

Università Cattolica del Sacro Cuore - Milano

Interfacoltà di Economia - Scienze Bancarie, Finanziarie e Assicurative

Corso di Laurea in Scienze Statistiche, Attuariali ed Economiche

**L'EFFETTO DELLA DIPENDENZA DEI RISCHI  
SUI REQUISITI PATRIMONIALI DI UNA  
COMPAGNIA DI ASSICURAZIONE DANNI**

*Relatore*

Chiar.mo Prof. Nino Savelli

*Tesi di Laurea di*

Andrea Marelli

*Matr. n. 3306815*

Anno Accademico 2005-2006

Dopo aver inizialmente analizzato le principali proposte a livello internazionale riguardo al calcolo dei requisiti patrimoniali di una compagnia di assicurazione danni, ci siamo occupati di studiare le funzioni copula soffermandoci su alcune loro peculiarità. Abbiamo effettivamente individuato nelle copule gli strumenti adatti a considerare il fattore della dipendenza dei rischi. Infatti tali funzioni consentono di costruire delle distribuzioni multidimensionali con marginali differenti, e quindi di tener conto sia delle caratteristiche di ciascuna linea di business (tramite le marginali), sia della dipendenza che esiste tra esse (tramite la copula), permettendo quindi di considerare sia la forza che il tipo di associazione che esiste tra le variabili marginali.

Dopo un attento studio di un modello classico di teoria del rischio basato su un processo di Poisson composto, sono stati ipotizzati due scenari per quanto riguarda l'analisi di una compagnia avente una sola linea di attività (Responsabilità Civile Auto e Corpi Veicoli Terrestri), i cui risultati sono stati confrontati mediante il calcolo del requisito di capitale richiesto dalla vigilanza tramite un approccio di tipo TVaR, utilizzando un livello di confidenza del 99% ( $mrbc_{99\%}$ , *minimum risk-based capital*).

Successivamente abbiamo esteso il modello di teoria del rischio al caso di una compagnia di assicurazione operante in due rami di attività (RCA e CVT), introducendo la dipendenza tramite l'impiego delle funzioni copula.

Abbiamo constatato come la diversificazione tra i rischi e la dipendenza tra i rami abbiano grande influenza sul calcolo del requisito patrimoniale della compagnia.

Nel caso di dipendenza positiva, abbiamo infatti un'amplificazione dei rischi – rispetto al caso di indipendenza – a causa del fatto che le linee tendono a variare nello stesso modo, il che implica che se una presenta risultati tecnici particolarmente negativi, anche l'altra avrà tendenzialmente costo sinistri aggregato alto rispetto ai premi incassati. Ovviamente vale lo stesso anche nel caso di risultati particolarmente positivi. Di conseguenza aumenta la variabilità del processo in quanto gli eventi estremi – sia negativi che positivi – sono più probabili, il che comporta un appesantimento delle code. Quindi avremo una maggiore dispersione dei risultati, un rischio globale maggiore, e, in ultima analisi, una misura di capitale più elevata.

Al contrario, nel caso di dipendenza negativa, le linee tendono a compensarsi l'un l'altra, creando quindi una maggiore stabilità nei risultati – sempre rispetto al caso di indipendenza – a causa del fatto che si hanno valori meno dispersi. Ciò comporta una riduzione del rischio globale della compagnia, e quindi avremo un capitale richiesto inferiore.

Ipotizzando degli scenari dove le due linee RCA e CVT siano aggregate tramite copula Gaussiana, abbiamo ottenuto dei  $mrbc$  crescenti al crescere del valore del coefficiente di correlazione di rango. Si tratta di variazioni importanti, infatti nel caso di dipendenza negativa, il  $mrbc_{99\%}$  si riduce fino ad abbassarsi, per  $\tau = -1$ , di circa il 12% rispetto allo scenario di indipendenza. Al contrario, in ipotesi di dipendenza positiva, il requisito patrimoniale aumenta, fino a diventare pari al 13% in più del caso di indipendenza.

Per concludere il lavoro, abbiamo effettuato alcuni studi su una compagnia danni reale operante sul mercato italiano avente sette linee di attività, confrontando le conseguenze dei requisiti patrimoniali derivanti dall'aggregazione dei rami considerati tra loro indipendenti, rispetto ai casi di dipendenza. In quest'ultimo caso abbiamo effettuato un raffronto tra gli scenari più pessimistici, e quelli "reali", che abbiamo supposto essere individuati tramite l'analisi dei *loss ratios* propri della compagnia in esame.

Abbiamo aggregato i rami, aggiungendo una linea alla volta, in ordine decrescente di rischio. Partendo dal portafoglio costituito dal solo ramo maggiormente rischioso ( $mrbc_{99\%} = 20.665\%$ ), e aggiungendo una linea alla volta, abbiamo così assistito ad una graduale riduzione del rischio complessivo del portafoglio. Tale decremento di  $mrbc$  è stato possibile grazie alla diversificazione, oltre che all'interazione tra i diversi parametri che le caratterizzano.

Nel caso in cui si considerino tutti i rami tra loro indipendenti, si arriva a determinare un  $mrbc_{99\%}$  pari a 11.852%. Se invece utilizziamo le copule, abbiamo, nel caso in cui la forza di dipendenza sia stimata attraverso i *loss ratios*, un requisito patrimoniale superiore, pari a 12.297%. Qualora si consideri invece una matrice di correlazione di rango composta da tutti "+1", il *minimum risk-based capital* risulta essere molto vicino al 16%.

Crediamo che analisi simulative del tipo di quelle analizzate in questo lavoro, non debbano essere viste come strumenti in grado di sostituire il management delle imprese per prendere decisioni riguardo all'attività. Devono invece essere considerate come dei mezzi capaci di fornire informazioni aggiuntive circa l'interazione di più parametri in processi di rischio in cui la complessità delle relazioni rende spesso le valutazioni senza l'ausilio di tali strumenti particolarmente difficili da fare.

## Riferimenti bibliografici

ANIA: <http://www.ania.it/>

Armstrong Margaret [2003]: *Copula Catalogue – Part 1: Bivariate Archimedean Copulas*, Cerna, 18 August 2003, <http://www.cerna.ensmp.fr/>

Artzner P., Delbaen F., Eber J.M., Heath D. [1999]: *Coherent Measure of Risk*, *Mathematical Finance* 9 (July), 203-228, <http://www.math.ethz.ch/>

Ballotta L., Savelli N. [2005]: *Risk based capital modelling for P&C insurers and financial sensitivity*, IME 2005, Québec, July 2005

Blum P., Dacorogna M. [2003]: *DFA – Dynamic Financial Analysis*, in J. Teugels and B. Sundt (Editors), *Encyclopedia of Actuarial Science*, John Wiley & Sons, 2003

Bouyé E., Durrleman V., Nikeghbali A., Riboulet G., Roncalli T. [2001]: *Copulas: an open field for risk management*, 23 March 2001, <http://gro.creditlyonnais.fr/>

Bouyé E., Salmon M. [2001]: *Measuring the Dependence between Non-Gaussian Financial Returns*, London, <http://www.gloriamundi.org/>

Castella H., Chiolero A. [2005]: *Dependence structures for a reinsurance portfolio exposed to natural catastrophe risk*, 36<sup>th</sup> International ASTIN Colloquium, 5-7 September 2005, ETH Zürich

CEIOPS [2006a]: *QIS1 – Summary report*, Sanitized version, CEIOPS-FS-01/06, 17 March 2006, <http://www.ceiops.org/>

CEIOPS [2006b]: *Quantitative Impact Study No. 2: Technical Specification*, maggio 2006, <http://www.ceiops.org/>

Cherubini U., Luciano E., Vecchiato W. [2004]: *Copula Methods in Finance*, John Wiley & Sons, Ltd

Cicchitelli G. [1992], *Probabilità e Statistica*, Maggioli, 1992

CRO Forum and CEA [2006]: *Solutions to major issues for Solvency II*, Joint submission by the Chief Risk Officer Forum and CEA, 17 February 2006

Daboni Luciano [1993]: *Lezioni di tecnica attuariale delle assicurazioni contro i danni*, Edizioni LINT, Trieste

Dacorogna M., Hummel C. [2003]: *The role and evaluation of capital in (re)insurance*, Zürcher Kantonalbank, Zürich, December 4, 2003, <http://www.converium.com/>

Dacorogna M., Hummel C. [2005]: *Capital at risk – Effective allocation of capital steers portfolios towards higher profitability*, published in the June 2005 edition of *Global Reinsurance*, <http://www.converium.com/>

Dacorogna M., Wallin Å. [2004]: *Economic risks in reinsurance*, *Financial Modelling*, Converium, Zürich, November 2004, <http://www.converium.com/>

Dacorogna Michel [2005]: *Risk aggregation and dependence structure*, *Capital Management in the Re/Insurance Industry*, Marcus Evans Conference, London March 3-4, 2005, <http://www.converium.com/>

Dall'Aglio G., Kotz S., Salinetti G. [1991]: *Advances in Probability Distributions with Given Marginals – Beyond the Copulas*, Kluwer Academic Publishers, 1991

Daykin C.D., Pentikäinen T., Pesonen M. [1994]: *Practical Risk Theory for Actuaries*, Chapman & Hall, London

- De Matteis Roberto [2001]: *Fitting Copulas to Data*, Diploma thesis, Institute of Mathematics of the University of Zürich, June 2001, <http://www.math.ethz.ch/>
- Djehiche B., Hult H. [2004]: *An Introduction to Copulas with Applications*, Svenska Aktuarietföreningen, 02 March 2004, Stockholm
- Durrleman V., Nikeghbali A., Roncalli T. [2001]: *What are the Most Important Copulas in Finance?*, International Finance Conference, Hammam-Sousse, Tunisia, 17 March 2001, <http://gro.creditlyonnais.fr/>
- Embrechts P., McNeil A., Straumann D. [1999a]: *Correlation: Pitfalls and Alternatives*, Departement Mathematik, ETH Zürich, March 1999, <http://www.math.ethz.ch/>
- Embrechts P., McNeil A., Straumann D. [1999b]: *Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls*, Departement Mathematik, ETH Zürich, August 1999, <http://www.ccfz.ch/>
- Embrechts P., Lindskog F., and McNeil A. [2001]: *Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management*, working paper, <http://www.math.ethz.ch/>
- European Actuarial Consultative Group [2005]: *Diversification – Technical paper*, Oxford, UK, 31 October 2005, <http://www.gcactuaries.org/>
- Faivre Fabien [2003]: *Copula: A New Vision for Economic Capital and Application to a Four Line of Business Company*, ASTIN Conference, 24-27 August 2003, Berlin
- Frees E., Valdez E. [1998]: *Understanding Relationships Using Copulas*, North American Actuarial Journal, Volume 2, Number 1, January 1998
- Genest C., MacKay R. [1986]: *The joy of copulas: Bivariate distributions with uniform marginals*, The American Statistician, 40, 280-283.
- Hummel Christoph [2004]: *Capital Allocation and Pricing: from a reinsurer's perspective*, GARP, Zürich, April 14, 2004
- International Actuarial Association – Research Report of the Insurer Solvency Assessment Working Party [2004]: *A Global Framework for Insurer Solvency Assessment*, June 2004, <http://www.actuaries.org/>
- Keller P., Luder T. [2004]: *White Paper of the Swiss Solvency Test*, FOPI, November 2004, <http://www.bpv.admin.ch/>
- Klugman S., Panjer H., Willmot G. [1998]: *Loss Models: From Data to Decisions*, Wiley
- KPMG [2002]: *Study into the methodologies to assess the overall financial position of an insurance undertaking from the perspective of prudential supervision*, Appendices May 2002, Contract no: ETD/2000/BS-3001/C/45, Financial Services, May 2002
- Lindskog F. [2000]: *Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk -management*, Master Thesis, ETH Zürich, July 2000, <http://www.math.ethz.ch/>
- Luder Thomas [2005]: *Swiss Solvency Test in Non-life Insurance*, FOPI, Bern, July 28, 2005, <http://www.bpv.admin.ch/>
- Marelli Andrea [2004]: *Applicazione della Teoria delle Copule nelle Analisi di Rischio di una Compagnia di Assicurazione Danni*, Tesi di Laurea Triennale in Scienze Statistiche ed Attuariali, Università Cattolica del Sacro Cuore, Milano, Ottobre 2004
- McNeil A., Frey R., Embrechts P. [2005]: *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques, and Tools*, Princeton University Press, 2005
- Mercer Oliver Wyman [2005]: *Solvency Assessment Models Compared – Essential groundwork for the Solvency II Project*, Produced by CEA and Mercer Oliver Wyman in cooperation with all European insurance markets, 2001

- Meyers G., Klinker F., Lalonde D. [2003]: *The Aggregation and Correlation of Insurance Exposure*, CAS Forum, Summer 2003, <http://www.casact.org/>
- Meyers Glenn [2004]: Spreadsheet, International Actuarial Association – Solvency, CAS Meeting, May 2004, <http://www.casact.org/>
- Micocci M., Masala G. [2004]: *Backtesting value-at-risk estimation with non Gaussian marginals*, May 2004, <http://www.ime2004rome.com/>
- Nelsen Roger [1999]: *An introduction to Copulas*, Springer, New York
- Oliver, Wyman & Company [2001]: *Study on the risk profile and capital adequacy of financial conglomerates*, February 2001, <http://muse.jhu.edu/>
- Perkins P., Lane T. [2003]: *Monte-Carlo Simulation in MATLAB Using Copulas*, MATLAB News & Notes, November 2003, <http://www.mathworks.com/>
- Quesada-Molina J., Rodríguez-Lallena J., Úbeda-Flores M. [2003]: *What are copulas?*, Monografias del Semin. Matem. Gracia de Galdeano. 27: 499-506
- Romano Claudio [2001]: *Applicazione della Funzione Copula alla Misurazione del Rischio*, 2001, <http://www.gloriamundi.org/>
- Rytgaard M., Savelli N. [2004]: *Risk-Based Capital Requirements for Property and Liability Insurers According to Different Reinsurance Strategies and the Effect on Profitability*, XXXV ASTIN Colloquium, 6-9 June 2004 - Bergen
- Savelli Nino [1993]: *Un modello di Teoria del Rischio per la valutazione della solvibilità di una Compagnia di assicurazione sulla vita*, Associazione per lo Sviluppo degli Studi Assicurativi, Edizioni LINT Trieste
- Savelli Nino [2003a]: *A Simulation Model for Solvency and Reinsurance Analyses in General Insurance*, Proceedings of the Conference Satellite SIS “Statistical Methods for Finance and Insurance”, Catholic University of Milan, June 2002, Milan
- Savelli Nino [2003b]: *Solvency and Traditional Reinsurance for Non-Life Insurance*, Contributi di ricerca in Matematica finanziaria e Scienze attuariali, numero 26, Istituto di Econometria e Matematica per le applicazioni economiche, finanziarie ed attuariali, Università Cattolica del Sacro Cuore, Milano, November 2003
- Straßburger D., Pfeifer D. [2005]: *Dependence Matters!*, 36<sup>th</sup> International ASTIN Colloquium, 5-7 September 2005, ETH Zürich
- The MathWorks, Inc. : *Simulation of dependent random variables using copulas*, 2005, <http://www.mathworks.com/>
- Venter Gary [2001]: *Tails of Copulas*, XXXII ASTIN Colloquium, 8-11 July 2001, Washington
- Venter Gary [2003]: *Fit to a t-Estimation, Application and Limitations of the t-copula*, Topic 1: Risk Evaluation, ASTIN 2003
- Wang, Shaun S. [1998]: *Aggregation of Correlated Risk Portfolios: Model and Algorithms*, Proceedings of the Casualty Actuarial Society, LXV, 848-939, <http://www.casact.org/>