Università degli Studi di Trieste

Dipartimento di Scienze Economiche, Aziendali, Matematiche e Statistiche
"Bruno De Finetti"

Tesi di Laurea Magistrale in
SCIENZE STATISTICHE E ATTUARIALI

Tariffazione Equa di Portafogli di Contratti di Assicurazione sulla Vita con Partecipazione agli Utili

Candidato:
Gabriele Omari

Relatrice:
Prof.ssa Anna Rita Bacinello

Anno accademico 2020–2021

Alla mia famiglia e a Vittoria

Indice

Elenco delle figure

Elenco delle tabelle

Introduzione

I contratti con partecipazione agli utili sono delle polizze di assicurazione sulla durata di vita che, oltre al beneficio in caso di decesso e all'opzione di riscatto della polizza, offrono all'assicurato una garanzia di minimo rendimento e un "Bonus", ovvero una quota degli utili finanziari realizzati dall'assicuratore anno per anno o a scadenza.

Queste polizze, le cui origini risalgono all'Ottocento nel Regno Unito, costituiscono una quota significativa del mercato delle assicurazioni sulla vita e negli anni Novanta del Novecento, in concomitanza con il calo dei tassi di interesse nei mercati finanziari, hanno causato importanti problemi di solvibilità per gli assicuratori, in quanto i rendimenti realizzati sul mercato non sono più stati sufficienti a coprire le garanzie di minimo promesse agli assicurati.

La struttura di questi prodotti e i problemi di solvibilità che essi hanno posto agli assicuratori hanno motivato nella letteratura scientifica un forte interesse nei loro confronti.

Esistono due approcci alla loro valutazione. Il primo approccio, detto finanziario, considera l'insieme di opzioni implicite nella struttura di questi prodotti e sfrutta la teoria dell'"Option Pricing" per fornire una loro valutazione in un mercato privo di arbitraggi e completo. Il secondo approccio, detto attuariale, analizza il rischio di "shortfall" a cui l'assicuratore è esposto tramite una probabilità realistica.

La loro analisi può essere inoltre condotta con riferimento a un portafoglio di assicurati omogenei oppure eterogenei tra loro in termini di caratteristiche contrattuali, quali il premio versato, la garanzia di minimo rendimento, l'aliquota di partecipazione agli utili e la durata del contratto.

La struttura di queste polizze richiede di modellare la garanzia di minimo rendimento e il meccanismo di distribuzione degli utili agli assicurati, cioè la parte finanziaria, la mortalità degli assicurati, ovvero la componente biometrica, e l'opzione di riscatto del contratto; inoltre può venire modellato anche il rischio di insolvenza a cui l'assicuratore è esposto.

Per quanto riguarda, infine, il mercato finanziario in cui l'assicuratore costruisce il portafoglio di attivi a copertura di queste polizze, un modello adottato è quello di Black, Scholes e Merton, ma vengono utilizzati anche modelli che assumono un processo stocastico per la struttura per scadenza dei tassi di interesse.

L'obiettivo di questa tesi è dunque studiare la tariffazione "fair"[1] di un portafoglio di polizze con partecipazione agli utili, seguendo l'impostazione del lavoro di Hieber et al. [15]. Precisamente, si modella la componente finanziaria di questi prodotti adottando l'approccio finanziario[2] e facendo riferimento a un portafoglio di contratti sia omogenei che eterogenei tra loro; inoltre si tiene in considerazione il rischio di insolvenza dell'assicuratore e nell'applicazione numerica si assume il modello di Black, Scholes e Merton per il mercato finanziario.

La tesi è strutturata come segue.

Nel Capitolo 1 si fornisce dapprima un inquadramento storico, con particolare attenzione ai problemi di solvibilità che questi prodotti hanno causato agli assicuratori a causa della diminuzione dei tassi di mercato, poi si descrivono le caratteristiche principali delle suddette polizze in stati quali Francia, Italia, Germania, Regno Unito e Danimarca, infine si produce una panoramica della letteratura scientifica relativa a questi prodotti.

Nel Capitolo 2 si formula dapprima il modello per il mercato finanziario all'interno del quale l'assicuratore opera, stabilendo delle ipotesi sui prezzi delle strategie di investimento che vi si possono attuare e dello strumento finanziario assunto come numerario. Si introduce poi un modello, detto "assicurativo", per la gestione di un portafoglio di contratti con partecipazione agli utili tra loro omogenei nei parametri contrattuali. Nel dettaglio, l'assicuratore stipula con l'assicurato un contratto di assicurazione sulla vita con partecipazione agli utili all'epoca 0: a fronte di ciò l'assicurato paga un premio, mentre l'assicuratore alloca un capitale che, insieme al premio incassato, investe nel mercato finanziario secondo una determinata strategia. Tale contratto prevede che a scadenza l'assicurato riceva l'ammontare di un

[1]In base alla quale i valori attesi attualizzati alla stipula del contratto dei premi che verranno incassati e dei benefici che verranno erogati devono coincidere, utilizzando un'opportuna misura di probabilità neutrale al rischio.

[2]Con la precisazione che le analisi di sensitività sulla probabilità di insolvenza dell'assicuratore sono effettuate sotto la misura realistica.

fondo il cui valore iniziale è pari al premio versato e che anno per anno viene capitalizzato in base al massimo tra un rendimento certo e una quota del rendimento realizzato dal portafoglio di attivi a copertura della polizza. Dall'altra parte l'assicuratore, alla scadenza, trattiene il valore residuale del portafoglio di attivi dopo aver pagato il beneficio all'assicurato. Viene contemplata la possibilità che l'assicuratore sia insolvente agli anniversari di polizza, nel qual caso liquida all'assicurato il valore corrente del portafoglio di attivi, mentre non trattiene nulla. Si dimostra che il valore attuale al tempo 0 del beneficio atteso dall'assicurato è funzione continua e crescente della garanzia di minimo rendimento, si ricavano alcune proprietà del valore del fondo dell'assicurato in assenza di garanzia di minimo e infine si prova che per ogni contratto esiste un'unica garanzia di minimo rendimento che lo rende equo.

Nel Capitolo 3 si riprende il modello finanziario considerato nel capitolo precedente, mentre si estende quello "assicurativo" a un portafoglio di assicurati tra loro eterogenei nei parametri contrattuali. Più precisamente i contratti in portafoglio possono essere tariffati in modo equo su base collettiva o individuale, cioè tenendo conto o meno del fatto che essi interagiscono tra loro, condividendo il portafoglio di attivi a copertura ed essendo esposti congiuntamente al rischio di insolvenza dell'assicuratore. Tale interazione a livello di portafoglio può avere un impatto sulla tariffazione di queste polizze: infatti se esse vengono tariffate su base collettiva alle stesse condizioni contrattuali che le rendono eque su base individuale, potrebbero non essere più eque. Si dimostra allora che, fissato un portafoglio di polizze, esiste almeno un nuovo contratto che può essere tariffato in modo equo alle medesime condizioni contrattuali sia se viene gestito individualmente sia se viene aggiunto al portafoglio pre-esistente.

Il Capitolo 4 è dedicato a un'applicazione numerica della teoria esposta nei Capitoli 2 e 3, in cui si adotta il modello di Black, Scholes e Merton per il mercato finanziario e si utilizza il linguaggio di programmazione R [25] per i risultati numerici.

Infine, nelle Appendici A, B e C si richiamano rispettivamente gli strumenti probabilistici e di calcolo stocastico utilizzati, si descrive il modello finanziario di Black, Scholes e Merton e si riportano le funzioni scritte nel linguaggio R.

Capitolo 1

Polizze con Partecipazione agli Utili

Un'assicurazione mista sulla durata di vita prevede che l'assicuratore, a fronte del pagamento di un premio, paghi all'assicurato un beneficio in caso di decesso prima della scadenza o di sopravvivenza alla stessa. Usualmente l'assicurato può anche riscattare il contratto, nel qual caso riceve il valore corrente del contratto al netto di una penalità di riscatto. Il premio viene determinato dall'assicuratore in base al principio di equità.

I contratti con partecipazione agli utili sono delle particolari assicurazioni miste che offrono una garanzia di minimo rendimento sul fondo dell'assicurato e una forma di condivisione con lo stesso degli utili finanziari realizzati dall'assicuratore. Tale meccanismo di distribuzione degli utili prevede che all'assicurato siano riconosciuti anno per anno un rendimento certo e a scadenza una parte del profitto complessivamente generato dal portafoglio di attivi oppure anno per anno il massimo tra un rendimento certo e una quota degli utili finanziari realizzati. Nel primo caso la garanzia di minimo è detta *point-to-point* ed è rilevante a scadenza: l'assicuratore può compensare eventuali risultati finanziari inferiori al rendimento certo in alcuni anni con risultati finanziari superiori in altri anni, purché a scadenza riconosca all'assicurato almeno il beneficio garantito dal rendimento certo; nel secondo caso invece la garanzia di minimo è detta *cliquet* ed è rilevante anno per anno: gli eventuali risultati finanziari retrocessi all'assicurato sono consolidati, ovvero incrementano il valore del fondo dell'assicurato.

Di seguito si fornisce prima un inquadramento storico, poi si illustrano le caratteristiche che questi prodotti assumono in stati quali Francia, Germania, Italia, Regno Unito e Danimarca, infine si produce una panoramica sulla relativa letteratura scientifica.

1.1 Inquadramento Storico

Le origini di questo prodotto risalgono all'Ottocento, quando nel Regno Unito gli assicuratori utilizzavano in fase di tariffazione un modello di sopravvivenza che sovrastimava la mortalità e pertanto generava profitti di natura biometrica che venivano condivisi con gli assicurati.

Storicamente, fintantoché i rendimenti di mercato erano sufficientemente elevati, gli assicuratori alla stipula del contratto fissavano le garanzie di minimo a un livello inferiore e nel corso della durata contrattuale livellavano gli utili finanziari distribuiti agli assicurati, accantonando la parte eccedente in opportune riserve di "Bonus"[3] oppure prelevando dalle stesse per integrare la parte mancante[4]: in questo modo, poiché le garanzie di minimo implicitamente offerte nelle polizze erano trascurabili, non richiedevano agli assicurati un premio aggiuntivo per esse, mentre ottenevano dagli utili trattenuti una remunerazione a fronte dell'emissione di tali garanzie. Inoltre essi investivano in strumenti azionari di breve durata con un profilo di rischio e rendimento maggiore rispetto agli strumenti a reddito fisso di lunga durata che, per la natura a lungo termine dell'assicurazione sulla vita, sono maggiormente funzionali a coprire le passività nei confronti degli assicurati e ridurre quindi l'esposizione al rischio di tasso di interesse. Infine, in base ai principi contabili vigenti valutavano le passività nei confronti degli assicurati al "book value", mentre contabilizzavano le attività a copertura delle stesse al valore di mercato.

Tra gli anni Novanta e Duemila la diminuzione dei tassi di interesse osservabili sul mercato e il crollo del mercato azionario hanno fatto sì che, da un lato, i rendimenti minimi garantiti dalle polizze iniziassero a essere maggiori di quelli offerti dagli strumenti finanziari detenuti in portafoglio, dall'altro gli assicuratori non trovassero più sul mercato strumenti finanziari, in cui reinvestire, che offrissero rendimenti sufficienti a coprire le garanzie di minimo promesse agli assicurati. Ecco quindi che molte compagnie assicurative hanno dovuto cessare la nuova produzione o dichiarare insolvenza: negli Stati

[3] Dette anche "Riserve di Valutazione degli Attivi".

[4] Si tratta del cosiddetto "Principio dell'Interesse Medio" descritto da Grosen e Jørgensen [11].

Uniti la “Executive Life” è fallita nel 1991 a causa dei cospicui investimenti in “Junk Bonds” e delle numerose richieste di riscatto da parte degli assicurati, come descritto in Døskeland e Nordahl [9]; in Francia la “Garantie Mutuelle des Fonctionnaires” è fallita nel 1993, come illustrato in Briys e De Varenne [7] e [8]; in Giappone la “Nissan Mutual Life” è fallita nel 1998 per via dei bassi rendimenti realizzati sul mercato a fronte delle elevate garanzie annue promesse agli assicurati, come descritto in Grosen e Jørgensen [11] e [12]; nel Regno Unito la “Equitable Life” ha cessato la nuova produzione nel 2002 a causa della vendita di prodotti pensionistici con opzione di conversione in rendita a un elevato tasso garantito, che gli assicurati hanno iniziato a esercitare di fronte al calo dei tassi di interesse, e della sottostima della longevità degli stessi, come illustrato in Ballotta e Haberman [4], Døskeland e Nordahl [9] e Jørgensen [21]; in Australia la “HIH Insurance” è fallita nel 2003 in quanto, come riportato in Jørgensen [21], non aveva stimato correttamente le proprie passività, e in Germania la “Mannheimer Leben” ha cessato la nuova produzione nello stesso anno, non avendo superato un test di solvibilità a valori di mercato, come spiegato in Døskeland e Nordahl [9] e Jørgensen [21].

Per ulteriori dettagli si rimanda a Bacinello et al. [3], Ballotta et al. [13], Briys e De Varenne [7], Grosen e Jørgensen [11], Holsboer [16], Jørgensen [21] e Kling et al. [18].

1.2 Inquadramento Geografico

Le polizze con partecipazione agli utili, che costituiscono una quota significativa del mercato delle assicurazioni sulla vita, assumono caratteristiche diverse a seconda dello stato in cui sono commercializzate.

In Francia questi contratti offrono una garanzia di minimo di tipo *point-to-point*, in base alla quale viene riconosciuto all'assicurato almeno l'85% del profitto complessivamente generato dal portafoglio di attivi. In simboli, indicati con P il premio versato, E il capitale allocato dall'assicuratore, g il rendimento minimo garantito, β l'aliquota di partecipazione al “Bonus” a scadenza, T la durata del contratto, $\{F(\omega,t)\}_{0\leq t\leq T}$ e $\{P(\omega,t)\}_{t=0,\dots,T}$ i processi stocastici che misurano rispettivamente il valore degli attivi a copertura e del fondo dell'assicurato, l'assicurato a scadenza T riceve

$$P(\omega,T)+\beta\max\left\{\frac{P}{P+E}F(\omega,T)-P(\omega,T),0\right\},$$

dove

$$\begin{cases} P(\omega, 0) = P \\ P(\omega, t) = P(\omega, t-1)e^{gT},\ t = 1, \ldots, T. \end{cases}$$

Si rimanda ai lavori di Briys e De Varenne [7] e [8] per maggiori dettagli.

In Germania per legge va offerta all'assicurato una garanzia di minimo di tipo *cliquet*[5]: in particolare il regolatore stabilisce un livello massimo della garanzia di minimo e un livello minimo, pari al 90%, della quota dei profitti sugli attivi, contabilizzati al "book value", da retrocedere all'assicurato. Poiché gli attivi a copertura sono contabilizzati a valore di mercato, il "book value" viene determinato come una quota[6] del corrispondente valore di mercato. In simboli, indicati con P il premio versato, g il rendimento garantito, α l'aliquota di partecipazione agli utili, γ il livello di restrizione nella valutazione degli attivi al "book value", T la durata del contratto, $\{F(\omega, t)\}_{0 \le t \le T}$ e $\{P(\omega, t)\}_{t=0,\ldots,T}$ i processi stocastici che misurano rispettivamente il valore di mercato degli attivi a copertura e del fondo dell'assicurato, e trascurando il pagamento di dividendi agli azionisti, si ha

$$\begin{cases} P(\omega, 0) = P \\ P(\omega, t) = P(\omega, t-1)(1 + \max\{g, \alpha\gamma(F(\omega, t) - F(\omega, t-1))\}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad t = 1, \ldots, T. \end{cases} \tag{1.1}$$

Gli assicuratori tedeschi usualmente riconoscono all'assicurato una garanzia di minimo di tipo "cliquet", accreditando anno per anno un rendimento certo più un extra-rendimento in funzione dell'andamento della riserva di "Bonus"[7], se in questo modo l'assicurato riceve un "Bonus" maggiore di quello stabilito per legge, altrimenti applicano il meccanismo descritto dall'equazione (1.1). Nel dettaglio, tale extra-rendimento viene interamente accreditato all'assicurato fintantoché la riserva di "Bonus" giace in un certo intervallo di valori, espressi in termini del fondo dell'assicurato, mentre viene ridotto, fino a essere azzerato, se la riserva di "Bonus" scende sotto l'estremo inferiore dell'intervallo oppure incrementato se essa supera l'estremo superiore dello stesso. In simboli, indicati con P il premio versato, g il rendimento certo, $z > g$ il rendimento target per cui $z - g$ rappresenta l'extra-rendimento, T la durata del contratto, $\{F(\omega, t)\}_{0 \le t \le T}$, $\{P(\omega, t)\}_{t=0,\ldots,T}$ e $\{BR(\omega, t)\}_{t=0,\ldots,T}$

[5] Si tratta del "MUST Case" descritto nel lavoro di Bauer et al. [6].

[6] Detta restrizione nella valutazione degli attivi e stabilita dal regolatore.

[7] Si tratta dell'"IS Case" descritto nei lavori di Bauer et al. [6] e Kling et al. [18].

i processi stocastici che misurano rispettivamente il valore di mercato degli attivi a copertura e i valori del fondo dell'assicurato e della riserva di "Bonus", a e b le quote della riserva di "Bonus" espressa in termini del valore del fondo dell'assicurato, e trascurando il pagamento di dividendi agli azionisti, si ha

$$\begin{cases} P(\omega, 0) = P \\ BR(\omega, t) = F(\omega, t) - P(\omega, t-1)(1+z),\ t = 1, \ldots, T. \end{cases}$$

Esprimendo poi direttamente il valore $\{P(\omega, t)\}_{t=0,\ldots,T}$ del fondo dell'assicurato in termini del valore di mercato $\{F(\omega, t)\}_{0\leq t\leq T}$ degli attivi, in base alla regola prima descritta, si ottiene

$$P(\omega, t) = \begin{cases} P(\omega, t-1)(1+g) & \text{se } F(\omega, t) < (1+g)(1+a)P(\omega, t-1), \\ \frac{F(\omega,t)}{1+a} & \text{se } (1+g)(1+a)P(\omega, t-1) \\ & \quad \leq F(\omega, t) < (1+z)(1+a)P(\omega, t-1), \\ P(\omega, t-1)(1+z) & \text{se } (1+z)(1+a)P(\omega, t-1) \\ & \quad \leq F(\omega, t) \leq (1+z)(1+b)P(\omega, t-1), \\ \frac{F(\omega,t)}{1+b} & \text{se } (1+z)(1+b)P(\omega, t-1) < F(\omega, t). \end{cases}$$

Per ulteriori informazioni si rimanda ai lavori di Bauer et al. [6] e Kling et al. [18].

In Italia questo prodotto assume il nome "Rivalutabile", in quanto alla stipula viene tariffato sulla base della somma assicurata, della tavola di mortalità e del tasso tecnico, analogamente a una polizza mista con premi e benefici prefissati, mentre a ogni anniversario di polizza i benefici (ed eventualmente i premi, se versati periodicamente) vengono rivalutati in funzione del rendimento osservato sul portafoglio di attivi a copertura. In particolare viene offerta una garanzia di minimo di tipo *cliquet*, in base alla quale all'assicurato viene retrocesso il massimo tra il tasso tecnico e una quota del rendimento degli attivi a copertura della polizza. In simboli, indicati con P il premio versato, T la durata del contratto, i il tasso tecnico, $\alpha(t)$ l'aliquota di partecipazione agli utili, $\{F(\omega, t)\}_{0\leq t\leq T}$ e $\{P(\omega, t)\}_{t=0,\ldots,T}$ i processi stocastici che misurano rispettivamente il valore del portafoglio di attivi a copertura e del fondo dell'assicurato, si ha

$$\begin{cases} P(\omega, 0) = P \\ P(\omega, t) = P(\omega, t-1)\left(1 + \max\left\{i, \alpha(t)\left(\frac{F(\omega,t)}{F(\omega,t-1} - 1\right)\right\}\right),\ t = 1, \ldots, T. \end{cases}$$

Il portafoglio di attivi a copertura di queste polizze viene gestito dalla compagnia separatamente dagli altri investimenti[8] e il suo rendimento sull'anno finanziario[9] precedente viene calcolato e certificato da speciali revisori. Si vedano a questo proposito i lavori di Bacinello [1] e [2].

Nel Regno Unito questa polizza assume il nome di "With Profits" e prevede una garanzia di minimo di tipo *cliquet*, implementata da un "Reversionary Bonus", più un "Terminal Bonus" a scadenza. In particolare il "Reversionary Bonus" si basa sul confronto tra un rendimento certo e un meccanismo di lisciamento di n rendimenti passati degli attivi a copertura della polizza[10], mentre il "Terminal Bonus" è costituito da una quota del profitto complessivamente generato dagli attivi[11]. In simboli, indicati con P il premio versato, E il capitale allocato dall'assicuratore, g il rendimento certo, α l'aliquota di partecipazione al "Reversionary Bonus", β l'aliquota di partecipazione al "Terminal Bonus", T la durata del contratto, $\{F(\omega,t)\}_{0\le t\le T}$, $\{P(\omega,t)\}_{t=0,\dots,T}$ e $\{RB(\omega,t)\}_{t=0,\dots,T}$ i processi stocastici che misurano rispettivamente il valore degli attivi a copertura, del fondo dell'assicurato e del "Reversionary Bonus" e $TB(\omega,T)$ il valore in T del "Terminal Bonus", l'assicurato riceve a scadenza T

$$P(\omega,T)+TB(\omega,T),$$

dove il valore del fondo dell'assicurato evolve come segue

$$\begin{cases} P(\omega,0)=P \\ P(\omega,t)=P(\omega,t-1)+RB(\omega,t),\ t=1,\dots,T. \end{cases}$$

Il "Reversionary Bonus" è dato per esempio da

$$RB(\omega,t)=P(\omega,t-1)\max\left\{g,\frac{\alpha}{\min\{n,t\}}\sum_{i=1}^{\min\{n,t\}}\left(\frac{F(\omega,t-i)}{F(\omega,t-1-i)}-1\right)\right\},$$

$$t=1,\dots,T,$$

[8] Si parla di "Gestione Separata".

[9] Che solitamente inizia al 1 Novembre e termina al 31 Ottobre.

[10] Per esempio può essere la media aritmetica o geometrica di tali rendimenti.

[11] Esso differisce dal "Bonus" riconosciuto in Francia a causa della presenza del "Reversionary Bonus".

mentre il "Terminal Bonus" è pari a

$$TB(\omega, T) = \beta \max\left\{\frac{P}{P+E}F(\omega, T) - P(\omega, T), 0\right\}. \qquad (1.2)$$

Una descrizione accurata di questo tipo di polizza si trova nei lavori di Ballotta et al. [13] e [5].

Infine in Danimarca queste polizze offrono una garanzia di minimo di tipo *cliquet* che prevede che l'assicurato riceva anno per anno il massimo tra un rendimento certo e una quota della riserva di "Bonus", espressa in termini del valore del fondo dell'assicurato, in eccedenza rispetto a un livello prefissato. In simboli, indicati con P il premio versato, g il rendimento certo, T la durata del contratto, α l'aliquota di partecipazione, $\{F(\omega, t)\}_{0 \leq t \leq T}$, $\{P(\omega, t)\}_{t=0,\ldots,T}$ e $\{BR(\omega, t)\}_{t=0,\ldots,T}$ i processi stocastici che misurano rispettivamente il valore degli attivi a copertura, del fondo dell'assicurato e della riserva di "Bonus" e γ il livello target della riserva di "Bonus", espressa in termini del valore del fondo dell'assicurato, si ha

$$\begin{cases} P(\omega, 0) = P \\ P(\omega, t) = P(\omega, t-1)\left(1 + \max\left\{g, \alpha\left(\frac{BR(\omega, t-1)}{P(\omega, t-1)} - \gamma\right)\right\}\right), \quad t = 1, \ldots, T, \end{cases}$$

dove

$$BR(\omega, t) = F(\omega, t) - P(\omega, t), \quad t = 0, \ldots, T.$$

Inoltre, l'ammontare a scadenza della riserva di "Bonus", qualora positivo, può essere riconosciuto all'assicurato. In tal caso l'assicuratore preleva annualmente dal fondo dell'assicurato una commissione (oppure trattiene nel proprio capitale una parte degli utili finanziari realizzati anno per anno, ma non distribuiti all'assicurato, che, altrimenti, confluirebbero nella riserva di "Bonus") a titolo di premio per la garanzia di minimo offerta. Si trovano maggiori dettagli in proposito nei lavori di Grosen e Jørgensen [11] e Hansen e Miltersen [14].

1.3 Panorama della Letteratura Scientifica

La struttura dei prodotti con partecipazione agli utili e i problemi di solvibilità a cui gli assicuratori sono stati esposti in concomitanza con il calo dei tassi di mercato hanno motivato il largo interesse per essi nella letteratura scientifica.

Per quanto riguarda la loro valutazione, esistono due approcci. Il primo[12] considera l'insieme di opzioni implicite nella struttura di questi prodotti e sfrutta la teoria dell'"Option Pricing" per fornire una loro valutazione in un mercato privo di arbitraggi e completo. Infatti la garanzia di minimo sul rendimento del portafoglio di attivi a copertura della polizza può essere interpretata come un'opzione europea *put cliquet* emessa dall'assicuratore con date di reset gli anniversari di polizza, prezzo di esercizio il rendimento certo e medesima scadenza del contratto, mentre il "Terminal Bonus" come un'opzione europea *call standard* emessa dall'assicuratore sul valore del portafoglio di attivi con medesima scadenza del contratto e prezzo di esercizio il valore a scadenza del fondo dell'assicurato; infine l'opzione di riscatto del contratto si può vedere come un'opzione americana *put standard* emessa dall'assicuratore sul fondo dell'assicurato con medesima scadenza del contratto e prezzo di esercizio il valore di riscatto. Tra i lavori che hanno adottato questo approccio si citano Bacinello [1] e [2], Ballotta et al. [13] e [5], Bauer et al. [6], Briys e de Varenne [7] e [8] e Grosen e Jørgensen [11] e [12]. Il secondo approccio[13] analizza il rischio di "shortfall" a cui l'assicuratore è esposto per mezzo di una probabilità realistica ed è stato adottato da Kling et al. [18].

In relazione al rischio di insolvenza dell'assicuratore, lavori quali Ballotta et al. [5], Briys e de Varenne [7] e [8], Grosen e Jørgensen [11] e [12] e Orozco-Garcia e Schmeiser [23] hanno ipotizzato che lo stesso, chiamato anche "azionista", abbia responsabilità limitata: in caso di insolvenza[14] gli assicurati ricevono il valore corrente del portafoglio di attivi in proporzione all'obbligazione assunta dall'assicuratore nei loro confronti, mentre quest'ultimo non integra tale deficit con il proprio capitale né trattiene nulla. Di conseguenza l'assicurato sopporta interamente il costo dell'insolvenza dell'assicuratore: ciò è interpretabile come se l'assicurato emettesse un'opzione americana *put standard* sul portafoglio di attivi con medesima scadenza del contratto e prezzo di esercizio il valore del fondo riproporzionato come detto sopra, detta "Default Put Option".

Inoltre l'analisi di questi contratti può essere condotta con riferimento a un portafoglio di assicurati omogenei oppure eterogenei tra loro in termini di caratteristiche contrattuali quali il premio versato, la garanzia di minimo rendimento, l'aliquota di partecipazione agli utili e la durata del contratto.

[12]Detto finanziario nel lavoro di Gatzert e Kling [10].

[13]Detto attuariale nel lavoro di Gatzert e Kling [10].

[14]Cioè quando il valore delle passività verso gli assicurati è maggiore di quello delle attività a copertura delle stesse.

L'ipotesi di omogeneità permette di riferire le analisi a un singolo assicurato come rappresentativo dell'intero portafoglio ed è stata adottata da lavori quali Bacinello [1] e [2], Ballotta et al. [13] e [5], Briys e de Varenne [7] e [8], Grosen e Jørgensen [11] e [12] e Miltersen e Persson [22]. L'ipotesi di eterogeneità è stata assunta da lavori quali Hansen e Miltersen [14], Hieber et al. [15] e Orozco-Garcia e Schmeiser [23], che hanno studiato l'impatto dell'interazione presente tra gli assicurati in portafoglio in termini di condivisione degli attivi a copertura e della riserva di "Bonus" ed esposizione al rischio di insolvenza dell'assicuratore sulla valutazione equa delle polizze.

Relativamente alla struttura di questo tipo di contratti, la componente principale che viene modellata in letteratura è quella finanziaria, data dalle garanzie di minimo e dal meccanismo di distribuzione degli utili all'assicurato. Oltre a questa, si può introdurre un modello per la mortalità degli assicurati, assumendo che il rischio di mortalità sia indipendente da quello finanziario e diversificabile e che l'assicuratore sia neutrale al rischio rispetto a esso: si vedano a questo proposito i lavori di Bacinello [1] e [2] e Hansen e Miltersen [14]. Infine viene modellata anche la facoltà di riscatto come un'opzione americana *put* sul fondo dell'assicurato: a ogni epoca la decisione se riscattare la polizza o meno da parte di un assicurato razionale si basa sul confronto tra il valore di riscatto e il valore del contratto, inclusivo della facoltà di riscattare in futuro[15]. Tra i lavori che hanno considerato questa opzione in letteratura si ricordano Bacinello [2], Bauer et al. [6], Grosen e Jørgensen [11] e Hieber et al. [15].

Infine, per quanto riguarda il mercato finanziario in cui l'assicuratore costruisce il portafoglio di attivi a copertura delle polizze emesse, Bacinello [1], Ballotta et al. [13] e [5], Grosen e Jørgensen [11] e [12] e Miltersen e Persson [22] hanno scelto il modello di Black, Scholes e Merton, con tassi di interesse costanti, mentre Briys e De Varenne [8], Hansen e Miltersen [14] e Hieber et al. [15] hanno scelto il modello di Vasicek e Briys e de Varenne [7] quello di Heath, Jarrow e Morton per descrivere l'evoluzione stocastica dei tassi di interesse, mantenendo il processo stocastico di moto browniano geometrico per gli attivi[16].

[15]In Hieber et al. [15] si parla di rischio di riscatto basato sull'intervento e legato all'ipotesi di tasso di interesse.

[16]Si rimanda ai testi di Lamberton e Lapeyre [20] e Shreve [26] per una trattazione dei modelli citati.

Capitolo 2

Portafoglio Omogeneo

In questo capitolo si introducono un modello per il mercato finanziario e uno, detto nel seguito "assicurativo", per la gestione di un portafoglio di polizze con partecipazione agli utili con le stesse caratteristiche contrattuali; si provano poi alcuni risultati notevoli.

2.1 Modello Finanziario

Si considera un mercato finanziario in cui sono scambiati uno strumento finanziario rischioso e uno privo di rischio: i relativi prezzi sono misurati dai processi stocastici $\{S(\omega,t)\}_{0\le t\le T}$ e $\{B(\omega,t)\}_{0\le t\le T}$. Tramite questi due strumenti è possibile costruire dei portafogli secondo determinate strategie di investimento, i cui prezzi possono essere quantificati da un processo stocastico $\{F(\omega,t)\}_{0\le t\le T}$.

Ai fini della valutazione di tali strategie, si considera uno spazio di probabilità $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ equipaggiato con una filtrazione $\{\mathcal{F}(t)\}_{0\le t\le T}$ tale che

$$\mathcal{F}(0)=\{\emptyset,\Omega\} \text{ e } \mathcal{F}(T)=\mathcal{A}.$$

Si fissa come numerario il titolo privo di rischio e si assume che esista almeno una misura $\mathbb{Q}$ martingala equivalente associata al numerario.

Si fanno inoltre le seguenti ipotesi di carattere finanziario.

Ipotesi 2.1.

1. *il processo stocastico $\{F(\omega,t)\}_{0\le t\le T}$ che misura il prezzo dei portafogli di attivi costruiti mediante strategie di investimento*

- *è tale che*
$$F(\omega, 0) = F_0 \in \mathbb{R} \ \mathbb{P}\text{-}q.c.$$
e, per ogni $0 \leq t \leq T$ *e* $\mathbb{P}$*-q.c.,* $F(\omega, t)$ *dipende con continuità da* F_0*;*
- *è adattato alla filtrazione* $\{\mathcal{F}(t)\}_{0 \leq t \leq T}$*;*
- *è tale che, fissati arbitrariamente* n *e* $0 < t_1 < \cdots < t_n < T$*, il vettore aleatorio*
$$(F(\omega, t_1), \ldots, F(\omega, t_n))^{\intercal}$$
ha densità di probabilità congiunta positiva su $(0, +\infty)^n$*;*

2. *il processo stocastico* $\{B(\omega, t)\}_{0 \leq t \leq T}$ *che misura il prezzo del numerario è adattato alla filtrazione* $\{\mathcal{F}(t)\}_{0 \leq t \leq T}$ *e soddisfa*
$$B(\omega, 0) = 1 \ \mathbb{P}\text{-}q.c.;$$

3. *il processo stocastico* $\left\{\frac{F(\omega,t)}{B(\omega,t)}\right\}_{0 \leq t \leq T}$ *del prezzo dei portafogli di attivi normalizzato mediante il numerario*

   - *è una martingala sotto* $\mathbb{Q}$*;*
   - *è tale che, per ogni* $0 \leq t \leq T$ *e per ogni intervallo chiuso e limitato* $I_0 \subset \mathbb{R}$*, esiste una funzione* $\Phi(\omega, t)$ $\mathbb{Q}$*-integrabile che soddisfa*
$$\sup_{F_0 \in I_0} \left| \frac{F(\omega, t)}{B(\omega, t)} \right| \leq \Phi(\omega, t) \ \mathbb{Q}\text{-}q.c..$$

2.2 Modello Assicurativo

Si introduce il modello per la gestione del portafoglio, assumendo che i contratti con partecipazione agli utili che lo compongono siano tra loro omogenei in quanto a caratteristiche contrattuali. Nel prosieguo si può quindi far riferimento a un unico contratto come rappresentativo del portafoglio. Si parla indifferentemente di assicuratore, o di azionisti, per riferirsi alla controparte contrattuale dell'(unico) assicurato.

2.2.1 Struttura del Contratto e Valore delle Passività

All'istante 0 di stipula del contratto l'assicurato versa un premio $P > 0$, mentre l'assicuratore alloca un capitale iniziale $E > 0$ che, insieme al premio incassato, investe nel mercato finanziario secondo una strategia il cui prezzo è descritto dal processo stocastico $\{F(\omega, t)\}_{0 \leq t \leq T}$: il valore iniziale del portafoglio di attivi è pari a

$$F(\omega, 0) = P + E = F_0 > 0,$$

mentre il corrispondente tasso di rendimento periodale sul generico intervallo di tempo $[s, t]$ è dato da

$$\frac{F(\omega, t)}{F(\omega, s)} - 1, \quad 0 \leq s < t \leq T.$$

Tale portafoglio è valutato al valore di mercato.

La polizza prevede che a scadenza l'assicurato riceva l'ammontare di un fondo il cui valore iniziale è dato dal premio versato e il cui rendimento annuo è dato dal massimo tra un rendimento certo e una quota del rendimento annuo realizzato dal portafoglio di attivi, se maggiore di 1, o dall'intero rendimento, altrimenti. Il contratto non contempla un beneficio in caso di decesso o un "Terminal Bonus" a scadenza né è riscattabile. Formalmente, indicati con P il premio versato, i il tasso (intensità) di rendimento certo, α l'aliquota di partecipazione da parte dell'assicurato al rendimento della strategia e T la durata del contratto, il valore del fondo dell'assicurato, $\{P(\omega, t)\}_{t=0,\ldots,T}$, è dato da

$$\begin{cases} P(\omega, 0) = P \\ P(\omega, t) = P(\omega, t-1) \max \left\{ e^i, \left(\frac{F(\omega,t)}{F(\omega,t-1)} \right)^{\alpha(\omega,t)} \right\}, \quad t = 1, \ldots, T, \end{cases}$$

dove

$$\alpha(\omega, t) = \begin{cases} \alpha \in [0, 1] & \text{se } F(\omega, t) > F(\omega, t-1) \\ 1 & \text{se } F(\omega, t) \leq F(\omega, t-1). \end{cases} \tag{2.1}$$

Si noti che, se il log-rendimento del portafoglio di attivi è positivo, ne viene retrocessa soltanto una quota, $\alpha \leq 1$, ovvero il log-rendimento riconosciuto all'assicurato è pari a

$$\alpha \ln \left\{ \frac{F(\omega, t)}{F(\omega, t-1)} \right\}, \quad t = 1, \ldots, T,$$

mentre, se tale log-rendimento è negativo, la partecipazione alle perdite è completa, salvo che in questo caso probabilmente scatta la garanzia di minimo a meno che non risulti

$$i < \ln\left\{\frac{F(\omega,t)}{F(\omega,t-1)}\right\} < 0, \quad t = 1,\dots,T.$$

Quindi anno per anno l'assicurato gode di una garanzia di minimo rendimento sul fondo, mentre il rendimento realizzato dal portafoglio di attivi, se retrocesso all'assicurato, è consolidato, ovvero incrementa il valore della prestazione verso l'assicurato.

Tale fondo è contabilizzato al "book value".

La seguente osservazione chiarisce la natura dell'opzione implicitamente offerta in questo tipo di polizza.

Osservazione 2.1 (Garanzia di Minimo di Tipo *Cliquet*)**.** Analizzando il log-rendimento annuo del fondo dell'assicurato

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{P(\omega,t)}{P(\omega,t-1)}\right) &= \max\left\{i, \alpha(\omega,t)\ln\left(\frac{F(\omega,t)}{F(\omega,t-1)}\right)\right\}\\ &= \alpha(\omega,t)\ln\left(\frac{F(\omega,t)}{F(\omega,t-1)}\right)\\ &\quad + \max\left\{i - \alpha(\omega,t)\ln\left(\frac{F(\omega,t)}{F(\omega,t-1)}\right), 0\right\},\ t = 1,\dots,T,\end{aligned}$$

si evidenzia la seguente scomposizione in

- una quota $\alpha(\omega,t)$ del log-rendimento annuo del portafoglio di attivi di riferimento $\ln\left(\frac{F(\omega,t)}{F(\omega,t-1)}\right)$;
- un'opzione europea *put standard* emessa dall'assicuratore sulla quota $\alpha(\omega,t)$ del log-rendimento annuo del portafoglio di attivi di riferimento $\ln\left(\frac{F(\omega,t)}{F(\omega,t-1)}\right)$, con scadenza t e prezzo di esercizio i.

Mediante un contratto con partecipazione agli utili l'assicuratore emette quindi un'opzione europea *put* di tipo *cliquet* sui rendimenti del portafoglio di attivi a copertura della polizza con scadenza T e prezzo di esercizio la garanzia di minimo i.

Si può dunque caratterizzare numericamente il contratto in questione mediante la 5-pla

$$m = (\alpha, i, P, E, T) \in [0,1] \times (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}) \times (0, +\infty)^2 \ \times \mathbb{N}^+.$$

Definizione 2.1 (Valore delle Passività)**.** *Il valore delle passività dell'assicuratore nei confronti dell'assicurato è pari al valore del fondo dello stesso,* $\{P(\omega,t)\}_{t=0,\ldots,T}$.

2.2.2 Valore delle Attività

In questa sezione si definisce il valore delle attività per l'assicuratore con riferimento al portafoglio di polizze con partecipazione agli utili omogenee tra loro.

Definizione 2.2 (Valore delle Attività)**.** *Il processo stocastico* $\{A(\omega,t)\}_{t=0,\ldots,T}$ *che misura il valore delle attività è definito in due passi:*

1. *dopo la capitalizzazione del rendimento conseguito nell'anno, ma prima del pagamento del beneficio a scadenza all'assicurato,*

$$A^-(\omega,t) = A(\omega,t-1)\frac{F(\omega,t)}{F(\omega,t-1)}, \quad t = 1,\ldots,T;$$

2. *dopo la capitalizzazione del rendimento conseguito nell'anno e il pagamento del beneficio a scadenza all'assicurato,*

$$A(\omega,t) = A^-(\omega,t) - P(\omega,T)\mathbb{1}_{\{T\}}(t), \quad t = 1,\ldots,T,$$

dove

$$A(\omega,0) = A^-(\omega,0) = F(\omega,0).$$

Osservazione 2.2 (Valore delle Attività e del Portafoglio di Attivi)**.** Dalla disuguaglianza

$$\begin{aligned} A(\omega,t) &= A^-(\omega,t) - P(\omega,T)\mathbb{1}_{\{T\}}(t) \\ &= A(\omega,t-1)\frac{F(\omega,t)}{F(\omega,t-1)} - P(\omega,T)\mathbb{1}_{\{T\}}(t) \\ &\le F(\omega,t),\ t = 1,\ldots,T, \end{aligned}$$

si osserva che il processo stocastico del valore delle attività, $\{A(\omega,t)\}_{t=0,\dots,T}$, differisce da quello del valore del portafoglio di attivi, $\{F(\omega,t)\}_{0\leq t\leq T}$, alla scadenza T del contratto, in cui viene pagato il beneficio all'assicurato:

$$\begin{cases} A(\omega,t) = A^-(\omega,t) = F(\omega,t), \quad t = 0,\dots,T-1 \\ A(\omega,T) < A^-(\omega,T) = F(\omega,T). \end{cases}$$

Ne consegue che il processo del valore delle attività normalizzato mediante il numerario, $\left\{\frac{A(\omega,t)}{B(\omega,t)}\right\}_{t=0,\dots,T}$, non è una martingala sotto $\mathbb{Q}$.

Alla scadenza T del contratto, l'assicuratore trattiene il valore residuale delle attività dopo aver pagato il beneficio all'assicurato,

$$A(\omega,T) = A^-(\omega,T) - P(\omega,T).$$

Poiché in tale ammontare sono confluite anno per anno le quote dei rendimenti realizzati dal portafoglio di attivi non distribuite all'assicurato, esso rappresenta una remunerazione per l'assicuratore a fronte dell'emissione della garanzia di minimo implicita nella polizza stipulata.

2.2.3 Rischio di Insolvenza

In questa sezione si introduce il rischio di insolvenza a cui l'assicuratore è esposto nel caso di un portafoglio di contratti tra loro omogenei.

Definizione 2.3. *L'assicuratore è insolvente se il valore delle attività dopo il risultato finanziario, ma prima del pagamento dell'eventuale beneficio all'assicurato, è minore o uguale al valore dell'obbligazione verso l'assicurato, cioè*

$$A^-(\omega,t) \leq P(\omega,t), \quad t = 1,\dots,T.$$

Definizione 2.4 (Istante di Insolvenza)**.** *L'istante di insolvenza è dato da*

$$\tau(\omega) = \inf\left\{t = 1,\dots,T \mid A^-(\omega,t) \leq P(\omega,t)\right\},$$

con la convenzione che

$$\tau(\omega) = +\infty \quad \text{se } \left\{t = 1,\dots,T \mid A^-(\omega,t) \leq P(\omega,t)\right\} = \emptyset.$$

Osservazione 2.3 (Istante di Insolvenza e Tempo d'Arresto)**.** $\tau(\omega)$ è un tempo d'arresto.

Ipotesi 2.2 (Responsabilità Limitata dell'Assicuratore)**.** *Si assume che l'assicuratore abbia responsabilità limitata, ovvero, in caso di insolvenza, liquidi all'assicurato il valore corrente del portafoglio di attivi e non trattenga nulla.*

2.2.4 Principio di Equità

Un contratto è tariffato secondo il principio di equità se soddisfa l'equazione

$$P = E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{P(\omega,T)}{B(\omega,T)}\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)>T\}}(\omega) + \frac{A^{-}(\omega,\tau(\omega))}{B(\omega,\tau(\omega))}\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)\leq T\}}(\omega)\right]. \tag{2.2}$$

E' possibile ricavare una formulazione alternativa, ma equivalente, della condizione di equità.

Teorema 2.1 (Formulazione Equivalente della Condizione di Equità)**.** *Un contratto è equo se e solo se*

$$E = E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{A^{-}(\omega,T) - P(\omega,T)}{B(\omega,T)}\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)>T\}}(\omega)\right]. \tag{2.3}$$

Dimostrazione. Poiché il processo stocastico $\left\{\frac{A^{-}(\omega,t)}{B(\omega,t)}\right\}_{t=0,\dots,T}$ è una martingala sotto $\mathbb{Q}$ e $\tau(\omega)$ è un tempo d'arresto, per il teorema di arresto opzionale A.7 si ha che il processo stocastico arrestato

$$\left\{\frac{A^{-}(\omega,\min\{t,\tau(\omega)\})}{B(\omega,\min\{t,\tau(\omega)\})}\right\}_{t=0,\dots,T}$$

è ancora una martingala sotto $\mathbb{Q}$. Pertanto, in virtù dell'equazione fondamentale di bilancio all'emissione del contratto, si può scrivere

$$\begin{aligned}
P + E &= A^{-}(\omega,0)\\
&= E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{A^{-}(\omega,\min\{T,\tau(\omega)\})}{B(\omega,\min\{T,\tau(\omega)\})}\right]\\
&= E^{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)>T\}}(\omega)\frac{A^{-}(\omega,T)}{B(\omega,T)} + \mathbb{1}_{\{\tau(\omega)\leq T\}}(\omega)\frac{A^{-}(\omega,\tau(\omega))}{B(\omega,\tau(\omega))}\right]\\
&= E^{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)>T\}}(\omega)\frac{P(\omega,T)}{B(\omega,T)} + \mathbb{1}_{\{\tau(\omega)\leq T\}}(\omega)\frac{A^{-}(\omega,\tau(\omega))}{B(\omega,\tau(\omega))}\right]\\
&+ E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{A^{-}(\omega,T) - P(\omega,T)}{B(\omega,T)}\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)>T\}}(\omega)\right].
\end{aligned}$$

Da qui si evince l'equivalenza tra le due condizioni di equità date, rispettivamente, dalle equazioni (2.2) e (2.3). □

2.3 Alcuni Risultati Notevoli

In questa sezione si enunciano e si dimostrano alcuni risultati notevoli per il valore del fondo dell'assicurato nel caso di un portafoglio omogeneo di contratti.

2.3.1 Proprietà del Valore del Fondo dell'Assicurato in Assenza di Garanzia di Minimo Rendimento

Il seguente teorema analizza le proprietà del valore del fondo dell'assicurato qualora non vi sia una garanzia di minimo rendimento: in questo caso l'assicurato non è protetto da andamenti negativi nel rendimento annuo del portafoglio di attivi. Per convenzione, si denota l'assenza di una garanzia di minimo rendimento con la seguente notazione:

$$i = -\infty.$$

In ciò che segue, si metterà esplicitamente in evidenza la dipendenza del valore del fondo dell'assicurato dal tasso minimo garantito.

Teorema 2.2 (Proprietà del Valore del Fondo dell'Assicurato)**.** *Le seguenti proprietà sono valide:*

1. *il valore del fondo dell'assicurato è minore o uguale al valore del puro investimento del premio $\mathbb{P}$-q.c., ovvero*

$$\lim_{i \to -\infty} P(\omega, t)(i) \leq P \frac{F(\omega, t)}{F(\omega, 0)} = P \prod_{j=1}^{t} \frac{F(\omega, j)}{F(\omega, j-1)}, \quad t = 1, \ldots, T;$$

   in particolare, si ha uguaglianza se e solo se l'assicurato partecipa integralmente al rendimento della strategia, ovvero $\alpha = 1$;

2. *il valore del fondo dell'assicurato normalizzato mediante il numerario è una supermartingala sotto $\mathbb{Q}$, cioè*

$$\lim_{i \to -\infty} \frac{P(\omega, s)(i)}{B(\omega, s)} \geq E^{\mathbb{Q}} \left[\lim_{i \to -\infty} \frac{P(\omega, t)(i)}{B(\omega, t)} \middle| \mathcal{F}(s) \right], \quad 0 \leq s < t \leq T;$$

   in particolare, esso è una martingala sotto $\mathbb{Q}$ se e solo se l'assicurato partecipa integralmente al rendimento della strategia, ovvero $\alpha = 1$.

Dimostrazione. Si osserva preliminarmente che $\mathbb{P}$-q.c.

$$\begin{aligned}\lim_{i\to-\infty} P(\omega,t)(i) &= \lim_{i\to-\infty} P\prod_{j=1}^{t}\max\left\{e^{i},\left(\frac{F(\omega,j)}{F(\omega,j-1)}\right)^{\alpha(\omega,j)}\right\}\\ &= P\prod_{j=1}^{t}\left(\frac{F(\omega,j)}{F(\omega,j-1)}\right)^{\alpha(\omega,j)},\quad t=1,\dots,T.\end{aligned}$$

1. Dall'equazione (2.1), che definisce l'aliquota di partecipazione agli utili, si ha $\mathbb{P}$-q.c.

$$\begin{aligned}\lim_{i\to-\infty} P(\omega,t)(i) &= P\prod_{j=1}^{t}\left(\frac{F(\omega,j)}{F(\omega,j-1)}\right)^{\alpha(\omega,j)}\\ &\le P\prod_{j=1}^{t}\frac{F(\omega,j)}{F(\omega,j-1)}\\ &= \frac{P}{P+E}F(\omega,t),\quad t=1,\dots,T,\end{aligned}$$

   da cui segue la tesi.

2. Posto

$$\lim_{i\to-\infty} P(\omega,t)(i) = P(\omega,t)(-\infty),\quad t=0,\dots,T,$$

   il processo stocastico $\left\{\frac{P(\omega,t)(-\infty)}{B(\omega,t)}\right\}_{t=0,\dots,T}$ è integrabile,

$$E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{P(\omega,t)(-\infty)}{B(\omega,t)}\right] \le E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{P}{P+E}\frac{F(\omega,t)}{B(\omega,t)}\right] < +\infty,$$

   poiché il processo stocastico $\left\{\frac{F(\omega,t)}{B(\omega,t)}\right\}_{0\le t\le T}$ è una martingala sotto $\mathbb{Q}$. Inoltre, essendo funzione dei due processi stocastici $\{F(\omega,t)\}_{0\le t\le T}$ e $\{B(\omega,t)\}_{0\le t\le T}$, che per le ipotesi finanziarie 2.1 sono adattati alla filtrazione $\{\mathcal{F}(t)\}_{0\le t\le T}$, è anch'esso adattato alla filtrazione. Pertanto si ha

$$
\begin{aligned}
&E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{P(\omega,t)(-\infty)}{B(\omega,t)}\,\middle|\,\mathcal{F}(s)\right]\\
&\quad=\frac{P(\omega,s)(-\infty)}{B(\omega,s)}E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{P(\omega,t)(-\infty)}{P(\omega,s)(-\infty)}\frac{B(\omega,s)}{B(\omega,t)}\,\middle|\,\mathcal{F}(s)\right]\\
&\quad=\frac{P(\omega,s)(-\infty)}{B(\omega,s)}E^{\mathbb{Q}}\left[\prod_{j=s+1}^{t}\left(\frac{F(\omega,j)}{F(\omega,j-1)}\right)^{\alpha(\omega,j)}\frac{B(\omega,s)}{B(\omega,t)}\,\middle|\,\mathcal{F}(s)\right],\\
&\qquad\qquad 0\leq s<t\leq T.
\end{aligned}
$$

Inoltre, dalla monotonia del valore atteso si deduce

$$
\begin{aligned}
&\frac{P(\omega,s)(-\infty)}{B(\omega,s)}E^{\mathbb{Q}}\left[\prod_{j=s+1}^{t}\left(\frac{F(\omega,j)}{F(\omega,j-1)}\right)^{\alpha(\omega,j)}\frac{B(\omega,s)}{B(\omega,t)}\,\middle|\,\mathcal{F}(s)\right]\\
&\qquad\leq\frac{P(\omega,s)(-\infty)}{B(\omega,s)}E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{F(\omega,t)}{F(\omega,s)}\frac{B(\omega,s)}{B(\omega,t)}\,\middle|\,\mathcal{F}(s)\right],\\
&\qquad\qquad 0\leq s<t\leq T.
\end{aligned}
$$

Infine, poiché il processo stocastico $\left\{\frac{F(\omega,t)}{B(\omega,t)}\right\}_{0\leq t\leq T}$ è una martingala sotto $\mathbb{Q}$, si ottiene

$$
\begin{aligned}
&\frac{P(\omega,s)(-\infty)}{B(\omega,s)}E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{F(\omega,t)}{F(\omega,s)}\frac{B(\omega,s)}{B(\omega,t)}\,\middle|\,\mathcal{F}(s)\right]=\frac{P(\omega,s)(-\infty)}{B(\omega,s)},\\
&\qquad\qquad 0\leq s<t\leq T.
\end{aligned}
$$

Così la dimostrazione è conclusa. □

2.3.2 Proprietà di Continuità e Crescenza del Valore Attuale Atteso del Beneficio per l'Assicurato

Nel teorema che segue si stabiliscono le proprietà di crescenza e continuità del valore attuale in 0 del beneficio atteso dall'assicurato rispetto alla garanzia di minimo rendimento. La prima proprietà è passibile di questa interpretazione:

maggiore è la garanzia di minimo rendimento, maggiore è il valore attuale in 0 del beneficio che l'assicurato si attende di ricevere. La seconda proprietà è di carattere tecnico.

Teorema 2.3 (Beneficio per l'Assicurato e Garanzia di Minimo Rendimento). *Il valore attuale atteso in* 0 *del beneficio per l'assicurato*

$$E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{P(\omega,T)(i)}{B(\omega,T)}\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)(i)>T\}}(\omega)+\frac{A^{-}(\omega,\tau(\omega)(i))}{B(\omega,\tau(\omega)(i))}\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)(i)\leq T\}}(\omega)\right]$$

è funzione crescente e continua della garanzia di minimo rendimento i.

Dimostrazione. Si precisa che nel seguito si dimostrano le proprietà di decrescenza e continuità della funzione

$$E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{A^{-}(\omega,T)-P(\omega,T)(i)}{B(\omega,t)}\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)(i)>T\}}(\omega)\right],$$

anziché quelle di crescenza e continuità della funzione

$$E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{P(\omega,T)(i)}{B(\omega,T)}\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)(i)>T\}}(\omega)+\frac{A^{-}(\omega,\tau(\omega)(i))}{B(\omega,\tau(\omega)(i))}\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)(i)\leq T\}}(\omega)\right].$$

Infatti, poiché il processo stocastico $\left\{\frac{A^{-}(\omega,t)}{B(\omega,t)}\right\}_{t=0,\dots,T}$ è una martingala sotto $\mathbb{Q}$ in base alle ipotesi finanziarie 2.1 e $\tau(\omega)$ è un tempo d'arresto, per il teorema di arresto opzionale A.7 il processo stocastico arrestato è ancora una martingala sotto $\mathbb{Q}$. Pertanto si ha

$$\begin{aligned}A^{-}(\omega,0)=&\,E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{A^{-}(\omega,T)-P(\omega,T)}{B(\omega,T)}\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)>T\}}(\omega)\right]\\&+E^{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)>T\}}(\omega)\frac{P(\omega,T)}{B(\omega,T)}+\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)\leq T\}}(\omega)\frac{A^{-}(\omega,\tau(\omega))}{B(\omega,\tau(\omega))}\right]\end{aligned}$$

dove $A^{-}(\omega,0)$ non dipende da i.

Decrescenza Fissati $-\infty<g<h$, bisogna provare che

$$\begin{aligned}&E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{A^{-}(\omega,T)-P(\omega,T)(g)}{B(\omega,t)}\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)(g)>T\}}(\omega)\right]\\&\qquad>E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{A^{-}(\omega,T)-P(\omega,T)(h)}{B(\omega,t)}\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)(h)>T\}}(\omega)\right].\end{aligned}$$

Si prova dapprima la non crescenza in i della funzione

$$E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{A^-(\omega,T)-P(\omega,T)(i)}{B(\omega,T)}\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)(i)>T\}}(\omega)\right]$$

o, in modo equivalente, la non negatività del valore atteso della differenza tra i valori della funzione in g e in h

$$E^{\mathbb{Q}}\Bigg[\frac{A^-(\omega,T)-P(\omega,T)(g)}{B(\omega,T)}\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)(g)>T\}}(\omega)- \\ -\frac{A^-(\omega,T)-P(\omega,T)(h)}{B(\omega,T)}\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)(h)>T\}}(\omega)\Bigg].$$

Il fatto che

$$\begin{aligned} P(\omega,T)(g) &= \prod_{t=1}^{T} P\max\left\{e^g,\left(\frac{F(\omega,t)}{F(\omega,t-1)}\right)^{\alpha(\omega,t)}\right\} \\ &\leq \prod_{t=1}^{T} P\max\left\{e^h,\left(\frac{F(\omega,t)}{F(\omega,t-1)}\right)^{\alpha(\omega,t)}\right\} \\ &= P(\omega,T)(h) \quad \mathbb{P}\text{-q.c.}, \end{aligned}$$

implica che le funzioni

$$\frac{A^-(\omega,T)-P(\omega,T)(i)}{B(\omega,T)}, \quad \tau(\omega)(i) \quad \text{e} \quad \mathbb{1}_{\{\tau(\omega)(i)>T\}}(\omega)$$

sono non crescenti in i. Pertanto si ha

$$\frac{A^-(\omega,T)-P(\omega,T)(g)}{B(\omega,T)}\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)(g)>T\}}(\omega) \\ \geq \frac{A^-(\omega,T)-P(\omega,T)(h)}{B(\omega,T)}\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)(h)>T\}}(\omega)$$

e, per la monotonia del valore atteso,

$$E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{A^-(\omega,T)-P(\omega,T)(g)}{B(\omega,T)}\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)(g)>T\}}(\omega)\right] \\ \geq E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{A^-(\omega,T)-P(\omega,T)(h)}{B(\omega,T)}\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)(h)>T\}}(\omega)\right].$$

Si prova ora la decrescenza della funzione in i o, equivalentemente, la positività del valore atteso della differenza tra la funzione calcolata in g e in h. Essendo valida la seguente decomposizione di tale valore atteso:

$$\begin{aligned}
&E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{A^{-}(\omega,T)-P(\omega,T)(g)}{B(\omega,T)}\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)(g)>T\}}(\omega)\right.\\
&\qquad\qquad\qquad\left.-\frac{A^{-}(\omega,T)-P(\omega,T)(h)}{B(\omega,T)}\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)(h)>T\}}(\omega)\right]\\
&=E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{P(\omega,T)(h)-P(\omega,T)(g)}{B(\omega,T)}\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)(h)>T\}}(\omega)\right]\\
&\qquad+E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{A^{-}(\omega,T)-P(\omega,T)(g)}{B(\omega,T)}\mathbb{1}_{\{(\tau(\omega)(g)>T)\wedge(\tau(\omega)(h)\leq T)\}}(\omega)\right],
\end{aligned}$$

affinché la tesi sia dimostrata, è sufficiente mostrare che, per esempio, il secondo addendo è positivo, in quanto il primo addendo è non negativo.

In particolare, poiché la funzione

$$\frac{A^{-}(\omega,T)-P(\omega,T)(g)}{B(\omega,T)}$$

è positiva sull'insieme

$$\{(\tau(\omega)(g)>T)\wedge(\tau(\omega)(h)\leq T)\}\supset\{(\tau(\omega)(g)>T)\wedge(\tau(\omega)(h)\leq 1)\},$$

è sufficiente dimostrare che

$$\begin{aligned}
&\mathbb{Q}((\tau(\omega)(g)>T)\wedge(\tau(\omega)(h)\leq 1))\\
&=\mathbb{Q}\left(\bigwedge_{t=1}^{T}(A^{-}(\omega,t)>P(\omega,t)(g))\wedge A^{-}(\omega,1)\leq P(\omega,1)(h)\right)\\
&=\prod_{t=2}^{T}\mathbb{Q}\left(A^{-}(\omega,t)>P(\omega,t)(g)\,\middle|\,\bigwedge_{s=1}^{t-1}(A^{-}(\omega,s)>P(\omega,s)(g))\wedge\right.\\
&\quad\left.\wedge\,(A^{-}(\omega,1)\leq P(\omega,1)(h))\right)\cdot\mathbb{Q}(P(\omega,1)(g)<A^{-}(\omega,1)\leq P(\omega,1)(h))>0.
\end{aligned}$$

Poiché, per $t = 1, \dots, T$, $A^{-}(\omega, t)$ coincide con $F(\omega, t)$,

$$\begin{aligned}\{F(\omega, t-1) > P(\omega, t-1)\} &\subset \left\{F(\omega, t) > P(\omega, t-1)\frac{F(\omega, t)}{F(\omega, t-1)}\right\} \\ &\subset \left\{F(\omega, t) > P(\omega, t-1)\left(\frac{F(\omega, t)}{F(\omega, t-1)}\right)^{\alpha(\omega, t)}\right\}.\end{aligned}$$

Pertanto risulta, per $t = 1$,

$$\mathbb{Q}(P(\omega, 1)(g) < A^{-}(\omega, 1) \leq P(\omega, 1)(h)) = \mathbb{Q}(Pe^{g} < A^{-}(\omega, 1) \leq Pe^{h})$$

mentre, per $t = 2, \dots, T$,

$$\begin{aligned}&\mathbb{Q}\left(A^{-}(\omega, t) > P(\omega, t)(g) \,\middle|\, A^{-}(\omega, t-1) > P(\omega, t-1)(g)\right) \\ &\quad = \mathbb{Q}\Bigg(A^{-}(\omega, t) > P(\omega, t-1)(g)e^{g} \wedge A^{-}(\omega, t) > \\ &\qquad > P(\omega, t-1)(g)\left(\frac{F(\omega, t)}{F(\omega, t-1)}\right)^{\alpha(\omega, t)} \Bigg| A^{-}(\omega, t-1) > P(\omega, t-1)(g)\Bigg) \\ &\quad = \mathbb{Q}\left(A^{-}(\omega, t) > P(\omega, t-1)(g)e^{g} \,\middle|\, A^{-}(\omega, t-1) > P(\omega, t-1)(g)\right).\end{aligned}$$

Di conseguenza si può affermare che

$$\begin{aligned}&\mathbb{Q}((\tau(\omega)(g) > T) \wedge (\tau(\omega)(h) \leq 1)) \\ &= \prod_{t=2}^{T} \mathbb{Q}\Bigg(A^{-}(\omega, t) > P(\omega, t-1)(g)e^{g} \Bigg| \bigwedge_{s=1}^{t-1}(A^{-}(\omega, s) > P(\omega, s-1)(g)e^{g}) \wedge \\ &\qquad \wedge (A^{-}(\omega, 1) \leq Pe^{h})\Bigg) \cdot \mathbb{Q}(Pe^{g} < A^{-}(\omega, 1) \leq Pe^{h}),\end{aligned}$$

dove

$$\mathbb{Q}(Pe^{g} < A^{-}(\omega, 1) \leq Pe^{h}) > 0$$

e

$$\mathbb{Q}\left(A^{-}(\omega,t) > P(\omega,t-1)(g)e^{g} \,\middle|\, \bigwedge_{s=1}^{t-1}(A^{-}(\omega,s) > P(\omega,s-1)(g)e^{g}) \wedge \right.$$
$$\left. \wedge\,(A^{-}(\omega,1) \leq Pe^{h})\right) > 0,\ t = 2,\ldots,T,$$

in quanto $\{A^{-}(\omega,t)\}_{t=1,\ldots,T}$ ha densità congiunta positiva su $(0,+\infty)$.

Continuità Fissata una qualunque successione $\{i_n\}_{n\geq 1} \uparrow i$, la continuità di $P(\omega,T)$ in i implica che $\mathbb{P}$-q.c.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{A^{-}(\omega,t) - P(\omega,T)(i_n)}{B(\omega,T)} = \frac{A^{-}(\omega,t) - P(\omega,T)(i)}{B(\omega,T)}$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{1}_{\{\tau(\omega)(i_n)>T\}}(\omega) = \mathbb{1}_{\{\tau(\omega)(i)>T\}}(\omega).$$

Inoltre, da quanto provato nel passo precedente, segue che la successione

$$\left\{\frac{A^{-}(\omega,T) - P(\omega,T)(i_n)}{B(\omega,T)}\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)(i_n)>T\}}(\omega)\right\}_{n\geq 1}$$

è decrescente. Infine, poiché, per ogni $n \geq 1$,

$$0 \leq \frac{A^{-}(\omega,T) - P(\omega,T)(i_n)}{B(\omega,T)}\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)(i_n)>T\}}(\omega) \leq \frac{A^{-}(\omega,T)}{B(\omega,T)},$$

dove $\left\{\frac{A^{-}(\omega,T)}{B(\omega,T)}\right\}$ è $\mathbb{Q}$-integrabile in quanto martingala, si può applicare il teorema della convergenza monotona A.4, provando così la continuità a destra in i di

$$E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{A^{-}(\omega,T) - P(\omega,T)(i)}{B(\omega,T)}\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)(i)>T\}}(\omega)\right].$$

Similmente, considerando una qualunque successione $\{i_n\}_{n\geq 1} \downarrow i$, si dimostra anche la continuità a sinistra in i e, di conseguenza, la continuità. $\square$

2.3.3 Esistenza e Unicità della Garanzia di Minimo Rendimento Equa

Il seguente teorema assicura che, per ogni contratto, esiste unica la garanzia di minimo rendimento equa i.

Teorema 2.4 (Esistenza e Unicità della Garanzia di Minimo Rendimento Equa)**.** *Per ogni* 4*-pla* (P, E, α, T) *esiste unico* i *tale che*

$$P = E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{P(\omega,T)(i)}{B(\omega,T)}\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)(i)>T\}}(\omega) + \frac{A^-(\omega,\tau(\omega)(i))}{B(\omega,\tau(\omega)(i))}\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)(i)\leq T\}}(\omega)\right].$$

Dimostrazione. Si osserva preliminarmente che $\mathbb{Q}$-q.c.

$$\begin{aligned} 0 \leq &\frac{P(\omega,T)(i)}{B(\omega,T)}\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)(i)>T\}}(\omega) + \frac{A^-(\omega,\tau(\omega)(i))}{B(\omega,\tau(\omega)(i))}\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)(i)\leq T\}}(\omega) \\ &\leq \sum_{t=1}^{T}\frac{A^-(\omega,t)}{B(\omega,t)}, \end{aligned}$$

dove $\frac{A^-(\omega,t)}{B(\omega,t)}$, $t = 1, \ldots, T$, per le ipotesi finanziarie 2.1, è $\mathbb{Q}$-integrabile in quanto martingala.

Si dimostra che, maggiore è la garanzia di minimo rendimento, più vantaggioso è il contratto per l'assicurato. Poiché, per $t = 1, \ldots, T$,

$$\lim_{i\to+\infty} P(\omega,t)(i) = \lim_{i\to+\infty} P\prod_{j=1}^{t}\max\left\{e^i, \left(\frac{F(\omega,j)}{F(\omega,j-1)}\right)^{\alpha(\omega,j)}\right\} = +\infty,$$

si ha

$$\lim_{i\to+\infty}\tau(\omega)(i) = \lim_{i\to+\infty}\inf\{t = 1,\ldots,T \,|\, A^-(\omega,t) \leq P(\omega,t)(i)\} = 1$$

e quindi

$$\begin{aligned} \lim_{i\to+\infty}&\left(\frac{P(\omega,T)(i)}{B(\omega,T)}\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)(i)>T\}}(\omega) + \frac{A^-(\omega,\tau(\omega)(i))}{B(\omega,\tau(\omega)(i))}\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)(i)\leq T\}}(\omega)\right) \\ &= \frac{A^-(\omega,1)}{B(\omega,1)}. \end{aligned}$$

Per il teorema della convergenza dominata A.5 e per il fatto che il valore della strategia normalizzato mediante il numerario, $\left\{\frac{F(\omega,t)}{B(\omega,t)}\right\}_{0\leq t\leq T}$, è una martingala sotto $\mathbb{Q}$, in base alle ipotesi finanziarie 2.1, si ottiene

$$\begin{aligned}\lim_{i\to+\infty} E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{P(\omega,T)(i)}{B(\omega,T)}\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)(i)>T\}}(\omega)+\frac{A^{-}(\omega,\tau(\omega)(i))}{B(\omega,\tau(\omega)(i))}\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)(i)\leq T\}}(\omega)\right] \\ = E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{A^{-}(\omega,1)}{B(\omega,1)}\right]=E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{F(\omega,1)}{B(\omega,1)}\right] \\ = P+E>P.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Si dimostra che, minore è la garanzia di minimo rendimento, più vantaggioso è il contratto per l'assicuratore. Poiché, in virtù delle proprietà del valore del fondo dell'assicurato in assenza di garanzia di minimo rendimento 2.2,

$$\begin{aligned}\lim_{i\to-\infty} P(\omega,t)(i) &= P\prod_{j=1}^{t}\left(\frac{F(\omega,j)}{F(\omega,j-1)}\right)^{\alpha(\omega,j)} \\ &\leq \frac{P}{P+E}F(\omega,t)=\frac{P}{P+E}A^{-}(\omega,t) \\ &< A^{-}(\omega,t), \quad t=1,\dots,T,\end{aligned}$$

si ha

$$\lim_{i\to-\infty}\tau(\omega)(i)=\lim_{i\to-\infty}\inf\{t=1,\dots,T\mid A^{-}(\omega,t)\leq P(\omega,t)(i)\}=+\infty.$$

Si può dunque sfruttare di nuovo il teorema della convergenza dominata A.5 e il fatto che il prezzo normalizzato mediante il numerario del portafoglio di attivi, $\left\{\frac{F(\omega,t)}{B(\omega,t)}\right\}_{0\leq t\leq T}$, è una martingala sotto $\mathbb{Q}$ per affermare che

$$\begin{aligned}\lim_{i\to-\infty} E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{P(\omega,T)(i)}{B(\omega,T)}\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)(i)>T\}}(\omega)+\frac{A^{-}(\omega,\tau(\omega))(i)}{B(\omega,\tau(\omega)(i))}\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)(i)\leq T\}}(\omega)\right] \\ = E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{P}{B(\omega,T)}\prod_{t=1}^{T}\left(\frac{F(\omega,t)}{F(\omega,t-1)}\right)^{\alpha(\omega,t)}\right] \\ \leq P.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Infine, poiché la funzione

$$E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{P(\omega,T)(i)}{B(\omega,T)}\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)(i)>T\}}(\omega)+\frac{A^{-}(\omega,\tau(\omega)(i))}{B(\omega,\tau(\omega)(i))}\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)(i)\leq T\}}(\omega)\right]$$

è crescente e continua in i per il teorema 2.3, grazie alle disuguaglianze (2.4) e (2.5) è possibile individuare un intervallo sul quale è applicabile il teorema di Bolzano sull'esistenza degli zeri, che garantisce l'esistenza e l'unicità della garanzia di minimo rendimento i equa, ovvero tale da soddisfare l'equazione (2.2). $\square$

Osservazione 2.4 (Interpretazione della Garanzia di Minimo Rendimento Equa)**.** Si può interpretare la garanzia di minimo rendimento equa i come il tasso che rende equivalente investire il premio P nello strumento privo di rischio oppure stipulare la polizza con partecipazione agli utili e minimo rendimento pari a i.

Capitolo 3

Portafoglio Eterogeneo

Questo capitolo estende i risultati teorici ricavati nel Capitolo 2, mantenendo invariato il modello finanziario e generalizzando quello "assicurativo" a un portafoglio di contratti con partecipazione agli utili tra loro eterogenei nei parametri contrattuali.

3.1 Modello Assicurativo

In questa sezione si estende il modello "assicurativo" delineato nel Capitolo 2, assumendo che in portafoglio ci siano K polizze con partecipazione agli utili, ciascuna delle quali caratterizzata dai propri parametri contrattuali, eventualmente diversi gli uni dagli altri.

3.1.1 Struttura dei K Contratti e Valore delle Passività

All'istante 0 di stipula dei contratti i K assicurati versano un premio $P^k > 0$, mentre l'assicuratore, a fronte di ciascuno dei contratti stipulati, alloca un capitale $E^k > 0$ che, insieme ai premi P^k incassati, investe nel mercato finanziario secondo una strategia il cui valore è misurato dal processo stocastico $\{F(\omega,t)\}_{0\leq t\leq T}$. Alla stipula del contratto il prezzo del portafoglio di attivi corrispondente è pari a

$$F(\omega,0) = P + E = \sum_{k=1}^{K}(P^k + E^k) = F_0 > 0,$$

mentre il relativo tasso di rendimento periodale sul generico intervallo $[s, t]$ è, come nel caso trattato nel capitolo precedente, pari a

$$\frac{F(\omega, t)}{F(\omega, s)} - 1, \quad 0 \leq s < t \leq T.$$

Anche qui ciascuna polizza prevede che a scadenza l'assicurato riceva l'ammontare di un fondo il cui valore iniziale è dato dal premio versato e il cui rendimento annuo è dato dal massimo tra un rendimento certo e una quota del rendimento realizzato dal portafoglio di attivi a copertura delle polizze, se maggiore di 1, o dall'intero rendimento, altrimenti. Formalmente, indicati con P^k il premio versato, i^k il tasso (intensità) di rendimento certo, α^k l'aliquota di partecipazione al rendimento del portafoglio di attivi e T^k la durata del contratto per l'assicurato k-esimo, $k = 1, \ldots, K$, il valore del fondo, $\{P^k(\omega, t)\}_{t=0,\ldots,T^k}$, è dato da

$$\begin{cases} P^k(\omega, 0) = P^k \\ P^k(\omega, t) = P^k(\omega, t-1) \max\left\{ e^{i^k}, \left(\frac{F(\omega,t)}{F(\omega,t-1)}\right)^{\alpha^k(\omega,t)} \right\}, \quad t = 1, \ldots, T^k, \end{cases}$$

dove

$$\alpha^k(\omega, t) = \begin{cases} \alpha^k \in [0, 1] & \text{se } F(\omega, t) > F(\omega, t-1) \\ 1 & \text{se } F(\omega, t) \leq F(\omega, t-1). \end{cases}$$

Come nel Capitolo 2, anno per anno ciascun assicurato gode di una garanzia di minimo rendimento sul fondo, mentre il rendimento realizzato dal portafoglio di attivi, se retrocesso all'assicurato, è consolidato, ovvero incrementa il valore della prestazione verso l'assicurato stesso.

Osservazione 3.1 (Garanzia di Minimo di Tipo *Cliquet*)**.** Continua a valere l'osservazione fatta nel Capitolo 2 secondo cui l'assicuratore, stipulando le K polizze con partecipazione agli utili, emette altrettante opzioni europee *put cliquet* sul rendimento del portafoglio di attivi con scadenze $T^1, \ldots, T^K$ e prezzi di esercizio $i^1, \ldots, i^K$.

Poiché i K assicurati in portafoglio possono avere durate contrattuali T^k, $k = 1, \ldots, K$, diverse, si pone

$$T = \max\{T^1, \ldots, T^K\}. \tag{3.1}$$

Si può dunque caratterizzare numericamente ciascuno dei K contratti mediante la 5-pla

$$m^k = (\alpha^k, i^k, P^k, E^k, T^k) \in [0,1] \times (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}) \times (0, +\infty)^2 \times \mathbb{N}^+.$$

Definizione 3.1 (Valore delle Passività)**.** *Il valore delle passività dell'assicuratore nei confronti della collettività di assicurati,* $\{P(\omega, t)\}_{t=0,\dots,T}$*, è pari alla somma dei valori dei fondi degli assicurati in portafoglio:*

$$P(\omega, t) = \sum_{k=1}^{K} P^k(\omega, t) \mathbb{1}_{\{s \leq T^k\}}(t), \quad t = 0, \dots, T.$$

3.1.2 Valore delle Attività

In questa sezione si estende a un portafoglio di assicurati tra loro eterogenei in quanto a caratteristiche contrattuali la definizione di valore delle attività dell'assicuratore.

Definizione 3.2 (Valore delle Attività)**.** *Il processo stocastico* $\{A(\omega, t)\}_{t=0,\dots,T}$ *che misura il valore delle attività per l'assicuratore è definito in due passi:*

1. *dopo la capitalizzazione del rendimento conseguito nell'anno, ma prima del pagamento del beneficio agli assicurati in scadenza di contratto,*

$$A^-(\omega, t) = A(\omega, t-1) \frac{F(\omega, t)}{F(\omega, t-1)}, \quad t = 1, \dots, T;$$

2. *dopo la capitalizzazione del rendimento conseguito nell'anno e il pagamento del beneficio agli assicurati in scadenza di contratto,*

$$A(\omega, t) = A^-(\omega, t) - \sum_{k=1}^{K} P^k(\omega, T^k) \mathbb{1}_{\{T^k\}}(t), \quad t = 1, \dots, T,$$

dove

$$A(\omega, 0) = A^-(\omega, 0) = F(\omega, 0).$$

Osservazione 3.2 (Valore delle Attività e del Portafoglio di Attivi)**.** Dalla disuguaglianza

$$\begin{aligned}A(\omega,t) &= A^-(\omega,t) - \sum_{k=1}^{K} P^k(\omega,T^k)\mathbb{1}_{\{T^k\}}(t)\\ &= A(\omega,t-1)\frac{F(\omega,t)}{F(\omega,t-1)} - \sum_{k=1}^{K} P^k(\omega,T^k)\mathbb{1}_{\{T^k\}}(t)\\ &\leq F(\omega,t), \quad t=1,\dots,T,\end{aligned}$$

si osserva che il processo stocastico del valore delle attività, $\{A(\omega,t)\}_{t=0,\dots,T}$, differisce da quello del valore del portafoglio di attivi, $\{F(\omega,t)\}_{0\leq t\leq T}$. In particolare i due processi stocastici coincidono fino a quando non vengono pagati benefici agli assicurati in scadenza di contratto:

$$\begin{cases} A(\omega,t) = A^-(\omega,t) = F(\omega,t) & t=0,\dots,\min\{T^1,\dots,T^K\}-1\\ A(\omega,t) < A^-(\omega,t) = F(\omega,t) & t=\min\{T^1,\dots,T^K\}\\ A(\omega,t) < A^-(\omega,t) < F(\omega,t) & t=\min\{T^1,\dots,T^K\}+1,\dots,T.\end{cases}$$

Ne consegue che il processo stocastico del valore delle attività normalizzato mediante il numerario, $\left\{\frac{A(\omega,t)}{B(\omega,t)}\right\}_{t=0,\dots,T}$, non è una martingala sotto $\mathbb{Q}$.

All'ultima scadenza T l'assicuratore trattiene il valore residuale delle attività dopo aver pagato i benefici agli assicurati:

$$A(\omega,T) = A^-(\omega,T) - \sum_{k=1}^{K} P^k(\omega,T^k)\mathbb{1}_{\{T^k\}}(T).$$

Poiché in tale ammontare sono confluite anno per anno le quote di rendimenti realizzati dal portafoglio di attivi non distribuite agli assicurati, esso è ancora una volta interpretabile come remunerazione per l'assicuratore a fronte dell'emissione della garanzia di minimo implicita nelle polizze stipulate.

3.1.3 Rischio di Insolvenza

In questa sezione si considera il rischio di insolvenza a cui l'assicuratore è esposto nel caso di un portafoglio di contratti tra loro eterogenei.

Definizione 3.3 (Insolvenza dell'Assicuratore)**.** *L'assicuratore è insolvente se il valore delle attività dopo il risultato degli investimenti, ma prima di eventuali pagamenti dei benefici agli assicurati in scadenza di contratto, è minore o uguale al valore totale delle obbligazioni nei confronti degli assicurati in portafoglio:*

$$A^{-}(\omega,t) \leq P(\omega,t), \quad t = 1,\dots,T.$$

Definizione 3.4 (Istante di Insolvenza)**.** *Al rischio di insolvenza si associa il relativo istante $\tau(\omega)$, definito da*

$$\tau(\omega) = \inf\left\{t = 1,\dots,T \mid A^{-}(\omega,t) \leq P(\omega,t)\right\},$$

con la convenzione che

$$\tau(\omega) = +\infty \quad se \ \left\{t = 1,\dots,T \mid A^{-}(\omega,t) \leq P(\omega,t)\right\} = \emptyset.$$

Proposizione 3.1 (Istante di Insolvenza e Tempo d'Arresto)**.** *Come nel caso di un portafoglio di contratti tra loro omogenei, $\tau(\omega)$ è un tempo d'arresto.*

Ipotesi 3.1 (Responsabilità Limitata dell'Assicuratore)**.** *Si assume che l'assicuratore abbia responsabilità limitata in caso di insolvenza, ovvero liquidi agli assicurati il valore delle attività dopo il risultato degli investimenti, ma prima di eventuali pagamenti dei benefici agli assicurati in scadenza di contratto, $A^{-}(\omega,\tau(\omega))$, in proporzione alla quota di obbligazione*

$$\frac{P^k(\omega,\tau(\omega))}{P(\omega,\tau(\omega))}$$

maturata nei loro confronti, mentre non trattenga nulla.

3.1.4 Principio di Equità

Nel caso di un portafoglio di polizze tra loro eterogenee si può formulare il principio di equità considerando ogni contratto separatamente dagli altri oppure considerando tutte le polizze congiuntamente.

Nel primo caso, per l'assicurato k-esimo, $k = 1,\dots,K$, si richiamano dal Capitolo 2 le seguenti quantità con una diversa notazione per non creare fraintendimenti con le definizioni date in questo capitolo: il prezzo del portafoglio di attivi a copertura della singola polizza, $\{F^{(k)}(\omega,t)\}_{0\leq t\leq T^k}$, il valore del fondo del k-esimo assicurato, $\{P^{(k)}(\omega,t)\}_{t=0,\dots,T^k}$, il valore delle attività,

$\{A^{(k)}(\omega,t)\}_{t=0,\dots,T^k}$, e l'istante di insolvenza, $\tau^{(k)}(\omega)$. Si richiede quindi che la seguente equazione sia soddisfatta:

$$P^k = E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{P^{(k)}(\omega,T^k)}{B(\omega,T^k)}\mathbb{1}_{\{\tau^{(k)}(\omega)>T^k\}}(\omega) + \frac{A^{(k)-}(\omega,\tau^{(k)}(\omega))}{B(\omega,\tau^{(k)}(\omega))}\mathbb{1}_{\{\tau^{(k)}(\omega)\le T^k\}}(\omega)\right].$$

Inoltre la formulazione equivalente della condizione di exquità 2.1 rimane valida:

$$E^k = E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{A^{(k)-}(\omega,T^k) - P^{(k)}(\omega,T^k)}{B(\omega,T^k)}\mathbb{1}_{\{\tau^{(k)}(\omega)>T^k\}}(\omega)\right].$$

Nel secondo caso, invece, si richiede che per l'assicurato k-esimo, $k = 1,\dots,K$, sia soddisfatta l'equazione

$$P^k = E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{P^k(\omega,T^k)}{B(\omega,T^k)}\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)>T^k\}}(\omega) + \frac{P^k(\omega,\tau(\omega))}{P(\omega,\tau(\omega))}\frac{A^-(\omega,\tau(\omega))}{B(\omega,\tau(\omega))}\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)\le T^k\}}(\omega)\right].$$

La formulazione equivalente della condizione di equità 2.1 non è allora più valida, poiché il valore delle attività normalizzato per mezzo del numerario, $\left\{\frac{A(\omega,t)}{B(\omega,t)}\right\}_{t=0,\dots,T}$, non gode più della proprietà di martingala sotto $\mathbb{Q}$.

3.2 Alcuni Risultati Notevoli

In questa sezione si rivisitano i teoremi introdotti nel Capitolo 2 con riferimento al portafoglio di polizze con partecipazione agli utili tra loro eterogenee.

3.2.1 Proprietà del Valore del Fondo dell'Assicurato in Assenza di Garanzia di Minimo Rendimento

Per l'assicurato k-esimo, $k = 1,\dots,K$, il valore del fondo in assenza di una garanzia di minimo rendimento continua a godere delle proprietà di cui al teorema 2.2 nel caso in cui il contratto venga aggiunto al portafoglio,

$$\left\{\lim_{i\to-\infty} P^k(\omega,t)(i)\right\}_{t=0,\dots,T^k}.$$

3.2.2 Proprietà di Continuità e Crescenza del Valore Attuale Atteso del Beneficio per l'Assicurato

Per l'assicurato k-esimo, $k = 1, \ldots, K$, il valore attuale alla stipula del beneficio atteso continua a godere delle proprietà di continuità e crescenza rispetto alla garanzia di minimo rendimento di cui al teorema 2.3 nel caso in cui il contratto venga gestito separatamente dal portafoglio,

$$E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{P^{(k)}(\omega, T^k)(i^k)}{B(\omega, T^k)}\mathbb{1}_{\{\tau^{(k)}(\omega)(i^k) > T^k\}}(\omega) + \frac{A^{(k)-}(\omega, \tau^{(k)}(\omega)(i^k))}{B(\omega, \tau^{(k)}(\omega)(i^k))}\mathbb{1}_{\{\tau^{(k)}(\omega)(i^k) \leq T^k\}}(\omega)\right].$$

3.2.3 Esistenza e Unicità della Garanzia di Minimo Rendimento Equa

Il teorema 2.4 relativo all'esistenza e unicità della garanzia di minimo rendimento i^k che rende equo il contratto k-esimo, $k = 1, \ldots, K$, continua a valere se tale polizza viene tariffata separatamente dal portafoglio

$$P^k = E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{P^{(k)}(\omega, T^k)(i^k)}{B(\omega, T^k)}\mathbb{1}_{\{\tau^{(k)}(\omega)(i^k) > T^k\}}(\omega) + \frac{A^{(k)-}(\omega, \tau^{(k)}(\omega)(i^k))}{B(\omega, \tau^{(k)}(\omega)(i^k))}\mathbb{1}_{\{\tau^{(k)}(\omega)(i^k) \leq T^k\}}(\omega)\right].$$

Tuttavia, il fatto che i K contratti siano gestiti congiuntamente all'interno dello stesso portafoglio comporta che vi sia un'interazione in termini di attivi gestiti e di rischio di insolvenza da parte dell'assicuratore.

Di conseguenza, se l'assicuratore intende tenere conto di questo aspetto nella tariffazione delle polizze, allora i parametri contrattuali che rendono equa ciascuna polizza, se esistono, possono differire da quelli che rendevano equa la stessa polizza considerata separatamente dalle altre.

3.2.4 Esistenza di un Contratto Equo sia se Isolato sia se Aggiunto al Portafoglio

Il seguente teorema stabilisce che, dato un portafoglio di K contratti, esiste almeno un $(K + 1)$-esimo contratto, individuato da una opportuna 5-pla di parametri contrattuali, che è equo sia quando viene gestito individualmente sia quando viene aggiunto al portafoglio.

Teorema 3.1 (Esistenza di un Contratto Equo sia se Aggiunto al Portafoglio sia se Isolato)**.** *Dato un portafoglio di K contratti tra loro eterogenei, ciascuno dei quali caratterizzato dalla 5-pla di parametri*

$$m^k = (\alpha^k, P^k, E^k, i^k, T^k), \quad k = 1, \ldots, K,$$

dove $i^k > -\infty$ per qualche $k = 1, \ldots, K$, esiste almeno un $(K+1)$-esimo contratto, indicizzato dalla 5-pla

$$m^{K+1} = (\alpha^{K+1}, P^{K+1}, E^{K+1}, i^{K+1}, T^{K+1}),$$

tale che

$$\begin{aligned} P^{K+1} &= E^{\mathbb{Q}}\Bigg[\frac{P^{(K+1)}(\omega, T^{K+1})}{B(\omega, T^{K+1})}\mathbb{1}_{\{\tau^{(K+1)}(\omega) > T^{K+1}\}}(\omega) \\ &\qquad + \frac{A^{(K+1)-}(\omega, \tau^{(K+1)}(\omega))}{B(\omega, \tau^{(K+1)}(\omega))}\mathbb{1}_{\{\tau^{(K+1)}(\omega) \le T^{K+1}\}}(\omega)\Bigg] \\ &= E^{\mathbb{Q}}\Bigg[\frac{P^{K+1}(\omega, T^{K+1})}{B(\omega, T^{K+1})}\mathbb{1}_{\{\tau(\omega) > T^{K+1}\}}(\omega) \\ &\qquad + \frac{P^{K+1}(\omega, \tau(\omega))}{P(\omega, \tau(\omega))}\frac{A^{-}(\omega, \tau(\omega))}{B(\omega, \tau(\omega)}\mathbb{1}_{\{\tau(\omega) \le T^{K+1}\}}(\omega)\Bigg], \end{aligned} \tag{3.2}$$

dove ora la massima durata delle polizze T definita in (3.1), i processi stocastici del valore delle attività, $\{A(\omega, t)\}_{t=0,\ldots,T}$, e delle passività, $\{P(\omega, t)\}_{t=0,\ldots,T}$, e l'istante di insolvenza $\tau(\omega)$ sono riferiti a un portafoglio di $K+1$ assicurati.

Dimostrazione. Si prova dapprima che esiste almeno un $(K+1)$-esimo assicurato, indicizzato da una 5-pla, per il quale è più vantaggioso essere gestito separatamente che venire aggiunto al portafoglio, ovvero

$$\begin{aligned} & E^{\mathbb{Q}}\Bigg[\frac{P^{(K+1)}(\omega, T^{K+1})}{B(\omega, T^{K+1})}\mathbb{1}_{\{\tau^{(K+1)}(\omega) > T^{K+1}\}}(\omega) \\ &\qquad + \frac{A^{(K+1)-}(\omega, \tau^{(K+1)}(\omega))}{B(\omega, \tau^{(K+1)}(\omega))}\mathbb{1}_{\{\tau^{(K+1)}(\omega) \le T^{K+1}\}}(\omega)\Bigg] \\ &> E^{\mathbb{Q}}\Bigg[\frac{P^{K+1}(\omega, T^{K+1})}{B(\omega, T^{K+1})}\mathbb{1}_{\{\tau(\omega) > T^{K+1}\}}(\omega) \\ &\qquad + \frac{P^{K+1}(\omega, \tau(\omega))}{P(\omega, \tau(\omega))}\frac{A^{-}(\omega, \tau(\omega))}{B(\omega, \tau(\omega)}\mathbb{1}_{\{\tau(\omega) \le T^{K+1}\}}(\omega)\Bigg]. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Si consideri infatti il $(K+1)$-esimo/nuovo contratto caratterizzato dalla seguente 5-pla:

$$\begin{aligned} m^{K+1} &= (\alpha^{K+1}, P^{K+1}, E^{K+1}, i^{K+1}, T^{K+1}) \\ &= (1, P^{K+1}, E^{K+1}, -\infty, T^{K+1}). \end{aligned}$$

Se tale contratto è tariffato separatamente dal portafoglio, poiché non offre una garanzia di minimo rendimento e l'assicurato partecipa integralmente al rendimento del portafoglio di attivi, per le proprietà 2.2 del valore del fondo dell'assicurato in assenza di garanzia di minimo rendimento, si ha $\mathbb{P}$-q.c.

$$\begin{aligned} P^{(K+1)}(\omega, t) &= \frac{P^{K+1}}{P^{K+1} + E^{K+1}} F^{(K+1)}(\omega, t) \\ &= \frac{P^{K+1}}{P^{K+1} + E^{K+1}} A^{(K+1)-}(\omega, t) \\ &< A^{(K+1)-}(\omega, t), \quad t = 1, \ldots, T^{K+1}, \end{aligned}$$

e quindi l'assicuratore è sempre solvente:

$$\tau^{(K+1)}(\omega) = +\infty \ \text{ e } \ \mathbb{1}_{\{\tau^{(K+1)}(\omega) > T^{K+1}\}}(\omega) = 1.$$

Pertanto, sempre per le proprietà del valore del fondo dell'assicurato in assenza di garanzia di minimo rendimento 2.2, si ha che tale contratto è equo

$$\begin{aligned} E^{\mathbb{Q}} \Bigg[& \frac{P^{(K+1)}(\omega, T^{K+1})}{B(\omega, T^{K+1})} \mathbb{1}_{\{\tau^{(K+1)}(\omega) > T^{K+1}\}}(\omega) \\ & \qquad + \frac{A^{(K+1)-}(\omega, \tau^{(K+1)}(\omega))}{B(\omega, \tau^{(K+1)}(\omega))} \mathbb{1}_{\{\tau^{(K+1)}(\omega) \leq T^{K+1}\}}(\omega) \Bigg] \\ &= E^{\mathbb{Q}} \left[\frac{P^{(K+1)}(\omega, T^{K+1})}{B(\omega, T^{K+1})} \right] \\ &= P^{K+1}. \end{aligned}$$

Se invece il $(K+1)$-esimo contratto è aggiunto al portafoglio, la probabilità di insolvenza è positiva

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}(\tau(\omega) \leq T^{K+1}) &= \sum_{t=1}^{T^{K+1}} \mathbb{Q}(\tau(\omega) = t) \\ &\geq \mathbb{Q}(\tau(\omega) = 1) \\ &= \mathbb{Q}(A^{-}(\omega, 1) \leq P(\omega, 1)) \\ &= \mathbb{Q}(F(\omega, 1) \leq P(\omega, 1)) \\ &\geq \mathbb{Q}\left(F(\omega, 1) \leq \sum_{k \in J} Pe^{i^k}\right) > 0,\end{aligned}$$

dove $J = \{k = 1, \ldots, K \mid i^k > -\infty\}$.

Poiché il valore del fondo dell'assicurato $(K+1)$-esimo, normalizzato mediante il numerario, $\left\{\frac{P^{K+1}(\omega,t)}{B(\omega,t)}\right\}_{t=0,\ldots,T^{K+1}}$, è una martingala sotto $\mathbb{Q}$ in virtù delle proprietà in assenza di garanzia di minimo rendimento 2.2, e $\tau(\omega)$ è un tempo d'arresto, per il teorema di arresto opzionale A.7 il processo stocastico arrestato

$$\left\{\frac{P^{K+1}(\omega, \min\{t, \tau(\omega)\})}{B(\omega, \min\{t, \tau(\omega)\})}\right\}_{t=0,\ldots,T^{K+1}}$$

è ancora una martingala sotto $\mathbb{Q}$. Ne consegue che

$$\begin{aligned}E^{\mathbb{Q}}&\left[\frac{P^{(K+1)}(\omega, T^{K+1})}{B(\omega, T^{K+1})} \mathbb{1}_{\{\tau^{(K+1)}(\omega) > T^{K+1}\}}(\omega) \right. \\ &\qquad \left. + \frac{A^{(K+1)-}(\omega, \tau^{(K+1)}(\omega))}{B(\omega, \tau^{(K+1)}(\omega))} \mathbb{1}_{\{\tau^{(K+1)}(\omega) \leq T^{K+1}\}}(\omega)\right] \\ &= P^{K+1} \\ &= E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{P^{K+1}(\omega, \min\{T^{K+1}, \tau(\omega)\})}{B(\omega, \min\{T^{K+1}, \tau(\omega)\})}\right] \\ &= E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{P^{K+1}(\omega, T^{K+1})}{B(\omega, T^{K+1})} \mathbb{1}_{\{\tau(\omega) > T^{K+1}\}}(\omega) \right. \\ &\qquad \left. + \frac{P^{K+1}(\omega, \tau(\omega))}{B(\omega, \tau(\omega))} \mathbb{1}_{\{\tau(\omega) \leq T^{K+1}\}}(\omega)\right]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
> E^{\mathbb{Q}} \Bigg[& \frac{P^{K+1}(\omega, T^{K+1})}{B(\omega, T^{K+1})} \mathbb{1}_{\{\tau(\omega) > T^{K+1}\}}(\omega) \\
& + \frac{P^{K+1}(\omega, \tau(\omega))}{P(\omega, \tau(\omega))} \frac{A^{-}(\omega, \tau(\omega)}{B(\omega, \tau(\omega))} \mathbb{1}_{\{\tau(\omega) \leq T^{K+1}\}}(\omega) \Bigg].
\end{aligned}
$$

Quindi la disuguaglianza (3.3) è soddisfatta.

Si dimostra ora che esiste almeno un $(K+1)$-esimo assicurato, indicizzato da una 5-pla, per il quale è più vantaggioso essere aggiunto al portafoglio che essere gestito separatamente, ovvero

$$
\begin{aligned}
E^{\mathbb{Q}} \Bigg[& \frac{P^{(K+1)}(\omega, T^{K+1})}{B(\omega, T^{K+1})} \mathbb{1}_{\{\tau^{(K+1)}(\omega) > T^{K+1}\}}(\omega) \\
& + \frac{A^{(K+1)-}(\omega, \tau^{(K+1)}(\omega))}{B(\omega, \tau^{(K+1)}(\omega))} \mathbb{1}_{\{\tau^{(K+1)}(\omega) \leq T^{K+1}\}}(\omega) \Bigg] \\
< E^{\mathbb{Q}} \Bigg[& \frac{P^{K+1}(\omega, T^{K+1})}{B(\omega, T^{K+1})} \mathbb{1}_{\{\tau(\omega) > T^{K+1}\}}(\omega) \\
& + \frac{P^{K+1}(\omega, \tau(\omega))}{P(\omega, \tau(\omega))} \frac{A^{-}(\omega, \tau(\omega))}{B(\omega, \tau(\omega)} \mathbb{1}_{\{\tau(\omega) \leq T^{K+1}\}}(\omega) \Bigg].
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Si consideri infatti la seguente successione di nuovi contratti indicizzati dalle 4-ple

$$
\begin{aligned}
m_n^{K+1} &= (\alpha^{K+1}, P^{K+1}, E_n^{K+1}, T^{K+1}) \\
&= \left(\alpha^{K+1}, P^{K+1}, \frac{1}{n}, T^{K+1} \right).
\end{aligned}
$$

Se una tale successione di contratti è tariffata separatamente dal portafoglio, per ogni n l'esistenza e l'unicità della garanzia di minimo i_n^{K+1} che rende equo il $(K+1)$-esimo contratto è stabilita dal corrispondente teorema 2.4. La successione delle garanzie di minimo rendimento eque diverge al divergere di n:

$$
\lim_{n \to +\infty} i_n^{K+1} = +\infty.
$$

Infatti, da un lato, in virtù della formulazione equivalente della condizione di equità 2.1 essa soddisfa, per ogni n,

$$E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{A_n^{(K+1)-}(\omega,T^{K+1})-P_n^{(K+1)}(\omega,T^{K+1})(i_n^{K+1})}{B(\omega,T^{K+1})}\mathbb{1}_{\{\tau_n^{(K+1)}(\omega)(i_n^{K+1})>T^{K+1}\}}(\omega)\right]$$

$$= E_n^{K+1} = \frac{1}{n}.$$

Dall'altro, la funzione

$$E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{A^{(K+1)-}(\omega,T^{K+1})-P^{(K+1)}(\omega,T^{K+1})(i^{K+1})}{B(\omega,T^{K+1})}\mathbb{1}_{\{\tau^{(K+1)}(\omega)(i^{K+1})>T^{K+1}\}}(\omega)\right]$$

è decrescente rispetto a i^{K+1} per le proprietà di crescenza e continuità del valore attuale in 0 del beneficio atteso dall'assicurato 2.3.

Ne consegue che la successione delle garanzie di minimo rendimento eque è crescente e quindi ammette limite per $n \to +\infty$. Supponendo ora per assurdo che il limite sia finito

$$\lim_{n\to+\infty} i_n^{K+1} = i^{K+1} < +\infty,$$

si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{Q}(\tau_n^{(K+1)}(\omega) > T^{K+1}) > 0$$

e quindi si perviene alla contraddizione

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} \\ &= \lim_{n\to+\infty} E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{A_n^{(K+1)-}(\omega,T^{K+1})-P_n^{(K+1)}(\omega,T^{K+1})}{B(\omega,T^{K+1})}\mathbb{1}_{\{\tau_n^{(K+1)}(\omega)>T^{K+1}\}}(\omega)\right] \\ &> 0. \end{aligned}$$

Si aggiunga ora al portafoglio l'n-esimo nuovo contratto. Al divergere di n, l'assicuratore diviene insolvente all'epoca 1 $\mathbb{P}$-q.c.

$$\lim_{n\to+\infty} \tau_n(\omega) = 1,$$

poiché il valore del fondo del $(K+1)$-esimo assicurato diverge

$$\lim_{n\to+\infty} P_n^{K+1}(\omega,1) = \lim_{n\to+\infty} P^{K+1} \max\left\{ e^{i_n^{K+1}}, \left(\frac{F_n(\omega,1)}{F_n(\omega,0)}\right)^{\alpha_n^{K+1}(\omega,1)} \right\} = +\infty.$$

Inoltre, siccome $\tau(\omega)$ assume valori nell'insieme finito

$$\{1,\dots,T\} \cup \{+\infty\},$$

dalla definizione di limite si ha

$$\tau_n(\omega) = 1$$

per n sufficientemente grande e, di conseguenza,

$$\frac{P_n^{K+1}(\omega,\tau_n(\omega))}{P_n(\omega,\tau_n(\omega))} = \frac{P_n^{K+1}(\omega,1)}{P_n(\omega,1)}.$$

Pertanto, al divergere di n, l'n-esimo nuovo contratto riceve una quota sempre maggiore del portafoglio di attivi all'istante 1 in cui l'assicuratore diviene insolvente:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{P_n^{K+1}(\omega,\tau_n(\omega))}{P_n(\omega,\tau_n(\omega))} = \lim_{n\to+\infty} \frac{P_n^{K+1}(\omega,1)}{P_n(\omega,1)} = 1.$$

Poiché per ogni n

$$\begin{aligned}
& E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{P_n^{K+1}(\omega,T^{K+1})}{B(\omega,T^{K+1})}\mathbb{1}_{\{\tau_n(\omega)>T^{K+1}\}}(\omega)\right.\\
&\qquad\left. + \frac{P_n^{K+1}(\omega,\tau_n(\omega))}{P_n(\omega,\tau_n(\omega))}\frac{A_n^-(\omega,\tau_n(\omega))}{B(\omega,\tau_n(\omega))}\mathbb{1}_{\{\tau_n(\omega)\le T^{K+1}\}}(\omega)\right]\\
&= E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{P_n^{K+1}(\omega,T^{K+1})}{B(\omega,T^{K+1})}\mathbb{1}_{\{\tau_n(\omega)>T^{K+1}\}}(\omega)\right.\\
&\qquad\qquad\left. + \sum_{t=1}^{T^{K+1}} \frac{P_n^{K+1}(\omega,t)}{P_n(\omega,t)}\frac{A_n^-(\omega,t)}{B(\omega,t)}\mathbb{1}_{\{\tau_n(\omega)=t\}}(\omega)\right]\\
&\ge E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{P_n^{K+1}(\omega,1)}{P_n(\omega,1)}\frac{A_n^-(\omega,1)}{B(\omega,1)}\mathbb{1}_{\{\tau_n(\omega)=1\}}(\omega)\right],
\end{aligned}$$

passando al limite, si ha

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} E^{\mathbb{Q}} \Bigg[& \frac{P_n^{K+1}(\omega, T^{K+1})}{B(\omega, T^{K+1})} \mathbb{1}_{\{\tau_n(\omega) > T^{K+1}\}}(\omega) \\
& + \frac{P_n^{K+1}(\omega, \tau_n(\omega))}{P_n(\omega, \tau_n(\omega))} \frac{A_n^-(\omega, \tau_n(\omega))}{B(\omega, \tau_n(\omega))} \mathbb{1}_{\{\tau_n(\omega) \le T^{K+1}\}}(\omega) \Bigg] \\
& \ge \lim_{n\to+\infty} E^{\mathbb{Q}} \left[\frac{P_n^{K+1}(\omega, 1)}{P_n(\omega, 1)} \frac{A_n^-(\omega, 1)}{B(\omega, 1)} \mathbb{1}_{\{\tau_n(\omega) = 1\}}(\omega) \right] \\
& = E^{\mathbb{Q}} \left[\frac{A^-(\omega, 1)}{B(\omega, 1)} \right] = E^{\mathbb{Q}} \left[\frac{F(\omega, 1)}{B(\omega, 1)} \right] = \sum_{k=1}^{K+1} (P^k + E^k) \\
& > P^{K+1} \\
& = E^{\mathbb{Q}} \Bigg[\frac{P^{(K+1)}(\omega, T^{K+1})}{B(\omega, T^{K+1})} \mathbb{1}_{\{\tau^{(K+1)}(\omega) > T^{K+1}\}}(\omega) \\
& \qquad + \frac{A^{(K+1)-}(\omega, \tau^{(K+1)}(\omega))}{B(\omega, \tau^{(K+1)}(\omega))} \mathbb{1}_{\{\tau^{(K+1)}(\omega) \le T^{K+1}\}}(\omega) \Bigg].
\end{aligned}
$$

Infine, dalla definizione di limite segue che per n sufficientemente grande la disuguaglianza (3.4) è soddisfatta.

Si prova ora la continuità delle due funzioni

$$
\begin{aligned}
E^{\mathbb{Q}} \Bigg[& \frac{P^{(K+1)}(\omega, T^{K+1})}{B(\omega, T^{K+1})} \mathbb{1}_{\{\tau^{(K+1)}(\omega) > T^{K+1}\}}(\omega) \\
& + \frac{A^{(K+1)-}(\omega, \tau^{(K+1)}(\omega))}{B(\omega, \tau^{(K+1)}(\omega))} \mathbb{1}_{\{\tau^{(K+1)}(\omega) \le T^{K+1}\}}(\omega) \Bigg]
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
E^{\mathbb{Q}} \Bigg[& \frac{P^{K+1}(\omega, T^{K+1})}{B(\omega, T^{K+1})} \mathbb{1}_{\{\tau(\omega) > T^{K+1}\}}(\omega) \\
& + \frac{P^{K+1}(\omega, \tau(\omega))}{P(\omega, \tau(\omega))} \frac{A^-(\omega, \tau(\omega))}{B(\omega, \tau(\omega))} \mathbb{1}_{\{\tau(\omega) \le T^{K+1}\}}(\omega) \Bigg]
\end{aligned}
$$

rispetto ai parametri

$$(\alpha^{K+1}, E^{K+1}, i^{K+1}).$$

Si consideri la successione di nuovi contratti tale che

$$\lim_{n\to+\infty}(\alpha_n^{K+1}, P^{K+1}, E_n^{K+1}, i_n^{K+1}, T^{K+1}) = (\alpha^{K+1}, P^{K+1}, E^{K+1}, i^{K+1}, T^{K+1}).$$

Se il $(K+1)$-esimo contratto limite è gestito separatamente dal portafoglio si ha $\mathbb{P}$-q.c.

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} P_n^{(K+1)}(\omega,t)\\
&\qquad = \lim_{n\to+\infty} P^{K+1}\prod_{j=1}^{t}\max\left\{e^{i_n^{K+1}}, \left(\frac{F_n^{(K+1)}(\omega,j)}{F_n^{(K+1)}(\omega,j-1)}\right)^{\alpha_n^{(K+1)}(\omega,j)}\right\}\\
&\qquad = P^{K+1}\prod_{j=1}^{t}\max\left\{e^{i^{K+1}}, \left(\frac{F^{(K+1)}(\omega,j)}{F^{(K+1)}(\omega,j-1)}\right)^{\alpha^{(K+1)}(\omega,j)}\right\}\\
&\qquad = P^{(K+1)}(\omega,t), \quad t = 1,\dots,T^{K+1},
\end{aligned}$$

dove

$$F^{(K+1)}(\omega,t) = \lim_{n\to+\infty} F_n^{(K+1)}(\omega,t)$$

è il processo stocastico che soddisfa

$$\begin{aligned}
F^{(K+1)}(\omega,0) = F_0^{(K+1)} &= \lim_{n\to+\infty} F_{0,n}^{(K+1)}\\
&= \lim_{n\to+\infty}(P^{K+1} + E_n^{K+1}) = P^{K+1} + E^{K+1}.
\end{aligned}$$

L'esistenza di tale processo segue dalla continuità $\mathbb{P}$-q.c. di $\{F(\omega,t)\}_{0\le t\le T}$ rispetto a F_0. Ne consegue che

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\tau_n^{(K+1)}(\omega) &= \lim_{n\to+\infty}\inf\{t = 1,\dots,T^{K+1} \mid A_n^{(K+1)-}(\omega,t) \le P_n^{(K+1)}(\omega,t)\}\\
&= \inf\{t = 1,\dots,T^{K+1} \mid A^{(K+1)-}(\omega,t) \le P^{(K+1)}(\omega,t)\}\\
&= \tau^{(K+1)}(\omega)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\mathbb{1}_{\{\tau_n^{(K+1)}(\omega)>T^{K+1}\}}(\omega) &= 1 - \lim_{n\to+\infty}\mathbb{1}_{\{\tau_n^{(K+1)}(\omega)\le T^{K+1}\}}(\omega)\\
&= 1 - \mathbb{1}_{\{\tau^{(K+1)}(\omega)\le T^{K+1}\}}(\omega)\\
&= \mathbb{1}_{\{\tau^{(K+1)}(\omega)>T^{K+1}\}}(\omega).
\end{aligned}$$

Se il $(K+1)$-esimo contratto limite è aggiunto al portafoglio, con ragionamenti analoghi al caso precedente si può affermare che per il valore del fondo del $(K+1)$-esimo assicurato vale $\mathbb{P}$-q.c.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} P_n^{K+1}(\omega,t)\\
&\qquad = \lim_{n\to+\infty} P^{K+1}\prod_{j=1}^{t}\max\left\{e^{i_n^{K+1}}, \left(\frac{F_n(\omega,j)}{F_n(\omega,j-1)}\right)^{\alpha_n^{K+1}(\omega,j)}\right\}\\
&\qquad = P^{K+1}\prod_{j=1}^{t}\max\left\{e^{i^{K+1}}, \left(\frac{F(\omega,j)}{F(\omega,j-1)}\right)^{\alpha^{K+1}(\omega,j)}\right\}\\
&\qquad = P^{K+1}(\omega,t), \quad t=1,\dots,T^{K+1},
\end{aligned}
$$

mentre per il valore del fondo del k-esimo assicurato, $k=1,\dots,K$, si ha

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} P_n^{k}(\omega,t)\\
&\qquad = \lim_{n\to+\infty} P^{k}\prod_{j=1}^{t}\max\left\{e^{i^k}, \left(\frac{F_n(\omega,j)}{F_n(\omega,j-1)}\right)^{\alpha_n^{k}(\omega,j)}\right\}\\
&\qquad = P^{K+1}\prod_{j=1}^{t}\max\left\{e^{i^k}, \left(\frac{F(\omega,j)}{F(\omega,j-1)}\right)^{\alpha^{k}(\omega,j)}\right\}\\
&\qquad = P^{k}(\omega,t), \quad t=1,\dots,T^{k}
\end{aligned}
$$

Di conseguenza, per il valore totale dei fondi degli assicurati in portafoglio all'epoca $t=1,\dots,T$, si ottiene

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} P_n(\omega,t) &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{K+1} P_n^k(\omega,t)\mathbb{1}_{\{s\le T^k\}}(t)\\
&= \sum_{k=1}^{K+1} P^k(\omega,t)\mathbb{1}_{\{s\le T^k\}}(t)\\
&= P(\omega,t).
\end{aligned}
$$

Pertanto risulta

$$
\lim_{n\to+\infty}\tau_n(\omega)=\tau(\omega) \ \text{ e } \ \lim_{n\to+\infty}\mathbb{1}_{\{\tau_n(\omega)>T^{K+1}\}}(\omega)=\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)>T^{K+1}\}}(\omega).
$$

Infine, per le ipotesi finanziarie 2.1 si ha $\mathbb{Q}$-q.c.

$$
\begin{aligned}
0 \leq \frac{P_n^{(K+1)}(\omega, T^{K+1})}{B(\omega, T^{K+1})} \mathbb{1}_{\{\tau^{(K+1)}(\omega) > T^{K+1}\}}(\omega) \\
+ \frac{A_n^{(K+1)-}(\omega, \tau_n^{(K+1)}(\omega))}{B(\omega, \tau_n^{(K+1)}(\omega))} \mathbb{1}_{\{\tau_n^{(K+1)}(\omega) \leq T^{K+1}\}}(\omega) \\
&\leq \sum_{t=1}^{T^{K+1}} \frac{A_n^{(K+1)-}(\omega, t)}{B(\omega, t)} \\
&= \sum_{t=1}^{T^{K+1}} \frac{F_n^{(K+1)}(\omega, t)}{B(\omega, t)} \\
&\leq \sum_{t=1}^{T^{K+1}} \Phi^{(K+1)}(\omega, t),
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
0 \leq \frac{P_n^{K+1}(\omega, T^{K+1})}{B(\omega, T^{K+1})} \mathbb{1}_{\{\tau_n(\omega) > T^{K+1}\}}(\omega) \\
+ \frac{P_n^{K+1}(\omega, \tau_n(\omega))}{P_n(\omega, \tau_n(\omega))} \frac{A_n^{-}(\omega, \tau_n(\omega))}{B(\omega, \tau_n(\omega))} \mathbb{1}_{\{\tau_n(\omega) \leq T^{K+1}\}}(\omega) \\
&\leq \sum_{t=1}^{T^{K+1}} \frac{A_n^{-}(\omega, t)}{B(\omega, t)} \\
&\leq \sum_{t=1}^{T^{K+1}} \frac{F_n(\omega, t)}{B(\omega, t)} \\
&\leq \sum_{t=1}^{T^{K+1}} \Phi(\omega, t),
\end{aligned}
$$

dove $\{\Phi^{(K+1)}(\omega, t)\}_{t=1,\dots,T^{K+1}}$ e $\{\Phi(\omega, t)\}_{t=1,\dots,T}$ sono le funzioni associate a un intervallo I chiuso e limitato che contiene le immagini delle successioni $\{F_{0,n}^{(K+1)}\}_{n\geq1}$ e $\{F_{0,n}\}_{n\geq1}$.

Il teorema della convergenza dominata A.5 implica allora che

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} E^{\mathbb{Q}} \Bigg[& \frac{P_n^{(K+1)}(\omega, T^{K+1})}{B(\omega, T^{K+1})} \mathbb{1}_{\{\tau_n^{(K+1)}(\omega) > T^{K+1}\}}(\omega) \\
& + \frac{A_n^{(K+1)-}(\omega, \tau_n^{(K+1)}(\omega))}{B(\omega, \tau_n^{(K+1)}(\omega))} \mathbb{1}_{\{\tau_n^{(K+1)}(\omega) \leq T^{K+1}\}}(\omega) \Bigg] \\
= E^{\mathbb{Q}} \Bigg[& \frac{P^{(K+1)}(\omega, T^{K+1})}{B(\omega, T^{K+1})} \mathbb{1}_{\{\tau^{(K+1)}(\omega) > T^{K+1}\}}(\omega) \\
& + \frac{A^{(K+1)-}(\omega, \tau^{(K+1)}(\omega))}{B(\omega, \tau^{(K+1)}(\omega))} \mathbb{1}_{\{\tau^{(K+1)}(\omega) \leq T^{K+1}\}}(\omega) \Bigg]
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} E^{\mathbb{Q}} \Bigg[& \frac{P_n^{K+1}(\omega, T^{K+1})}{B(\omega, T^{K+1})} \mathbb{1}_{\{\tau_n(\omega) > T^{K+1}\}}(\omega) \\
& + \frac{P_n^{K+1}(\omega, \tau_n(\omega))}{P_n(\omega, \tau_n(\omega))} \frac{A_n^{-}(\omega, \tau_n(\omega))}{B(\omega, \tau_n(\omega))} \mathbb{1}_{\{\tau_n(\omega) \leq T^{K+1}\}}(\omega) \Bigg] \\
= E^{\mathbb{Q}} \Bigg[& \frac{P^{K+1}(\omega, T^{K+1})}{B(\omega, T^{K+1})} \mathbb{1}_{\{\tau(\omega) > T^{K+1}\}}(\omega) \\
& + \frac{P^{K+1}(\omega, \tau(\omega))}{P(\omega, \tau(\omega))} \frac{A^{-}(\omega, \tau(\omega))}{B(\omega, \tau(\omega))} \mathbb{1}_{\{\tau(\omega) \leq T^{K+1}\}}(\omega) \Bigg].
\end{aligned}$$

Le due funzioni sono dunque continue.

Sfruttando la continuità delle due funzioni e le disuguaglianze (3.3) e (3.4), si può dunque utilizzare il teorema di connessione per affermare che esiste almeno un contratto, individuato dalla 5-pla

$$(P^{K+1}, E^{K+1}, T^{K+1}, \alpha^{K+1}, i^{K+1}),$$

che soddisfa l'equazione (3.2). □

Capitolo 4

Applicazione Numerica

In questo capitolo si forniscono alcune applicazioni numeriche dei risultati teorici descritti nei Capitoli 2 e 3: per il mercato finanziario è stato scelto il modello di Black, Scholes e Merton, descritto nell'appendice B.

Vista l'impossibilità di ottenere delle espressioni in forma chiusa per i valori attesi (attualizzati all'epoca 0) del beneficio per l'assicurato (e della remunerazione per l'assicuratore) e per la probabilità di insolvenza, queste sono state stimate mediante il metodo Monte Carlo.

Allo scopo si è utilizzato il linguaggio di programmazione *R* per scrivere delle funzioni che:

- simulino i rendimenti del portafoglio di attivi nel modello di Black, Scholes e Merton[17];
- riproducano la gestione del portafoglio di polizze con partecipazione agli utili e stimino i valori attualizzati alla stipula del contratto dei benefici attesi dagli assicurati e della remunerazione attesa dall'assicuratore e la probabilità di insolvenza di quest'ultimo.

Sono state usate le funzioni *uniroot* e *optim* disponibili nel pacchetto *stats* per trovare le soluzioni dei sistemi, rispettivamente, di un'equazione in un'incognita e di due equazioni in due incognite. Per ulteriori dettagli sul codice sviluppato si rimanda all'Appendice C.

[17] Sotto la misura di probabilità desiderata.

4.1 Modello Finanziario

In questa sezione si contestualizza la particolare strategia di investimento adottata dall'assicuratore all'interno del modello di Black, Scholes e Merton per il mercato finanziario.

Ipotesi 4.1 (Strategia di Investimento). *L'assicuratore attua una strategia dinamica che prevede di investire nel titolo privo di rischio la quota γ e nel titolo rischioso la quota $(1-\gamma)$ del valore del portafoglio di attivi $\{F(\omega,t)\}_{0\leq t\leq T}$, che quindi evolve come segue:*

$$dF(\omega,t) = \frac{\gamma F(\omega,t)}{B(t)}dB(t) + \frac{(1-\gamma)F(\omega,t)}{S(\omega,t)}dS(\omega,t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Per tale portafoglio di attivi è dunque possibile stabilire sia la dinamica del processo stocastico che ne misura il prezzo (in termini assoluti e del numerario) sia la distribuzione dei relativi log-rendimenti sotto le misure di probabilità realistica e martingala equivalente.

Teorema 4.1 (Prezzo e Log-Rendimento del Portafoglio di Attivi sotto la Misura Fisica). *Sotto $\mathbb{P}$*

1. *i processi stocastici del prezzo del portafoglio di attivi, $\{F(\omega,t)\}_{0\leq t\leq T}$ e di quello normalizzato mediante il numerario, $\left\{\frac{F(\omega,t)}{B(t)}\right\}_{0\leq t\leq T}$, sono dei moti browniani geometrici:*

$$dF(\omega,t) = F(\omega,t)((\gamma r + (1-\gamma)\mu)dt + (1-\gamma)\sigma dW^{\mathbb{P}}(\omega,t))$$

e

$$d\left(\frac{F(\omega,t)}{B(t)}\right) = \frac{F(\omega,t)}{B(t)}((1-\gamma)(\mu-r)dt + (1-\gamma)\sigma dW^{\mathbb{P}}(\omega,t));$$

2. *i log-rendimenti del portafoglio di attivi sul generico intervallo $[s,t]$ sono indipendenti e distribuiti come variabili aleatorie normali:*

$$\begin{aligned}
&\ln\left(\frac{F(\omega,t)}{F(\omega,s)}\right)\\
&= \left(\gamma r + (1-\gamma)\mu - \tfrac{1}{2}(1-\gamma)^2\sigma^2\right)(t-s)\\
&\qquad\qquad + (1-\gamma)\sigma(W^{\mathbb{Q}}(\omega,t) - W^{\mathbb{Q}}(\omega,s))\\
&\sim N\left(\left(\gamma r + (1-\gamma)\mu - \tfrac{1}{2}(1-\gamma)^2\sigma^2\right)(t-s), (1-\gamma)^2\sigma^2(t-s)\right).
\end{aligned}$$

Dimostrazione. Si provano i due risultati

1. il processo stocastico $\{F(\omega,t)\}_{0\leq t\leq T}$ del prezzo del portafoglio di attivi è un moto browniano geometrico sotto $\mathbb{P}$ per via delle dinamiche dei prezzi $\{S(\omega,t)\}_{0\leq t\leq T}$ e $\{B(t)\}_{0\leq t\leq T}$ degli strumenti finanziari sottostanti e della struttura della strategia di investimento; applicando poi la regola del prodotto di Itô A.1 ai processi $\{F(\omega,t)\}_{0\leq t\leq T}$ e $\left\{\frac{1}{B(t)}\right\}_{0\leq t\leq T}$, si ottiene che il processo stocastico $\left\{\frac{F(\omega,t)}{B(t)}\right\}_{0\leq t\leq T}$ del prezzo del portafoglio normalizzato mediante il numerario è anch'esso un moto browniano geometrico sotto $\mathbb{P}$;

2. i log-rendimenti del portafoglio di attivi sono indipendenti e distribuiti come variabili aleatorie normali sotto $\mathbb{P}$ poiché il processo stocastico $\{F(\omega,t)\}_{0\leq t\leq T}$ del prezzo del portafoglio di attivi è un moto browniano geometrico sotto la stessa misura di probabilità. □

Teorema 4.2 (Prezzo e Log-Rendimento del Portafoglio di Attivi sotto $\mathbb{Q}$)**.** *Sotto* $\mathbb{Q}$

1. *I processi stocastici del prezzo del portafoglio di attivi,* $\{F(\omega,t)\}_{0\leq t\leq T}$*, e di quello normalizzato mediante il numerario,* $\left\{\frac{F(\omega,t)}{B(t)}\right\}_{0\leq t\leq T}$*, sono dei moti browniani geometrici:*

$$dF(\omega,t)=F(\omega,t)(rdt+(1-\gamma)\sigma dW^{\mathbb{Q}}(\omega,t))$$

e

$$d\left(\frac{F(\omega,t)}{B(t)}\right)=\frac{F(\omega,t)}{B(t)}(1-\gamma)\sigma dW^{\mathbb{Q}}(\omega,t).$$

Inoltre quest'ultimo processo stocastico, $\left\{\frac{F(\omega,t)}{B(t)}\right\}_{0\leq t\leq T}$*, gode della proprietà di martingala;*

2. *i log-rendimenti del portafoglio di attivi sul generico intervallo* $[s,t]$ *sono indipendenti e distribuiti come variabili aleatorie normali:*

$$\begin{aligned}&\ln\left(\frac{F(\omega,t)}{F(\omega,s)}\right)\\&=\left(r-\tfrac{1}{2}(1-\gamma)^2\sigma^2\right)(t-s)+(1-\gamma)\sigma(W^{\mathbb{Q}}(\omega,t)-W^{\mathbb{Q}}(\omega,s))\\&\sim N\left(\left(r-\tfrac{1}{2}(1-\gamma)^2\sigma^2\right)(t-s),(1-\gamma)^2\sigma^2(t-s)\right).\end{aligned}$$

Dimostrazione. Si provano i due risultati

1. poiché il processo stocastico $\{F(\omega,t)\}_{0\leq t\leq T}$ del prezzo del portafoglio di attivi è un moto browniano geometrico sotto $\mathbb{P}$, applicando il teorema di Girsanov A.16 e sfruttando l'invarianza dell'integrale stocastico rispetto a cambi di misure equivalenti, si ha che lo stesso processo è un moto browniano geometrico sotto $\mathbb{Q}$; applicando poi la regola del prodotto di Itô A.1 ai processi $\{F(\omega,t)\}_{0\leq t\leq T}$ e $\{\frac{1}{B(t)}\}_{0\leq t\leq T}$, si ottiene che il processo $\{\frac{F(\omega,t)}{B(t)}\}_{0\leq t\leq T}$ del prezzo del portafoglio di attivi normalizzato mediante il numerario è anch'esso un moto browniano geometrico sotto $\mathbb{Q}$; infine la proprietà di martingala di quest'ultimo scende dal fatto che è un moto browniano geometrico con parametro di deriva nullo;

2. i log-rendimenti del portafoglio di attivi sono indipendenti e distribuiti come variabili aleatorie normali sotto $\mathbb{Q}$ poiché il processo stocastico del prezzo del portafoglio di attivi, $\{F(\omega,t)\}_{0\leq t\leq T}$, è un moto browniano geometrico sotto la stessa misura di probabilità. □

Osservazione 4.1 (Ipotesi Finanziarie nel Modello di Black, Scholes e Merton)**.** Si può quindi asserire che il modello di Black, Scholes e Merton soddisfa le ipotesi finanziarie 2.1 dal momento che

1. il processo stocastico $\{F(\omega,t)\}_{0\leq t\leq T}$ del prezzo del portafoglio di attivi, essendo un moto browniano geometrico A.24 sotto $\mathbb{P}$, cioè

$$F(\omega,t)=F_0e^{(\gamma r+(1-\gamma)\mu-\frac{1}{2}(1-\gamma)^2\sigma^2)t+(1-\gamma)\sigma W^{\mathbb{P}}(\omega,t)},$$

   - è adattato alla filtrazione $\{\mathcal{F}(t)\}_{0\leq t\leq T}$;
   - soddisfa
   $$F(\omega,0)=F_0\ \mathbb{P}\text{-q.c.}^{18};$$
   - per $0\leq t\leq T$ dipende con continuità dalla condizione iniziale F_0 $\mathbb{P}$-q.c.;
   - fissati arbitrariamente n e $0<t_1<\ldots<t_n$,
   $$(F(\omega,t_1),\ldots,F(\omega,t_n))^{\intercal}$$
   ha distribuzione congiunta log-normale A.2, e quindi positiva su $(0,+\infty)^n$;

[18] Quindi anche $\mathbb{Q}$-q.c..

2. il processo del prezzo del numerario, $\{B(t)\}_{0\leq t\leq T}$, essendo pari a
$$B(t) = e^{rt},$$
è adattato alla filtrazione $\{\mathcal{F}(t)\}_{0\leq t\leq T}$ e soddisfa
$$B(0) = 1;$$

3. il processo stocastico del prezzo del portafoglio di attivi normalizzato mediante il numerario, $\left\{\frac{F(\omega,t)}{B(t)}\right\}_{0\leq t\leq T}$, in quanto martingala esponenziale del moto browniano $\{W^{\mathbb{Q}}(\omega,t)\}_{0\leq t\leq T}$,
   - è una martingala sotto $\mathbb{Q}$;
   - per $0 \leq t \leq T$ e per ogni intervallo $I \in \mathbb{R}$,
   $$\sup_{F_0\in I}\left|\frac{F(\omega,t)}{B(t)}\right| \leq \Phi(\omega,t),$$
   dove
   $$\Phi(\omega,t) = \sup_{F_0\in I}|F_0|e^{-\frac{1}{2}(1-\gamma)^2\sigma^2 t+(1-\gamma)\sigma W^{\mathbb{Q}}(\omega,t)}$$
   è $\mathbb{Q}$-integrabile, cioè
   $$E^{\mathbb{Q}}[\Phi(\omega,t)] = \sup_{F_0\in I}|F_0| < +\infty.$$

4.1.1 Valori dei Parametri

Ai fini delle applicazioni numeriche che seguono, si assumono per i parametri (μ, r, σ) che caratterizzano il modello di Black, Scholes e Merton i valori scelti in Orozco-Garcia e Schmeiser [23] e riportati nella tabella 4.1.

μ	r	σ
0.05	0.03	0.2

Tabella 4.1: Valori per i parametri del modello di Black, Scholes e Merton

Ne consegue che il prezzo di mercato per il rischio è
$$\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma} = 0.1.$$

Si assume che la quota del prezzo del portafoglio di attivi che si investe nel titolo privo di rischio sia pari a

$$\gamma = 0.9.$$

Sono state effettuate 50000 simulazioni stocastiche ai fini delle stime mediante il metodo Monte Carlo. I risultati numerici presentati sono troncati alla terza cifra decimale.

4.1.2 Distribuzione dei Log-Rendimenti Annui della Strategia

I grafici in figura 4.1 visualizzano le distribuzioni sotto $\mathbb{P}$ e $\mathbb{Q}$ dei log-rendimenti

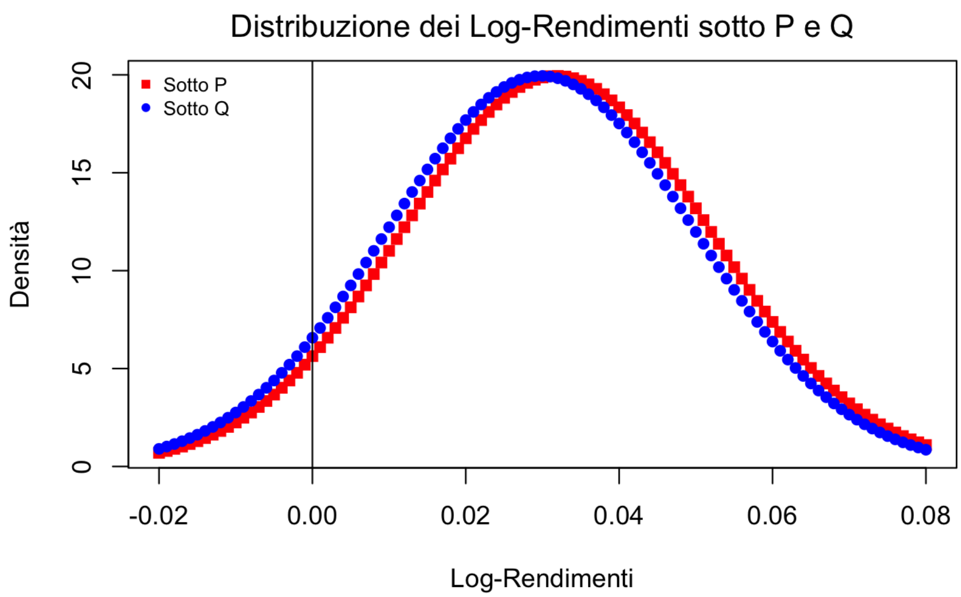

Figura 4.1: Distribuzione dei log-rendimenti annui della strategia di investimento

annui della strategia d'investimento attuata dall'assicuratore. In base ai teoremi 4.1 e 4.2, esse differiscono nei valori attesi

$$E^{\mathbb{P}}\left[\ln\left(\frac{F(\omega,t)}{F(\omega,t-1)}\right)\right] = \gamma r + (1-\gamma)\mu - \tfrac{1}{2}(1-\gamma)^2\sigma^2$$

e

$$E^{\mathbb{Q}}\left[\ln\left(\frac{F(\omega,t)}{F(\omega,t-1)}\right)\right] = r - \frac{1}{2}(1-\gamma)^2\sigma^2,$$

in funzione della quota γ del prezzo del portafoglio investito nel titolo privo di rischio: essendo questa pari a 0.9, sono praticamente coincidenti.

4.2 Portafoglio Omogeneo

In questa sezione si forniscono alcune applicazioni numeriche dei risultati teorici relativi a un portafoglio di contratti tra loro omogenei di cui al Capitolo 2.

4.2.1 Beneficio per l'Assicurato

Nel seguito si analizza il valore attuale in 0 del beneficio atteso dall'assicurato sotto la misura $\mathbb{Q}$,

$$E^{\mathbb{Q}}\left[P(\omega,T)e^{-rT}\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)>T\}}(\omega) + A^{-}(\omega,\tau(\omega))e^{-r\tau(\omega)}\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)\le T\}}(\omega)\right],$$

in funzione della garanzia di minimo rendimento i, della situazione del mercato finanziario rappresentata dalla coppia (r,σ) e della coppia composta dal livello α di partecipazione agli utili da parte dell'assicurato e dalla quota γ del valore del portafoglio di attivi che l'assicuratore investe nel titolo privo di rischio.

I risultati numerici esposti di seguito sono stati ricavati sotto la misura $\mathbb{Q}$ mediante la funzione *MC_Ptf_Res* illustrata nell'Appendice C.

In particolare, i grafici in figura 4.2 mettono in evidenza rispettivamente la proprietà di crescenza del valore attuale in 0 del beneficio atteso dall'assicurato al netto del premio versato,

$$\begin{aligned} E^{\mathbb{Q}}\big[P(\omega,T)(i)e^{-rT}\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)(i)>T\}}(\omega)+ \\ +A^{-}(\omega,\tau(\omega)(i))e^{-r\tau(\omega)(i)}\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)(i)\le T\}}(\omega)\big] - P, \end{aligned}$$

e di decrescenza del valore attuale in 0 della remunerazione attesa dall'assicuratore al netto del capitale allocato,

$$E^{\mathbb{Q}}\left[(A^{-}(\omega,T) - P(\omega,T)(i))e^{-rT}\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)(i)>T\}}(\omega)\right] - E,$$

in funzione del tasso minimo garantito i come stabilito dal teorema 2.3.

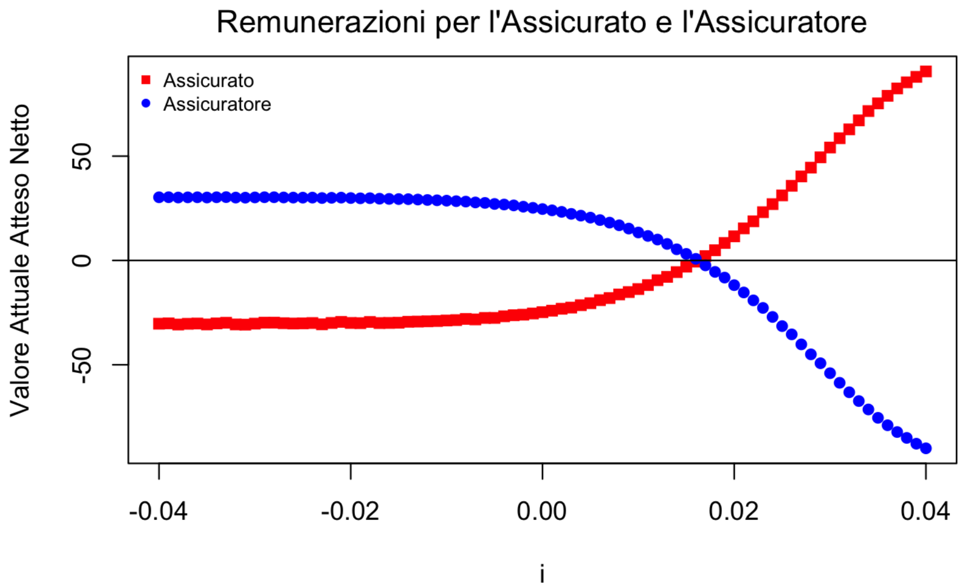

Figura 4.2: Valori attuali in 0 del beneficio atteso dall'assicurato e della remunerazione attesa dall'assicuratore al netto, rispettivamente, del premio versato e del capitale allocato in funzione della garanzia di minimo rendimento

Si osserva che l'ascissa dell'intersezione dei due grafici con l'asse orizzontale individua la garanzia di minimo rendimento equa.

In figura 4.3 si riporta il grafico del valore attuale in 0 del beneficio atteso dall'assicurato in funzione del tasso privo di rischio r e del parametro di volatilità σ che caratterizzano il mercato finanziario sotto $\mathbb{Q}$ nel modello di Black, Scholes e Merton.

Si osserva che alla stipula del contratto l'assicurato si attende un minor beneficio al crescere del tasso privo di rischio r per via del maggiore effetto di sconto[19]. D'altra parte l'assicurato si aspetta un maggiore beneficio all'aumentare della volatilità di mercato σ, poiché quest'ultima implica maggiori opportunità di rendimento sotto forma di partecipazione agli utili (al livello α), essendo l'assicurato comunque protetto da eventuali perdite grazie alla garanzia di minimo rendimento i.

In figura 4.4 si riporta il grafico del valore attuale in 0 del beneficio atteso

[19]Misurato da $\frac{1}{B(t)} = e^{-rt}$, $0 \leq t \leq T$.

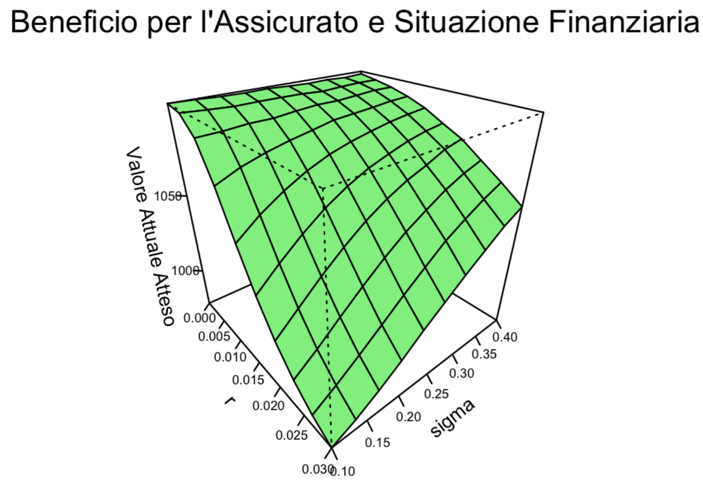

Figura 4.3: Valore attuale atteso in 0 del beneficio per l'assicurato in funzione del tasso privo di rischio r del parametro di volatilità σ

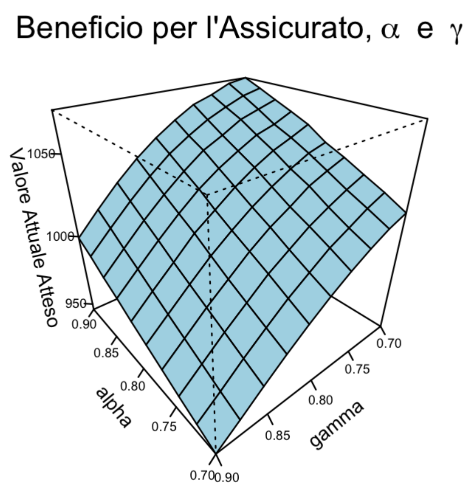

Figura 4.4: Beneficio per l'assicurato in funzione dell'aliquota di partecipazione agli utili e dell'investimento nel titolo privo di rischio

dall'assicurato in funzione dell'aliquota α di partecipazione agli utili e della quota γ del valore del portafoglio di attivi investito nel titolo privo di rischio.

L'assicurato si attende un maggiore beneficio a fronte di un aumento di

α, in quanto partecipa in misura maggiore ai rendimenti del portafoglio di attivi. Si aspetta inoltre un maggiore beneficio al diminuire di γ poiché, a parità di rendimento atteso dal portafoglio di attivi[20], una maggiore volatilità dell'investimento derivante da bassi valori di γ presenta maggiori opportunità di rendimento sotto forma di partecipazione agli utili, essendo comunque le perdite limitate per effetto della garanzia di minimo i.

4.2.2 Garanzia di Minimo Rendimento Equa

Si effettuano alcune analisi di sensitività della garanzia di minimo rendimento equa i, ovvero della soluzione all'equazione

$$\begin{aligned} P = E^{\mathbb{Q}} \big[& P(\omega, T)(i) e^{-rT} \mathbb{1}_{\{\tau(\omega)(i) > T\}}(\omega) \\ & + A^{-}(\omega, \tau(\omega)(i)) e^{-r\tau(\omega)(i)} \mathbb{1}_{\{\tau(\omega)(i) \leq T\}}(\omega) \big] \end{aligned}$$

rispetto alla situazione finanziaria (r, σ), al livello α di partecipazione agli utili da parte dell'assicurato e alla quota γ del valore del portafoglio di attivi investito nel titolo privo di rischio. L'esistenza e l'unicità di tale soluzione sono stabilite dal teorema corrispondente 2.4.

La garanzia di minimo rendimento equa è stata ottenuta sotto la misura $\mathbb{Q}$ mediante la funzione *uniroot* del pacchetto *stats* del linguaggio di programmazione *R*.

In figura 4.5 si riporta il grafico della garanzia di minimo rendimento equa i in funzione del tasso privo di rischio r e del parametro di volatilità σ che rappresentano la situazione dei mercati finanziari sotto $\mathbb{Q}$ in base al modello di Black, Scholes e Merton.

Da questa figura si vede che la garanzia di minimo rendimento equa i cresce in funzione del tasso privo di rischio r: ciò avviene perché il portafoglio di attivi diviene mediamente più redditizio e quindi la rinuncia da parte dell'assicurato, in base alla quota $1 - \alpha$, trattenuta dall'assicuratore, al maggior rendimento atteso dall'investimento deve essere compensata da un aumento della garanzia di minimo. D'altra parte la garanzia di minimo rendimento equa i diminuisce al crescere della volatilità di mercato σ, in quanto ci sono più opportunità di rendimento sul mercato (sotto forma di partecipazione agli utili al livello α) per l'assicurato e quindi una minore garanzia di minimo è ancora sufficiente a pareggiare l'investimento del premio nel solo titolo privo di rischio.

[20] Si ricordi che si sta operando sotto $\mathbb{Q}$.

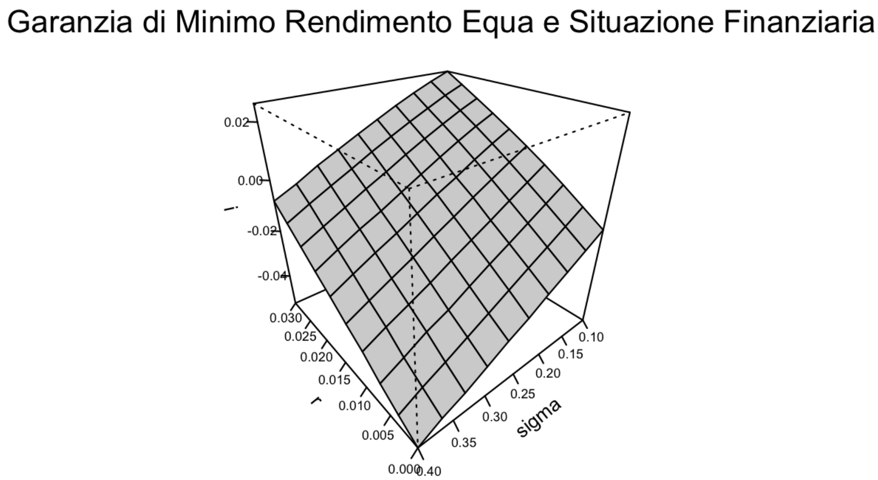

Figura 4.5: Garanzia di minimo rendimento equa i in funzione del tasso privo di rischio r e del parametro di volatilità σ

In figura 4.6 si riporta il grafico della garanzia di minimo rendimento equa in funzione dell'aliquota α di partecipazione agli utili da parte dell'assicurato e della quota γ del valore del portafoglio di attivi investito nel titolo privo di rischio.

Si osserva che la garanzia di minimo rendimento equa i diminuisce al crescere di α, in quanto all'assicurato viene riconosciuta una quota maggiore del rendimento del portafoglio di attivi e quindi una minore garanzia di minimo è ancora sufficiente a pareggiare l'investimento del premio nel titolo privo di rischio. D'altra parte la garanzia di minimo rendimento equa i aumenta con γ in quanto, maggiore è la quota di valore del portafoglio di attivi investita nel titolo privo di rischio, meno opportunità di rendimento il mercato offre all'assicurato: ciò deve essere compensato da un aumento della garanzia di minimo.

4.2.3 Probabilità di Insolvenza

Di seguito si analizza la relazione che intercorre tra la probabilità di insolvenza dell'assicuratore sull'intera durata contrattuale,

$$\mathbb{P}(\tau(\omega) \leq T),$$

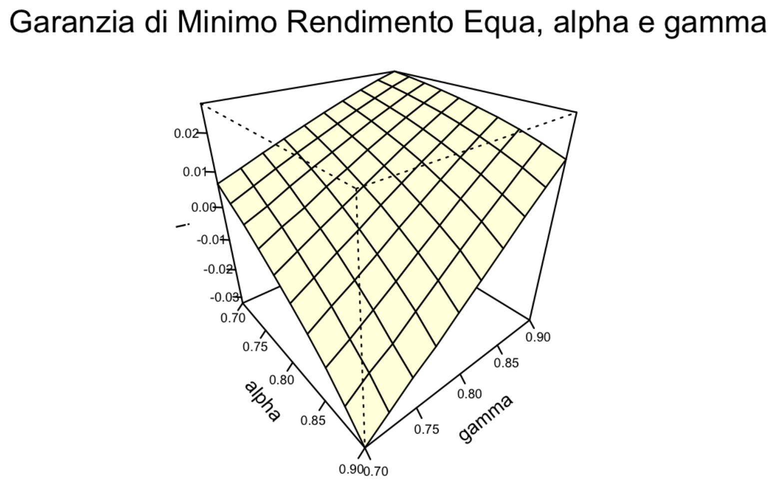

Figura 4.6: Garanzia di minimo rendimento equa i in funzione dell'aliquota α di partecipazione agli utili e della quota γ del valore del portafoglio di attivi investita nel titolo privo di rischio

e la garanzia di minimo rendimento i, il capitale allocato E, l'aliquota α di partecipazione agli utili e la quota γ di valore del portafoglio di attivi investita nel titolo privo di rischio.

I risultati numerici esposti di seguito sono stati ricavati sotto la misura realistica $\mathbb{P}$ mediante la funzione *MC_Ptf_Res* illustrata nell'Appendice C.

In figura 4.7 si riportano i grafici delle probabilità di insolvenza in funzione della garanzia di minimo rendimento i per tre livelli possibili di capitale allocato E. Si constata che la probabilità di insolvenza dell'assicuratore aumenta in funzione della garanzia di minimo rendimento i del fondo dell'assicurato, la quale misura l'esposizione dell'assicuratore nei confronti dell'assicurato. D'altra parte un maggior capitale allocato E aiuta a ridurre tale probabilità in quanto incrementa l'ammontare dell'investimento iniziale, dato dallo stesso più il premio incassato dall'assicurato: ci si può quindi riferire a tale capitale come a un capitale di solvibilità.

In figura 4.8 si riporta la mappa di calore della probabilità di insolvenza in funzione dei parametri di deriva μ e volatilità σ che caratterizzano la situazione dei mercati finanziari sotto $\mathbb{P}$ in base al modello di Black, Scholes e Merton. Al crescere di μ, il portafoglio di attivi diviene mediamente più

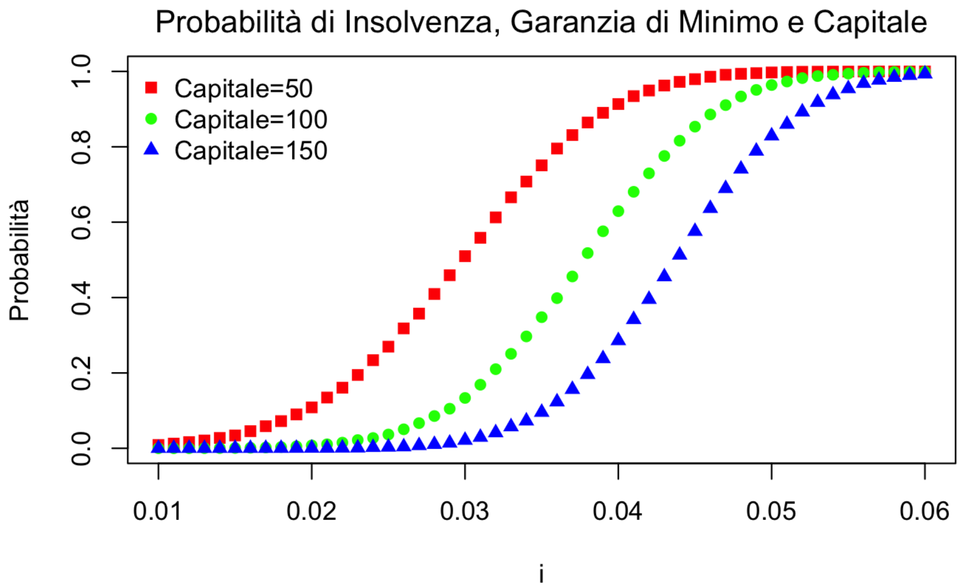

Figura 4.7: Probabilità di insolvenza sotto $\mathbb{P}$ in funzione della garanzia di minimo rendimento i e del capitale allocato E

redditizio e quindi la probabilità di insolvenza diminuisce; tuttavia il fatto che la strategia di investimento attuata dall'assicuratore preveda di investire in questo titolo solo il 10% del valore del portafoglio di attivi attenua questo fenomeno. D'altra parte la probabilità di insolvenza aumenta sensibilmente al crescere della volatilità di mercato σ, in quanto si prospettano per l'assicurato maggiori opportunità di rendimento sul mercato sotto forma di partecipazione agli utili.

In figura 4.9 si riporta la mappa di calore della probabilità di insolvenza in funzione dell'aliquota α del rendimento del portafoglio di attivi retrocesso all'assicurato e della quota γ del valore del portafoglio di attivi investito nel titolo privo di rischio. La probabilità di insolvenza aumenta al crescere di α, poiché all'assicurato spetta una quota sempre maggiore del rendimento del portafoglio di attivi a copertura della polizza. La probabilità di insolvenza diminuisce invece all'aumentare della quota γ di valore del portafoglio di attivi investita nel titolo privo di rischio in quanto, maggiore è tale quota, prevalente è l'investimento nel titolo privo di rischio e quindi meno soggetto alle oscillazioni del mercato finanziario è il portafoglio di attivi.

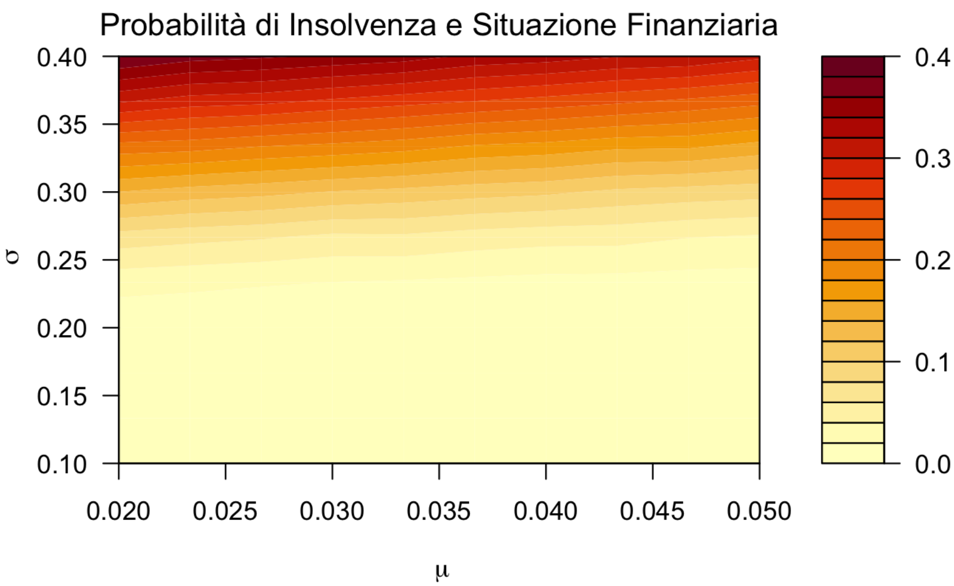

Figura 4.8: Probabilità di insolvenza sotto $\mathbb{P}$ in funzione del parametro di deriva μ e di volatilità σ

4.3 Portafoglio Eterogeneo

In questa sezione si fornisce un'applicazione numerica dei risultati teorici relativi a un portafoglio di contratti tra loro eterogenei di cui al Capitolo 3.

4.3.1 Portafoglio di Due Assicurati

Si analizza un portafoglio di due assicurati con le caratteristiche contrattuali riportate nella tabella 4.2:

k	P^k	E^k	α^k	i^k	T^k
1	1000	53	0.85	0.020	10
2	1000	250	0.95	0.009	20

Tabella 4.2: Caratteristiche contrattuali degli assicurati in portafoglio

Si osserva che, a fronte di una durata contrattuale T^k, $k = 1, 2$, e un'aliquota di partecipazione agli utili α^k, $k = 1, 2$, maggiori per il secondo assicu-

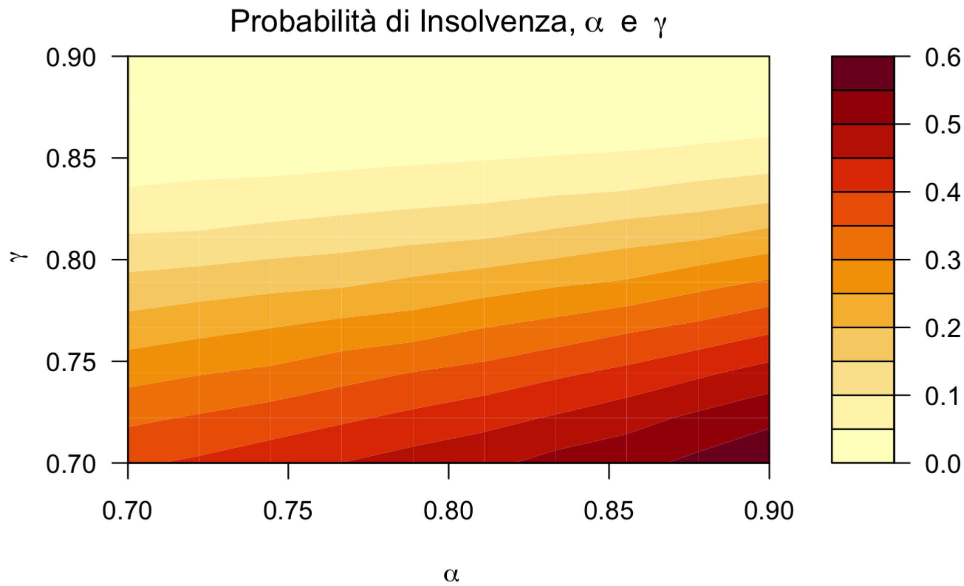

Figura 4.9: Probabilità di insolvenza sotto $\mathbb{P}$ in funzione dell'aliquota α di partecipazione agli utili da parte dell'assicurato e della quota γ del valore del portafoglio di attivi investita nel titolo privo di rischio

rato rispetto al primo, la quota di capitale allocato dall'assicuratore rispetto al premio versato $\frac{E^k}{P^k}$, $k = 1, 2$, è di conseguenza maggiore per il secondo assicurato rispetto al primo. Le garanzie di minimo rendimento sono state scelte in modo da rendere i rispettivi contratti equi su base individuale, ovvero per ciascuno di essi è verificata l'uguaglianza

$$P^k = E^{\mathbb{Q}}\Big[P^{(k)}(\omega, T^k)e^{-rT^k}\mathbb{1}_{\{\tau^{(k)}(\omega)>T^k\}}(\omega) \\ +A^{(k)-}(\omega, \tau^{(k)}(\omega))e^{-r\tau^{(k)}(\omega)}\mathbb{1}_{\{\tau^{(k)}(\omega)\leq T^k\}}(\omega)\Big], \quad k = 1, 2.$$

Si osserva l'effetto dell'interazione tra i due contratti in portafoglio, confrontando il valore attuale in 0 del beneficio atteso da ciascuno di essi,

$$EPV_{PH}^k = E^{\mathbb{Q}}\Big[\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)>T^k\}}(\omega)P^k(\omega, T^k)e^{-rT^k} \\ +\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)\leq T^k\}}(\omega)\frac{P^k(\omega, \tau(\omega))}{P(\omega, \tau(\omega))}A^-(\omega, \tau(\omega))e^{-r\tau(\omega)}\Big], \ k = 1, 2,$$

con il premio versato P^k.

Si vede dalla tabella 4.3 che l'inserimento in portafoglio è vantaggioso

k	EPV_{PH}^k	P^k	Δ^k
1	1001.086	1000	0.108%
2	940.999	1000	-5.900%

Tabella 4.3: Interazione tra i contratti in portafoglio

per il primo assicurato, mentre non lo è per il secondo. In ogni caso i due contratti, una volta inseriti nel portafoglio, non sono più equi alle condizioni contrattuali vigenti.

4.3.2 Aggiunta di un Nuovo Contratto al Portafoglio

Si immagina ora di aggiungere a questo portafoglio un nuovo contratto con i parametri riportati nella tabella 4.4, dove i^3 è stata scelta in modo da rendere

k	P^k	E^k	α^k	i^k	T^k
3	1000	111	0.9	0.016	15

Tabella 4.4: Parametri contrattuali del nuovo assicurato

il contratto equo.

Si osserva nella tabella 4.5 che l'inserimento del nuovo contratto all'inter-

k	EPV_{PH}^k	P^k	Δ^k
3	978.554	1000	-2.144%

Tabella 4.5: Valore attuale atteso per il nuovo contratto

no del portafoglio non lo rende più equo, bensì riduce il valore attuale in 0 del beneficio atteso,

$$EPV_{PH}^3 = E^{\mathbb{Q}}\Big[P^3(\omega, T^k)e^{-rT^3}\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)>T^3\}}(\omega) \\ + \frac{P^3(\omega,\tau(\omega))}{P(\omega,\tau(\omega))}A^-(\omega,\tau(\omega))e^{-r\tau(\omega)}\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)\le T^3\}}(\omega)\Big],$$

rispetto al premio P^3.

Ci si chiede allora se, dato il portafoglio di due contratti descritto sopra, esista almeno un nuovo contratto che sia equo nel caso in cui venga gestito separatamente dal portafoglio e nel caso in cui vi venga aggiunto. Formalmente, posto

$$\begin{aligned} & NEPV_{PH}^{(K+1)}(P^{K+1}, E^{K+1}, \alpha^{K+1}, i^{K+1}, T^{K+1}) \\ & \qquad = E^{\mathbb{Q}}\Big[P^{(K+1)}(\omega, T^{K+1})e^{-rT^{K+1}}\mathbb{1}_{\{\tau^{(K+1)}(\omega)>T^{K+1}\}}(\omega)+ \\ & \qquad\qquad +A^{(K+1)-}(\omega, \tau^{(K+1)}(\omega))e^{-r\tau^{(K+1)}(\omega)}\mathbb{1}_{\{\tau^{(K+1)}(\omega)\leq T^{K+1}\}}(\omega)\Big] - P^{K+1} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & NEPV_{PH}^{K+1}(P^{K+1}, E^{K+1}, \alpha^{K+1}, i^{K+1}, T^{K+1}) \\ & \qquad = E^{\mathbb{Q}}\Big[P^{K+1}(\omega, T^{K+1})e^{-rT^{K+1}}\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)>T^{K+1}\}}(\omega)+ \\ & \qquad\qquad +\frac{P^{K+1}(\omega, \tau(\omega))}{P(\omega, \tau(\omega))}A^{-}(\omega, \tau(\omega))e^{-r\tau(\omega)}\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)\leq T^{K+1}\}}(\omega)\Big] - P^{K+1}, \end{aligned}$$

si tratta di risolvere il sistema di due equazioni

$$\begin{cases} NEPV_{PH}^{(K+1)}(P^{K+1}, E^{K+1}, \alpha^{K+1}, i^{K+1}, T^{K+1}) = 0 \\ NEPV_{PH}^{K+1}(P^{K+1}, E^{K+1}, \alpha^{K+1}, i^{K+1}, T^{K+1}) = 0 \end{cases}$$

nelle cinque incognite

$$(P^{K+1}, E^{K+1}, \alpha^{K+1}, i^{K+1}, T^{K+1}).$$

Risolvere tale sistema equivale a trovare un punto di annullamento o, equivalentemente, un punto di minimo assoluto della funzione somma dei quadrati delle funzioni $NEPV_{PH}^{(K+1)}$ e $NEPV_{PH}^{K+1}$ sopra definite:

$$\begin{aligned} NEPV_{PH}^{(K+1)}(P^{K+1}, E^{K+1}, \alpha^{K+1}, i^{K+1}, T^{K+1})^2 & + \\ + NEPV_{PH}^{K+1}(P^{K+1}, E^{K+1}, \alpha^{K+1}, i^{K+1}, T^{K+1})^2 & . \end{aligned} \tag{4.1}$$

Si è scelto di procedere con la risoluzione del problema di minimizzazione della funzione somma dei quadrati.

A tale scopo si sono fissati i parametri relativi al premio versato, all'aliquota di partecipazione agli utili e alla durata contrattuale

$$(P^{K+1}, \alpha^{K+1}, T^{K+1}),$$

mentre si sono lasciati liberi di variare i parametri relativi al capitale allocato e alla garanzia di minimo rendimento

$$(E^{K+1}, i^{K+1}).$$

In figura 4.10 si mostra il grafico della somma dei quadrati come funzione di due variabili.

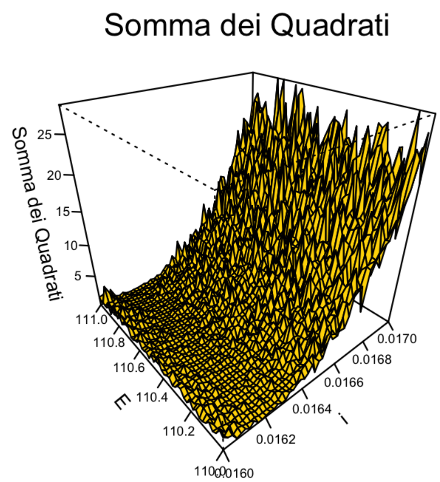

Figura 4.10: Grafico della funzione somma dei quadrati

Si nota che la funzione è oscillante e presenta molti punti di minimo relativo; di conseguenza risulta arduo individuare un buon punto di partenza per un algoritmo iterativo di ottimizzazione, fornito in questo caso dalla funzione *optim* disponibile nel pacchetto *stats* del linguaggio di programmazione *R*. Pertanto si è deciso di procedere nel seguente modo: si sono tabulati i valori della funzione somma dei quadrati allo scopo di trovare un punto iniziale soddisfacente e, a partire da questo, si è eseguito l'algoritmo iterativo, fissando una soglia di tolleranza pari a 0.5×10^{-3} per l'individuazione del punto di minimo assoluto. Un contratto che rappresenta una soluzione al problema di minimizzazione della somma dei quadrati descritto sopra è dunque rappresentato nella tabella 4.6.

k	P^k	E^k	i^k	α^k	T^k
3	1000	110.753	0.016	0.9	15

Tabella 4.6: Parametri contrattuali per il nuovo assicurato

Si osserva che per il terzo assicurato la garanzia di minimo rendimento equa i^3 è minore di quella del primo assicurato, ma maggiore di quella del secondo; viceversa il capitale richiesto E^3 per il terzo assicurato è maggiore di quello del primo assicurato e minore di quello del secondo.

Si considera ora nella tabella (4.7) l'impatto che l'aggiunta di questo nuovo contratto al portafoglio ha sul valore attuale in 0 del beneficio atteso rispetto al premio versato per i due assicurati già presenti in portafoglio.

k	EPV_{PH}^k	P^k	Δ^k
1	1001.659	1000	0.165%
2	942.239	1000	-5.776%

Tabella 4.7: Impatto sui contratti in portafoglio dell'aggiunta del nuovo assicurato

Si constata che l'aggiunta del terzo contratto al portafoglio è vantaggiosa per il primo assicurato, mentre è deleteria per il secondo assicurato.

Si conclude con un'analisi dell'impatto che l'aggiunta del nuovo contratto al portafoglio può avere sul valore attuale in 0 della remunerazione attesa dall'assicuratore,

$$EPV_{SH} = E^{\mathbb{Q}}\left[(A^-(\omega,T) - P(\omega,T))e^{-rT}\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)>T\}}(\omega)\right],$$

e sulla probabilità di insolvenza dello stesso,

$$PD = \mathbb{P}(\tau(\omega) \leq T).$$

La tabella 4.8

K	EPV_{SH}	PD
2	359.476	0.002%
3	492.642	0.01%

Tabella 4.8: Valore attuale in 0 della remunerazione attesa dall'assicuratore e probabilità di insolvenza prima e dopo l'aggiunta del nuovo contratto

evidenzia come l'aggiunta del nuovo contratto al portafoglio[21] incrementi il valore attuale in 0 della remunerazione attesa dall'assicuratore del 37% e la probabilità di insolvenza del 400%.

[21] Nella tabella 4.8 K è il numero di assicurati in portafoglio.

Conclusioni

In questo elaborato si è analizzato il problema della tariffazione "fair" di portafogli di contratti con partecipazione agli utili sia omogenei sia eterogenei tra loro, basandosi sul lavoro di Hieber et al. [15].

Allo scopo sono state formulate delle ipotesi per il mercato finanziario 2.1 e si è costruito un modello per la gestione del portafoglio di contratti assicurativi.

Si è dimostrato nel Capitolo 2 che, nel caso di un portafoglio omogeneo, per ogni contratto esiste unica la garanzia di minimo rendimento che lo rende equo, mentre nel Capitolo 3 si è provato che, dato un portafoglio di contratti tra loro eterogenei, esiste almeno un nuovo contratto tariffabile in modo equo sia quando viene gestito separatamente sia quando viene aggiunto al portafoglio.

Il Capitolo 4 riporta un'applicazione numerica di questi risultati teorici, adottando il modello di Black, Scholes e Merton per il mercato finanziario.

Di seguito si forniscono alcuni spunti per l'estensione dei modelli finanziario e "assicurativo" trattati in questo elaborato.

In particolare, per quanto riguarda il modello per il mercato finanziario da utilizzare nell'applicazione numerica, si potrebbero considerare modelli che introducono un processo stocastico per la struttura per scadenza dei tassi di interesse, quali quello di Vasicek.

Per quanto attiene invece al modello "assicurativo", si potrebbe innanzitutto riconoscere a scadenza all'assicurato il "Terminal Bonus" definito dall'equazione (1.2). Inoltre, poiché il modello analizza solo la componente finanziaria di questo tipo di polizze, mentre l'assicurato può ricevere un beneficio in caso di decesso oppure riscattare la polizza, una seconda e una terza estensione sono date, rispettivamente, dall'introduzione di un modello per la mortalità dell'assicurato e dalla modellizzazione dell'opzione di riscatto.

Appendice A

Strumenti di Calcolo delle Probabilità e Calcolo Stocastico

In questo capitolo si introducono gli strumenti di calcolo delle probabilità e stocastico utilizzati nell'elaborato. I testi di riferimento sono quelli di Klebaner [17], Lamberton e Lapeyre [20], Orsingher e Beghin [24] e Shreve [26].

Ipotesi A.1. *Nel seguito si fissa uno spazio di probabilità* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Interpretativamente, $\omega \in \Omega$ costituisce uno stato del mondo e $\mathbb{P}$ misura la probabilità realistica che esso si verifichi.

A.1 Calcolo delle Probabilità

In questa sezione si introducono nozioni di calcolo delle probabilità che vengono sfruttate nella sezione relativa al calcolo stocastico A.2 e nell'appendice B relativa al modello finanziario di Black, Scholes e Merton.

A.1.1 Distribuzioni Congiunte Normale e Log-Normale

Si definiscono le distribuzioni congiunte normale e log-normale.

Definizione A.1 (Distribuzione Congiunta Normale)**.** *Un vettore aleatorio* n*-dimensionale* $(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))^\intercal$ *ha distribuzione congiunta normale se* *la corrispondente densità di probabilità congiunta ha forma*

$$f_{(X_1,\ldots,X_n)}(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n|\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^\intercal\Sigma^{-1}(x-\mu)},\ x \in \mathbb{R}^n,$$

dove $\mu \in \mathbb{R}^n$ è il vettore dei valori attesi e Σ è la matrice di covarianza definita positiva.

Definizione A.2 (Distribuzione Congiunta Log-Normale)**.** *Dato un vettore aleatorio $(X_1(\omega),\ldots,X_n(\omega))^\intercal$ con distribuzione congiunta normale A.1, il vettore aleatorio $(Y_1(\omega),\ldots,Y_n(\omega))^\intercal$ ha distribuzione congiunta log-normale se*

$$F_{(\ln Y_1,\ldots,\ln Y_n)} = F_{(X_1,\ldots,X_n)}.$$

Osservazione A.1 (Densità di Probabilità della Distribuzione Congiunta Log-Normale)**.** Sfruttando il teorema del cambio di variabile per gli integrali multipli, si ottiene la densità della distribuzione congiunta log-normale

$$f_{(Y_1,\ldots,Y_n)}(y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n|\Sigma|}} \prod_{i=1}^{n} y_i^{-1} e^{-\frac{1}{2}(\ln y-\mu)^\intercal\Sigma^{-1}(\ln y-\mu)},\ y \in (0,+\infty)^n.$$

A.1.2 Equivalenza tra Misure di Probabilità e Teorema di Radon-Nikodym

Si definisce la proprietà di equivalenza tra misure di probabilità e si enuncia l'applicazione del teorema di Radon-Nikodym in ambito probabilistico. Queste nozioni vengono poi sfruttate nel teorema di Girsanov A.16.

Definizione A.3 (Equivalenza tra Misure di Probabilità)**.** *Due misure di probabilità $\mathbb{P}$ e $\mathbb{Q}$ sono equivalenti, ovvero $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$, se*

$$\mathbb{P}(A) = 0 \iff \mathbb{Q}(A) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Data una misura di probabilità, il seguente teorema illustra come costruirne una equivalente.

Teorema A.1. *Se $\mathbb{P}$ è una misura di probabilità e $\Lambda(\omega)$ è una variabile aleatoria tale che*

$$\Lambda(\omega) \geq 0\ \mathbb{P}\text{-}q.c.\ \text{ e } E^{\mathbb{P}}[\Lambda(\omega)] = 1,$$

allora

$$\mathbb{Q}(A) = E^{\mathbb{P}}\left[\Lambda(\omega)\mathbb{1}_A(\omega)\right] \;\; \forall A \in \mathcal{A}$$

è una misura di probabilità. Se $\Lambda(\omega)$ *è inoltre tale che*

$$\Lambda(\omega) > 0 \;\mathbb{P}\text{-}q.c.,$$

allora $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$.

Si definisce la derivata di Radon-Nikodym nel modo seguente.

Definizione A.4 (Derivata di Radon-Nikodym)**.** *Date due misure di probabilità equivalenti* $\mathbb{P}$ *e* $\mathbb{Q}$*, una variabile aleatoria* $\Lambda(\omega)$ *che soddisfa*

$$\Lambda(\omega) > 0 \;\mathbb{P}\text{-}q.c., \quad E^{\mathbb{P}}[\Lambda(\omega)] = 1 \quad e \quad \mathbb{Q}(A) = E^{\mathbb{P}}\left[\Lambda(\omega)\mathbb{1}_A(\omega)\right] \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

è detta derivata di Radon-Nikodym, o densità di $\mathbb{Q}$ *rispetto a* $\mathbb{P}$ *(e viceversa).*

Il seguente teorema stabilisce l'esistenza della derivata di Radon-Nikodym.

Teorema A.2 (Teorema di Radon-Nikodym)**.** *Date due misure di probabilità equivalenti* $\mathbb{P}$ *e* $\mathbb{Q}$*, esiste la derivata di Radon-Nikodym A.4 di* $\mathbb{Q}$ *rispetto a* $\mathbb{P}$ *(e viceversa).*

A.1.3 Convergenza di Variabili Aleatorie

Si definiscono nel seguito alcune nozioni di convergenza di variabili aleatorie, rilevanti ai fini della costruzione dell'integrale stocastico.

Definizione A.5 (Convergenza in Probabilità)**.** *Una successione di variabili aleatorie* $\{X_n(\omega)\}_{n\geq 1}$ *converge alla variabile aleatoria* $X(\omega)$ *in probabilità* $\mathbb{P}$ *se*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n(\omega) - X(\omega)| < \epsilon) = 1 \quad \forall \epsilon > 0.$$

In base al seguente teorema la convergenza in probabilità si preserva per cambi equivalenti di misure di probabilità.

Teorema A.3 (Convergenza in Probabilità ed Equivalenza tra Misure di Probabilità)**.** *Se* $\{X_n(\omega)\}_{n\geq 1}$ *converge a* $X(\omega)$ *in probabilità* $\mathbb{P}$ *e* $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$*, allora* $\{X_n(\omega)\}_{n\geq 1}$ *converge a* $X(\omega)$ *in probabilità* $\mathbb{Q}$*.*

Si definisce la convergenza in media r-esima, $r \geq 1$, anche se nel seguito si fa uso solamente del caso $r = 2$, altrimenti detto convergenza in media quadratica.

Definizione A.6 (Convergenza in Media r-esima)**.** *Una successione di variabili aleatorie* $\{X_n(\omega)\}_{n\geq 1}$ *converge alla variabile aleatoria* $X(\omega)$ *in media* r*-esima,* $r \geq 1$*, se*

$$E^{\mathbb{P}}[|X_n(\omega)|^r] < +\infty,\ n \geq 1$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} E^{\mathbb{P}}[|X_n(\omega) - X(\omega)|^r] = 0.$$

A.1.4 Convergenza del Valore Atteso

Si enunciano ora due teoremi riguardanti la convergenza del valore atteso di variabili aleatorie che vengono utilizzati nelle dimostrazioni dei teoremi nei capitoli 2 e 3.

Teorema A.4 (Teorema della Convergenza Monotona)**.** *Se* $\{X_n(\omega)\}_{n\geq 1}$ *è una successione di variabili aleatorie tali che*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n(\omega) - X(\omega)| < \epsilon) = 1\ \forall \epsilon > 0$$

e

$$0 \leq X_m(\omega) \leq X_n(\omega), \quad m < n\ \mathbb{P}\text{-}q.c.,$$

allora:

$$\lim_{n\to+\infty} E^{\mathbb{P}}[X_n(\omega)] = E^{\mathbb{P}}[X(\omega)].$$

Teorema A.5 (Teorema della Convergenza Dominata)**.** *Se* $\{X_n(\omega)\}_{n\geq 1}$ *è una successione di variabili aleatorie tali che*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n(\omega) - X(\omega)| < \epsilon) = 1\ \forall \epsilon > 0$$

e

$$|X_n(\omega)| \leq Z(\omega),\ n \geq 1\ \mathbb{P}\text{-}q.c.,$$

dove

$$E^{\mathbb{P}}[|Z(\omega)|] < +\infty,$$

allora

$$\lim_{n\to+\infty} E^{\mathbb{P}}[X_n(\omega)] = E^{\mathbb{P}}[X(\omega)].$$

A.2 Calcolo Stocastico

In questa sezione si fornisce una breve panoramica della teoria dei processi stocastici per descrivere gli strumenti utilizzati nelle dimostrazioni dei teoremi nei capitoli 2 e 3 e nell'appendice B.

A.2.1 Proprietà dei Processi Stocastici

Si danno le definizioni di processo stocastico misurabile, continuo e integrabile.

Definizione A.7 (Processo Stocastico Misurabile). *Un processo stocastico* $\{X(\omega,t)\}_{0\le t\le T}$ *è misurabile se l'applicazione* $(\omega,t)\to X(\omega,t)$ *è* $(\mathcal{A}\times\mathcal{B}([0,T]))$*-misurabile.*

Ipotesi A.2. *Nel seguito i processi stocastici sono assunti essere misurabili.*

Definizione A.8 (Processo Stocastico Continuo). *Un processo stocastico* $\{X(\omega,t)\}_{0\le t\le T}$ *è continuo se le relative traiettorie sono continue* $\mathbb{P}$*-q.c..*

Definizione A.9 (Processo Stocastico Integrabile). *Un processo stocastico* $\{X(\omega,t)\}_{0\le t\le T}$ *è p-integrabile,* $p=1,2$*, se soddisfa*

$$E^{\mathbb{P}}[|X(\omega,t)|^p]<+\infty,\quad 0\le t\le T.$$

A.2.2 Filtrazione

Si introducono le nozioni di filtrazione, di spazio di probabilità filtrato e di processo stocastico adattato a una filtrazione.

Definizione A.10 (Filtrazione). *Una filtrazione è una famiglia crescente di sotto* σ*-algebre di* $\mathcal{A}$*,* $\{\mathcal{F}(t)\}_{0\le t\le T}$*.*

Interpretativamente, $\mathcal{F}(t)$ rappresenta il livello di informazione disponibile all'epoca $0\le t\le T$.

Definizione A.11 (Filtrazione Naturale di un Processo Stocastico). *Dato un processo stocastico* $\{X(\omega,t)\}_{0\le t\le T}$*, la famiglia di* σ*-algebre generate dallo stesso,*

$$\mathcal{F}(t)=\sigma\{X(\omega,s),0\le s\le t\},\ 0\le t\le T,$$

è una filtrazione, detta filtrazione naturale del processo stocastico.

Definizione A.12 (Spazio di Probabilità Filtrato). *Uno spazio di probabilità* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *equipaggiato con una filtrazione* $\{\mathcal{F}(t)\}_{0 \leq t \leq T}$ *è detto filtrato e si indica con* $(\Omega, \mathcal{A}, \{\mathcal{F}(t)\}_{0 \leq t \leq T}, \mathbb{P})$.

Ipotesi A.3. *Nel seguito si fissa uno spazio di probabilità filtrato* $(\Omega, \mathcal{A}, \{\mathcal{F}(t)\}_{0 \leq t \leq T}, \mathbb{P})$.

Definizione A.13 (Processo Stocastico Adattato alla Filtrazione). *Un processo stocastico* $\{X(\omega, t)\}_{0 \leq t \leq T}$ *è adattato alla filtrazione* $\{\mathcal{F}(t)\}_{0 \leq t \leq T}$ *se* $X(\omega, t)$ *è* $\mathcal{F}(t)$*-misurabile,* $0 \leq t \leq T$.

A.2.3 Martingala e Tempo d'Arresto

Si introduce ora la proprietà di martingala (supermartingala) dei processi stocastici che è alla base della definizione di misura di probabilità martingala equivalente B.3.

Definizione A.14 (Martingala e Supermartingala). *Un processo stocastico* $\{M(\omega, t)\}_{0 \leq t \leq T}$ *adattato alla filtrazione e integrabile è una martingala se*

$$M(\omega, s) = E^{\mathbb{P}}[M(\omega, t) \,|\, \mathcal{F}(s)], \quad 0 \leq s < t \leq T,$$

mentre è una supermartingala se

$$M(\omega, s) \geq E^{\mathbb{P}}[M(\omega, t) \,|\, \mathcal{F}(s)], \quad 0 \leq s < t \leq T.$$

Si definisce la variabile aleatoria "tempo d'arresto" e se ne enunciano alcune sue proprietà.

Definizione A.15 (Tempo d'Arresto). *La variabile aleatoria* $\tau(\omega)$ *a valori in* $[0, +\infty]$ *è un tempo di arresto se*

$$\{\tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Teorema A.6 (Proprietà del Tempo d'Arresto). *Un tempo d'arresto soddisfa le seguenti proprietà:*

1. *se* $\tau_1(\omega)$ *e* $\tau_2(\omega)$ *sono due tempi d'arresto, allora*

$$\min\{\tau_1(\omega), \tau_2(\omega)\}, \max\{\tau_1(\omega), \tau_2(\omega)\} \text{ e } \tau_1(\omega) + \tau_2(\omega)$$

   sono tempi d'arresto;

2. *Se* $\{X(\omega,t)\}_{0\le t\le T}$ *è un processo stocastico adattato alla filtrazione e* $A \in \mathcal{A}$, *allora*

$$\tau_A(\omega) = \inf\{0 \le t \le T \,|\, X(\omega,t) \in A\}$$[22]

è un tempo d'arresto.

Mediante la variabile aleatoria "tempo d'arresto" si introduce la nozione di processo stocastico arrestato.

Definizione A.16 (Processo Stocastico Arrestato)**.** *Dato un processo stocastico* $\{X(\omega,t)\}_{0\le t\le T}$ *adattato alla filtrazione e un tempo d'arresto* $\tau(\omega)$, *si definisce il processo arrestato* $\{X(\omega,\min\{t,\tau(\omega)\})\}_{0\le t\le T}$.

Il seguente teorema assicura che una martingala (supermartingala) arrestata è ancora una martingala (supermartingala).

Teorema A.7 (Teorema di Arresto Opzionale)**.** *Se* $\{M(\omega,t)\}_{0\le t\le T}$ *è una martingala/supermartingala e* $\tau(\omega)$ *è un tempo d'arresto, allora la martingala/supermartingala arrestata* $\{M(\omega,\min\{t,\tau(\omega)\})\}_{0\le t\le T}$ *è ancora una martingala/supermartingala.*

A.2.4 Processi Gaussiani e di Moto Browniano

Si definisce il processo stocastico gaussiano.

Definizione A.17 (Processo Stocastico Gaussiano)**.** *Un processo stocastico* $\{X(\omega,t)\}_{0\le t\le T}$ *è detto gaussiano se, fissati arbitrariamente* n *e* $0 < t_1 < \cdots < t_n$, *il vettore aleatorio* $(X(\omega,t_1),\ldots,X(\omega,t_n))^\intercal$ *ha distribuzione congiunta normale A.1.*

Si introduce il processo stocastico di moto browniano che viene utilizzato nei modelli dell'"Option Pricing", quali quello di Black, Scholes e Merton, per modellare la fonte di incertezza e se ne enunciano alcune utili proprietà.

Definizione A.18 (Moto Browniano (Standard) rispetto a una Filtrazione)**.** *Un processo* $\{W^{\mathbb{P}}(\omega,t)\}_{0\le t\le T}$ *adattato alla filtrazione è un moto browniano se*

1. *assume valore* 0 *all'istante* 0 $\mathbb{P}$*-q.c.*

$$\mathbb{P}(W^{\mathbb{P}}(\omega,0)=0)=1;$$

[22] Con la convenzione che, se $\{t \ge 0 \,|\, X(\omega,t) \in A\} = \emptyset$, allora $\tau_A(\omega) = +\infty$.

2. *ha incrementi indipendenti rispetto alla filtrazione, ovvero:*

$$W^{\mathbb{P}}(\omega,t) - W^{\mathbb{P}}(\omega,s) \text{ è indipendente da } \mathcal{F}(s),\ 0 \le s < t \le T;$$

3. *ha incrementi distribuiti come una variabile aleatoria normale:*

$$W^{\mathbb{P}}(\omega,t) - W^{\mathbb{P}}(\omega,s) \sim N(0, t-s), \quad 0 \le s < t \le T.$$

Teorema A.8 (Proprietà del Moto Browniano)**.** *Il moto browniano gode delle seguenti proprietà:*

1. *continuità;*
2. *martingala;*
3. *ha covarianza pari a*

$$Cov^{\mathbb{P}}[W^{\mathbb{P}}(\omega,s), W^{\mathbb{P}}(\omega,t)] = s, \quad 0 \le s < t \le T;$$

4. *è un processo stocastico gaussiano.*

Dimostrazione. Si provano le proprietà sopra enunciate.

1. si rimanda al testo di Orsingher e Beghin [24];
2. Il moto browniano è adattato alla filtrazione e integrabile; inoltre si osserva che, per $0 \le s < t \le T$,

$$\begin{aligned} E^{\mathbb{P}}[W^{\mathbb{P}}(\omega,t) \,|\, \mathcal{F}(s)] &= E^{\mathbb{P}}[(W^{\mathbb{P}}(\omega,t) - W^{\mathbb{P}}(\omega,s)) + W^{\mathbb{P}}(\omega,s) \,|\, \mathcal{F}(s)] \\ &= E^{\mathbb{P}}[W^{\mathbb{P}}(\omega,t) - W^{\mathbb{P}}(\omega,s) \,|\, \mathcal{F}(s)] + W^{\mathbb{P}}(\omega,s) \\ &= E^{\mathbb{P}}[W^{\mathbb{P}}(\omega,t)) - W^{\mathbb{P}}(\omega,s)] + W^{\mathbb{P}}(\omega,s) \\ &= W^{\mathbb{P}}(\omega,s). \end{aligned}$$

3. Supposto $0 \le s < t \le T$, si osserva che

$$\begin{aligned} Cov^{\mathbb{P}}[W^{\mathbb{P}}(\omega,s), W^{\mathbb{P}}(\omega,t)] &= E^{\mathbb{P}}[W^{\mathbb{P}}(\omega,s)W^{\mathbb{P}}(\omega,t)] \\ &= E^{\mathbb{P}}[W^{\mathbb{P}}(\omega,s)(W^{\mathbb{P}}(\omega,t) - W^{\mathbb{P}}(\omega,s) + W^{\mathbb{P}}(\omega,s)^2] \\ &= E^{\mathbb{P}}[W^{\mathbb{P}}(\omega,s)]E^{\mathbb{P}}[W^{\mathbb{P}}(\omega,t) - W^{\mathbb{P}}(\omega,s)] + E^{\mathbb{P}}[W^{\mathbb{P}}(\omega,s)^2] \\ &= Var^{\mathbb{P}}[W^{\mathbb{P}}(\omega,s)] = s. \end{aligned}$$

4. Fissati arbitrariamente n e $t_1 < \ldots < t_n$, gli incrementi

$$W^{\mathbb{P}}(\omega, t_1), \ldots, W^{\mathbb{P}}(\omega, t_n) - W^{\mathbb{P}}(\omega, t_{n-1})$$

sono stocasticamente indipendenti e hanno distribuzione normale. Quindi il corrispondente vettore aleatorio ha distribuzione congiunta normale. Di conseguenza il vettore aleatorio

$$\begin{bmatrix} W^{\mathbb{P}}(\omega, t_1) \\ \vdots \\ W^{\mathbb{P}}(\omega, t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^{\mathbb{P}}(\omega, t_1) \\ \vdots \\ W^{\mathbb{P}}(\omega, t_1) + \sum_{i=2}^{n} (W^{\mathbb{P}}(\omega, t_i) - W^{\mathbb{P}}(\omega, t_{i-1})) \end{bmatrix}$$

ha anch'esso distribuzione congiunta normale. □

La figura A.1 mostra le traiettorie di un moto browniano.

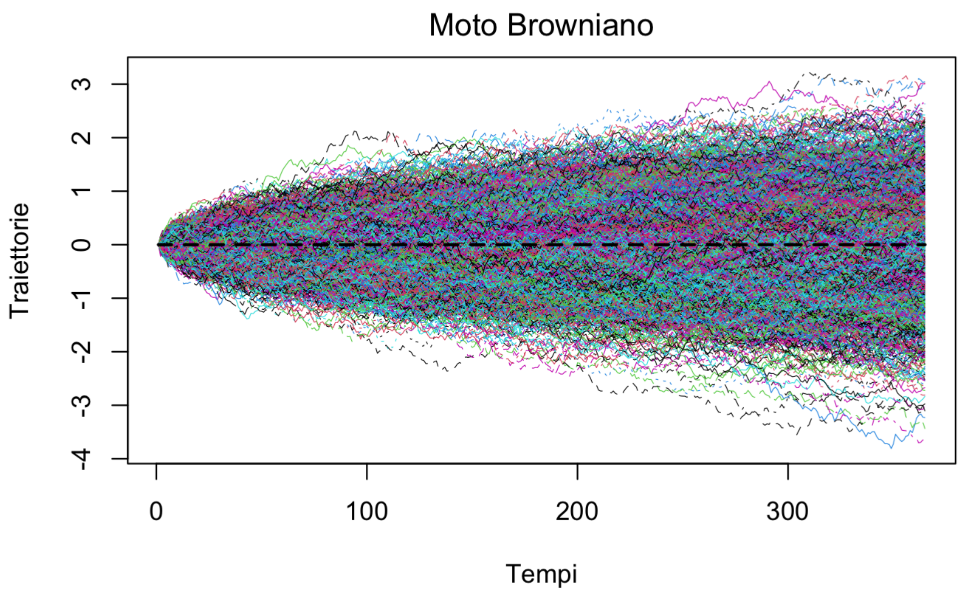

Figura A.1: Traiettorie di un moto browniano

A.2.5 Integrale Stocastico

In questa sezione si introduce il concetto di integrale stocastico di un processo stocastico $\{X(\omega, t)\}_{0 \le t \le T}$ rispetto a un moto browniano $\{W^{\mathbb{P}}(\omega, t)\}_{0 \le t \le T}$

sotto $\mathbb{P}$:

$$I(\omega,t)=\int_0^t X(\omega,s)dW^{\mathbb{P}}(\omega,s),\quad 0\leq t\leq T.$$

Tale integrale si costruisce per processi stocastici $\{X(\omega,t)\}_{0\leq t\leq T}$ dapprima semplici, poi adattati alla filtrazione che soddisfano

$$E^{\mathbb{P}}\left[\int_0^T X(\omega,t)^2dt\right]<+\infty, \tag{A.1}$$

e infine adattati alla filtrazione che soddisfano

$$\int_0^T X(\omega,t)^2dt<+\infty,\ \ \mathbb{P}\text{-q.c.}. \tag{A.2}$$

Definizione A.19 (Processo Stocastico Semplice)**.** *Un processo stocastico* $\{X(\omega,t)\}_{0\leq t\leq T}$ *è semplice se*

$$X(\omega,t)=\sum_{k=1}^n f_k(\omega)\mathbb{1}_{(t_{k-1},t_k]}(t).$$

dove $0=t_0<t_1<\ldots<t_n=T$ *e* $f_k(\omega)$*,* $k=1,\ldots,n$*, sono variabili aleatorie* $\mathcal{F}(t_{k-1})$*-misurabili e limitate.*

Definizione A.20 (Integrale Stocastico di un Processo Stocastico Semplice)**.** *L'integrale stocastico* $\{I(\omega,t)\}_{0\leq t\leq T}$ *di un processo stocastico semplice A.19* $\{X(\omega,t)\}_{0\leq t\leq T}$ *è dato da*

$$I(\omega,t)=\sum_{k=1}^n f_k(\omega)(W^{\mathbb{P}}(\omega,\min\{t,t_k\})-W^{\mathbb{P}}(\omega,\min\{t,t_{k-1}\})),\quad 0\leq t\leq T. \tag{A.3}$$

Teorema A.9 (Proprietà dell'Integrale Stocastico di un Processo Stocastico Semplice)**.** *L'integrale stocastico* $\{I(\omega,t)\}_{0\leq t\leq T}$ *di un processo stocastico semplice* $\{X(\omega,t)\}_{0\leq t\leq T}$ *soddisfa le seguenti proprietà:*

1. *continuità;*

2. *martingala;*

3. *isometria di Itô:*

$$E^{\mathbb{P}}\left[I(\omega,t)^2\right] = E^{\mathbb{P}}\left[\int_0^t X(\omega,s)^2 ds\right], \quad 0 \le t \le T;$$

4. $E^{\mathbb{P}}\left[\sup_{0\le t\le T} I(\omega,t)^2\right] \le 4E^{\mathbb{P}}\left[\int_0^T X(\omega,s)^2 ds\right]$.

Teorema A.10. *Se* $\{X(\omega,t)\}_{0\le t\le T}$ *è un processo stocastico adattato alla filtrazione che soddisfa (A.1), allora l'integrale stocastico* $\{I(\omega,t)\}_{0\le t\le T}$ *esiste ed è unico* $\mathbb{P}$*-q.c.; inoltre soddisfa le seguenti proprietà:*

1. *linearità;*

2. *continuità;*

3. *martingala;*

4. *se* $\{X(\omega,t)\}_{0\le t\le T}$ *è un processo semplice, allora* $\{I(\omega,t)\}_{0\le t\le T}$ *coincide con (A.3)* $\mathbb{P}$*-q.c.;*

5. *isometria di Itô:*

$$E^{\mathbb{P}}\left[I(\omega,t)^2\right] = E^{\mathbb{P}}\left[\int_0^t X(\omega,s)^2 ds\right], \quad 0 \le t \le T;$$

6. $E^{\mathbb{P}}\left[\sup_{0\le t\le T} I(\omega,t)^2\right] \le 4E^{\mathbb{P}}\left[\int_0^T X(\omega,s)^2 ds\right]$;

7. *se* $\tau(\omega)$ *è un tempo d'arresto, allora*

$$I(\omega,\tau(\omega)) = \int_0^T \mathbb{1}_{\{s\le\tau(\omega)\}} X(\omega,t) dW^{\mathbb{P}}(\omega,t) \quad \mathbb{P}\text{-}q.c.$$

Osservazione A.2 (Integrale Stocastico e Convergenza in Media Quadratica)**.** Si dimostra che, se $\{X(\omega,t)\}_{0\le t\le T}$ è un processo stocastico adattato alla filtrazione che soddisfa (A.1), allora esiste una successione di processi stocastici semplici $\{\{X_n(\omega,t)\}_{0\le t\le T}\}_{n\ge1}$ tale che

$$\lim_{n\to+\infty} E^{\mathbb{P}}\left[\int_0^T (X_n(\omega,t) - X(\omega,t))^2 dt\right] = 0.$$

Teorema A.11. *Se $\{X(\omega,t)\}_{0\leq t\leq T}$ un processo stocastico adattato alla filtrazione che soddisfa (A.2), allora l'integrale stocastico $\{I(\omega,t)\}_{0\leq t\leq T}$ esiste ed è unico $\mathbb{P}$-q.c.; inoltre soddisfa le seguenti proprietà:*

1. *linearità;*
2. *estensione, ovvero se $\{X(\omega,t)\}_{0\leq t\leq T}$ è un processo semplice, allora $\{I(\omega,t)\}_{0\leq t\leq T}$ coincide con (A.3) $\mathbb{P}$-q.c.;*
3. *continuità, ovvero se $\{\{X_n(\omega,t)\}_{0\leq t\leq T}\}_{n\geq 1}$ è una successione di processi adattati che soddisfano (A.2) e sono tali che $\{\int_0^T X_n(\omega,t)^2 dt\}_{n\geq 1}$ converge a 0 in probabilità $\mathbb{P}$, allora $\{\sup_{0\leq t\leq T}|I_n(\omega,t)|\}_{n\geq 1}$ converge a 0 in probabilità $\mathbb{P}$.*

Osservazione A.3 (Integrale Stocastico e Convergenza in Probabilità)**.** Si dimostra che, se $\{X(\omega,t)\}_{0\leq t\leq T}$ è un processo stocastico adattato alla filtrazione che soddisfa (A.2), allora esiste una successione $\{\{X_n(\omega,t)\}_{0\leq t\leq T}\}_{n\geq 1}$ di processi stocastici semplici tale che $\left\{\int_0^T (X_n(\omega,t)-X(\omega,t))^2 dt\right\}_{n\geq 1}$ converge a 0 in probabilità $\mathbb{P}$.

Osservazione A.4 (Invarianza dell'Integrale Stocastico per Cambi Equivalenti di Misure di Probabilità)**.** Si dimostra che l'integrale stocastico si preserva per cambi equivalenti di misure di probabilità.

Teorema A.12. *Se l'integrale stocastico $\{I(\omega,t)\}_{0\leq t\leq T}$ di un processo stocastico $\{X(\omega,t)\}_{0\leq t\leq T}$ adattato che soddisfa (A.2) verifica*

$$E^{\mathbb{P}}\left[\sup_{0\leq t\leq T} I(\omega,t)^2\right] < +\infty,$$

allora il processo stocastico $\{X(\omega,t)\}_{0\leq t\leq T}$ soddisfa (A.1).

A.2.6 Processo di Itô e Lemma di Itô

Si introducono i processi di Itô, ai quali si applica il Lemma di Itô.

Definizione A.21 (Processo di Itô)**.** *Si definisce processo di Itô il seguente processo stocastico:*

$$X(\omega,t) = X(\omega,0) + \int_0^t \mu_X(\omega,s)ds + \int_0^t \sigma_X(\omega,s)dW^{\mathbb{P}}(\omega,s), \quad 0\leq t\leq T, \tag{A.4}$$

dove

- $X(\omega, 0)$ *è* $\mathcal{F}(0)$*-misurabile;*
- $\{\mu_X(\omega, t)\}_{0\leq t\leq T}$ *è un processo stocastico adattato alla filtrazione e tale che*
$$\int_0^T |\mu_X(\omega, t)|dt < +\infty \quad \mathbb{P}\text{-}q.c.;$$
- $\{\sigma_X(\omega, t)\}_{0\leq t\leq T}$ *è un processo stocastico adattato alla filtrazione e tale che*
$$\int_0^T \sigma_X(\omega, t)^2 dt < +\infty \quad \mathbb{P}\text{-}q.c.$$

La corrispondente scrittura in forma differenziale è

$$dX(\omega, t) = \mu_X(\omega, t)dt + \sigma_X(\omega, t)dW^{\mathbb{P}}(\omega, t) \quad 0 \leq t \leq T.$$

Si enuncia ora il lemma di Itô che estende le regole del calcolo differenziale agli integrali stocastici: si parla in questo senso di calcolo stocastico.

Teorema A.13 (Lemma di Itô)**.** *Se $f(x)$ è una funzione due volte derivabile con derivate continue e $\{X(\omega, t)\}_{0\leq t\leq T}$ è un processo di Itô definito dall'equazione* (A.4)*, allora si ha:*

$$f(X(\omega, t)) = f(X(\omega, 0)) + \int_0^t f'(X(\omega, s))dX(\omega, s) + \int_0^t \frac{1}{2} f''(X(\omega, s))d[X, X](\omega, s), \; 0 \leq t \leq T,$$

dove si definiscono

$$\int_0^t f'(X(\omega, s))dX(\omega, s) = \int_0^t f'(X(\omega, s))\mu_X(\omega, s)ds + \int_0^t f''(X(\omega, s))\sigma_X(\omega, s)dW^{\mathbb{P}}(\omega, s), \quad 0 \leq t \leq T.$$

e

$$[X, X](\omega, t) = \int_0^t \sigma_X(\omega, s)^2 ds, \quad 0 \leq t \leq T.$$

La corrispondente scrittura in forma differenziale è

$$df(X(\omega, t)) = f'(X(\omega, t), t)dX(\omega, t) + \frac{1}{2} f''(X(\omega, t), t)d[X, X](\omega, t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Si enuncia la versione stocastica dell'espressione per la derivata del prodotto di due funzioni.

Corollario A.1 (Regola del prodotto di Itô)**.** *Se* $\{X(\omega,t)\}_{0\leq t\leq T}$ *e* $\{Y(\omega,t)\}_{0\leq t\leq T}$ *sono due processi di Itô definiti dall'equazione* (A.4)*, allora si ha:*

$$\begin{aligned}X(\omega,t)Y(\omega,t) = &X(\omega,0)Y(\omega,0) + \int_0^t X(\omega,s)dY(\omega,s)\\ &+ \int_0^t Y(\omega,s)dX(\omega,s) + \int_0^t d[X,Y](\omega,s), \quad 0\leq t\leq T,\end{aligned}$$

dove si definisce

$$[X,Y](\omega,t) = \int_0^t \sigma_X(\omega,s)\sigma_Y(\omega,s)ds, \quad 0\leq t\leq T.$$

La corrispondente scrittura in forma differenziale è

$$\begin{aligned}d(X(\omega,t)Y(\omega,t)) = X(\omega,t)dY(\omega,t) + Y(\omega,t)dX(\omega,t) + d[X,Y](\omega,t),\\ 0\leq t\leq T.\end{aligned}$$

A.2.7 Equazioni Differenziali Stocastiche

In questa sezione si introducono i concetti di equazione differenziale stocastica e di soluzione per questo tipo di equazioni e si fornisce una condizione sufficiente per l'esistenza e l'unicità di quest'ultima.

Le equazioni differenziali stocastiche sono rilevanti allorché i processi stocastici solitamente utilizzati per modellare grandezze finanziarie, quali il prezzo di uno strumento finanziario rischioso oppure la struttura per scadenza dei tassi di interesse, sono soluzioni di tali equazioni.

Definizione A.22 (Equazione Differenziale Stocastica)**.** *Un'equazione differenziale stocastica è un'equazione della forma:*

$$dX(\omega,t) = \mu(X(\omega,t),t)dt + \sigma(X(\omega,t),t)dW^{\mathbb{P}}(\omega,t), \quad 0\leq t\leq T, \tag{A.5}$$

dove $\mu:\mathbb{R}\times[0,T]\to\mathbb{R}$ *è detta deriva,* $\sigma:\mathbb{R}\times[0,T]\to\mathbb{R}$ *è detta diffusione e* $\{W^{\mathbb{P}}(\omega,t)\}_{0\leq t\leq T}$ *è un moto browniano sotto* $\mathbb{P}$*. La scrittura in forma integrale* *dell'equazione* (A.5) *è*

$$X(\omega,t) = X(\omega,0) + \int_0^t \mu(X(\omega,s),s)ds + \int_0^t \sigma(X(\omega,s),s)dW^{\mathbb{P}}(\omega,s), \qquad 0 \le t \le T.$$

A un'equazione differenziale stocastica si può associare una condizione iniziale del tipo

$$X(\omega,0) = X_0(\omega),$$

dove $X_0(\omega)$ *è* $\mathcal{F}(0)$*-misurabile. Si considera allora il problema*

$$\begin{cases} dX(\omega,t) = \mu(X(\omega,t),t)dt + \sigma(X(\omega,t),t)dW^{\mathbb{P}}(\omega,t), \ 0 \le t \le T, \\ X(\omega,0) = X_0(\omega), \end{cases} \tag{A.6}$$

la cui corrispondente scrittura in forma integrale è

$$X(\omega,t) = X_0(\omega) + \int_0^t \mu(X(\omega,s),s)ds + \int_0^t \sigma(X(\omega,s),s)dW^{\mathbb{P}}(\omega,s), \qquad 0 \le t \le T.$$

Definizione A.23 (Soluzione di un'Equazione Differenziale Stocastica)**.** *Un processo stocastico* $\{X(\omega,t)\}_{0\le t\le T}$ *è una soluzione del problema* (A.6) *se è adattato alla filtrazione, continuo e soddisfa* $\mathbb{P}$*-q.c.*

1. $\int_0^t |\mu(X(\omega,s),s)|ds < +\infty$ *e* $\int_0^t |\sigma(X(\omega,s),s)|^2 ds < +\infty$, $0 \le t \le T$*;*
2. $X(\omega,t) = X_0(\omega) + \int_0^t \mu(X(\omega,s),s)ds + \int_0^t \sigma(X(\omega,s),s)dW^{\mathbb{P}}(\omega,s)$, $0 \le t \le T$.

Teorema A.14 (Esistenza e Unicità della Soluzione di un'Equazione Differenziale Stocastica)**.** *Se le funzioni* $\mu : \mathbb{R}\times[0,T] \to \mathbb{R}$ *e* $\sigma : \mathbb{R}\times[0,T] \to \mathbb{R}$ *sono continue, la variabile aleatoria* $X_0(\omega)$ *è* $\mathcal{F}(0)$*-misurabile e sono soddisfatte le seguenti condizioni:*

- *di Lipschitz uniforme, ovvero esiste* $L \in \mathbb{R}^+$ *tale che, per ogni* $x, y \in \mathbb{R}$ *e* $t \in [0,T]$*,*

$$|\mu(x,t) - \mu(y,t)| + |\sigma(x,t) - \sigma(y,t)| \le L|x-y|;$$

- *di crescita lineare, ovvero esiste* $K \in \mathbb{R}^+$ *tale che, per ogni* $x \in \mathbb{R}$ *e* $t \in [0, T]$,
$$|\mu(x,t)| + |\sigma(x,t)| \leq K(1 + |x|);$$
- $E^{\mathbb{P}}[X_0(\omega)^2] < +\infty$,

allora esiste una soluzione $\{X(\omega,t)\}_{0 \leq t \leq T}$ *del problema* (A.6) *ed è unica* $\mathbb{P}$-*q.c.. Inoltre tale soluzione soddisfa*

$$E^{\mathbb{P}}\left[\sup_{0 \leq t \leq T} X(\omega,t)^2\right] < +\infty.$$

A.2.8 Moto Browniano Geometrico

Si definisce in questa sezione il processo stocastico di moto browniano geometrico, utilizzato nel modello di Black, Scholes e Merton per modellare la dinamica del prezzo del titolo rischioso.

Definizione A.24 (Moto Browniano Geometrico)**.** *Si dice moto browniano geometrico il processo soluzione del problema*

$$\begin{cases} dX(\omega,t) = \mu X(\omega,t)dt + \sigma X(\omega,t)dW^{\mathbb{P}}(\omega,t), & 0 \leq t \leq T \\ X(\omega,0) = x_0, \end{cases}$$

dove μ *è il parametro di deriva e* σ *il parametro di diffusione.*

La corrispondente scrittura in forma integrale è

$$X(\omega,t) = x_0 + \int_0^t \mu X(\omega,s)ds + \int_0^t \sigma X(\omega,s)dW^{\mathbb{P}}(\omega,s), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Teorema A.15 (Proprietà del Moto Browniano Geometrico)**.** *Il moto browniano geometrico* $\{X(\omega,t)\}_{0 \leq t \leq T}$ *soddisfa le seguenti proprietà:*

1. *ha forma funzionale:*
$$X(\omega,t) = x_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W^{\mathbb{P}}(\omega,t)}, \quad 0 \leq t \leq T;$$
e ha distribuzione log-normale:
$$X(\omega,t) = LN\left(\ln x_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t, \sigma^2 t\right), \; 0 \leq t \leq T;$$

2. *se ha parametro di deriva nullo, $\mu = 0$, allora è una martingala*[23].

Dimostrazione. Si dimostrano le proprietà enunciate sopra.

1. Per quanto riguarda la forma funzionale, applicando il lemma di Itô A.13 a $f(x) = \ln x$, si ha

$$\begin{aligned} d(\ln X(\omega,t)) &= \frac{1}{X(\omega,t)} dX(\omega,t) - \frac{1}{2X(\omega,t)^2} d[X,X](\omega,t) \\ &= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dW^{\mathbb{P}}(\omega,t), \quad 0 \le t \le T. \end{aligned}$$

   Integrando l'espressione su $[0,t]$ si ottiene la tesi.

   Dal fatto che

$$\begin{aligned} \ln X(\omega,t) &= \ln x_0 + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W^{\mathbb{P}}(\omega,t) \\ &\sim N\left(\ln x_0 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t, \sigma^2 t\right), \quad 0 \le t \le T, \end{aligned}$$

   si ricava la log-normalità della distribuzione del processo stocastico.

2. Posto $\mu = 0$, dalle proprietà del moto browniano A.8 si ottiene

$$\begin{aligned} E^{\mathbb{P}}[X(\omega,t) \,|\, \mathcal{F}(s)] &= E^{\mathbb{P}}[x_0 e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W^{\mathbb{P}}(\omega,t)} \,|\, \mathcal{F}(s)] \\ &= E^{\mathbb{P}}[x_0 e^{\sigma(W^{\mathbb{P}}(\omega,t) - W^{\mathbb{P}}(\omega,s))} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W^{\mathbb{P}}(\omega,s)} \,|\, \mathcal{F}(s)] \\ &= x_0 e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W^{\mathbb{P}}(\omega,s)} E^{\mathbb{P}}[e^{\sigma(W^{\mathbb{P}}(\omega,t) - W^{\mathbb{P}}(\omega,s))} \,|\, \mathcal{F}(s)] \\ &= x_0 e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W^{\mathbb{P}}(\omega,s)} E^{\mathbb{P}}[e^{\sigma(W^{\mathbb{P}}(\omega,t) - W^{\mathbb{P}}(\omega,s))}] \\ &= x_0 e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W^{\mathbb{P}}(\omega,s)} e^{\frac{1}{2}\sigma^2 (t-s)} \\ &= x_0 e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 s + \sigma W^{\mathbb{P}}(\omega,s)} \\ &= X(\omega,s), \quad 0 \le s < t \le T. \end{aligned}$$

Così si conclude la dimostrazione. □

[23] Si parla in questo caso di martingala esponenziale del moto browniano.

Osservazione A.5 (Moto Browniano Geometrico e Distribuzione Congiunta Log-Normale)**.** Fissati arbitrariamente n e $0 \leq t_1 < \ldots < t_n \leq T$, dall'uguaglianza

$$\begin{bmatrix} \ln X(\omega, t_1) \\ \vdots \\ \ln X(\omega, t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln x_0 + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t_1 + \sigma(W^{\mathbb{P}}(\omega, t_1)) \\ \vdots \\ \ln x_0 + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t_n + \sigma(W^{\mathbb{P}}(\omega, t_n)) \end{bmatrix},$$

dove

$$\begin{bmatrix} \ln x_0 + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t_1 + \sigma(W^{\mathbb{P}}(\omega, t_1)) \\ \vdots \\ \ln x_0 + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t_n + \sigma(W^{\mathbb{P}}(\omega, t_n)) \end{bmatrix}$$

ha distribuzione congiunta normale A.1, segue che il vettore aleatorio

$$(X(\omega, t_1), \ldots, X(\omega, t_n))^\intercal$$

ha distribuzione congiunta log-normale A.2.

La figura *A.2* mostra le traiettorie di un moto browniano geometrico.

A.2.9 Teoremi di Girsanov e di Rappresentazione di Martingala

In questa sezione si illustrano i teoremi di Girsanov e di rappresentazione di martingala, utilizzati per dimostrare che nel modello di Black, Scholes e Merton esiste un'unica misura martingala equivalente e che ogni derivato è replicabile.

Il seguente teorema stabilisce come ricavare un moto browniano sotto una misura martingala equivalente a partire da un moto browniano sotto la misura originaria.

Teorema A.16 (Teorema di Girsanov)**.** *Se $\{W^{\mathbb{P}}(\omega, t)\}_{0 \leq t \leq T}$ è un moto browniano sotto $\mathbb{P}$, $\{\Lambda(\omega, t)\}_{0 \leq t \leq T}$ è un processo stocastico adattato alla filtrazione e $\{Z(\omega, t)\}_{0 \leq t \leq T}$ è un processo stocastico definito da*

$$Z(\omega, t) = e^{-\int_0^t \Lambda(\omega, u) dW^{\mathbb{P}}(\omega, u) - \frac{1}{2}\int_0^t \Lambda(\omega, u)^2 du}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

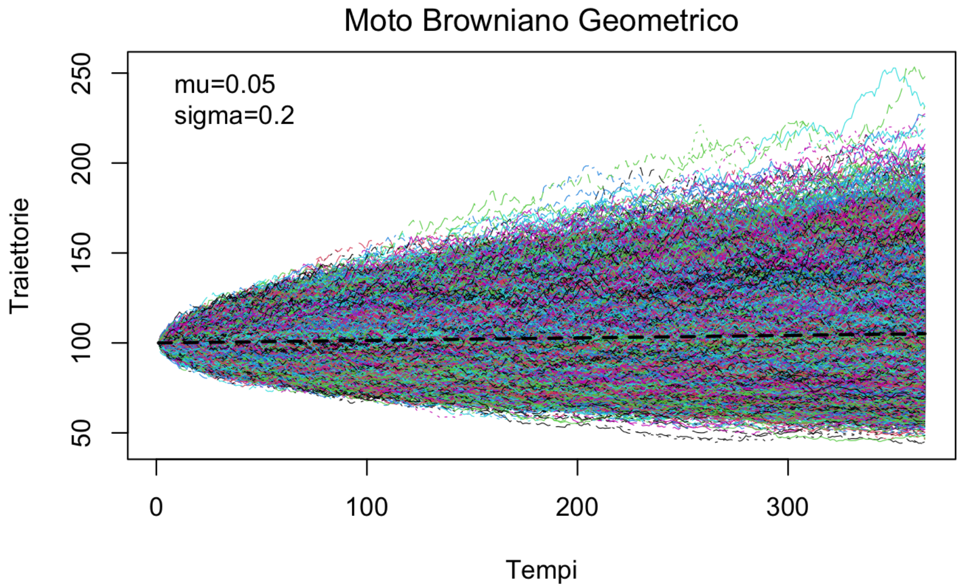

Figura A.2: Traiettorie di un moto browniano geometrico

tali che la seguente condizione è soddisfatta

$$E^{\mathbb{P}}\left[\int_0^T \Lambda(\omega,u)^2 Z(\omega,u)^2 du\right] < +\infty,$$

allora

$$E^{\mathbb{P}}[Z(\omega,T)] = 1$$

e sotto la misura di probabilità $\mathbb{Q}$ *definita da*

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A Z(\omega,T) d\mathbb{P}(\omega), \quad \forall A \in \mathcal{A},$$

il processo stocastico

$$W^{\mathbb{Q}}(\omega,t) = W^{\mathbb{P}}(\omega,t) + \int_0^t \Lambda(\omega,u) du, \quad 0 \leq t \leq T,$$

è un moto browniano.

Si riporta ora una condizione, detta di Novikov, sufficiente affinché sia soddisfatto il teorema di Girsanov.

Teorema A.17 (Condizione di Novikov)**.** *Utilizzando le notazioni introdotte nel teorema di Girsanov A.16, la condizione*

$$E^{\mathbb{P}}\left[e^{\frac{1}{2}\int_0^T \Lambda(\omega,u)^2 du}\right] < +\infty$$

è sufficiente affinché esso sia valido.

Il seguente teorema stabilisce che ogni martingala quadrato-integrabile rispetto alla filtrazione naturale di un moto browniano è esprimibile come integrale stocastico.

Teorema A.18 (Teorema di Rappresentazione di Martingala)**.**
Se $\{W^{\mathbb{P}}(\omega,t)\}_{0\le t\le T}$ è un moto browniano, $\{\mathcal{F}(t)\}_{0\le t\le T}$ è la filtrazione naturale del moto browniano e $\{M(\omega,t)\}_{0\le t\le T}$ è una martingala rispetto a questa filtrazione quadrato-integrabile sotto $\mathbb{P}$, allora esiste un processo stocastico $\{H(\omega,t)\}_{0\le t\le T}$ adattato alla filtrazione che soddisfa

$$E^{\mathbb{P}}\left[\int_0^T H(\omega,t)^2 dt\right] < +\infty$$

e

$$M(\omega,t) = M(\omega,0) + \int_0^t H(\omega,u)dW^{\mathbb{P}}(\omega,u), \quad 0 \le t \le T.$$

La corrispondente scrittura in forma differenziale è

$$dM(\omega,t) = H(\omega,t)dW^{\mathbb{P}}(\omega,t), \quad 0 \le t \le T.$$

Appendice B

Modello di Black, Scholes e Merton

In questo capitolo si descrive il modello finanziario di Black, Scholes e Merton. I testi di riferimento sono quelli di Lamberton e Lapeyre [20] e di Shreve [26].

B.1 Mercato Finanziario, Numerario e Strategia di Investimento

Sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ si definiscono un moto browniano $\{W^{\mathbb{P}}(\omega, t)\}_{0 \leq t \leq T}$ e la filtrazione naturale $\{\mathcal{F}(t)\}_{0 \leq t \leq T}$ di questo processo stocastico.

Sullo spazio di probabilità filtrato $(\Omega, \mathcal{A}, \{\mathcal{F}(t)\}_{0 \leq t \leq T}, \mathbb{P})$ si considera un modello di mercato finanziario aperto nel tempo continuo $[0, T]$ in cui sono scambiati:

1. uno strumento finanziario privo di rischio il cui prezzo, $\{B(t)\}_{0 \leq t \leq T}$, evolve nel tempo al tasso privo di rischio r:

$$\begin{cases} dB(t) = rB(t)dt \\ B(0) = 1; \end{cases}$$

2. uno strumento finanziario rischioso il cui prezzo, $\{S(\omega, t)\}_{0 \leq t \leq T}$, evolve nel tempo secondo un processo stocastico di moto browniano geome-

trico A.24:

$$\begin{cases} dS(\omega, t) = S(\omega, t)(\mu dt + \sigma dW^{\mathbb{P}}(\omega, t)) \\ S(\omega, 0) = S_0. \end{cases}$$

Si definisce il numerario, ovvero uno strumento finanziario il cui prezzo viene utilizzato come unità di misura per esprimere i prezzi degli altri strumenti finanziari presenti e delle strategie di investimento attuabili nel mercato finanziario.

Definizione B.1 (Numerario)**.** *Un numerario è uno strumento finanziario il cui prezzo è sempre strettamente positivo.*

Poiché il prezzo del titolo privo di rischio, $\{B(t)\}_{0\leq t\leq T}$, è una quantità sempre strettamente positiva, lo si può adottare come numerario ed esprimere il prezzo del titolo rischioso in unità di numerario, $\left\{\frac{S(\omega,t)}{B(t)}\right\}_{0\leq t\leq T}$.

Si osserva che, sotto la misura $\mathbb{P}$, il prezzo del titolo rischioso espresso in unità di numerario mantiene la dinamica di moto browniano geometrico a meno di un cambio nel parametro di deriva da μ a $\mu - r$.

Proposizione B.1 (Dinamica del Prezzo del Titolo Rischioso Normalizzato mediante il Numerario)**.** *Il prezzo del titolo rischioso normalizzato mediante il numerario,* $\left\{\frac{S(\omega,t)}{B(t)}\right\}_{0\leq t\leq T}$*, preserva la dinamica di moto browniano geometrico sotto* $\mathbb{P}$ *a meno di un cambio nel parametro di deriva.*

Dimostrazione. Sapendo che

$$d\left(\frac{1}{B(t)}\right) = -\frac{r}{B(t)}dt$$

e applicando la regola del prodotto di Itô A.1, si ottiene

$$d\left(\frac{S(\omega,t)}{B(t)}\right) = \frac{S(\omega,t)}{B(t)}((\mu - r)dt + \sigma dW^{\mathbb{P}}(\omega,t)). \qquad \square$$

In questo modello di mercato finanziario un investitore costruisce una strategia che prevede di detenere delle quote di titolo privo di rischio e titolo rischioso misurate dalla coppia di processi stocastici adattati alla filtrazione

$$\{(\alpha(\omega,t), \beta(\omega,t))\}_{0\leq t\leq T}.$$

Alla strategia si può associare un prezzo

$$F(\omega, t) = \alpha(\omega, t)B(t) + \beta(\omega, t)S(\omega, t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

che può essere normalizzato mediante il numerario

$$\frac{F(\omega, t)}{B(t)} = \alpha(\omega, t) + \beta(\omega, t)\frac{S(\omega, t)}{B(t)}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

B.2 Strategie Autofinanziantesi e Ammissibili

Si definisce ora la nozione di strategia autofinanziantesi.

Definizione B.2 (Strategia Autofinanziantesi)**.** *Una strategia di investimento è autofinanziantesi se la coppia di processi stocastici* $\{(\alpha(\omega, t), \beta(\omega, t))\}_{0 \leq t \leq T}$*, che ne misura le quote, e il processo stocastico* $\{F(\omega, t)\}_{0 \leq t \leq T}$*, che ne misura il prezzo, soddisfano* $\mathbb{P}$*-q.c.:*

1. $\int_0^T |\alpha(\omega, t)|dt + \int_0^T \beta(\omega, t)^2 dt < +\infty$*;*
2. $F(\omega, t) = F(\omega, 0) + \int_0^t \alpha(\omega, u)dB(u) + \int_0^t \beta(\omega, u)dS(\omega, u), \quad 0 \leq t \leq T.$

La scrittura in forma differenziale della seconda condizione è

$$dF(\omega, t) = \alpha(\omega, t)dB(t) + \beta(\omega, t)dS(\omega, t), \quad 0 \leq t \leq T \tag{B.1}$$

La prima condizione è tecnica, mentre la seconda è passibile d questa interpretazione: ogni variazione nel prezzo di una strategia autofinanziantesi è unicamente dovuta alle variazioni nei prezzi degli strumenti finanziari detenuti.

Si fornisce una caratterizzazione della condizione di autofinanziamento di una strategia di investimento in termini del relativo prezzo normalizzato mediante il numerario.

Teorema B.1 (Caratterizzazione della Proprietà di Autofinanziamento)**.** *Una strategia, individuata da delle quote* $\{(\alpha(\omega, t), \beta(\omega, t))\}_{0 \leq t \leq T}$ *che soddisfano* $\mathbb{P}$*-q.c.*

$$\int_0^T |\alpha(\omega, t)|dt + \int_0^T \beta(\omega, t)^2 dt < +\infty$$

e da un prezzo $\{F(\omega,t)\}_{0\le t\le T}$*, è autofinanziantesi se e solo se*

$$\frac{F(\omega,t)}{B(t)} = F(\omega,0) + \int_0^t \beta(\omega,u)d\left(\frac{S(\omega,u)}{B(u)}\right), \quad 0 \le t \le T.$$

La corrispondente scrittura in forma differenziale è

$$d\left(\frac{F(\omega,t)}{B(t)}\right) = \beta(\omega,t)d\left(\frac{S(\omega,t)}{B(t)}\right), \quad 0 \le t \le T. \tag{B.2}$$

Dimostrazione. Da un lato, applicando la regola del prodotto di Itô A.1 e la condizione di autofinanziamento della strategia (B.1), si ottiene

$$\begin{aligned} d\left(\frac{F(\omega,t)}{B(t)}\right) &= F(\omega,t)d\left(\frac{1}{B(t)}\right) + \frac{1}{B(t)}dF(\omega,t) \\ &= -\frac{F(\omega,t)}{B(t)}rdt + \alpha(\omega,t)rdt + \frac{\beta(\omega,t)}{B(t)}dS(\omega,t) \\ &= -\beta(\omega,t)\frac{S(\omega,t)}{B(t)}rdt + \frac{\beta(\omega,t)}{B(t)}dS(\omega,t) \\ &= \beta(\omega,t)d\left(\frac{S(\omega,t)}{B(t)}\right), \quad 0 \le t \le T. \end{aligned}$$

Dall'altro, applicando sempre la regola del prodotto di Itô A.1 e la caratterizzazione della condizione di autofinanziamento della strategia (B.2), si ha

$$\begin{aligned} dF(\omega,t) &= d\left(\frac{F(\omega,t)}{B(t)}B(t)\right) \\ &= \frac{F(\omega,t)}{B(t)}dB(t) + B(t)d\left(\frac{F(\omega,t)}{B(t)}\right) \\ &= F(\omega,t)rdt + B(t)\beta(\omega,t)d\left(\frac{S(\omega,t)}{B(t)}\right) \\ &= \alpha(\omega,t)dB(t) + \beta(\omega,t)dS(\omega,t), \quad 0 \le t \le T. \end{aligned}$$

La tesi è dunque dimostrata. □

B.3 Misura Martingala Equivalente

Si introduce la nozione di misura di probabilità martingala equivalente.

Definizione B.3 (Misura Martingala Equivalente)**.** *Una misura di probabilità $\mathbb{Q}$ è detta martingala equivalente se*

1. *i prezzi degli strumenti finanziari normalizzati mediante il numerario sono martingale sotto $\mathbb{Q}$;*

2. *è equivalente a $\mathbb{P}$.*

Si dimostra che nel modello di Black, Scholes e Merton esiste un'unica misura martingala equivalente $\mathbb{Q}$.

Proposizione B.2 (Esistenza e Unicità della Misura Martingala Equivalente nel Modello di Black, Scholes e Merton)**.** *Nel modello di Black, Scholes e Merton esiste un'unica misura martingala equivalente $\mathbb{Q}$.*

Dimostrazione. Sotto $\mathbb{P}$ si ha

$$
\begin{aligned}
d\left(\frac{S(\omega,t)}{B(t)}\right) &= \frac{S(\omega,t)}{B(t)}((\mu-r)dt+\sigma dW^{\mathbb{P}}(\omega,t)) \\
&= \sigma\frac{S(\omega,t)}{B(t)}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}dt+dW^{\mathbb{P}}(\omega,t)\right).
\end{aligned}
$$

Poiché la quantità

$$\lambda=\frac{\mu-r}{\sigma}$$

soddisfa la Condizione di Novikov A.17,

$$E^{\mathbb{P}}\left[e^{\frac{1}{2}\lambda^2 T}\right]<+\infty,$$

per il Teorema di Girsanov A.16 la misura di probabilità $\mathbb{Q}$, definita dalla seguente derivata di Radon-Nikodym rispetto a $\mathbb{P}$,

$$Z(\omega,T)=e^{-\lambda W^{\mathbb{P}}(\omega,T)-\frac{1}{2}\lambda^2 T},$$

è equivalente a $\mathbb{P}$ e il processo stocastico

$$W^{\mathbb{Q}}(\omega,t)=W^{\mathbb{P}}(\omega,t)+\lambda t, \quad 0\le t\le T$$

è un moto browniano sotto $\mathbb{Q}$.

Ne consegue che sotto $\mathbb{Q}$ il prezzo del titolo rischioso normalizzato mediante il numerario è un moto browniano geometrico con parametro di deriva nullo:

$$d\left(\frac{S(\omega,t)}{B(t)}\right) = \sigma\frac{S(\omega,t)}{B(t)}dW^{\mathbb{Q}}(\omega,t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Di conseguenza è una martingala in virtù delle proprietà del moto browniano geometrico A.15.

Pertanto $\mathbb{Q}$ è una misura martingala equivalente. □

Tra le strategie autofinanziantesi si restringe l'attenzione su quelle ammissibili, il cui prezzo normalizzato mediante il numerario è sempre non negativo. La seconda condizione è invece tecnica.

Definizione B.4 (Strategia Ammissibile)**.** *Una strategia è ammissibile se è autofinanziantesi e il processo stocastico del prezzo normalizzato mediante il numerario* $\left\{\frac{F(\omega,t)}{B(t)}\right\}_{0\leq t\leq T}$ *soddisfa:*

1. $\frac{F(\omega,t)}{B(t)} \geq 0,\ 0 \leq t \leq T;$
2. $E^{\mathbb{Q}}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left(\frac{F(\omega,t)}{B(t)}\right)^2\right] < +\infty.$

Si osserva che sotto la misura martingala equivalente $\mathbb{Q}$ il processo stocastico del prezzo normalizzato mediante il numerario di una strategia ammissibile gode della proprietà di martingala.

Proposizione B.3 (Proprietà di Martingala sotto $\mathbb{Q}$ del Prezzo di una Strategia Ammissibile Normalizzato mediante il Numerario)**.** *Il prezzo di una strategia ammissibile normalizzato mediante il numerario è una martingala sotto* $\mathbb{Q}$*.*

Dimostrazione. Applicando la regola del prodotto di Itô A.1, si ottiene che il processo stocastico del prezzo normalizzato mediante il numerario di una strategia ammissibile è un integrale stocastico sotto $\mathbb{Q}$

$$\begin{aligned} d\left(\frac{F(\omega,t)}{B(t)}\right) &= F(\omega,t)d\left(\frac{1}{B(t)}\right) + \frac{1}{B(t)}dF(\omega,t) \\ &= \sigma\beta(\omega,t)\frac{S(\omega,t)}{B(t)}dW^{\mathbb{Q}}(\omega,t), \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

La proprietà di martingala scende dalla costruzione dell'integrale stocastico e dal teorema A.12. □

B.4 Derivati e Loro Replicabilità

In questa sezione si introducono le nozioni di derivato e di replicabilità dello stesso.

Definizione B.5 (Derivato). *Un derivato è una variabile aleatoria $Z(\omega)$ $\mathcal{F}(T)$-misurabile, non negativa e quadrato-integrabile sotto $\mathbb{Q}$.*

Definizione B.6 (Replicabilità di un Derivato). *Un derivato è replicabile se esiste una strategia ammissibile con valore $\{F(\omega,t)\}_{0\leq t\leq T}$ tale che*

$$F(\omega,T)=Z(\omega).$$

E' possibile ricavare il prezzo di un derivato replicabile mediante la strategia ammissibile che lo replica.

Proposizione B.4 (Prezzo di un Derivato Replicabile). *Il prezzo di un derivato $Z(\omega)$ replicabile è pari al prezzo della strategia ammissibile che lo replica:*

$$F(\omega,t)=E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{B(t)}{B(T)}Z(\omega)\,\middle|\,\mathcal{F}(t)\right],\quad 0\leq t\leq T.$$

Dimostrazione. La tesi discende dalla proprietà di martingala sotto $\mathbb{Q}$ del prezzo normalizzato mediante il numerario della strategia ammissibile che replica il derivato in base alla proposizione B.3:

$$\begin{aligned}\frac{F(\omega,t)}{B(t)}&=E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{F(\omega,T)}{B(T)}\,\middle|\,\mathcal{F}(t)\right]\\&=E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{Z(\omega)}{B(T)}\,\middle|\,\mathcal{F}(t)\right],\quad 0\leq t\leq T.\end{aligned}$$

□

Proposizione B.5 (Replicabilità dei Derivati nel Modello di Black, Scholes e Merton). *Nel modello di mercato di Black, Scholes e Merton ogni derivato B.5 è replicabile.*

Dimostrazione. Fissato arbitrariamente un derivato $Z(\omega)$, si ricorda che, in base alla proposizione B.3, sotto $\mathbb{Q}$ il processo stocastico del valore normalizzato mediante il numerario della strategia ammissibile che replica il derivato è un integrale stocastico e una martingala

$$\frac{F(\omega,t)}{B(t)} = E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{Z(\omega)}{B(T)}\,\middle|\,\mathcal{F}(t)\right]$$
$$\frac{F(\omega,t)}{B(t)} = \sigma\beta(\omega,t)\frac{S(\omega,t)}{B(t)}dW^{\mathbb{Q}}(\omega,t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Ne consegue che, per il teorema di rappresentazione di martingala A.18, esiste un processo stocastico $\{X(\omega,t)\}_{\leq t \leq T}$ adattato alla filtrazione che soddisfa

$$E^{\mathbb{Q}}\left[\int_0^T X(\omega,t)^2 dt\right] < +\infty$$

e

$$\frac{F(\omega,t)}{B(t)} = F(\omega,0) + \int_0^t X(\omega,s)dW^{\mathbb{Q}}(\omega,s), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Imponendo allora l'uguaglianza

$$x(\omega,t) = \sigma\beta(\omega,t)\frac{S(\omega,t)}{B(t)}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

si ricavano le quote degli strumenti finanziari privo di rischio e rischioso che individuano tale strategia

$$\begin{cases} \alpha(\omega,t) = \dfrac{F(\omega,t)}{B(t)} - \beta(\omega,t)\dfrac{S(\omega,t)}{B(t)}, \\ \beta(\omega,t) = \frac{X(\omega,t)B(t)}{\sigma S(\omega,t)}, \quad 0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

La tesi è quindi dimostrata. $\square$

Appendice C

Codice in Linguaggio R

Questa appendice illustra le funzioni elaborate nel linguaggio *R* per riprodurre i rendimenti degli attivi a copertura delle polizze nel modello finanziario di Black, Scholes e Merton e ottenere i risultati numerici del modello "assicurativo" della gestione del portafoglio di polizze.

Nel dettaglio, la funzione *Ptf_Res* richiede i parametri che caratterizzano gli assicurati in portafoglio[24] e il modello finanziario di Black, Scholes e Merton[25], la misura di probabilità desiderata[26] e il numero K di assicurati in portafoglio; mediante questi parametri simula i log-rendimenti del portafoglio di attivi a copertura della polizza, $\left\{\ln\left(\frac{F(\omega,t)}{F(\omega,s)}\right)\right\}_{0\le s<t\le T}$, sotto la misura desiderata e riproduce la gestione del portafoglio di assicurati; infine restituisce un vettore contenente il valore attualizzato in 0 dei benefici per gli assicurati e della remunerazione per l'assicuratore,

$$\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)>T^k\}}(\omega)\frac{P^k(\omega,T^k)}{B(T^k)}+\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)\le T^k\}}(\omega)\frac{P^k(\omega,\tau(\omega))}{P(\omega,\tau(\omega))}\frac{A^-(\omega,\tau(\omega))}{B(\tau(\omega))},\qquad k=1,\dots,K,$$

e

$$\frac{A^-(\omega,T)-P(\omega,T)}{B(T)}\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)>T\}}(\omega),$$

[24] Ovvero il rendimento minimo garantito i, il premio versato P, il capitale allocato E, la quota di utile retrocesso α e la durata T.

[25] Ovvero la quota γ del valore del portafoglio di attivi investito nel titolo privo di rischio, il tasso privo di rischio r e i parametri di deriva μ e volatilità σ.

[26] $\mathbb{P}$ o $\mathbb{Q}$.

e l'indicatore di insolvenza da parte di quest'ultimo,

$$\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)\leq T\}}(\omega).$$

```r
#risultati di portafoglio: una traiettoria
Ptf_Res = function(i,premium,equity,alpha,maturity,measure,r,mu,sigma,gamma,K){
  #Istante di Insolvenza
  tau = "inf"
  #Vettore dei Log-Rendimenti degli Attivi
  LR = vector(length = max(maturity))
  if (measure == "Q"){
      LR = rnorm(n = max(maturity),mean = r-1/2*(1-gamma)^2*sigma^2,sd = (1-gamma)*sigma)
  } else if (measure == "P"){
    LR = rnorm(n = max(maturity),mean = gamma*r+(1-gamma)*mu-1/2*(1-gamma)^2*sigma^2,
    sd = (1-gamma)*sigma)
  }
  #Vettore degli Attivi
  A = vector(length = max(maturity))
  #Matrice dei Fondi degli Assicurati
  P = matrix(0,nrow = K,ncol = max(maturity))
  #Valore Attuale del Beneficio per gli Assicurati
  PH_PV_Ben = rep(0,K)
  #Valore Attuale del Beneficio per l'Assicuratore
  SH_PV_Ben = 0
  for (j in 1:max(maturity)) {
        #all'istante 1
        if (j == 1) {
                P[,1] = premium*exp(pmax(i,ifelse(LR[1]>0,alpha*LR[1],LR[1])))
                A[1] = sum(premium+equity)*exp(LR[1])
        } else {
                        #agli istanti successivi
                P[,j] = P[,j-1]*((j-1)!= maturity)*exp(pmax(i,ifelse(LR[j]>0,alpha*LR[j],LR[j])))
                A[j] = A[j-1]*exp(LR[j])
        }
        #in caso di insolvenza
        if (A[j]<= sum(P[,j])) {
                PH_PV_Ben = PH_PV_Ben+P[,j]/sum(P[,j])*A[j]*exp(-r*j)
                A[j] = 0
                tau = j
                break
        } else {
                #pagamenti agli assicurati in scadenza di contratto
                PH_PV_Ben = PH_PV_Ben+P[,j]*exp(-r*j)*(j == maturity)
                A[j] = A[j]-sum(P[,j]*(j == maturity))
                SH_PV_Ben = SH_PV_Ben+A[j]*exp(-r*j)*(j == max(maturity))
        }
  }
  Def_Ind = ifelse(tau == "inf",0,1)
  Ptf_Res = matrix(data = c(PH_PV_Ben,SH_PV_Ben,Def_Ind),nrow = 1,ncol = K+2)
  colnames(Ptf_Res) = c(paste("PH",1:K),"SH","Def")
  return(Ptf_Res)
}
```

Le stime Monte Carlo dei valori attualizzati in 0 dei benefici attesi dagli assicurati e della remunerazione attesa dall'assicuratore,

$$E^{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)>T^k\}}(\omega)\frac{P^k(\omega,T^k)}{B(T^k)}+\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)\leq T^k\}}(\omega)\frac{P^k(\omega,\tau(\omega))}{P(\omega,\tau(\omega))}\frac{A^-(\omega,\tau(\omega))}{B(\tau(\omega))}\right],\quad k=1,\dots,K,$$

e

$$E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{A^-(\omega,T)-P(\omega,T)}{B(T)}\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)>T\}}(\omega)\right],$$

e della probabilità di insolvenza di quest'ultimo,

$$E^{\mathbb{P}}\left[\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)\leq T\}}(\omega)\right],$$

sono poi ottenute mediante la funzione *MC_ Ptf_ Res*, che richiama la funzione *Ptf_ Res sim* volte e restituisce il vettore contenente le medie aritmetiche delle righe della matrice che colleziona i vettori restituiti dalla funzione richiamata.

```
#risultati di portafoglio: stima MC
MC_Ptf_Res = function(i,equity,premium,alpha,maturity,measure,r,mu,sigma,gamma,K,sim){
        MC_Ptf_Res = replicate(n = sim,expr = Ptf_Res(i = i,K = K,equity = equity,premium = premium,
                        alpha = alpha, maturity = maturity, measure = measure, r = r, mu = mu,
                        sigma = sigma, gamma = gamma), simplify = T)
        MC_Ptf_Res = rowMeans(MC_Ptf_Res)
        MC_Ptf_Res = matrix(data = MC_Ptf_Res,nrow = 1,ncol = K+2)
        colnames(MC_Ptf_Res) = c(paste("PH",1:K),"SH","Def")
        return(MC_Ptf_Res)
}
```

La funzione *MC_ Ptf_ Net_ Res* fornisce le stime Monte Carlo dei valori attualizzati in 0 dei benefici attesi dall'assicurato e della remunerazione attesa dall'assicuratore al netto, rispettivamente, dei premi versati e del capitale complessivamente allocato,

$$E^{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)>T^k\}}(\omega)\frac{P^k(\omega,T^k)}{B(T^k)}+\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)\leq T^k\}}(\omega)\frac{P^k(\omega,\tau(\omega))}{P(\omega,\tau(\omega))}\frac{A^-(\omega,\tau(\omega))}{B(\tau(\omega))}\right]-P^k,$$

$$k=1,\ldots,K,$$

e

$$E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{A^-(\omega,T)-P(\omega,T)}{B(T)}\mathbb{1}_{\{\tau(\omega)>T\}}(\omega)\right]-E,$$

richiamando la funzione *MC_ Ptf_ Res* e sottraendo alle prime due componenti del vettore restituito dalla funzione richiamata rispettivamente i premi versati e il capitale complessivamente allocato.

```
#risultati netti di portafoglio: stima MC
MC_Ptf_Net_Res = function(i,premium,equity,alpha,maturity,measure,r,mu,sigma,gamma,K,sim){
        MC_Ptf_Net_Res = MC_Ptf_Res(i = i,premium = premium,equity = equity,alpha = alpha,
                        maturity = maturity, measure = measure, r = r, mu = mu, sigma = sigma,
                        gamma = gamma,K = K,sim = sim)[1,1:(K+1)]-c(premium,sum(equity))
        MC_Ptf_Net_Res = matrix(data = MC_Ptf_Net_Res,nrow = 1,ncol = K+1)
        colnames(MC_Ptf_Net_Res) = c(paste("PH",1:K),"SH")
        return(MC_Ptf_Net_Res)
}
```

Nel caso di un portafoglio di polizze tra loro omogenee, la prima componente del vettore restituito dalla funzione *MC_ Ptf_ Net_ Res* viene passata alla funzione *uniroot* del pacchetto *stats* per ricavare la garanzia di minimo rendimento che rende equo un contratto. Nel caso di un portafoglio di polizze tra loro eterogenee, la stessa viene utilizzata per calcolare la funzione somma dei quadrati (4.1): questa viene poi passata alla funzione *optim*, anch'essa contenuta nel pacchetto *stats*, per ricavare la 5-pla di parametri contrattuali che rende equo un contratto sia che questo venga gestito separatamente dal portafoglio di polizze sia che vi venga aggiunto.

Ringraziamenti

Desidero ringraziare la mia famiglia e Vittoria per l'amore e il supporto che mi hanno dato, la mia relatrice, prof.ssa Anna Rita Bacinello, per il prezioso aiuto che mi ha fornito durante lo svolgimento di questo lavoro di tesi e la dott.ssa Anna Visintini, responsabile dell'ufficio "Life New Business Valuation" presso "Assicurazioni Generali S.p.A.", dove lavoro, per la costante disponibilità.

Bibliografia

[1] **A.R. Bacinello**, Fair pricing of Life Insurance Participating Policies with a Minimum Interest Rate Guaranteed, *ASTIN Bulletin*, Vol. 31, No. 2, pp. 275–297, 2001.

[2] **A.R. Bacinello**, Fair Valuation of a Guaranteed Life Insurance Participating Contract Embedding a Surrender Option, *The Journal of Risk and Insurance*, Vol. 70, No. 3, pp. 461–487, 2003.

[3] **A.R. Bacinello, C. Corsato, P. Millossovich**, On the Optimal Design of Participating Life Insurance Contracts, *DEAMS Research Paper Series 2020, No. 1*, EUT Edizioni Università di Trieste, Trieste, 2020, pp. 23, http://hdl.handle.net/10077/29490.

[4] **L. Ballotta, S. Haberman**, Valuation of Guaranteed Annuity Conversion Options, *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 33, No. 2, pp. 87–108, 2003.

[5] **L. Ballotta, S. Haberman, N. Wang**, Guarantees in With-Profit and Unitized With-Profit Life Insurance Contracts: Fair Valuation Problem in Presence of the Default Option, *The Journal of Risk and Insurance*, Vol. 73, No. 1, pp. 97–121, 2006.

[6] **D. Bauer, R. Kiesel, A. Kling, J. Ruß**, Risk-Neutral Valuation of Participating Life Insurance Contracts, *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 39, No. 2, pp. 171–183, 2006.

[7] **E. Briys, F. De Varenne**, Life Insurance in a Contingent Claim Framework: Pricing and Regulatory Implications, *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*, Vol. 19, No. 1, pp. 53–72, 1994.

[8] **E. Briys, F. De Varenne**, On the Risk of Insurance Liabilities: Debunking some Common Pitfalls, *The Journal of Risk and Insurance*, Vol. 64, No. 4, pp. 673-694, 1997.

[9] **T.M. Døskeland, H.A. Nordahl**, Optimal Pension Insurance Design, *Journal of Banking and Finance*, Vol. 32, No. 3, pp. 382–392, 2008.

[10] **N. Gatzert, A. Kling**, Analysis of Participating Life Insurance Contracts: a Unification Approach, *Journal of Risk and Insurance*, Vol. 74, No. 3, pp. 547–570, 2007.

[11] **A. Grosen, P. L. Jørgensen**, Fair Valuation of Life Insurance Liabilities: The Impact of Interest Rate Guarantees, Surrender Options, and Bonus Policies, *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 26, No. 1, pp. 37–57, 2000.

[12] **A. Grosen, P. L. Jørgensen**, Life Insurance Liabilities at Market Value: an Analysis of Insolvency Risk, Bonus Policy and Regulatory Intervention Rules in a Barrier Option Framework, *The Journal of Risk and Insurance*, Vol. 69, No. 1, pp. 63–91, 2002.

[13] **S. Haberman, L. Ballotta, N. Wang**, Modelling and Valuation of Guarantees in With-Profit and Unitised With-Profit Life Insurance Contracts, *The Journal of Risk and Insurance*, Vol. 86, No. 2, pp. 521–560, 2003.

[14] **M. Hansen, K.R. Miltersen**, Minimum Rate of Return Guarantees: the Danish Case, *Scandinavian Actuarial Journal*, Vol. 2002, No. 4, pp. 280–318, 2002.

[15] **P. Hieber, J. Natolski, R. Werner**, Fair Valuation of Cliquet-Style Return Guarantees in (Homogeneous and) Heterogeneous Life Insurance Portfolios, *Scandinavian Actuarial Journal*, Vol. 2019, No. 6, pp. 478–507, 2019.

[16] **J.H. Holsboer**, The Impact of Low Interest Rates on Insurers, *The Geneva Papers on Risk and Insurance. Issues and Practice*, Vol. 25, No. 1, pp. 38–58, 2000.

[17] **F.C. Klebaner**, *Introduction to Stochastic Calculus with Applications*, Imperial College Press, London, 2012.

[18] **A. Kling, A. Richter, J. Ruß**, The Interaction of Guarantees, Surplus Distribution and Asset Allocation in With-Profit Life Insurance Policies, *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 40, No. 1, pp. 164–178, 2007.

[19] **S. Kotz, N. Balakrishnan, N. L. Johnson**, *Continuous Multivariate Distributions, Volume 1: Models and Applications, 2nd Edition*, John Wiley & Sons, New York, 2000.

[20] **D. Lamberton, B. Lapeyre**, *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2008.

[21] **P. L. Jørgensen**, On Accounting Standards and Fair Valuation of Life Insurance and Pension Liabilities, *Scandinavian Actuarial Journal*, Vol. 2004, No. 5, pp. 372–394, 2004.

[22] **K. R. Miltersen, S.-A. Persson**, Guaranteed Investment Contracts: Distributed and Undistributed Excess Return, *Scandinavian Actuarial Journal*, Vol. 2003, No. 4, pp. 257–279, 2003.

[23] **C. Orozco-Garcia, H. Schmeiser**, Is Fair Pricing Possible? An Analysis of Participating Life Insurance Portfolios, *Journal of Risk and Insurance*, Vol. 86, No. 2, pp. 521–560, 2019.

[24] **E. Orsingher, L. Beghin**, *Probabilità e Modelli Aleatori*, Aracne, Roma, 2006.

[25] **R Core Team (2020)** *R: A Language and Environment for Statistical Computing.* R Foundation for Statistical Computing, Vienna, URL https://www.R-project.org/.

[26] **S.E. Shreve**, *Stochastic Calculus for Finance II. Continuous-Time Models*, Springer, New York, 2004.