Technische Hochschule **Rosenheim**

Wirtschaftsmathematik - Aktuarwissenschaften

Kalenderjahresrisiko im Chain-Ladder-Modell: Herleitung der Merz-Wüthrich-Formel über das Law of Propagation of Uncertainty

---

BACHELORARBEIT

Autorin:	Anna Ströse
Matrikelnummer:	952000
Erstprüfer:	Prof. Dr. Viktor Sandor
Zweitprüfer:	Stefan Schubert
Abgabetermin:	25. März 2024

Eigenständigkeitserklärung

Hiermit bestätige ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe. Die Stellen der Arbeit, die dem Wortlaut oder dem Sinn nach anderen Werken (dazu zählen auch Internetquellen) entnommen sind, wurden unter Angabe der Quelle kenntlich gemacht.

Rosenheim, den 25. März 2024

Anna Ströse

Abstract

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, die Merz-Wüthrich-Formel über das Law of Propagation of Uncertainty für ein Anfalljahr herzuleiten.

Das Law of Propagation of Uncertainty ist ein zentrales Theorem aus der Messtheorie, welches die Schwankung einer Zielgröße in Abhängigkeit der Schwankungen der Eingangsgrößen berechnet. Dieses wird in der Arbeit formuliert und bewiesen.

Die Merz-Wüthrich-Formel stellt eine Formel der Standardabweichung des einjährigen Abwicklungsergebnisses im Chain-Ladder-Modell zur Verfügung und beantwortet damit die Frage, wie stark die Reserveschätzung im Folgejahr von der Reserveschätzung im aktuellen Jahr abweichen kann. In der Arbeit werden zunächst die Grundlagen des Chain-Ladder-Modells dargestellt und anschließend die Merz-Wüthrich-Formel formuliert.

Im letzten Schritt wird das Reservierungsproblem im Chain-Ladder-Modell als Messproblem dargestellt und es wird gezeigt, dass die Anwendung des Law of Propagation of Uncertainty auf dieses Messproblem zum gleichem Ergebnis führt, wie die Merz-Wüthrich-Formel.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **5**

2 Theorieteil **6**

2.1 Ein-Ausgabe-Modell 6

2.2 Standardunsicherheit 6

2.3 Metrologisches Modell 7

2.4 Taylorsche Formel 7

2.5 Law of Propagation of Uncertainty 9

2.6 Beispiel zum Law of Propagation of Uncertainty 12

2.7 Eigenschaften bedingter Erwartungen 14

3 Chain-Ladder-Modell **16**

3.1 Bezeichnungen 16

3.2 Modellannahmen 17

3.3 Schätzer 18

4 Formel von Merz-Wüthrich **24**

4.1 Abwicklungsergebnis: Definition und Bedeutung 24

4.2 Mittlerer quadratischer Fehler des Abwicklungsergebnisses 25

5 Anwendung des Law of Propagation of Uncertainty auf das Reservierungsproblem im Chain-Ladder-Modell **28**

5.1 Darstellung des Reservierungsproblems als Messproblem 28

5.2 Anwendung des Law of Propagation of Uncertainty auf das Messproblem 29

5.3 Ergebnis 38

6 Interpretation und Ausblick **39**

Literaturverzeichnis **40**

Abkürzungsverzeichnis **41**

Abbildungsverzeichnis **42**

1 Einleitung

Das Ziel der aktuariellen Reserveschätzung besteht darin, den abgewickelten Endschadenstand, auch bekannt als Ultimate, sowie die Reserve zu schätzen, die als Differenz zwischen der Ultimateschätzung und den bereits gezahlten Schäden definiert ist. In der klassischen Literatur zur aktuariellen Schadenreservierung betrachtet man in der Regel neben der Höhe der Reserve, auch die Gesamtunsicherheit bei der Entwicklung von Schäden, bis der Schadenanspruch endgültig abgewickelt ist. Man spricht hier von einer langfristigen Betrachtung. In der vorliegenden Arbeit fokussieren wir uns jedoch auf eine zweite wichtige Betrachtung, dem einjährigen Kalenderjahresrisiko als kurzfristige Sichtweise. Im Gegensatz zur langfristigen Sichtweise, bei der die Abweichung der Ultimate-Schätzung vom wahren Schadenendstand betrachtet wird, untersucht das Kalenderjahresrisiko, wie stark die Ultimate-Schätzung im nächsten Kalenderjahr von der aktuellen Ultimate-Schätzung abweichen kann. Diese kurzfristige Perspektive ist ebenfalls von großer Bedeutung, da die Bilanz eines Jahres nur die Differenz zwischen diesen beiden Schätzungen als Ertrag oder Verlust verbucht, was direkte Auswirkungen auf die finanzielle Lage eines Versicherungsunternehmens hat. In Risikomodellen und regulatorischen Überlegungen wird das Abwicklungsririsko bzw. Reserverisiko daher oft über das Kalenderjahresrisiko beurteilt. Im Chain-Ladder-Modell der Schadenreservierung kann das Kalenderjahresrisiko mithilfe der Merz-Wüthrich-Formel geschätzt werden, welche auch im Solvency II-Regelwerk Anwendung findet. Ziel der Arbeit ist die Herleitung der Merz-Wüthrich-Formel über einen Ansatz aus der Messtheorie, dem Law of Propagation of Uncertainty.

Einleitend werden in der Arbeit die theoretischen Grundlagen zum Law of Propagation of Uncertainty dargestellt. Im nachfolgenden Kapitel zum Chain-Ladder-Verfahren werden die Begrifflichkeiten definiert und die Modellannahmen sowie einige Schätzer eingeführt. Anschließend wird die Formel von Merz-Wüthrich vorgestellt. Im darauffolgenden Kapitel wird nun das Law of Propagation of Uncertainty auf das Reservierungsproblem angewendet, um die Merz-Wüthrich-Formel herzuleiten.

2 Theorieteil

Das Law of Propagation of Uncertainty stellt ein zentrales Theorem in der Theorie von Messungen dar. Dieses soll in diesem Abschnitt formuliert und bewiesen werden. Dazu müssen zunächst einige Grundbegriffe aus der Theorie von Messungen mathematisch definiert werden, vgl. Schubert [Sch06]. Der Theorieteil enthält außerdem noch grundlegende Eigenschaften bedingter Erwartungen, welche im späteren Verlauf dieser Arbeit von Bedeutung sind.

2.1 Ein-Ausgabe-Modell

Definition 2.1.1 (Ein-Ausgabe-Modell) *[Sch06, S. 8]*

(i) Eine Funktion $g : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^n$, die eine Ausgangsgröße μ (den Wert der Messgröße) mit den Eingangsgrößen $\iota_1, \ldots, \iota_n$ verknüpft, wobei

$$\mu = g(\iota_1, \ldots, \iota_n),$$

wird als Ein-Ausgabe-Modell der Messung bezeichnet.

(ii) Wenn mindestens eine Eingangsgröße selbst als Ausgangsgröße eines anderen Ein-Ausgabe-Modells abgeleitet wird, wird das gesamte Messmodell als Mehrstufenmodell bezeichnet.

2.2 Standardunsicherheit

Definition 2.2.1 (Standardunsicherheit) *[Sch06, S. 10] Sei τ eine Größe und die Zufallsvariable X ein Schätzer für τ. Weiter sei $E[|X|^2 < \infty]$. Dann bezeichnet*

$$u(X) := \sqrt{E\left[(X - \tau)^2\right]}$$

die Standardunsicherheit des Schätzers X.

2.3 Metrologisches Modell

Definition 2.3.1 (Metrologisches Modell) *[Sch06, S. 16] Seien $\Theta_1, \ldots, \Theta_p \subset \mathbb{R}$ und sei*

$$g : \Theta_1 \times \ldots \times \Theta_p \to \mathbb{R}$$

ein Ein-Ausgabe-Modell. Weiter seien $\vartheta_i \in \Theta_i,\ i = 1, \ldots, p$ die unbekannten wahren Werte der Eingangsgrößen und die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_p$ Schätzer von ϑ_i mit Standardunsicherheiten $u(X_1), \ldots, u(X_p)$. Weiter sei

$$\mu = g(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_p)$$

das zu messende Merkmal des Ein-Ausgabe-Modells g und

$$m = g(X_1, \ldots, X_p)$$

das gemessene Ergebnis. Dann nennen wir $(g, \Theta, \vartheta, X, u(X))$ das metrologische Modell der Messung, wobei

$$\Theta := \Theta_1 \times ... \times \Theta_p,\ \ \vartheta := (\vartheta_1, \ldots, \vartheta_p)$$

und

$$X := (X_1, \ldots, X_p),\ \ u(X) := (u(X_1), \ldots, u(X_p)).$$

2.4 Taylorsche Formel

Satz 2.4.1 (Mehrdimensionale Taylorsche Formel) *[For17, S. 89] Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$ ein Punkt und $\xi \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor derart, dass die Strecke $x + t\xi$, $0 \leq t \leq 1$, ganz in U liegt. Weiter sei $g : U \to \mathbb{R}$ eine $(k+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion. Dann existiert ein $\theta \in [0, 1]$, sodass*

$$g(x + \xi) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha g(x)}{\alpha!} \xi^\alpha + \sum_{|\alpha| = k+1} \frac{D^\alpha g(x + \theta\xi)}{\alpha!} \xi^\alpha.$$

Beweis. [For17, S. 89] □

Corollar 2.4.2 *[For17, S. 89-90] Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $g : U \to \mathbb{R}$ eine k-mal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt für jedes $x \in U$*

$$g(x+\xi) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha g(x)}{\alpha!} \xi^\alpha + o(\|\xi\|^k) \tag{2.1}$$

für $\xi \to 0$.

Beweis. [For17, S. 89-90] □

Satz 2.4.3 *Sei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $a \in \mathbb{R}^n$ der Entwicklungspunkt. Dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$*

$$g(x) - g(y) = \nabla g(a)(x-y) + \mathcal{O}(||x-a||^2 + ||y-a||^2), \tag{2.2}$$

wobei ∇g der Gradient von g ist.

Beweis. Sei $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert als $G(x,y) := g(x) - g(y)$. Die Funktion G ist zweimal stetig differenzierbar mit dem Gradienten

$$\nabla G(x,y) = \begin{pmatrix} \nabla g(x) \\ -\nabla g(y) \end{pmatrix}.$$

Wählen wir in (2.1) $x = (a,a)$, $k = 1$ und $\xi = (x,y) - (a,a) = (x-a, y-a)$, dann folgt wegen $x + \xi = (x,y)$ und $||\xi||^2 = ||x-a||^2 + ||y-a||^2$

$$\begin{aligned} G(x,y) &= G(a,a) + \nabla G(a,a) \cdot (x-a, y-a) + \mathcal{O}(||\xi||^2) \\ &= \nabla g(a)(x-y) + \mathcal{O}(||x-a||^2 + ||y-a||^2), \end{aligned}$$

wobei $\nabla g(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1}(a_1, ..., a_n) \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial x_n}(a_1, ..., a_n) \end{pmatrix}$. □

Bemerkung: Wenn wir x, y in (2.2) nahe dem Entwicklungspunkt a wählen, dann kann man den Term $\mathcal{O}(||x-a||^2 + ||y-a||^2)$ vernachlässigen und wir erhalten

$$G(x,y) \approx \nabla g(a)(x-y).$$

2.5 Law of Propagation of Uncertainty

In diesem Abschnitt definieren und beweisen wir neben dem Law of Propagation of Uncertainty auch eine Verallgemeinerung dieses Ansatzes aus der Messtheorie, die für unsere Anwendung erforderlich ist.

Theorem 2.5.1 (Law of Propagation of Uncertainty) *[Sch06, S. 17] Sei $g : \Theta_1 \times \ldots \times \Theta_p \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $(g, \Theta, \vartheta, X, u(X))$ ein metrologisches Modell. Weiter sei $u(X_i, X_j) = E_\vartheta[(X_i - \vartheta_i)(X_j - \vartheta_j)]$. Dann ist das Quadrat der Standardunsicherheit näherungsweise gegeben durch*

$$u^2(m) \approx \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{\partial g}{\partial \vartheta_i} \right)^2 (\vartheta) \cdot u^2(X_i) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=i+1}^{p} \frac{\partial g}{\partial \vartheta_i}(\vartheta) \frac{\partial g}{\partial \vartheta_j}(\vartheta) \cdot u(X_i, X_j) \tag{2.3}$$

und kann durch

$$u^2(m) \approx \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{\partial g}{\partial \vartheta_i} \right)^2 (X) \cdot u^2(X_i) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=i+1}^{p} \frac{\partial g}{\partial \vartheta_i}(X) \frac{\partial g}{\partial \vartheta_j}(X) \cdot u(X_i, X_j). \tag{2.4}$$

geschätzt werden.

Beweis. Sei $m = g(X_1, \ldots, X_n)$. Wenden wir Satz 2.4.3 mit $y = a$ zur Entwicklung von g um die Entwicklungsstelle ϑ an, erhalten wir

$$m \quad = \quad \underbrace{g(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n)}_{\mu} + \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial g}{\partial \vartheta_i}(\vartheta) \cdot (X_i - \vartheta_i) + \mathcal{O}(||X - \vartheta||^2).$$

Vernachlässigen wir den Term $\mathcal{O}(||X - \vartheta||^2)$ ergibt sich die Taylor-Approximation erster Ordnung

$$m \approx \mu + \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial g}{\partial \vartheta_i}(\vartheta) \cdot (X_i - \vartheta_i).$$

Subtrahieren wir μ und quadrieren diese Gleichung führt das zu

$$(m - \mu)^2 = \left(\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial g}{\partial \vartheta_i}(\vartheta) \cdot (X_i - \vartheta_i) \right)^2.$$

Multiplizieren wir die Gleichung aus, so erhalten wir

$$(m - \mu)^2 = \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{\partial g}{\partial \vartheta_i} \right)^2 (\vartheta) \cdot (X_i - \vartheta_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=i+1}^{p} \frac{\partial g}{\partial \vartheta_i}(\vartheta) \frac{\partial g}{\partial \vartheta_j}(\vartheta) \cdot (X_i - \vartheta_i)(X_j - \vartheta_j).$$

Wir bilden den Erwartungswert und erhalten

$$E_\vartheta\left[(m-\mu)^2\right] = E_\vartheta\left[\sum_{i=1}^{p}\left(\frac{\partial g}{\partial \vartheta_i}\right)^2(\vartheta)\cdot(X_i-\vartheta_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=i+1}^{p}\frac{\partial g}{\partial \vartheta_i}(\vartheta)\frac{\partial g}{\partial \vartheta_j}(\vartheta)\cdot(X_i-\vartheta_i)(X_j-\vartheta_j)\right].$$

Da der Erwartungswert linear ist und $\frac{\partial g}{\partial \vartheta_i}(\vartheta)$ feste Werte sind, gilt

$$E_\vartheta\left[(m-\mu)^2\right] \approx \sum_{i=1}^{p}\left(\frac{\partial g}{\partial \vartheta_i}\right)^2(\vartheta)\cdot E_\vartheta\left[(X_i-\vartheta_i)^2\right] + 2\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=i+1}^{p}\frac{\partial g}{\partial \vartheta_i}(\vartheta)\frac{\partial g}{\partial \vartheta_j}(\vartheta)\cdot E_\vartheta\left[(X_i-\vartheta_i)(X_j-\vartheta_j)\right].$$

Durch Einsetzen der Definition der Standardunsicherheit $u^2(X) = E_\vartheta\left[(X-\vartheta)^2\right]$ und $u(X_i, X_j) = E_\vartheta\left[(X_i-\vartheta_i)(X_j-\vartheta_j)\right]$ erhalten wir das Ergebnis

$$u^2(m) \approx \sum_{i=1}^{p}\left(\frac{\partial g}{\partial \vartheta_i}\right)^2(\vartheta)\cdot u^2(X_i) + 2\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=i+1}^{p}\frac{\partial g}{\partial \vartheta_i}(\vartheta)\frac{\partial g}{\partial \vartheta_j}(\vartheta)\cdot u(X_i, X_j).$$

Die letzte Herausforderung besteht darin, mit den unbekannten wahren Werten ϑ der Eingangsgrößen in $\frac{\partial g}{\partial \vartheta_i}(\vartheta)$ umzugehen. Wenn wir diese Werte durch den Schätzer X approximieren, erhalten wir die zu beweisende Formel

$$u^2(m) \approx \sum_{i=1}^{p}\left(\frac{\partial g}{\partial \vartheta_i}\right)^2(X)\cdot u^2(X_i) + 2\cdot\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=i+1}^{p}\frac{\partial g}{\partial \vartheta_i}(X)\frac{\partial g}{\partial \vartheta_j}(X)\cdot u(X_i, X_j).$$

Das " $\approx$ " impliziert, dass die rechte Seite der Gleichung eine Schätzung für $u^2(m)$ darstellt. □

Der Beweis ist aus Schubert [Sch06, S. 18-19].

Veranschaulichung: Das Law of Propagation of Uncertainty stellt einen funktionalen Zusammenhang zwischen der Schwankung der Zielgröße einer Messung und den Schwankungen der Eingangsgrößen dar. Anschaulich beantwortet das Law of Propagation of Uncertainty somit die Frage, wie stark ein Messergebnis, in Abhängigkeit von den Schwankungen der Eingangsgrößen, schwanken kann.

Bemerkung: Für ein Modell g mit unkorrelierten und erwartungstreuen Schätzern für alle Eingangsgrößen vereinfacht sich die Formel (2.4) zu

$$u^2(m) \approx \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{\partial g}{\partial \vartheta_i} \right)^2 (X) \cdot u^2(X_i).$$

Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial g}{\partial \vartheta_i}(X)$ werden als Sensitivitätskoeffizienten bezeichnet und zeigen, in welchem Maße die Unsicherheit der Eingangsgröße durch das Modell g weitergegeben wird, vgl. Schubert [Sch06, S. 17-18].

Satz 2.5.2 (Verallgemeinerung) *Unter den gleichen Voraussetzungen von Theorem 2.5.1 lässt sich das Law of Propagation of Uncertainty so verallgemeinern, dass wir anstelle des wahren aber unbekannten Parameters ϑ einen weiteren Schätzer Y für ϑ einsetzen. Seien also X und Y Schätzer für ϑ. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} E\left[(g(X) - g(Y))^2\right] \approx & \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{\partial g}{\partial \vartheta_i} \right)^2 (\vartheta) \cdot E\left[(X_i - Y_i)^2\right] \\ & + 2 \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=i+1}^{p} \frac{\partial g}{\partial \vartheta_i}(\vartheta) \frac{\partial g}{\partial \vartheta_j}(\vartheta) \cdot E\left[(X_i - Y_i)\,(X_j - Y_j)\right] \end{aligned} \tag{2.5}$$

Den unbekannten wahren Parameter ϑ in (2.5) können wir durch den Schätzer $\hat{\vartheta} := X$ schätzen (Plug-In Methode) und erhalten damit

$$\begin{aligned} \widehat{E}\left[(g(X) - g(Y))^2\right] \approx & \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{\partial g}{\partial \vartheta_i} \right)^2 (X) \cdot E\left[(X_i - Y_i)^2\right] \\ & + 2 \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=i+1}^{p} \frac{\partial g}{\partial \vartheta_i}(X) \frac{\partial g}{\partial \vartheta_j}(X) \cdot E_\vartheta\left[(X_i - Y_i)(X_j - Y_j)\right]. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Beweis. Wir beginnen mit der Taylorentwicklung von $g(X)$ um den Entwicklungspunkt ϑ

$$g(X) = g(\vartheta) + \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial g}{\partial \vartheta_i}(\vartheta) \cdot (X_i - \vartheta_i) + \mathcal{O}(||X - \vartheta||^2)$$

und mit der Taylorentwicklung von $g(Y)$ um den Entwicklungspunkt ϑ

$$g(Y) = g(\vartheta) + \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial g}{\partial \vartheta_i}(\vartheta) \cdot (Y_i - \vartheta_i) + \mathcal{O}(||Y - \vartheta||^2).$$

Nun bilden wir die Differenz und lassen die Terme höherer Ordnung weg

$$g(X) - g(Y) \approx \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial g}{\partial \vartheta_i}(\vartheta)(X_i - Y_i).$$

Auf diesen Ausdruck können wir nun alles weitere analog zum Beweis von (2.3) anwenden. Wir quadrieren die Gleichung und multiplizieren diese aus

$$(g(X)-g(Y))^2 \approx \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{\partial g}{\partial \vartheta_i}\right)^2 (\vartheta)(X_i-Y_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=i+1}^{p} \frac{\partial g}{\partial \vartheta_i}(\vartheta)\frac{\partial g}{\partial \vartheta_j}(\vartheta)\left[(X_i - Y_i)(X_j - Y_j)\right].$$

Wir bilden den Erwartungswert und erhalten das Ergebnis

$$\begin{aligned} E\left[(g(X) - g(Y))^2\right] \quad \approx \quad & \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{\partial g}{\partial \vartheta_i}\right)^2 (\vartheta) E\left[(X_i - Y_i)^2\right] \\ & + 2\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=i+1}^{p} \frac{\partial g}{\partial \vartheta_i}(\vartheta)\frac{\partial g}{\partial \vartheta_j}(\vartheta) E_\vartheta\left[(X_i - Y_i)(X_j - Y_j)\right]. \end{aligned}$$

□

Bemerkung

(i) Im Gegensatz zum Law of Propagation of Uncertainty (2.4), das eine Aussage zur möglichen Abweichung eines Messergebnisses vom wahren zu messenden Wert trifft, liefert die Verallgemeinerung (2.6) eine Aussage zur möglichen Abweichung von zwei verschiedenen Messwerten für den gleichen zu messenden Wert.

(ii) Die Formel gilt auch für bedingte Erwartungen. Der Beweis hierzu läuft analog.

2.6 Beispiel zum Law of Propagation of Uncertainty

In diesem Abschnitt stellen wir zur Veranschaulichung ein Beispiel zum Law of Propagation of Uncertainty vor. Unser Ziel ist es, den Body-Mass-Index (BMI) zu messen und zu untersuchen, wie sich die Schwankungen in den Eingangsgrößen auf unsere Zielgröße, nämlich den BMI, auswirken. Der BMI ist ein Maß für das Verhältnis von Körpergewicht zu Körpergröße. Um den BMI zu berechnen, wird das Körpergewicht (in Kilogramm) durch das Quadrat der Körpergröße (in Metern) geteilt. Zunächst führen wir die Begriffe ein, die in den vorangegangenen Abschnitten definiert wurden.

Ein-Ausgabe-Modell

Die Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g(\vartheta_1, \vartheta_2) = \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2^2}$$

verknüpft unsere Ausgangsgröße (den BMI) mit den beiden Eingangsgrößen (wahres) Körpergewicht ϑ_1 und (wahre) Körpergröße ϑ_2 und stellt das Ein-Ausgabe-Modell unserer Messung dar. Nehmen wir an, dass wir einen Schätzer X_1 für das Körpergewicht mit einer Waage mit einer Standardunsicherheit von $u(X_1) = 1kg$ und einen Schätzer X_2 für die Körpergröße mit einem Maßband mit Standardunsicherheit $u(X_2) = 0,01m$ bestimmen können. Wir nehmen an, dass die Schätzfehler $X_1 - \vartheta_1$ für das Körpergewicht und $X_2 - \vartheta_2$ für die Körpergröße unabhängig voneinander sind. Im Folgenden lassen wir zur Vereinfachung die Einheiten weg. Es ist jedoch immer von Metern für die Körpergröße und Kilogramm für das Körpergewicht die Rede.

Metrologisches Modell

Das Metrologische Modell der Messung ist gegeben durch

$$\left(g, \mathbb{R}^2, (\vartheta_1, \vartheta_2), (X_1, X_2), (1, 0.01)\right).$$

Law of Propagation of Uncertainty

Wegen der Unabhängigkeit der Schätzfehler ist $u(X_1, X_2) = 0$ und wir berechnen das Quadrat der Standardunsicherheit näherungsweise durch

$$\begin{aligned} u^2(m) &\approx \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial g}{\partial \vartheta_i}\right)^2 (\vartheta) \cdot u^2(X_i) \\ &= \left(\frac{\partial g}{\partial \vartheta_1}\right)^2 (\vartheta) \cdot u^2(X_1) + \left(\frac{\partial g}{\partial \vartheta_2}\right)^2 (\vartheta) \cdot u^2(X_2). \end{aligned}$$

Zunächst berechnen wir die notwendigen Ableitungen durch

$$\frac{\partial g}{\vartheta_1}(\vartheta) = \frac{1}{\vartheta_2^2},\ \frac{\partial g}{\vartheta_2}(\vartheta) = -\frac{2\vartheta_1}{\vartheta_2^3}.$$

Danach setzen wir die berechneten Ableitungen ein und es ergibt sich

$$\begin{aligned} u^2(m) &\approx \left(\frac{1}{\vartheta_2^2}\right)^2 \cdot u^2(X_1) + \left(-\frac{2\vartheta_1}{\vartheta_2^3}\right)^2 \cdot u^2(X_2) \\ &= \frac{1}{\vartheta_2^4} \cdot u^2(X_1) + \frac{4\vartheta_1^2}{\vartheta_2^6} \cdot u^2(X_2). \end{aligned}$$

Nach dem Law of Propagation of Uncertainty schätzen wir die wahren unbekannten Parameter ϑ_1 und ϑ_2 durch ihre Schätzer X_1 und X_2. In unserem Beispiel nehmen wir an, dass wir für das Körpergewicht einer Person $X_1 = 80kg$ schätzen, und für die Körpergröße $X_2 = 1,80m$. Damit ergibt sich ein BMI von 24,69 mit einer Standardunsicherheit von

$$u^2(m) \approx \frac{1}{1,8^4} \cdot 1^2 + \frac{4 \cdot 80^2}{1,8^6} \cdot 0,01^2 = 0,17.$$

Anschaulich bedeutet das, dass die Abweichung unserer Messung vom wahren Wert auf 0,17 geschätzt wird. Das Ergebnis trifft eine Aussage darüber, wie sich die Schwankungen in den beiden Eingangsgrößen auf das Ergebnis des BMI auswirken.

2.7 Eigenschaften bedingter Erwartungen

Definition 2.7.1 (Bedingte Erwartung) *[MS05, S. 216] Sei Z eine integrierbare reelle Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ eine Sub-σ-Algebra. Dann heißt eine reelle Zufallsvariable Y bedingte Erwartung von Z unter $\mathcal{G}$, wenn gilt:*

$$Y \text{ ist } \mathcal{G} - \text{messbar und } E(ZI_B) = E(YI_B) \text{ für alle } B \in \mathcal{G}.$$

Satz 2.7.2 (Projektionseigenschaft) *[MS05, S. 221] Ist X eine integrierbare Zufallsvariable und sind $\mathcal{H} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ σ-Algebren, so gilt:*

$$E\left(E\left(X \mid \mathcal{G}\right) \mid \mathcal{H}\right) = E\left(X \mid \mathcal{H}\right) \text{ fast sicher.} \tag{2.7}$$

Beweis. [MS05, S. 221] □

Satz 2.7.3 *[MS05, S. 219] Seien X_1, X_2 und $X_1 \cdot X_2$ integrierbare Zufallsvariablen und $\mathcal{G}$ eine Sub-σ-Algebra von $\mathcal{F}$. Weiter sei X_1 $\mathcal{G}$-messbar. Dann gilt:*

$$E[X_1 X_2 \mid \mathcal{G}] = X_1 \cdot E[X_2 \mid \mathcal{G}] \tag{2.8}$$

Beweis. [MS05, S. 219] □

3 Chain-Ladder-Modell

In diesem Abschnitt wird das Chain-Ladder-Modell der Schadenreservierung vorgestellt, und alle im weiteren Verlauf verwendeten Schätzer werden hergeleitet.

Hinweis: Aufgrund der uneinheitlichen Behandlung von Indizes in der Literatur wird in dieser Arbeit die Indizierung gemäß Mack [Mac02] verwendet. Dadurch wurden einige Formeln nicht exakt aus der Literatur übernommen, sondern die Indizes entsprechend angepasst.

3.1 Bezeichnungen

Wir bezeichnen die kumulativen Schadenstände für das Anfalljahr (AJ) $i \in \{1, \dots, I\}$ bis zum Folgejahr (FJ) $j \in \{1, \dots, J\}$ mit C_{ij}. Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass $I = J$ ist. Alle Ergebnisse können aber auf den Fall $I > J$ verallgemeinert werden. Damit ist der Endschadenstand für das AJ i durch C_{iI} gegeben. Die ausstehenden Verbindlichkeiten für das AJ i zum Zeitpunkt $t = I$ sind gegeben durch

$$R_i^I = C_{iI} - C_{i,I-i+1}$$

und zum Zeitpunkt $t = I + 1$

$$R_i^{I+1} = C_{iI} - C_{i,I-i+2}.$$

Sei

$$D_I = \{C_{ij} : i + j \leq I + 1,\ i \leq I\}$$

die bekannte Information zum Zeitpunkt $t = I$ und

$$D_{I+1} = \{C_{ij} : i + j \leq I + 2,\ i \leq I\} = D_I \cup \{C_{i,I-i+2} : i \leq I\}$$

die bekannte Information zum Zeitpunkt $t = I + 1$. Anschaulich bedeutet das, dass die verfügbare Information durch einen Zeitschritt von I auf $I + 1$ genau um die neuen Beobachtungen auf der nächsten Diagonalen des Schadenabwicklungsdreiecks wächst.

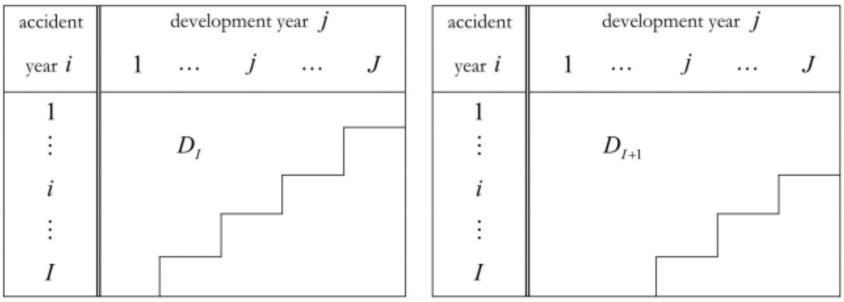

Abbildung 1: Schadenabwicklungsdreiecke zum Zeitpunkt $t = I$ und $t = I + 1$ aus Merz/Wüthrich [MW08, S. 547]

Wir schreiben den Endschadenstand C_{iI} in der multiplikativen Form

$$C_{iI} = C_{i1} \cdot F_{i1} \cdot F_{i2} \cdot \ldots \cdot F_{i,I-1},$$

wobei

$$F_{ij} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}}$$

die multiplikative Zunahme des kummulierten Schadenstandes C_{ij} ist. Für die Zufallsvariablen F_{ij} nehmen wir einen vom AJ i unabhängigen Erwartungswert

$$E\left[F_{ij}\right] = f_j, \ 1 \leq i \leq I, \ 1 \leq j \leq I - 1$$

an [Mac02, S. 245].

3.2 Modellannahmen

Die folgenden Modellannahmen stützen sich auf Merz/Wüthrich [MW08].

(CL1) Kumulative Zahlungen C_{ij} aus verschiedenen AJ $i \in \{1, \ldots, I\}$ sind unabhängig.

(CL2) $(C_{i,j+1})_{j \geq 1}$ sind Markov-Ketten und es existieren Konstanten $f_j > 0$, $\sigma_j > 0$, sodass für alle $1 \leq j \leq I - 1$ und $1 \leq i \leq I$ gilt:

$$\begin{aligned} E[C_{i,j+1} \mid C_{ij}] &= f_j \cdot C_{ij}, \\ Var(C_{i,j+1} \mid C_{ij}) &= \sigma_j^2 \cdot C_{ij}. \end{aligned}$$

Diese Annahme besagt, dass der bedingte Erwartungswert von $C_{i,j+1}$ nur von C_{ij} abhängt, aber nicht von den früheren Schadenständen $C_{i1}, ..., C_{i,j-1}$. Die Formulierung dieser Modellannahme als bedingter Erwartungswert macht auch deutlich, dass wir genau genommen nicht $E[C_{iI}]$ schätzen wollen, sondern vielmehr den bedingten Erwartungswert $E[C_{iI} \mid D_I]$, vgl. Mack [Mac02, S. 246].

Satz 3.2.1 *[Mac02, S. 247] Unter den Annahmen (CL1) und (CL2) gilt*

$$E[C_{iI} \mid D_I] = C_{i,I-i+1} \cdot f_{I-i+1} \cdot \ldots \cdot f_{I-1}, \ 2 \leq i \leq I \tag{3.1}$$

Beweis. [Mac02, S. 247] Mit der Abkürzung $A_i = \{C_{i1}, \ldots, C_{i,I-i+1}\}$ gilt wegen (CL2) und durch wiederholte Anwendung von (CL1):

$$\begin{aligned} E[C_{iI} \mid D_I] &= E[C_{iI} \mid A_i] \\ &= E[E[C_{iI} \mid C_{i1}, \ldots, C_{i,I-1}] \mid A_i] \\ &= E[C_{i,I-1} \cdot f_{I-1} \mid A_i] \\ &= E[C_{i,I-1} \mid A_i] \cdot f_{I-1} \\ &= \ldots \\ &= E[C_{i,I-i+1} \mid A_i] \cdot f_{I-i+1} \cdot \ldots \cdot f_{I-1} \\ &= C_{i,I-i+1} \cdot f_{I-i+1} \cdot \ldots \cdot f_{I-1} \end{aligned}$$

□

3.3 Schätzer

Aus den Modellannahmen (CL1) und (CL2) folgt [MW08, S. 548]:

$$E[C_{iI} \mid D_I] = C_{i,I-i+1} \prod_{j=I-i+1}^{I-1} f_j$$

und

$$E[C_{iI} \mid D_{I+1}] = C_{i,I-i+2} \prod_{j=I-i+2}^{I-1} f_j.$$

Das bedeutet, dass wir für bekannte Abwicklungsfaktoren f_j den bedingt erwarteten Endschadenstand C_{iI} unter Verwendung der Daten D_I bzw. D_{I+1} berechnen können. Die Abwicklungsfaktoren f_j sind im Allgemeinen nicht bekannt und müssen daher geschätzt werden. Als Schätzer verwenden wir [Mac02, S. 245]

$$\hat{f}_j^I = \frac{\sum_{i=1}^{I-j} C_{i,j+1}}{S_j^I},$$

wobei

$$S_j^I = \sum_{i=1}^{I-j} C_{ij}.$$

Die $\hat{f}_j$ geben also die durchschnittliche Steigerung des Schadenstands von FJ j auf das FJ $j+1$ an [Mac02, S. 245].

Zum Zeitpunkt t=I+1, gegeben der Information D_{I+1}, sind die Schätzer für die Abwicklungsfaktoren f_j gegeben durch:

$$\hat{f}_j^{I+1} = \frac{\sum_{i=1}^{I-j+1} C_{i,j+1}}{S_j^{I+1}},$$

wobei

$$S_j^{I+1} = \sum_{i=1}^{I-j+1} C_{ij}.$$

Als Schätzer für σ_j^2 verwenden wir

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{I-j-1} \sum_{i=1}^{I-j} C_{ij} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}} - \hat{f}_j \right)^2, \ 1 \leq j \leq I-2.$$

Für weitere Informationen vergleiche Mack [Mac02, S. 251].

Der Endschadenstand C_{iI} wird durch

$$\hat{C}_{iI} = C_{i,I-i+1} \hat{f}_{I-i+1} \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{I-1}$$

bzw. die Reserve $R_i = C_{iI} - C_{i,I-i+1}$ durch

$$\hat{R}_i = C_{i_I - i+1} \left(\hat{f}_{I-i+1} \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{I-1} - 1 \right)$$

geschätzt [Mac02, S. 245-246].

Satz 3.3.1 *[Mac02, S. 247-248] Unter den Annahmen (CL1) und (CL2) sind die berechneten Schätzer $\hat{f}_j^I$ erwartungstreu und unkorreliert mit*

$$E\left[\hat{f}_{I-i+1}^I \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{I-1}^I\right] = f_{I-i+1} \cdot \ldots \cdot f_{I-1}. \tag{3.2}$$

Beweis. Wir zeigen zunächst die Erwartungstreue von $\hat{f}_j^I$. Dazu sei

$$B_j^I = \{C_{ik} \mid k \leq j,\ i+k \leq I+1\},\ 1 \leq j \leq I.$$

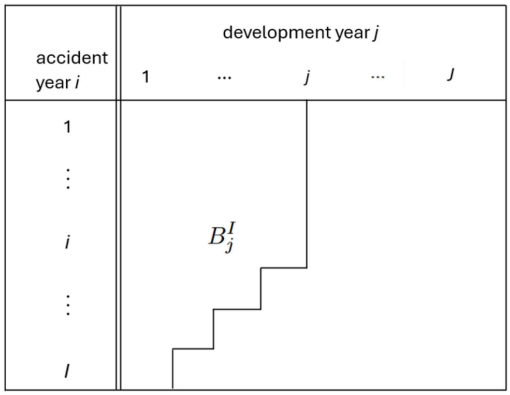

Abbildung 2: Schadenabwicklungsdreieck mit den Informationen B_j^I

Dann ist wegen (CL1) und (CL2)

$$E\left[C_{i,j+1} \mid B_j^I\right] = C_{ij} \cdot f_j,\ 1 \leq i \leq I-j$$

und daher

$$E\left[\hat{f}_j^I \mid B_j^I\right] = \frac{\sum_{i=1}^{I-j} E\left[C_{i,j+1} \mid B_j^I\right]}{\sum_{i=1}^{I-j} C_{ij}} = f_j.$$

Das liefert

$$E\left[\hat{f}_j^I\right] = E\left[E\left[\hat{f}_j^I \mid B_j^I\right]\right] = f_j.$$

Weiter gilt für $k < j$

$$\begin{aligned} E\left[\hat{f}_k^I \hat{f}_j^I\right] &\overset{(2.7)}{=} E\left[E\left[\hat{f}_k^I \hat{f}_j^I \mid B_j^I\right]\right] \\ &\overset{(2.8)}{=} E\left[\hat{f}_k^I E\left[\hat{f}_j^I \mid B_j^I\right]\right] \\ &= E\left[\hat{f}_k^I\right] f_j \\ &= f_k f_j, \end{aligned}$$

d.h. $\hat{f}_j^I$ sind unkorreliert. Dieser Beweis lässt sich völlig analog auf beliebige Produkte paarweise verschiedener $\hat{f}_j^I$ übertragen. □

Bemerkung: Ähnlich wie im vorstehenden Beweis der Unkorreliertheit der $\hat{f}_j^I$ lässt sich für jedes feste AJ i auch die Unkorreliertheit der Faktoren $F_{ij} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}}$, $1 \leq j \leq I-1$, zeigen. Insbesondere sind also aufeinanderfolgende Einzel-Abwicklungsfaktoren $F_{i,j-1}, F_{ij}$ unkorreliert [Mac02, S. 248].

Satz 3.3.2 *Für $k < j$ und unter den Annahmen (CL1) und (CL2) sind die Schätzer $\hat{f}_k^I$ und $\hat{f}_j^{I+1}$ erwartungstreu und unkorreliert mit*

$$E\left[\hat{f}_k^I \hat{f}_j^{I+1}\right] = f_j f_k. \tag{3.3}$$

Beweis. Sei $B_j^{I+1} = \{C_{ik} \mid k \leq j,\ i+k \leq I+2\}$, $1 \leq j \leq I+1$ und $k < j$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} E\left[\hat{f}_k^I \hat{f}_j^{I+1}\right] &\overset{(2.7)}{=} E\left[E\left[\hat{f}_k^I \hat{f}_j^{I+1} \mid B_j^{I+1}\right]\right] \\ &\overset{(2.8)}{=} E\left[\hat{f}_k^I E\left[\hat{f}_j^{I+1} \mid B_j^{I+1}\right]\right] \\ &= E\left[\hat{f}_k^I \cdot f_j\right] \\ &= f_j E\left[\hat{f}_k^I\right] \\ &= f_j f_k \end{aligned}$$

□

Satz 3.3.3 *Für $k < j$ und unter den Annahmen (CL1) und (CL2) sind die Schätzer $\hat{f}_k^{I+1}$ und $\hat{f}_j^I$ erwartungstreu und unkorreliert mit*

$$E\left[\hat{f}_k^{I+1}\hat{f}_j^I\right] = f_j f_k. \tag{3.4}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} E\left[\hat{f}_k^{I+1}\hat{f}_j^I\right] &\overset{(2.7)}{=} E\left[E\left[\hat{f}_k^{I+1}\hat{f}_j^I \mid B_j^{I+1}\right]\right] \\ &\overset{(2.8)}{=} E\left[\hat{f}_k^{I+1}E\left[\hat{f}_j^I \mid B_j^{I+1}\right]\right] \\ &= E\left[\hat{f}_k^{I+1}\cdot f_j\right] \\ &= f_j E\left[\hat{f}_k^{I+1}\right] \\ &= f_j f_k \end{aligned}$$

□

Satz 3.3.4 *Für $k < j$ und unter den Annahmen (CL1) und (CL2) sind die Schätzer $\hat{f}_k^{I+1}$ und $\hat{f}_j^{I+1}$ erwartungstreu und unkorreliert mit*

$$E\left[\hat{f}_k^{I+1}\hat{f}_j^{I+1}\right] = f_j f_k. \tag{3.5}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} E\left[\hat{f}_k^{I+1}\hat{f}_j^{I+1}\right] &\overset{(2.7)}{=} E\left[E\left[\hat{f}_k^{I+1}\hat{f}_j^{I+1} \mid B_j^{I+1}\right]\right] \\ &\overset{(2.8)}{=} E\left[\hat{f}_k^{I+1}E\left[\hat{f}_j^{I+1} \mid B_j^{I+1}\right]\right] \\ &= E\left[\hat{f}_k^{I+1}\cdot f_j\right] \\ &= f_j E\left[\hat{f}_k^{I+1}\right] \\ &= f_j f_k \end{aligned}$$

□

Satz 3.3.5 *Für $k < j$ und unter den Annahmen (CL1) und (CL2) sind F_{ik} und $\hat{f}_j^I$ erwartungstreu und unkorreliert mit*

$$E\left[F_{ik}\hat{f}_j^I\right] = f_k f_j. \tag{3.6}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} E\left[F_{ik}\hat{f}_j^I\right] &\overset{(2.7)}{=} E\left[E\left[F_{ik}\hat{f}_j^I \mid B_j^I\right]\right] \\ &\overset{(2.8)}{=} E\left[F_{ik}E\left[\hat{f}_j^I \mid B_j^I\right]\right] \\ &= E\left[F_{ik}\cdot f_j\right] \\ &= f_j E\left[F_{ik}\right] \\ &= f_j f_k \end{aligned}$$

□

Satz 3.3.6 *Für $k < j$ und unter den Annahmen (CL1) und (CL2) sind F_{ik} und $\hat{f}_j^{I+1}$ erwartungstreu und unkorreliert mit*

$$E\left[F_{ik}\hat{f}_j^{I+1}\right] = f_k f_j. \tag{3.7}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} E\left[F_{ik}\hat{f}_j^{I+1}\right] &\overset{(2.7)}{=} E\left[E\left[F_{ik}\hat{f}_j^{I+1} \mid B_j^{I+1}\right]\right] \\ &\overset{(2.8)}{=} E\left[F_{ik}E\left[\hat{f}_j^{I+1} \mid B_j^{I+1}\right]\right] \\ &= E\left[F_{ik}\cdot f_j\right] \\ &= f_j E\left[F_{ik}\right] \\ &= f_j f_k \end{aligned}$$

□

4 Formel von Merz-Wüthrich

In diesem Kapitel stellen wir die in der Praxis im Regelfall verwendete Formel von Merz-Wüthrich vor, die den Schätzer für den mittleren quadratischen Fehler (Mean Squared Error (MSE)) des Abwicklungsergebnisses (Claims Development Result (CDR)) im Chain-Ladder-Modell bereitstellt.

4.1 Abwicklungsergebnis: Definition und Bedeutung

Nach dem Institut und der Fakultät der Aktuare [Ins08, S. 3] wird das CDR wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \text{CDR} &= \text{Schätzung des Ultimate heute} - \\ &\qquad \text{Schätzung des Ultimate zu einem zukünftigen Zeitpunkt} \end{aligned}$$

Die Schätzung des heutigen Ultimate ist zum aktuellen Zeitpunkt $t = 1$ bekannt, da sie durch die Anwendung aktuarieller Reservierungsmethoden auf den zum jetzigen Zeitpunkt verfügbaren Daten D_I ermittelt wird. Die Schätzung des Ultimate zu einem zukünftigen Zeitpunkt wird erst zum Zeitpunkt $t = I + 1$ bekannt sein, und kann dann auf Basis der zu diesem Zeitpunkt verfügbaren Daten D_{I+1} berechnet werden.
Für bekannte CL-Faktoren f_j ist die bedingte Erwartung $E[C_{iI} \mid D_I]$ bekannt und wird daher als Schätzung für C_{iI} zum Zeitpunkt $t = I$ verwendet. Ebenso wird zum Zeitpunkt $t = I + 1$ die bedingte Erwartung $E[C_{iI} \mid D_{I+1}]$ als Schätzung für C_{iI} verwendet. Dann wird das wahre CDR wie folgt definiert.

Definition 4.1.1 (Wahres Schadenabwicklungsergebnis) *[MW08, S. 551] Das wahre CDR für das AJ $i \in \{1, \ldots, I\}$ im Rechnungsjahr $(I, I+1]$ ist gegeben durch*

$$\begin{aligned} CDR_i(I+1) &= \left[R_i^I \mid D_I\right] - \left(X_{i,I-i+1} + E\left[R_i^{I+1} \mid D_{I+1}\right]\right) \\ &= E\left[C_{iI} \mid D_I\right] - E\left[C_{iI} \mid D_{I+1}\right], \end{aligned}$$

wobei $X_{i,I-i+1} = C_{i,I-i+1} - C_{i,I-i}$ die inkrementellen Zahlungen darstellen.

Bemerkung: Für bekannte CL-Faktoren f_j gilt: $E\left[CDR_i(I+1) \mid D_I\right] = 0$ [MW08, S. 552].

Im Allgemeinen sind die CL-Faktoren nicht bekannt und daher kann das wahre CDR nicht berechnet werden. Wir ersetzen die unbekannten wahren Paramter $E\left[C_{iI} \mid D_I\right]$ und $E\left[C_{iI} \mid D_{I+1}\right]$ durch die Schätzer $\hat{C}_{iI}^{I}$ und $\hat{C}_{iI}^{I+1}$. Das geschätzte CDR wird dann wie folgt definiert.

Definition 4.1.2 (Geschätztes Abwicklungsergebnis) *[MW08, S. 552] Das geschätzte Abwicklungsergebnis für das AJ $i \in \{1, \ldots, I\}$ im Rechnungsjahr $(I, I+1]$ ist gegeben durch*

$$\begin{aligned}\widehat{CDR}_i(I+1) &= \hat{R}_i^I - \left(X_{i,I-i+1} + \hat{R}_i^{I+1}\right) \\ &= \hat{C}_{iI}^I - \hat{C}_{iI}^{I+1},\end{aligned}$$

wobei $\hat{R}_i^I = \hat{C}_{iI} - C_{i,I-i+1}$ und $\hat{R}_i^{I+1} = \hat{C}_{iI} - C_{i,I-i+2}$.

4.2 Mittlerer quadratischer Fehler des Abwicklungsergebnisses

Unser Ziel ist es, die Frage zu beantworten, wie stark die zukünftige Ultimate-Schätzung von der heutigen Ultimate-Schätzung abweichen kann, d.h. folgende Größe ist zu schätzen:

$$mse(0) = E\left[\widehat{CDR}_i(I+1) - 0)^2 \mid D_I\right]$$

Wir verwenden im Folgenden das Ergebnis von Merz/Wüthrich [MW08, S. 555-556]. Der MSE quantifiziert die Vorhersageunsicherheit um den Wert 0 für das beobachtbare CDR am Ende des Rechnungszeitraums [MW08, S. 554]. Ein geeigneter Schätzer für den MSE des CDR ist durch

$$\widehat{mse}_{C\hat{D}R_i(I+1)|D_I}(0) = \hat{C}_{iI}^2 \cdot \left(\hat{\Gamma}_{iI}^I + \hat{\Delta}_{iI}^I\right)$$

gegeben, wobei

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}_{iI}^I &:= \hat{\Phi}_{iI}^I + \hat{\Psi}_i^I \\ \hat{\Phi}_{iI}^I &:= \sum_{j=I-i+2}^{I-1} \left(\frac{C_{I-j+1,j}}{S_j^{I+1}}\right)^2 \cdot \frac{\frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{f}_j^2}}{C_{I-j+1,j}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{\Psi}_i^I &:= \frac{\frac{\hat{\sigma}^2_{I-i+1}}{\hat{f}^2_{I-i+1}}}{C_{i,I-i+1}} \\ \hat{\Delta}_{iI}^I &:= \frac{\frac{\hat{\sigma}^2_{I-i+1}}{\hat{f}^2_{I-i+1}}}{S^I_{I-i+1}} + \sum_{j=I-i+2}^{I-1} \left(\frac{C_{I-j+1,j}}{S_j^{I+1}}\right)^2 \cdot \frac{\frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{f}_j^2}}{S_j^I}.\end{aligned}$$

Bemerkung: Wenn weniger als 2 Jahre bis zum Abschluss der Abwicklung verbleiben (d.h. wenn $I-i+2 > I-1$), dann ist die Summe als 0 zu interpretieren.

Satz 4.2.1 *Für den MSE des CDR gilt:*

$$\begin{aligned}\widehat{mse}_{C\hat{D}R_i(I+1)|D_I}(0) = \hat{\sigma}^2_{I-i+1} \cdot \left(\prod_{k=I-i+2}^{I-1} \hat{f}_k^2\right) \cdot C_{i,I-i+1} \left(1 + \frac{C_{i,I-i+1}}{S^I_{I-i+1}}\right) \\ + \sum_{j=I-i+2}^{I-1} \hat{\sigma}_j^2 \cdot \left(\prod_{k=I-i+1, k\neq j}^{I-1} \hat{f}_k^2\right) \\ \cdot C^2_{i,I-i+1} \left(\frac{C_{I-j+1,j}}{(S_j^{I+1})^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{C_{I-j+1,j}}{S_j^I}\right) \qquad (4.1)\end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}&\widehat{mse}_{C\hat{D}R_i(I+1)|D_I}(0) = \hat{C}^2_{iI} \cdot \left(\hat{\Gamma}^I_{iI} + \hat{\Delta}^I_{iI}\right) \\ &= \hat{C}^2_{iI} \cdot \left(\hat{\Phi}_{iI} + \hat{\Psi}^I_i + \hat{\Delta}^I_{iI}\right) \\ &= \hat{C}^2_{iI} \cdot \left[\sum_{j=I-i+2}^{I-1} \left(\frac{C_{I-j+1,j}}{S_j^{I+1}}\right)^2 \frac{\frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{f}_j^2}}{C_{I-i+1,j}} + \frac{\frac{\hat{\sigma}^2_{I-i+1}}{\hat{f}^2_{I-i+1}}}{C_{i,I-i+1}} + \frac{\frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{f}_j^2}}{S^I_{I-i+1}} + \sum_{j=I-i+2}^{I-1} \left(\frac{C_{I-j+1,j}}{S_j^{I+1}}\right)^2 \frac{\frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{f}_j^2}}{S_j^I}\right] \\ &= \left(C_{i,I-i+1} \prod_{k=I-i+1}^{I-1} \hat{f}_k\right)^2 \left[\frac{\frac{\hat{\sigma}^2_{I-i+1}}{\hat{f}^2_{I-i+1}}}{C_{i,I-i+1}} + \frac{\frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{f}_j^2}}{S^I_{I-i+1}}\right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=I-i+2}^{I-1} \left(\frac{C_{I-j+1,j}}{S_j^{I+1}}\right)^2 \frac{\frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{f}_j^2}}{C_{I-i+1,j}} + \sum_{j=I-i+2}^{I-1} \left(\frac{C_{I-j+1,j}}{S_j^{I+1}}\right)^2 \frac{\frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{f}_j^2}}{S_j^I}\right] \\ &= \hat{\sigma}^2_{I-i+1} \cdot \frac{1}{\hat{f}^2_{I-i+1}} \left(\prod_{k=I-i+1}^{I-1} \hat{f}_k^2\right) C^2_{i,I-i+1} \left(\frac{1}{C_{i,I-i+1}} + \frac{1}{S^I_{I-i+1}}\right) \\ &\quad + \left(C_{i,I-i+1} \prod_{k=I-i+1}^{I-1} \hat{f}_k\right)^2 \sum_{j=I-i+2}^{I-1} \left(\hat{\sigma}_j^2 \cdot \frac{1}{\hat{f}_j^2} \cdot \frac{C_{I-j+1,j}}{\left(S_j^{I+1}\right)^2} \left(1 + \frac{C_{I-j+1,j}}{S_j^I}\right)\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \hat{\sigma}^2_{I-i+1} \left(\prod_{k=I-i+2}^{I-1} \hat{f}^2_k \right) C_{i,I-i+1} \left(1 + \frac{C_{i,I-i+1}}{S^I_{I-i+1}} \right) \\
&\quad + \sum_{j=I-i+2}^{I-1} \hat{\sigma}^2_j \cdot \frac{1}{\hat{f}^2_j} \left(\prod_{k=I-i+1}^{I-1} \hat{f}^2_k \right) \cdot C^2_{i,I-i+1} \cdot \frac{C_{I-j+1,j}}{\left(S^{I+1}_j \right)^2} \left(1 + \frac{C_{I-j+1,j}}{S^I_j} \right) \\
&= \hat{\sigma}^2_{I-i+1} \left(\prod_{k=I-i+2}^{I-1} \hat{f}^2_k \right) C_{i,I-i+1} \left(1 + \frac{C_{i,I-i+1}}{S^I_{I-i+1}} \right) \\
&\quad + \sum_{j=I-i+2}^{I-1} \hat{\sigma}^2_j \cdot \left(\prod_{k=I-i+1}^{I-1} \hat{f}^2_k \frac{1}{\hat{f}^2_j} \right) \cdot C^2_{i,I-i+1} \cdot \frac{C_{I-j+1,j}}{\left(S^{I+1}_j \right)^2} \left(1 + \frac{C_{I-j+1,j}}{S^I_j} \right) \\
&= \hat{\sigma}^2_{I-i+1} \left(\prod_{k=I-i+2}^{I-1} \hat{f}^2_k \right) C_{i,I-i+1} \left(1 + \frac{C_{i,I-i+1}}{S^I_{I-i+1}} \right) \\
&\quad + \sum_{j=I-i+2}^{I-1} \hat{\sigma}^2_j \cdot \left(\prod_{k=I-i+1, k \neq j}^{I-1} \hat{f}^2_k \right) \cdot C^2_{i,I-i+1} \cdot \frac{C_{I-j+1,j}}{\left(S^{I+1}_j \right)^2} \left(1 + \frac{C_{I-j+1,j}}{S^I_j} \right)
\end{aligned}
$$

□

5 Anwendung des Law of Propagation of Uncertainty auf das Reservierungsproblem im Chain-Ladder-Modell

In diesem Abschnitt wenden wir das Law of Propagation of Uncertainty auf das Reservierungsproblem im Chain-Ladder-Modell an. Dazu müssen wir zunächst das Reservierungsproblem im Chain-Ladder-Modell als Messproblem formulieren.

5.1 Darstellung des Reservierungsproblems als Messproblem

Gemessen werden soll der Ultimate des AJ i auf Basis der Informationen zum Zeitpunkt $t = I$. Dieser ist gemäß (3.1) gegeben durch $U_i := C_{i,I-i+1} \cdot f_{I-i+1} \cdot ... \cdot f_{I-1}$ und soll das Ein-Ausgabe-Modell der Messung darstellen. Die Messung soll nun einmal unter Verwendung der CL-Schätzer zum Zeitpunkt $t = I$ als Schätzer für die unbekannten Eingangsgrößen $f_{I-i+1} \cdot ... \cdot f_{I-1}$ und einmal unter Verwendung der CL-Schätzer zum Zeitpunkt $t = I + 1$ durchgeführt werden, um das Law of Propagation of Uncertainty auf die Differenz der beiden Messungen anzuwenden.

Wir führen nun folgende Bezeichungen ein, um das Law of Propagation of Uncertainty auf das Reservierungsproblem anwenden zu können.
Das Ein-Ausgabe-Modell ist gegeben durch

$$g(x_{I-i+1}, ..., x_{I-1}) := C_{i,I-i+1} \cdot x_{I-i+1} \cdot ... \cdot x_{I-1}.$$

Die wahren unbekannten Abwicklungsfaktoren bezeichnen wir mit

$$\vartheta := (f_{I-i+1}, \ldots, f_{I-1}).$$

Die geschätzten Abwicklungsfaktoren zum Zeitpunkt $t = I$ sind gegeben durch

$$\widehat{X} := (\hat{f}^I_{I-i+1}, \ldots, \hat{f}^I_{I-1})$$

und damit ergibt sich für die Ultimate-Schätzung zum Zeitpunkt $t = I$

$$g(\widehat{X}) = C_{i,I-i+1} \cdot \hat{f}^I_{I-i+1}, ..., \hat{f}^I_{I-1}.$$

Die geschätzten Abwicklungsfaktoren zum Zeitpunkt $t = I + 1$ sind gegeben durch

$$\widehat{Y} := (F_{i,I-i+1}, \hat{f}^{I+1}_{I-i+2}, \ldots, \hat{f}^{I+1}_{I-1}),$$

da die Realisation $F_{i,I-i+1}$ des Abwicklungsfaktors f_{I-i+1} zum Zeitpunkt $t = I+1$ bereits im Dreieck enthalten, und somit nicht mehr über das Chain-Ladder-Modell zu schätzen ist.

Damit ergibt sich für die Ultimate-Schätzung zum Zeitpunkt $t = I + 1$

$$g(\widehat{Y}) = C_{i,I-i+1} \cdot F_{i,I-i+1} \cdot \hat{f}^{I+1}_{I-i+2} \cdot \ldots \cdot \hat{f}^{I+1}_{I-1}.$$

5.2 Anwendung des Law of Propagation of Uncertainty auf das Messproblem

Ziel ist es herauszufinden, wie stark die Ultimate-Schätzung zum Zeitpunkt $t = I + 1$ von der Ultimate-Schätzung zum Zeitpunkt $t = I$ abweichen kann, gegeben der Information zum Zeitpunkt $t = I$. Mathematisch ausgedrückt wollen wir

$$E\left[g(\hat{X}) - g(\hat{Y}) \mid D_I\right]$$

schätzen. Da dies in der Berechnung zu Problemen führt, schätzen wir stattdessen

$$E\left[g(\hat{X}) - g(\hat{Y}) \mid A_i\right]$$

mit $A_i = \{C_{i1}, \ldots, C_{i,I-i+1}\}$. Den Grund hierfür erläutern wir in der folgenden Bemerkung.

Bemerkung: Wir bedingen hier bewusst unter A_i und nicht unter dem gesamten Abwicklungsdreieck D_I, da dies bei der weiteren Berechnung zu Problemen führt. Um das Problem zu erklären, schauen wir uns die folgende Berechnung zum MSE an.

$$\begin{aligned} mse(\hat{R}_i) &= E\left(\left(\hat{R}_i - R_i\right)^2 \mid D_I\right) \\ &= E\left(\left(\hat{C}_{iI} - C_{iI}\right)^2 \mid D_I\right) \end{aligned}$$

Zur weiteren Berechnung des MSE benutzen wir den für beliebige Skalare a gültigen Verschiebungssatz

$$E\left(X - a\right)^2 = Var(X) + \left(E(X) - a\right)^2$$

bzw. dessen Verallgemeinerung

$$E\left((X-h(Y))^2 \mid Y\right) = Var\left(X \mid Y\right) + \left(E(X \mid Y) - h(Y)\right)^2 \tag{5.1}$$

auf bedingte Erwartungswerte [Mac02, S. 230].

Der Verschiebungssatz (5.1) liefert uns die Zerlegung des MSE in seine Komponenten Zufallsfehler und Schätzfehler

$$mse(\hat{R}_i) \quad = \quad Var\left(C_{iI} \mid D_I\right) + \left(\hat{C}_{iI} - E\left(C_{iI} \mid D_I\right)\right)^2.$$

Aufgrund der Unabhängigkeit der AJ gilt

$$E\left(R_i \mid D_I\right) = E\left(R_i \mid C_{i1}, \ldots, C_{i,I-i+1}\right)$$

und

$$Var\left(R_i \mid D_I\right) = Var\left(R_i \mid C_{i1}, \ldots, C_{i,I-i+1}\right).$$

Damit gilt für den MSE

$$\begin{aligned} mse(\hat{R}_i) &= Var\left(C_{iI} \mid A_i\right) + \left(\hat{C}_{iI} - E\left(C_{iI} \mid A_i\right)\right)^2 \\ &= Var\left(C_{iI} \mid A_i\right) + \left(C_{i,I-i+1} \cdot \hat{f}_{I-i+1} \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{I-1} - C_{i,I-i+1} \cdot f_{I-i+1} \cdot \ldots \cdot f_{I-1}\right)^2 \\ &= Var\left(C_{iI} \mid A_i\right) + C_{i,I-i+1}^2 \left(\hat{f}_{I-i+1} \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{I-1} - f_{I-i+1} \cdot \ldots \cdot f_{I-1}\right)^2. \end{aligned}$$

Die Abwicklungsfaktoren $f_{I-i+1}, \ldots, f_{I-1}$ sind im Allgemeinen unbekannt und müssen daher geschätzt werden. Diese können wir jedoch nicht einfach durch ihre Schätzer $\hat{f}_{I-i+1}, \ldots, \hat{f}_{I-1}$ ersetzen, da hierbei für den Schätzfehler 0 herauskäme, obwohl der Term fast immer von Null verschieden ist [Mac02, S. 253]. Daher müssen wir davon abgehen, die beobachteten Daten D_I als gegeben zu betrachten, und nehmen stattdessen nur eine Zeile A_i als bekannt an. Damit können wir den mittleren quadratischen Fehler problemlos berechnen:

$$\begin{aligned} mse(\hat{R}_i) &= E\left(\left(\hat{C}_{iI} - C_{iI}\right)^2 \mid A_i\right) \\ &= E\left(\left(\hat{C}_{iI} - E\left(\hat{C}_{iI} \mid A_i\right) + E\left(C_{iI} \mid A_i\right) - C_{iI}\right)^2 \mid A_i\right) \\ &= Var\left(\hat{C}_{iI} \mid A_i\right) + Var\left(C_{iI} \mid A_i\right) \\ &= \text{Schätzfehler} + \text{Zufallsfehler} \end{aligned}$$

Für weitere Informationen verweisen wir auf Mack [Mac02, S. 249-254].

Anwendung auf das Messproblem

Mit der Verallgemeinerung des Law of Propagation of Uncertainty (2.5) erhalten wir

$$E\left[(g(\widehat{X})-g(\widehat{Y}))^2 \mid A_i\right] \approx \sum_{j=I-i+1}^{I-1}\left(\frac{\partial g}{\partial x_j}\right)^2(\vartheta)\cdot E\left[(\widehat{X}_j-\widehat{Y}_j)^2 \mid A_i\right] + 2\sum_{j=I-i+1}^{I-1}\sum_{k=j+1}^{I-1}\frac{\partial g}{\partial x_j}(\vartheta)\frac{\partial g}{\partial x_k}(\vartheta)\cdot E\left[(\widehat{X}_j-\widehat{Y}_j)(\widehat{X}_k-\widehat{Y}_k) \mid A_i\right].$$

Wir schreiben die Summe aus und erhalten

$$\begin{aligned}
&E\left[(g(\widehat{X})-g(\widehat{Y}))^2 \mid A_i\right] = \left(\frac{\partial g}{\partial x_{I-i+1}}\right)^2(f_{I-i+1},\dots,f_{I-1})\cdot E\left[(\hat{f}^I_{I-i+1}-F_{i,I-i+1})^2 \mid A_i\right]\\
&+\dots+\left(\frac{\partial g}{\partial x_{I-1}}\right)^2(f_{I-i+1},\dots,f_{I-1})\cdot E\left[(\hat{f}^I_{I-1}-\hat{f}^{I+1}_{I-1})^2 \mid A_i\right]\\
&+2\Bigg[\left(\frac{\partial g}{\partial x_{I-i+1}}\right)(f_{I-i+1},\dots,f_{I-1})\left(\frac{\partial g}{\partial x_{I-i+2}}\right)(f_{I-i+1},\dots,f_{I-1})\\
&\cdot E\left[(\hat{f}^I_{I-i+1}-F_{i,I-i+1})(\hat{f}^I_{I-i+2}-\hat{f}^{I+1}_{I-i+2}) \mid A_i\right]\\
&+\left(\frac{\partial g}{\partial x_{I-i+2}}\right)(f_{I-i+1},\dots,f_{I-1})\left(\frac{\partial g}{\partial x_{I-i+3}}\right)(f_{I-i+1},\dots,f_{I-1})\\
&\cdot E\left[(\hat{f}^I_{I-i+2}-\hat{f}^{I+1}_{I-i+2})(\hat{f}^I_{I-i+3}-\hat{f}^{I+1}_{I-i+3}) \mid A_i\right]+\dots\Bigg]
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Bemerkung: Die Terme $\mathcal{O}(||...||^2)$ aus dem Beweis zu (2.5) (Verallgemeinerung des Law of Propagation of Uncertainty) können in unserem Fall vernachlässigt werden, da alle höheren Ableitungen der Funktion $g = 0$ sind. Damit wird die Taylorapproximationsgüte nicht beeinträchtigt.

Im weiteren Verlauf analysieren wir die Formel (5.2) und zerlegen sie in ihre einzelnen Bestandteile. Um die Übersichtlichkeit zu wahren, führen wir die Berechnungen für jeden Bestandteil getrennt durch. Hierfür bedienen wir uns einer Reihe von Sätzen und Lemmata, um die Schritte zu erklären und zu belegen.

Satz 5.2.1 *Sei $A_i = \{C_{i1},\dots,C_{i,I-i+1}\}$. Weiter seien $k < j$ und $j,k > I-i+1$. Dann gilt*

$$E\left[(\hat{f}^I_k-F_{ik})(\hat{f}^I_j-\hat{f}^{I+1}_j) \mid A_i\right] = 0. \tag{5.3}$$

Beweis. Es gilt $A_i \subset B_k^I \subset B_j^I$. Mit (3.2)-(3.7) sowie durch wiederholte Anwendung von (2.7) gilt dann:

$$
\begin{aligned}
E\left[(\hat{f}_k^I - F_{ik})(\hat{f}_j^I - \hat{f}_j^{I+1}) \mid A_i\right] = \\
&= E\left[\hat{f}_k^I \hat{f}_j^I - F_{ik}\hat{f}_j^I - \hat{f}_k^I \hat{f}_j^{I+1} + F_{ik}\hat{f}_j^{I+1} \mid A_i\right] \\
&= E\left[\hat{f}_k^I \hat{f}_j^I \mid A_i\right] - E\left[F_{ik}\hat{f}_j^I \mid A_i\right] - E\left[\hat{f}_k^I \hat{f}_j^{I+1} \mid A_i\right] + E\left[F_{ik}\hat{f}_j^{I+1} \mid A_i\right] \\
&\overset{(2.7)}{=} E\left[E\left[\hat{f}_k^I \hat{f}_j^I \mid B_j^I\right] \mid A_i\right] - \ldots + E\left[E\left[F_{ik}\hat{f}_j^{I+1} \mid B_j^{I+1}\right] \mid A_i\right] \\
&\overset{(3.2)-(3.7)}{=} E\left[\hat{f}_k^I f_j \mid A_i\right] - E\left[F_{ik} f_j \mid A_i\right] - E\left[\hat{f}_k^I f_j \mid A_i\right] + E\left[F_{ik} f_j \mid A_i\right] \\
&\overset{(2.7)}{=} f_j \cdot E\left[E\left[\hat{f}_k \mid B_k^I\right] \mid A_i\right] - \ldots + f_j \cdot E\left[E\left[F_{ik} \mid B_k^I\right] \mid A_i\right] \\
&\overset{(3.2)-(3.7)}{=} f_j \cdot E\left[f_k \mid A_i\right] - f_j \cdot E\left[f_k \mid A_i\right] - f_j \cdot E\left[f_k \mid A_i\right] + f_j \cdot E\left[f_k \mid A_i\right] \\
&= f_j f_k - f_j f_k - f_j f_k + f_j f_k \\
&= 0
\end{aligned}
$$

□

Satz 5.2.2 *Sei $A_i = \{C_{i1}, \ldots, C_{i,I-i+1}\}$. Weiter seien $k < j$ und $j, k > I - i + 1$. Dann gilt*

$$E\left[(\hat{f}_k^I - \hat{f}_k^{I+1})(\hat{f}_j^I - \hat{f}_j^{I+1}) \mid A_i\right] = 0. \tag{5.4}$$

Beweis. Wir beweisen den Satz mit den gleichen Methoden aus dem Beweis von Satz 5.2.1.

$$
\begin{aligned}
E\left[(\hat{f}_k^I - \hat{f}_k^{I+1})(\hat{f}_j^I - \hat{f}_j^{I+1}) \mid A_i\right] = \\
&= E\left[\hat{f}_k^I \hat{f}_j^I - \hat{f}_k^{I+1}\hat{f}_j^I - \hat{f}_k^I \hat{f}_j^{I+1} + \hat{f}_k^{I+1}\hat{f}_j^{I+1} \mid A_i\right] \\
&= E\left[\hat{f}_k^I \hat{f}_j^I \mid A_i\right] - E\left[\hat{f}_k^{I+1}\hat{f}_j^I \mid A_i\right] - E\left[\hat{f}_k^I \hat{f}_j^{I+1} \mid A_i\right] + E\left[\hat{f}_k^{I+1}\hat{f}_j^{I+1} \mid A_i\right] \\
&\overset{(2.7)}{=} E\left[E\left[\hat{f}_k^I \hat{f}_j^I \mid B_j^I\right] \mid A_i\right] - \ldots + E\left[E\left[\hat{f}_k^{I+1}\hat{f}_j^{I+1} \mid B_j^{I+1}\right] \mid A_i\right] \\
&\overset{(3.2)-(3.7)}{=} E\left[\hat{f}_k^I f_j \mid A_i\right] - E\left[\hat{f}_k^{I+1} f_j \mid A_i\right] - E\left[\hat{f}_k^I f_j \mid A_i\right] + E\left[\hat{f}_k^{I+1} f_j \mid A_i\right] \\
&= \ldots \\
&= 0
\end{aligned}
$$

□

Mit (5.3) und (5.4) vereinfacht sich (5.2) zu

$$E[(g(\widehat{X}) - g(\widehat{Y}))^2 \mid A_i] = \left(C_{i,I-i+1} \cdot f^I_{I-i+2} \cdot \ldots \cdot f^I_{I-1}\right)^2 \cdot E\left[(\hat{f}^I_{I-i+1} - F_{i,I-i+1})^2 \mid A_i\right] + \ldots + \left(C_{i,I-i+1} \cdot f^I_{I-i+1} \cdot \ldots \cdot f^I_{I-2}\right)^2 \cdot E\left[(\hat{f}^I_{I-1} - \hat{f}^{I+1}_{I-1})^2 \mid A_i\right].$$

Für das nachfolgende Lemma benötigen wir zunächst folgenden Satz.

Satz 5.2.3 *Sei* $A_i = \{C_{i1}, \ldots, C_{i,I-i+1}\}$ *und* $j > I - i + 1$. *Dann gilt mit den Annahmen* $(CL1)$ *und* $(CL2)$*:*

$$E\left[\left(\hat{f}^I_j - f_j\right)(f_j - F_{ij}) \mid A_i\right] = 0 \tag{5.5}$$

Beweis. Aus der Unabhängigkeit der AJ folgt:

$$\begin{aligned} E\left[\left(\hat{f}^I_j - f_j\right)(f_j - F_{ij}) \mid A_i\right] &= E\left[\hat{f}^I_j f_j - \hat{f}^I_j F_{ij} - f_j^2 + f_j F_{ij} \mid A_i\right] \\ &= E\left[\hat{f}^I_j f_j \mid A_i\right] - E\left[\hat{f}^I_j F_{ij} \mid A_i\right] - E\left[f_j^2 \mid A_i\right] + E\left[f_j F_{ij} \mid A_i\right] \\ &= f_j E\left[\hat{f}^I_j\right] - E\left[\hat{f}^I_j\right] E\left[F_{ij}\right] - f_j^2 + f_j E\left[F_{ij}\right] \\ &= f_j^2 - f_j^2 - f_j^2 + f_j^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Lemma 5.2.4 *Mit* $A_i = \{C_{i1}, \ldots, C_{i,I-i+1}\}$ *und* $j > I - i + 1$ *gilt:*

(i)

$$E\left[\left(\hat{f}^I_j - F_{ij}\right)^2 \mid A_i\right] = Var\left[\hat{f}^I_j \mid A_i\right] + Var\left[\frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}} \mid C_{ij}\right] \tag{5.6}$$

(ii)

$$Var\left[\frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}} \mid C_{ij}\right] = \frac{1}{C_{ij}} \cdot \sigma_j^2 \tag{5.7}$$

(iii)

$$Var\left[\hat{f}_j \mid A_i\right] = \sigma_j^2 \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^{I-j+1} C_{ij}} \tag{5.8}$$

Beweis.

(i)

$$\begin{aligned}
E\left[(\hat{f}_j^I - F_{ij})^2 \mid A_i\right] &= E\left[\left(\hat{f}_j^I - f_j + f_j - F_{ij}\right)^2 \mid A_i\right] \\
&= E\left[\left(\hat{f}_j^I - f_j\right)^2 + 2\left(\hat{f}_j^I - f_j\right)(f_j - F_{ij}) + (f_j - F_{ij})^2 \mid A_i\right] \\
&\overset{(5.5)}{=} E\left[\left(\hat{f}_j^I - f_j\right)^2 + (f_j - F_{ij})^2 \mid A_i\right] \\
&= E\left[\left(\hat{f}_j^I - f_j\right)^2 \mid A_i\right] + E\left[(f_j - F_{ij})^2 \mid A_i\right] \\
&= Var\left[\hat{f}_j^I \mid A_i\right] + Var\left[F_{ij} \mid A_i\right] \\
&\overset{(\text{CL1})}{=} Var\left[\hat{f}_j^I \mid A_i\right] + Var\left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}} \mid C_{ij}\right)
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
Var\left[\frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}} \mid C_{ij}\right] &= \frac{1}{C_{ij}^2} \cdot Var[C_{i,j+1} \mid C_{ij}] \\
&= \frac{1}{C_{ij}^2} \cdot \sigma_j^2 \cdot C_{ij} \\
&= \frac{1}{C_{ij}} \cdot \sigma_j^2
\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
Var\left[\hat{f}_j \mid A_i\right] &= Var\left[\frac{\sum_{i=1}^{I-j} C_{i,j+1}}{S_j^I} \mid A_i\right] \\
&= Var\left[\frac{\sum_{i=1}^{I-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{I-j} C_{ij}} \mid A_i\right] \\
&= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{I-j} C_{ij}\right)^2} \cdot \sum_{i=1}^{I-j} Var\left[C_{i,j+1} \mid A_i\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{I-j+1} C_{ij}\right)^2} \cdot \sigma_j^2 \cdot \sum_{i=1}^{I-j} C_{ij} \\
&= \sigma_j^2 \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^{I-j} C_{ij}}
\end{aligned}
$$

□

Lemma 5.2.5 *Seien* $S_j^I = \sum_{i=1}^{I-j} C_{ij}$ *und* $S_j^{I+1} = \sum_{i=1}^{I-j+1} C_{ij}$. *Weiter sei* $A_i = \{C_{i1}, \ldots, C_{i,I-i+1}\}$. *Dann gilt:*

(i)

$$\hat{f}_j^I - \hat{f}_j^{I+1} = \hat{f}_j^I \left(1 - \frac{S_j^I}{S_j^{I+1}}\right) - \frac{C_{I-j+2,j+1}}{S_j^{I+1}} \tag{5.9}$$

(ii)

$$E\left[\left(\hat{f}_j^I - \hat{f}_j^{I+1}\right)^2 \mid A_i\right] = \sigma_j^2 \cdot \left[\frac{C_{I-j+2,j}}{(S_j^{I+1})^2} \cdot \left(\frac{C_{I-j+2,j}}{S_j^I} + 1\right)\right] \tag{5.10}$$

Beweis.

(i)

$$
\begin{aligned}
\hat{f}_j^I - \hat{f}_j^{I+1} &= \frac{\sum_{i=1}^{I-j} C_{i,j+1}}{S_j^I} - \frac{\sum_{i=1}^{I-j+1} C_{i,j+1}}{S_j^{I+1}} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{I-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{I-j} C_{ij}} - \frac{\sum_{i=1}^{I-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{I-j+1} C_{ij}} - \frac{C_{I-j+1,j+1}}{\sum_{i=1}^{I-j+1} C_{ij}} \\
&= \sum_{i=1}^{I-j} C_{i,j+1} \cdot \left[\frac{1}{\sum_{i=1}^{I-j} C_{ij}} - \frac{1}{\sum_{i=1}^{I-j+1} C_{ij}}\right] - \frac{C_{I-j+1,j+1}}{\sum_{i=1}^{I-j+1} C_{ij}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \hat{f}_j^I - \hat{f}_j^I \cdot \frac{S_j^I}{S_j^{I+1}} - \frac{C_{I-j+1,j+1}}{\sum_{i=1}^{I-j+1} C_{ij}} \\
&= \hat{f}_j^I \cdot \left(1 - \frac{S_j^I}{S_j^{I+1}}\right) - \frac{C_{I-j+1,j+1}}{\sum_{i=1}^{I-j+1} C_{ij}}
\end{aligned}
$$

(ii)

$$
\begin{aligned}
E\left[\left(\hat{f}_j^I - \hat{f}_j^{I+1}\right)^2 \mid A_i\right] &= E\left[\left(\hat{f}_j^I - \hat{f}_j^{I+1} - (f_j - f_j)\right)^2 \mid A_i\right] \\
&= E\left[\left(\hat{f}_j^I - \hat{f}_j^{I+1} - \left(E\left[\hat{f}_j^I\right] - E\left[\hat{f}_j^{I+1}\right]\right)\right)^2 \mid A_i\right] \\
&= E\left[\left(\hat{f}_j^I - \hat{f}_j^{I+1} - E\left[\hat{f}_j^I - \hat{f}_j^{I+1}\right]\right)^2 \mid A_i\right] \\
&= Var\left[\hat{f}_j^I - \hat{f}_j^{I+1} \mid A_i\right] \\
&\overset{(5.9)}{=} Var\left[\hat{f}_j^I \left(1 - \frac{S_j^I}{S_j^{I+1}}\right) - \frac{C_{I-j+1,j+1}}{S_j^{I+1}} \mid A_i\right] \\
&= \left(1 - \frac{S_j^I}{S_j^{I+1}}\right)^2 \cdot Var\left[\hat{f}_j^I \mid A_i\right] + \frac{1}{\left(S_j^{I+1}\right)^2} \cdot Var\left[C_{I-j+1,j+1} \mid A_i\right] \\
&= \left(1 - \frac{S_j^I}{S_j^{I+1}}\right)^2 \cdot \sigma_j^2 \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^{I-j} C_{ij}} + \frac{1}{\left(S_j^{I+1}\right)^2} \cdot \sigma_j^2 \cdot C_{I-j+1,j} \\
&= \sigma_j^2 \cdot \left[\left(\frac{S_j^{I+1}}{S_j^{I+1}} - \frac{S_j^I}{S_j^{I+1}}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^{I-j} C_{ij}} + \frac{1}{\left(S_j^{I+1}\right)^2} \cdot C_{I-j+1,j}\right] \\
&= \sigma_j^2 \cdot \left[\left(\frac{C_{I-j+1,j}}{S_j^{I+1}}\right)^2 \cdot \frac{1}{S_j^I} + \frac{1}{\left(S_j^{I+1}\right)^2} \cdot C_{I-j+1,j}\right] \\
&= \sigma_j^2 \cdot \left[\frac{C_{I-j+1,j}}{\left(S_j^{I+1}\right)^2} \cdot \left(\frac{C_{I-j+1,j}}{S_j^I} + 1\right)\right]
\end{aligned}
$$

□

Mit den Lemmata 5.2.3 und 5.2.4 können wir (5.2) folgendermaßen umformen:

$$
\begin{aligned}
&E[(g(\widehat{X}) - g(\widehat{Y}))^2 \mid A_i] = \\
&= \left(C_{i,I-i+1} \cdot f^I_{I-i+2} \cdot \ldots \cdot f^I_{I-1}\right)^2 \cdot E\left[(\hat{f}^I_{I-i+1} - F_{i,I-i+1})^2 \mid A_i\right] \\
&\quad + \ldots + \left(C_{i,I-i+1} \cdot f^I_{I-i+1} \cdot \ldots \cdot f^I_{I-2}\right)^2 \cdot E\left[(\hat{f}^I_{I-1} - \hat{f}^{I+1}_{I-1})^2 \mid A_i\right] \\
&= \left(C_{i,I-i+1} \cdot f^I_{I-i+2} \cdot \ldots \cdot f^I_{I-1}\right)^2 \cdot \left(Var\left[\hat{f}^I_{I-i+1} \mid C_{I-i+1}\right] + Var\left[\frac{C_{i,I-i+2}}{C_{i,I-i+1}} \mid C_{i,I-i+1}\right]\right) \\
&\quad + \ldots + \left(C_{i,I-i+1} \cdot f^I_{I-i+1} \cdot \ldots \cdot f^I_{I-2}\right)^2 \cdot E\left[(\hat{f}^I_{I-1} - \hat{f}^{I+1}_{I-1})^2 \mid A_i\right] \\
&= \left(C_{i,I-i+1} \cdot f^I_{I-i+2} \cdot \ldots \cdot f^I_{I-1}\right)^2 \cdot \left(\sigma^2_{I-i+1} \cdot \frac{1}{S^I_{I-i+1}} + \sigma^2_{I-i+1} \cdot \frac{1}{C_{i,I-i+1}}\right) \\
&\quad + \ldots + \left(C_{i,I-i+1} \cdot f^I_{I-i+1} \cdot \ldots \cdot f^I_{I-2}\right)^2 \cdot E\left[(\hat{f}^I_{I-1} - \hat{f}^{I+1}_{I-1})^2 \mid A_i\right] \\
&= \left(C_{i,I-i+1} \cdot f^I_{I-i+2} \cdot \ldots \cdot f^I_{I-1}\right)^2 \cdot \left(\sigma^2_{I-i+1} \cdot \frac{1}{S^I_{I-i+1}} + \sigma^2_{I-i+1} \cdot \frac{1}{C_{i,I-i+1}}\right) \\
&\quad + \ldots + \left(C_{i,I-i+1} \cdot f^I_{I-i+1} \cdot \ldots \cdot f^I_{I-2}\right)^2 \cdot \sigma^2_{I-1} \cdot \left[\frac{C_{I-(I-1)+1,I-1}}{(S^{I+1}_{I-1})^2} \cdot \left(\frac{C_{I-(I-1)+1,I-1}}{S^I_{I-1}} + 1\right)\right] \\
&= \sigma^2_{I-i+1} \cdot f^2_{I-i+2} \cdot \ldots \cdot f^2_{I-1} \cdot C_{i,I-i+1}\left(1 + \frac{C_{i,I-i+1}}{S^I_{I-i+1}}\right) \\
&\quad + \ldots + \sigma^2_{I-1} \cdot f^2_{I-i+1} \cdot \ldots \cdot f^2_{I-2} \cdot C^2_{i,I-i+1} \cdot \frac{C_{2,I-1}}{(S^{I+1}_{I-1})^2}\left(1 + \frac{C_{2,I-1}}{S^I_{I-1}}\right) \\
&= \sigma^2_{I-i+1} \cdot f^2_{I-i+2} \cdot \ldots \cdot f^2_{I-1} \cdot C_{i,I-i+1}\left(1 + \frac{C_{i,I-i+1}}{S^I_{I-i+1}}\right) \\
&\quad + \sigma^2_{I-i+2} \cdot f^2_{I-i+1} \cdot \ldots \cdot f^2_{I-1} \cdot C^2_{i,I-i+1} \cdot \frac{C_{i-1,I-i+2}}{(S^{I+1}_{I-i+2})^2} \cdot \left(1 + \frac{C_{i-1,I-i+2}}{S^I_{I-i+2}}\right) \\
&\quad + \ldots + \sigma^2_{I-1} \cdot f^2_{I-i+1} \cdot \ldots \cdot f^2_{I-2} \cdot C^2_{i,I-i+1} \cdot \frac{C_{2,I-1}}{(S^{I+1}_{I-1})^2}\left(1 + \frac{C_{2,I-1}}{S^I_{I-1}}\right) \qquad (5.11)
\end{aligned}
$$

Im letzten Schritt schätzen wir die unbekannten, wahren Parameter f_j und σ^2_j durch $\hat{f}_j$ und $\hat{\sigma}^2_j$ (Plug-In Methode) und erhalten

$$
\begin{aligned}
&\widehat{E}[(g(\widehat{X}) - g(\widehat{Y}))^2 \mid A_i] = \\
&= \hat{\sigma}^2_{I-i+1} \cdot \hat{f}^2_{I-i+2} \cdot \ldots \cdot \hat{f}^2_{I-1} \cdot C_{i,I-i+1} \left(1 + \frac{C_{i,I-i+1}}{S^I_{I-i+1}}\right) \\
&\quad + \hat{\sigma}^2_{I-i+2} \cdot \hat{f}^2_{I-i+1} \cdot \ldots \cdot \hat{f}^2_{I-1} \cdot C^2_{i,I-i+1} \cdot \frac{C_{i-1,I-i+2}}{(S^{I+1}_{I-i+2})^2} \cdot \left(\frac{C_{i-1,I-i+2}}{S^I_{I-i+2}}\right) \\
&\quad + \ldots + \hat{\sigma}^2_{I-1} \cdot \hat{f}^2_{I-i+1} \cdot \ldots \cdot \hat{f}^2_{I-2} \cdot C^2_{i,I-i+1} \cdot \frac{C_{2,I-1}}{(S^{I+1}_{I-1})^2} \left(1 + \frac{C_{2,I-1}}{S^I_{I-1}}\right).
\end{aligned} \tag{5.12}
$$

Hinweis: Wir weichen hier von unserer ursprünglichen Notation mit $\hat{f}^I_j$ und $(\hat{\sigma}^2_j)^I$ ab, um die Vergleichbarkeit mit dem folgenden Ergebnis sicherzustellen.

5.3 Ergebnis

Wir schreiben die Summe in der Merz-Wüthrich-Formel (4.1) aus und erhalten

$$
\begin{aligned}
&\widehat{mse}_{C\hat{D}R_i(I+1)|D_I}(0) = \\
&= \hat{\sigma}^2_{I-i+1} \cdot \left(\prod_{k=I-i+2}^{I-1} \hat{f}^2_k\right) \cdot C_{i,I-i+1} \left(1 + \frac{C_{i,I-i+1}}{S^I_{I-i+1}}\right) \\
&\quad + \sum_{j=I-i+2}^{I-1} \hat{\sigma}^2_j \cdot \left(\prod_{k=I-i+1,k\neq j}^{I-1} \hat{f}^2_k\right) \cdot C^2_{i,I-i+1} \left(\frac{C_{I-j+1,j}}{(S^{I+1}_j)^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{C_{I-j+1,j}}{S^I_j}\right) \\
&= \hat{\sigma}^2_{I-i+1} \cdot \hat{f}^2_{I-i+2} \cdot \ldots \cdot \hat{f}^2_{I-1} \cdot C_{i,I-i+1} \left(1 + \frac{C_{i,I-i+1}}{S^I_{I-i+1}}\right) \\
&\quad + \hat{\sigma}^2_{I-i+2} \cdot \hat{f}^2_{I-i+1} \cdot \ldots \cdot \hat{f}^2_{I-1} \cdot C^2_{i,I-i+1} \cdot \frac{C_{i-1,I-i+2}}{(S^{I+1}_{I-i+2})^2} \left(1 + \frac{C_{i-1,I-i+2}}{S^I_{I-i+2}}\right) \\
&\quad + \ldots + \hat{\sigma}^2_{I-1} \cdot \hat{f}^2_{I-i+1} \cdot \ldots \cdot \hat{f}^2_{I-2} \cdot C^2_{i,I-i+1} \cdot \frac{C_{2,I-1}}{(S^{I+1}_{I-1})^2} \left(1 + \frac{C_{2,J-1}}{S^I_{I-1}}\right).
\end{aligned} \tag{5.13}
$$

Dieses Ergebnis stimmt mit (5.12) überein. Damit haben wir die Merz-Wüthrich-Formel über das Law of Propagation of Uncertainty hergeleitet und bewiesen.

6 Interpretation und Ausblick

Die vorliegende Arbeit bietet eine umfassende Herleitung und Beweisführung der Merz-Wüthrich-Formel unter Verwendung des Law of Propagation of Uncertainty für das Kalenderjahresrisiko eines AJ im Chain-Ladder-Modell. Basierend auf diesem Ergebnis lässt sich die Herleitung auf alle weiteren AJ, und damit die Gesamtreserve, erweitern. Dieses Ergebnis zeigt zusammenfassend, dass nicht nur die Merz-Wüthrich-Formel, sondern auch das Law of Propagation of Uncertainty zur Berechnung des einjährigen Kalenderjahresririskos herangezogen werden kann. Diese Erkenntnis eröffnet die Möglichkeit, das Law of Propagation of Uncertainty auch zur Berechnung des Kalenderjahresrisikos für andere Reservierungsmethoden einzusetzen, für die bisher keine zur Merz-Wüthrich-Formel vergleichbare Berechnungsmethode existiert. Somit legt diese Arbeit den Grundstein für einen verallgemeinerbaren Ansatz für die Abschätzung des Kalenderjahresrisikos für weitere Reservierungsmethoden neben dem Chain-Ladder-Modell.

Literaturverzeichnis

[Mac02] Thomas Mack. *Schadenversicherungsmathematik*. 2., überarbeitete Auflage. Bd. Heft 28. Schriftenreihe angewandte Versicherungsmathematik. Karlsruhe: VVW Verl. Versicherungswirtschaft, 2002. ISBN: 3-88487-957-X.

[MS05] David Meintrup und Stefan Schäffler. *Stochastik: Theorie und Anwendungen*. Statistik und ihre Anwendungen. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005. ISBN: 3-540-21676-6.

[Sch06] Stefan Schubert. "Quality Control in a Standardization Network for Diagnostic Assays: Uncertainty in Measurement". 2006.

[Ins08] Institute and Faculty of Actuaries, Hrsg. *Uncertainty in short-term claims development*. 2008. URL: https://www.actuaries.org.uk/system/files/documents/pdf/uncertainty-short-term-claims-development.pdf.

[MW08] Michael Merz und Mario V. Wüthrich. *Modelling the Claims Development Result for Solvency Purposes*. 2008.

[For17] Otto Forster. *Analysis 2*. 11., erweiterte Auflage. Lehrbuch. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2017. ISBN: 978-3-658-19410-9.

Abkürzungsverzeichnis

AJ Anfalljahr 16

BMI Body-Mass-Index 12

CDR Claims Development Result 24

FJ Folgejahr 16

MSE Mean Squared Error 24

Abbildungsverzeichnis

1 Schadenabwicklungsdreiecke zum Zeitpunkt $t = I$ und $t = I + 1$ aus Merz/Wüthrich 17
2 Schadenabwicklungsdreieck mit den Informationen B_j^I 20