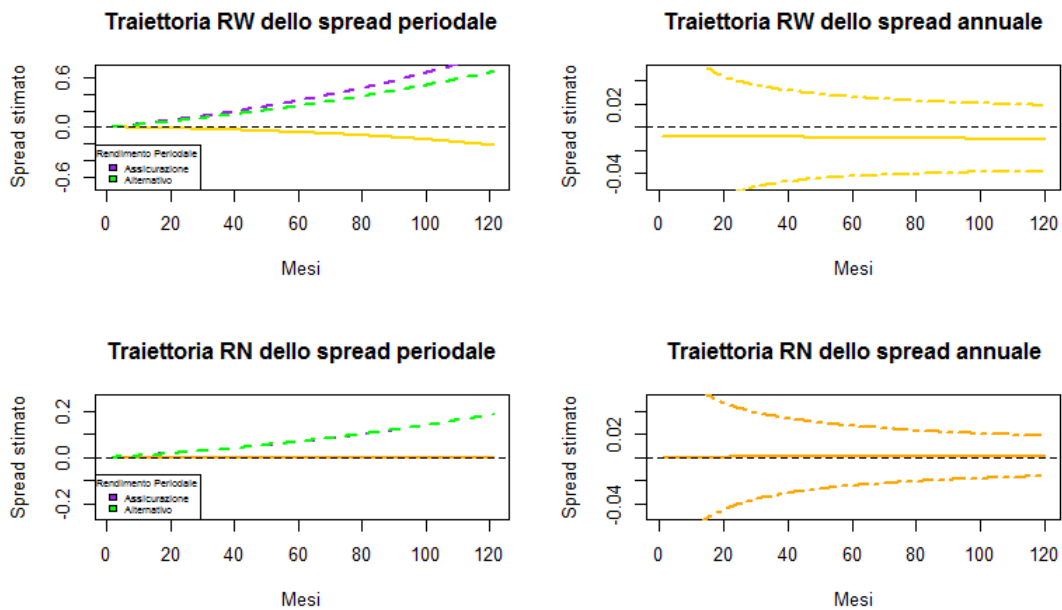
inoltre, si pone ancora $r_0 = 0.01$.

Il discorso precedentemente svolto per le penali e le commissioni, rimane valido anche in questo esempio.

Lo spread dei rendimenti decennali espresso su base annua, diventa



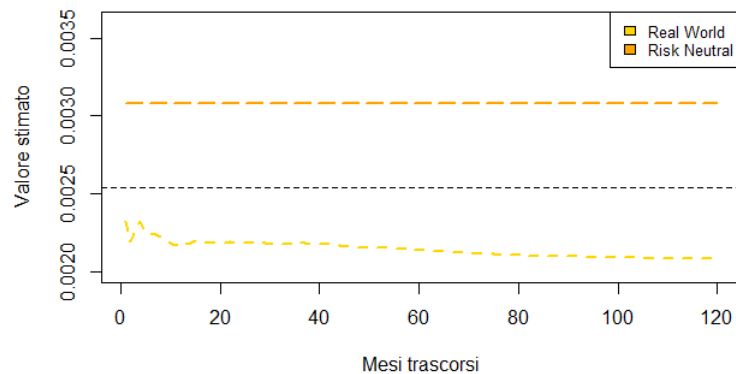
e l'andamento nel tempo degli spread periodali e su base annua è



dove si osserva ancora una volta la differenza definita nel precedente esempio, ma con uno spread minore nell'andamento Real World in virtù dell'investimento azionario che potrebbe compiere l'assicurato.

Si conclude l'esempio riportando la frequenza di riscatti stimata mediante il modello Double Sigmoid

Traiettorie delle frequenze di riscatto



Da cui si osservano più attentamente quelle che sono le piccole oscillazioni della curva Real World nel primo periodo, fino a che la differenza legata ai due investimenti azionari non diventa evidente e si ottiene una decrescita nella stima delle frequenze di riscatto.

Come nel precedente esempio, la curva Risk Neutral rimane stabile su stime superiori alla media in virtù dei valori che assume lo spread in questa misura.

Perciò il problema si presenta nuovamente, come si può risolvere? Esiste una versione Risk Neutral del modello che tenga conto del premio per il rischio? Esiste un fattore di aggiustamento che consenta di passare dalle frequenze di una misura all'altra?

Capitolo 6

Conclusioni

Dall'analisi svolta è emerso come vi sia una molteplicità di strumenti più che validi per la descrizione del fenomeno dinamico dei riscatti nel tempo. Da un punto di vista comportamentale, però, occorre considerare che i modelli statistici devono coniugarsi con quelli che sono dei vincoli economici legati alla realtà: sul dataset preso in esame, nessuno dei modelli osservati si è prestato a stimare un corretto comportamento economico razionale "puro". Sebbene ciò possa indurre a pensare ad errori nella definizione dei modelli, le spiegazioni dietro tale comportamento possono essere molteplici – e anche più che logiche – motivo per cui, dopo la fase di modellizzazione, si può guardare con occhio critico ai risultati ottenuti, ampliando l'analisi e cercando le motivazioni di tali risultati.

Per quanto concerne la selezione dei modelli, nella fattispecie, i migliori sono risultati essere i "Double" grazie alla loro capacità di variare sulla base di intervalli e di stabilizzarsi intorno ad un valore intermedio. Inoltre, sebbene nel caso in esame non sia risultato molto accurato, bisogna considerare che il modello Copula Regression ha enormi potenzialità e un approfondimento di questo strumento può risultare particolarmente interessante per la descrizione di questo fenomeno e non solo, specialmente quando aumenta il numero delle variabili considerate.

Lo studio del dynamic policyholder behavior è di estrema rilevanza per una corretta modellizzazione dell'intero movimento dei flussi di cassa di una impresa di assicurazione e trovare soluzioni alle problematiche aperte non può che portare ad una migliore accuratezza e precisione in questa delicata fase di lavoro delle compagnie.

Appendice A

Software

A.1 Codici

Script R A.1.1.

```
# ----- Arctanget Model -----#
ModArctan= function(a,b,c,d){
  y=a+b*atan(c*Spread-d)
  y
}

library(nlmrt)
ans_arctan= nlsb(AdjFact~a+b*atan(c*Spread-d), start= list(a
  = 0, b = 0.03, c = 1, d=1), data = Dati)
```

```
> ans_arctan
nlmrt class object: x
residual sumsqares = 5.3038 on 114 observations
after 54 Jacobian and 71 function evaluations
  name      coeff      SE      tstat      pval      gradient      JSingval
a          1.0418    0.02514    41.45      0      -2.502e-09      14.16
b          0.156665   0.023      6.811    5.366e-10    -6.171e-09      10.17
c          751.648    564.1      1.333     0.1854    -2.241e-11      0.4696
d          -4.79214     3.648     -1.314     0.1917     1.844e-10     0.0003893
```

Script R A.1.2.

```
# ----- Parabolic Model -----#
ModParab=function(a,b){
  y=a+b*sign(Spread)*(Spread^2)
  y
}

ans_parab=nls(AdjFact~ModParab(a,b),start= list(a = 0, b =
  0.03))
```

```
> summary(ans_parab)

Formula: AdjFact ~ ModParab(a, b)

Parameters:
  Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
a      1.10      0.03   36.67 <2e-16 ***
b     553.94     96.39    5.75  8e-08 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.259 on 112 degrees of freedom

Number of iterations to convergence: 1
Achieved convergence tolerance: 1.74e-09
```

Script R A.1.3.

```
# ----- Step Increase Model -----#
ModStepInc=function(valmin, valmax, a1, a2){
  y=pmin(valmax, pmax((Spread-a2)/(a1-a2)*valmin, valmin))
  y
}
```

tuttavia, per la stima dei parametri, considerando le funzioni R utilizzate, si è adottata la seguente funzione obiettivo

```
ModStepInc_stima=function(beta){
  valmin=beta[1]
  valmax=beta[2]
  a1=beta[3]
  a2=beta[4]
  sum((AdjFact-pmin(valmax, pmax((Spread-a2)/(a1-a2)*valmin,
    valmin)))^2)
}

set.seed(1)
library(DEoptim)
ans_stepinc=DEoptim(ModStepInc_stima, lower= c
  (0.23, 1, -0.009460, -0.03), upper=c
  (0.9, 1.8, 0.03, -0.009460), control = DEoptim.control(
  itermax = 1000))
```

```
> summary(ans_stepinc)

**** summary of DEoptim object ****
best member   : 0.81712 1.2494 -0.0085 -0.01587
best value    : 5.2859
after         : 1000 generations
fn evaluated  : 2002 times
*****
```

Script R A.1.4. Sebbene sia possibile utilizzare algoritmi predefiniti per la definizione della curva e per la stima dei suoi parametri (come, ad esempio, viene spiegato in [Caglar, Teufel & Wilke 2018]), si è preferito implementare manualmente delle funzioni che seguissero le definizioni fornite in precedenza per mostrare che le due forme descritte della curva conducono allo stesso risultato

```

# ----- Sigmoid Model -----#
ModSigmoide= function( valmin , valmax , a , c ) {
  y=valmin+(valmax-valmin)/(1+exp(-a*(Spread-c)))
  y
}

ModSigmoide_tanh= function( valmin , valmax , c , w ) {
  y=valmin+(valmax-valmin)/2*(1+tanh((Spread-c)/w))
  y
}

ans_sig=nlm( AdjFact~ModSigmoide( valmin , valmax , a , c ) ,
  start= list( valmin = 0.24 , valmax = 1.75 , a= 700 , c
  =-0.00946) )
ans_sig_tanh=nlxb( AdjFact~valmin+(valmax-valmin)/2*(1+tanh
  ((Spread-c)/w)) , start= list( valmin = 0.24 , valmax =
  1.75 , c= 0.00946 , w=10) , data = Dati )

```

```
> summary(ans_sig)
```

```
Formula: AdjFact ~ ModSigmoide(valmin, valmax, a, c)
```

```
Parameters:
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
valmin	8.13e-01	3.08e-02	26.43	< 2e-16 ***
valmax	1.27e+00	4.31e-02	29.50	< 2e-16 ***
a	7.65e+02	4.07e+02	1.88	0.063 .
c	-6.35e-03	6.97e-04	-9.12	4.1e-15 ***

```
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```
Residual standard error: 0.219 on 110 degrees of freedom
```

```
Number of iterations to convergence: 8
```

```
Achieved convergence tolerance: 1.83e-06
```

```
> ans_sig_tanh
```

```
nlmrt class object: x
```

```
residual sumsqares = 5.286 on 114 observations
```

```
after 31 Jacobian and 42 function evaluations
```

name	coeff	SE	tstat	pval	gradient	Jsingval
valmin	0.812792	0.03075	26.43	0	7.166e-13	379
valmax	1.27031	0.04306	29.5	0	-2.913e-12	178.2
c	-0.00635145	0.0006967	-9.117	3.997e-15	-1.888e-10	7.152
w	0.00261483	0.001391	1.88	0.06274	-1.05e-10	5.081

da questi output è possibile osservare che il valore stimato dei parametri in comune è lo stesso.

Script R A.1.5. Come nel caso precedente, sono state inserite manualmente le funzioni per mostrare la loro costruzione e come le due forme funzionali conducano alla stessa curva

```

# ----- Double-S Model -----#
Mod2Sigm_add=function( valmin , valmid , valmax , a1 , c1 , a2 , c2 ) {
  y=valmin+(valmid-valmin)/(1+exp(-a1*(Spread-c1)))+(valmax-
    valmid)/(1+exp(-a2*(Spread-c2)))
  y
}

Mod2Sigm_prod=function( valmin , valmid , valmax , a1 , c1 , a2 , c2 ) {
  y=(1/valmid)*(valmin + (valmid-valmin)/(1+exp(-a1*(Spread-
    c1))))*(valmid+(valmax-valmid)/(1+exp(-a2*(Spread-c2)))
  )
  y
}

ans_2sigm_add=nlxb(AdjFact~valmin+(valmid-valmin)/(1+exp(-a1
  *(Spread-c1)))+(valmax-valmid)/(1+exp(-a2*(Spread-c2))),
  start= list( valmin = 0.24, valmid=1,
    valmax = 1.75, a1 = 700, c1= 0.00946,
    a2=500,c2=0),
  data = Dati)

ans_2sigm_prod= nlxb(AdjFact~(1/valmid)*(valmin + (valmid-
  valmin)/(1+exp(-a1*(Spread-c1))))*(valmid+(valmax-valmid)
  /(1+exp(-a2*(Spread-c2)))) ,
  start= list( valmin = 0.24, valmid=1,
    valmax = 1.75, a1 = 700, c1=
    0.00946, a2=500,c2=0),
  data = Dati)

```

```

> ans_2sigm_add
nlmrt class object: x
residual sumsquares = 5.1014 on 114 observations
after 51 Jacobian and 77 function evaluations

```

name	coeff	SE	tstat	pval	gradient	jsingval
valmin	0.815024	0.03004	27.14	0	2.182e-06	409
valmid	1.21475	0.04638	26.19	0	3.446e-06	60.22
valmax	1.38771	0.0772	17.97	0	-1.032e-05	7.429
a1	1091.7	728.8	1.498	0.1371	-6.417e-08	5.256
c1	-0.00672355	0.0006292	-10.69	0	0.0002772	2.832
a2	9128.06	222007	0.04112	0.9673	-1.11e-07	0.0003007
c2	0.00674922	0.008733	0.7729	0.4413	0.0003727	9.835e-07

```
> ans_2sigm_prod
nlmrt class object: x
residual sumsqares = 5.1014 on 114 observations
after 51 Jacobian and 77 function evaluations
  name      coeff      SE      tstat      pval      gradient      JSingval
valmin     0.815024    0.03004    27.14      0      2.182e-06      409
valmid     1.21475     0.04638    26.19      0      3.447e-06      60.22
valmax     1.38771     0.0772    17.97      0      -1.032e-05      7.429
a1         1091.7       728.8     1.498     0.1371    -6.418e-08      5.256
c1         -0.00672355     0.0006292  -10.69     0      0.0002772      2.832
a2         9128.01      222002    0.04112    0.9673    -1.11e-07      0.0003007
c2         0.00674922     0.008732    0.7729    0.4413    0.0003725      9.835e-07
```

In fase di calibrazione dei parametri si è anche osservato cosa avviene forzando un comportamento economico razionale e perciò ponendo $\text{valmid}=1$, ovvero $f_{mid} = 1$, di cui si è riportato solo il grafico nella apposita sezione

```
ans_2sigm_add_Forz=nlxb(AdjFact~valmin+(1-valmin)/(1+exp(-a1
*(Spread-c1)))+(valmax-1)/(1+exp(-a2*(Spread-c2))), start
= list(valmin = 0.24, valmax = 1.75, a1 = 700, c1=-
0.00946, a2=500,c2=0), data = Dati)

ans_2sigm_prod_Forz= nlxb(AdjFact~(1/1)*(valmin + (1-valmin)
/(1+exp(-a1*(Spread-c1))))*(1+(valmax-1)/(1+exp(-a2*(
Spread-c2)))), start= list(valmin = 0.24, valmax = 1.75,
a1 = 700, c1=- 0.00946, a2=500,c2=0), data = Dati)
```

Script R A.1.6.

```
# ----- Double Linear Model -----#
Mod2Lin=function(valmin, valmid, valmax, b1, b2, b3, b4){
  y=array(0, length(Spread))
  for(j in 1:length(Spread)){
    if(Spread[j]<b1){
      y[j]=valmin
    }
    if(Spread[j]>=b1 & Spread[j]<b2){
      y[j]=valmin+(Spread[j]-b1)/(b2-b1)*(valmid-valmin)
    }
    if(Spread[j]>=b2 & Spread[j]<b3){
      y[j]=valmid
    }
    if(Spread[j]>=b3 & Spread[j]<b4){
      y[j]=valmid+(Spread[j]-b3)/(b4-b3)*(valmax-valmid)
    }
    if(Spread[j]>=b4){
      y[j]=valmax
    }
  }
  y
}
```

Per la stima dei parametri si è dovuto forzare il codice come indicato di seguito, in modo da avere la forma e la continuità desiderate

```

Mod2Lin_stima=function(beta){
  valmin=beta[1]
  minmid=beta[2]
  valmid=valmin+minmid
  midmax=beta[3]
  valmax=valmid+midmax
  b1= beta[4]
  add1= beta[5]
  b2=b1+add1
  add2= beta[6]
  b3= b2+add2
  add3=beta[7]
  b4= b3+add3
  y=array(0,length(Spread))
  for(j in 1:length(Spread)){
    if(Spread[j]<b1){
      y[j]=valmin
    }
    if(Spread[j]>=b1 & Spread[j]<b2){
      y[j]=valmin+(Spread[j]-b1)/(b2-b1)*(valmid-valmin)
    }
    if(Spread[j]>=b2 & Spread[j]<=b3){
      y[j]=valmid
    }
    if(Spread[j]>b3 & Spread[j]<b4){
      y[j]=valmid+(Spread[j]-b3)/(b4-b3)*(valmax-valmid)
    }
    if(Spread[j]>=b4){
      y[j]=valmax
    }
  }
  sum((AdjFact-y)^2)
}

set.seed(10)
ans_2lin=DEoptim(Mod2Lin_stima,lower= c(0,0,0,-0.03,0,0,0),
                 upper=c(2,1.5,1.5,0.00,0.01,0.01,0.01),
                 control = DEoptim.control(itermax = 5000))

```

```
> summary(ans_2lin)
```

```

**** summary of DEoptim object ****
best member   :  0.81885 0.39209 0.17961 -0.0085 0.0038 0.0095 0.0036
best value    :  5.0795
after         :  5000 generations
fn evaluated  : 10002 times
*****

```

Anche qui è interessante osservare l'output grafico qualora si ponesse il vincolo $f_{mid} = 1$. Per svolgere questa analisi è stato utilizzato il seguente codice

```

Mod2Lin_stima_Forz=function(beta) {
  valmin=beta[1]
  valmid=1
  midmax=beta[2]
  valmax=valmid+midmax
  b1= beta[3]
  add1= beta[4]
  b2=b1+add1
  add2= beta[5]
  b3= b2+add2
  add3=beta[6]
  b4= b3+add3
  y=array(0,length(Spread))
  for(j in 1:length(Spread)){
    if(Spread[j]<b1){
      y[j]=valmin
    }
    if(Spread[j]>=b1 & Spread[j]<b2){
      y[j]=valmin+(Spread[j]-b1)/(b2-b1)*(valmid-valmin)
    }
    if(Spread[j]>=b2 & Spread[j]<b3){
      y[j]=valmid
    }
    if(Spread[j]>=b3 & Spread[j]<b4){
      y[j]=valmid+(Spread[j]-b3)/(b4-b3)*(valmax-valmid)
    }
    if(Spread[j]>=b4){
      y[j]=valmax
    }
  }
  sum((AdjFact-y)^2)
}

set.seed(10)
ans_2lin_Forz=DEoptim(Mod2Lin_stima_Forz,lower= c
  (0,0,-0.03,0,0,0), upper=c(2,2,0.00,0.02,0.02,0.02),
  control = DEoptim.control(itermax = 5000))

```

Ovviamente in questo caso i parametri bisogna ottenerli in virtù delle modifiche effettuate per la stima. In altre parole, considerato che vi è una relazione tra i primi tre parametri e gli ultimi quattro, ciò che è stato stimato sono i valori di f_{min} e β_1 e poi i coefficienti additivi per passare dal valore minimo al medio, dal medio al massimo e da un valore β_k al successivo.

Script R A.1.7. Per la parte relativa alle copule, è risultato necessario innanzitutto stabilire le distribuzioni che meglio rappresentassero le variabili di interesse. Dopo una selezione tra le 14 distribuzioni presentate nella funzione `fitdistr`¹ del pacchetto MASS, le migliori, sulla base della verosimiglianza e di considerazioni personali legate a comportamenti economici, sono risultate la Weibull per $f(\Delta_{mkt,t})$ e la Gaussiana per $\Delta_{mkt,t}$

```
# ----- Fitting dei parametri -----#
library(MASS)
Distribuzione_Adj=fitdistr(AdjFact,densfun = "weibull")
Distribuzione_Spread=fitdistr(Spread,densfun = "normal")
```

▾ Distribuzione_Adj	list [5] (S3: fitdistr)	List of length 5
▾ estimate	double [2]	3.8 1.1
shape	double [1]	3.802319
scale	double [1]	1.104363
▸ sd	double [2]	0.2761 0.0286
vcov	double [2 x 2]	0.076226 0.002422 0.002422 0.000817
loglik	double [1]	-22.11897
n	integer [1]	114
▾ Distribuzione_Spread	list [5] (S3: fitdistr)	List of length 5
▾ estimate	double [2]	-0.00946 0.01104
mean	double [1]	-0.009459649
sd	double [1]	0.01103809
▸ sd	double [2]	0.001034 0.000731
vcov	double [2 x 2]	1.07e-06 0.00e+00 0.00e+00 5.34e-07
n	integer [1]	114
loglik	double [1]	351.971

Dove è possibile osservare che, mentre per lo Spread la distribuzione va più che bene sulla base della log-verosimiglianza, lo stesso non può dirsi per il fattore dinamico di aggiustamento. Tuttavia, questo difetto potrebbe essere legato alla ridotta numerosità del dataset e questo problema si ripresenta per tutte le distribuzioni, motivo per cui si è scelto di proseguire comunque assumendo una distribuzione Weibull.

Script R A.1.8. Grazie alle distribuzioni fittate, è stato possibile passare a realizzazioni Uniformi usando la (D.2)

```
# Copule: Vettori delle realizzazioni delle variabili U e V
Vett_U=array(0,length(Spread))
```

¹Per citare l'help del software R per la funzione, le distribuzioni sono: "beta", "cauchy", "chi-squared", "exponential", "gamma", "geometric", "log-normal", "lognormal", "logistic", "negative binomial", "normal", "Poisson", "t" and "weibull"

```

for(i in 1:length(Spread)){
  Vett_U[i]=pnorm(Spread[i], mean = Distribuzione_Spread[["
  estimate"]][["mean"]], sd = Distribuzione_Spread[["
  estimate"]][["sd"]])
}

Vett_V=array(0,length(AdjFact))
for(i in 1:length(AdjFact)){
  Vett_V[i]=pweibull(AdjFact[i], shape = Distribuzione_Adj[["
  estimate"]][["shape"]], scale = Distribuzione_Adj[["
  estimate"]][["scale"]])
}

```

Script R A.1.9. Seppur non strettamente necessario, è stata riportata la costruzione della funzione copula empirica per mostrare come questa costruzione avviene nella pratica con una applicazione su dati reali

```

# ——— Copule: Costruzione della copula empirica ——— #

C_emp=array(0,dim = c(length(Spread),length(AdjFact)))
for(i in 1:length(Spread)){
  for(j in 1:length(AdjFact)){
    C_emp[i,j]=1/length(Spread)*sum(Spread<Spread_Ord[i]&
    AdjFact<Adj_Ord[j])
  }
}

```

Script R A.1.10. Si riporta ora il codice con cui sono stati creati i dati da utilizzare e con cui sono stati fittati i θ

```

# ————— Copule: Famiglia Frank ————— #

Vettori=as.data.frame(Vett_U)
Vettori[,2]=Vett_V
colnames(Vettori)=c("U","V")
Vettori_matr= as.matrix(Vettori)

Vett_pobs= pobs(Vettori_matr)
frank.cop=frankCopula(param=5, dim=2)

fit1= fitCopula(frank.cop, Vett_pobs, method = "mpl", optim.
  control = list(maxit=1000))
fit2= fitCopula(frank.cop, Vettori_matr, method = "ml", optim
  .control = list(maxit=10000))
fit3= fitCopula(frank.cop, Vettori_matr, method ="itau",
  optim.control = list(maxit=10000))
fit4= fitCopula(frank.cop, Vettori_matr, method ="irho",
  optim.control = list(maxit=10000))

```

```
fit5= fitCopula(frank.cop, Vett_pobs, method = "itau.mpl",
  optim.control = list(maxit=1000))
```

si sottolinea come, malgrado sia possibile utilizzare procedure di stima basate su pseudo-osservazioni create dalla matrice di partenza (con pobs(x)), si è preferito procedere con i dati reali a disposizione.

Script R A.1.11. Per la stima del modello di regressione si è optato per osservare l'andamento sulla base di tutti e 3 i parametri, andando ad implementare manualmente le grandezze definite (come la derivata 4.2)

```
# Copula Regression: Stima mediante Copula Condizionata #

set.seed(100)
Campione=runif(10000,0,1)

Condiz=function(u,v,theta){
  Cond=((1-exp(-theta*v))*exp(-theta*u))/(-(1-exp(-theta*v))
    *(1-exp(-theta*u))-exp(-theta)+1)
  Cond
}

Stime_condiz=array(0,dim=c(length(Vett_U),length(Campione)))
for(i in 1:(length(Vett_U))){
  for(j in 1:length(Campione)){
    Stime_condiz[i,j]=Condiz(Vett_U[i],Campione[j],
      fit2@estimate)
  }
}
Stime_condiz2=array(0,dim=c(length(Vett_U),length(Campione))
)
for(i in 1:(length(Vett_U))){
  for(j in 1:length(Campione)){
    Stime_condiz2[i,j]=Condiz(Vett_U[i],Campione[j],
      fit3@estimate)
  }
}
Stime_condiz3=array(0,dim=c(length(Vett_U),length(Campione))
)
for(i in 1:(length(Vett_U))){
  for(j in 1:length(Campione)){
    Stime_condiz3[i,j]=Condiz(Vett_U[i],Campione[j],
      fit4@estimate)
  }
}

Stime_giuste=apply(Stime_condiz,1,mean)
Argomento=1-Stime_giuste
```

```

Stime_giuste2=apply(Stime_condiz2,1,mean)
Argomento2=1-Stime_giuste2

Stime_giuste3=apply(Stime_condiz3,1,mean)
Argomento3=1-Stime_giuste3

G0_inv=function(lamb,k,v){
  G= lamb*((log(1/(1-v)))^(1/k))
  G
}

Stime_Finali=G0_inv(Distribuzione_Adj[["estimate"]][["scale"
  ]], Distribuzione_Adj[["estimate"]][["shape"]],Argomento
  )
Stime_Finali2=G0_inv(Distribuzione_Adj[["estimate"]][["scale"
  "]], Distribuzione_Adj[["estimate"]][["shape"]],
  Argomento2)
Stime_Finali3=G0_inv(Distribuzione_Adj[["estimate"]][["scale"
  "]], Distribuzione_Adj[["estimate"]][["shape"]],
  Argomento3)

```

Script R A.1.12. Per la replicabilità del presente e dei codici successivi, il seme è stato fissato una sola volta con `set.seed(1000)`.

Per la dinamica real world dello Spread è stata utilizzata la seguente funzione

```

#————— ES1: Funzione dello Spread Real World —————#

SpreadTraj_RW=function(bCIR_RW,bBS_RW,T, t, np){
  r0 = bCIR_RW[1]
  alpha = bCIR_RW[2]
  gamma = bCIR_RW[3]
  rho = bCIR_RW[4]
  QZCB= bCIR_RW[5]
  Investimento=bCIR_RW[6]
  mu = bBS_RW[1]
  sigma = bBS_RW[2]
  S0 = bBS_RW[3]
  tau =T-t
  nt = np+1
  dt = tau/np
  sqdt = sqrt(dt)

  Portafoglio_Simul=array(0,dim = c(NSimul,np+1))
  Rendimento_Ptf=array(0,dim = c(NSimul,np+1))
  Titolo_Obb=array(0,dim = c(NSimul,np+1))
  Rendimento_Titolo=array(0,dim = c(NSimul,np+1))

```

```

Spread1=array(0,dim = c(NSimul,np+1))
Spread2=array(0,dim = c(NSimul,np+1))

for(n in 1:NSimul){
  rChi2 = array(0, dim=nt)
  rChi2[1] = r0;

  ni = 4*alpha*gamma/rho^2
  delta = rho^2*(1-exp(-alpha*dt))/(alpha*4);
  mi = exp(-alpha*dt)/delta

  for (i in 2:nt) {
    lambda = mi*rChi2[i-1];
    rChi2[i] = delta*rchisq(1, df=ni, ncp=lambda)
  }
  vChi2=array(0, dim = nt)
  vChi2[1]=1

  for(j in 2:nt){
    pesi = array(1, dim=j)
    pesi[1] = pesi[j] = 0.5

    integrale = (pesi \times\$ rChi2[1:j]) *dt
    vChi2[j] = exp(-integrale)
  }
  S<-array(0,dim=np+1)
  S[1]<-S0
  rand<-rnorm(np,0,1)
  for (i in 2:(np+1)){
    S[i]<-S[i-1]*exp((mu-0.5*sigma^2)*dt+sigma*sqrt(dt)*
      rand[i-1])
  }
  for (j in 2:nt){
    Portafoglio_Simul[n,j]=S[j]+(QZCB/vChi2[j])
    Rendimento_Ptf[n,j]=(Portafoglio_Simul[n,j]-Investim)/
      Investim
    Titolo_Obb[n,j]=Investimento/vChi2[j]
    Rendimento_Titolo[n,j]=(Titolo_Obb[n,j]-Investim)/
      Investim
    Spread1[n,j]=Rendimento_Titolo[n,j]-Rendimento_Ptf[n,j]
  }
  if(j<13){
    Spread2[n,j]= Rendimento_Titolo[n,j]*np/((T-t)*(j-1))
      )-
    Rendimento_Ptf[n,j]*np/((T-t)*(j-1))
  }
  if(j>=13){

```

```

        Spread2[n, j]= ((1+Rendimento_Titolo[n, j])^(np/((T-t)
            *(j-1)))-1)-
            ((1+Rendimento_Ptf[n, j])^(np/((T-t)*(j-1)))-1)
    }
}
}
Spread=list(Spread1, Spread2, Rendimento_Ptf, Rendimento_
    Titolo)
return(Spread)
}

```

dove con "\$times\$" si è indicato il prodotto riga per colonna, in R definito come `%*%` (ma non leggibile nel `lstlisting`).

Si osserva come in questo esempio, così come in quelli sviluppati di seguito, sia stata applicata una funzione lineare per passare dal rendimento periodale a quello annuale quando il periodo è inferiore all'anno e una funzione potenza per periodi superiori: questa scelta è stata presa sulla base di ciò che avviene in finanza dove per intervalli temporali inferiori all'anno si utilizza il Regime a Interessi Semplici (RIS) e per periodi superiori il Regime a Interessi Composti (RIC).

Script R A.1.13. Per la dinamica Risk Neutral, è stato utilizzato un codice analogo al precedente, ma con il valore di S definito come segue

```

#----- ES1: Funzione dello Spread Risk Neutral -----#
[.]
for (i in 2:(np+1)){
    S[i]<-S[i-1]*exp(-0.5*sigma^2*dt+sigma*sqrt(dt)*rand[i
        -1])*(1/(vChi2[i]/vChi2[i-1]))
}
[.]

```

in modo da poter utilizzare la dinamica risk-neutral del tasso spot calcolata con il CIR all'interno del modello considerato.

Script R A.1.14.

```

#----- ES2: Funzione dello Spread Real World -----#
SpreadTraj_RW=function(bCIR_RW, bBS_RW, b_RW2, T, t, np){
    r0 = bCIR_RW[1]
    alpha = bCIR_RW[2]
    gamma = bCIR_RW[3]
    rho = bCIR_RW[4]
    QZCB= bCIR_RW[5]
    Investimento=bCIR_RW[6]
    mu = bBS_RW[1]
    sigma = bBS_RW[2]
}

```

```

S0 = bBS_RW[3]
mu2 = b_RW2[1]
sigma2 = b_RW2[2]
S02 = b_RW2[3]
QZCB2 = b_RW2[4]
tau =T-t
nt = np+1
dt = tau/np
sqdt = sqrt(dt)

Portafoglio_Simul=array(0,dim = c(NSimul,np+1))
Rendimento_Ptf=array(0,dim = c(NSimul,np+1))
Portafoglio_Assic.ato=array(0,dim = c(NSimul,np+1))
Rendimento_Ptf_Assic.ato=array(0,dim = c(NSimul,np+1))
Spread1=array(0,dim = c(NSimul,np+1))
Spread2=array(0,dim = c(NSimul,np+1))

for(n in 1:NSimul){
  rChi2 = array(0, dim=nt)
  rChi2[1] = r0;

  ni = 4*alpha*gamma/rho^2
  delta = rho^2*(1-exp(-alpha*dt))/(alpha*4);
  mi = exp(-alpha*dt)/delta

  for (i in 2:nt) {
    lambda = mi*rChi2[i-1];
    rChi2[i] = delta*rchisq(1, df=ni, ncp=lambda)
  }
  vChi2=array(0, dim = nt)
  vChi2[1]=1

  for(j in 2:nt){
    pesi = array(1, dim=j)
    pesi[1] = pesi[j] = 0.5

    integrale = (pesi \times\$ rChi2[1:j]) *dt
    vChi2[j] = exp(-integrale)
  }
  S<-array(0,dim=np+1)
  S2<-array(0,dim=np+1)
  S[1]<-S0
  S2[1]=S02
  rand<-rnorm(np,0,1)
  rand2<-rnorm(np,0,1)
  for (i in 2:(np+1)){
    S[i]<-S[i-1]*exp((mu-0.5*sigma^2)*dt+sigma*sqrt(dt)*

```

```

        rand[i-1])
    }
    for (i in 2:(np+1)){
        S2[i]<-S2[i-1]*exp((mu2-0.5*sigma2^2)*dt+sigma2*sqrt(
            dt)*rand2[i-1])
    }
    for (j in 2:nt){
        Portafoglio_Simul[n,j]=S[j]+(QZCB/vChi2[j])
        Rendimento_Ptf[n,j]=(Portafoglio_Simul[n,j]-Investim)/
            Investim
        Portafoglio_Assic.ato[n,j]=S2[j]+(QZCB2/vChi2[j])
        Rendimento_Ptf_Assic.ato[n,j]=(Portafoglio_Assic.ato[n
            ,j]-Investim)/Investim
        Spread1[n,j]=Rendimento_Ptf_Assic.ato[n,j]-Rendimento_
            Ptf[n,j]
        if(j<13){
            Spread2[n,j]=Rendimento_Ptf_Assic.ato[n,j]*np/((T-t
                )*(j-1))-
                Rendimento_Ptf[n,j]*np/((T-t)*(j-1))
        }
        if(j>=13){
            Spread2[n,j]=((1+Rendimento_Ptf_Assic.ato[n,j])^(np
                /((T-t)*(j-1)))-1)-
                ((1+Rendimento_Ptf[n,j])^(np/((T-t)*(j-1)))-1)
        }
    }
}
Spread=list(Spread1,Spread2,Rendimento_Ptf,Rendimento_Ptf_
    Assic.ato)
return(Spread)
}

```

Script R A.1.15.

```

#----- ES2: Funzione dello Spread Risk Neutral -----#
[... ]
for (i in 2:(np+1)){
    S[i]<-S[i-1]*exp(-0.5*sigma^2*dt+sigma*sqrt(dt)*rand[i
        -1])*1/(vChi2[i]/vChi2[i-1])
}
for (i in 2:(np+1)){
    S2[i]<-S2[i-1]*exp(-0.5*sigma2^2*dt+sigma2*sqrt(dt)*
        rand2[i-1])*1/(vChi2[i]/vChi2[i-1])
}
[... ]

```

Script R A.1.16.

```

#----- Funzione per calcolare le Frequenze di riscatto -----#

```



```

FrequenzeRiscatto=function( Vettore , FreqBase){
  FRisc=array(0,length(Vettore))
  for(j in 1:length(Vettore)){
    FRisc[j]=Mod2Sigm_funz(Vettore[j])*FreqBase
  }
  return(FRisc)
}

```

dove Mod2Sigm_funz è la funzione utilizzata per calcolare il fattore dinamico, mediante il modello double sigmoid fittato sui dati osservati, al variare del valore dello spread

```

# ----- Funzione Mod2Sigm ----- #
Mod2Sigm_funz=function(x){
  y=0.815024+(1.21475-0.815024)/(1+exp(-1091.7*(x
    -(-0.00672355))))+(1.38771-1.21475)/(1+exp(-9128.06*(x
    -0.00674922)))
  y
}

```

A.2 Funzioni e Metodi

I problemi che coinvolgono l'ottimizzazione delle funzioni e le relative soluzioni sono ampiamente discussi nella comunità scientifica. Tipicamente, l'ottimizzazione di determinate proprietà di un sistema si ottiene scegliendo un corretto set di parametri, tipicamente espresso come un vettore.

L'approccio standard inizia andando a definire una funzione obiettivo, da massimizzare o minimizzare, che tenga eventualmente in considerazione alcuni vincoli². Nella maggior parte dei casi, come nel metodo dei minimi quadrati (lineari e non lineari), il problema di ottimizzazione va ad essere definito come la minimizzazione della funzione obiettivo, che in questi casi viene definita "funzione di costo". Nel caso in cui la funzione di costo sia non lineare e non differenziabile, i metodi di selezione dei parametri sono gli approcci di ricerca diretta, tra cui il Nelder&Mead, il Hooke&Jeeves, gli algoritmi genetici (GA) e le strategie di evoluzione (ES).

In ogni metodo di ricerca diretta vi è una strategia che genera variazioni dei vettori dei parametri e, una volta generata questa variazione, si deve decidere se accettare o meno il nuovo vettore. La maggior parte dei metodi di ricerca diretta utilizza il criterio greedy per prendere questa decisione, ovvero un nuovo vettore di parametri è accettato solo se riduce il valore della funzione di costo. Sebbene

²Oltre a questo approccio standard, possono essere utilizzati anche metodi che non necessitano di funzione obiettivo ma che operano con le cosiddette regioni di accettabilità, tuttavia questi metodi, sebbene semplifichino la formulazione del problema, hanno un qualità inferiore rispetto a quelli che presentano una funzione obiettivo.

il processo decisionale greedy³ converga abbastanza velocemente, vi è il rischio di rimanere intrappolato in un minimo locale – ed è per questo motivo che spesso risulta necessario andare a inserire manualmente dei limiti entro i quali si possono muovere i parametri⁴.

Tipicamente, come suggerito in [Storn, Price 1997], una tecnica di minimizzazione deve soddisfare cinque requisiti:

- (i) Capacità di gestire funzioni di costo non differenziabili, non lineari e/o multimodali.
- (ii) Parallelizabilità per poter far fronte a funzioni di costo ad alta intensità di calcolo e perciò computazionalmente pesanti. In altri termini, la parallelizzabilità è particolarmente importante quando si desidera svolgere ottimizzazioni computazionalmente onerose.
- (iii) Facilità d'uso, ovvero vi devono essere poche variabili di controllo per guidare la minimizzazione.
- (iv) Le variabili di controllo devono essere robuste e semplici da selezionare.
- (v) Buone proprietà di convergenza, i.e. si deve avere una convergenza coerente con il minimo globale in prove indipendenti e consecutive.

Nella presente sezione della appendice, si spiegano brevemente le funzioni R utilizzate negli script riportati in precedenza⁵ e gli algoritmi che esse utilizzano⁶.

Funzione R A.2.1. nls: Nonlinear Least Squares

Questa funzione consente di stimare il valore dei parametri di un modello non lineare attraverso le stime dei minimi quadrati non lineari, eventualmente pesate.

Nel caso in esame, gli input utilizzati sono stati il modello non lineare, i valori iniziali da utilizzare come punto di partenza e il default per l'algoritmo da utilizzare (ad esempio il Gauss-Newton).

Funzione R A.2.2. nlxb: Nash variant of Marquardt nonlinear least squares solution via qr linear solver

Questa funzione, come la precedente, stima i parametri di un modello non lineare a partire da un vettore di valori iniziali (input), andando a minimizzare la somma

³Letteralmente "Strategia dell'ingordo", ciò perché ad ogni passo si va ad effettuare la scelta migliore nell'immediato piuttosto che nel lungo termine. Si sottolinea che gli algoritmi di tipo Greedy sono consigliati per i problemi nei quali è prevista la selezione di un sottoinsieme ottimo di elementi, come il caso in esame.

⁴Tra i metodi che consentono di prevenire errori di convergenza, si citano tecniche di ricerca parallele come i GA e gli ES, ma in particolar modo assumono rilevanza le strategie di Simulated Annealing che rendono meno "ingorda" la decisione greedy consentendo occasionalmente un movimento in salita, così da uscire da situazioni di minimo locale. Ovviamente, per limitare gli spostamenti in salita, all'aumentare del numero di iterazioni diminuisce la probabilità di accettare un simile movimento – si può quindi dire che per un numero sufficientemente elevato di iterazioni, si torna al criterio greedy.

⁵Queste non sono le uniche funzioni a disposizione, il software R offre un'ampia scelta di metodi per calibrare i modelli. Ulteriori informazioni possono essere trovate nel testo [Nash 2014].

⁶Non essendo temi centrali del presente elaborato non si entra nel dettaglio degli algoritmi.

dei residui al quadrato. La particolarità di tale funzione risiede nell'utilizzo di una variante dovuta a Nash dell'Algoritmo di Marquardt, dove il sub-problema lineare viene risolto con il metodo QR (algoritmo che si basa sulla omonima fattorizzazione QR⁷).

L'algoritmo di ottimizzazione di Levenberg-Marquardt è un algoritmo iterativo usato per la soluzione di problemi in forma di minimi quadrati non lineari. In questo algoritmo ad ogni iterazione il vettore della stima dei parametri si aggiorna tramite una interpolazione tra l'algoritmo di Gauss-Newton e il metodo di discesa del gradiente, in altri termini viene eseguita una interpolazione ottimale tra il metodo della serie di Taylor e il metodo del gradiente: l'interpolazione è basata sulla massima vicinanza in cui la serie di Taylor troncata fornisce una adeguata rappresentazione del modello non lineare che si considera.

Per come esso è strutturato, questo algoritmo è più robusto dell'algoritmo di Gauss-Newton, tuttavia da un punto di vista computazionale è più lento.

Funzione R A.2.3. DEoptim: Differential Evolution Optimization

Questa funzione determina l'ottimo globale tramite l'algoritmo DE (Differential Evolution). I principali input sono la funzione che deve essere minimizzata (nei casi in esame si è scritta manualmente la sommatoria dei residui al quadrato) e i limiti inferiori e superiori per la determinazione dei parametri.

Il metodo di minimizzazione Differential Evolution (DE) è stato progettato per essere un metodo di ricerca diretta stocastica, e come gli altri metodi presentano il vantaggio di essere facilmente applicabili per la minimizzazione di funzioni costo su dati ricavati da un esperimento fisico anziché da una simulazione. Questo metodo utilizza una popolazione vettoriale in cui la perturbazione stocastica di questi vettori può essere eseguita in modo indipendente, permettendo così la parallelizzabilità.

Il metodo DE si ispira a Nelder & Mead⁸ e utilizza le informazioni presenti nella popolazione vettoriale per alterare lo spazio di ricerca.

Nello schema auto-organizzante della Differential Evolution viene preso il vettore differenza di due vettori di popolazione selezionati casualmente per perturbare un vettore esistente e questa perturbazione viene eseguita per ogni vettore di popolazione.

Laddove necessario si è scelto quindi di adottare una strategia DE perché rispetto a molte altre essa presenta una maggiore semplicità (sono richieste poche variabili di controllo) ed è più diretta.

⁷Il metodo QR viene utilizzato per il calcolo degli autovalori e degli autovettori di una matrice diagonalizzabile di dimensioni non troppo grandi.

⁸Il metodo di Nelder&Mead è un metodo di minimizzazione (sebbene quasi unicamente locale) auto-organizzato (input esterno minimo) che, a partire da un vettore k -dimensionale di parametri, utilizza un poliedro di $k + 1$ dimensioni per definire lo spazio di ricerca. Ciascun vertice del poliedro è rappresentato da un vettore di parametri k -dimensionale che campiona la funzione costo e i vettori di parametri sono generati da riflessioni (una trasformazione che "specchia" un oggetto di riflessione – che sia esso un centro, un asse o un piano di riflessione) con il valore più alto del costo e da contrazioni (che si ricorda essere funzioni da uno spazio metrico in sé stesso che presentano la distanza tra l'immagine di due elementi dello spazio inferiore rispetto alla distanza di questi) con i vettori che presentano un basso costo: si ha un aggiornamento dei vettori solo se si ha una riduzione nella funzione costo.

Funzione R A.2.4. `fitdstr`: Maximum-likelihood Fitting of Univariate Distributions

Consente di fittare i parametri su distribuzioni univariate tramite il metodo della massima verosimiglianza su un vettore di realizzazioni della variabile aleatoria.

La funzione, consente inoltre di confrontare tra loro i risultati ottenuti sulla base di diverse distribuzioni prestabilite, tra le quali poter scegliere a seconda delle caratteristiche: beta, cauchy, chi-squared, exponential, gamma, geometric, log-normal, lognormal, logistic, negative binomial, normal, Poisson, t e weibull.

Funzione R A.2.5. `fitCopula`: Estimation of the parameters in copula models

Consente di fittare il parametro di una copula inserendo come input i dati multivariati – che siano osservazioni o pseudo-osservazioni – appartenenti all'ipercubo unitario e indicandone la famiglia di appartenenza.

La funzione, fornisce anche un'ampia gamma di metodi di stima che è possibile utilizzare, sia parametrici che non parametrici.

Appendice B

Famiglia Esponenziale Lineare

Nella sua formulazione più generale, una distribuzione con peso assegnato appartenente alla famiglia esponenziale lineare presenta la seguente funzione di densità

$$f(y; \gamma, \phi, \omega) = e^{\frac{\omega}{\phi}[y\gamma - b(\gamma)]} \cdot c(y; \phi, \omega) \quad y \in Y \subset \mathbf{R}, \gamma \in \Gamma \subset \mathbf{R}, \phi \in \Lambda \subset [0, +\infty]$$

con γ parametro canonico, ω peso assegnato (strettamente positivo), ϕ parametro di dispersione e $b(\cdot)$ funzione cumulante.

Osservazione B.0.1. Si noti che spesso la definizione di "parametro di dispersione" è attribuita a $\lambda = \frac{\phi}{\omega}$, ovviamente si ha anche $\lambda \in \Lambda$.

Ci si sofferma brevemente sulla funzione cumulante, la cui utilità risiede nel mettere in relazione il parametro canonico con i momenti della distribuzione, infatti

$$\begin{cases} \mathbf{E}[Y] = \mu(\gamma) = b'(\gamma) = \frac{d}{d\gamma}b(\gamma) \\ \text{Var}[Y] = \phi\mu'(\gamma) = \phi b''(\gamma) = \phi b''(b'^{-1}(\mu)) = \phi V(\mu) \end{cases}$$

come si può osservare, le derivate della cumulant function consentono di ottenere i cumulanti.

Osservazione B.0.2. Una piccola precisazione riguarda una "famiglia interna" alla famiglia esponenziale, quella costituita dalle distribuzioni Tweedie: i modelli Tweedie godono della proprietà di invarianza di scala e presentano una variance function definita come $V(\mu) = \mu^p$.

A seconda del valore assunto da p , si ottengono distribuzioni continue, discrete o misture, le principali sono la Normale ($p = 0$), la Poisson ($p = 1$), la Poisson composta ($p \in (1, 2)$), la Gamma ($p = 2$) e la Normale inversa ($p = 3$).

Per $p \in (0, 1)$ non esiste alcuna distribuzione.

Appendice C

La simulazione di traiettorie

Non essendo il core dell'analisi, nella simulazione delle traiettorie sono stati considerati casi semplici, tenendo in considerazione pochi elementi e scegliendo modelli che consentissero di mantenere la stessa forma funzionale nel passare da una misura all'altra. Ciò in quanto, come già specificato, ciò che interessa è mostrare come, anche nei casi più semplici, è possibile ottenere la distorsione.

Nel presente elaborato si lavora con processi stocastici $\{X_t\}_{t \geq 0}$, ovvero con una collezione di variabili aleatorie indicizzate da un valore del tempo definito nel continuo¹.

L'evoluzione di X_t nel tempo può essere descritta in due modi:

1. Se si ottiene una soluzione analitica ed è possibile generare valori pseudo-casuali secondo la distribuzione assunta dalla variabile aleatoria, è possibile utilizzare la funzione di distribuzione condizionata

$$[X_t | X_0 = x_0] \sim F(X_t | X_0)$$

2. Se non si può procedere come definito sopra, si procede risolvendo numericamente l'equazione differenziale stocastica (SDE)

$$dX_t = \dots \quad \text{con } X_0 = x_0$$

C.1 Le probabilità Real World e Risk Neutral

(i) Misura Real World

La misura Real World, tipicamente denotata dalla lettera \mathcal{P} rappresenta la misura di probabilità sotto la quale si muovono le grandezze nel mondo reale. Sotto questa probabilità risulta evidente che, dato uno strumento finanziario, il suo rendimento atteso istantaneo è superiore a quello risk-free r_t

(ii) Misura Risk Neutral

Qualora siano rispettate le ipotesi di mercato completo e assenza di arbitraggi,

¹Sebbene sia possibile estendere anche il tempo e consentirgli di avere un andamento stocastico che velocizzi o rallenti in determinate situazioni, nel caso in esame si considera il tempo come nella vita quotidiana.

è possibile definire una misura rischio-neutrale \mathcal{Q} tale per cui, ad esempio

$$v(t, T) = \mathbf{E}_t^{\mathcal{Q}}[e^{-\int_t^T r(u)du}]$$

che corrisponde all'estensione stocastica dell'analogia espressione deterministica. Risulta evidente la capacità di modellizzare quella che è la dinamica sotto questa particolare misura in modo da ottenere numericamente il risultato dell'aspettativa.

E' interessante sottolineare come sotto questo tipo di probabilità, il rendimento istantaneo di tutti i titoli – che siano essi rischiosi o no – corrisponde al rendimento istantaneo di un titolo risk-free r_t

C.2 I Processi di diffusione (i.e. processi diffusivi)

I processi di diffusione sono dei processi Markoviani² con traiettoria continua³ definiti come

$$dX_t = a(X_t, t)dt + b(X_t, t)dZ_t \quad \text{con } X_0 = x_0 \quad (\text{C.1})$$

dove $a(X_t, t)$ è definito coefficiente di drift e $b^2(X_t, t)$ è definito coefficiente di diffusione.

Dalla (C.1) è possibile osservare come per simulare un processo di diffusione sia necessaria la simulazione di un Moto Browniano Standard Z_t , noto anche come processo di Wiener, che ha le seguenti proprietà

- (i) $Z_0 = 0$
- (ii) Incrementi indipendenti: dato $s \leq t \leq t + dt$, $Z_{t+dt} - Z_t$ è indipendente dal valore assunto da Z_s
- (iii) Incrementi Gaussiani: $Z_{t+dt} - Z_t \sim \mathcal{N}(0, dt)$
- (iv) Continuità del processo in t

I processi Browniani Z_t considerati sono tra loro correlati con matrice di correlazione

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \rho_{1,1} & \rho_{1,2} & \dots & \rho_{1,j} & \dots \\ \rho_{2,1} & \rho_{2,2} & \dots & \rho_{2,j} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{i,1} & \rho_{i,2} & \dots & \rho_{i,j} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}, \quad \text{con } \rho_{i,j} = \frac{\mathbf{E}[dZ_i dZ_j]}{dt}$$

C.3 Il Metodo Monte Carlo e lo schema di Eulero

Nel metodo Monte Carlo, essendo l'evoluzione delle grandezze definita nel continuo, ciò che si va a fare è definire un equivalente discreto per effettuare la simulazione. Per il tipo di processo definito nella (C.1), si ha

$$\Delta X_i = a(X_i, t)\Delta t + b(X_i, t)\sqrt{\Delta t}\varepsilon_i(t + \Delta t) \quad \text{con } \Delta X_i = X_i(t + \Delta t) - X_i(t) \quad (\text{C.2})$$

²

³Questa ipotesi può essere rilassata e in tal caso si passa alla classe di processi di Lévy.

dove $\varepsilon(t + \Delta t) = (\varepsilon_1(t + \Delta t), \varepsilon_2(t + \Delta t), \dots)$ è un vettore aleatorio che si distribuisce secondo una Gaussiana Multivariata Standard

$$\varepsilon \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma)$$

Lo schema appena definito prende il nome di Schema di Eulero e si ottiene tramite espansione in serie di Taylor, infatti

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} dX(u) &= X(t + \Delta t) - X(t) \implies \\ \implies X(t + \Delta t) &= X(t) + \int_t^{t+\Delta t} a(X(u), u) du + \int_t^{t+\Delta t} b(X(u), u) dZ(u) \end{aligned}$$

e i due integrali si approssimano come segue

- per il coefficiente $a(X, t)$ si prendono i termini al primo ordine in Δt

$$\int_t^{t+\Delta t} a(X(u), u) du \approx a(X(t), t) \int_t^{t+\Delta t} du = a(X(t), t) \Delta t$$

- per il coefficiente $b(X, t)$ si prendono i termini di ordine $\sqrt{\Delta t}$

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} b(X(u), u) dZ(u) &\approx b(X(t), t) \int_t^{t+\Delta t} dZ(u) = \\ &= b(X(t), t) [Z(t + \Delta t) - Z(t)] = b(X(t), t) \sqrt{\Delta t} \varepsilon \end{aligned}$$

Questo schema, così come altri ⁴, consente di simulare una traiettoria sulla discretizzazione dell'intervallo temporale considerato, i.e. $[0, T]$.

Considerando un numero p di intervalli, se la distanza temporale tra ciascuno di questi è costante, allora l'ampiezza è $\Delta t = \frac{T}{p}$ e gli istanti temporali saranno definiti come

$$t_k = k\Delta t \quad k = 0, 1, \dots, p \quad t_0 = 0 \quad t_p = T$$

Scrivendo allora esplicitamente la (C.2)

$$X_i(t_k) = X_i(t_{k-1}) + a(X_i(t_{k-1}), t_{k-1})\Delta t + b(X_i(t_{k-1}), t_{k-1})\sqrt{\Delta t}\varepsilon_i(t_k) \quad (\text{C.3})$$

Tuttavia, quando si utilizza uno schema di discretizzazione per rappresentare una dinamica continua, si va incontro all'errore di discretizzazione. Ponendo per semplicità notazionale $h = \Delta t$ e scegliendo questo step adeguatamente piccolo, la bontà dell'approssimazione che viene effettuata si misura osservando due tipi di convergenza

⁴Si cita un altro celeberrimo schema, ovvero quello di Milstein nel quale si considera ancora una volta una espansione in serie di Taylor per entrambi i termini, ma entrambi di ordine $o(\Delta t)$

$$X_i(t+\Delta t) = X_i(t) + a(X_i(t), t)\Delta t + b(X_i(t), t)\sqrt{\Delta t}\varepsilon_i(t+\Delta t) + \frac{1}{2} \frac{\partial b(X_i(t), t)}{\partial X_i(t)} b(X_i(t), t)\Delta t[\varepsilon_i^2(t+\Delta t) - 1]$$

questo tipo di espansione si basa sul lemma di Itô e approssima il secondo termine come $b(X(u), u) \approx b(X(t), t) + \frac{\partial b(X(t), t)}{\partial X(t)} b(X(t), t)[Z(t + \Delta t) - Z(t)]$.

- Convergenza forte $\alpha > 0$, che osserva la distanza che si ha tra processo discretizzato e continuo

$$\mathbf{E}[|X^{Disc}(ph) - X(T)|] \leq ch^\alpha \quad , \text{ con } c > 0$$

Lo schema di Eulero ha l'ordine di convergenza forte pari a $\frac{1}{2}$

- Convergenza debole $\beta > 0$, che osserva la distanza tra distribuzione esatta e costruita empiricamente

$$|\mathbf{E}[f(X^{Disc}(ph))] - \mathbf{E}[f(X(T))]| \leq ch^\beta \quad , \text{ con } c > 0 \quad , \quad f(x) \text{ funzione reale}$$

Lo schema di Eulero ha l'ordine di convergenza debole pari a 1.

C.4 Obbligazioni: Modello di Cox, Ingersoll e Ross per contratti IRS

Si precisa che, in quanto segue, si osserva per semplicità la dinamica di contratti IRS non rivalutabili e non legati, ad esempio, all'andamento dell'inflazione.

Per i contratti Interest Rate Sensitive, si ipotizza un modello unifattoriale con sorgente di incertezza r_t scelto all'interno della classe dei modelli affini, ovvero quei modelli per cui, dato il generico processo di diffusione

$$dr_t = f(t, r_t)dt + g(t, r_t)dZ_t$$

si ha

$$f(t, r_t) = f_0 + f_1 r_t \quad g^2(t, r_t) = g_0 + g_1 r_t$$

Ponendo

$$f(t, r_t) = \alpha(\gamma - r_t) \quad g_0 > 0 \quad , \quad g_1 = 0$$

si ottiene il modello Cox, Ingersoll e Ross⁵.

Il moto che si ha nel modello CIR è di tipo square-root mean-reverting

$$\mathcal{P} : \quad dr_t = \alpha^{\mathcal{P}}(\gamma^{\mathcal{P}} - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dZ_t^{\mathcal{P}} \quad (\text{C.4})$$

$$\mathcal{Q} : \quad dr_t = \alpha^{\mathcal{Q}}(\gamma^{\mathcal{Q}} - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dZ_t^{\mathcal{Q}} \quad (\text{C.5})$$

dove r_t è il valore assunto dalla intensità di rendimento nell'istante di valutazione nei due ambienti.

Si osserva che in questo modello, data la definizione del termine di diffusione, la volatilità del processo cresce con il crescere del tasso spot. Tuttavia, proprio questo grande vantaggio di questo processo è anche uno dei suoi principali limiti, infatti quando r_t si avvicina allo 0, il termine di diffusione non porta a grandi variazioni rispetto a quanto determinato dal termine di drift e, per tale motivo, il tasso spot ricesce e di conseguenza si ha necessariamente $r_t \geq 0$.

⁵Si è scelto di adottare tale modello per la sua semplicità, in analisi più dettagliate possono essere utilizzati altri processi o delle estensioni di questo, come il CIR++ o il CIR traslato (dove si definisce "manualmente" un limite inferiore raggiungibile).

Si specifica, inoltre, che tra i parametri sussiste la cosiddetta condizione di Feller, la quale, se soddisfatta dal mondo reale, lo è anche nel mondo rischio neutrale

$$\frac{2\alpha^{\mathcal{P}}\gamma^{\mathcal{P}}}{\sigma^2} \geq 1 \implies \frac{2\alpha^{\mathcal{Q}}\gamma^{\mathcal{Q}}}{\sigma^2} \geq 1$$

in quanto il legame tra i parametri è dato da

$$\alpha^{\mathcal{Q}} = \alpha^{\mathcal{P}} - \pi \quad \gamma^{\mathcal{Q}} = \frac{\alpha^{\mathcal{P}}\gamma^{\mathcal{P}}}{\alpha^{\mathcal{P}} - \pi}$$

dove il parametro π consente di definire il premio di mercato per il rischio⁶

$$\lambda_t = \pi \frac{\sqrt{r_t}}{\sigma}$$

che deriva ancora una volta da un modello affine $\lambda_t = \frac{\lambda_0}{\sqrt{r_t}} + \lambda_1\sqrt{r_t}$, ponendo $\lambda_0 = 0$ e $\lambda_1 = \frac{\pi}{\sigma}$.

In questo modello, il prezzo in t di uno ZCB unitario con scadenza in $T > t$ viene tipicamente rappresentato con la parametrizzazione di Brown e Dybvig che si basa sui parametri Risk Neutral, ovvero

$$d = \sqrt{(\alpha^{\mathcal{Q}})^2 + 2\sigma^2} \quad \phi = \frac{\alpha^{\mathcal{Q}} + d}{2} \quad \nu = 2\frac{\alpha^{\mathcal{Q}}\gamma^{\mathcal{Q}}}{\sigma^2}$$

$$v(t, T) = \left[\frac{de^{\phi(T-t)}}{\phi(e^{d(T-t)} - 1) + d} \right] e^{-r_t \frac{e^{d(T-t)} - 1}{\phi(e^{d(T-t)} - 1) + d}} \quad (\text{C.6})$$

Osservazione C.4.1. Ovviamente, se r_t dovesse assumere valori negativi durante la traiettoria, non esisterebbe il coefficiente di diffusione del processo – perché $\sqrt{r_t}$ non sarebbe più calcolabile – e per tale motivo sono state proposte diverse varianti che adottano un vincolo $\max(\sqrt{\max(r_t, 0)})$, come suggerito da Deelstra e Delbaen, o, come proposto da Diop, una sorta di "valore specchiato" in base al quale si utilizza il valore assoluto della formula precedentemente definita nel calcolare r_t ad ogni iterazione.

Andando invece a lavorare sulla dinamica di r_t , nel modello CIR si ottiene una distribuzione esatta per $[r_T|r_t]$, infatti

$$[r_T|r_t]^{\mathcal{P}} \sim \chi^2(\delta^{\mathcal{P}}r_T; \nu^{\mathcal{P}}, \mu^{\mathcal{P}}r_t) \quad (\text{C.7})$$

$$[r_T|r_t]^{\mathcal{Q}} \sim \chi^2(\delta^{\mathcal{Q}}r_T; \nu^{\mathcal{Q}}, \mu^{\mathcal{Q}}r_t) \quad (\text{C.8})$$

dove si è adottata la seguente parametrizzazione

$$\delta = \frac{\sigma^2(1 - e^{-\alpha\tau})}{4\alpha} \quad \mu = \frac{4\alpha e^{-\alpha\tau}}{\sigma^2(1 - e^{-\alpha\tau})} = \frac{e^{-\alpha\tau}}{\delta} \quad \nu = 4\frac{\alpha\gamma}{\sigma^2}$$

⁶Nel modello CIR, provenendo dalla classe di modelli affini, è possibile esprimere il premio per il rischio in modo alternativo come $\lambda_t = \frac{\lambda_0}{\sqrt{r_t}} + \lambda_1\sqrt{r_t}$, che mostra come si possa avere una divergenza per $r_t = 0$

con $\tau = T - t$ e, ovviamente, per la rispettiva distribuzione si useranno i parametri real world o quelli risk neutral.

Nel modello CIR, perciò, il tasso spot si distribuisce come una χ^2 non centrato con ν gradi di libertà e un parametro di non centralità pari a μr_t , da cui

$$\mathbf{E}_t[r(T)] = \gamma - (\gamma - r(t))e^{-\alpha(T-t)} \quad \text{da cui} \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{E}_t[r(T)] = \gamma$$

$$\text{Var}_t[r(T)] = \frac{\sigma^2}{2\alpha} [1 - e^{-\alpha(T-t)}] [2r(t)e^{-\alpha(T-t)} + \gamma(1 - e^{-\alpha(T-t)})]$$

Per ciascuna traiettoria di r_t calcolata, viene calcolato un fattore di sconto $\hat{v}_i(t_0, T)$ simulato mediante la regola del trapezio⁷, secondo cui è possibile approssimare un integrale definito suddividendo l'intervallo in n sotto-intervalli e calcolare l'area dei trapezi formati dalla curva

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f(x_j) + f(x_{j+1})}{2}$$

C.5 Azioni: estensione del modello Black&Scholes

Il modello di Black e Scholes viene ampiamente utilizzato per descrivere la dinamica dei prezzi azionari, dei prezzi immobiliari e dei cambi. Nel presente esempio, semplificato rispetto al ciò che viene nella realtà, esso sarà utilizzato per descrivere l'andamento del valore delle azioni S_t (eventualmente considerando l'intensità di stacco dei dividendi y). Si sottolinea come, nel modello di Black&Scholes in senso stretto, una delle ipotesi sottostanti è la presenza di una struttura deterministica e piatta per lo ZCB, ipotesi che non verrà effettuata nel caso in esame nel quale, per evitare di semplificare troppo la realtà, si usa una estensione con tasso spot r_t stocastico e intensità di rendimento naturale μ deterministica e costante: mantenendo fisso il valore del rendimento rischioso μ , permettendo alla struttura risk-free di variare, ciò che si ottiene è un premio per il rischio λ_t che varia nel tempo. Nel caso considerato, si ipotizza che la variabile prezzo azionario sia una estensione del Moto Browniano Geometrico⁸ e, per tale motivo, come vedremo bisogna considerare anche la seguente correlazione

$$\rho_{Z_S, Z_r} dt = \mathbf{E}[dZ_{S_t} dZ_{r_t}]$$

La dinamica di questo prezzo è descritta dall'equazione differenziale stocastica (C.9) in ambiente Real-World (misura \mathcal{P}) e dalla (C.10) in ambiente Risk-Neutral (misura \mathcal{Q})

$$\mathcal{P} : \quad dS_t = S_t(\mu - y)dt + \sigma S_t dZ_t^{\mathcal{P}} \quad (\text{C.9})$$

$$\mathcal{Q} : \quad dS_t = S_t(r_t - y)dt + \sigma S_t dZ_t^{\mathcal{Q}} \quad (\text{C.10})$$

dove con r_t si indica l'intensità di rendimento non rischiosa nell'istante t , con σ la volatilità del prezzo azionario e con $dZ_t^{\mathcal{P}}$ e $dZ_t^{\mathcal{Q}}$ due processi di Wiener (i.e.

⁷Regola di integrazione numerica, o quadratura, appartenente alle formule di Newton-Cotes, le quali utilizzano un set di punti equidistanti.

⁸E' interessante osservare che il nome deriva dal fatto che le variazioni sono proporzionali al valore stesso del processo, proprio come avviene in una serie geometrica.

Moti Browniani standard), rispettivamente, uno per la misura Real-World e uno per quella Risk-Neutral.

Il legame che sussiste tra le due misure di probabilità è rappresentato dal premio (i.e. prezzo) di mercato per il rischio λ_t , grazie al quale a partire da una misura, è possibile passare all'altra

$$\lambda_t = \frac{\mu - r_t}{\sigma} \implies \mu = r_t + \lambda_t \sigma$$

da cui, come già spiegato in precedenza, è possibile apprezzare la variazione nel tempo di λ_t .

Senza perdita di generalità, essendo questo un semplice esempio del problema che si va a generare, si può ipotizzare che la società che ha emesso l'azione non distribuisca utili sottoforma di dividendi e perciò $y = 0$.

Considerando l'ipotesi di correlazione tra r_t e S_t non ci sono più i presupposti per avere sempre la soluzione in forma chiusa⁹ che comunque, a partire dalla (C.10), sarà

$$S_T = S_t e^{\int_t^T r(u) du - \frac{1}{2} \sigma^2 (T-t) + \sigma \sqrt{T-t} [Z_T^Q - Z_t^Q]} \quad (\text{C.11})$$

dove si sottolinea la presenza del fattore di montante definito dall'integrale stocastico $\int_t^T r(u) du$ che dovrà essere stimato mediante i risultati ottenuti in Appendice C.4, ottenendo, per una generica traiettoria simulata

$$S_i(T) = S(t) e^{-\frac{1}{2} \sigma^2 (T-t) + \sigma \sqrt{T-t} [\varepsilon_i(T)]} \cdot \frac{1}{\hat{v}_i(t, T)} \quad (\text{C.12})$$

con $\hat{v}_i(t, T)$ ancora una volta calcolato applicando la regola del trapezio sulla dinamica di r_t .

Osservazione C.5.1. Esistono ulteriori estensioni del modello di Black e Scholes, tra queste vi è il modello di Heston dove si assume che il prezzo azionario S_t segue il processo di Black e Scholes, ma con una varianza stocastica e modellizzata con il processo CIR – ma con la struttura per scadenza piatta.

⁹Nella dinamica originale, ovvero in assenza di correlazione e con struttura di r piatta e deterministica, non sarebbe necessario procedere tramite simulazione di Monte Carlo, infatti a partire dalla (C.10) la soluzione esatta sarebbe stata data da

$$S_T = S_t e^{(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2)(T-t) + \sigma Z_t}$$

Domanda: vale lo stesso per la (C.9) giusto?

Ottenendo la distribuzione Gaussiana per il rendimento logaritmico

$$\ln \left(\frac{S_T}{S_t} \right) \sim \mathcal{N} \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t), \sigma^2 (T-t) \right)$$

che, almeno in prima approssimazione, è coerente con le proprietà dei prezzi delle azioni, e in questo tipo di processo il valore medio cresce esponenzialmente

$$\mathbf{E}[S_T | S_t] = S_t e^{\mu(T-t)}$$

Appendice D

Le Copule statistiche

La presente sezione dell'appendice definisce e spiega alcuni concetti fondamentali delle copule, strumento fondamentale che risolve il problema di determinare come le funzioni marginali unidimensionali siano legate alla loro distribuzione congiunta. Prima ancora di spiegare il concetto stesso di copula, si riporta il famoso Teorema di Sklar così come spiegato in [Thevaraja 2018], in modo da poter capire l'importanza che ha questo tema

Teorema D.0.1. Teorema di Sklar (caso bidimensionale)

Sia H una funzione di distribuzione congiunta con marginali G_0 e G_1 , allora esiste una copula C tale che

$$H(x, y) = C(G_1(x), G_0(y)) \quad \forall x, y \in \bar{\mathcal{R}} \quad (\text{D.1})$$

dove con $\bar{\mathcal{R}}$ si è indicato il sistema esteso dei numeri reali, ovvero il sistema che si ottiene aggiungendo a \mathcal{R} i termini $+\infty$ e $-\infty$ trattandoli come numeri reali.

Si osserva che

- se le funzioni G_0 e G_1 sono continue, allora la funzione C è unica.
- se una delle due funzioni non dovesse essere continua, la funzione C sarà determinata in modo univoco sull'intervallo $(\text{Supporto di } G_1) \times (\text{Supporto di } G_0)$

Inoltre, è possibile definire H a partire dalle altre funzioni: se C è una funzione copula e si conoscono le distribuzioni marginali G_0 e G_1 , allora H definite nella (D.1) è la loro funzione di distribuzione congiunta.

In altri termini, sebbene a partire da un insieme di distribuzioni marginali (non necessariamente della stessa famiglia distributiva) le possibili distribuzioni congiunte sono infinite, quando si definisce una copula che le collega questa diventerà unica.

D.1 Introduzione alle Copule

Definizione D.1.1. Dato un vettore di variabili aleatorie k -dimensionale (X_1, X_2, \dots, X_k) nello spazio di probabilità (Ω, \mathcal{F}, P) con distribuzioni marginali Uniformi in $[0,1]$, se la funzione $C : [0, 1]^k \rightarrow [0, 1]$ è la funzione di ripartizione congiunta del vettore, allora C prende il nome di k -copula (i.e. copula k -dimensionale)

Quindi una copula altro non è che una funzione $C : [0,1]^k \rightarrow [0,1]$, con la peculiarità di essere la funzione di ripartizione di un vettore di variabili aleatorie uniformi in $[0,1]$.

Nel presente elaborato si utilizza una regressione basata su una copula bivariata e perciò, laddove non si svolgano delle generalizzazioni, la discussione sarà limitata a questo caso.

Le variabili a disposizione sono $f(\Delta_{mkt,t})$ e $\Delta_{mkt,t}$, con funzioni di ripartizione G_0 e G_1 – le cui densità sono $g_0(\cdot)$ e $g_1(\cdot)$ – e distribuzione congiunta H

$$G_0(y) = P[f(\Delta_{mkt,t}) \leq y] \quad G_1(x) = P[\Delta_{mkt,t} \leq x]$$

$$H(y, x) = P[f(\Delta_{mkt,t}) \leq y, \Delta_{mkt,t} \leq x]$$

dove, per l'analisi che si andrà a svolgere, si assume che la funzione H abbia le derivate di primo e secondo ordine continue.

Poiché i dati a disposizione non sono distribuiti secondo uniformi in $[0,1]$, risulta doveroso introdurre alcuni concetti

- Funzione Quantile

Le funzioni Quantile G_0^{-1} e G_1^{-1} , sono definite come segue

$$G_0^{-1}(s_0) = \inf\{y | G_0(y) \geq s_0\} \quad s_0 \in (0, 1)$$

$$G_1^{-1}(s_1) = \inf\{x | G_1(x) \geq s_1\} \quad s_1 \in (0, 1)$$

Ovviamente, qualora le funzioni dovessero essere continue, questa funzione, anche nota come inversa generalizzata, corrisponderebbe semplicemente all'inversa della funzione di ripartizione.

- Trasformazione integrale di probabilità

Con l'unica condizione che la distribuzione utilizzata sia la vera distribuzione della variabile aleatoria¹, la trasformazione integrale di probabilità permette di passare da variabili aleatorie appartenenti ad una qualsiasi distribuzione, a variabili aleatorie che seguono una distribuzione uniforme. Se G_0 (risp. G_1) è una funzione di ripartizione continua, allora la variabile aleatoria $G_0(y)$ (risp. $G_1(y)$) segue una distribuzione uniforme in $[0,1]$

$$G_0(f(\Delta_{mkt,t}); y) \sim Unif(0, 1) \quad G_1(\Delta_{mkt,t}; x) \sim Unif(0, 1)$$

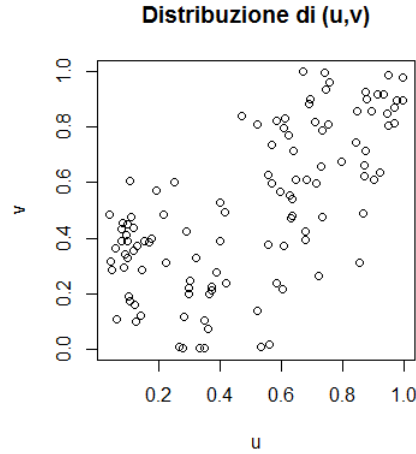
Come detto in precedenza, sia la variabile spread di mercato che la variabile dinamica del tasso di riscatto non seguono una distribuzione uniforme, tuttavia presentano distribuzioni marginali continue G_1 e G_0 e perciò è possibile definire U e V come segue

$$\begin{cases} U = G_1(\Delta_{mkt,t}) \sim Unif(0, 1) \\ V = G_0(f(\Delta_{mkt,t})) \sim Unif(0, 1) \end{cases} \quad (D.2)$$

¹Questa condizione, tuttavia, può essere "elusa" per campioni sufficientemente grandi in quanto in quel caso si può ottenere un risultato approssimativamente corretto utilizzando la distribuzione che meglio fitta i dati.

Ovviamente si ha che $\Delta_{mkt,t} = G_1^{-1}(U)$ e $f(\Delta_{mkt,t}) = G_0^{-1}(V)$

Sul dataset a disposizione, utilizzando A.1.8, i dati a disposizione sono stati trasformati ottenendo la seguente distribuzione congiunta di (u, v)



La definizione precedentemente definita, allora, può essere scritta come

Definizione D.1.2. Dato un vettore di variabili aleatorie bidimensionale (X, Y) nello spazio di probabilità (Ω, \mathcal{F}, P) , la copula C di (X, Y) è la distribuzione congiunta delle loro trasformazioni uniformi U e V

$$C(u, v) = P[U < u, V < v] = P[G_0(f(\Delta_{mkt,t})) < v, G_1(\Delta_{mkt,t}) < u]$$

dove u e v sono, rispettivamente, $u = G_1(x)$ e $v = G_0(y)$.

La copula bidimensionale, perciò, è una funzione $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ che gode di diverse proprietà², quelle che torneranno più utili sono

- (i) $C(u, 0) = 0$ e $C(0, v) = 0, \forall u, v \in [0, 1]$
- (ii) $C(u, 1) = u$ e $C(1, v) = v, \forall u, v \in [0, 1]$
- (iii) C è una funzione crescente³
- (iv) C è non decrescente rispetto ciascun argomento

$$C(u_2, v) - C(u_1, v) \geq 0 \quad u_2 \geq u_1, \quad u_1, u_2 \in [0, 1], \quad \forall v \in [0, 1]$$

$$C(u, v_2) - C(u, v_1) \geq 0 \quad v_2 \geq v_1, \quad v_1, v_2 \in [0, 1], \quad \forall u \in [0, 1]$$

- (v) C è uniformemente continua nel suo dominio

$$|C(u_2, v_2) - C(u_1, v_1)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1| \quad u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0, 1], \quad u_2 \geq u_1, \quad v_2 \geq v_1$$

- (vi) Data una funzione copula C , esistono le sue derivate parziali $\frac{\partial C}{\partial u}$ e $\frac{\partial C}{\partial v}$

²Un elenco dettagliato può essere trovato in [Thevaraja 2018]

³In [Thevaraja 2018] questa proprietà è spiegata usando il cosiddetto Volume-C del rettangolo $[u_1, v_1] \times [u_2, v_2]$, con $u_2 \geq u_1$ e $v_2 \geq v_1$ definendo il volume come $C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0$

Un altro importante concetto è la densità della copula, di cui si riporta la seguente

Definizione D.1.3. La funzione di densità della copula è definita come

$$c(u, v) = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v}$$

Per variabili aleatorie continue⁴, come nel caso in esame, è possibile collegare la funzione di densità della copula c con la densità della distribuzione congiunta h

$$c(u, v) = h(G_1^{-1}(U), G_0^{-1}(v)) \cdot \left[\left[\frac{\partial \Delta_{mkt,t}}{\partial U} \quad \frac{\partial \Delta_{mkt,t}}{\partial V} \right] \left[\frac{\partial f(\Delta_{mkt,t})}{\partial U} \quad \frac{\partial f(\Delta_{mkt,t})}{\partial V} \right] \right] \quad (D.3)$$

da cui

$$c(u, v) = \frac{h(G_1^{-1}(U), G_0^{-1}(V))}{g_1(G_1^{-1}(U))g_0(G_0^{-1}(V))} = \frac{h(x, y)}{g_1(x)g_0(y)} \quad (D.4)$$

e di conseguenza è possibile, invertendo i termini, ottenere la densità congiunta a partire dalle altre grandezze come

$$h(x, y) = c(u, v)g_1(x)g_0(y) \quad (D.5)$$

Inoltre, considerata l'esistenza di tutte le derivate parziali della funzione copula, è possibile ottenere le distribuzioni condizionate, di cui interessa in particolare quella di $f(\Delta_{mkt,t})$ dato $\Delta_{mkt,t}$

Definizione D.1.4. La notazione $C_u(v)$ (risp. $C_v(u)$) viene utilizzata per denotare la distribuzione condizionata di V , dato U (risp. di U , dato V)

$$C_u(v) = P[V \leq v | U = u] = P[f(\Delta_{mkt,t}) \leq y | \Delta_{mkt,t} = x] = \frac{\partial C(u, v)}{\partial u}$$

Come già spiegato, da un punto di vista statistico le copule consentono di descrivere e studiare misure di dipendenza senza scala tra le variabili, catturandone qualsiasi struttura sottostante. Si tenga presente che alcune delle principali misure di dipendenza utilizzate nella pratica possono essere espresse in termini di copule

(i) Coefficiente di correlazione di Pearson

$$\rho_P(x, y) = \frac{1}{\sigma_x, \sigma_y} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [H(x, y) - G_1(x)G_0(y)] dx dy$$

$$\rho_P(x, y) = \frac{1}{\sigma_X, \sigma_Y} \int_0^1 \int_0^1 [C(u, v) - uv] dG_1^{-1}(u) dG_0^{-1}(v)$$

(ii) Coefficiente di correlazione di Spearman

$$\rho_S(x, y) = 12 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [H(x, y) - G_1(x)G_0(y)] dG_1(x) dG_0(y)$$

$$\rho_S(X, Y) = 12 \int_0^1 \int_0^1 [C(u, v) - uv] dudv$$

⁴E' richiesta la continuità in modo da avere G_0^{-1} e G_1^{-1} monotone crescenti e continue.

(iii) Tau di Kendall

$$\tau_K(x, y) = 4 \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(x, y) dH(x, y) \right] - 1$$

$$\tau_K(X, Y) = 4 \left[\int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dC(u, v) \right] - 1$$

D.2 Le famiglie di Copule

La maggior parte delle copule, appartengono a diverse famiglie che possono essere uniparametriche o multiparametriche. Nella presente sezione, si intende riportare sinteticamente alcune delle principali famiglie che è possibile incontrare in letteratura

		<i>Famiglia di Copule</i>	<i>Tipologia di dipendenza</i>
<i>Copule Uniparametriche</i>	<i>Farlie-Gumbel-Morgenstern</i>	<i>FGM</i>	Simmetrica
	<i>Archimedee</i>	<i>Gumbel</i>	Upper tail
		<i>Joe</i>	Upper tail
		<i>Frank</i>	Simmetrica
		<i>Clayton</i>	Lower tail
<i>Ellittiche</i>	<i>Gaussiana</i>	Simmetrica	
<i>Copule Biparametriche</i>	<i>Frechet</i>	<i>Frechet</i>	

Risulta evidente, sulla base del tipo di dipendenza che si sta analizzando nel presente elaborato e del dataset a disposizione, che le famiglie più adatte sono la FGM, la Frank e la Gaussiana⁵

D.2.1 Famiglia FGM

La famiglia Farlie-Gumbel-Morgenstern è una famiglia di copule uniparametrica e simmetrica, con funzione copula C definita come

$$C(u, v; \theta) = uv[1 + \theta(1 - u)(1 - v)] \quad \theta \in [-1, 1] \quad (\text{D.6})$$

La densità delle copule appartenenti a questa famiglia è definita come

$$c(u, v) = 1 + \theta(1 - 2u)(1 - 2v) \quad (\text{D.7})$$

D.2.2 Famiglia Frank

La famiglia Frank è una famiglia appartenente alle copule Archimedee e, come già osservato in precedenza, consente di trattare una dipendenza simmetrica⁶. La

⁵Ulteriori informazioni sulle distribuzioni citate e non trattate possono essere trovate in [Thevaraja 2018].

⁶Più precisamente, si parla di simmetria di riflessione (reflection symmetry).

funzione copula C di questa famiglia è data da

$$C(u, v; \theta) = -\theta^{-1} \cdot \log \left(\frac{1 - e^{-\theta} - (1 - e^{-\theta u})(1 - e^{-\theta v})}{1 - e^{-\theta}} \right) \quad \theta \in \mathcal{R}^0 \quad (\text{D.8})$$

dove con \mathcal{R}^0 si intende l'insieme dei numeri reali escluso lo 0. e densità

$$c(u, v; \theta) = \frac{\theta(1 - e^{-\theta})(e^{-\theta(u+v)})}{[1 - e^{-\theta} - (1 - e^{-\theta u})(1 - e^{-\theta v})]^2}$$

D.2.3 Famiglia Gaussiana

La famiglia Gaussiana appartiene alle copule ellittiche – ovvero quelle copule associate e distribuzioni ellittiche – e la sua funzione copula è data da

$$C(u, v; \theta) = \phi_{\theta}(\phi^{-1}(u), \phi^{-1}(v)) \quad \theta \in [-1, 1] \quad (\text{D.9})$$

In questo caso il θ corrisponde al parametro di correlazione.

Osservazione D.2.1. Quando il discorso si estende su più dimensioni, si passa ad una matrice dei parametri che corrisponde alla matrice di correlazione.

Ciò che va a fare la copula gaussiana, perciò, è creare una funzione di distribuzione congiunta normale, a partire da marginali distribuite come normali standard. La sua densità di copula è data da

$$c(u, v; \theta) = \frac{1}{1 - \theta^2} \left[e^{\frac{-1}{2(1-\theta^2)}[(\phi^{-1}(u))^2 + (\phi^{-1}(v))^2 - 2\theta\phi^{-1}(u)\phi^{-1}(v)]} \right] \left[e^{\frac{1}{2}[(\phi^{-1}(u))^2 + (\phi^{-1}(v))^2]} \right]$$

Osservazione D.2.2. Si sottolinea che la copula gaussiana è ampiamente trattata in letteratura e utilizzata nella pratica economica per costruire modelli di dipendenza tra titoli e grandezze finanziarie, tuttavia la distribuzione presenta code leggere e perciò non si rivela adatta ad interpretare eventi gravi, considerandoli eventi particolarmente rari.

Questo ostacolo può essere superato utilizzando una ulteriore tipologia di copula ellittica, ovvero quella basata sulla t-student che, avendo le code più pesanti, si rivela più adatta in determinate circostanze.

Tuttavia, considerata la richiesta di distribuzioni marginali gaussiane e in virtù dei risultati precedentemente raggiunti, si esclude questa famiglia di copule dallo step successivo: la Copula Regression.

D.3 La Copula Empirica

Quando si ha a disposizione un dataset bivariato (x_t, y_t) di dimensione n estratto da una distribuzione bivariata continua, come nel caso in esame con $(\Delta_{mkt,t}, f(\Delta_{mkt,t}))$ che ha dimensione 114, è possibile estendere il concetto di copula e applicarlo a valori empirici, ottenendo la copula empirica bivariata

$$C_n\left(\frac{t_1}{n}, \frac{t_2}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathbb{1}_{x_t < x_{t_1}, y_t < y_{t_2}} \quad (\text{D.10})$$

dove è stata utilizzata la sequenza ordinata $1 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_j \leq \dots \leq n$ del campione.

La copula empirica risulta di particolare interesse perché, come si vedrà in seguito, consente di esprimere misure di dipendenza tra le distribuzioni empiriche, esattamente come fanno le copule per le distribuzioni di variabili aleatorie.

La costruzione della copula empirica sui dati fittati è descritta in A.1.9.

D.4 Stima del parametro della copula

Per stimare il parametro di una famiglia di copule è possibile procedere in diversi modi, nel presente elaborato sono stati proposti 3 metodi di stima, uno parametrico e due non parametrici, i cui codici sono riportati nella A.1.10

(i) Metodo Parametrico: Stima di massima verosimiglianza

Considerando il modello bivariato con distribuzione congiunta $H(x, y)$ e copula $C(u, v; \theta)$, è possibile calcolare la funzione di log-verosimiglianza come

$$\ell(\theta; x, y) = \sum_{j=1}^n \ln[g_0(y_j)] + \sum_{j=1}^n \ln[g_1(x_j)] + \sum_{j=1}^n \ln[c(G_1(x_j), G_0(y_j)); \theta]$$

e lo stimatore di massima verosimiglianza $\hat{\theta}$ è la soluzione di $\frac{\partial \ell(\theta; x, y)}{\partial \theta} = 0$. Ovviamente, lo stimatore così ottenuto presenta le classiche proprietà di consistenza e distribuzione asintotica normale.

(ii) Metodi Non Parametrici

Per la stima del parametro mediante approccio non parametrico, ciò che viene utilizzata è la copula empirica e il suo legame con alcune misure di dipendenza. In particolare, è stato precedentemente visto come collegare le copule alle misure ρ_S e τ_K , si osservano ora le rispettive estensioni al caso empirico

$$\hat{\rho}_S = \frac{12}{n^2 - 1} \sum_{t_1=1}^n \sum_{t_2=1}^n \left[C_n \left(\frac{t_1}{n}, \frac{t_2}{n} \right) - \frac{t_1 t_2}{n^2} \right]$$

$$\hat{\tau}_K = \frac{2n}{n-1} \sum_{t_1=1}^n \sum_{t_2=1}^n \left[C_n \left(\frac{t_1}{n}, \frac{t_2}{n} \right) C_n \left(\frac{t_1-1}{n}, \frac{t_2-1}{n} \right) - C_n \left(\frac{t_1-1}{n}, \frac{t_2}{n} \right) C_n \left(\frac{t_1}{n}, \frac{t_2-1}{n} \right) \right]$$

Utilizzando perciò il legame appena mostrato tra la copula empirica e questi indici, è possibile ottenere una stima non parametrica utilizzando i dati di partenza.

Bibliografia

- [Bacinello 2005] Bacinello, A.R. (2005). Endogenous model of surrender conditions in equity-linked life insurance. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2005, vol. 37(2), 270-296
- [Baione et al. 2018] Baione F., Biancalana D., De Angelis P., Granito I. (2018) Dynamic Policyholder Behavior and Surrender Option Evaluation for Life Insurance. In: Corazza M., Durbán M., Grané A., Perna C., Sibillo M. (eds) *Mathematical and Statistical Methods for Actuarial Sciences and Finance*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-89824-7_14
- [] Baione, F., Biancalana, D., De Angelis, P. & Granito, I. (2019), A Double-Sigmoid approach for dynamic policyholder behavior, http://www.ordineattuari.it/media/267202/3-_baione_afir_erm_colloquium_baione.pdf
- [Baione et al. 2021] Baione, F., Biancalana, D. & De Angelis, P. An application of Sigmoid and Double-Sigmoid functions for dynamic policyholder behaviour. *Decisions Econ Finan* 44, 5–22 (2021). <https://doi.org/10.1007/s10203-020-00279-7>
- [] Bardsley, W. G., & Childs, R. E. (1975). Sigmoid curves, non-linear double-reciprocal plots and allosterism. *The Biochemical journal*, 149(2), 313–328. <https://doi.org/10.1042/bj1490313>
- [Barsotti et al. 2016] Barsotti F., Milhaud X., Salhi Y. (2016), Lapse risk in life insurance: Correlation and contagion effects among policyholders' behaviors, *Insurance: Mathematics and Economics*, Volume 71, Pages 317-331, ISSN 0167-6687, <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2016.09.008>.
- [Caglar, Teufel & Wilke 2018] Caglar, M. & Teufel, Ashley & Wilke, Claus. (2018). Sicegar: R package for sigmoidal and double-sigmoidal curve fitting. *PeerJ*. 6. e4251. [10.7717/peerj.4251](https://doi.org/10.7717/peerj.4251).
- [Cairns et al. 2008] Cairns, S. P., Robinson, D. M., & Loiselle, D. S. (2008). Double-sigmoid model for fitting fatigue profiles in mouse fast- and slow-twitch muscle. *Experimental physiology*, 93(7), 851–862. <https://doi.org/10.1113/expphysiol.2007.041285>
- [] Caselli, G., Vallin, J., Wunsch, G. (2001). *Demografia – La dinamica delle popolazioni* (I edizione). Roma: Carocci Editore.

- Castellani, G., De Felice, M., & Moriconi, F. (2005). *Manuale di Finanza II: Teoria del portafoglio e mercato azionario*. Il Mulino.
- Castellani, G., De Felice, M., & Moriconi, F. (2006). *Manuale di Finanza III: Modelli stocastici e contratti derivati*. Il Mulino.
- [Cerchiara et al. 2009] Cerchiara, R.R., Edwards, M., Gambini, A.: Generalized linear models in life insurance: decrements and risk factor analysis under solvency II. Working Paper. AFIR Colloquium Rome (2009)
- Cicchitelli, G. (2012). *Statistica — Principi e metodi (II edizione)*. Milano-Torino: Pearson Italia.
- [Conwill, Furuya, Ito 2013] Conwill S., Furuya Y., Ito K. (2013) Dynamic lapse risk in an era of quantitative easing. Milliman Research Report. <https://www.milliman.com/en/insight/dynamic-lapse-risk-in-an-era-of-quantitative-easing>
- [Cuadras 1992] Cuadras, C.M. (1992). Probability distributions with given multivariate marginals and given dependence structure. *Journal of Multivariate Analysis*. 42,51-66
- D’Ecclesia, R.L., Gardini, L. (2013). *Appunti di matematica finanziaria I (VII edizione)*. Torino: G. Giappichelli Editore.
- Dar, A., & Dodds, C. (1989). Interest Rates, the Emergency Fund Hypothesis and Saving through Endowment Policies: Some Empirical Evidence for the U.K. *The Journal of Risk and Insurance*, 56(3), 415–433. <https://doi.org/10.2307/253166>
- Dunn, P.K.; Smyth, G.K. (2018). *Generalized Linear Models With Examples in R*. New York: Springer. doi:10.1007/978-1-4419-0118-7. ISBN 978-1-4419-0118-7.
- Edwards, M. (2016). *Dynamic Policyholder Behaviour*. Institute and Faculty of Actuaries, Londra. <https://www.actuaries.org.uk/system/files/field/document/Dynamic%20policyholder%20behaviour%20Edwards%205October2016%20v3%20%5BCompatibility%20Mode%5D.pdf>
- [Eling, Kochanski 2013] Eling M., Kochanski M. (2013), Research on Lapse in Life Insurance – What Has Been Done and What Needs to Be Done, *The Journal of Risk Finance* 14(4): 392-413
- Glasserman, P. (2004), *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Springer-Verlag
- Kelley, C. T. (1999). *Iterative methods for optimization*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [Kim 2005] Kim C. (2005), Modeling Surrender and Lapse Rates With Economic Variables, *North American Actuarial Journal*, 9(4):56-70

- Korn, R., Kroisandt, G., & Korn, E. (2010). Monte Carlo Methods and Models in Finance and Insurance (1st ed.). CRC Press. <https://doi.org/10.1201/9781420076196>
- [Lipovetsky 2010] Lipovetsky S. (2010) Double logistic curve in regression modeling, *Journal of Applied Statistics*, 37:11, 1785-1793, DOI: 10.1080/02664760903093633
- [MacKay et al. 2017] MacKay, Anne & Augustyniak, Maciej & Bernard, Carole & Hardy, Mary. (2015). Risk Management of Policyholder Behavior in Equity-Linked Life Insurance. *Journal of Risk and Insurance*. 84(2), 661-690 (2017). 10.1111/jori.12094.
- Madsen, H., & Thyregod, P. (2010). Introduction to General and Generalized Linear Models (1st ed.). CRC Press. <https://doi.org/10.1201/9781439891148>
- Marquardt D., An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters, in *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 11, n. 2, 1963, pp. 431–441, DOI:10.1137/0111030.
- Masarotto, G., & Varin, C. (2017). Gaussian copula regression in R. *Journal of Statistical Software*, 77(1), 1-26.
- McLeish, D. L. (2011). Monte Carlo simulation and finance (Vol. 276). John Wiley & Sons.
- [Milhaud, Loisel & Maume-Deschamps 2011] Milhaud X., Loisel S., Maume-Deschamps V. . Surrender triggers in life insurance: what main features affect the surrender behavior in a classical economic context?. *Bulletin Français d'Actuariat*, Institut des Actuaire, 2011, 11 (22), pp.5-48. <hal-00450003>
- [Milhaud & Dutang 2018] Milhaud X., Dutang C.. Lapse tables for lapse risk management in insurance: a competing risk approach. *European Actuarial Journal*, Springer, 2018, 8 (1), pp.97-126. 10.1007/s13385-018-0165-7. hal-01985256
- [Nash 2014] Nash, J. C. (2014). Nonlinear parameter optimization using R tools. John Wiley & Sons.
- [Nelder & Wedderburn 1972] Nelder, J., & Wedderburn, R. (1972). Generalized Linear Models. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)*, 135(3), 370-384. doi:10.2307/2344614
- [Nelder J.A. 1985] Nelder J.A. (1985) Quasi-Likelihood and GLIM. In: Gilchrist R., Francis B., Whittaker J. (eds) *Generalized Linear Models. Lecture Notes in Statistics*, vol 32. Springer, New York, NY. https://doi.org/10.1007/978-1-4615-7070-7_13.
- Nelsen, R.B. (2006). An Introduction to Copulas (II edizione). New York: Springer Science & Business Media

- [Noh, El Ghouch & Bouezmarni 2013] Noh H. , El Ghouch A. & Bouezmarni T. (2013) Copula-Based Regression Estimation and Inference, Journal of the American Statistical Association, 108:502, 676-688, DOI: 10.1080/01621459.2013.783842
- [Nolte, Schneider 2017] Nolte, Sven & Schneider, Judith C., 2017. "Don't lapse into temptation: a behavioral explanation for policy surrender," Journal of Banking & Finance, Elsevier, vol. 79(C), pages 12-27.
- [] Orsingher, E., Beghin, L. (2009). Probabilità e modelli aleatori. Roma: Aracne Editrice.
- [] Orsingher, E., Beghin, L. (2009). Introduzione alla probabilità – Dalle nozioni fondamentali alle applicazioni (2ª ristampa). Roma: Carocci Editore.
- [Pinquet, Guillén, Ayuso 2011] Pinquet J., Guillén M., Ayuso M. . Commitment and Lapse Behavior in Long-Term Insurance: A Case Study. Journal of Risk and Insurance, Wiley, 2011, 78 (4), pp.983-1002. 10.1111/j.1539-6975.2011.01420.x . hal-00374303v2
- [] Pitacco, E.(2000-2002). Matematica e Tecnica Attuariale delle Assicurazioni sulla Durata di Vita (II edizione, 12ª ristampa). Trieste: LINT Editoriale.
- [] Pitt M., Chan D., Kohn R., Efficient Bayesian inference for Gaussian copula regression models, Biometrika, Volume 93, Issue 3, September 2006, Pages 537–554, <https://doi.org/10.1093/biomet/93.3.537>
- [] Raychaudhuri, S. (2008, December). Introduction to monte carlo simulation. In 2008 Winter simulation conference (pp. 91-100). IEEE.
- [] Ricci, Vito. (2006). Principali tecniche di regressione con R. <https://cran.r-project.org/doc/contrib/Ricci-regression-it.pdf>
- [Roper 2000] Roper, L. (2000). Using Sigmoid and Double-Sigmoid Functions for Earth-States Transitions. 1.
- [Storn, Price 1997] Storn, R. and Price, K. (1997) Differential Evolution – A Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization over Continuous Spaces, Journal of Global Optimization, 11:4, 341–359.
- [Sungur 2005] Sungur, Engin A. (2005) Some Observations on Copula Regression Functions, Communications in Statistics—Theory and Methods, 34:9-10, 1967-1978, DOI: 10.1080/03610920500201244
- [Thevaraja 2018] Thevaraja, Mayooran, Copula Theory and Regression Analysis (2018). All Theses, Dissertations, and Other Capstone Projects. 803. <https://cornerstone.lib.mnsu.edu/etds/803>
- [] Turner H. . Introduction to Generalized Linear Models. ESRC National Centre for Research Methods, UK and Department of Statistics University of Warwick, UK. WU, 2008–04–22-24

Link:

- [Algoritmo Discesa del Gradiente] <https://www.lorenzogovoni.com/algoritmo-discesa-del-gradiente/>
- [CEIOPS: QIS5 Technical Specifications] CEIOPS (2010). QIS5 Technical Specifications, Brussels http://www.mmenzietti.altervista.org/TAAV/technical_specifications_QIS5_en.pdf
- [Direttiva 2009/138/EC] https://www.ivass.it/normativa/internazionale/internazionale-ue/direttive/2009-138-ce/direttiva_solvency_II_aggiornata.pdf
- [EIOPA 2019] EIOPA: Technical Specification for the Preparatory Phase (Part I) (2009) https://eiopa.europa.eu/Publications/Standards/A_-_Technical_Specifications_for_the_Preparatory_Phase__Part_I_disclaimer.pdf. Ultimo accesso: 20 Settembre 2019
- [EIOPA: Risk-free interest rate term structures] https://www.eiopa.europa.eu/tools-and-data/risk-free-interest-rate-term-structures_en
- [IVASS: guida a Solvency II] https://www.ivass.it/pubblicazioni-e-statistiche/pubblicazioni/altre-pubblicazioni/2016/guida-solvency-ii/Guida_Solvency_II.pdf
- [IVASS: Lettera al mercato 05/06/2018] https://www.ivass.it/normativa/nazionale/secondaria-ivass/lettere/2018/lm-05-06/lettera_al_mercato_del_05_06_2018.pdf
- [IVASS: Solvency II] <https://www.ivass.it/normativa/focus/solvency/index.html>
- [KPMG: First Impressions (ed.2020), IFRS17] <https://assets.kpmg/content/dam/kpmg/ie/pdf/2020/09/ie-ifrs-17-first-impressions.pdf>
- [R: DEoptim] <https://www.rdocumentation.org/packages/DEoptim/versions/2.2-6/topics/DEoptim>
- [R: fitCopula] <https://www.rdocumentation.org/packages/copula/versions/0.99-4/topics/fitCopula>
- [R: fitdistr] <https://www.rdocumentation.org/packages/MASS/versions/7.3-54/topics/fitdistr>
- [R: nls] <https://www.rdocumentation.org/packages/stats/versions/3.6.2/topics/nls>
- [R: nlxb] <https://www.rdocumentation.org/packages/nlsr/versions/2019.9.7/topics/nlxb>
- [2] Raffaele Zenti, #ABCFinanza: performance di Borsa e rendimenti obbligazionari, una (cor)relazione complicata, Dicembre 12, 2019 <https://www.adviseonly.com/capire-la-finanza/abc-finanza/abcfinanza-performance-di-borsa-e-rendimenti-obbligazionari-una-correlazione-complicata>

[Regolamento Delegato (UE) 2015/35] https://www.ivass.it/normativa/internazionale/internazionale-ue/regolamenti-europei/rd-2015-35/Regolamento_delegato_UE_2015-35_della_Commissione.pdf

[Regolamento IVASS 18/2016] https://www.ivass.it/normativa/nazionale/secondaria-ivass/regolamenti/2016/n18/Regolamento-IVASS-n._18-del-15-marzo-2016-RiserveTecniche.pdf