



Stockholms
universitet

Kalibrering av SCR enligt standardformeln applicerad
på svensk befolkningsdata - baserat på Lee Carter
modellering

Sandra Brännstam

Masteruppsats 2017:8
Försäkringsmatematik
Juni 2017

www.math.su.se

Matematisk statistik
Matematiska institutionen
Stockholms universitet
106 91 Stockholm



Matematisk statistik
Stockholms universitet
Masteruppsats 2017:8
<http://www.math.su.se/matstat>

Kalibrering av SCR enligt standardformeln applicerad på svensk befolkningsdata - baserat på Lee Carter modellering

Sandra Brännstam*

Juni 2017

Sammanfattning

Det är nödvändigt att ett försäkringsföretag innehar ett kapital som kan täcka oväntade förluster. I samband med Solvens II-direktivet har därför två olika kapitalkrav införts, solvenskapitalkravet (SCR) och minimikapitalkravet (MCR). I och med dessa kalibreringar har man fått en omedelbar och permanent parameter med vilken dödlighetsintensiteterna stressas. Det kan dock anses vara mer realistiskt att se till årlig dödlighetsförbättring och stressa denna. I denna undersökning har vi tillämpat de metoder som används för att beräkna solvenskapitalkravet enligt Solvens II på en produkt som representerar långlevnadsrisk och en som representerar dödlighetsrisk. Vi har modellerat dödlighetsintensiteterna med Lee Carter baserat på svensk befolkningsdata. Den analys vi har genomfört baserat på befolkningsdata stödjer Solvens II-kalibreringen. Vi har kommit fram till att en årlig dödlighetsförbättring om ca 1% för livfallsrisk ger samma resultat som de vi får vid kalibrering enligt Solvens II, samt att en årlig dödlighetsförsämring om ungefär 1% ger samma resultat för dödsfallsrisk.

*Postadress: Matematisk statistik, Stockholms universitet, 106 91, Sverige.
E-post: sandra.brannstam@hotmail.com. Handledare: Mathias Lindholm.

Tack

Jag vill tacka Mathias Lindholm på matematiska institutionen vid Stockholms universitet som har stöttat med handledning, Samuel Severinson på EY som har ställt upp som diskussionspartner, samt Gunnar Brännstam på Skandia som har bidragit med ämne och många goda synpunkter. Slutligen vill jag även tacka alla som har varit ett stort stöd under min studietid, både akademiskt och privat.

Innehållsförteckning

1	Introduktion	1
1.1	Syfte	1
1.2	Data	1
2	Teori	3
2.1	Solvenskapitalkrav	3
2.2	Lee-Carter	5
2.2.1	Skattning av parametrar	5
2.2.2	Prediktioner	7
2.2.3	Feltermer	8
2.2.4	Övrigt	9
2.3	Förväntad återstående livslängd	9
2.4	Portfölj	10
2.5	Reserver	10
3	Analys	13
3.1	Precision hos Lee Carter	14
3.2	Prediktion av dödlighetsintensiteter	25
3.3	Predikterade livslängder	30
3.4	Reserver	34
3.5	Stress av dödligheter	41
3.5.1	Dödlighetsintensiteter och ettåriga dödsfallsrisker	41
3.5.2	Reservernas påverkan av stressade dödligheter	43
4	Slutsatser	51
A	Figurer	53
B	Teori	53
	Referenser	55

1 Introduktion

1.1 Syfte

Syftet med denna undersökning har varit att tillämpa de metoder som används för att kalibrera stressparametrarna för dödlighetsintensiteterna vid beräkning av SCR enligt Solvens II-principer på befolkningsdata, samt att tillämpa de metoder som används för att finna en stressparameter som är konstant över alla t för att hitta en tidsberoende förskjutning av dödlighetsparametrarna, vilket eventuellt representerar en mer realistisk förskjutning av dödlighetsförbättringen/ försämringen. Metoden vi har använt för framskrivning av dödlighetsintensiteten är Lee Carter

1.2 Data

Befolkningsdata

Vi har använt oss av historisk data av Sveriges befolkning, hämtad från Human Mortality Database (HMD) [3] för modellering av historisk och framskriven dödlighet. Låt

$N_{x,t}$ - populationsstorlek hos individer med ålder x vid början av år t ,

$D_{x,t}$ - antal x -åriga individer som avlidit under år t .

Antal dödsfall vid tid t är binomialfördelat, och vi får att sambandet mellan $N_{x,t}$ och $D_{x,t}$ är

$$D_{x,t} \sim \text{Bin}(N_{x,t}, q_{x,t}), \quad (1.2.1)$$

där $N_{x,t}$ är definierat enligt ovan, och $q_{x,t}$ är den ettåriga dödsrisken för en x -årig individ vid tid t .

Human Mortality Database tillhandahåller data från 1751 till 2014 för $N_{x,t}$ och till 2015 för $D_{x,t}$, med åldrar från 0 till 109, samt 110+ som en ålderskategori.

Population size					
Year	Age	Female	Male	Total	
1751	0	28595.61	28608.93	57204.54	
1751	1	26191.55	25873.44	52064.99	
1751	2	26508.24	26127.31	52635.55	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
2015	110	2	0	2	

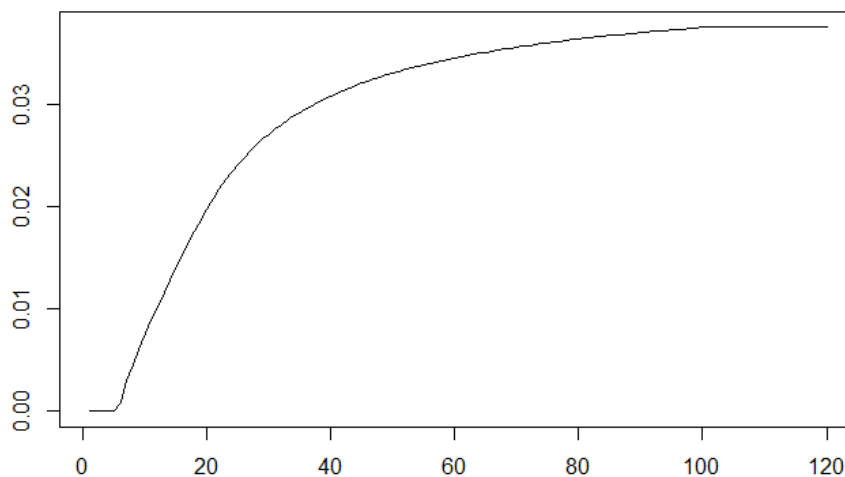
Tabell 1.2.1: Populationsstorlek för individer med ålder x vid tid t .

Deaths				
Year	Age	Female	Male	Total
1751	0	5988.00	6902.00	12890.00
1751	1	1286.45	1359.88	2646.33
1751	2	834.56	882.13	1716.69
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2014	110	0.31	0	0.31

Tabell 1.2.2: Antal dödsfall för individer med ålder x vid tid t .

Diskontering

Vid beräkning av framtida kassaflöden använder vi oss av diskonteringsräntekurvor r_t från Finansinspektionen [17] per 2016-12-31. Dessa sträcker sig från $t = 1$ till $t = 100$. För $t > 100$ använder vi räntan för $t = 100$.



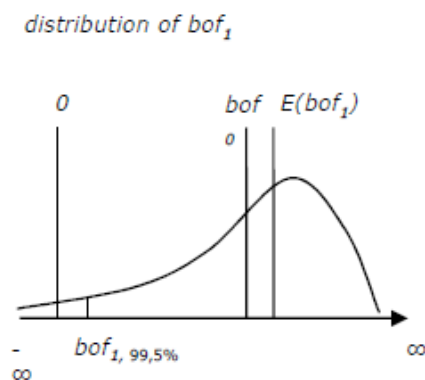
Figur 1.2.1: Diskonteringsränta r_t

2 Teori

2.1 Solvenskapitalkrav

Solvenskapitalkravet (SCR) beskrivs som det buffertkapital som ett försäkringsföretag behöver hålla för att garantera att bolaget ska klara av att infria sina åtaganden gentemot försäkringstagare under de kommande 12 månaderna med en sannolikhet på minst 99,5 procent.

Värdet på kapitalkravet kalibreras med hjälp av Value at Risk (VaR) för ett eget försäkrings- eller återförsäkringsföretags grundläggande kapitalbas, med en konfidensnivå på 99,5% över en ettårsperiod. Detta kalibreringsmål tillämpas på varje enskild riskkategori och eventuell underkategori.



Figur 2.1.1: Fördelning av bästa skattning, bild hämtad från EIOPA-14-322 [15]. bof - best estimate of own funds

Solvens II-utredningen [13] förklarar vidare att beräkning av kapitalkraven enligt standardformeln görs separat för ett antal riskkategorier och eventuella underkategorier, för att sedan adderas till ett sammanlagt SCR.

Förenklat innebär detta att

- För varje risk bestäms först ett 1-årsscenario som kan förväntas inträffa med en sannolikhet av 0.5%.
- Sedan beräknas den beloppsmässiga påverkan detta scenario skulle ha på försäkringsföretagets tillgångar och skulder (det samlade buffertkapitalet). Detta motsvarar kapitalkravet för den aktuella risken.
- När kapitalkraven har beräknats för de enskilda riskerna summeras de till ett s.k. baskapitalkrav.
- Kapitalkravet för operativa risker beräknas separat med en annan metodik och adderas sedan till det framräknade baskapitalkravet.

Dessa beräkningar tar även hänsyn till diversifieringseffekter, justering för uppskjutna skatter etc., som vi inte kommer att gå in på här. Vi kommer att fokusera på steg 1 och 2 för två olika försäkringsprodukter både för ett helt bestånd och på individnivå.

När alla steg har genomförts har man fått fram det belopp som krävs för att försäkringsföretaget med 99,5 procents sannolikhet under en ettårsperiod ska kunna uppfylla sina förpliktelser, även uttryckt så att ett företag kan förväntas falla en gång per 200 år.

Enligt Kommissionens delegerade förordning gällande Solvens II [14] motsvarar detta för dödsfallsrisk den minskning i kapitalet hos försäkringsföretaget som följer av en omedelbar och permanent ökning av dödlighetsintensiteterna om 15%. För livfallsrisk motsvarar kapitalkravet minskningen i kapitalet som följer av en minskning av dödlighetsintensiteterna med 20%.

Antaganden

Stressfaktorerna för dödlighetsrisk och långlevnadsrisk är avsedda att återspegla osäkerheten i dödlighetsparametrar som en följd av felbedömning och/eller förändringar i dödlighetens nivå, trend och volatilitet och fångar risken för att fler försäkringstagare än förväntat dör under försäkringens löptid samt att försäkringstagare lever längre än förväntat.

Ett av de underliggande antagandena för livförsäkringsrisk enligt EIOPA-14-322 [15] är att försäkringsportföljerna är väldiversifierade med hänsyn till ålder, kön, rökstatus, socioekonomisk status, livförsäkringsnivå, typ av försäkringsskydd, försäkringsgrad tillämpad vid ingående av försäkringsavtal och geografisk plats.

De underliggande antagandena för dödlighetsrisk och långlevnadsrisk kan sammanfattas enligt följande:

Dödlighetsrisk

- Företaget minimerar negativt urval (adverse selection).
- Sannolikhetsfördelningen för dödligheten är skev, med en trend mot förbättring av dödligheten.
- Vid en förenklad beräkning av kapitalkravet för dödlighetsrisken antas det att det inte föreligger någon väsentlig nedgång av respektive riskkapital under de närmaste n åren, där n är den modifierade durationen (i antal år) av betalningar vid dödsfall inkluderade i den bästa skattningen. Det antas vidare att de försäkrades genomsnittliga dödlighet (viktad med försäkringssumma) inte kommer att öka väsentligt under de närmaste n åren.

Långlevnadsrisk

- De årliga dödlighetsförbättringarna är normalfördelade.
- Vid förenklad beräkning av kapitalkravet för långlevnadsrisk antas att medelåldern för försäkringstagare inom portföljen är 60 år eller mer.
- Det antas vidare att de genomsnittliga dödlighetsintensiteterna för respektive försäkringstagare inte ökar med mer än 10% per år.

2.2 Lee-Carter

Teorin i detta avsnitt kommer i huvudsak från Lee (00) [8], Lee & Carter (92) [7], Lundström & Qvist (04) [9], samt Giroso & King (07) [6].

2.2.1 Skattning av parametrar

Låt $m_{x,t}$ beteckna den centrala dödskvoten för en individ som är x år vid tid t , vilken definieras som

$$m_{x,x+t} = \frac{D_{x,x+t}}{R_{x,x+t}},$$

där $R_{x,x+t}$ är den så kallade risktiden (summan av den tid som x -åriga individer har varit del av beståndet under tid t , enl. s. 130 [11]). Risktiden approximeras enligt

$$\hat{R}_{x,x+t} = \frac{N_{x-1,x+t-1} + N_{x,x+t}}{2}.$$

Vi får alltså

$$m_{x,x+t} = \frac{D_{x,x+t}}{(N_{x-1,x+t-1} + N_{x,x+t})/2}. \quad (2.2.1)$$

Metoden enligt Lee & Carter [7] bygger på att dödlighetsintensiteten för lämpligt valda parametrar kan uttryckas enligt

$$\ln(m_{x,t}) = a_x + b_x \kappa_t + \varepsilon_{x,t}, \quad (2.2.2)$$

eller ekvivalent

$$m_{x,t} = e^{a_x + b_x \kappa_t + \varepsilon_{x,t}},$$

där a_x och b_x är åldersspecifika konstanter, κ_t är en tidsvarierande parameter som beskriver förändringen i dödlighet över tid, $\varepsilon_{x,t}$ är approximativt normalfördelad med väntevärde 0 och varians σ_ε^2 . Parametern a_x beskriver ett allmänt mönster för dödligheten hos en x -årig individ, b_x beskriver den relativa hastigheten för vilken dödligheten förändras för varje ålder, och κ_t indikerar den del av dödligheten som fångar tidstrenden i dödlighetsintensiteterna. Skattningarna av b_x och κ_t är kompletterande, och det är produkten av dessa som visar tidsförändringen i den åldersspecifika

dödligheten, b_x visar med andra ord hur tidseffekten sprids mellan de olika åldrarna.

Genom att skriva om 2.2.2 får vi att residualerna kan skrivas som

$$\hat{\varepsilon}_{x,t} = \ln(m_{x,t}) - a_x - b_x \kappa_t. \quad (2.2.3)$$

Det är dessa residualer som ligger till grund för parameterskattningarna av a_x , b_x och κ_t .

Anta att (vektorerna) a, b, κ är en lösning till ekvation 2.2.2, då gäller även att följande linjära transformationer är en lösning för alla skalärer c

$$a' = a - bc, \quad b' = b, \quad \text{och} \quad \kappa' = \kappa + c,$$

eller

$$a'' = a, \quad b'' = bc, \quad \text{och} \quad \kappa'' = \kappa/c.$$

Vi vet därför att κ endast är bestämd upp till en linjär transformation, b upp till en multiplikativ konstant, och a är bestämd upp till en additiv konstant. Vi inför därför följande begränsningar

$$\sum_{x=1}^n b_x^2 = 1,$$

$$\sum_{t=1}^n \kappa_t = 0.$$

Dödlighetsundersökningen 2006 [4] menar att dessa normeringar inte påverkar skattningen av $m_x(t)$ på grund av de linjära sambanden mellan parametrarna. Detta ger att a_x skattas som medelvärdet av $\ln(m_{x,t})$ över tid.

$$\hat{a}_x = \frac{\sum_{t=1}^T \ln(m_{x,t})}{T}.$$

För att skatta modellen för ett givet antal dödlighetsintensiteter $m_{x,t}$ söker vi minstakvadratlösningen till ekvation 2.2.2,

$$\ln(m_{x,t}) = a_x + b_x \kappa_t + \varepsilon_{x,t}.$$

För att hitta en minstakvadratanpassning kan vi använda oss av singularvärdesuppdelning. Skattningarna av b_x och κ_t med singularvärdesuppdelning förklaras närmre i Appendix B.

Vidare, a_x och b_x är tidsberoende parametrar, medan parametern κ_t beror på tid och styr de projicerade framtida dödlighetsintensiteterna. I denna modell ser vi κ_t som en stokastisk process, vilken kan modelleras med en tidsseriemodell. Givet tidigare $\hat{\kappa}_t$ behöver vi kunna prognosticera framtida $\hat{\kappa}_t$. Detta görs enligt

$$\hat{\kappa}_t = \hat{\kappa}_{t-1} - \hat{z} + e_t \quad (2.2.4)$$

där \hat{z} är en konstant avtagande term som beskriver medelhastigheten med vilken dödlighetsintensiteten avtar, och beräknas enligt

$$\hat{z} = -\frac{\hat{\kappa}_T - \hat{\kappa}_1}{T-1},$$

där vi låter $\hat{\kappa}_T$ vara vårt sista kända värde för $\hat{\kappa}_t$ vid tid T .

Slumftermen e_t är approximativt normalfördelad $e_t \sim N(0, \sigma_{RW}^2)$ där σ_{RW}^2 skattas enligt

$$\hat{\sigma}_{RW}^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} (\hat{\kappa}_{t+1} - \hat{\kappa}_t + \hat{z})^2.$$

Vi kan skriva om ekvation 2.2.4 ovan för att undersöka residualerna

$$\hat{e}_t = \kappa_t - \kappa_{t-1} + z \quad (2.2.5)$$

I vissa fall gör man en andra skattning av $\hat{\kappa}$ (Lee, Carter (92) [7], Lee (00) [8]) som givet de skattade parametrarna \hat{a}_x och \hat{b}_x ger det observerade antalet dödsfall för ett specifikt år. Vi skattar alltså om $\hat{\kappa}_t$ så att

$$D_t = \sum_x N_{x,t} e^{\hat{a}_x + \hat{b}_x \hat{\kappa}_t},$$

D_t är antal dödsfall vid tid t och $N_{x,t}$ är antal x -åriga individer vid tid t .

Vi nöjer oss dock med en första skattning av $\hat{\kappa}$ för att inte överanpassa modellen till historisk data eftersom syftet är att prediktera dödligheterna framåt.

2.2.2 Prediktioner

Vi utvecklar ekvation 2.2.4

$$\hat{\kappa}_t = \hat{\kappa}_{t-1} - \hat{z} + e_t = (\hat{\kappa}_{t-2} - \hat{z} + e_{t-1}) - \hat{z} + e_t = \hat{\kappa}_{t-2} - 2\hat{z} + e_t + e_{t-1}$$

Låter vi sedan κ_T vara vårt senaste kända κ , kan vi utveckla ovanstående uttryck för prediktionerna till

$$\hat{\kappa}_{T+t} = \kappa_T - zt + \sum_{i=1}^t e_{T+i-1}.$$

Om vi antar att e_t är oberoende och med samma varians kan vi förenkla uttrycket till

$$\hat{\kappa}_{T+t} = \kappa_T - \hat{z}t + \sqrt{t}e_t. \quad (2.2.6)$$

Vi såg i ovanstående avsnitt att $e_t \sim N(0, \sigma_{RW}^2)$ där

$$\hat{\sigma}_{RW}^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} (\hat{\kappa}_{t+1} - \hat{\kappa}_t + \hat{z})^2,$$

vilket enligt ekvation 2.2.5 kan skrivas som

$$\hat{\sigma}_{RW}^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T \hat{e}_t^2. \quad (2.2.7)$$

Använder vi ekvationerna 2.2.6 och 2.2.7 får vi att variansen för prediktionerna kan skrivas som

$$\widehat{Var}(\hat{\kappa}_{T+t}) = t\hat{\sigma}_{RW}^2$$

Detta kan vi använda för att uttrycka ett prediktionsintervall för κ_{T+t}

$$\hat{\kappa}_{T+t} \pm \lambda_{\alpha/2} \cdot \sqrt{t}\hat{\sigma}_{RW}$$

där $\lambda_{\alpha/2}$ är kvantilen för ett $(1 - \alpha)\%$ -igt konfidensintervall.

Vi kan sedan använda detta för att uttrycka ett prediktionsintervall för $\hat{m}_{x,T+t}$

$$e^{a_x + b_x(\hat{\kappa}_{T+t} \pm \lambda_{\alpha/2} \cdot \sqrt{t}\hat{\sigma}_{RW})}$$

2.2.3 Feltermmer

Som vi har nämnt ovan kan variansen för κ skrivas som

$$\sigma_{RW}^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T \hat{e}_t^2.$$

Vi låter

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T \left(\ln(m_{x,t}) - \hat{a}_x - \hat{b}_x \hat{\kappa}_t \right)^2,$$

på samma sätt som vi skattade $\hat{\sigma}_{RW}^2$. Lee och Carter [7] beskriver även hur feltermmer för a och b beräknas i ett appendix. Eftersom \hat{a}_x skattas som medelvärdet av logaritmen av den centrala dödskvoten över tid skattar vi dess varians som variansen av $\ln(m_{x,t})$ dividerat med T , antalet observationer av m_x

$$\hat{\sigma}_{a_x}^2 = \frac{Var(m_{x,t})}{T}.$$

Variansen för \hat{b}_x beräknas med mer omständliga metoder där bootstrapping är inblandat. Lee [8] menar dock att större delen av variansen över tid förklaras av $\hat{\kappa}_t$ och att övriga feltermmer är mindre viktiga. Vid prediktioner av dödlighetsintensiteterna kommer vi att göra samma antagande och låta variationen i $\hat{\kappa}_t$ stå för variansen av skattningarna.

2.2.4 Övrigt

Implementation i R

Paketet “demography” för programmeringsspråket R inkluderar olika funktioner för demografisk analys som hanterar bland annat beräkning av livslängder, Lee Carter modellering (baserad på singularvärdesuppdelning), dataanalys av dödlighetskvoter, fertilitetskvoter, migration och prognoser för stokastisk befolkning [2].

Vi har dock valt att endast använda paketet vid kontroll av egna beräkningar.

Skillnad i dödlighet mellan män och kvinnor

Trots att kön sedan 2012 inte får påverka premien för försäkringar så behöver försäkringsföretagen ta hänsyn till detta vid beräkning av reserver (DUS06 [4], DUS14 [5]), då det finns skillnader i förväntad livslängd mellan kvinnor och män. Dessa skillnader påverkar det försäkringsbolaget förväntas betala ut till sina försäkringstagare och behöver därför tas hänsyn till vid uppskattning av reserverna.

2.3 Förväntad återstående livslängd

Andersson [11] visar att om vi låter T_x vara den återstående livslängden för en x årig person, så är $e_x = E[T_x]$ den förväntade återstående livslängden.

$$e_x = \int_0^\infty \frac{l(x+t)}{l(x)} dt, \quad (2.3.1)$$

där vi har

$$l(x+t) = e^{-\int_0^{x+t} \mu_s ds}$$

sedan tidigare (ekvation 2.5.1).

Vi kan sedan approximera dessa enligt

$$e_x = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{l(x+t)}{l(x)},$$

$$l(x+t) = e^{-\sum_{s=0}^{x+t} \mu_s ds}.$$

Om vi tar hänsyn till tid t i beräkningarna ovan får vi

$$e_x = \sum_{t=0}^{\infty} e^{-\int_0^t m_{x+s,s} ds} = \sum_{t=0}^{\infty} e^{-\sum_{s=0}^t m_{x+s,s}},$$

där vi använt oss av att $m_{x,t}$ antas vara konstant över 1-årsperioder.

2.4 Portfölj

För beräkning av reserverna vid kalibrering av stressparametrarna använder vi oss av befolkningsdata från Human Mortality Database (HMD), med vissa begränsningar. Vi antar att de som tecknar försäkringar är över 25 år. Ett av antagandena för långlevnadsrisk ovan är att medelåldern för försäkringstagare inom portföljen är 60 år eller mer. Om $x \geq 40$ för befolkningsdata får vi att den viktade medelåldern är 60.4.

Vid kalibrering för uppskjuten livsvarig livränta använder vi oss därför av befolkningsdata från 2015, med individer 40 år eller äldre, $N_{x,2015}, x \geq 40$. För dödsfallsrisk finns inga sådana begränsningar för medelålder, så för kapitalförsäkring för dödsfall använder vi oss av befolkningsdata från 2015, med individer som är 25 år eller äldre, $N_{x,2015}, x \geq 25$.

Vi kommer även att jämföra de resultat vi får med denna diversifierade portfölj med en portfölj som har lika många individer födda mellan 1920-1990, $N_{x,2015} = 50000$ för alla x , (Medelvärdet av $N_{x,2015}$ är ungefär 50000 i materialet från HMD) för alla x . Vi får då en medelålder på 62 år.

2.5 Reserver

Om vi återigen använder oss av Anderssons [11] definitioner får vi att överlevelsefunktionen definieras enligt

$$l_x(t) = \frac{l(x+t)}{l(x)},$$

och är sannolikheten att en individ lever till år $x+t$ givet att individen lever vid år x .

Överlevelsefunktionen för en nyfödd individ definieras enligt

$$l(x) = e^{-\int_0^x \mu_s ds} \approx e^{-\sum_{s=0}^x \mu_s}, \quad (2.5.1)$$

där μ är konstant över 1-årsperioder.

Givet att försäkringstagaren har uppnått ålder x år definierar vi individens återstående livslängd som T_x . Vi kan då skriva

$$P(T_x > t) = \frac{l(x+t)}{l(x)}, \quad t \geq 0.$$

Vilket ger att sannolikheten att en individ avlider inom ett år är

$$q_x = P(T_x \leq 1) = 1 - (l(x+1))/l(x), \quad t \geq 0.$$

Uppskjuten livsvarig livränta

Uppskjuten livsvarig livränta (ULL) är även känd som vanlig pensionsförsäkring. Utbetalning sker årsvis från det att en individ har uppnått en

på förhand bestämd ålder k tills försäkringstagaren avlider. Låter vi utbetalningen C_t vara 1 kr gäller för en hel portfölj att utbetalningen vid tid t är summan av antal individer som är vid liv och har en ålder som är minst k år.

$$Utb_t = \sum_{x \geq k} N_{x,t} \approx \sum_{x \geq k} N_{x,0} l_x(t)$$

Reserverna beräknas som det diskonterade framtida kassaflödet multiplicerat med överlevnadssannolikheten, vilket under enkla antaganden kan skrivas som

$$Res_{x \geq k}^{ULL} := \sum_{t=1}^n P(T_x > t) \frac{C_t}{(1+r_t)^{t-1}} = \sum_{t=1}^n l_x(t) \frac{C_t}{(1+r_t)^{t-1}},$$

där C_t är utbetalning vid tid t , r_t är diskonteringsräntan vid tid t .

Vi har befolkningsdata för $x \leq 110$, vilket ger $n = 110 - x$. För pensionsprodukter är det alltså langlevnadsrisken som påverkar reserverna i störst utsträckning. För att hålla uträkningarna så enkla som möjligt låter vi $C_t = 1$, för alla t .

Vi får då att kassaflödet för hela portföljen blir

$$\begin{aligned} Res^{ULL} &= \sum_{x \geq k} \sum_{t=1}^n l_x(t) \frac{C_t N_{x,0}}{(1+r_t)^{t-1}} = \{C_t = 1, \forall t\} = \sum_{x \geq k} \sum_{t=1}^n l_x(t) \frac{N_{x,0}}{(1+r_t)^{t-1}} \\ &= \sum_{x \geq k} \sum_{t=1}^n e^{-\sum_{s=0}^t \mu_{x+s, T+s}} \frac{N_{x,0}}{(1+r_t)^{t-1}}. \end{aligned}$$

Kapitalförsäkring för dödsfall

Om den försäkrade avlider innan hon/han har uppnått åldern $z = x + m$ betalas ett engångsbelopp om $F = 1$ kr ut. Om försäkringstagaren lever längre än $x + m$ sker ingen utbetalning. Denna försäkringstyp kallas kapitalförsäkring för dödsfall (KFD). För en hel portfölj gäller alltså att utbetalningen vid tid t är summan av antal avlidna individer med en ålder mindre än z .

$$Utb_t = \sum_{x < z} D_{x,t} \approx \sum_{x < z} N_{x,0} \mu_{x+t, t} l_x(t)$$

Vi kan skatta förväntad utbetalning vid tid t som sannolikheten att personen lever vid tid t , men avlider inom ett kort intervall innan tid z , multiplicerat med utbetalt belopp. För en x -årig individ får vi alltså ett förväntat framtida kassaflöde som kan skattas enligt

$$Res_{x < z}^{KFD} := \sum_{t=1}^m \mu_{x+t, t} l_x(t) \frac{F}{(1+r_t)^{t-1}},$$

där F är försäkrat belopp ($F = 1$ för alla x, t), r_t är diskonteringsräntan vid tid t .

Jämfört med pensionsförsäkring (uppskjuten livsvarig livränta) är det istället risken att dö i förtid som i huvudsak påverkar storleken på utbetalt belopp för ett försäkringsbolag.

Här får vi på samma sätt som för uppskjuten kapitalförsäkring för dödsfall att det totala kassaflödet för portföljen blir

$$\begin{aligned} Res^{KFD} &= \sum_{x < z} \sum_{t=1}^m \mu_{x+t,t} l_x(t) \frac{N_{x,0}}{(1+r_t)^{t-1}} \\ &= \sum_{x < z} \sum_{t=1}^m \mu_{x,t} e^{-\sum_{s=0}^t \mu_{x+s,T+s}} \frac{N_{x,0}}{(1+r_t)^{t-1}}. \end{aligned}$$

Då vi beräknar ettårsrisken kommer vi göra antagandet att försäkringen är livsvarig, för att kunna undersöka alla åldrar. Eftersom vi med data från HMD endast kan beräkna dödlighetsintensiteterna upp till $x = 110$, så följer det att $z = 110$. Detta är dock inte ett rimligt antagande att göra allmänt i fallet med dödsfallsförsäkring, eftersom det leder till att risken endast ligger i när försäkringsbeloppet betalas ut. Vi kommer senare att ändra den övre gränsen till $z = 70$.

Se Andersson [11] för kommutationsfunktioner och härledningar.

Reserver efter stressade dödligheter

Under Solvens II stressas μ med en faktor f , så att vi får $\mu' = \mu \cdot f$. Om vi låter

$$K_s = - \int_0^x \mu_s ds,$$

får vi att överlevnadsfunktionen i ekvation 2.5.1 när dödlighetssannolikheten stressas kan skrivas som

$$l_f(x) = e^{f_s K_s} = (e^{K_s})^{f_s} = l(x)^{f_s}.$$

Variation hos simulerade reserver

Det är två faktorer som huvudsakligen påverkar variationen i reserverna. Dessa är varians i population och variation i parametern μ . Reserverna påverkas alltså dels av att det finns en osäkerhet i skattningarna av dödlighetsintensiteterna, samt att det finns en osäkerhet i förväntad populationsstorlek och antal avlidna. Antal x -åriga individer som avlider vid tid t simuleras från en binomialfördelning

$$D_{x,t} \sim Bin(N_{x,t}, q_{x,t})$$

där $N_{x,t}$ är antal x -åriga individer vid tid t och $q_{x,t}$ är den ettåriga dödsrisken för en x -årig individ vid tid t . Vi har även att

$$N_{x+1,t+1} = N_{x,t} - D_{x,t},$$

och

$$q_{x,t} = 1 - e^{-\int_0^1 \mu_{x+s,s} ds}.$$

Vi kan alltså använda oss av två metoder i tre kombinationer för att simulera olika utfall för reserverna, för att sedan undersöka hur variationen påverkas.

- Vi låter $\mu \approx m_{x,t}$ vara stokastisk vid simulering av reserverna, och håller populationsstorleken fix.
- Vi låter istället skattningen av populationsstorleken stå för variationen, och låter μ vara enligt väntevärdesskattning.
- Låt både μ och populationsstorlek vara stokastiska.

I avsnitt 3.4 kommer vi att se att skattningarna av reserverna skiljer sig markant mellan punkt 1 och 2 för både uppskjuten livsvarig livränta och kapitalförsäkring för dödsfall. Såpass mycket att reserven som en funktion av väntevärdet av $m_{x,t}$ (då både μ och populationen är fix) inte ens visas i histogrammet för punkt 2. Enligt Jensens olikhet gäller att om X är en slumpvariabel, $E[|X|]$ är ändlig och f är en konvex funktion så gäller att $f(E[X]) \leq E[f(X)]$. I vårt fall är $X = \log(m_{x,t})$, och $f(x) = Res_x$ den funktion vi använder för att beräkna reserverna.

$$\begin{aligned} E[|X|] &= E[|\log(m_{x,t})|] = E[|a_x + b_x \kappa_t + \varepsilon_{x,t}|] \leq E[|a_x + b_x \kappa_t|] + E[|\varepsilon_{x,t}|] \\ &= |a_x + b_x \kappa_t| + E[|\varepsilon_{x,t}|] < \infty, \end{aligned}$$

eftersom

$$E[|\varepsilon_{x,t}|] = \begin{cases} E[-\varepsilon_{x,t}] = -E[\varepsilon_{x,t}] = 0 & , \varepsilon_{x,t} < 0 \\ E[\varepsilon_{x,t}] = 0 & , \varepsilon_{x,t} > 0. \end{cases}$$

Vi ser i figur A.1 i Appendix A, som är en normering av Res_x^{ULL} och Res_x^{KFD} (reserverna som en funktion av ålder), att Res_x^{ULL} är konvex mellan $27 \leq x \leq 65$ och $65 \leq x \leq 97$ och att Res_x^{KFD} verkar vara konvex för $25 \leq 75$. Det följer alltså att $Res_x(E[m_{x,t}]) \leq E[Res_x(m_{x,t})]$ både för uppskjuten livsvarig livränta och kapitalförsäkring för dödsfall, vilket kan förklara varför vi i punkt 2 får en fördelning som är högre än $Res_x^{ULL}(E[m_{x,t}])$ och $Res_x^{KFD}(E[m_{x,t}])$.

3 Analys

Vi baserar våra beräkningar och prediktioner på 30 års data, mellan 1985-2014. Anledningen till detta är att 30 års data ger tillräckligt bra prediktioner. Lundström och Qvist [9] föreslår de senaste 25 åren som basperiod, men

då vi upptäckte att en basperiod på ungefär 20 år var väldigt känsligt för förändringar i data anser vi att 30 år mer rimligt. Risken med att använda datamaterial för långt tillbaka i tiden är dels att datamaterialet inte är tillförlitligt, vilket gäller för svensk data 1750-1860 (detta nämns på hemsidan för HMD [3]), dels att vi överanpassar modellen till historisk data när syftet med Lee Carter modelleringen är att prediktera framtida värden.

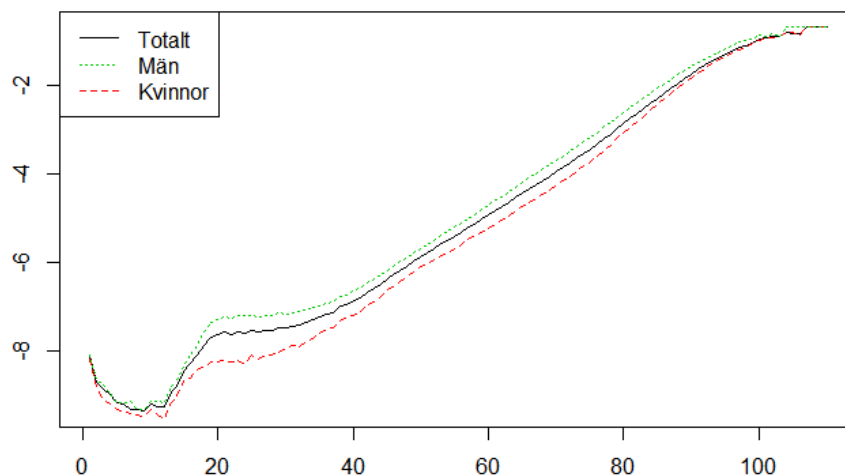
Vi kan även se i bland annat figur 3.1.12 hur förbättringen av dödligheten har förändrats något på senare år (efter ca 1950). Det kan då ge missvisande prediktioner om vi baserar modellen på data som eventuellt över- eller underskattar den tidsberoende förändringen.

I de fall resultaten för män och kvinnor inte skiljer sig nämnvärt presenteras plottar och resultat i huvudsak för män och kvinnor tillsammans om inte annat nämns.

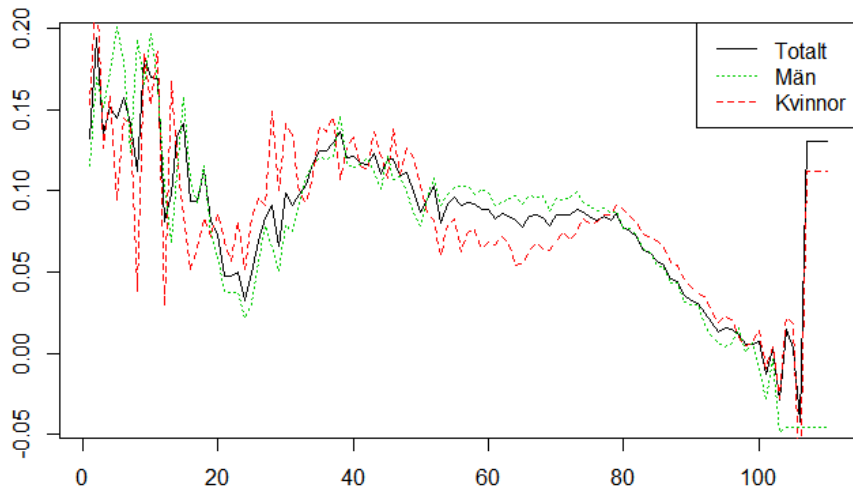
3.1 Precision hos Lee Carter

Parameterskattningar

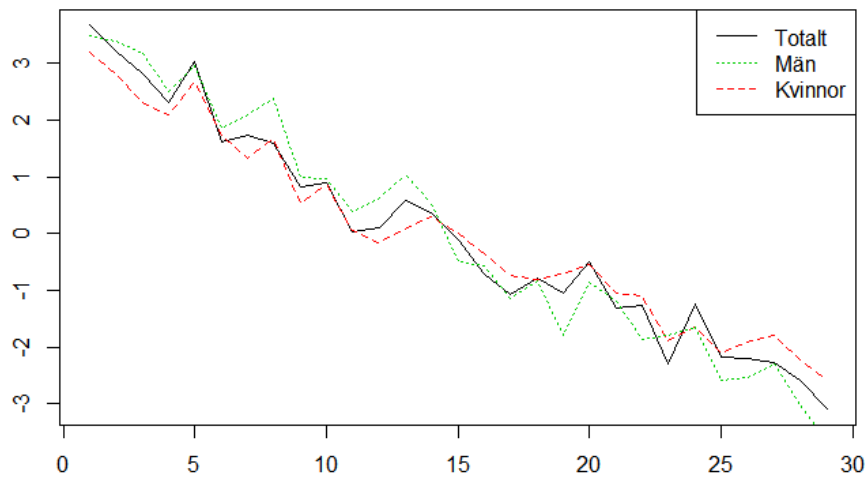
Nedan visas plottar av skattade värden för \hat{a}_x , \hat{b}_x och $\hat{\kappa}_t$. Vi kan se att skattningarna följer samma mönster för män, kvinnor, samt män och kvinnor tillsammans. Störst skillnad mellan kön blir det i prediktionerna av $\hat{\kappa}_t$ där både lutningen och spridningen skiljer sig.



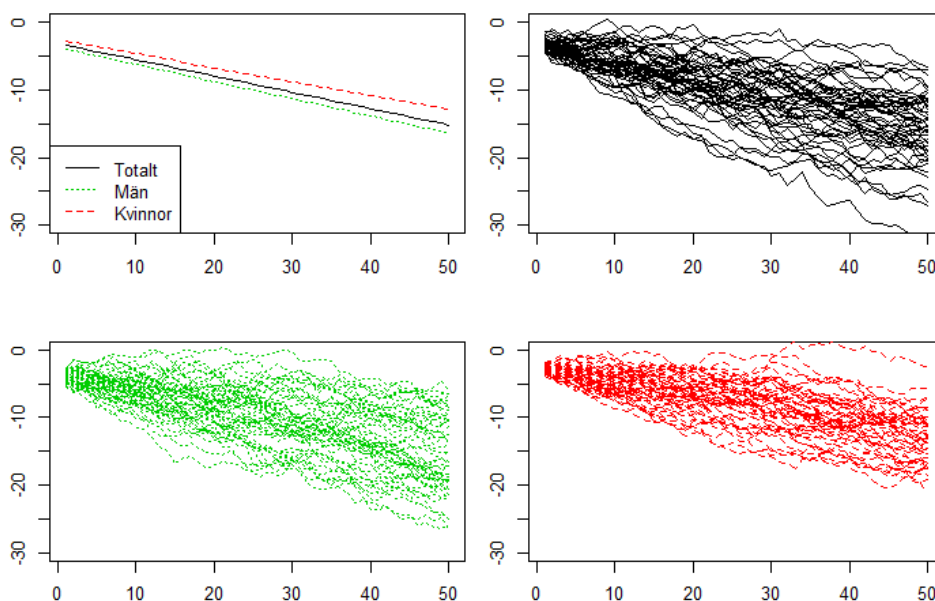
Figur 3.1.1: Skattningar av \hat{a}_x



Figur 3.1.2: Skattningar av \hat{b}_x



Figur 3.1.3: Skattningar av $\hat{\kappa}_t$



Figur 3.1.4: Prediktioner av $\hat{\kappa}_t$ 50 år framåt i väntevärde samt som 50 slumpvandringar.

Vi påminner om att \hat{a}_x beskriver ett allmänt mönster för dödligheten, \hat{b}_x uttrycker hur tidseffekten påverkar förändringen i dödlighet för olika åldrar, och $\hat{\kappa}_t$ beskriver förändringen av dödlighet över tid.

Som väntat ökar skattningarna för \hat{a}_x i och med att åldern ökar. Detta är rimligt eftersom dödlighetsintensiteterna ökar exponentiellt med ålder. Skattningarna ser ut att vara relativt instabila för yngre åldrar, men verkar stabilisera sig ungefär kring 40-50 års ålder.

Ett högre värde på \hat{b}_x innebär att tidseffekten $\hat{\kappa}_t$ får en större inverkan på skattningarna av de predikerade dödlighetsintensiteterna. I och med att $\hat{\kappa}_t$ är avtagande, vilket följer av den avtagande trenden i dödlighet över tid, innebär det att dödlighetsintensiteterna avtar i en högre hastighet ju större \hat{b}_x är.

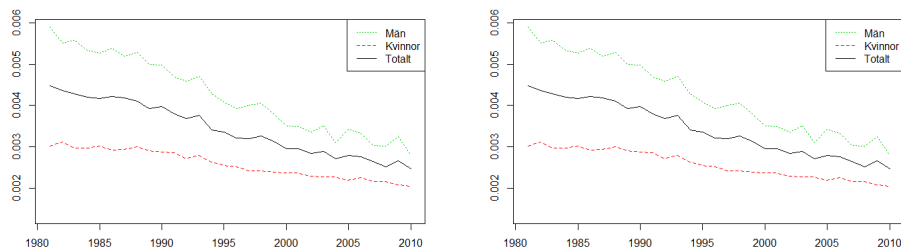
Att \hat{b}_x antar negativa värden för $x > 100$ kan förklara de instabila och avtagande värdena för $\hat{\mu}_{x,t} \approx \hat{m}_{x,t}$ för höga åldrar, se figur 3.1.6 nedan.

För både \hat{b}_x och $\hat{\kappa}_t$ går skattningarna för män och kvinnor omlott, men för skattningarna av \hat{a}_x ligger kurvan för män över kvinnor för alla x . En rimlig utveckling eftersom dödlighetsintensiteterna normalt sett är lägre för kvinnor än för män, vilket hör ihop med längre förväntade livslängder.

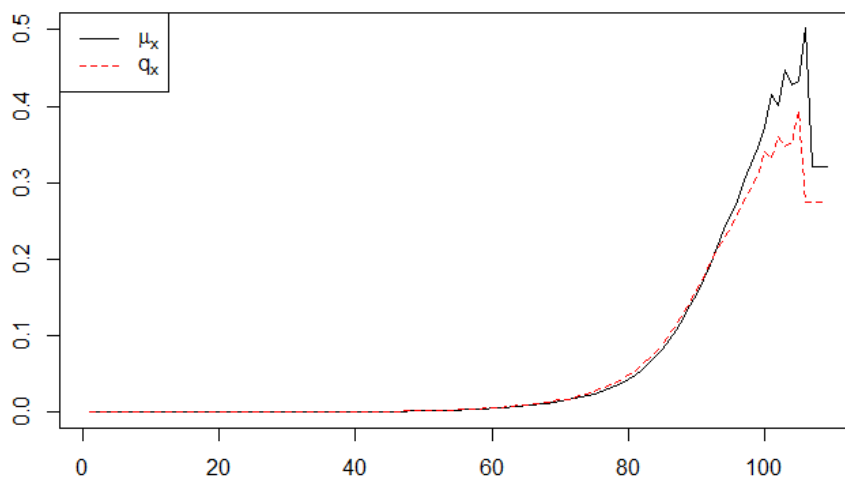
Vi påminner även om ekvation 2.2.2, och att vi kan skriva om denna så att vi får de förväntade skattade dödlighetsintensiteterna

$$\hat{m}_{x,t} = e^{\hat{a}_x + \hat{b}_x \hat{\kappa}_t},$$

vilka presenteras nedan.

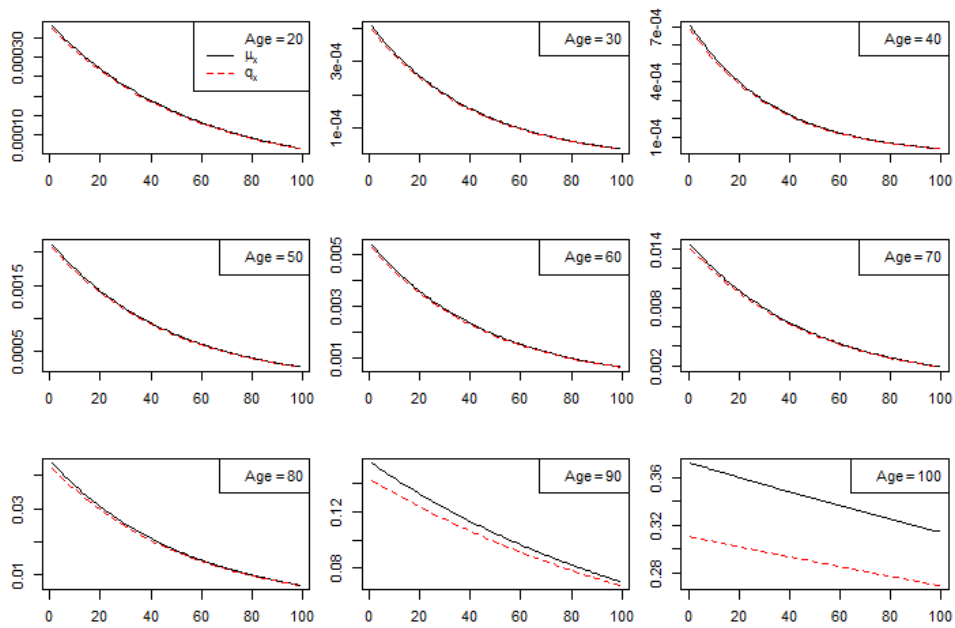


Figur 3.1.5: Skattningar av $\hat{m}_{x,t}$ (vänster), jämfört med observerad dödlighet (höger) för 50-åriga män, kvinnor, samt män och kvinnor mellan år 1980-2010



Figur 3.1.6: Skattningar av $\hat{\mu}_{x,t} \approx \hat{m}_{x,t}$ och $\hat{q}_{x,t}$ vid $t = 0$ för män och kvinnor

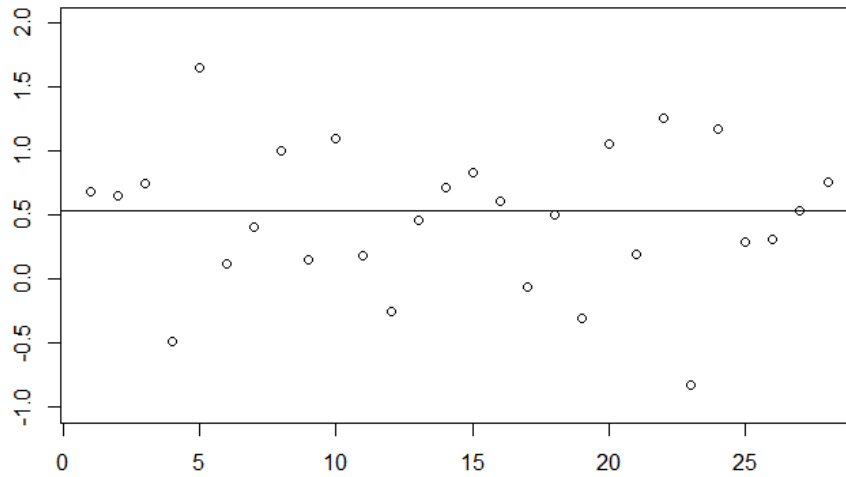
Vi har valt att låta $\mu_{x,t} \approx m_{x,t}$. Det är emellertid även vanligt att approximera $q_{x,t} \approx m_{x,t}$. Nedan ser vi att prediktionerna för dessa ligger väldigt nära varandra i skattning, så att ersätta den ena med den andra ger inte några avsevärda skillnader i resultat. Vi noterar dock en större skillnad mellan skattningarna för åldrar runt 100 år.



Figur 3.1.7: Skattningar av $\hat{\mu}_{x,t} \approx \hat{m}_{x,t}$ och $\hat{q}_{x,t}$ över t för män och kvinnor i olika åldrar

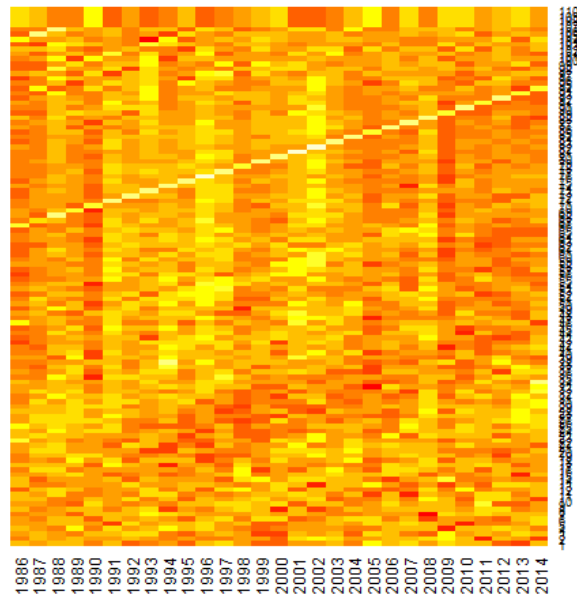
Feltermer

Då vi beräknar och plottar residualerna enligt ekvation 2.2.3 och 2.2.5 får vi nedanstående resultat.



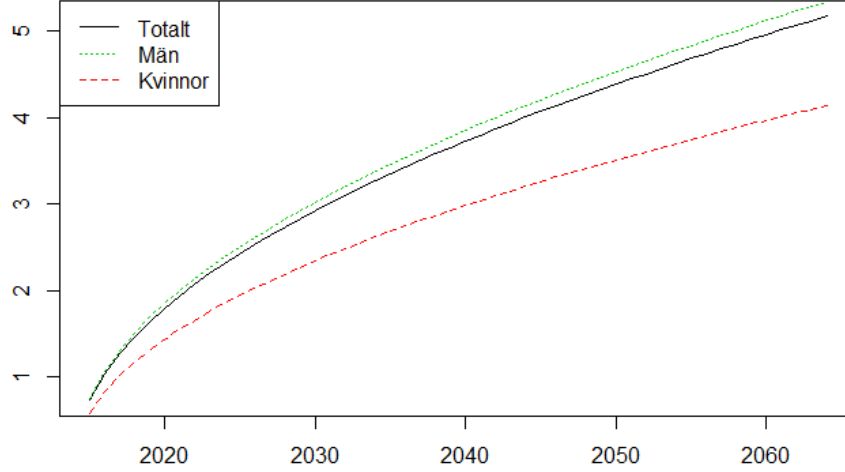
Figur 3.1.8: Residualer centrerade kring σ_{RW}^2 beroende av tid för både män och kvinnor

Residualerna beräknade enligt ekvation 2.2.5 ligger slumpmässigt centrerade kring ungefär 0.5 med en avvikelse om ungefär ± 1 , vilket verkar rimligt om vi jämför med de historiska värdena på κ (se figur 3.1.3).



Figur 3.1.9: Heatmap av residualerna $\varepsilon_{x,t}$ med år 1986-2014 på x -axeln och åldrarna 1-110 på y -axeln

Heatmapen ovan visar med hjälp av olika färger residualerna $e_{x,t}$ för åren 1986-2015 och åldrar 1-110. Negativa värden är åt det röda hållet, positiva värden är gula, och residualer som ligger nära noll är mer orangea. Det syns ganska tydligt att residualerna för åldrar över ungefär 104 är samma, men skiljer sig något mellan olika kalenderår. Vi kan även se en linje som följer från år 1986 ålder 66 till 2014 ålder 94. I övrigt verkar vi få relativt slumpmässiga residualer.



Figur 3.1.10: Skattning av $\sqrt{\text{Var}(\hat{\kappa}_t)} = \sqrt{t}\hat{\sigma}_{RW}$ som ökar över 50 års tid

Vi har sett i tidigare bilder att parameterskattningarna inte skiljer sig så mycket mellan män och kvinnor. Däremot skiljer sig skattningarna av $\hat{\kappa}$ och $\hat{\sigma}_{RW}$ desto mer. Vilket kan förklara skillnaden i dödlighetsintensiteter och förväntad livslängd mellan män och kvinnor.

Vi nämnde tidigare att vi gör antagandet att $\hat{\kappa}_t$ står för den betydande delen av variationen i skattningarna och prediktionerna av $\hat{m}_{x,t}$. Lee & Carter [7] definierar prediktionsfelet $E_{x,T+t}$ i modellen enligt

$$E_{x,T+t} = \hat{\sigma}_{a_x} + \hat{\sigma}_{b_x} (\hat{\sigma}_{\kappa_{T+t}} + \hat{\kappa}_{T+t}) + \hat{b}_x \hat{\sigma}_{\kappa_{T+t}} + \hat{\sigma}_{\varepsilon_{x,t}}.$$

Antar vi att variationerna i \hat{a}_x och \hat{b}_x är försumbara får vi att

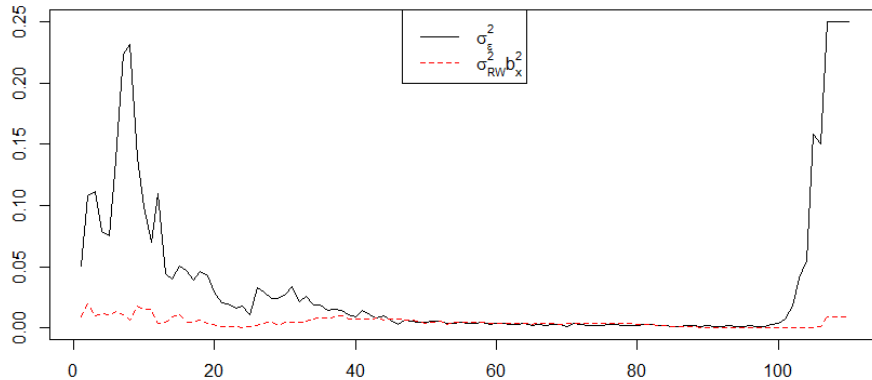
$$E_{x,T+t} = \hat{b}_x t \sigma_{RW} + \hat{\sigma}_{\varepsilon_{x,t}}.$$

Om vi låter \hat{a}_x och \hat{b}_x vara konstanter med en varians vi kan bortse från blir $\hat{\kappa}_t$'s bidrag till prediktionsfelet $\hat{b}_x t \hat{\sigma}_{RW}$.

Vidare har Lee & Carter [7] visat att det inte föreligger någon korrelation mellan parametrarna och gör antagandet att dessa är oberoende, vilket ger att variansen i prediktionerna kan uttryckas enligt

$$\hat{\sigma}_{E_{x,T+t}}^2 = \hat{\sigma}_{a_x}^2 + \hat{\sigma}_{b_x}^2 (\hat{\sigma}_{\kappa_{T+t}}^2 + \hat{\kappa}_{T+t}^2) + \hat{b}_x^2 \hat{\sigma}_{\kappa_{T+t}}^2 + \hat{\sigma}_{\varepsilon_{x,t}}^2 \approx \hat{b}_x^2 t \sigma_{RW}^2 + \hat{\sigma}_{\varepsilon_{x,t}}^2,$$

om vi kan bortse från variationen i a_x och b_x .

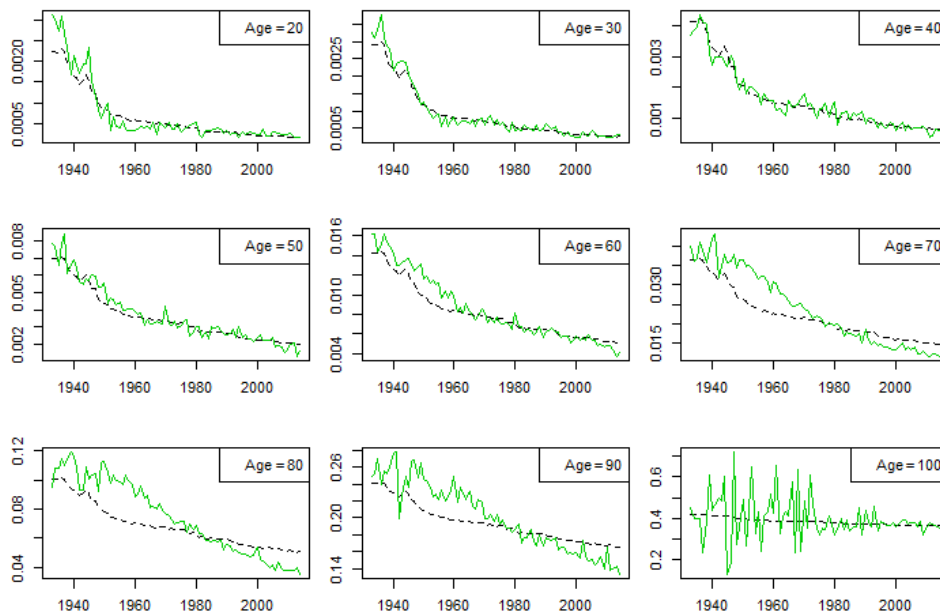


Figur 3.1.11: Skattning av den totala residualkvadratsumman $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ samt κ :s bidrag till prediktionsfelet vid $t = 1$

Figuren visar att större delen av variansen förklaras av $\hat{\kappa}_t$ mellan åldrarna 36-89, där det tar $t \leq 5$ år innan $\hat{\kappa}$:s bidrag går om residualkvadratsumman vid $t = 0$. Som väntat är det en stor del av variationen för äldre personer som inte förklaras av $\hat{\kappa}$. Däremot var det till en början något oväntat att en så stor del av variationen för yngre åldrar inte förklaras, eftersom vi vid modelleringen för yngre åldrar har fått bra anpassningar och prediktioner, vilket vi kommer att visa nedan. Detta kan förklaras av att den basperiod vi valde gav något sämre anpassning för yngre åldrar jämfört med andra basperioder.

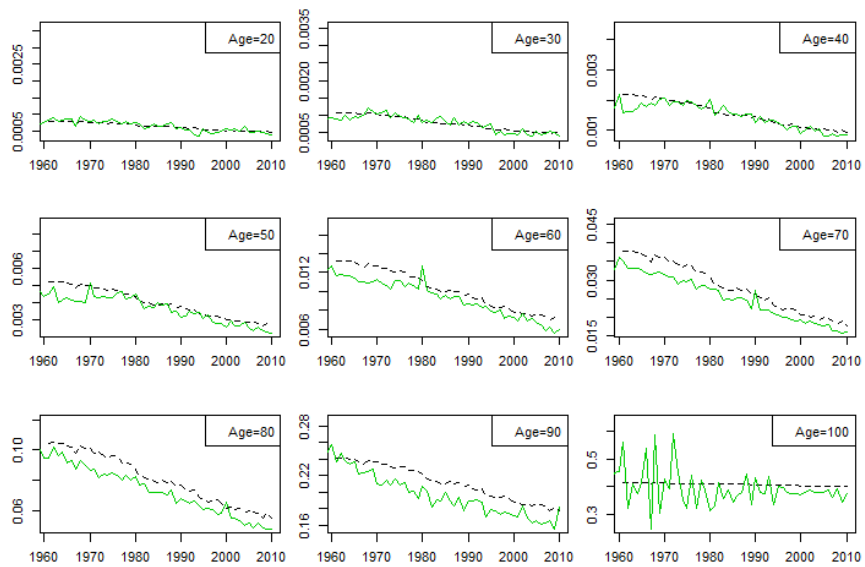
Historisk anpassning

Då vi använder en längre basperiod som grund för modelleringen ger Lee Carter en relativt bra anpassning i yngre åldrar, men blir sämre från ungefär 60-70 års ålder.

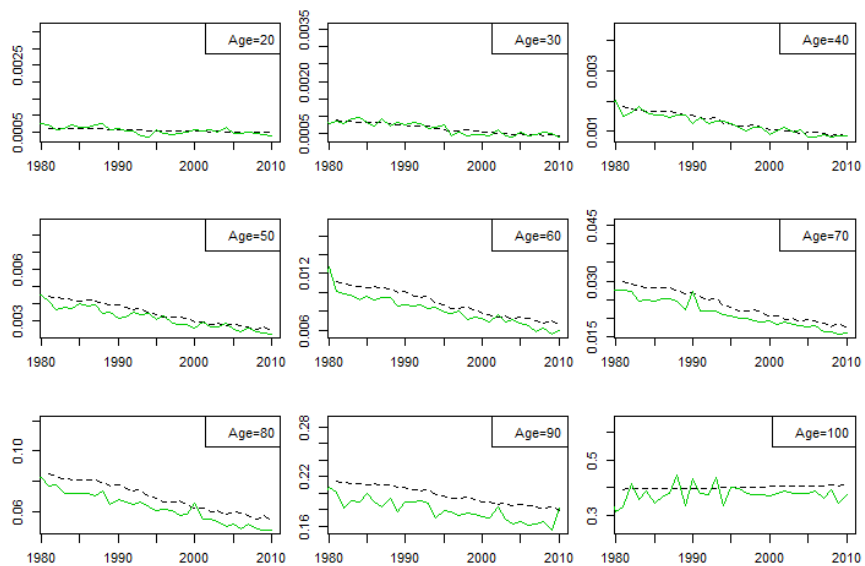


Figur 3.1.12: Skattningar av de förväntade dödlighetsintensiteterna (svart, streckad) jämfört med faktiska utfall (grönt) baserat på data 1910-2010, för män och kvinnor 20-100 år

Vi noterar även att det skedde en relativt kraftig förändring i utvecklingen av den centrala dödskvoten ungefär runt år 1950. Detta gör att vi misstänker att denna förändring påverkar modellen överlag samt bidrar till en risk att överanpassa modellen till historisk data då vi väljer ett datamaterial för långt tillbaka i tiden. Nedan jämför vi skattade kurvor baserade på kortare tidsintervall, och vi ser att dessa anpassningar ligger närmre det faktiska utfallet.



Figur 3.1.13: Skattningar av de förväntade dödlighetsintensiteterna (svart, streckad) baserat på data 1960-2010 jämfört med faktiska utfall (grönt), för män och kvinnor 20-100 år

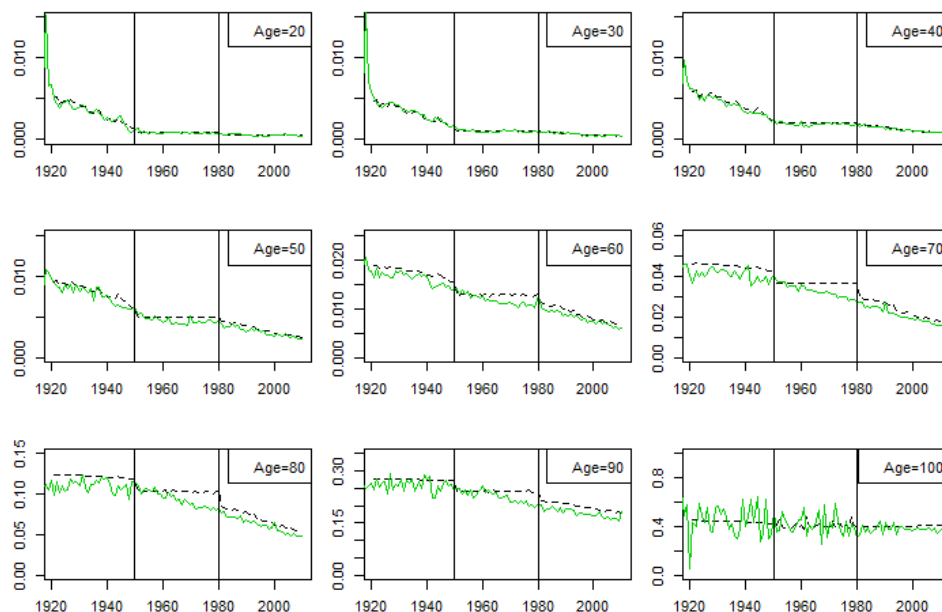


Figur 3.1.14: Skattningar av de förväntade dödlighetsintensiteterna (svart, streckad) baserat på data 1980-2010 jämfört med faktiska utfall (grönt), för män och kvinnor 20-100 år

Både modellen baserad på 30 och 50 års historisk data ger liknande

anpassning till historiskt utfall, det blir dock något större skillnad i prediktioner.

Vi ser nedan att precisionen i anpassningen även påverkas av vilka tidsintervall som ligger till grund för modellen.

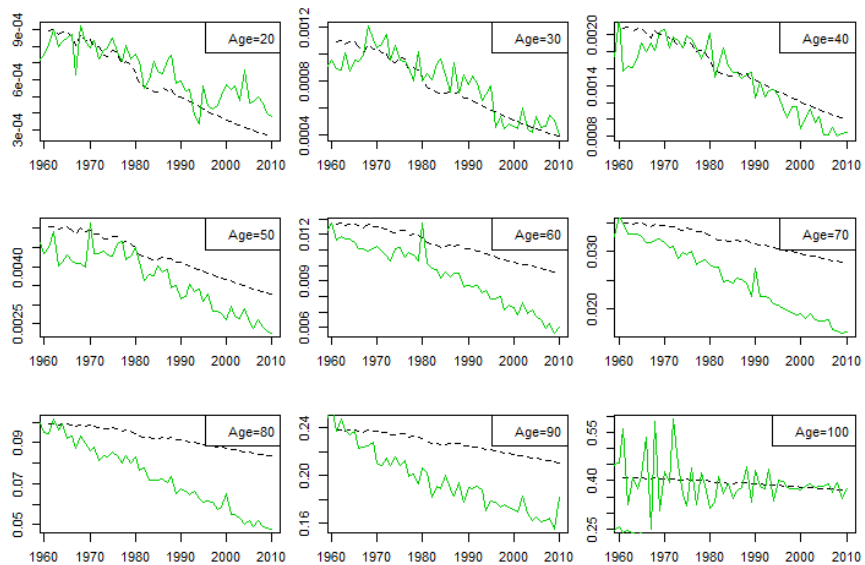


Figur 3.1.15: Skattningar av de förväntade dödlighetsintensiteterna (svart, streckad) baserat på 30-åriga intervall mellan åren 1920-2010 jämfört med faktiska utfall (grönt), för män och kvinnor 20-100 år

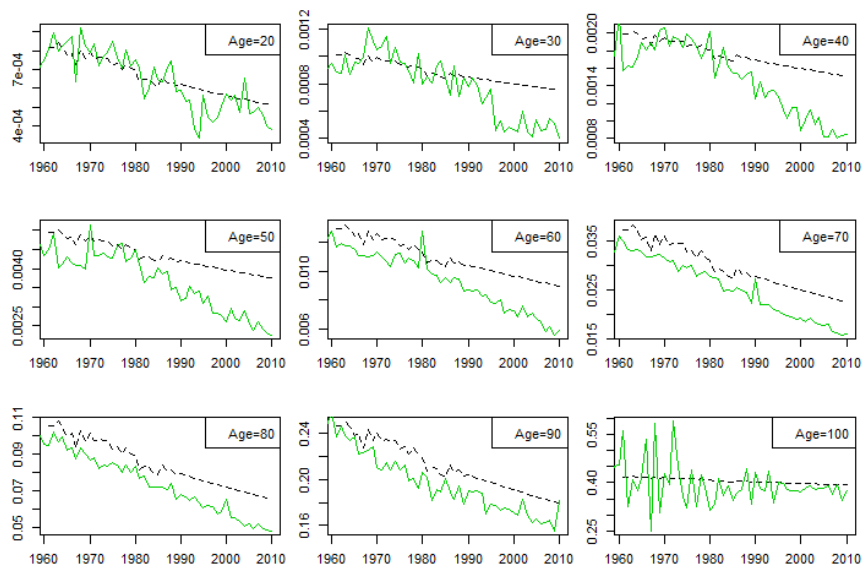
Dessa intervallvis anpassade dödlighetsintensiteter stämmer bättre överens med de observerade än då vi gör en anpassning över ett större intervall (jämför med figur 3.1.12).

3.2 Prediktion av dödlighetsintensiteter

Figur 3.1.12- 3.1.15 visar att det gör en stor skillnad för anpassningen beroende på det antal, samt vilka år vi lägger till grund för modelleringen. Detta gäller även för prediktion av dödligheter, vilket vi ser i bilderna nedan.



Figur 3.2.1: Skattningar av dödlighetsintensiteter mellan 1910-1990 samt prediktioner mellan 1990-2010 (svart, streckad) jämfört med faktiska utfall (grönt), för män och kvinnor 20-100 år

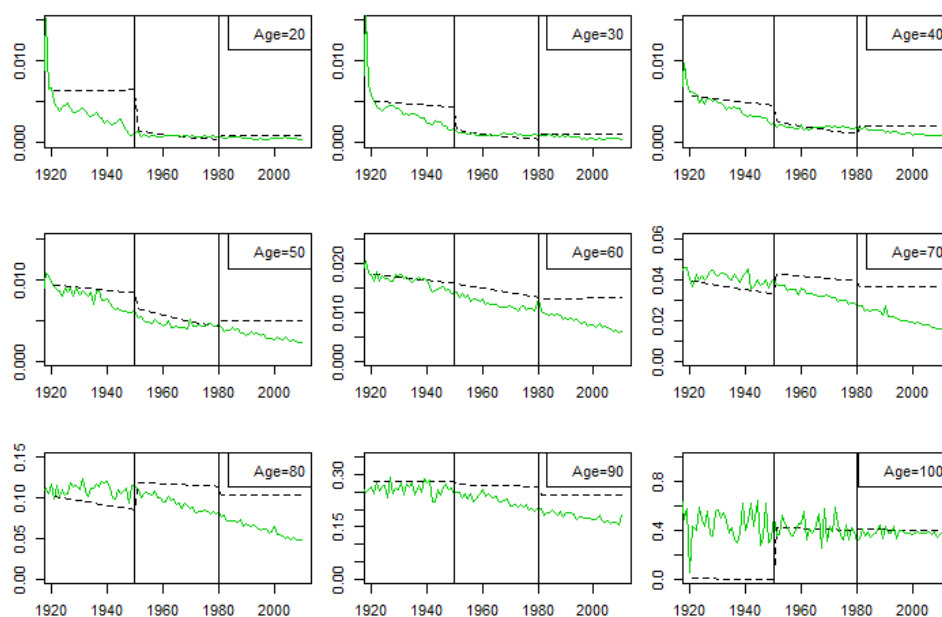


Figur 3.2.2: Skattningar av dödlighetsintensiteter mellan 1960-1990 samt prediktioner mellan 1990-2010 (svart, streckad) jämfört med faktiska utfall (grönt), för män och kvinnor 20-100 år

Vi får bättre resultat för äldre åldrar, men något sämre prediktioner för

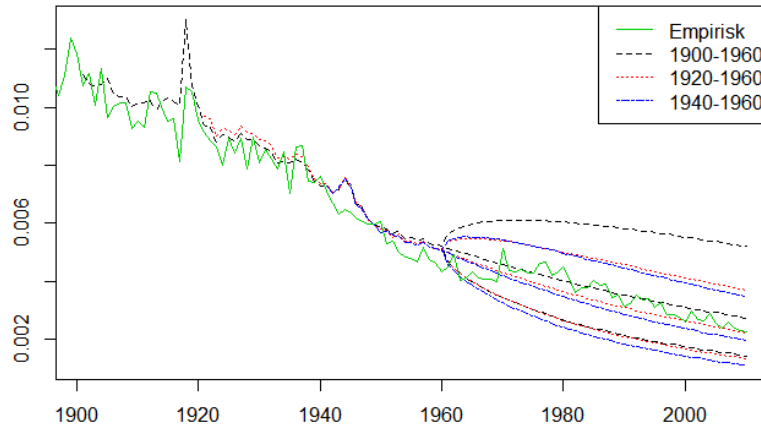
yngre åldrar om vi baserar modellen på data 1960-1990 istället för 1910-1990. Skattningarna för yngre åldrar är dock såpass små i förhållande till skattningarna för äldre åldrar att de skillnaderna inte påverkar lika mycket.

Likt figur 3.1.15 varierar precisionen i prediktionen av dödlighetsintensiteterna beroende på vilka tidsintervall som ligger till grund. Detta eftersom modellen fångar vissa trender i data som inte nödvändigtvis är relevanta för prediktion. Nedan jämförs prediktioner av dödlighetsintensiteter mot faktiska utfall i tre olika intervall om 30 år vardera. Dessa är baserade på de 30 år som föregår intervallet.



Figur 3.2.3: Prediktioner av dödlighetsintensiteter (svart, streckad) jämfört med faktiska utfall (grönt) mellan 1920-2010 i intervaller om 30 år, för män och kvinnor 20-100 år

För att undersöka precisionen av skattningarna och prediktionerna jämför vi hur väl Lee Carter modellerar dödskvoten beroende på hur många år vi baserar datamaterialet på. Vi genomför tre prediktioner mellan åren 1960-2010 samt skattar 90%-iga konfidensintervall baserade på data mellan år 1940-1960, 1920-1960, samt 1900-1960, dessa jämför vi med verkligt utfall i samma intervall.



Figur 3.2.4: Prediktioner jämfört med faktiska utfall (grönt), för män och kvinnor 50 år

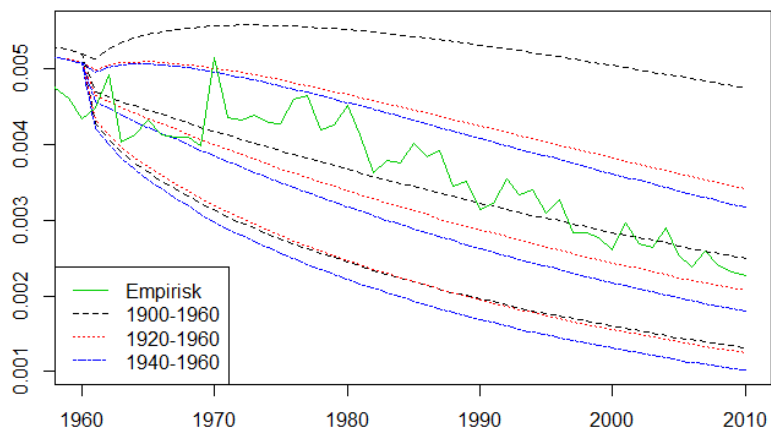
Enligt bilden ovan ligger alla prediktioner relativt nära de verkliga värdena, och alla konfidensintervall täcker in dessa. Vi kan ana ett bredare konfidensintervall då vi baserar anpassningarna på 60 års historisk data, vilket inte är så märkligt eftersom vi kan se att det är relativt stora variationer i dödligheten mellan år 1900-1920 (och ännu mer tidigare år). Vi upptäckte även att prediktioner baserade på ungefär ≤ 20 års data är mer känslig för förändringar i datamaterialet, vilket i vissa fall gav uppenbart felaktiga anpassningar och prediktioner. Vi noterar även att konfidensintervallen blir bredare ju längre fram vi predikterar, vilket följer av att standardavvikelsen för $\hat{\kappa}_t$ ökar med \sqrt{t} .

Vi ser dock att prediktionerna och dess konfidensintervall inte utgår från de faktiska värdena, vilket inte är så märkligt, i och med att det är separata skattningar. Vi nämnde att Lee & Carter [7] gör en andra skattning av $\hat{\kappa}_t$, så att det skattade antalet dödsfall stämmer överens med observerat antal. Vi provar att normera de predikterade värdena så att de utgår från det empiriska värdet år 1960, alltså att $\hat{m}_{50,1960} = m_{50,1960}$. Detta gör vi genom att normera vår skattning av $\hat{\kappa}_T$ så

$$\hat{\kappa}_T = \frac{\log(m_{x,T}^{obs}) - \hat{a}_x}{\hat{b}_x}.$$

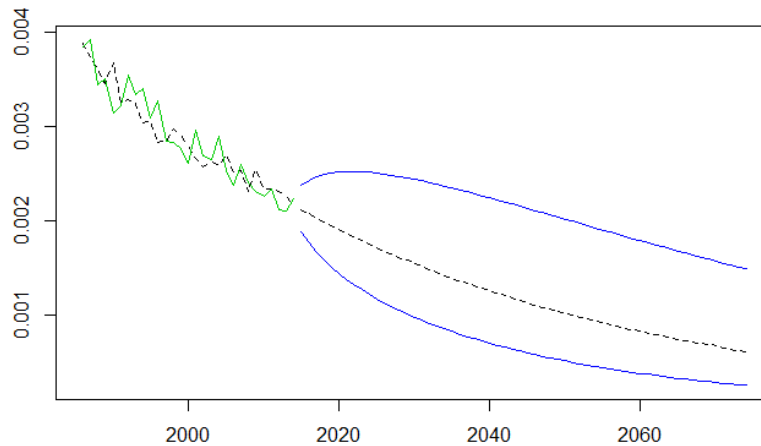
När Lee-Carter återanpassar $\hat{\kappa}_t$ får de eventuellt en kompensation som påminner om denna. Genom att normera skattningen av $\hat{\kappa}$ på detta sett blir $\hat{\kappa}$ beroende av x . Vi vill egentligen att $\hat{\kappa}$ endast ska bero på tiden, så denna

normering är inte något vi kommer att tillämpa längre fram. Detta gör vi endast för att få samma utgångspunkt för prediktionerna, konfidensintervallen och de empiriska värdena för jämförelsens skull.



Figur 3.2.5: Prediktioner jämfört med faktiska utfall (grönt), för män och kvinnor 50 år

Nedan illustreras dödskvoterna modellerade med Lee Carter och empiriska dödskvoter mellan 1985-2014 (de år vi har valt som basperiod), dödlighetsintensiteter predikterade 60 år framåt, samt 90%-iga konfidensintervall för de predikterade värdena för 50 åringar.



Figur 3.2.6: Skattade dödlighetsintensiteter (svart, streckad) jämfört med faktiska utfall, samt predikterade värden (svart, streckad) med konfidensintervall, för män och kvinnor 50 år

3.3 Predikterade livslängder

De historiska trenderna och de predikterade skattningarna av dödlighetsintensiteterna indikerar en förbättring av dödligheten, vilket hör samman med längre framtida förväntade livslängder. Om vi beräknar förväntad återstående livslängd enligt ekvation 2.3.1, baserat på predikterade dödlighetsintensiteter, för en x -årig individ idag ($t = 0$) får vi nedanstående tabeller.

Ålder	Män	Kvinnor
20	67.88	69.58
30	57.06	58.78
40	46.04	47.98
50	35.17	37.35
60	24.86	27.24
70	15.67	17.94
80	8.23	9.85
90	3.59	4.35
100	1.65	2.10

Tabell 3.3.1: Förväntade återstående livslängder.

Beräknar vi på samma sätt de förväntade återstående livslängderna, för $0 \leq t \leq 100$ får vi.

Ålder	t=0	t=50	t=100
20	67.88	71.88	73.92
30	57.06	61.53	63.76
40	46.04	50.96	53.45
50	35.17	40.40	43.13
60	24.86	30.02	32.86
70	15.67	20.08	22.72
80	8.23	10.92	12.87
90	3.59	4.21	4.78
100	1.65	1.24	0.96

Tabell 3.3.2: Förväntade återstående livslängder för män kommande 100 år.

Ålder	t=0	t=50	t=100
20	69.58	73.11	75.36
30	58.78	62.59	65.02
40	47.98	52.02	54.64
50	37.35	41.48	44.25
60	27.24	31.26	34.04
70	17.94	21.60	24.17
80	9.85	12.51	14.52
90	4.35	5.30	6.13
100	2.10	2.25	2.06

Tabell 3.3.3: Förväntade återstående livslängder för kvinnor kommande 100 år.

Detta ger nedanstående genomsnittlig ökning av livslängderna.

Ålder	Män	Kvinnor
20	0.09%	0.08%
30	0.11%	0.10%
40	0.15%	0.13%
50	0.21%	0.17%
60	0.28%	0.23%
70	0.38%	0.30%
80	0.45%	0.39%
90	0.29%	0.35%
100	-0.54%	-0.02%

Tabell 3.3.4: Genomsnittlig årlig ökning av förväntade återstående livslängder.

En förändring i höga åldrar har större påverkan än i yngre åldrar i och med att den förväntade återstående livslängden är kortare. En mer jämförbar metod kan vara att istället undersöka den procentuella förändringen av den totala livslängden.

Ålder	Män	Kvinnor
20	87.88	89.58
30	87.06	88.78
40	86.04	87.98
50	85.17	87.35
60	84.86	87.24
70	85.67	87.94
80	88.23	89.85
90	93.59	94.35
100	101.65	102.10

Tabell 3.3.5: Förväntade livslängder.

Nedan har vi de förväntade totala livslängderna för $0 \leq t \leq 100$.

Ålder	t=0	t=50	t=100
20	87.88	91.88	93.92
30	87.06	91.53	93.76
40	86.04	90.96	93.45
50	85.17	90.40	93.13
60	84.86	90.02	92.86
70	85.67	90.08	92.72
80	88.23	90.92	92.87
90	93.59	94.21	94.78
100	101.65	101.24	100.96

Tabell 3.3.6: Förväntade livslängder för män kommande 100 år.

Ålder	t=0	t=50	t=100
20	89.58	93.11	95.36
30	88.78	92.59	95.02
40	87.98	92.02	94.64
50	87.35	91.48	94.25
60	87.24	91.26	94.04
70	87.94	91.60	94.17
80	89.85	92.51	94.52
90	94.35	95.30	96.13
100	102.10	102.25	102.06

Tabell 3.3.7: Förväntade livslängder för kvinnor kommande 100 år.

Detta ger nedanstående genomsnittlig ökning av de totala livslängderna.

Ålder	Män	Kvinnor
20	0.07%	0.06%
30	0.07%	0.07%
40	0.08%	0.07%
50	0.09%	0.08%
60	0.09%	0.08%
70	0.08%	0.07%
80	0.05%	0.05%
90	0.01%	0.02%
100	-0.01%	0.00%

Tabell 3.3.8: Genomsnittlig årlig ökning av förväntade totala livslängder.

Här ser de genomsnittliga förändringarna mer jämna ut mellan åldrarna. Vi ser även att denna förändring avtar efter ca 80 års ålder.

3.4 Reserver

Kontroll av antaganden till standardformeln

I avsnitt 2.1, där vi beskriver solvenskapitalkravet, nämnde vi ett antal antaganden som ligger till grund för kalibreringen av dödlighetsrisk och långlevnadsrisk.

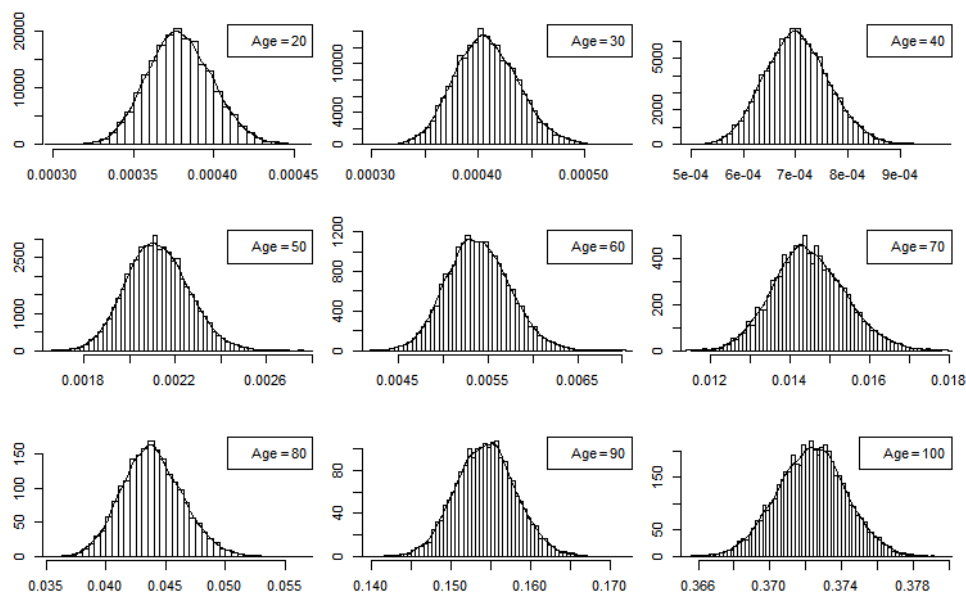
I och med att analysen och modelleringen av dödlighetsintensiteterna har gjorts för Sveriges befolkningsdata kan vi anse att beståndet är väl-diversifierat.

Vi beräknar den årliga förändringen av dödlighetsintensiteterna för predikterade värden

Ålder	Män	Kvinnor
20	-1.50%	-1.77%
30	-2.00%	-2.87%
40	-2.87%	-2.70%
50	-1.97%	-2.12%
60	-2.48%	-1.41%
70	-2.39%	-1.42%
80	-1.93%	-1.81%
90	-0.76%	-0.83%
100	0.24%	-0.29%

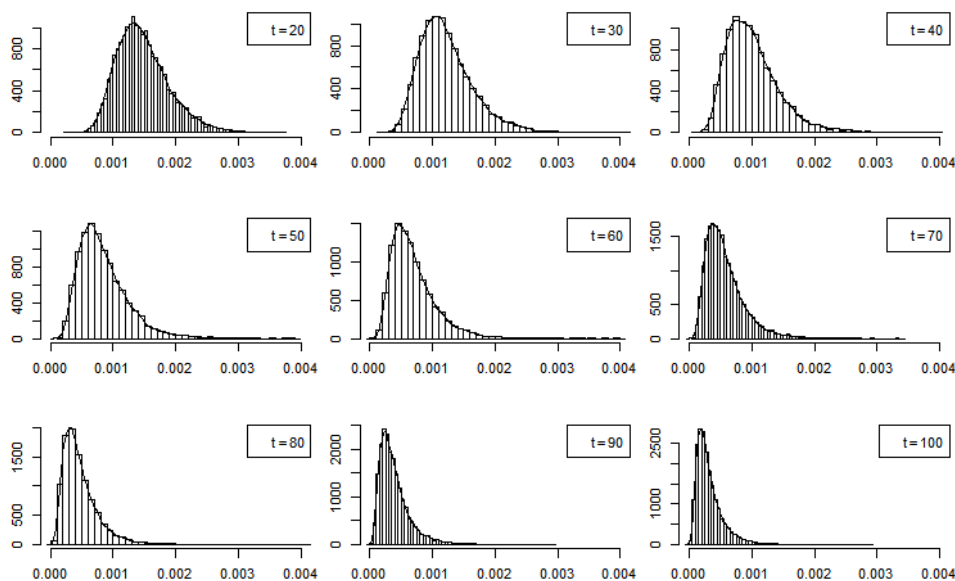
Tabell 3.4.1: Genomsnittlig årlig förändring av dödlighetsintensiteterna, baserat på prediktioner 100 år framåt

De genomsnittliga årliga förbättringarna av dödlighetsintensiteterna förväntas vara mindre än 10% för alla x .



Figur 3.4.1: Fördelning för dödlighetsintensiteter vid $t=0$ för individer mellan 20-100 år.

Fördelningen för dödlighetsintensiteterna skattade vid tid $t = 0$ ser ut att vara normalfördelade för alla x .



Figur 3.4.2: Fördelning för dödlighetsintensiteter för 50 åriga individer vid $t=20-100$.

Skattningarna av dödlighetsintensiteterna blir mer och mer vänsterskeva när t växer, och med avtagande väntevärde. Vilket indikerar en trend mot en förbättring av dödlighetsintensiteterna. Även förbättringen i dödlighetsintensiteterna (både procentuellt $(m_{x,t} - m_{x,t-1})/m_{x,t-1}$, och absolut $m_{x,t} - m_{x,t-1}$) beter sig på detta sätt, normalfördelad vid $t = 0$ med en skevhet som ökar med t .

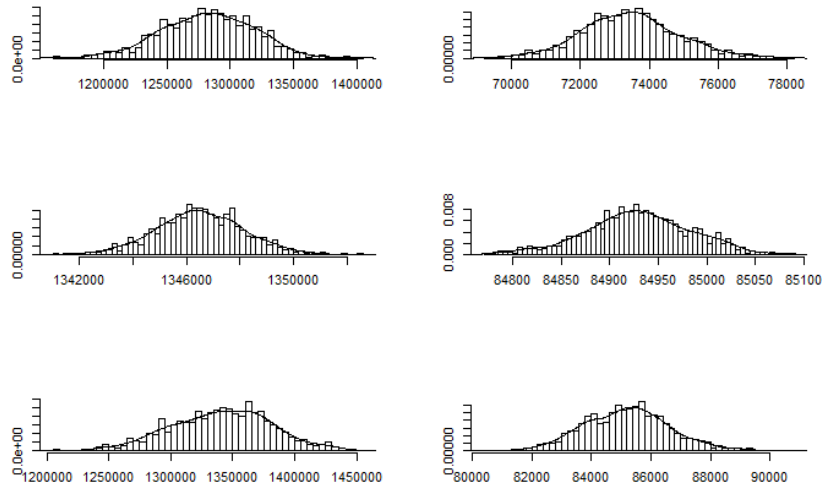
Alla antaganden är alltså uppfyllda.

Variation i reserver

Vi undersöker vilken faktor som påverkar variationen i reserverna mest genom att variera mellan att låta dödlighetsintensiteten och populationsstorleken vara fix eller stokastisk enligt avsnitt 2.5.

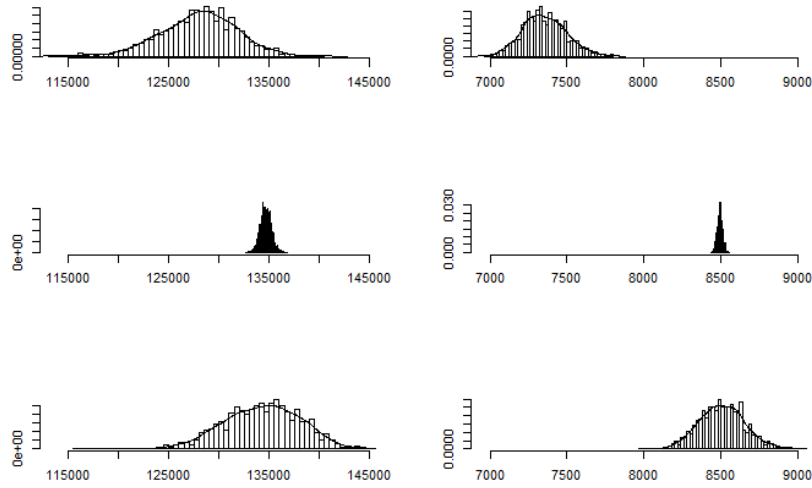
Vi har alltså

- μ stokastisk, fix populationsstorlek
- μ fix, stokastisk populationsstorlek
- Både μ och populationsstorlek stokastiska

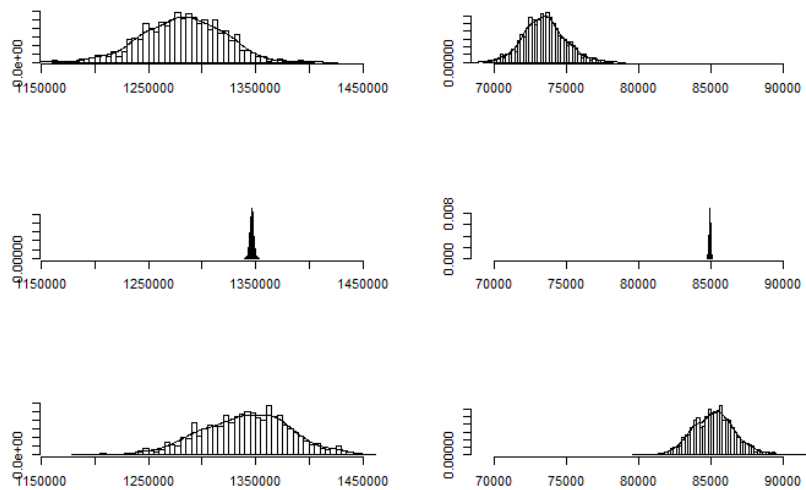


Figur 3.4.3: Fördelning för reserver ULL (vänster) KFD (höger). $N=1000$. Rad 1- μ stokastisk. Rad 2- population stokastisk. Rad 3- både μ och population stokastisk.

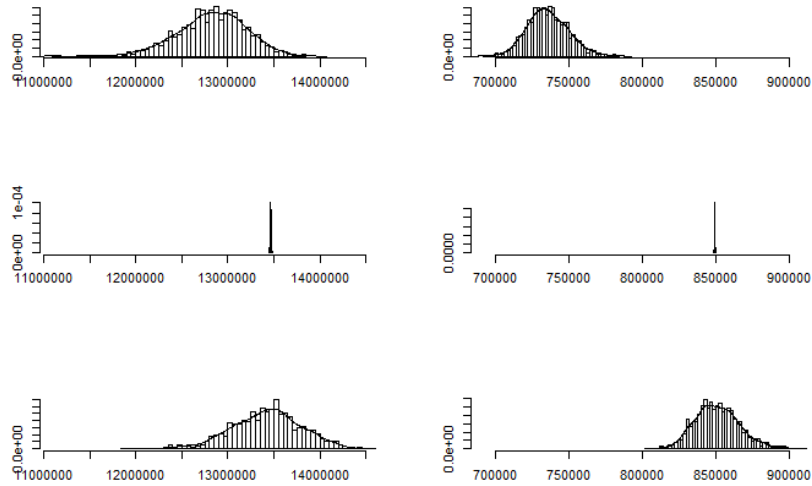
Om vi plottar histogrammen med samma skala på x -axeln så ser vi att ju större populationen är, desto större blir skillnaden mellan populationsvariationen och variationen i μ .



Figur 3.4.4: Fördelning för reserver ULL (vänster) KFD (höger). $N=100$. Rad 1- μ stokastisk. Rad 2- population stokastisk. Rad 3- både μ och population stokastisk.



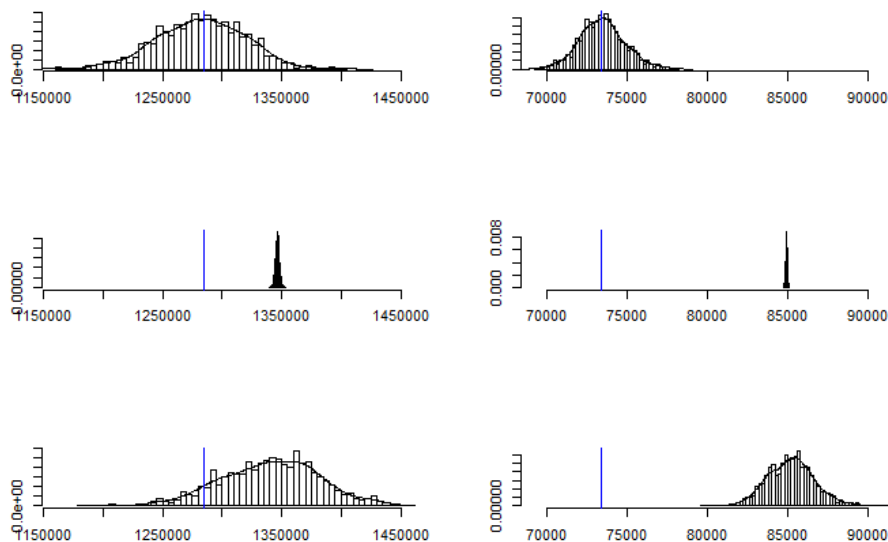
Figur 3.4.5: Fördelning för reserver ULL (vänster) KFD (höger). $N=1000$. Rad 1- μ stokastisk. Rad 2- population stokastisk. Rad 3- både μ och population stokastisk.



Figur 3.4.6: Fördelning för reserver ULL (vänster) KFD (höger). $N=10000$. Rad 1- μ stokastisk. Rad 2- population stokastisk. Rad 3- både μ och population stokastisk.

Populationsosäkerheten är alltså i princip försumbar för stora N , och bidrar endast i väntevärde. Det är därmed osäkerheten i parameterskattningen av $\mu_{x,t} \approx m_{x,t}$ som förklarar den större delen av variationen i reserverna. Vi kommer därför endast att ta hänsyn till variationen i parameterskattningarna vid simulering av reserverna.

Infogar vi en vertikal linje som illustrerar de skattade reserverna då både μ och population är fix ser vi att väntevärdet är högre för punkt 2 än de andra fallen för både uppskjuten livsvarig livränta samt kapitalförsäkring för dödsfall, vilket följer av resonemanget kring Jensens olikhet i avsnitt 2.5.



Figur 3.4.7: Fördelning för reserver ULL (vänster) KFD (höger). $N=1000$. Vertikal linje illustrerar väntevärdet av reserverna. Rad 1- μ stokastisk. Rad 2- population stokastisk. Rad 3- både μ och population stokastisk.

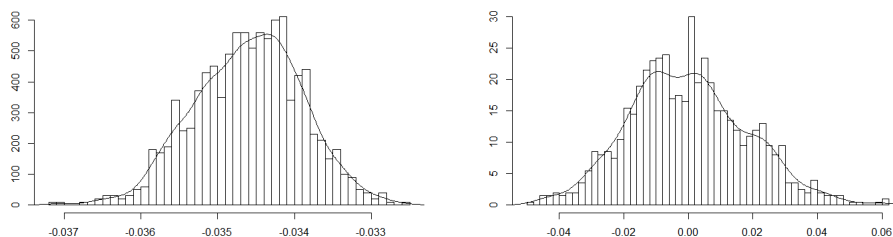
Ettårsresultat

Om vi betecknar den skattade totala reserven vid början av tid t som \widehat{Res}_t och faktisk utbetalning under tid t som Utb_t , så får vi att årets resultat (avvecklingsresultat) kan skrivas som

$$Avv_t = \widehat{Res}_{t+1} + Utb_t - \widehat{Res}_t.$$

Vi vill att reserverna skattade vid t ska vara så nära summan av faktisk utbetalning under året och reserverna skattade vid tid $t + 1$ som möjligt.

Om $Avv_t < 0$ så har vi överskattat reserverna vid tid t och vi gör en avvecklingsvinst, om $Avv_t > 0$ så innebär det att årets utbetalningar har överstigit vår förväntan. Vår förhoppning är att fördelningen för årets resultat ligger centrerade kring 0.



Figur 3.4.8: Fördelning för ettårsresultat i förhållande till total reserv för ULL (vänster) och KFD (höger)

Vi ser att resultatet för uppskjuten livsvarig livränta ligger centrerat kring ungefär -3.46%, vilket innebär att vi tenderar att överskatta reserverna vid tid $t = 0$, vilket ger en avvecklingsvinst. För kapitalförsäkring för dödsfall ligger skattningarna centrerade kring 0. Dessa är alltså relativt stabila under ett års tid.

3.5 Stress av dödligheter

De metoder vi har valt att undersöka närmre och jämföra är det sätt man har valt att stressa dödlighetskurvorna enligt Solvens II för dödsfallsrisk och livsfallsrisk. Vi tillämpar sedan denna metod för att se om vi kan uttrycka detta i en slags tidsberoende stresskurva, vilket förhoppningsvis stämmer bättre överens med en stressad dödlighetsförbättring/ dödlighetsförsämring, liksom den vi räknade fram i tabell 3.4.1.

3.5.1 Dödlighetsintensiteter och ettåriga dödsfallsrisker

Eftersom vi längre ned kommer att skatta de ettårsscenario som kan förväntas inträffa med en sannolikhet av 0.5% skattar vi ensidiga 99.5%-iga prediktionsintervall för dödlighetsintensiteten $\mu_{x,t} \approx \hat{m}_{x,t}$ och den ettåriga dödsrisken $q_{x,t}$. Låt $\bar{\mu}_{x,t}$ beteckna väntevärdet av dödlighetsintensiteten för en x -årig individ vid tid t . Vi beräknar s så att $(1 + s)\bar{\mu}_{x,t} = \mu_{x,t}^{\text{undre gräns}}$, och $(1 + s)\bar{\mu}_{x,t} = \mu_{x,t}^{\text{övre gräns}}$, på samma sätt för $\hat{q}_{x,t}$. Nedan presenterar vi denna förskjutning i kurvorna vi får för dessa prediktionsintervall.

Ålder	$\hat{\mu}_{x,0}$ övre gräns	$\hat{\mu}_{x,0}$ undre gräns	$\hat{q}_{x,0}$ övre gräns	$\hat{q}_{x,0}$ undre gräns
20	0.1223	-0.1090	0.0777	-0.0721
30	0.1664	-0.1427	0.1554	-0.1345
40	0.2493	-0.1996	0.2528	-0.2018
50	0.1645	-0.1413	0.2060	-0.1709
60	0.2115	-0.1745	0.1939	-0.1625
70	0.2028	-0.1686	0.1987	-0.1660
80	0.1607	-0.1384	0.1563	-0.1357
90	0.0602	-0.0568	0.0543	-0.0518
100	-0.0185	0.0188	-0.0428	0.0441

Tabell 3.5.1: Förskjutning av övre och undre gränser av 95.5%-iga konfidensintervall för $\hat{\mu}_{x,0}$ och $\hat{q}_{x,0}$ för män 20-100 år.

Ålder	$\hat{\mu}_{x,0}$ övre gräns	$\hat{\mu}_{x,0}$ undre gräns	$\hat{q}_{x,0}$ övre gräns	$\hat{q}_{x,0}$ undre gräns
20	0.1393	-0.1223	0.1093	-0.0985
30	0.2377	-0.1920	0.2252	-0.1838
40	0.2219	-0.1816	0.1903	-0.1599
50	0.1694	-0.1448	0.1400	-0.1228
60	0.1091	-0.0984	0.1054	-0.0953
70	0.1105	-0.0995	0.1191	-0.1065
80	0.1426	-0.1248	0.1331	-0.1177
90	0.0632	-0.0594	0.0530	-0.0505
100	0.0214	-0.0209	-0.0114	0.0115

Tabell 3.5.2: Förskjutning av övre och undre gränser av 95.5%-iga konfidensintervall för $\hat{\mu}_{x,0}$ och $\hat{q}_{x,0}$ för kvinnor 20-100 år.

Kön	$\hat{\mu}_{x,0}$ övre gräns	$\hat{\mu}_{x,0}$ undre gräns	$\hat{q}_{x,0}$ övre gräns	$\hat{q}_{x,0}$ undre gräns
Män	0.1706	-0.1358	0.1679	-0.1343
Kvinnor	0.1355	-0.1148	0.1327	-0.1131
Totalt	0.1530	-0.1253	0.1503	-0.1237

Tabell 3.5.3: Medelvärde av övre och undre gränser av 95.5%-iga konfidensintervall för $\hat{\mu}_{x,0}$ och $\hat{q}_{x,0}$, över alla x .

Det är en ganska stor variation, men förskjutningen av kurvorna tenderar att ligga runt $\pm 15\%$, något högre för män än för kvinnor och med en avtagande trend med hänsyn till ålder.

3.5.2 Reservernas påverkan av stressade dödligheter

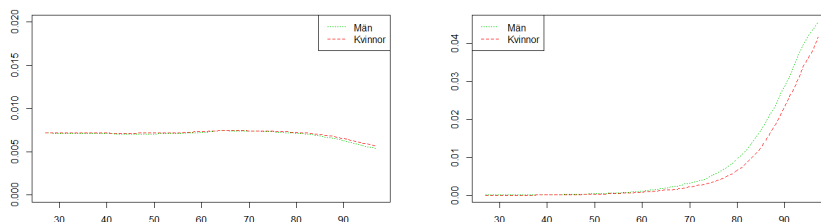
Nedan skattar vi stressparameterna som krävs för att de förväntade skattningarna av reserverna ska nå 99.5% percentilen i fördelningen för de simulerade reserverna.

Likafördelad portfölj

Nedan undersöker vi hur stressparametrarna ser ut för en portfölj som har lika många individer födda mellan 1920-1990. $N_x = 50000$, för alla x .

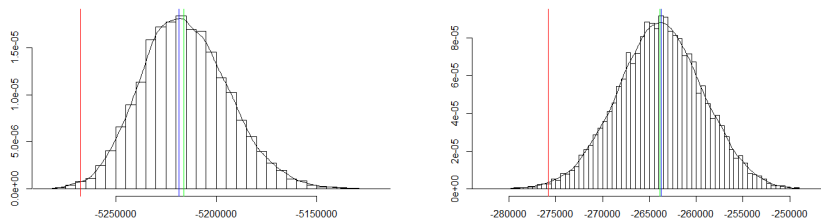
Ettårsscenario

Andelen utbetalningar för kapitalförsäkring för dödsfall är främst representerade av höga åldrar, vilket är rimligt eftersom dödlighetsintensiteterna ökar exponentiellt. För uppskjuten livsvarig livränta skiljer det sig mindre mellan åldrarna på ettårsikt. Vi kan se en nedgång vid äldre åldrar, troligtvis eftersom överlevnadssannolikheten är lägre.



Figur 3.5.1: Andel av reserver på ettårsikt åldrar 27-97 för ULL (vänster) och KFD (höger)

Figuren nedan illustrerar fördelningen av de totala reserverna på ettårsikt, med $Var_{99.5\%}$ utmarkerad



Figur 3.5.2: Fördelning av reserver på ettårssikt åldrar 27-97 för ULL (vänster) och KFD (höger) med $Var_{99.5\%}$

Vi inleder med att simulera en fördelning för hela beståndet och stressar dödligheterna för alla individer i beståndet med samma parameter $(1 + s)$ så väntevärdet av reserverna rör sig mot 99.5%-kvantilen, se figur 3.5.2 ovan. Vi får då

- För uppskjuten livsvarig livränta når vi gränsen för $Var_{99.5}$ då vi stressar alla dödligheter med -12 %.
- För kapitalförsäkring för dödsfall når vi gränsen för $Var_{99.5}$ då vi stressar alla dödligheter med 6%.

Anledningen till att vi får så låga skattningar för den totala reserven är på grund av de äldre personerna i portföljen. Nedan ser vi hur det skiljer sig då vi ändrar övre gräns.

Ålder	s_{ULL}	s_{KFD}
97	-0.1187	0.0560
90	-0.1159	0.1139
85	-0.1486	0.1695

Tabell 3.5.4: Stressparametrar för hela beståndet med olika övre gränser.

Simulerar vi istället så vi får en fördelning för varje ålder, och stressar dödlighetsparametrarna på samma sätt som ovan, men med en åldersspecifik stress $(1 + s_x)$ får vi istället nedanstående tabeller.

Ålder	Män		Kvinnor	
	s_{ULL}	s_{KFD}	s_{ULL}	s_{KFD}
30	-0.5581	0.1641	-0.4020	0.2399
40	-0.4765	0.2457	-0.3316	0.2240
50	-0.3780	0.1622	-0.2320	0.1709
60	-0.2383	0.2085	-0.1373	0.1101
70	-0.1687	0.1999	-0.0980	0.1114
80	-0.1385	0.1585	-0.1230	0.1439
90	-0.0568	0.0594	-0.0585	0.0637

Tabell 3.5.5: Stress av dödligheter för uppskjuten livsvarig livränta (ULL) och kapitalförsäkring för dödsfall (KFD) för män och kvinnor, kommande ettårsperiod.

Vi ser att stressen för uppskjuten livsvarig livränta har en avtagande trend (som för $\hat{\mu}_{x,t}$ och $\hat{q}_{x,t}$), medan stressen för kapitalförsäkring för dödsfall inte visar på ett lika tydligt mönster, utan ser mer ut som en slumpvandring med drift, se figur A.2 i appendix A.

Kön	s_{ULL}	s_{KFD}
Män	-0.2721	0.1757
Kvinnor	-0.1848	0.1363
Totalt	-0.2284	0.1560

Tabell 3.5.6: Medelvärde av stressparametrar för män och kvinnor födda mellan år 1920 till 1990.

De individuella riskerna samt deras medelvärden motsvarar ungefär dödsfallsrisken (15 %) och livsfallsrisken (-20%) enligt Kommissionens delegerade förordning [14] gällande Solvens II. Vi får något lägre värden för kvinnor, och något högre för män, men överlag motsvarar det totala medelvärdet ungefär stressparametrarna enligt Solvens II.

Går vi nu vidare för att beräkna den beloppsmässiga påverkan denna stress har på de totala reserverna får vi att detta kan uttryckas som

$$\widehat{Res}((1+s)\mu) - \widehat{Res}(\mu),$$

där $\widehat{Res}(\mu)$ betecknar skattningen av den totala reserven som en funktion av dödlighetsintensiteten.

Tidsberoende dödlighetsförbättring/försämring

Om vi istället söker efter en stress som årligen ökar eller minskar med en parameter för att imitera en slags dödlighetsförbättring/ försämring som alternativ till den omedelbara konstanta stressen på den totala reserven får vi alltså en stresskurva som påverkar dödligheten med $(1 + s')^t$ vid tid t .

I tabell 3.4.1 redovisar vi den genomsnittliga årliga förändringen av dödlighetsintensiteterna baserat på prediktioner 100 år framåt. Den årliga förändringen av dödlighetsintensiteterna definierar vi som

$$f_{x,t} = \frac{\mu_{x,t+1}}{\mu_{x,t}}.$$

Låter vi sedan \bar{f}_x beteckna medelvärdet av dessa förändringar för x -åriga individer så får vi att

$$\mu_{x,t} \approx \mu_{x,0} \left(\bar{f}_x\right)^t$$

Det är denna årliga utveckling vi skulle vilja stressa så att det motsvarar den förändring i kapital vi får då vi stressar dödlighetsparametrarna med en omedelbar och permanent faktor.

Vi approximerar denna stressade utveckling genom att hitta en stresskurva som utvecklas med en årlig faktor $(1 + s')^t$, så vår stressade dödlighet istället blir $(1 + s')^t \mu_{x+t,t}$. Detta innebär att vi till skillnad från med en omedelbar och permanent stress av kurvorna för dödlighetsintensiteter skjuter på effekten av stressen.

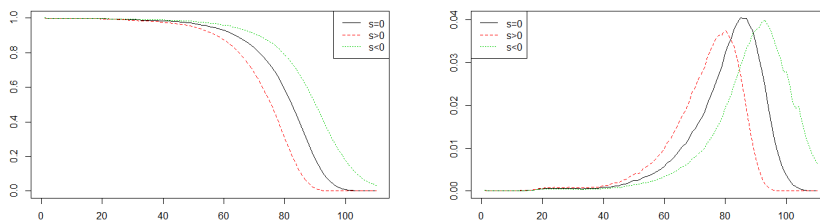
När vi inför en parameter som påverkar dödligheten exponentiellt får vi att sannolikhetsfunktionen för kapitalförsäkring för dödsfall blir

$$(1 + s')^t \mu_{x+t,t} (l_x(t))^{(1+s')^t} = (1 + s')^t \mu_{x+t,t} e^{-\sum_0^t (1+s')^t \mu_{x+t,t}}$$

För uppskjuten livsvarig livränta är sannolikhetsfunktionen

$$(l_x(t))^{(1+s')^t} = e^{-\sum_0^t (1+s')^t \mu_{x+t,t}}.$$

Denna funktion växer för $s' < 0$ och avtar för $s' > 0$.



Figur 3.5.3: Sannolikhetsfunktioner för ULL (vänster) och KFD (höger) då t växer.

För kapitalförsäkring för dödsfall ser vi ovan att sannolikhetsfunktionen för $s' < 0$ och $s' > 0$ är växelvis större än och mindre än funktionen då $s' = 0$, vilket gör att vi inte kan hitta ett tidsberoende s' som motsvarar den omedelbara förskjutningen av dödlighetsintensiteten för dödsfallsrisk om vi skulle låta produkten vara livsvarig. Av denna anledning låter vi gränsen för försäkringen vara $z = 70$, vilket innebär att försäkringsbeloppet betalas ut om försäkringstagaren avlider innan 70 års ålder.

Låt nu \widehat{Res} beteckna total reserv. Vi beräknar alltså s' så att

$$\widehat{Res}((1+s)\mu) - \widehat{Res}(\mu) = \widehat{Res}((1+s')^t\mu) - \widehat{Res}(\mu),$$

eftersom vi vill att de olika stresserna ska påverka SCR lika mycket, där vi låter $s_{ULL} = 0.20$ och $s_{KFD} = -0.15$ enligt ovan.

Stressar vi dödligheterna för bägge kön och alla åldrar med samma parameter s' får vi

- För uppskjuten livsvarig livränta får vi att $s' = -1\%$.
- För kapitalförsäkring för dödsfall får vi att $s' = 1\%$.

Ålder	Män		Kvinnor	
	s'_{ULL}	s'_{KFD}	s'_{ULL}	s'_{KFD}
30	-	0.0058	-	0.0053
40	-0.0086	0.0078	-0.0083	0.0074
50	-0.0113	0.0123	-0.0108	0.0120
60	-0.0153	0.0262	-0.0144	0.0258
70	-0.0112	-	-0.0098	-
80	-0.0180	-	-0.0158	-
90	-0.0291	-	-0.0254	-

Tabell 3.5.7: Årlig stress av dödligheter för uppskjuten livsvarig livränta (ULL) och kapitalförsäkring för dödsfall (KFD) för män och kvinnor.

Stressparametrarna för uppskjuten livsvarig livränta ser något slumpmässig ut, medan parametrarna för kapitalförsäkring för dödsfall ökar med ålder. Det verkar rimligt i och med att tiden kvar till z minskar.

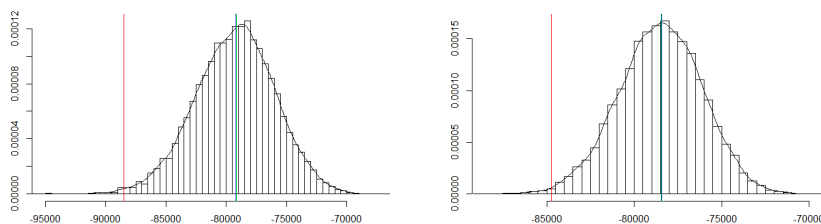
Kön	s'_{ULL}	s'_{KFD}
Män	-0.0154	0.0213
Kvinnor	-0.0139	0.0209
Totalt	-0.0146	0.0211

Tabell 3.5.8: Medelvärde av stressparametrar för män och kvinnor födda mellan år 1920 till 1990.

Befolkningsdata

Vi gör nu samma undersökning där vi ser Sveriges befolkning som vår portfölj. Enligt ett av antagandena till kalibreringen av parametrarna antar vi att medelåldern för portföljen för uppskjuten livsvarig livränta är 60 år eller äldre, vilket vi uppnår om vi bara räknar med individer äldre än 40 år. För kapitalförsäkring för dödsfall antar vi att de försäkrade är mellan 25 och 110 år.

Ettårsscenario



Figur 3.5.4: Fördelning av reserver på ettårsikt åldrar 40-100 för ULL (vänster) och 25-100 KFD (höger)

Om vi simulerar reserverna för kommande ettårsperiod och beräknar stressparametrar utifrån dessa får vi nedanstående resultat.

Då vi stressar dödlighetsintensiteterna för alla individer med samma parameter $(1 + s)$ får vi

- För uppskjuten livsvarig livränta når vi gränsen för $Var_{99.5}$ då vi stressar alla dödligheter med -17%.
- För kapitalförsäkring för dödsfall når vi gränsen för $Var_{99.5}$ då vi stressar alla dödligheter med 9%.

Precis som för den likafördelade portföljen får vi något lägre skattningar än de enligt Solvens II. Störst är skillnaden för dödsfallsrisken. Nedan jämför vi de skattningar vi får om vi ändrar de äldsta åldrarna i portföljen.

Ålder	s_{ULL}	s_{KFD}
110	-0.1681	0.0883
100	-0.1621	0.14086
90	-0.1582	0.1541

Tabell 3.5.9: Stressparametrar för hela beståndet med olika övre gränser.

Detta ger endast en skillnad på ca 1% för livsfallsrisken, medan vi får en skillnad på nästan 7 % för dödsfallsrisken.

Om vi nu på samma sätt som för den likafördelade portföljen gör individuella simuleringar av reserven och därefter beräknar stressparametrar för varje ålder får vi skattningarna nedan.

Ålder	Män		Kvinnor	
	s_{ULL}	s_{KFD}	s_{ULL}	s_{KFD}
30	-	0.1670	-	0.2542
40	-0.4823	0.2502	-0.3335	0.2373
50	-0.3732	0.1651	-0.2356	0.1808
60	-0.2350	0.2122	-0.1379	0.1163
70	-0.1683	0.2035	-0.1019	0.1177
80	-0.1382	0.1612	-0.1278	0.1522
90	-0.0567	0.0604	-0.0609	0.0672

Tabell 3.5.10: Stress av dödligheter för uppskjuten livsvarig livränta (ULL) och kapitalförsäkring för dödsfall (KFD) för män och kvinnor, kommande ettårsperiod.

Stressen för uppskjuten livsvarig livränta har en avtagande trend, precis som för den likafördelade portföljen, medan stressen för kapitalförsäkring för dödsfall inte visar på ett lika tydligt mönster.

Kön	s_{ULL}	s_{KFD}
Män	-0.2130	0.1489
Kvinnor	-0.1559	0.1322
Totalt	-0.1844	0.1456

Tabell 3.5.11: Medelvärde av stressparametrar för män och kvinnor äldre än 40 år för ULL och äldre än 25 år för KFD.

Även här motsvarar de individuella stresserna ungefär dödsfallsrisken om 15 % och livsfallsrisken om -20%.

Tidsberoende dödlighetsförbättring/försämring

Om vi istället söker efter en stress som årligen ökar med en parameter som alternativ till den omedelbara konstanta stressen får vi även här en stresskurva som påverkar dödligheten med $(1 + s')^t$ vid tid t .

Stressar vi dödligheterna för bägge kön och alla åldrar med samma parameter s'_t får vi

- För uppskjuten livsvarig livränta får vi att $s' = -0.9\%$.
- För kapitalförsäkring för dödsfall får vi att $s' = 1.5\%$.

Ålder	Män		Kvinnor	
	s'_{ULL}	s'_{KFD}	s'_{ULL}	s'_{KFD}
30	-	0.0078	-	0.0077
40	-0.0049	0.0113	-0.0048	0.0112
50	-0.0064	0.0181	-0.0061	0.0181
60	-0.0089	0.0404	-0.0082	0.0399
70	-0.0124	-	-0.0112	-
80	-0.0186	-	-0.0166	-
90	-0.0294	-	-0.0262	-

Tabell 3.5.12: Årlig stress av dödligheter för uppskjuten livsvarig livränta (ULL) och kapitalförsäkring för dödsfall (KFD) för män och kvinnor.

Kön	s'_{ULL}	s'_{KFD}
Män	-0.0215	0.0321
Kvinnor	-0.0196	0.0314
Totalt	-0.0205	0.0318

Tabell 3.5.13: Medelvärde av stressparametrar för män och kvinnor födda mellan år 1920 till 1990.

Dessa siffror skiljer sig ganska mycket från de vi fick då vi använde oss av en portfölj med lika många individer i varje ålder.

4 Slutsatser

Ser vi till de individuella stressparametrarna får vi värden för dödsfallsrisk och livsfallsrisk som ungefär motsvarar de stressparametrar som är kalibrerade enligt Solvens II. Vi får mycket varierade värden för de individuella riskparametrarna, men vi kan ändå säga att -20% för uppskjuten livsvarig livränta verkar vara rimligt överlag (beroende på var tyngdpunkten i reserverna ligger). För kapitalförsäkring för dödsfall är variansen mindre, men det är ändå en stor spridning. På samma sätt som för livsfallsrisken verkar en stress om ungefär 15% rimlig för dödsfallsrisk. Frågan är då om det kan finnas en alternativ metod till att stressa dödligheten. Som att införa någon typ av dödlighetsförbättring/ försämring som vi har gått in på snabbt i avsnitt 3.5. Exempelvis om det går att introducera en stressparameter i Lee Carter modelleringen som representerar stressen över tid. Till exempel en parameter i \hat{b}_x eller $\hat{\kappa}_t$ ($z' = z + s$ eller $z'' = zs$), som då vi har beräknat återstående livslängd med övre och undre konfidensintervall för $\hat{\kappa}_t$. Detta skulle även kunna göras för \hat{b}_x om man vill ha en åldersspecifik förändring istället för en förändring över tid.

För de skattade dödlighetsförbättringarna/ försämringarna vid kalibrering av livsfallsrisk och dödsfallsrisk ovan följer vi kurvorna för en specifik individ när vi beräknar reserverna. Detta innebär att vi beräknar skillnaden i dödlighet som $\mu_{x+1,t+1}/\mu_{x,t}$. Vill vi kunna jämföra dessa kurvor mot förändringen i dödlighet per ålder, som vi presenterar i tabell 3.4.1, hade vi istället behövt beräkna den relativa förändringen i dödlighetsintensiteterna enligt $\mu_{x,t+1}/\mu_{x,t}$. Med anledning av detta har vi valt att approximera utvecklingen med en stresskurva som ökar med en faktor $(1 + s')$ per år. Det är svårt att säga huruvida denna approximation och de värden vi kom fram till är rimliga i förhållande till stressen enligt Solvens II.

Förbättringar

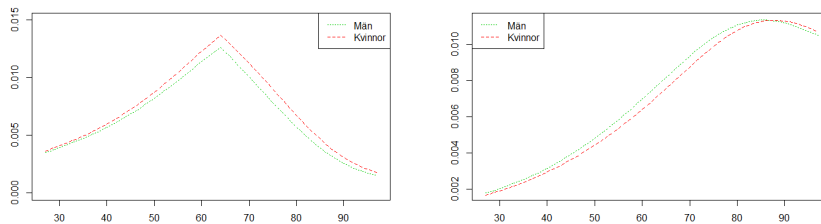
I praktiken skiljer man på befolkningsdödlighet och försäkringsdödlighet. Det hade därför varit att föredra om vi hade kunnat använda oss av försäkringsdata till denna undersökning för att undersöka reservernas påverkan. Alternativt om vi hade kunnat simulera ett försäkringsbestånd baserat på försäkringsdödligheten och Makehamparametrarna beskriven i DUS 06 [4] och DUS 14 [5]. Eftersom dessa parametrar gav oss negativa μ -värden för yngre åldrar i äldre kohorter kunde vi dessvärre inte genomföra analysen för försäkringsdödlighet. Detta eftersom parameterskatningarna är anpassade för att ge en prediktion och inte en anpassning till historiska värden.

Det vore även intressant att genomföra en mer ingående analys av hur resultaten påverkas då fördelningen mellan åldrar och kön i portföljen ändras och tyngdpunkten i reserverna därmed ändras. På samma sätt som det vore intressant att se vilka resultat vi hade fått för en riktig försäkringsportfölj, istället för att anta att allt är likafördelat, eller använda oss av fördelningen i Svensk befolkning. Av samma anledning hade det varit av intresse att tillämpa detta på försäkringsprodukter där vi även inkluderar premieinbetalning, administrationskostnader, o.s.v., för att kunna beräkna bästa skattningen av det egna kapitalet i helhet.

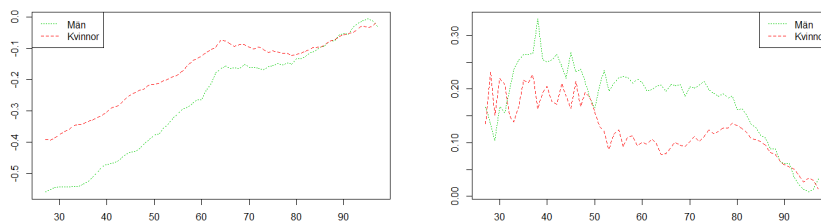
Vi har sett återkommande i rapporten att vi får osäkra skattningar, och en märklig utveckling av dödligheterna för äldre individer. Detta skulle vi eventuellt kunna hantera genom att skatta dödligheterna för individer över en viss ålder som en linjär funktion, vilket är vanligt att man gör i Makehamskattningar av dödlighetsintensiteterna, se exempelvis dödlighetsundersökningar 2006 [4] och 2014 [5]. Vi hade kunnat undersöka fler försäkringsprodukter, samt genomfört samma analys med olika gränser för när försäkringsbeloppet betalas ut. För att beräkna det totala kassaflödet för en försäkringsprodukt hade vi behövt beräkna en premie för varje försäkringskontrakt, i och med att den slutliga risken ligger i värdefunktionen. I fallet då premien betalas som en engångspremie är risken redan täckt för kapitalförsäkring för dödsfall. I fallet med årspremie finns det dock en risk att individen avlider och utbetalning sker innan premien är betald till fullo. Detta justeras generellt sett med en typ av risksumma, men påverkar ändå det skattade totala kassaflödet. Eftersom uppskjuten livsvarig livränta typiskt betalas till fullo innan pensionsåldern uppnås är risken, oavsett betalningsmetod, att försäkringstagaren avlider senare än väntat och att utbetalning förlängs. Hade vi inkluderat premier i undersökningen så hade vi kunnat få en mer korrekt bild av risken.

Appendix

A Figurer



Figur A.1: Andel av reserver åldrar 27-97 för ULL (vänster) och KFD (höger), för en portfölj med lika antal individer i varje ålder



Figur A.2: Individuella stressparametrar för åldrar 27-97 för ULL (vänster) och KFD (höger), för en portfölj med lika antal individer i varje ålder

B Teori

Singulärvärdesuppdelning

Enligt Matrix Theory (Holst, Ufnarovski) [12] kan alla $m \times n$ matriser delas upp enligt

$$A = USV^T,$$

där U och V är ortogonala matriser av storlek m och n , och S är en $m \times n$ matris på formen

$$S = \left(\begin{array}{cccc|c} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & O \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_r & \\ \hline & & & O & O \end{array} \right)$$

diagonalvärdena $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r$ är singularvärden.
I vårt fall får vi

$$\ln(m_{x,t}) - a_x = b_x \kappa_t = USV^T = \lambda_1 U_{x,1} V_{1,t} + \dots + \lambda_r U_{x,r} V_{1,r} \approx \lambda_1 U_{x,1} V_{1,t},$$

där a_x skattas enligt avsnitt 2.2.1, b_x skattas som

$$\hat{b}_x = U_{x,1},$$

och κ_t skattas som

$$\hat{\kappa}_t = \lambda_1 V_{1,t}.$$

Referenser

- [1] R Core Team (2015). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. <https://www.R-project.org/>.
- [2] R.J. Hyndman with contributions from H. Booth, L. Tickle, J. Maindonald, S. Wood, and the R Core Team, (2014), Package 'demography': Forecasting mortality, fertility, migration and population data, <https://CRAN.R-project.org/package=demography>,
- [3] Human Mortality Database. University of California, Berkeley (USA), and Max Planck Institute for Demographic Research (Germany). Available at www.mortality.org or www.humanmortality.de (data downloaded on [2017-01-09]).
- [4] Försäkrade i Sverige - dödligheter och livslängder, prognoser 2007 - 2050,(2007), En studie av Försäkringstekniska Forskningsnämnden, Svensk Försäkring.
- [5] Försäkrade i Sverige Livslängder och dödlighet, prognoser 2014–2070,(2014), En studie av Försäkringstekniska Forskningsnämnden, Svensk Försäkring.
- [6] Girosi, F., King, G., (2007), Understanding the Lee-Carter Mortality Forecasting Method,
- [7] Lee, R.D., Carter, L.R., (1992) Modeling and Forecasting U.S. Mortality *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 87, No. 419 (Sep., 1992), pp. 659-671, USA.
- [8] Lee, R.D., (2000), The Lee-Carter method of forecasting mortality, with various extensions and applications, *North American Actuarial Journal*, 4, 80-93, USA.
- [9] Lundström, H. and Qvist, J., (2004), Mortality Forecasting and Trend Shifts: an Application of the Lee-Carter model to Swedish Mortality Data, *International Statistical Review*, 72, 37-50, The Netherlands.
- [10] Makeham, W.M., (1867), On the law of mortality, *The Assurance Magazine and Journal of the Institute of Actuaries*, XIII, 325-358, London, United Kingdom.
- [11] Andersson, G., (2005), Livförsäkringsmatematik, Svenska Försäkringsföreningen, Stockholm, Sverige.

- [12] Holst, A., Ufnarowski, V. (2012), Matrix Theory, LTH, Lund, Sverige.
- [13] Solvens II-utredningen, (2011), Rörelse reglering för försäkring och tjänstepension (SOU 2011:68). Stockholm: Finansdepartementet.
- [14] Kommissionens delegerade förordning (EU) 2015/35 av den 10 oktober 2014 om komplettering av Europaparlamentets och rådets direktiv 2009/138/EG om upptagande och utövande av försäkringsverksamhet (Solvens II), (2015), Europeiska Unionens officiella tidning (58e årgången). Luxemburg.
- [15] The underlying assumptions in the standard formula for the Solvency Capital Requirement calculation (EIOPA-14-322),(2014), EIOPA, Frankfurt, Germany.
- [16] Newkirk, J., (utan år), Risk Management Techniques: Stressed Mortality Rates Using R and the Lee Carter model, *https://rstudio-pubs-static.s3.amazonaws.com/100285_163db32378a34b92b85383e8c1733a8b.html*
- [17] Finansinspektionen *www.fi.se http://www.fi.se/Rapportering/Periodiskt/ Forsakring/Diskonteringsrantekurvor/*