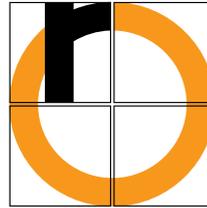


Hochschule Rosenheim
University of Applied Sciences



Fakultät für Angewandte Natur - und Geisteswissenschaften

Bachelorarbeit

Wintersemester 2016/17

Bavarian Additiv -

**Eine Erweiterung des additiven Reservierungsverfahrens um den
Zusammenhang zwischen Paid und Incurred**

Autor	Anton Forstner
Matrikelnummer	806856
Erstprüfer	Prof. Dr. Viktor Sandor
Zweitprüfer	Stefan Schubert
Abgabetermin	14. März 2017

Sperrvermerk

Die vorliegende Bachelorarbeit darf nicht ohne ausdrückliche Genehmigung des Verfassers - auch nur auszugsweise - vervielfältigt oder der Öffentlichkeit zugänglich gemacht werden.

Abstract

Die vorliegende Arbeit beschreibt die Entwicklung des Reservierungsverfahrens „Bavarian Additiv“. Dieses stellt eine Erweiterung des klassischen Verfahren der anfalljahresunabhängigen Schadenquotenzuwächse (auch additives Reservierungsverfahren genannt) um den Zusammenhang zwischen Paid und Incurred dar. Der Name für das Verfahren wurde in Anlehnung daran gewählt, dass die Arbeit in Kooperation mit der Versicherungskammer Bayern verfasst wurde.

Bavarian Additiv hat das Ziel, die Lücke zwischen Schadenzahlungs- und Schadenaufwandsreserveschätzung bei Anwendung des klassischen Additiven Verfahrens zu verringern. Es soll das Gegenstück zum bereits bekannten Munich Chain Ladder Verfahren von Mack darstellen, welches das Problem der Lücke zwischen Schadenzahlungs- und Schadenaufwandsprojektion beim klassischen Chain Ladder Verfahren behandelt.

Im Hauptteil der Arbeit wird zunächst das Theoriemodell des Verfahrens vorgestellt. Am Anfang steht ein verallgemeinerter Modellansatz, in welchem die Modellannahmen definiert und konkrete Schätzer hergeleitet werden. Der verallgemeinerte Ansatz wird im Folgendem weiter konkretisiert, indem mehrere verschiedene explizite Modellansätze vorgestellt und diskutiert werden. Im Anschluss wird einer der Modellansätze als „Bester“ ausgewählt und dann als Bavarian Additiv bezeichnet. Als Abschluss des Theoriekapitels wird die Fehlerabschätzung des Modells detailliert dargestellt.

Im zweiten Teil der Arbeit folgt die praktische Umsetzung des Bavarian Additiv mit Daten aus dem Konzern der Versicherungskammer Bayern. Hierbei wird die Wirkungsweise des Verfahrens, das Verringern der Lücke zwischen Schadenzahlung und Schadenaufwand im Vergleich zu getrennter additiver Reserveberechnung deutlich.

Das Bavarian Additiv Verfahren steht der Versicherungskammer Bayern künftig implementiert in Microsoft Excel zur Verfügung und kann somit neben den bereits vorhandenen klassischen Verfahren in Zukunft zur Reserveberechnung verwendet werden.

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungsverzeichnis	vii
Abbildungsverzeichnis	x
1 Einleitung	1
1.1 Motivation	1
1.2 Literaturlage zu diesem Thema	1
1.3 Definitionen	2
1.4 Aufbau der Arbeit	3
2 Theoriemodell	5
2.1 Verallgemeinerter Modellansatz	5
2.1.1 Modellannahmen	5
2.1.2 Berechnen der Minimum-Quadrat-Schätzer	7
2.1.3 Nachweis der Erwartungstreue	14
2.2 Spezielle Modellansätze	25
2.2.1 (Incurred-Paid)/Prämie	25
2.2.2 Incurred/Paid	27
2.2.3 Incurred-Paid	29
2.2.4 Incurred-Paid /Prämie	31
2.2.5 Incurred/Prämie	33
2.3 Modellauswahl	36
2.4 Fehlerabschätzung für den Modellansatz 2.2.1	39
2.4.1 Rekursion für den Zufallsfehler im Anfalljahr i	41
2.4.2 Rekursion für den Schätzfehler im Anfalljahr i	42
2.4.3 Fehlerabschätzung für die Gesamtreserve	48
3 Praktische Anwendung	51
3.1 Ziel und Ablauf	51

3.2	Daten und Modellvoraussetzungen	51
3.3	Anpassen der Daten	55
3.4	Residuenkorrelation	57
3.5	Vergleich der Verfahren	62
4	Schlussbemerkung	63
	Literaturverzeichnis	65

Abkürzungsverzeichnis

\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
AJ	Anfalljahr
EJ	Entwicklungsjahr
n	Anzahl der Anfalljahre, Größe des Schadenabwicklungsdreieckes
$n - i + 1$	aktuelles (jüngstes) Kalenderjahr des AJ i , zu finden auf der Hauptdiagonalen des Abwicklungsdreieckes
$S_{i,k}^c$	Schadenzuwachs der Zahlungen (Paid) im EJ k für das AJ i
$S_{i,k}^d$	Schadenzuwachs des Aufwands (Incurred) im EJ k für das AJ i
$C_{i,k}$	Schadenstand der kumulierten Zahlungen (Paid) des AJ i bis einschließlich zum EJ k
$D_{i,k}$	Schadenstand der kumulierten Aufwände (Incurred) des AJ i bis einschließlich zum EJ k
$C_{i,n}$	Endschadenstand Paid des AJ i
$D_{i,n}$	Endschadenstand Incurred des AJ i
$\mathcal{C}_{i,k}$	Paid-Entwicklung des AJ i bis zum EJ k , $\mathcal{C}_{i,k} = \{C_{i,1}, \dots, C_{i,k}\}$
$\mathcal{D}_{i,k}$	Incurred-Entwicklung des AJ i bis zum EJ k , $\mathcal{D}_{i,k} = \{D_{i,1}, \dots, D_{i,k}\}$
$\mathcal{A}_{i,k}$	Paid- und Incurred-Entwicklung des AJ i bis zum EJ k , $\mathcal{A}_{i,k} = \{C_{i,1}, \dots, C_{i,k}, D_{i,1}, \dots, D_{i,k}\}$

\mathcal{B}_k	Entwicklung der Schadenzahlungs- und Schadenaufwandsstände im linken oberen Dreieck bis zum Entwicklungsjahr k , $\mathcal{B}_k := \{C_{i,j}, D_{i,j} i + j \leq n + 1; j \leq k\}$
π_i	Prämienvolumen (oder anderweitiges Exposuremaß) des AJ i
$f(\pi_i, D_{i,k-1}, C_{i,k-1})$	Modellfunktion
$f_{i,k-1}$	abkürzende Schreibweise für die Modellfunktion $f(\pi_i, D_{i,k-1}, C_{i,k-1})$
a_k^c, b_k^c	Modellparameter für das EJ k der Erwartungswertannahme für Paid
a_k^d, b_k^d	Modellparameter für das EJ k der Erwartungswertannahme für Incurred
τ_k^c	Varianzparameter für das EJ k der Paid-Prognose
τ_k^d	Varianzparameter für das EJ k der Incurred-Prognose
ρ_k	Kovarianzparameter des EJ k
Q_{k-1}^c	gewichteter Mittelwert über die Modellfunktion $f_{i,k-1}^c$
Q_{k-1}^d	gewichteter Mittelwert über die Modellfunktion $f_{i,k-1}^d$
m_k^c	Schadenquotenzuwachs für Paid des klassischen additiven Reservierungsverfahrens für das EJ k
m_k^d	Schadenquotenzuwachs für Incurred des klassischen additiven Reservierungsverfahrens für das EJ k
λ_k^c	Korrelationsparameter der Paid-Prognose für das EJ k
λ_k^d	Korrelationsparameter der Incurred-Prognose für das EJ k

σ_k^c	Standardabweichung der Schadenzuwachsquote von Paid im EJ k
σ_k^d	Standardabweichung der Schadenzuwachsquote von Incurred im EJ k
ω_k^c	Standardabweichung der Modellfunktion $f_{i,k-1}^c$ für Paid im EJ k
ω_k^d	Standardabweichung der Modellfunktion $f_{i,k-1}^d$ für Incurred im EJ k
$\tilde{m}_{i,k}^c$	Bavarian Additiv Schadenquotenzuwachs der Paid-Prognose für das EJ k im AJ i
$\tilde{m}_{i,k}^d$	Bavarian Additiv Schadenquotenzuwachs der Incurred-Prognose für das EJ k im AJ i
R_i^c	Best Estimate Reserve Paid für das AJ i
R_i^d	Best Estimate Reserve Incurred für das AJ i
R^c	Best Estimate Reserve Paid (gesamt)
R^d	Best Estimate Reserve Incurred (gesamt)
\hat{X}_{k-2}^c	Abkürzende Schreibweise für $\hat{D}_{i,k-2} - \hat{C}_{i,k-2} - \pi_i Q_{k-2}^c$
\hat{X}_{k-2}^d	Abkürzende Schreibweise für $\hat{C}_{i,k-2} - \hat{D}_{i,k-2} - \pi_i Q_{k-2}^d$
Y_{k-2}^c	Abkürzende Schreibweise für $\frac{D_{k-2} - C_{k-2}}{\pi_i} - Q_{k-2}^c$
Y_{k-2}^d	Abkürzende Schreibweise für $\frac{D_{k-2} - C_{k-2}}{\pi_i} - Q_{k-2}^d$

Abbildungsverzeichnis

1	Plot der Prämie gegen den absoluten Schadenzahlungszuwachs	52
2	Plot der Prämie gegen den absoluten Schadenaufwandszuwachs	53
3	Plot der Reservequote gegen den Schadenquotenzuwachs (Paid)	54
4	Plot der Reservequote gegen den Schadenquotenzuwachs (Incurred)	55
5	Schadenquotenzuwächse der Entwicklungsjahre 1 bis 5	56
6	Korrelation zwischen Schadenquotenzuwachs und Reservequote des Vorjahres pro Entwicklungsjahr (Paid)	57
7	Residuenplot der Entwicklungsjahre 2 bis 7 für Paid	59
8	Residuenplot der Entwicklungsjahre 8 bis 18 für Paid	60
9	Korrelation zwischen Schadenquotenzuwachs und negativer Reservequote des Vorjahres pro Entwicklungsjahr (Incurred)	60
10	Residuenplot der Entwicklungsjahre 2 bis 18 für Incurred	61
11	Ergebnisvergleich klassisches Additives Verfahren, Bavarian Additiv	62

1 Einleitung

1.1 Motivation

Nachfolgend wird der verallgemeinerte Modellansatz für ein Reserveverfahren vorgestellt, welches auf dem klassischen Additiven Verfahren (Verfahren der anfalljahrunabhängigen Schadenquotenzuwächse (AUSQZ) [Mac02, S. 232 ff.]) fußt und dieses um den Zusammenhang zwischen Paid und Incurred erweitert. Einer der Gründe für die Entwicklung dieses Verfahrens ist, dass in der Praxis bei additiver Reserveberechnung ebenso wie bei Chain Ladder häufig eine beachtliche Differenz zwischen den Endschadenständen der Paid und der Incurredprojektion auftritt. Theoretisch sollten die beiden Projektionen allerdings gleich sein, da am Ende der Abwicklungsdauer die Schadenzahlungen mit Schadenaufwänden übereinstimmen werden. Um dieses Problem zu beheben, wurde - motiviert durch das Vorbild des Munich Chain Ladder Verfahrens - das Bavarian Additiv entwickelt. Dieses versucht die Lücke zwischen Paid und Incurred bei additiver Projektion zu schließen, indem es simultan Paid und Incurred projiziert und einen Zusammenhang der beiden Abwicklungsdreiecke unterstellt.

Ein weiteres Ziel, welches mit diesem Verfahren verfolgt wird, ist die Verbesserung der Reserveschätzung durch Einbezug von mehr Information. So erfolgt die Bestimmung der aktuariellen Reserve beim Bavarian Additiv mit erwartungstreuen Schätzern, welche auf Informationen aus zwei Abwicklungsdreiecken (Paid und Incurred) beruhen.

1.2 Literaturlage zu diesem Thema

Die Idee zu diesem Verfahren stammt aus dem von Mack und Quarg entwickelten „Munich Chain Ladder“ Verfahren. Das Munich Chain Ladder ist ein auf dem klassischen Chain Ladder Verfahren entwickeltes Reserveschätzverfahren, das zum Ziel hat, die Lücke zwischen getrennter Paid und Incurred-Projektion zu schließen. Der Artikel zu diesem Verfahren [QM] stellt die erste von drei Hauptquellen dar, auf die sich diese Arbeit stützt. In ihm wird das Munich Chain Ladder Verfahren mit seinen Annahmen vorgestellt und

an mehreren Beispieldatensätzen in die Praxis umgesetzt. Eine genaue Herleitung des Verfahrens inklusive eines mathematischen Modells ist in dieser Quelle allerdings nicht enthalten. Hierfür wird eine Veröffentlichung [Mac09] von Mack verwendet. Darin wird ein mathematisch vollständiger Ansatz für das Munich Chain Ladder Verfahren mit Herleitung der Schätzer, Nachweis von Schätzereigenschaften sowie einer Möglichkeit zur Fehlerabschätzung des Verfahrens dargestellt. Diese Veröffentlichung stellt somit auch die Hauptquelle für das gesamte Theoriemodell der vorliegenden Arbeit dar. Des Weiteren wird in dieser Arbeit die zweite Auflage des Buches Schadensversicherungsmathematik [Mac02] von Mack als Quelle genutzt. Aus diesem Standardwerk werden einige Ideen, insbesondere für die Fehlerabschätzung des Verfahrens, verwendet.

1.3 Definitionen

Um eine für alle Leser möglichst gleiche Basis zu schaffen, werden eingangs die wichtigsten Begriffe und Bezeichnungen definiert. Eine Kenntnis über Aufbau und Erscheinungsbild von Schadenabwicklungsdreiecken wird allerdings vorausgesetzt.

1.3.1 Notation. Sei $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Anfalljahre (AJ), $C_{i,k}$, $i, k = 1 \dots, n$ seien die kumulierten Zahlungen (Paid) des Anfalljahres i im Entwicklungsjahr (EJ) k und $D_{i,k}$ die Aufwände (Incurred), also $C_{i,k}$ zuzüglich der Einzelfallreserven. Sowohl $C_{i,k}$ als auch $D_{i,k}$ werden als Zufallsvariablen aufgefasst. Für $i + k \leq n + 1$ sind die Werte von $C_{i,k}$ und $D_{i,k}$ bereits bekannt, weil die Schadenstände früherer Anfalljahre bis zum aktuellen Kalenderjahr $n + 1$, welches in der Hauptdiagonalen steht, die bereits bekannte Schadenentwicklung ist (linkes oberes Dreieck).

Weiter seien $\mathcal{C}_{i,k} = \{C_{i,1}, \dots, C_{i,k}\}$ bzw. $\mathcal{D}_{i,k} = \{D_{i,1}, \dots, D_{i,k}\}$ die Paid bzw. Incurred-Entwicklung des Anfalljahres i bis einschließlich des Entwicklungsjahres k .

$\mathcal{A}_{i,k} = \{C_{i,1}, \dots, C_{i,k}, D_{i,1}, \dots, D_{i,k}\}$ stellt die Zusammenfassung dieser beiden Entwicklungen dar. In einem Schadendreieck ist also für das Anfalljahr i die Entwicklung $\mathcal{A}_{i,n-i+1}$ bekannt. Mit π_i wird das Prämienvolumen im Anfalljahr i bezeichnet.

Mit einem hochgestellten c bzw. d an den ansonsten für beide Prozesse gleichen Bezeichnern wird gekennzeichnet, ob es sich um Paid (hochgestelltes c) oder Incurred-Daten (hochgestelltes d) handelt.

Weiter ist der jährliche Schadenzuwachs von Paid und Incurred von EJ $k - 1$ auf EJ k $S_{i,k}^c = C_{i,k} - C_{i,k-1}$ und $S_{i,k}^d = D_{i,k} - D_{i,k-1}$ für $k = 1, \dots, n$ (wobei $C_{i,0} = D_{i,0} = 0$).

1.4 Aufbau der Arbeit

Zunächst wird ein verallgemeinertes Theoriemodell für ein Reservierungsverfahren aufgestellt, welches auf dem Ansatz einer linearen Regression beruht. In diesem Modell ist eine allgemein gehaltene Modellfunktion f enthalten, deren genaue Abbildungsvorschrift zunächst offengelassen wird. Nachdem das Theoriemodell ausreichend vorgestellt und einige Schätzer und deren Eigenschaften berechnet wurden, wird für fünf konkrete Abbildungsvorschriften der Funktion f das Modell diskutiert. Aus diesen fünf Ansätzen wird ein „besten“ Ansatz (genannt Bavarian Additiv) ausgewählt und fortan weiter untersucht. Als Abschluss des Theoriekapitels wird die Fehlerabschätzung für das Bavarian Additiv angegeben. Nach der Theorie folgt die praktische Anwendung des Verfahrens. Hierfür wird die Reserveschätzung anhand von Sachversicherungsdaten der Versicherungskammer Bayern mit dem Bavarian Additiv durchgeführt und das Ergebnis mit dem des klassischen Additiven Verfahren verglichen. Abschließend folgt eine kurze Schlussbemerkung.

2 Theoriemodell

2.1 Verallgemeinerter Modellansatz

2.1.1 Modellannahmen

2.1.1 Notation (Modellfunktion f). Sei $f : (\mathbb{R}^+)^3 \rightarrow \mathbb{R}$ eine messbare reelle Funktion.

In f werden als Argumente die Prämie π_i und die in 1.3.1 eingeführten Zufallsvariablen $C_{i,k-1}$ und $D_{i,k-1}$ eingesetzt.

Mit den Notationen 1.3.1 und 2.1.1 werden folgende Modellannahmen getroffen:

(BAD 1) Unabhängigkeitsannahmen:

(BAD 1.1) Die Paidzuwächse $S_{i,k}^c$, $1 \leq i, k \leq n$ sind unabhängig.

(BAD 1.2) Die Incurredzuwächse $S_{i,k}^d$, $1 \leq i, k \leq n$ sind unabhängig.

(BAD 1.3) $f(\pi_i; D_{i,k-1}; C_{i,k-1})$ ist unabhängig von der vorangegangenen Paid-Entwicklung $C_{i,k-1}$ und $f(\pi_i; C_{i,k-1}; D_{i,k-1})$ ist unabhängig von der vorangegangenen Incurred-Entwicklung $D_{i,k-1}$.

(BAD 2) Erwartungswertannahmen: Es gibt $a_k^c, b_k^c, a_k^d, b_k^d \in \mathbb{R}$ mit

$$(BAD 2.1) \quad \mathbb{E} \left[\frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i} \middle| \mathcal{A}_{i,k-1} \right] = a_k^c + b_k^c \cdot f(\pi_i; D_{i,k-1}; C_{i,k-1}) \quad \forall i, k$$

$$(BAD 2.2) \quad \mathbb{E} \left[\frac{D_{i,k} - D_{i,k-1}}{\pi_i} \middle| \mathcal{A}_{i,k-1} \right] = a_k^d + b_k^d \cdot f(\pi_i; C_{i,k-1}; D_{i,k-1}) \quad \forall i, k$$

(BAD 3) Varianzannahmen: Es gibt $\tau_k^c, \tau_k^d \in \mathbb{R}$ mit

$$(BAD 3.1) \quad \text{Var} \left[\frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i} \middle| \mathcal{A}_{i,k-1} \right] = \frac{(\tau_k^c)^2}{\pi_i} \quad \forall i, k$$

$$(BAD 3.2) \quad \text{Var} \left[\frac{D_{i,k} - D_{i,k-1}}{\pi_i} \middle| \mathcal{A}_{i,k-1} \right] = \frac{(\tau_k^d)^2}{\pi_i} \quad \forall i, k$$

(BAD 4) Kovarianzannahme: Es gibt $\rho_k \in \mathbb{R}$ mit

$$\text{Cov} \left[\frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i}, \frac{D_{i,k} - D_{i,k-1}}{\pi_i} \middle| \mathcal{A}_{i,k-1} \right] = \frac{\rho_k}{\pi_i} \quad \forall i, k$$

Bemerkungen zu den Modellannahmen

zu (BAD 1) Die Modellannahmen (BAD 1.1) und (BAD 1.2) bedeuten die Unabhängigkeit der $S_{i,k}^c$ von $C_{i,k-1}$ und der $S_{i,k}^d$ von $D_{i,k-1}$, d. h. die Schadenzuwächse sind jeweils unabhängig von ihrer eigenen, bisherigen Entwicklung. Abhängig sind die Schadenzuwächse $(S_{i,k}^c; S_{i,k}^d)$ hingegen gemäß (BAD 2.1) und (BAD 2.2) von ihrer gemeinsamen Entwicklung $\mathcal{A}_{i,k-1}$, die über die Funktion $f(\pi_i; D_{i,k-1}; C_{i,k-1})$ eingeht. Somit ist folglich das Tupel $(S_{i,k}^c; S_{i,k}^d)$ vom Vorjahrestupel $(S_{i,k-1}^c; S_{i,k-1}^d)$ abhängig, weil dieses in den Ständen $C_{i,k-1}$ und $D_{i,k-1}$ enthalten ist, welche wiederum ihrerseits Argumente der Funktion f sind.

Modellannahme (BAD 1.3) wird benötigt um die Erwartungswertannahmen (BAD 2.1) und (BAD 2.2) überhaupt formulieren zu können, ohne dabei in Widerspruch mit den beiden Unabhängigkeitsannahmen (BAD 1.1) und (BAD 1.2) zu geraten. Somit kann (BAD 1.3) wohl auch implizit aus (BAD 1.1), (BAD 1.2), (BAD 2.1) und (BAD 2.2) geschlussfolgert werden.

zu (BAD 2) Äquivalent zu Modellannahme (BAD 2.1) ist die Darstellung:

$$E[C_{i,k} - C_{i,k-1} | \mathcal{A}_{i,k-1}] = \pi_i \cdot a_k^c + b_k^c \pi_i \cdot f(\pi_i; D_{i,k-1}; C_{i,k-1})$$

Gleiches gilt für (BAD 2.2).

Im Vergleich zum klassischen Additiven Verfahren benötigt das Verfahren hier eine simultane Projektion von Paid und Incurred, da jeweils die Vorjahresstände in die Projektion des nächsten Schadenstandes mit eingehen. Abgesehen von der ersten zu schätzenden Diagonalen beruhen alle weiteren berechneten Schadenstände also selbst auf Schätzwerten. Eine einzelne Projektion von beispielsweise Paid ist somit nur möglich, wenn ein bereits zum Viereck vervollständigtes Schadenabwicklungsdreieck der Incurred-Daten vorliegt, welches mit jedem beliebigen Reservierungsverfahren berechnet worden sein kann.

zu (BAD 3) Äquivalent zu Modellannahme (BAD 3.1) ist die Darstellung:

$$\text{Var}[C_{i,k} - C_{i,k-1} | \mathcal{A}_{i,k-1}] = (\tau_k^c)^2 \cdot \pi_i.$$

Gleiches gilt für (BAD 3.2)

zu (BAD 4) Äquivalent zu Modellannahme (BAD 4) ist die Darstellung:

$$\text{Cov}[C_{i,k}; D_{i,k} | \mathcal{A}_{i,k-1}] = \rho_k \cdot \pi_i.$$

Die Modellannahmen (BAD 1) bis (BAD 4) stellen insgesamt eine mögliche bivariate Verallgemeinerung des klassischen Additiven Modells dar.

2.1.2 Berechnen der Minimum-Quadrat-Schätzer

Im Folgenden beschränken wir uns auf die Berechnung der Modellparameter für die Schadenzahlungen (Paid). Die Berechnungen für den Schadenaufwand (Incurred) verlaufen analog.

Die Parameter a_k^c, b_k^c werden durch das Gaußsche Prinzip der kleinsten Quadrate geschätzt. Dieses Prinzip wird auch Minimum-Quadrat-Methode genannt und hat das Ziel, die Parameter einer beliebig vorgegebenen Funktion so zu berechnen, dass die Funktion in eine vorgegebene Punktemenge möglichst optimal eingepasst wird. Optimal bedeutet, dass die quadratischen Abstände der Punkte zur Modellfunktion minimal sind.

Vorliegende Schätzung der Parameter a_k^c und b_k^c erfolgt mit diesem Prinzip und ist zudem darstellbar als gewichtete lineare Regression. Für festes k und mit

1. $Y_i = \frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i}$ die zu erklärende/abhängige Variable,
2. $w_i = \pi_i$ die Gewichtung und
3. $x_i = f(\pi_i; D_{i,k-1}; C_{i,k-1})$ eine Realisation der unabhängigen Variable X_i (Regressor)

lässt sich (BAD 2.1) darstellen als Modellgleichung der Form $Y_i = a + bx_i$ mit gegebenen Punkten (x_i, Y_i) . Die Gewichtung w_i folgt gemäß Varianzannahme (BAD 3.1) aufgrund der Heteroskedastizität.

Das Gaußsche Prinzip der kleinsten Quadrate führt bei einer gewichteten linearen Regression zum Minimieren der Gleichung $\sum_i w_i (y_i - (a + bx_i))^2$ und zu folgenden Schätzern für a und b :

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} \quad \hat{b} = \frac{\sum_i w_i y_i (x_i - \bar{x})}{\sum_i w_i (x_i - \bar{x})^2}$$

mit $\bar{y} = \frac{\sum_i w_i y_i}{\sum_i w_i}$ und $\bar{x} = \frac{\sum_i w_i x_i}{\sum_i w_i}$.

Werden in diese Schätzer die Größen des vorliegenden Modells gemäß 1. bis 3. eingesetzt

so ergeben sich die folgenden Schätzer für a_k^c und b_k^c :

Aus Platzgründen wird im Weiteren die Abkürzung $f_{i,k-1} := f(\pi_i; D_{i,k-1}; C_{i,k-1})$ verwendet.

$$\hat{b}_k^c = \frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i \frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i} (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c)}{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c)^2} \quad (2.1)$$

mit

$$Q_{k-1}^c := \frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i f_{i,k-1}}{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i} \quad (2.2)$$

der mit π_i gewichtete Mittelwert der $f_{i,k-1}$ über die bekannten Werte (linkes oberes Dreieck) des Entwicklungsjahres $k-1$.

$$\hat{a}_k^c = \hat{m}_k^c - \hat{b}_k^c \cdot Q_{k-1}^c \quad (2.3)$$

mit

$$\hat{m}_k^c := \frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} (C_{i,k} - C_{i,k-1})}{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i} \quad (2.4)$$

dem AUSQZ-Schätzer für das Entwicklungsjahr k aus dem klassischen Additivem Verfahren.

Umformen der Schätzer

Das folgende Lemma 2.1.2 wird benötigt um den Schätzer für den Erwartungswert des Zuwachses $C_{i,k} - C_{i,k-1}$ in eine anschaulichere Form zu bringen:

2.1.2 Lemma. Für den Schätzer b_k^c in 2.1 gilt:

$$\hat{b}_k^c = \frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i \left(\frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i} - \hat{m}_k^c \right) (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i \left(\frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i} - \hat{m}_k^c \right)^2}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i \left(\frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i} - \hat{m}_k^c \right)^2}}{\sqrt{\frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c)^2}}$$

Beweis. Zunächst wird der Zähler von \hat{b}_k^c umgeformt:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i \frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i} (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c) \\ &= \sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i \left(\frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i} - \hat{m}_k^c + \hat{m}_k^c \right) (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c) \\ &= \sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i \left(\frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i} - \hat{m}_k^c \right) (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c) + \sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i \hat{m}_k^c (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c) \end{aligned}$$

Hier ist der zweite Summand gleich 0:

$$\begin{aligned} \hat{m}_k^c \sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c) &= \hat{m}_k^c \left(\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i f_{i,k-1} - \sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i \frac{\sum_{j=1}^{n-k+1} \pi_j f_{j,k-1}}{\sum_{j=1}^{n-k+1} \pi_j} \right) \\ &= \hat{m}_k^c \left(\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i f_{i,k-1} - \sum_{j=1}^{n-k+1} \pi_j f_{j,k-1} \right) = 0 \end{aligned}$$

Durch weitere Umformungen und Erweitern folgt dann obige Form von \hat{b}_k^c :

$$\begin{aligned}
\hat{b}_k^c &= \frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i \left(\frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i} - \hat{m}_k^c \right) (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c)}{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c)^2} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i \left(\frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i} - \hat{m}_k^c \right) (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c)^2}} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i \left(\frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i} - \hat{m}_k^c \right) (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i \left(\frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i} - \hat{m}_k^c \right)^2}} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i \left(\frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i} - \hat{m}_k^c \right) (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i \left(\frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i} - \hat{m}_k^c \right)^2}} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i \left(\frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i} - \hat{m}_k^c \right) (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i \left(\frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i} - \hat{m}_k^c \right)^2}} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i \left(\frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i} - \hat{m}_k^c \right) (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c)}{\sqrt{\frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i \left(\frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i} - \hat{m}_k^c \right)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c)^2}}
\end{aligned}$$

□

2.1.3 Bemerkung. Mit Lemma 2.1.2 lässt sich \hat{b}_k^c als Produkt des prämiengewichteten empirischen Korrelationskoeffizienten zwischen $\frac{C_{i,k}-C_{i,k-1}}{\pi_i}$ und $f_{i,k-1}$ sowie den Quotienten der Schätzer für die Standardabweichungen von $\frac{C_{i,k}-C_{i,k-1}}{\pi_i}$ und $f_{i,k-1}$ über die bekannten Anfalljahre i im Entwicklungsjahr k schreiben.

Zur einfacheren Schreibweise werden noch folgende Bezeichnungen eingeführt:

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_k^c &:= \frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i \left(\frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i} - \hat{m}_k^c \right) (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i \left(\frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i} - \hat{m}_k^c \right)^2}} \\ \hat{\sigma}_k^c &:= \sqrt{\frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i \left(\frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i} - \hat{m}_k^c \right)^2} \\ \hat{\omega}_{k-1}^c &:= \sqrt{\frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c)^2}\end{aligned}$$

Damit lässt sich \hat{b}_k^c aus Lemma 2.1.2 schreiben als:

$$\hat{b}_k^c = \hat{\lambda}_k^c \frac{\hat{\sigma}_k^c}{\hat{\omega}_{k-1}^c}$$

Aus ästhetischen Gründen schreiben wir im Weiteren \hat{E} für $\widehat{E}[\dots]$. \hat{E} entsteht, indem in die Modellannahmen (BAD 2.1) und (BAD 2.2) die entsprechenden Schätzer eingesetzt werden.

2.1.4 Satz. Seien \hat{a}_k^c und \hat{b}_k^c die Schätzer aus Gleichung (2.3) und (2.1) und $\hat{E}[C_{i,k} - C_{i,k-1} | \mathcal{A}_{i,k-1}] = \pi_i \hat{a}_k^c + \pi_i \hat{b}_k^c f_{i,k-1}$ der Schätzer für die Erwartungswertannahme (BAD 2.1). Es gilt:

$$\hat{E}[C_{i,k} - C_{i,k-1} | \mathcal{A}_{i,k-1}] = \pi_i \left[\hat{m}_k^c + \hat{\lambda}_k^c \frac{\hat{\sigma}_k^c}{\hat{\omega}_{k-1}^c} (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c) \right]$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbb{E}}[C_{i,k} - C_{i,k-1} | A_{i,k-1}] &= \pi_i \hat{a}_k^c + \pi_i \hat{b}_k^c f_{i,k-1} \\
&= \pi_i (\hat{m}_k^c - \hat{b}_k^c Q_{k-1}^c) + \pi_i \hat{b}_k^c f_{i,k-1} \\
&= \pi_i \hat{m}_k^c - \pi_i \hat{b}_k^c Q_{k-1}^c + \pi_i \hat{b}_k^c f_{i,k-1} \\
&= \pi_i [\hat{m}_k^c + \hat{b}_k^c (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c)] \\
&= \pi_i \left[\hat{m}_k^c + \hat{\lambda}_k^c \frac{\hat{\sigma}_k^c}{\hat{\omega}_{k-1}^c} (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c) \right]
\end{aligned}$$

□

2.1.5 Notation. Im Weiteren wird $\tilde{m}_{i,k}^c$ bzw. dessen Schätzer $\hat{m}_{i,k}^c$ eingeführt:

$$\tilde{m}_{i,k}^c := m_k^c + \lambda_k^c \frac{\sigma_k^c}{\omega_{k-1}^c} (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c) \quad (2.5)$$

$$\hat{m}_{i,k}^c := \hat{m}_k^c + \hat{\lambda}_k^c \frac{\hat{\sigma}_k^c}{\hat{\omega}_{k-1}^c} (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c) \quad (2.6)$$

Analog wird die Notation $\tilde{m}_{i,k}^d$ bzw. $\hat{m}_{i,k}^d$ für incurred verwendet. Diese Darstellung entspricht der Übertragung des Ansatzes von Quarg und Mack aus dem Munich Chain Ladder (vgl. [QM, S. 20]).

2.1.6 Bemerkung. Die Schätzung des zukünftigen Schadenzuwachses ergibt sich als Produkt der Prämie π_i mit einem individuell angepassten Zuwachsfaktor $\hat{m}_{i,k}^c$.

Für diesen wird der klassische Schadenquotenzuwachs Schätzer \hat{m}_k^c um die Information aus dem Zusammenspiel von Paid und Incurred ergänzt. Besteht zwischen den individuellen Schadenquotenzuwächsen $\frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i}$ und der Funktion $f_{i,k-1}$ keine Korrelation ($\hat{\lambda}_k^c = 0$), so fällt der zweite Summand von $\hat{m}_{i,k}^c$ weg und die Schätzung des künftigen Schadenzuwachses erfolgt wieder wie im klassischen additiven Reservierungsverfahren.

2.1.7 Bemerkung. Mit den bisher berechneten MQ-Schätzern sind wir nun in der Lage die Schätzer für die Parameter τ_k^c , τ_k^d und ρ_k aus den Modellannahmen (BAD 3.1), (BAD 3.2) und (BAD 4) anzugeben:

zu (BAD 3.1) Der Varianzparameter $(\tau_k^c)^2$ wird geschätzt durch

$$(\hat{\tau}_k^c)^2 = \frac{1}{n-k-1} \sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i \left(\frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i} - \hat{m}_{i,k}^c \right)^2. \quad (2.7)$$

zu (BAD 3.2) Der Varianzparameter $(\tau_k^d)^2$ wird geschätzt durch

$$(\hat{\tau}_k^d)^2 = \frac{1}{n-k-1} \sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i \left(\frac{D_{i,k} - D_{i,k-1}}{\pi_i} - \hat{m}_{i,k}^d \right)^2. \quad (2.8)$$

zu (BAD 4) Der Kovarianzparameter ρ_k wird geschätzt durch

$$\hat{\rho}_k := \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i \left(\frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i} - \hat{m}_{i,k}^c \right) \left(\frac{D_{i,k} - D_{i,k-1}}{\pi_i} - \hat{m}_{i,k}^d \right). \quad (2.9)$$

2.1.8 Korollar (zu Satz 2.1.4). Sind \hat{a}_k^c und \hat{b}_k^c die berechneten Schätzer der Gleichungen (2.3) und (2.1), so ergibt sich für den Varianzschätzer $(\hat{\tau}_k^c)^2$ in Gleichung (2.7):

$$(\hat{\tau}_k^c)^2 = \frac{1}{n-k-1} \sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i \left(\frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i} - \hat{m}_k^c - \hat{b}_k^c (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c) \right)^2$$

Beweis.

$$\begin{aligned} (\hat{\tau}_k^c)^2 &= \frac{1}{n-k-1} \sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i \left(\frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i} - \hat{m}_{i,k}^c \right)^2 \\ &= \frac{1}{n-k-1} \sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i \left(\frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i} - \hat{m}_k^c - \hat{\lambda}_k^c \cdot \frac{\hat{\sigma}_k^c}{\hat{\omega}_{k-1}^c} \cdot (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c) \right)^2 \\ &= \frac{1}{n-k-1} \sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i \left(\frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i} - \hat{m}_k^c - \hat{b}_k^c (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c) \right)^2 \end{aligned}$$

□

2.1.3 Nachweis der Erwartungstreue

Als Vorlage für den nachfolgenden Abschnitt dient die Veröffentlichung von Mack zum Munich Chain Ladder [Mac09, S. 11-12].

2.1.9 Notation. $\mathcal{B}_k := \{C_{i,j}, D_{i,j} | i + j \leq n + 1; j \leq k\}$ sei die bekannte Schadenabwicklung über alle Anfalljahre i im linken oberen Dreieck von Paid und Incurred bis zum Entwicklungsjahr k .

2.1.10 Satz. Seien \hat{a}_k^c, \hat{b}_k^c die Minimum-Quadrat-Schätzer der Gleichungen (2.3) und (2.1) und $(\hat{\tau}_k^c)^2$ der zugehörige Varianzschätzer aus Gleichung (2.7). Weiter sei \mathcal{B}_{k-1} die Entwicklung von Paid und Incurred im linken oberen Dreieck gemäß Notation 2.1.9. Dann folgt für die bedingten Erwartungswerte der Schätzer:

1. $E[\hat{b}_k^c | \mathcal{B}_{k-1}] = b_k^c$
2. $E[\hat{a}_k^c | \mathcal{B}_{k-1}] = a_k^c$
3. $E[(\hat{\tau}_k^c)^2 | \mathcal{B}_{k-1}] = (\tau_k^c)^2$

Beweis.

zu 1. z.zg.: $E[\hat{b}_k^c | \mathcal{B}_{k-1}] = b_k^c$

Da der Nenner von \hat{b}_k^c in Gleichung (2.1) konstant ist, wird zunächst der Zähler betrachtet.

$$\begin{aligned}
& E\left[\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i \frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i} (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c) \middle| \mathcal{B}_{k-1} \right] \\
&= \sum_{i=1}^{n-k+1} E[C_{i,k} - C_{i,k-1} | \mathcal{B}_{k-1}] (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c) \\
&= \sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i (a_k^c + b_k^c f_{i,k-1}) (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c) \\
&= \sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i a_k^c (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c) + \sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i b_k^c f_{i,k-1} (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c) \\
&= a_k^c \left[\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c) \right] + b_k^c \left[\sum_{i=1}^{n-k+1} (\pi_i f_{i,k-1}^2 - \pi_i f_{i,k-1} Q_{k-1}^c) \right] \\
&= a_k^c \left[\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i f_{i,k-1} - \sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i Q_{k-1}^c \right] + b_k^c \left[\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i f_{i,k-1}^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i f_{i,k-1} \right)^2}{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i} \right]
\end{aligned}$$

In diesem Term ist der erste Summand = 0:

$$\begin{aligned}
& a_k^c \left[\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i f_{i,k-1} - \sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i Q_{k-1}^c \right] \\
&= a_k^c \left[\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i f_{i,k-1} - \sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i \frac{\sum_{j=1}^{n-k+1} \pi_j f_{j,k-1}}{\sum_{j=1}^{n-k+1} \pi_j} \right] \\
&= a_k^c \left[\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i f_{i,k-1} - \sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i f_{i,k-1} \right] = a_k^c 0 = 0
\end{aligned}$$

Zusätzlich wird noch der Nenner des Schätzers \hat{b}_k^c umgeformt:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c)^2 = \sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i (f_{i,k-1}^2 - 2f_{i,k-1} Q_{k-1}^c + (Q_{k-1}^c)^2) \\
&= \sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i f_{i,k-1}^2 - 2 \sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i f_{i,k-1} \frac{\sum_{j=1}^{n-k+1} \pi_j f_{j,k-1}}{\sum_{j=1}^{n-k+1} \pi_j} + \sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i \left(\frac{\sum_{j=1}^{n-k+1} \pi_j f_{j,k-1}}{\sum_{j=1}^{n-k+1} \pi_j} \right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i f_{i,k-1}^2 - 2 \frac{\left(\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i f_{i,k-1} \right)^2}{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i} + \frac{\left(\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i f_{i,k-1} \right)^2}{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i f_{i,k-1}^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i f_{i,k-1} \right)^2}{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i}
\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich für den bedingten Erwartungswert des Schätzers \hat{b}_k^c :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\hat{b}_k^c | \mathcal{B}_{k-1}] &= \mathbb{E} \left[\frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i \frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i} (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c)}{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c)^2} \middle| \mathcal{B}_{k-1} \right] \\
&= b_k^c \frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i f_{i,k-1}^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i f_{i,k-1} \right)^2}{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i}}{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i f_{i,k-1}^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i f_{i,k-1} \right)^2}{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i}} = b_k^c
\end{aligned}$$

□

Beweis.

zu 2. z.zg.: $\mathbb{E}[\hat{a}_k^c | \mathcal{B}_{k-1}] = a_k^c$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\hat{a}_k^c | \mathcal{B}_{k-1}] &= \mathbb{E}[\hat{m}_k^c - \hat{b}_k^c Q_{k-1}^c | \mathcal{B}_{k-1}] = \mathbb{E}[\hat{m}_k^c | \mathcal{B}_{k-1}] - \mathbb{E}[\hat{b}_k^c Q_{k-1}^c | \mathcal{B}_{k-1}] \\
&= \mathbb{E} \left[\frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} (C_{i,k} - C_{i,k-1})}{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i} \middle| \mathcal{B}_{k-1} \right] - Q_{k-1}^c \mathbb{E}[\hat{b}_k^c | \mathcal{B}_{k-1}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} \mathbb{E}[C_{i,k} - C_{i,k-1} | \mathcal{B}_{k-1}]}{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i} - Q_{k-1}^c b_k^c \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i a_k^c + b_k^c \pi_i f_{i,k-1}}{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i} - \frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i f_{i,k-1}}{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i} \cdot b_k^c \\
&= a_k^c \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i}{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i} + b_k^c \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i f_{i,k-1} - \sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i f_{i,k-1}}{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i} = a_k^c
\end{aligned}$$

□

Beweis.

zu 3. zzg.: $\mathbb{E}[(\hat{\tau}_k^c)^2 | \mathcal{B}_{k-1}] = (\tau_k^c)^2$

Für den Beweis wird die Darstellung von $(\hat{\tau}_k^c)^2$ gemäß Korollar 2.1.8 verwendet.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[(\hat{\tau}_k^c)^2 | \mathcal{B}_{k-1}] \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{1}{n-k-1} \sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i \left(\frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i} - \hat{m}_k^c - \hat{b}_k^c (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c)\right)^2 \middle| \mathcal{B}_{k-1}\right] \\
&= \frac{1}{n-k-1} \sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i \mathbb{E}\left[\left(\frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i} - \hat{m}_k^c - \hat{b}_k^c (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c)\right)^2 \middle| \mathcal{B}_{k-1}\right] \\
&= \frac{1}{n-k-1} \sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i \underbrace{\text{Var}\left[\left(\frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i} - \hat{m}_k^c - \hat{b}_k^c (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c)\right) \middle| \mathcal{B}_{k-1}\right]}_{=A} \\
&\quad + \underbrace{\frac{1}{n-k-1} \sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i \mathbb{E}\left[\left(\frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i} - \hat{m}_k^c - \hat{b}_k^c (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c)\right) \middle| \mathcal{B}_{k-1}\right]^2}_{=B} \quad (2.10)
\end{aligned}$$

Wobei der letzte Umformungsschritt mit der Gleichung $\mathbb{E}[X^2] = \text{Var}[X] + (\mathbb{E}[X])^2$ folgt. Zur Fortsetzung des Beweises benötigen wir einige vorbereitende Lemmata (Lemma 2.1.11 - 2.1.14). Diese enthalten Ergebnisse zu Varianzen, Erwartungswerte und Kovarianzen für bzw. zwischen den Schätzern \hat{m}_k^c und \hat{b}_k^c .

2.1.11 Lemma. Sei \hat{m}_k^c der in Gleichung (2.4) eingeführte Schätzer, dann gilt:

$$\mathbb{E}[\hat{m}_k^c | \mathcal{B}_{k-1}] = \frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i a_k^c + \pi_i b_k^c f_{i,k-1}}{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\hat{m}_k^c | \mathcal{B}_{k-1}] &= \mathbb{E}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} (C_{i,k} - C_{i,k-1})}{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i} \middle| \mathcal{B}_{k-1}\right] = \frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} \mathbb{E}[C_{i,k} - C_{i,k-1} | \mathcal{B}_{k-1}]}{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i a_k^c + \pi_i b_k^c f_{i,k-1}}{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i} \end{aligned}$$

□

2.1.12 Lemma. Seien \hat{b}_k^c und \hat{m}_k^c die Schätzer gemäß den Gleichungen (2.1) und (2.4), dann ergibt sich für die bedingte Varianz

$$\text{Var}[\hat{m}_k^c | \mathcal{B}_{k-1}] = \frac{(\tau_k^c)^2}{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i} \quad \text{und} \quad \text{Var}[\hat{b}_k^c | \mathcal{B}_{k-1}] = \frac{(\tau_k^c)^2}{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c)^2}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \text{Var}[\hat{m}_k^c | \mathcal{B}_{k-1}] &= \text{Var}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} (C_{i,k} - C_{i,k-1})}{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i} \middle| \mathcal{B}_{k-1}\right] = \frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} \text{Var}[C_{i,k} - C_{i,k-1} | \mathcal{B}_{k-1}]}{\left(\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i\right)^2} \\ &\stackrel{\text{(BAD 3.1)}}{=} \frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i (\tau_k^c)^2}{\left(\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i\right)^2} = \frac{(\tau_k^c)^2}{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Var}[\hat{b}_k^c | \mathcal{B}_{k-1}] &= \text{Var} \left[\frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i \left(\frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i} \right) (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c)}{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c)^2} \middle| \mathcal{B}_{k-1} \right] \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} \text{Var}[C_{i,k} - C_{i,k-1} | \mathcal{B}_{k-1}] (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c)^2}{\left(\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c)^2 \right)^2} \\
&\stackrel{\text{(BAD 3.1)}}{=} \frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} (\tau_k^c)^2 \pi_i (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c)^2}{\left(\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c)^2 \right)^2} \\
&= \frac{(\tau_k^c)^2}{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c)^2}
\end{aligned}$$

□

2.1.13 Lemma. Seien \hat{m}_k^c und \hat{b}_k^c die Schätzer gemäß den Gleichungen (2.4) und (2.1), dann gilt:

$$\begin{aligned}
\text{Cov} \left[\frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i}; \hat{m}_k^c \middle| \mathcal{B}_{k-1} \right] &= \frac{(\tau_k^c)^2}{n-k+1} \\
&\quad \sum_{j=1}^{n-k+1} \pi_j \\
\text{Cov} \left[\frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i}; \hat{b}_k^c \middle| \mathcal{B}_{k-1} \right] &= \frac{(f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c) (\tau_k^c)^2}{n-k+1} \\
&\quad \sum_{j=1}^{n-k+1} \pi_j (f_{j,k-1} - Q_{k-1}^c)^2
\end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
& \text{Cov}\left[\frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i}; \hat{m}_k^c \middle| \mathcal{B}_{k-1}\right] \\
&= \text{Cov}\left[\frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i}; \frac{\sum_{j=1}^{n-k+1} (C_{j,k} - C_{j,k-1})}{\sum_{j=1}^{n-k+1} \pi_j} \middle| \mathcal{B}_{k-1}\right] \\
&= \frac{1}{\pi_i \sum_{j=1}^{n-k+1} \pi_j} \text{Cov}\left[C_{i,k} - C_{i,k-1}; \sum_{j=1}^{n-k+1} (C_{j,k} - C_{j,k-1}) \middle| \mathcal{B}_{k-1}\right] \\
&\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{\pi_i \sum_{j=1}^{n-k+1} \pi_j} \text{Var}[C_{i,k} - C_{i,k-1} | \mathcal{B}_{k-1}] = \frac{(\tau_k^c)^2 \pi_i}{\pi_i \sum_{j=1}^{n-k+1} \pi_j} = \frac{(\tau_k^c)^2}{\sum_{j=1}^{n-k+1} \pi_j} \\
& \\
& \text{Cov}\left[\frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i}; \hat{b}_k^c \middle| \mathcal{B}_{k-1}\right] \\
&= \text{Cov}\left[\frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i}; \frac{\sum_{j=1}^{n-k+1} \pi_j \frac{C_{j,k} - C_{j,k-1}}{\pi_j} (f_{j,k-1} - Q_{k-1}^c)}{\sum_{j=1}^{n-k+1} \pi_j (f_{j,k-1} - Q_{k-1}^c)^2} \middle| \mathcal{B}_{k-1}\right] \\
&= \frac{\text{Cov}\left[C_{i,k} - C_{i,k-1}; \sum_{j=1}^{n-k+1} (C_{j,k} - C_{j,k-1}) (f_{j,k-1} - Q_{k-1}^c) \middle| \mathcal{B}_{k-1}\right]}{\pi_i \sum_{j=1}^{n-k+1} \pi_j (f_{j,k-1} - Q_{k-1}^c)} \\
&\stackrel{(*)}{=} \frac{(f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c) \text{Var}[C_{i,k} - C_{i,k-1} | \mathcal{B}_{k-1}]}{\pi_i \sum_{j=1}^{n-k+1} \pi_j (f_{j,k-1} - Q_{k-1}^c)} = \frac{(f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c) (\tau_k^c)^2 \pi_i}{\pi_i \sum_{j=1}^{n-k+1} \pi_j (f_{j,k-1} - Q_{k-1}^c)} \\
&= \frac{(f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c) (\tau_k^c)^2}{\sum_{j=1}^{n-k+1} \pi_j (f_{j,k-1} - Q_{k-1}^c)^2}
\end{aligned}$$

(*) $\text{Cov}[C_{i,k} - C_{i,k-1}; C_{j,k} - C_{j,k-1}] = 0$ für $i \neq j$ wegen der Unabhängigkeit der Anfalljahre (vgl. (BAD 1.1))

□

2.1.14 Lemma (Unkorreliertheit zwischen \hat{m}_k und \hat{b}_k). Seien \hat{m}_k^c und \hat{b}_k^c , sowie \hat{m}_k^d und \hat{b}_k^d die oben eingeführten Schätzer des verallgemeinerten Modellansatzes für Paid und Incurred, dann gilt:

1. $\text{Cov}[\hat{m}_k^c; \hat{b}_k^c | \mathcal{B}_{k-1}] = 0$
2. $\text{Cov}[\hat{m}_k^d; \hat{b}_k^d | \mathcal{B}_{k-1}] = 0$

Beweis.

$$\begin{aligned}
& \text{Cov}[\hat{m}_k^c; \hat{b}_k^c | \mathcal{B}_{k-1}] \\
= & \text{Cov} \left[\frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} (C_{i,k} - C_{i,k-1})}{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i}; \frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} (C_{i,k} - C_{i,k-1}) (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c)}{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c)^2} \middle| \mathcal{B}_{k-1} \right] \\
= & \frac{\text{Cov} \left[\sum_{i=1}^{n-k+1} (C_{i,k} - C_{i,k-1}); \sum_{i=1}^{n-k+1} (C_{i,k} - C_{i,k-1}) (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c) \middle| \mathcal{B}_{k-1} \right]}{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i \sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c)^2} \\
= & \frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} \sum_{j=1}^{n-k+1} \text{Cov} \left[(C_{i,k} - C_{i,k-1}); (C_{j,k} - C_{j,k-1}) (f_{j,k-1} - Q_{k-1}^c) \middle| \mathcal{B}_{k-1} \right]}{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i \sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c)^2} \\
= & \frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} \sum_{j=1}^{n-k+1} \text{Cov} [C_{i,k} - C_{i,k-1}; C_{j,k} - C_{j,k-1} | \mathcal{B}_{k-1}] (f_{j,k-1} - Q_{k-1}^c)}{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i \sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c)^2} \\
\stackrel{\text{(BAD 1.1)}}{=} & \frac{\sum_{j=1}^{n-k+1} \text{Var} [C_{j,k} - C_{j,k-1} | \mathcal{B}_{k-1}] (f_{j,k-1} - Q_{k-1}^c)}{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i \sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c)^2} \\
\stackrel{\text{(BAD 3.1)}}{=} & \frac{(\tau_k^c)^2 \sum_{j=1}^{n-k+1} \pi_j (f_{j,k-1} - Q_{k-1}^c)}{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i \sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\tau_k^c)^2 \left(\sum_{j=1}^{n-k+1} \pi_j f_{j,k-1} - \sum_{j=1}^{n-k+1} \pi_j \frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i f_{i,k-1}}{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i} \right) \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i \sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c)^2}{(\tau_k^c)^2 \cdot 0} \\
&= \frac{0}{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i \sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c)^2} = 0
\end{aligned}$$

Der Beweis für 2. $\text{Cov}[\hat{m}_k^d; \hat{b}_k^d | \mathcal{B}_{k-1}] = 0$ verläuft analog. \square

Nun wenden wir uns wieder dem ursprünglichen Beweis von 3. $E[(\hat{\tau}_k^c)^2 | \mathcal{B}_{k-1}] = (\tau_k^c)^2$ von Satz 2.1.10 zu.

Mit Lemma 2.1.11 lässt sich zeigen, dass B aus obiger Gleichung (2.10) gleich 0 ist:

$$\begin{aligned}
B &= \frac{1}{\underbrace{n-k-1}_{:=a}} \sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i E \left[\left(\frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i} - \hat{m}_k^c - \hat{b}_k^c (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c) \right) | \mathcal{B}_{k-1} \right]^2 \\
&= \frac{1}{a} \sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i \left(E \left[\frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i} | \mathcal{B}_{k-1} \right] - E[\hat{m}_k^c | \mathcal{B}_{k-1}] - E[\hat{b}_k^c (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c) | \mathcal{B}_{k-1}] \right)^2 \\
&= \frac{1}{a} \sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i \left(a_k^c + b_k^c f_{i,k-1} - \frac{\sum_{j=1}^{n-k+1} \pi_j a_k^c + \pi_j b_k^c f_{j,k-1}}{\sum_{j=1}^{n-k+1} \pi_j} - (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c) b_k^c \right)^2 \\
&= \frac{1}{a} \sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i \left(a_k^c + b_k^c f_{i,k-1} - \frac{\sum_{j=1}^{n-k+1} \pi_j a_k^c}{\sum_{j=1}^{n-k+1} \pi_j} - \frac{\sum_{j=1}^{n-k+1} \pi_j b_k^c f_{j,k-1}}{\sum_{j=1}^{n-k+1} \pi_j} - b_k^c f_{i,k-1} - b_k^c Q_{k-1}^c \right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{a} \sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i \left(a_k^c - a_k^c \frac{\sum_{j=1}^{n-k+1} \pi_j}{\sum_{j=1}^{n-k+1} \pi_j} - b_k^c \frac{\sum_{j=1}^{n-k-1} \pi_j f_{j,k-1}}{\sum_{j=1}^{n-k+1} \pi_j} + b_k^c \frac{\sum_{j=1}^{n-k+1} \pi_j f_{j,k-1}}{\sum_{j=1}^{n-k+1} \pi_j} \right)^2 \\
&= \frac{1}{a} \sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i \left(a_k^c - a_k^c \right)^2 = 0
\end{aligned}$$

Es bleibt noch die Umformung von A, für die die Ergebnisse aus den Lemmata 2.1.12, 2.1.13 und 2.1.14 benötigt werden.

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{n-k-1} \sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i \text{Var} \left[\left(\frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i} - \hat{m}_k^c - \hat{b}_k^c (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c) \right) | \mathcal{B}_{k-1} \right] \\
&= \frac{1}{n-k-1} \sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i \left\{ \text{Var} \left[\frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i} | \mathcal{B}_{k-1} \right] + \text{Var} [\hat{m}_k^c | \mathcal{B}_{k-1}] \right. \\
&\quad + \text{Var} [\hat{b}_k^c (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c) | \mathcal{B}_{k-1}] \\
&\quad + 2 \left(\text{Cov} \left[\frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i}; \hat{m}_k^c | \mathcal{B}_{k-1} \right] \right. \\
&\quad - (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c) \text{Cov} \left[\frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i}; \hat{b}_k^c | \mathcal{B}_{k-1} \right] \\
&\quad \left. \left. + (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c) \underbrace{\text{Cov} [\hat{m}_k^c; \hat{b}_k^c | \mathcal{B}_{k-1}]}_{=0 \text{ wegen Lemma 2.1.14}} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{n-k-1} \sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i \left\{ \frac{(\tau_k^c)^2}{\pi_i} + \frac{(\tau_k^c)^2}{\sum_{j=1}^{n-k+1} \pi_j} + \frac{(\tau_k^c)^2 (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c)^2}{\sum_{j=1}^{n-k+1} \pi_j (f_{j,k-1} - Q_{k-1}^c)^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{2(\tau_k^c)^2}{\sum_{j=1}^{n-k+1} \pi_j} - \frac{2(\tau_k^c)^2 (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c)^2}{\sum_{j=1}^{n-k+1} \pi_j (f_{j,k-1} - Q_{k-1}^c)^2} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\tau_k^c)^2}{n-k-1} \sum_{i=1}^{n-k+1} \left\{ \frac{\pi_i}{\pi_i} + \frac{\pi_i}{\sum_{j=1}^{n-k+1} \pi_j} + \frac{\pi_i (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c)^2}{\sum_{j=1}^{n-k+1} \pi_j (f_{j,k-1} - Q_{k-1}^c)^2} - \frac{2\pi_i}{\sum_{j=1}^{n-k+1} \pi_j} \right. \\
&\quad \left. - \frac{2\pi_i (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c)^2}{\sum_{j=1}^{n-k+1} \pi_j (f_{j,k-1} - Q_{k-1}^c)^2} \right\} \\
&= \frac{(\tau_k^c)^2}{n-k-1} \sum_{i=1}^{n-k+1} \left\{ 1 - \frac{\pi_i}{\sum_{j=1}^{n-k+1} \pi_j} - \frac{\pi_i (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c)^2}{\sum_{j=1}^{n-k+1} \pi_j (f_{j,k-1} - Q_{k-1}^c)^2} \right\} \\
&= \frac{(\tau_k^c)^2}{n-k-1} (n-k+1-1-1) \\
&= \frac{(\tau_k^c)^2}{n-k-1} (n-k-1) \\
&= (\tau_k^c)^2
\end{aligned}$$

□

2.2 Spezielle Modellansätze

Nachfolgend werden für verschiedene explizite Formen der Funktion $f(\pi_i; D_{i,k-1}; C_{i,k-1})$ die allgemeinen Modellannahmen (BAD 1) bis (BAD 4) betrachtet und die Schätzer für a_k^c und b_k^c sowie $\hat{E}[C_{i,k} - C_{i,k-1} | \mathcal{A}_{i,k-1}]$ bestimmt. Eine genaue Festlegung der Funktion f ist notwendig, da ansonsten weitere Berechnungen wie etwa die Fehlerabschätzung für das Verfahren, nicht möglich sind. Auch ist es das erklärte Ziel dieser Arbeit, ein vollständig in die Praxis umsetzbares Reserveverfahren zu entwickeln. Aus diesem Grund muss vom allgemeinen Modellansatz, bei welchem die Funktionsvorschrift von f variabel gehalten ist, zu einer konkreten Form der Funktion f übergegangen werden.

Da es bei der Erschließung des Themas der Bachelorarbeit mehrere mögliche Ansätze für das Verfahren gab, werden an dieser Stelle fünf mögliche Formen der Funktion f vorgestellt und diskutiert. Jeder Ansatz erhält am Ende eine kurze Kommentierung. Anschließend wird ein Modellansatz als „Bester“ ausgewählt und fortan als alleiniger weiterverfolgt. Wie im vorigen Abschnitt findet die Betrachtung der Ansätze wieder ausschließlich für die Schadenzahlungen (Paid) statt.

2.2.1 (Incurred-Paid)/Prämie

Bei diesem Modellansatz wird die Funktion f definiert als $f : (\pi_i; D_{i,k-1}; C_{i,k-1}) \mapsto \frac{D_{i,k-1} - C_{i,k-1}}{\pi_i}$. Es wird also eine Abhängigkeit der zukünftigen Zuwächse von der Reservequote des Vorjahres angenommen. Diese ergibt sich als Quotient aus Vorjahresreserve $D_{i,k-1} - C_{i,k-1}$ und Prämie π_i .

Für diesen Ansatz ergeben sich folgende Modellannahmen:

(BAD 1) Unabhängigkeitsannahmen:

(BAD 1.1) Analog zur Annahme des allg. Modelansatzes.

(BAD 1.2) Analog zur Annahme des allg. Modelansatzes.

(BAD 1.3) Der in f enthaltene Reservestand des Anfalljahres i , d. h. die Differenz $D_{i,k-1} - C_{i,k-1}$ ist sowohl unabhängig von der vorangegangenen bekannten Paid-Entwicklung, als auch von der vorangegangenen bekannten Incurred-Entwicklung, d.h. unabhängig von $C_{i,k-1}$ und unabhängig von $D_{i,k-1}$. (BAD 1.3) wird aber auch bereits durch die Unabhängigkeitsannahme (BAD 1.1) und die Erwartungswertannahme (BAD 2.1) impliziert, da die Unabhängigkeit der Zuwächse $S_{i,k}^c = C_{i,k} - C_{i,k-1}$ und die Erwartungswertannahme nur dann gemeinsam erfüllt sein können, wenn die Reserve unabhängig von den vergangenen Zuwächsen ist.

(BAD 2) Erwartungswertannahmen: Es gibt $a_k^c, b_k^c, a_k^d, b_k^d \in \mathbb{R}$ mit

$$(BAD\ 2.1) \quad E\left[\frac{C_{i,k}-C_{i,k-1}}{\pi_i}|\mathcal{A}_{i,k-1}\right] = a_k^c + b_k^c \cdot \frac{D_{i,k-1}-C_{i,k-1}}{\pi_i} \quad \forall i, k$$

$$(BAD\ 2.2) \quad E\left[\frac{D_{i,k}-D_{i,k-1}}{\pi_i}|\mathcal{A}_{i,k-1}\right] = a_k^d + b_k^d \cdot \frac{C_{i,k-1}-D_{i,k-1}}{\pi_i} \quad \forall i, k$$

(BAD 3) Varianzannahmen: Analog zu den Annahmen des allg. Modelansatzes.

(BAD 4) Analog zur Annahme des allg. Modelansatzes.

Das Berechnen der Minimum-Quadrat-Schätzer ergibt für diesen Ansatz folgende Ergebnisse:

$$\hat{b}_k^c = \frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} (C_{i,k} - C_{i,k-1}) \left(\frac{D_{i,k-1} - C_{i,k-1}}{\pi_i} - Q_{k-1}^c \right)}{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i \left(\frac{D_{i,k-1} - C_{i,k-1}}{\pi_i} - Q_{k-1}^c \right)^2}$$

mit

$$Q_{k-1}^c := \frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} (D_{i,k-1} - C_{i,k-1})}{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i}$$

die durchschnittliche Reservequote über die bekannten Werte (linkes oberes Dreieck) des Entwicklungsjahres $k - 1$.

$$\hat{a}_k^c = \hat{m}_k^c - \hat{b}_k^c \cdot Q_{k-1}^c$$

mit

$$\hat{m}_k^c := \frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} (C_{i,k} - C_{i,k-1})}{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i}$$

dem AUSQZ-Schätzer für das Entwicklungsjahr k aus dem klassischen Additivem Verfahren.

Als Schätzer für den Zuwachs ergibt sich

$$\hat{E}[C_{i,k} - C_{i,k-1}|\mathcal{A}_{i,k-1}] = \pi_i \left[\hat{m}_k^c + \hat{\lambda}_k^c \cdot \frac{\hat{\sigma}_k^c}{\hat{\omega}_{k-1}^c} \cdot \left(\frac{D_{i,k-1} - C_{i,k-1}}{\pi_i} - Q_{k-1}^c \right) \right],$$

wobei λ_k^c gemäß Bemerkung 2.1.3 den prämiengewichteten empirischen Korrelationskoeffizienten zwischen dem Schadenquotenzuwachs $\frac{C_{i,k}-C_{i,k-1}}{\pi_i}$ und der Reservequote des Vorjahres $\frac{D_{i,k-1}-C_{i,k-1}}{\pi_i}$ über alle bekannten Anfalljahre i für ein festes Entwicklungsjahr k darstellt.

Diskussion

Modellansatz 2.2.1 steht in keinerlei Konflikt mit den im allgemeinen Modellansatz gemachten Annahmen. Aus Sicht der Praxis scheint es sinnvoll, eine Abhängigkeit zwischen Schadenquotenzuwachs und vorhandener Reservequote zu unterstellen, da in Anfalljahren mit hoher Reserve höhere Auszahlungen zu erwarten sind, als in Anfalljahren mit niedriger Reserve. Ferner spricht für diesen Modellansatz, dass er bereits in der DAV Spezialwissenprüfung über Schadenversicherung als Analogon zum Munich Chain Ladder für das Additive Verfahren vorgestellt wurde (vgl. [DAV13, Aufgabe 2.4.2]). Dieser Ansatz, ist der Vielversprechenste und wird, nachdem die Ansätze 2.2.2 bis 2.2.5 vorgestellt und kommentiert wurden, als alleiniges Modell anhand von realen Daten in die Praxis umgesetzt.

2.2.2 Incurred/Paid

Bei diesem Modellansatz wird die Funktion f definiert als $f : (\pi_i; D_{i,k-1}; C_{i,k-1}) \mapsto \frac{D_{i,k-1}}{C_{i,k-1}}$. Es wird also eine Abhängigkeit der zukünftigen Zuwächse vom Verhältnis zwischen Aufwand und Zahlung unterstellt.

Für diesen Ansatz ergeben sich folgende Modellannahmen:

(BAD 1) Unabhängigkeitsannahmen:

(BAD 1.1) Analog zur Annahme des allg. Modelansatzes.

(BAD 1.2) Analog zur Annahme des allg. Modelansatzes.

(BAD 1.3) Der Quotient $\frac{D_{i,k-1}}{C_{i,k-1}}$ ist unabhängig von der vorangegangenen Paid-Entwicklung $C_{i,k-1}$ und unabhängig von der vorangegangenen Incurred-Entwicklung $D_{i,k-1}$. Auch hier gilt, dass die Unabhängigkeitsannahme (BAD 1.3) eigentlich auch aus der Unabhängigkeitsannahmen (BAD 1.1) und der Erwartungswertannahme (BAD 2.1) implizit gefolgert werden kann.

(BAD 2) Erwartungswertannahmen: Es gibt $a_k^c, b_k^c, a_k^d, b_k^d \in \mathbb{R}$ mit

$$(BAD 2.1) \quad \mathbb{E} \left[\frac{C_{i,k}-C_{i,k-1}}{\pi_i} \mid \mathcal{A}_{i,k-1} \right] = a_k^c + b_k^c \cdot \frac{D_{i,k-1}}{C_{i,k-1}} \quad \forall i, k$$

$$(BAD 2.2) \quad \mathbb{E} \left[\frac{D_{i,k}-D_{i,k-1}}{\pi_i} \mid \mathcal{A}_{i,k-1} \right] = a_k^d + b_k^d \cdot \frac{C_{i,k-1}}{D_{i,k-1}} \quad \forall i, k$$

(BAD 3) Varianzannahmen: Analog zu den Annahmen des allg. Modelansatzes.

(BAD 4) Analog zur Annahme des allg. Modelansatzes.

Das Berechnen der Minimum-Quadrat-Schätzer ergibt für diesen Ansatz folgende Ergebnisse:

$$\hat{b}_k^c = \frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} (C_{i,k} - C_{i,k-1}) \left(\frac{D_{i,k-1}}{C_{i,k-1}} - Q_{k-1}^c \right)}{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i \left(\frac{D_{i,k-1}}{C_{i,k-1}} - Q_{k-1}^c \right)^2}$$

mit

$$Q_{k-1}^c := \frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i \frac{D_{i,k-1}}{C_{i,k-1}}}{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i}$$

das durchschnittliche Incurred zu Paid Verhältnis über die bekannten Werte (linkes oberes Dreieck) des Entwicklungsjahres $k - 1$.

$$\hat{a}_k^c = \hat{m}_k^c - \hat{b}_k^c \cdot Q_{k-1}^c$$

mit

$$\hat{m}_k^c := \frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} (C_{i,k} - C_{i,k-1})}{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i}$$

dem AUSQZ-Schätzer für das Entwicklungsjahr k aus dem klassischen Additivem Verfahren.

Als Schätzer für den Zuwachs ergibt sich

$$\hat{E}[C_{i,k} - C_{i,k-1} | \mathcal{A}_{i,k-1}] = \pi_i \left[\hat{m}_k^c + \hat{\lambda}_k^c \cdot \frac{\hat{\sigma}_k^c}{\hat{\omega}_{k-1}^c} \cdot \left(\frac{D_{i,k-1}}{C_{i,k-1}} - Q_{k-1}^c \right) \right],$$

wobei $\hat{\lambda}_k^c$ gemäß Bemerkung 2.1.3 den prämiengewichteten empirischen Korrelationskoeffizienten zwischen dem Schadenquotenzuwachs $\frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i}$ und dem Incurred/Paid-Stand des Vorjahres $\frac{D_{i,k-1}}{C_{i,k-1}}$ über alle bekannten Anfalljahre i für ein festes Entwicklungsjahr k darstellt.

Diskussion

Dieser Ansatz stellt die Übertragung des Ansatzes von Mack aus dem Munich Chain Ladder auf Zuwachsquoten dar (vgl. [Mac09, S. 9]). Dieser passt allgemein besser in die Chain Ladder als in die additive Reservebestimmung, da die Form der Funktion f eher an einem multiplikativen Zuschlagsfaktor erinnert. Weitere Überlegungen zu diesem Ansatz werden deshalb in dieser Arbeit nicht ausgeführt.

2.2.3 Incurred-Paid

Bei diesem Modellansatz ist die Funktion f definiert als $f : (\pi_i; D_{i,k-1}; C_{i,k-1}) \mapsto D_{i,k-1} - C_{i,k-1}$. Es wird also eine Abhängigkeit der zukünftigen Zuwächse von der Vorjahresreserve unterstellt.

Für diesen Ansatz ergeben sich folgende Modellannahmen:

(BAD 1) Unabhängigkeitsannahmen:

(BAD 1.1) Analog zur Annahme des allg. Modelansatzes.

(BAD 1.2) Analog zur Annahme des allg. Modelansatzes.

(BAD 1.3) Die Differenz $D_{i,k-1} - C_{i,k-1}$ ist unabhängig von der vorangegangenen bekannten Paid-Entwicklung $C_{i,k-1}$ und sie ist unabhängig von der vorangegangenen bekannten Incurred-Entwicklung $D_{i,k-1}$.

(BAD 2) Erwartungswertannahmen: Es gibt $a_k^c, b_k^c, a_k^d, b_k^d \in \mathbb{R}$ mit

$$(BAD 2.1) \quad \mathbb{E} \left[\frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i} \mid \mathcal{A}_{i,k-1} \right] = a_k^c + b_k^c \cdot (D_{i,k-1} - C_{i,k-1}) \quad \forall i, k$$

$$(BAD 2.2) \quad \mathbb{E} \left[\frac{D_{i,k} - D_{i,k-1}}{\pi_i} \mid \mathcal{A}_{i,k-1} \right] = a_k^d + b_k^d \cdot (C_{i,k-1} - D_{i,k-1}) \quad \forall i, k$$

(BAD 3) Varianzannahmen: Analog zu den Annahmen des allg. Modelansatzes.

(BAD 4) Analog zur Annahme des allg. Modelansatzes.

Das Berechnen der Minimum-Quadrat-Schätzer ergibt für diesen Ansatz folgende Ergebnisse:

$$\hat{b}_k^c = \frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} (C_{i,k} - C_{i,k-1})(D_{i,k-1} - C_{i,k-1} - Q_{k-1}^c)}{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i (D_{i,k-1} - C_{i,k-1} - Q_{k-1}^c)^2}$$

mit

$$Q_{k-1}^c := \frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i (D_{i,k-1} - C_{i,k-1})}{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i}$$

der durchschnittliche absolute Reservestand über die bekannten Werte (linkes oberes Dreieck) des Entwicklungsjahres $k - 1$.

$$\hat{a}_k^c = \hat{m}_k^c - \hat{b}_k^c \cdot Q_{k-1}^c$$

mit

$$\hat{m}_k^c := \frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} (C_{i,k} - C_{i,k-1})}{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i}$$

dem AUSQZ-Schätzer für das Entwicklungsjahr k aus dem klassischen Additivem Verfahren.

Als Schätzer für den Zuwachs ergibt sich

$$\hat{E}[C_{i,k} - C_{i,k-1} | \mathcal{A}_{i,k-1}] = \pi_i \left[\hat{m}_k^c + \hat{\lambda}_k^c \cdot \frac{\hat{\sigma}_k^c}{\hat{\omega}_{k-1}^c} \cdot (D_{i,k-1} - C_{i,k-1} - Q_{k-1}^c) \right],$$

wobei $\hat{\lambda}_k^c$ gemäß Bemerkung 2.1.3 den prämiengewichteten empirischen Korrelationskoeffizienten zwischen dem Schadenquotenzuwachs $\frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i}$ und der Reserve des Vorjahres $D_{i,k-1} - C_{i,k-1}$ über alle bekannten Anfalljahre i für ein festes Entwicklungsjahr k darstellt.

Diskussion

Das Problem bei diesem Ansatz ist, dass man mit einer absoluten Reserve rechnet und nicht mit der Reservequote wie unter 2.1.1 In der Erwartungswertannahme (BAD 2.1) wird die relative Größe $\frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i}$ als von der absoluten Größe $D_{i,k-1} - C_{i,k-1}$ abhängig angenommen. Dies würde z. B. bei einem wachsendem Portfolio zu steigenden Schadenquotenzuwächsen führen, da die absolute Reserve umso größer ist, je mehr Geschäft gezeichnet wird. Diese Voraussetzung ist in der Realität i. d. R. nicht erfüllt, da in Jahren in denen mehr Versicherungsgeschäft gezeichnet wurde in keinsten Weise eine schlechtere Schadenabwicklung folgen muss. Unter diesem Aspekt wird dieser Modellansatz als für

die Praxis untauglich erachtet und im weiteren nicht mehr verfolgt.

2.2.4 |Incurred-Paid|/Prämie

Bei diesem Modellansatz ist die Funktion f definiert als $f : (\pi_i; D_{i,k-1}; C_{i,k-1}) \mapsto \frac{|D_{i,k-1} - C_{i,k-1}|}{\pi_i}$. Es wird also eine Abhängigkeit der zukünftigen Zuwächse vom Quotienten der betragsmäßigen Vorjahresdifferenz zwischen Incurred und Paid und der Prämie unterstellt.

Für diesen Ansatz ergeben sich folgende Modellannahmen:

(BAD 1) Unabhängigkeitsannahmen:

(BAD 1.1) Analog zur Annahme des allg. Modelansatzes.

(BAD 1.2) Analog zur Annahme des allg. Modelansatzes.

(BAD 1.3) Die betragsmäßige Differenz $|D_{i,k-1} - C_{i,k-1}|$ ist unabhängig von der vorangegangenen bekannten Paid-Entwicklung $C_{i,k-1}$ und sie ist unabhängig von der vorangegangenen bekannten Incurred-Entwicklung $D_{i,k-1}$.

(BAD 2) Erwartungswertannahmen: Es gibt $a_k^c, b_k^c, a_k^d, b_k^d \in \mathbb{R}$ mit

$$(BAD 2.1) \quad E \left[\frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i} | \mathcal{A}_{i,k-1} \right] = a_k^c + b_k^c \cdot \frac{|D_{i,k-1} - C_{i,k-1}|}{\pi_i} \quad \forall i, k$$

$$(BAD 2.2) \quad E \left[\frac{D_{i,k} - D_{i,k-1}}{\pi_i} | \mathcal{A}_{i,k-1} \right] = a_k^d + b_k^d \cdot \frac{|C_{i,k-1} - D_{i,k-1}|}{\pi_i} \quad \forall i, k$$

(BAD 3) Varianzannahmen: Analog zu den Annahmen des allg. Modelansatzes.

(BAD 4) Analog zur Annahme des allg. Modelansatzes.

Das Berechnen der Minimum-Quadrat-Schätzer ergibt für diesen Ansatz folgende Ergebnisse:

$$\hat{b}_k^c = \frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} (C_{i,k} - C_{i,k-1}) \left(\frac{|D_{i,k-1} - C_{i,k-1}|}{\pi_i} - Q_{k-1}^c \right)}{\sum_{i=1}^{n-k+1} \frac{(|D_{i,k-1} - C_{i,k-1}| - Q_{k-1}^c \pi_i)^2}{\pi_i}}$$

mit

$$Q_{k-1}^c := \frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} |D_{i,k-1} - C_{i,k-1}|}{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i}$$

die durchschnittliche betragsmäßige Differenz zwischen Incurred und Paid über die bekannten Werte (linkes oberes Dreieck) des Entwicklungsjahres $k - 1$.

$$\hat{a}_k^c = \hat{m}_k^c - \hat{b}_k^c \cdot Q_{k-1}^c$$

mit

$$\hat{m}_k^c := \frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} (C_{i,k} - C_{i,k-1})}{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i}$$

dem AUSQZ-Schätzer für das Entwicklungsjahr k aus dem klassischen Additivem Verfahren.

Als Schätzer für den Zuwachs ergibt sich

$$\hat{E}[C_{i,k} - C_{i,k-1} | \mathcal{A}_{i,k-1}] = \pi_i \left[\hat{m}_k^c + \hat{\lambda}_k^c \cdot \frac{\hat{\sigma}_k^c}{\hat{\omega}_{k-1}^c} \cdot \left(\frac{|D_{i,k-1} - C_{i,k-1}|}{\pi_i} - Q_{k-1}^c \right) \right],$$

wobei λ_k^c gemäß Bemerkung 2.1.3 den prämiengewichteten empirischen Korrelationskoeffizienten zwischen dem Schadenquotenzuwachs $\frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i}$ und der betragsmäßigen Reservequote des Vorjahres $\frac{|D_{i,k-1} - C_{i,k-1}|}{\pi_i}$ über alle bekannten Anfalljahre i für ein festes Entwicklungsjahr k darstellt.

Diskussion

Dieser Ansatz hat die Schwäche, dass eine negative Reserve (Paid > Incurred) sich im gleichen Maße in den Berechnungen auswirkt wie eine positive Reserve (Paid < Incurred). Folglich würde dies in beiden Fällen zur selben Schätzung des Schadenquotenzuwachses führen. Dies ist in der Realität wenig sinnvoll, denn tendenziell erwartet man bei einer negativen Reserve Rückzahlungen und daher negative Schadenquotenzuwächse, während man bei einer positiven Reserve weitere Auszahlungen und positive Schadenquotenzuwächse erwartet. Unter diesem Aspekt scheidet auch dieser Modellansatz für die Praxis aus und wird im weiteren nicht mehr verfolgt.

2.2.5 Incurred/Prämie

Bei diesem Modellansatz ist die Funktion f definiert als $f : (\pi_i; D_{i,k-1}; C_{i,k-1}) \mapsto \frac{D_{i,k-1}}{\pi_i}$. Es wird also eine Abhängigkeit der zukünftigen Zuwächse von der Incurred-Schadenquote des vorigen Entwicklungsjahres unterstellt.

Für diesen Ansatz ergeben sich folgende Modellannahmen:

(BAD 1) Unabhängigkeitsannahmen:

(BAD 1.1) Analog zur Annahme des allg. Modelansatzes.

(BAD 1.2) Analog zur Annahme des allg. Modelansatzes.

(BAD 1.3) Die Unabhängigkeitsannahme (BAD 1.3) des allgemeinen Modellansatzes bereitet beim Anpassen an die jetzige Form der Funktion f Probleme. Denn f kann nun nicht mehr unabhängig von der vorangegangenen bekannten Paid-Entwicklung $C_{i,k-1}$ und der vorangegangenen bekannten Incurred-Entwicklung $D_{i,k-1}$ sein, weil $C_{i,k}$ gemäß (BAD 2.1) von $D_{i,k-1}$ abhängt. Weiter ist wegen (BAD 2.2) $D_{i,k-1}$ seinerseits von $C_{i,k-2}$ abhängig. Somit sind über $D_{i,k-1}$ die Paid-Stände $C_{i,k}$ und $C_{i,k-1}$ voneinander abhängig. Dies steht jedoch im Widerspruch zur Unabhängigkeitsannahme (BAD 1.1).

(BAD 2) Erwartungswertannahmen: Es gibt $a_k^c, b_k^c, a_k^d, b_k^d \in \mathbb{R}$ mit

$$(BAD 2.1) \quad E \left[\frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i} \mid \mathcal{A}_{i,k-1} \right] = a_k^c + b_k^c \cdot \frac{D_{i,k-1}}{\pi_i} \quad \forall i, k$$

$$(BAD 2.2) \quad E \left[\frac{D_{i,k} - D_{i,k-1}}{\pi_i} \mid \mathcal{A}_{i,k-1} \right] = a_k^d + b_k^d \cdot \frac{C_{i,k-1}}{\pi_i} \quad \forall i, k$$

(BAD 3) Varianzannahmen: Analog zu den Annahmen des allg. Modelansatzes.

(BAD 4) Analog zur Annahme des allg. Modelansatzes.

Das Berechnen der Minimum-Quadrat-Schätzer ergibt für diesen Ansatz folgende Ergebnisse:

$$\hat{b}_k^c = \frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} (C_{i,k} - C_{i,k-1}) \left(\frac{D_{i,k-1}}{\pi_i} - Q_{k-1}^c \right)}{\sum_{i=1}^{n-k+1} \frac{(D_{i,k-1} - Q_{k-1}^c \pi_i)^2}{\pi_i}}$$

mit

$$Q_{k-1}^c := \frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} D_{i,k-1}}{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i}$$

die durchschnittliche Incurred-Schadenquote über die bekannten Werte (linkes oberes Dreieck) des Entwicklungsjahres $k - 1$.

$$\hat{a}_k^c = \hat{m}_k^c - \hat{b}_k^c \cdot Q_{k-1}^c$$

mit

$$\hat{m}_k^c := \frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} (C_{i,k} - C_{i,k-1})}{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i}$$

dem AUSQZ-Schätzer für das Entwicklungsjahr k aus dem klassischen Additivem Verfahren.

Als Schätzer für den Zuwachs ergibt sich

$$\hat{E}[C_{i,k} - C_{i,k-1} | \mathcal{A}_{i,k-1}] = \pi_i \left[\hat{m}_k^c + \hat{\lambda}_k^c \cdot \frac{\hat{\sigma}_k^c}{\hat{\omega}_{k-1}^c} \cdot \left(\frac{D_{i,k-1}}{\pi_i} - Q_{k-1}^c \right) \right],$$

wobei λ_k^c gemäß Bemerkung 2.1.3 den prämiengewichteten empirischen Korrelationskoeffizienten zwischen dem Schadenquotenzuwachs $\frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i}$ und dem Incurred/Prämie-Stand des Vorjahres $\frac{D_{i,k-1}}{\pi_i}$ über alle bekannten Anfalljahre i für ein festes Entwicklungsjahr k darstellt.

Diskussion

Durch die Form der Funktion f steckt in diesem Ansatz in gewissermaßen eine Chain Ladder Fortsetzung von Paid mit einem individuellen Incurred-Abwicklungsfaktor. Dieses Modell passt somit eher zu einem Chain Ladder als zu einem additiven Ansatz. Zudem hängt nach (BAD 2.1) der Paid-Zuwachs alleine vom Vorjahresstand der kumulierten Aufwände $D_{i,k-1}$ ab und nicht von der gemeinsamen Paid- und Incurred-Entwicklung. Daher würde dieses Verfahren auch nicht gezielt die Lücke zwischen Paid und Incurred Projektion schließen. Ferner ist die Unabhängigkeitsannahme (BAD 1.3) aus dem allgemeinen Ansatz nicht problemlos auf das vorliegende Modell übertragbar und es müssten

unter Umständen einige weitere Annahmen getroffen werden. Überlegungen hierzu werden in dieser Arbeit allerdings nicht mehr ausgeführt und somit auch der Ansatz nicht mehr weiter verfolgt.

2.3 Modellauswahl

Nachdem fünf verschiedene Ansätze vorgestellt, diskutiert und Modellansatz 2.2.1 als „Bester“ herausgearbeitet wurde, wird nur noch dieser im Weiteren verfolgt. Die Modellannahmen dieses Ansatzes werden hier noch einmal wiederholt und werden fortan vorausgesetzt.

(BAD 1) Unabhängigkeitsannahmen:

(BAD 1.1) Die Paidzuwächse $S_{i,k}^c = C_{i,k} - C_{i,k-1}$, $1 \leq i, k \leq n$ sind unabhängig.

(BAD 1.2) Die Incurredzuwächse $S_{i,k}^d = D_{i,k} - D_{i,k-1}$, $1 \leq i, k \leq n$ sind unabhängig.

(BAD 1.3) Der Reservestand des Anfalljahres i , d. h. die Differenz $D_{i,k-1} - C_{i,k-1}$ ist sowohl unabhängig von der vorangegangenen bekannten Paid-Entwicklung als auch von der vorangegangenen bekannten Incurred-Entwicklung, d.h. unabhängig von $C_{i,k-1}$ und unabhängig von $D_{i,k-1}$.

(BAD 2) Erwartungswertannahmen: Es gibt $a_k^c, b_k^c, a_k^d, b_k^d \in \mathbb{R}$ mit

$$(BAD 2.1) \quad E\left[\frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i} \mid \mathcal{A}_{i,k-1}\right] = a_k^c + b_k^c \cdot \frac{D_{i,k-1} - C_{i,k-1}}{\pi_i} \quad \forall i, k$$

$$(BAD 2.2) \quad E\left[\frac{D_{i,k} - D_{i,k-1}}{\pi_i} \mid \mathcal{A}_{i,k-1}\right] = a_k^d + b_k^d \cdot \frac{C_{i,k-1} - D_{i,k-1}}{\pi_i} \quad \forall i, k$$

(BAD 3) Varianzannahmen: Es gibt τ_k^c, τ_k^d in \mathbb{R} mit

$$(BAD 3.1) \quad \text{Var}\left[\frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i} \mid \mathcal{A}_{i,k-1}\right] = \frac{(\tau_k^c)^2}{\pi_i} \quad \forall i, k$$

$$(BAD 3.2) \quad \text{Var}\left[\frac{D_{i,k} - D_{i,k-1}}{\pi_i} \mid \mathcal{A}_{i,k-1}\right] = \frac{(\tau_k^d)^2}{\pi_i} \quad \forall i, k$$

(BAD 4) Kovarianzannahme: Es gibt ρ_k in \mathbb{R} mit

$$\text{Cov}\left[\frac{C_{i,k} - C_{i,k-1}}{\pi_i}; \frac{D_{i,k} - D_{i,k-1}}{\pi_i} \mid \mathcal{A}_{i,k-1}\right] = \frac{\rho_k}{\pi_i} \quad \forall i, k$$

Zudem sei noch einmal auf die anschauliche Umformung des Schätzers für den Schadenzuwachs gemäß Satz 2.1.4 und Notation 2.1.5 verwiesen.

$$\hat{E}[C_{i,k} - C_{i,k-1} \mid \mathcal{A}_{i,k-1}] = \pi_i \left[\hat{m}_k^c + \hat{\lambda}_k^c \cdot \frac{\hat{\sigma}_k^c}{\hat{\omega}_{k-1}^c} \cdot \left(\frac{D_{i,k-1} - C_{i,k-1}}{\pi_i} - Q_{k-1}^c \right) \right] = \pi_i \hat{m}_{i,k}^c$$

$$\hat{E}[D_{i,k} - D_{i,k-1} \mid \mathcal{A}_{i,k-1}] = \pi_i \left[\hat{m}_k^d + \hat{\lambda}_k^d \cdot \frac{\hat{\sigma}_k^d}{\hat{\omega}_{k-1}^d} \cdot \left(\frac{C_{i,k-1} - D_{i,k-1}}{\pi_i} - Q_{k-1}^d \right) \right] = \pi_i \hat{m}_{i,k}^d$$

2.3.1 Bemerkung. Im ausgewählten Modellansatz 2.2.1 ergibt sich für den zu schätzenden zukünftigen Schadenzuwachs folgende anschauliche Interpretation.

Zunächst wird die Abweichung der Reservequote von der durchschnittlichen Reservequote $\left(\frac{D_{i,k-1}-C_{i,k-1}}{\pi_i} - Q_{k-1}^c\right)$ bestimmt. Mittels dividieren durch den Schätzer der Standardabweichung der Reservequote $\hat{\omega}_{k-1}^c$ ergibt sich ein Faktor der aussagt, um das wie viel fache der Standardabweichung die Reservequote von ihrem Durchschnitt abweicht (Residuum). Dieser Faktor wird durch Multiplikation mit dem Schätzer der Standardabweichung des Schadenquotenzuwachses $\hat{\sigma}_k^c$ gewissermaßen auf die Skala des Schadenquotenzuwachses normiert. Der sich ergebende Wert wird nun mit dem Korrelationsparameter $\hat{\lambda}_k^c$ multipliziert und zum klassischen Schadenquotenzuwachs-Schätzer \hat{m}_k^c addiert.

Somit wird der entwicklungsjahrabhängige Schätzer \hat{m}_k^c für jedes Anfalljahr i entweder nach oben oder nach unten korrigiert, je nachdem ob eine über- oder unterdurchschnittliche Reservequote vorhanden ist. Der Korrelationsparameter $\hat{\lambda}_k^c$ gibt dabei an, wie stark in den vorhandenen Daten (also in der Vergangenheit) der Einfluss der Reservequote auf die darauffolgenden Schadenquotenzuwächse messbar war und legt somit fest, in wie weit das Hinzufügen der Incurred-Information Einfluss auf den klassischen Schadenquotenzuwachs-Schätzer nehmen soll. Für $\hat{\lambda}_k^c = 1$ wird eine volle Abhängigkeit des zukünftigen Schadenquotenzuwachses von der Reserve unterstellt.

Für den Spezialfall $\hat{\lambda}_k^c = 0$ hingegen wird angenommen, dass gar kein Einfluss besteht, wodurch die Schätzung des Zuwachses dann wieder wie beim klassischen Additiven Verfahren alleine mit dem Schätzer \hat{m}_k^c erfolgt. Abschließend wird der künftige Schadenquotenzuwachs geschätzt indem der entstandene individuelle Bavarian Additiv Schätzer $\hat{m}_{i,k}^c$ mit einem Exposuremaß π_i (hier der Prämie) multipliziert wird.

2.3.2 Bemerkung. Für die weiteren Berechnungen werden einige spezielle Rechenregeln für bedingte Erwartungen benötigt. Werden diese im weiteren Verlauf angewendet, so wird jeweils kurz auf die betreffende Rechenregel verwiesen. Diese sind übernommen aus [Mac02, S. 194] und [Mac02, S. 230].

X, Y, Z seien Zufallsvariablen mit existierenden ersten und zweiten Momenten. Sowohl Y als auch Z können mehrdimensionale Zufallsvariablen (Zufallsvektoren) sein. Es gilt:

- 1 $E[E[X|Y, Z]|Y] = E[X|Y]$ (Satz vom iterierten Erwartungswert)
- 2 $E[Xf(Z)|Z] = f(Z)E[X|Z]$ für eine beliebige messbare Funktion f von Z
- 3 $E[(X - h(Y))^2|Y] = \text{Var}[X|Y] + (E[X|Y] - h(Y))^2$ für eine beliebige Funktion h von Y (verallgemeinerter Verschiebungssatz)
- 4 $\text{Var}[X] = E[\text{Var}[X|Z]] + \text{Var}[E[X|Z]]$
- 5 $\text{Cov}[X, Y] = E[\text{Cov}[X, Y|Z]] + \text{Cov}[E[X|Z], E[Y|Z]]$

2.3.3 Satz (Erwartungstreue der Reserveschätzung). *Die Schätzer für $E[C_{i,n}|\mathcal{A}_{i,n-i+1}]$ und $E[D_{i,n}|\mathcal{A}_{i,n-i+1}]$ sind erwartungstreu, d.h. $E[\hat{C}_{i,n}|\mathcal{A}_{i,n-i+1}] = E[C_{i,n}|\mathcal{A}_{i,n-i+1}]$ und $E[\hat{D}_{i,n}|\mathcal{A}_{i,n-i+1}] = E[D_{i,n}|\mathcal{A}_{i,n-i+1}]$.*

Beweis. Der Beweis folgt mittels vollständiger Induktion:

Induktionsanfang: Der erste zu schätzende Erwartungswert der Zeile i ist

$E[C_{i,n-i+2}|\mathcal{A}_{i,n-i+1}]$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
& E[\hat{C}_{i,n-i+2}|\mathcal{A}_{i,n-i+1}] \\
&= E[\pi_i \hat{a}_{n-i+2}^c + \hat{b}_{n-i+2}^c (D_{i,n-i+1} - C_{i,n-i+1}) + C_{i,n-i+1} | \mathcal{A}_{i,n-i+1}] \\
&= \pi_i E[\hat{a}_{n-i+2}^c | \mathcal{A}_{i,n-i+1}] + E[\hat{b}_{n-i+1}^c | \mathcal{A}_{i,n-i+1}] (D_{i,n-i+1} - C_{i,n-i+1}) + C_{i,n-i+1} \\
&= \pi_i a_{n-i+1}^c + b_{n-i+1}^c (D_{i,n-i+1} - C_{i,n-i+1}) + C_{i,n-i+1} \\
&= E[C_{i,n-i+1} | \mathcal{A}_{i,n-i+1}]
\end{aligned}$$

Induktionsvoraussetzung: Die obige Aussage $E[\hat{C}_{i,k}|\mathcal{A}_{i,n-i+1}] = E[C_{i,k}|\mathcal{A}_{i,n-i+1}]$ und $E[\hat{D}_{i,k}|\mathcal{A}_{i,n-i+1}] = E[D_{i,k}|\mathcal{A}_{i,n-i+1}]$ sei für $k \leq n-1$ gültig.

Induktionsschritt von $n-1$ nach n :

$$\begin{aligned}
& E[\hat{C}_{i,n}|\mathcal{A}_{i,n-i+1}] \\
&= E[\pi_i \hat{a}_n^c + \hat{b}_n^c (\hat{D}_{i,n-1} - \hat{C}_{i,n-1}) + \hat{C}_{i,n-1} | \mathcal{A}_{i,n-i+1}] \\
&= \pi_i E[\hat{a}_n^c | \mathcal{A}_{i,n-i+1}] + E[\hat{b}_n^c (\hat{D}_{i,n-1} - \hat{C}_{i,n-1}) | \mathcal{A}_{i,n-i+1}] + E[\hat{C}_{i,n-1} | \mathcal{A}_{i,n-i+1}] \\
&= \pi_i E[\hat{a}_n^c | \mathcal{A}_{i,n-i+1}] + E[\hat{b}_n^c \hat{D}_{i,n-1} | \mathcal{A}_{i,n-i+1}] - E[\hat{b}_n^c \hat{C}_{i,n-1} | \mathcal{A}_{i,n-i+1}] \\
&\quad + E[\hat{C}_{i,n-1} | \mathcal{A}_{i,n-i+1}] \\
&\stackrel{\text{Rechenregel 1}}{=} \pi_i E[E[\hat{a}_n^c | \mathcal{B}_n] | \mathcal{A}_{i,n-i+1}] + E[E[\hat{b}_n^c \hat{D}_{i,n-1} | \mathcal{B}_n] | \mathcal{A}_{i,n-i+1}] \\
&\quad - E[E[\hat{b}_n^c \hat{C}_{i,n-1} | \mathcal{B}_n] | \mathcal{A}_{i,n-i+1}] + E[\hat{C}_{i,n-1} | \mathcal{A}_{i,n-i+1}] \\
&\stackrel{\text{Rechenregel 2}}{=} \pi_i E[E[\hat{a}_n^c | \mathcal{B}_n] | \mathcal{A}_{i,n-i+1}] + E[\hat{D}_{i,n-1} E[\hat{b}_n^c | \mathcal{B}_n] | \mathcal{A}_{i,n-i+1}] \\
&\quad - E[\hat{C}_{i,n-1} E[\hat{b}_n^c | \mathcal{B}_n] | \mathcal{A}_{i,n-i+1}] + E[\hat{C}_{i,n-1} | \mathcal{A}_{i,n-i+1}] \\
&= \pi_i E[a_n^c | \mathcal{A}_{i,n-i+1}] + E[\hat{D}_{i,n-1} b_n^c | \mathcal{A}_{i,n-i+1}] - E[\hat{C}_{i,n-1} b_n^c | \mathcal{A}_{i,n-i+1}] \\
&\quad + E[\hat{C}_{i,n-1} | \mathcal{A}_{i,n-i+1}] \\
&= \pi_i a_n^c + b_n^c (E[\hat{D}_{i,n-1} | \mathcal{A}_{i,n-i+1}] - E[\hat{C}_{i,n-1} | \mathcal{A}_{i,n-i+1}]) + E[\hat{C}_{i,n-1} | \mathcal{A}_{i,n-i+1}] \\
&\stackrel{\text{Induktionsv.}}{=} \pi_i a_n^c + b_n^c (E[D_{i,n-1} | \mathcal{A}_{i,n-i+1}] - E[C_{i,n-1} | \mathcal{A}_{i,n-i+1}]) + E[C_{i,n-1} | \mathcal{A}_{i,n-i+1}] \\
&= E[C_{i,n} | \mathcal{A}_{i,n-i+1}]
\end{aligned}$$

Somit ist die Erwartungstreue der Reserveschätzer bewiesen. Der Beweis für Incurred verläuft analog. \square

2.4 Fehlerabschätzung für den Modellansatz 2.2.1

Nachfolgendes Kapitel behandelt die Fehlerabschätzung des Modells 2.2.1. und orientiert sich im Vorgehen an der Fehlerabschätzung für das Munich Chain Ladder aus der Veröffentlichung von Mack [Mac09, S. 18 - 23]. Die Angabe der Schätzgenauigkeit der Punktschätzer für die Reserve ist ein wichtiger Bestandteil beim Aufstellen eines Modells. Durch sie werden verschiedene Reserveschätzmethode miteinander vergleichbar gemacht und die Variabilität der Daten, auf denen die Schätzung basiert, wird ersichtlich. Natürlich beinhaltet die Fehlerabschätzung nur solche Abweichungen, die aus dem zugrunde gelegten Modell stammen. Eine Abschätzung des Fehlers, der auf der Wahl eines falschen Modells basiert, ist hierbei nicht berücksichtigt (vgl. hierzu [Mac02, S. 229]).

2.4.1 Notation (Reserve). Mit R_i wird die Best Estimate Reserve aller zukünftigen Verpflichtungen für in der Vergangenheit eingetretene Schäden bezeichnet. Best Estimate bedeutet, dass es sich um die reinen rechnerischen Schadenerwartungswerte handelt. Ein hochgestelltes c bzw. d kennzeichnet die Unterscheidung zwischen der auf Incurred bzw. Paid berechneten Best Estimate Reserve. \hat{R}_i^c bzw. \hat{R}_i^d ist der zugehörige Reserveschätzer für das Anfalljahr i .

Ziel der Reserveberechnung ist es, die Best Estimate Reserve R_i^c des Anfalljahres i möglichst gut durch einen Schätzer \hat{R}_i^c zu prognostizieren. „Möglichst gut“ wird dabei durch die mittlere quadratische Abweichung (auch mittlerer quadratischer Fehler genannt) zwischen Schätzer \hat{R}_i^c und Prognoseziel R_i^c quantifiziert. Deshalb betrachten wir im Folgenden die Größe

$$E[(R_i^c - \hat{R}_i^c)^2 | \mathcal{B}_n],$$

also die erwartete mittlere quadratische Abweichung, gegeben die bereits bekannte Entwicklung von Paid und Incurred im linken oberen Abwicklungsdreieck [Mac02, S. 229]).

2.4.2 Satz (Gesamtfehlerzerlegung). *Der Gesamtfehler der mittleren quadratischen Abweichung*

$$E[(R_i^c - \hat{R}_i^c)^2 | \mathcal{B}_n]$$

lässt sich additiv in einem Zufallsfehlerterm $\text{Var}[R_i^c | \mathcal{B}_n]$ und einen Schätzfehlerterm $(E[R_i^c | \mathcal{B}_n] - \hat{R}_i^c)^2$ zerlegen.

Beweis. Die Aussage folgt direkt aus Bemerkung 2.3.2 Rechenregel 1, dem verallgemeinerten Verschiebungssatz. Die dortige Größe $h(Y)$ ist im Modell hier der Schätzer für die Reserve \hat{R}_i^c , der als Funktion der Daten aus dem bekannten Abwicklungsdreieck \mathcal{B}_n gesehen wird. Weiter nimmt R_i den Platz der in 2.3.2 enthaltenen Zufallsvariablen X

ein. Somit ergibt sich schließlich:

$$\mathbb{E}[(R_i^c - \hat{R}_i^c)^2 | \mathcal{B}_n] = \underbrace{\text{Var}[R_i^c | \mathcal{B}_n]}_{\text{Zufallsfehler}} + \underbrace{(\mathbb{E}[R_i^c | \mathcal{B}_n] - \hat{R}_i^c)^2}_{\text{Schätzfehler}}$$

□

2.4.3 Satz. Seien R_i^c und \hat{R}_i^c Reserve und Reserveschätzer für das Anfalljahr i und weiter $C_{i,n}$ und $\hat{C}_{i,n}$ Endschadenstand und Endschadenstandschätzer der Schadenzahlungen im Anfalljahr i . Dann gilt:

$$\mathbb{E}[(R_i^c - \hat{R}_i^c)^2 | \mathcal{B}_n] = \mathbb{E}[(C_{i,n} - \hat{C}_{i,n})^2 | \mathcal{B}_n].$$

Beweis. Es gilt: $\hat{C}_{i,n} = \sum_{k=1}^n \hat{S}_{i,k}$

Weiter gilt: $\hat{S}_{i,k} = S_{i,k}$ für alle i und für $k \leq n - i + 1$, weil dies die bereits bekannten Schadenzuwächse (linkes oberes Dreieck) sind. Es lässt sich also schreiben:

$$\hat{C}_{i,n} = \sum_{k=1}^n \hat{S}_{i,k}^c = \sum_{k=1}^{n-i+1} \hat{S}_{i,k}^c + \sum_{k=n-i+2}^n \hat{S}_{i,k}^c = \sum_{k=1}^{n-i+1} S_{i,k}^c + \sum_{k=n-i+2}^n \hat{S}_{i,k}^c$$

Somit folgt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(C_{i,n} - \hat{C}_{i,n})^2 | \mathcal{B}_n] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^n S_{i,k}^c - \left(\sum_{k=1}^{n-i+1} S_{i,k}^c + \sum_{k=n-i+2}^n \hat{S}_{i,k}^c\right)\right)^2 \middle| \mathcal{B}_n\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=n-i+2}^n S_{i,k}^c - \sum_{k=n-i+2}^n \hat{S}_{i,k}^c\right)^2 \middle| \mathcal{B}_n\right] \\ &= \mathbb{E}[(R_{i,n}^c - \hat{R}_{i,n}^c)^2 | \mathcal{B}_n] \end{aligned}$$

□

2.4.4 Bemerkung. Wegen Satz 2.4.3 kann im Weiteren die mittlere quadratische Fehlerabschätzung von $C_{i,n} - \hat{C}_{i,n}$ betrachtet werden. Analog zu Satz 2.4.2 kann auch hier die Gesamtfehlerzerlegung durchgeführt werden:

$$\mathbb{E}[(C_{i,n} - \hat{C}_{i,n})^2 | \mathcal{B}_n] = \underbrace{\text{Var}[C_{i,n} | \mathcal{B}_n]}_{\text{Zufallsfehler}} + \underbrace{(\mathbb{E}[C_{i,n} | \mathcal{B}_n] - \hat{C}_{i,n})^2}_{\text{Schätzfehler}}$$

Zufalls- und Schätzfehler werden im Weiteren separat geschätzt und dann zum Gesamtfehler zusammengefasst.

2.4.1 Rekursion für den Zufallsfehler im Anfalljahr i

Ziel dieses Abschnittes ist die Abschätzung des Zufallsfehlers $\text{Var}[C_{i,n}|\mathcal{B}_n]$ durch eine Rekursion.

2.4.5 Bemerkung. Wegen der Unabhängigkeit der Anfalljahre (BAD 1.1) kann die Menge \mathcal{B}_n , unter der bedingt wird, auf das Anfalljahr i eingeschränkt werden. Somit folgt:

$$\text{Var}[C_{i,n}|\mathcal{B}_n] = \text{Var}[C_{i,n}|\mathcal{A}_{i,n-i+1}]$$

Anfangswert der Rekursion ist der Zufallsfehler im Entwicklungsjahr $k = n - i + 1$. Dort gilt $\text{Var}[C_{i,k}|\mathcal{A}_{i,n-i+1}] = 0$, da dies der letzte bekannte Schadenstand im Anfalljahr i ist und dieser keiner Schwankung unterliegt. Gleichermäßen gilt $\text{Var}[D_{i,k}|\mathcal{A}_{i,n-i+1}] = 0$ für $k = n - i + 1$.

Für $k > n - i + 1$ müssen die Schadenstände selbst und damit auch ihr Zufallsfehler geschätzt werden.

$$\begin{aligned} \text{Var}[C_{i,k}|\mathcal{A}_{i,n-i+1}] &\stackrel{\text{Rechenregel 4}}{=} \text{Var}[\text{E}[C_{i,k}|\mathcal{A}_{i,k-1}|\mathcal{A}_{i,n-i+1}] + \text{E}[\text{Var}[C_{i,k}|\mathcal{A}_{i,k-1}|\mathcal{A}_{i,n-i+1}]] \\ &= \text{Var}[\pi_i a_k^c + b_k^c(D_{i,k-1} - C_{i,k-1}) + C_{i,k-1}|\mathcal{A}_{i,n-i+1}] \\ &\quad + \text{E}[(\tau_k^c)^2 \pi_i|\mathcal{A}_{i,n-i+1}] \\ &= \text{Var}[\pi_i a_k^c + (1 - b_k^c)C_{i,k-1} + b_k^c D_{i,k-1}|\mathcal{A}_{i,n-i+1}] + (\tau_k^c)^2 \pi_i \\ &= (1 - b_k^c)^2 \text{Var}[C_{i,k-1}|\mathcal{A}_{i,n-i+1}] + (b_k^c)^2 \text{Var}[D_{i,k-1}|\mathcal{A}_{i,n-i+1}] \\ &\quad + 2(1 - b_k^c)b_k^c \text{Cov}[C_{i,k-1}; D_{i,k-1}|\mathcal{A}_{i,n-i+1}] + (\tau_k^c)^2 \pi_i \quad (2.11) \end{aligned}$$

Für $\text{Var}[D_{i,k}|\mathcal{A}_{i,n-i+1}]$ ergibt sich mit mit analogen Umformungsschritten:

$$\begin{aligned} \text{Var}[D_{i,k}|\mathcal{A}_{i,n-i+1}] &= (1 - b_k^d)^2 \text{Var}[D_{i,k-1}|\mathcal{A}_{i,n-i+1}] + (b_k^d)^2 \text{Var}[C_{i,k-1}|\mathcal{A}_{i,n-i+1}] \\ &\quad + 2(1 - b_k^d)b_k^d \text{Cov}[D_{i,k-1}; C_{i,k-1}|\mathcal{A}_{i,n-i+1}] + (\tau_k^c)^2 \pi_i \quad (2.12) \end{aligned}$$

Somit ist eine Rekursion für die beiden Zufallsfehler vorhanden.

Für die Schätzung der in der Rekursion enthaltenen bedingten Kovarianz $\text{Cov}[D_{i,k-1}; C_{i,k-1}|\mathcal{A}_{i,n-i+1}]$ wird Modellannahme (BAD 4) verwendet. Mit dieser Modellannahme kann nun allgemein für die Kovarianz zwischen $D_{i,k}$ und $C_{i,k}$ eine rekursive Berechnungsformel angegeben werden. Anfangswert für die Rekursion ist wieder die Kovarianz im letzten bekannten Entwicklungsjahr $n - i + 1$ mit

$$\text{Cov}[D_{i,n-i+1}; C_{i,n-i+1}|\mathcal{A}_{i,n-i+1}] = 0.$$

Damit ergibt sich für $k > n - i + 1$:

$$\begin{aligned} \text{Cov}[D_{i,k}; C_{i,k} | \mathcal{A}_{i,n-i+1}] &\stackrel{\text{Rechenregel 5}}{=} \underbrace{\text{E}[\text{Cov}[D_{i,k}; C_{i,k} | \mathcal{A}_{i,k-1}] | \mathcal{A}_{i,n-i+1}]}_{\text{I}} \\ &\quad + \underbrace{\text{Cov}[\text{E}[C_{i,k} | \mathcal{A}_{i,k-1}]; \text{E}[D_{i,k} | \mathcal{A}_{i,k-1}] | \mathcal{A}_{i,n-i+1}]}_{\text{II}} \end{aligned}$$

$$\text{I} \stackrel{\text{(BAD 4)}}{=} \text{E}[\rho_k \pi_i | \mathcal{A}_{i,n-i+1}] = \rho_k \pi_i$$

$$\begin{aligned} \text{II} &= \text{Cov}[\pi_i a_k^c + b_k^c (D_{i,k-1} - C_{i,k-1}) + C_{i,k-1}; \\ &\quad \pi_i a_k^d + b_k^d (C_{i,k-1} - D_{i,k-1}) + D_{i,k-1} | \mathcal{A}_{i,n-i+1}] \\ &= \text{Cov}[\pi_i a_k^c + b_k^c D_{i,k-1} + C_{i,k-1} (1 - b_k^c); \pi_i a_k^d + b_k^d C_{i,k-1} + D_{i,k-1} (1 - b_k^d) | \mathcal{A}_{i,n-i+1}] \\ &= (1 - b_k^c) b_k^d \text{Var}[C_{i,k-1} | \mathcal{A}_{i,n-i+1}] + b_k^c (1 - b_k^d) \text{Var}[D_{i,k-1} | \mathcal{A}_{i,n-i+1}] \\ &\quad + (b_k^c b_k^d + (1 - b_k^c)(1 - b_k^d)) \text{Cov}[C_{i,k-1}; D_{i,k-1} | \mathcal{A}_{i,n-i+1}] \end{aligned}$$

Insgesamt folgt:

$$\begin{aligned} \text{Cov}[D_{i,k}; C_{i,k} | \mathcal{A}_{i,n-i+1}] &= \rho_k \pi_i + (1 - b_k^c) b_k^d \text{Var}[C_{i,k-1} | \mathcal{A}_{i,n-i+1}] \\ &\quad + b_k^c (1 - b_k^d) \text{Var}[D_{i,k-1} | \mathcal{A}_{i,n-i+1}] \\ &\quad + (b_k^c b_k^d + (1 - b_k^c)(1 - b_k^d)) \text{Cov}[C_{i,k-1}; D_{i,k-1} | \mathcal{A}_{i,n-i+1}] \end{aligned} \tag{2.13}$$

Über die drei Gleichungen 2.11, 2.12 und 2.13 kann nun der Zufallsfehler $\text{Var}[C_{i,n} | \mathcal{A}_{i,n-i+1}]$ rekursiv berechnet werden.

2.4.2 Rekursion für den Schätzfehler im Anfalljahr i

Ziel dieses Abschnittes ist, analog zum Zufallsfehler eine rekursive Berechnungsformel für den Schätzfehler $(\text{E}[C_{i,n} | \mathcal{B}_n] - \hat{C}_{i,n})^2$ anzugeben.

2.4.6 Satz. *Seien $C_{i,n}$ und $D_{i,n}$ die Endschaftenstände für Paid und Incurred im Anfalljahr i und $\hat{C}_{i,n}$ und $\hat{D}_{i,n}$ die entsprechenden Schätzer, dann gilt folgender Zusammenhang:*

$$\begin{aligned} \text{E}[C_{i,n} | \mathcal{B}_n] &= \text{E}[\hat{C}_{i,n} | \mathcal{B}_{n-i+1}] \\ \text{E}[D_{i,n} | \mathcal{B}_n] &= \text{E}[\hat{D}_{i,n} | \mathcal{B}_{n-i+1}]. \end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}[\hat{C}_{i,n} | \mathcal{B}_{n-i+1}] \\
&= \mathbb{E}[C_{i,n-i+1} + \pi_i(\hat{m}_{i,n-i+2} + \hat{m}_{i,n-i+3} + \dots + \hat{m}_{i,n}) | \mathcal{B}_{n-i+1}] \\
&= C_{i,n-i+1} + \pi_i(\mathbb{E}[\hat{m}_{i,n-i+2} + \hat{m}_{i,n-i+3} + \dots + \hat{m}_{i,n} | \mathcal{B}_{n-i+1}]) \\
&= C_{i,n-i+1} + \pi_i(\mathbb{E}[\hat{m}_{i,n-i+2} | \mathcal{B}_{n-i+1}] + \mathbb{E}[\hat{m}_{i,n-i+3} | \mathcal{B}_{n-i+1}] + \dots \\
&\quad + \mathbb{E}[\hat{m}_{i,n} | \mathcal{B}_{n-i+1}]) \\
&\stackrel{\text{Rechenregel 1}}{=} C_{i,n-i+1} + \pi_i(\mathbb{E}[\hat{m}_{i,n-i+2} | \mathcal{B}_{n-i+1}] + \mathbb{E}[\mathbb{E}[\hat{m}_{i,n-i+3} | \mathcal{B}_{n-i+2}] | \mathcal{B}_{n-i+1}] + \dots \\
&\quad + \mathbb{E}[\mathbb{E}[\hat{m}_{i,n} | \mathcal{B}_{n-1}] | \mathcal{B}_{n-i+1}]) \\
&= C_{i,n-i+1} + \pi_i(\tilde{m}_{i,n-i+2} + \mathbb{E}[\tilde{m}_{i,n-i+3} | \mathcal{B}_{n-i+1}] + \dots + [\mathbb{E}[\tilde{m}_{i,n} | \mathcal{B}_{n-i+1}]]) \\
&= C_{i,n-i+1} + \pi_i(\tilde{m}_{i,n-i+2} + \tilde{m}_{i,n-i+3} + \dots + \tilde{m}_{i,n}) \\
&= \mathbb{E}[C_{i,n} | \mathcal{B}_n]
\end{aligned}$$

□

2.4.7 Bemerkung. Mit Satz 2.4.6 kann der Schätzfehler wie folgt umgeschrieben werden: $(\mathbb{E}[C_{i,n} | \mathcal{B}_n] - \hat{C}_{i,n})^2 = (\hat{C}_{i,n} - \mathbb{E}[\hat{C}_{i,n} | \mathcal{B}_{n-i+1}])^2$

Weiter betrachten wir noch die folgende Erweiterung:

$$\mathbb{E}[(\hat{C}_{i,n} - \mathbb{E}[\hat{C}_{i,n} | \mathcal{B}_{n-i+1}])^2 | \mathcal{B}_{n-i+1}] = \text{Var}[\hat{C}_{i,n} | \mathcal{B}_{n-i+1}]$$

Nachfolgend werden wir per Rekursion einen Schätzer für die Größe $\text{Var}[\hat{C}_{i,n} | \mathcal{B}_{n-i+1}]$ berechnen. Der durch die Erweiterung zusätzlich hinzugefügte bedingte Erwartungswert wird später an geeigneter Stelle wieder weggelassen, wodurch wir dann nur noch eine approximativ gültige Rekursion erhalten (vergleiche dieses Vorgehen mit [Mac02, S. 253]).

Der Startwert der Rekursion wird erneut durch die Schwankung 0 bei der letzten bekannten Größen vorgegeben:

$$\text{Für } k = n - i + 1 \text{ gilt: } \text{Var}[\hat{C}_{i,k} | \mathcal{B}_{n-i+1}] = 0$$

Für $k > n - i + 1$ gilt:

$$\text{Var}[\hat{C}_{i,k} | \mathcal{B}_{n-i+1}] \stackrel{\text{Rechenregel 4}}{=} \underbrace{\text{Var}[\mathbb{E}[\hat{C}_{i,k} | \mathcal{B}_{k-1}] | \mathcal{B}_{n-i+1}]}_A + \underbrace{\mathbb{E}[\text{Var}[\hat{C}_{i,k} | \mathcal{B}_{k-1}] | \mathcal{B}_{n-i+1}]}_B$$

$$\begin{aligned}
A &= \mathbb{E}[\text{Var}[\hat{C}_{i,k}|\mathcal{B}_{k-1}]|\mathcal{B}_{n-i+1}] \\
&= \mathbb{E}[\text{Var}[\pi_i \hat{a}_k^c + \hat{b}_k^c(\hat{D}_{i,k-1} - \hat{C}_{i,k-1}) + \hat{C}_{i,k-1}|\mathcal{B}_{k-1}]|\mathcal{B}_{n-i+1}] \\
&\stackrel{\text{Gl. (2.3)}}{=} \mathbb{E}[\text{Var}[\pi_i(\hat{m}_k^c - \hat{b}_k^c Q_{k-1}^c) + \hat{b}_k^c(\hat{D}_{i,k-1} - \hat{C}_{i,k-1}) + \hat{C}_{i,k-1}|\mathcal{B}_{k-1}]|\mathcal{B}_{n-i+1}] \\
&= \mathbb{E}[\text{Var}[\pi_i \hat{m}_k^c + \hat{b}_k^c(\hat{D}_{i,k-1} - \hat{C}_{i,k-1} - \pi_i Q_{k-1}^c) + \hat{C}_{i,k-1}|\mathcal{B}_{k-1}]|\mathcal{B}_{n-i+1}] \\
&= \mathbb{E}[(\pi_i)^2 \text{Var}[\hat{m}_k^c|\mathcal{B}_{k-1}] + (\hat{D}_{i,k-1} - \hat{C}_{i,k-1} - \pi_i Q_{k-1}^c)^2 \text{Var}[\hat{b}_k^c|\mathcal{B}_{k-1}] \\
&\quad + 2(\pi_i)(\hat{D}_{i,k-1} - \hat{C}_{i,k-1} - \pi_i Q_{k-1}^c) \text{Cov}[\hat{m}_k^c; \hat{b}_k^c|\mathcal{B}_{k-1}]|\mathcal{B}_{n-i+1}] \\
&= \mathbb{E}[(\pi_i)^2 \text{Var}[\hat{m}_k^c|\mathcal{B}_{k-1}] + (\hat{D}_{i,k-1} - \hat{C}_{i,k-1} - \pi_i Q_{k-1}^c)^2 \text{Var}[\hat{b}_k^c|\mathcal{B}_{k-1}]|\mathcal{B}_{n-i+1}] \\
&\approx (\pi_i)^2 \text{Var}[\hat{m}_k^c|\mathcal{B}_{k-1}] + (\hat{D}_{i,k-1} - \hat{C}_{i,k-1} - \pi_i Q_{k-1}^c)^2 \text{Var}[\hat{b}_k^c|\mathcal{B}_{k-1}] \quad (2.14)
\end{aligned}$$

Dabei folgt die letzte Gleichheit mit Lemma 2.1.14 und die Umformung der letzten Zeile geht aus Bemerkung 2.4.7 hervor.

Für die beiden Größen $\text{Var}[\hat{m}_k^c|\mathcal{B}_{k-1}]$ und $\text{Var}[\hat{b}_k^c|\mathcal{B}_{k-1}]$ verwenden wir die Schätzer aus nachfolgendem Lemma 2.4.9, für welches wir aber noch folgende Notation einführen müssen.

2.4.8 Notation (Varianzschätzer). Nachfolgend wird mit $\hat{\text{Var}}[\dots]$ ein Schätzer für die Varianz bezeichnet. Dieser entsteht, indem in die Varianzannahmen des Modells die Schätzer für die Parameter eingesetzt werden.

Gleiches gilt für $\hat{\text{Cov}}[\dots]$, welches einen Schätzer für die Kovarianz bezeichnet.

2.4.9 Lemma. Seien \hat{m}_k^c und \hat{b}_k^c die für den Modellansatz 2.2.1 eingeführten Schätzer, dann lässt sich ihre bedingte Varianz abschätzen durch

$$\hat{\text{Var}}[\hat{m}_k^c|\mathcal{B}_{k-1}] = \frac{(\hat{\tau}_k^c)^2}{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i} \quad \text{und} \quad \hat{\text{Var}}[\hat{b}_k^c|\mathcal{B}_{k-1}] = \frac{(\hat{\tau}_k^c)^2}{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i \left(\frac{D_{i,k-1} - C_{i,k-1}}{\pi_i} - Q_{k-1}^c \right)^2}.$$

Beweis. Aus Lemma 2.1.12 aus dem allgemeinen Modellansatz ist bekannt:

$$\text{Var}[\hat{m}_k^c|\mathcal{B}_{k-1}] = \frac{(\tau_k^c)^2}{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i} \quad \text{und} \quad \text{Var}[\hat{b}_k^c|\mathcal{B}_{k-1}] = \frac{(\tau_k^c)^2}{\sum_{i=1}^{n-k+1} \pi_i (f_{i,k-1} - Q_{k-1}^c)^2}$$

Gemäß der Modellwahl in Abschnitt 2.3 gilt $f_{i,k-1} = \frac{D_{i,k-1} - C_{i,k-1}}{\pi_i}$. Wird diese Form für $f_{i,k-1}$ eingesetzt und zusätzlich noch der Schätzer $(\hat{\tau}_k^c)^2$ aus Gleichung (2.7) für $(\tau_k^c)^2$ eingesetzt, so folgt die Behauptung. \square

Nun setzen wir wieder die Berechnung von $\text{Var}[\hat{C}_{i,k}|\mathcal{B}_{n-i+1}]$ fort.

$$\begin{aligned}
B &= \text{Var}[\text{E}[\hat{C}_{i,k}|\mathcal{B}_{k-1}]|\mathcal{B}_{n-i+1}] \\
&= \text{Var}[\text{E}[\pi_i \hat{a}_k^c + \hat{b}_k^c (\hat{D}_{i,k-1} - \hat{C}_{i,k-1}) + \hat{C}_{i,k-1}|\mathcal{B}_{k-1}]|\mathcal{B}_{n-i+1}] \\
&= \text{Var}[\pi_i \text{E}[\hat{a}_k^c|\mathcal{B}_{k-1}] + \text{E}[\hat{b}_k^c|\mathcal{B}_{k-1}] (\hat{D}_{i,k-1} - \hat{C}_{i,k-1}) + \hat{C}_{i,k-1}|\mathcal{B}_{n-i+1}] \\
&= \text{Var}[\pi_i a_k^c + b_k^c (\hat{D}_{i,k-1} - \hat{C}_{i,k-1}) + \hat{C}_{i,k-1}|\mathcal{B}_{n-i+1}] \\
&= \text{Var}[\pi_i a_k^c + (1 - b_k^c) \hat{C}_{i,k-1} + b_k^c \hat{D}_{i,k-1}|\mathcal{B}_{n-i+1}] \\
&= (1 - b_k^c)^2 \text{Var}[\hat{C}_{i,k-1}|\mathcal{B}_{n-i+1}] + (b_k^c)^2 \text{Var}[\hat{D}_{i,k-1}|\mathcal{B}_{n-i+1}] \\
&\quad + 2(1 - b_k^c) b_k^c \text{Cov}[\hat{C}_{i,k-1}; \hat{D}_{i,k-1}|\mathcal{B}_{n-i+1}]
\end{aligned} \tag{2.15}$$

An dieser Stelle wird eine Abschätzung für die Kovarianz zwischen $\hat{C}_{i,k-1}$ und $\hat{D}_{i,k-1}$ benötigt. Dies erfolgt erneut über eine (approximativ gültige) Rekursion mit Anfangswert $\text{Cov}[\hat{C}_{i,k}; \hat{D}_{i,k}|\mathcal{B}_{n-i+1}] = 0$ für $k = n - i + 1$.

Für $k > n - i + 2$ gilt:

$$\begin{aligned}
\text{Cov}[\hat{C}_{i,k-1}; \hat{D}_{i,k-1}|\mathcal{B}_{n-i+1}] &\stackrel{\text{Rechenregel 5}}{=} \underbrace{\text{Cov}[\text{E}[\hat{C}_{i,k-1}|\mathcal{B}_{k-2}]; \text{E}[\hat{D}_{i,k-1}|\mathcal{B}_{k-2}]|\mathcal{B}_{n-i+1}]}_C \\
&\quad + \underbrace{\text{E}[\text{Cov}[\hat{C}_{i,k-1}; \hat{D}_{i,k-1}|\mathcal{B}_{k-2}]|\mathcal{B}_{n-i+1}]}_D
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C &= \text{Cov}[\text{E}[\hat{C}_{i,k-1}|\mathcal{B}_{k-2}]; \text{E}[\hat{D}_{i,k-1}|\mathcal{B}_{k-2}]|\mathcal{B}_{n-i+1}] \\
&= \text{Cov}[\text{E}[\pi_i \hat{a}_{k-1}^c + \hat{b}_{k-1}^c (\hat{D}_{i,k-2} - \hat{C}_{i,k-2}) + \hat{C}_{i,k-2}|\mathcal{B}_{k-2}]; \\
&\quad \text{E}[\pi_i \hat{a}_{k-1}^d + \hat{b}_{k-1}^d (\hat{C}_{i,k-2} - \hat{D}_{i,k-2}) + \hat{D}_{i,k-2}|\mathcal{B}_{k-2}]|\mathcal{B}_{n-i+1}] \\
&= \text{Cov}[\pi_i a_{k-1}^c + (1 - b_{k-1}^c) \hat{C}_{i,k-2} + b_{k-1}^c \hat{D}_{i,k-2}; \\
&\quad \pi_i a_{k-1}^d + (1 - b_{k-1}^d) \hat{D}_{i,k-2} + b_{k-1}^d \hat{C}_{i,k-2}|\mathcal{B}_{n-i+1}] \\
&= (1 - b_{k-1}^c) b_{k-1}^d \text{Var}[\hat{C}_{i,k-2}|\mathcal{B}_{n-i+1}] + b_{k-1}^c (1 - b_{k-1}^d) \text{Var}[\hat{D}_{i,k-2}|\mathcal{B}_{n-i+1}] + \\
&\quad (b_{k-1}^c b_{k-1}^d + (1 - b_{k-1}^c)(1 - b_{k-1}^d)) \text{Cov}[\hat{C}_{i,k-2}; \hat{D}_{i,k-2}|\mathcal{B}_{n-i+1}]
\end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}
D &= \text{E}[\text{Cov}[\hat{C}_{i,k-1}; \hat{D}_{i,k-1}|\mathcal{B}_{k-2}]|\mathcal{B}_{n-i+1}] \\
&= \text{E}[\text{Cov}[\pi_i \hat{a}_{k-1}^c + \hat{b}_{k-1}^c (\hat{D}_{i,k-2} - \hat{C}_{i,k-2}) + \hat{C}_{i,k-2}; \\
&\quad \pi_i \hat{a}_{k-1}^d + \hat{b}_{k-1}^d (\hat{C}_{i,k-2} - \hat{D}_{i,k-2}) + \hat{D}_{i,k-2}|\mathcal{B}_{k-2}]|\mathcal{B}_{n-i+1}]
\end{aligned}$$

Mit $\hat{a}_{k-1}^d = \hat{m}_{k-1}^d - \hat{b}_{k-1}^d \mathcal{Q}_{k-2}^d$ und $\hat{a}_{k-1}^c = \hat{m}_{k-1}^c - \hat{b}_{k-1}^c \mathcal{Q}_{k-2}^c$ (gemäß Gleichung (2.3)) gilt:

$$\begin{aligned}
D &= \mathbb{E}[\text{Cov}[\pi_i(\hat{m}_{k-1}^c - \hat{b}_{k-1}^c Q_{k-2}^c) + \hat{b}_{k-1}^c(\hat{D}_{i,k-2} - \hat{C}_{i,k-2}) + \hat{C}_{i,k-2}; \\
&\quad \pi_i(\hat{m}_{k-1}^d - \hat{b}_{k-1}^d Q_{k-2}^d) + \hat{b}_{k-1}^d(\hat{C}_{i,k-2} - \hat{D}_{i,k-2}) + \hat{D}_{i,k-2} | \mathcal{B}_{k-2}] | \mathcal{B}_{n-i+1}] \\
&= \mathbb{E}[\text{Cov}[\pi_i \hat{m}_{k-1}^c + \hat{b}_{k-1}^c(\hat{D}_{i,k-2} - \hat{C}_{i,k-2} - \pi_i Q_{k-2}^c) + \hat{C}_{i,k-2}; \\
&\quad \pi_i \hat{m}_{k-1}^d + \hat{b}_{k-1}^d(\hat{C}_{i,k-2} - \hat{D}_{i,k-2} - \pi_i Q_{k-2}^d) + \hat{D}_{i,k-2} | \mathcal{B}_{k-2}] | \mathcal{B}_{n-i+1}]
\end{aligned}$$

Nachfolgend setzen wir als abkürzende Schreibweise $\hat{X}_{k-2}^c = \hat{D}_{i,k-2} - \hat{C}_{i,k-2} - \pi_i Q_{k-2}^c$ und $\hat{X}_{k-2}^d = \hat{C}_{i,k-2} - \hat{D}_{i,k-2} - \pi_i Q_{k-2}^d$.

$$\begin{aligned}
D &= \mathbb{E}[\text{Cov}[\pi_i \hat{m}_{k-1}^c + \hat{b}_{k-1}^c \hat{X}_{k-2}^c + \hat{C}_{k-2}; \pi_i \hat{m}_{k-1}^d + \hat{b}_{k-1}^d \hat{X}_{k-2}^d + \hat{D}_{k-2} | \mathcal{B}_{k-2}] | \mathcal{B}_{n-i+1}] \\
&= \mathbb{E}[(\pi_i)^2 \text{Cov}[\hat{m}_{k-1}^c; \hat{m}_{k-1}^d | \mathcal{B}_{k-2}] + \pi_i \hat{X}_{k-2}^d \text{Cov}[\hat{m}_{k-1}^c; \hat{b}_{k-1}^d | \mathcal{B}_{k-2}] \\
&\quad + \hat{X}_{k-2}^c \pi_i \text{Cov}[\hat{b}_{k-1}^c; \hat{m}_{k-1}^d | \mathcal{B}_{k-2}] + \hat{X}_{k-2}^c \hat{X}_{k-2}^d \text{Cov}[\hat{b}_{k-1}^c; \hat{b}_{k-1}^d | \mathcal{B}_{k-2}] | \mathcal{B}_{n-i+1}] \\
&= (\pi_i)^2 \mathbb{E}[\text{Cov}[\hat{m}_{k-1}^c; \hat{m}_{k-1}^d | \mathcal{B}_{k-2}] | \mathcal{B}_{n-i+1}] + \pi_i \hat{X}_{k-2}^d \mathbb{E}[\text{Cov}[\hat{m}_{k-1}^c; \hat{b}_{k-1}^d | \mathcal{B}_{k-2}] | \mathcal{B}_{n-i+1}] \\
&\quad + \hat{X}_{k-2}^c \pi_i \mathbb{E}[\text{Cov}[\hat{b}_{k-1}^c; \hat{m}_{k-1}^d | \mathcal{B}_{k-2}] | \mathcal{B}_{n-i+1}] \\
&\quad + \hat{X}_{k-2}^c \hat{X}_{k-2}^d \mathbb{E}[\text{Cov}[\hat{b}_{k-1}^c; \hat{b}_{k-1}^d | \mathcal{B}_{k-2}] | \mathcal{B}_{n-i+1}] \\
&\approx (\pi_i)^2 \text{Cov}[\hat{m}_{k-1}^c; \hat{m}_{k-1}^d | \mathcal{B}_{k-2}] + \pi_i \hat{X}_{k-2}^d \text{Cov}[\hat{m}_{k-1}^c; \hat{b}_{k-1}^d | \mathcal{B}_{k-2}] \\
&\quad + \hat{X}_{k-2}^c \pi_i \text{Cov}[\hat{b}_{k-1}^c; \hat{m}_{k-1}^d | \mathcal{B}_{k-2}] + \hat{X}_{k-2}^c \hat{X}_{k-2}^d \text{Cov}[\hat{b}_{k-1}^c; \hat{b}_{k-1}^d | \mathcal{B}_{k-2}] \tag{2.17}
\end{aligned}$$

Die letzte Umformung, das Weglassen des bedingten Erwartungswertes geht wie vorher auf die Bemerkung 2.4.7 zurück. Die vier verbleibenden Kovarianzen werden mit folgendem Lemma geschätzt.

2.4.10 Lemma. *Seien $\hat{m}_k^c, \hat{b}_k^c, \hat{m}_k^d$ und \hat{b}_k^d die Schätzer der gleichnamigen Parameter aus Modellansatz 2.2.1 und \mathcal{B}_{k-2} die bekannte Schadenabwicklung des linken oberen Dreiecks gemäß Notation 2.1.9. Es gilt:*

$$\begin{aligned}
1. \widehat{\text{Cov}}[\hat{m}_{k-1}^d; \hat{m}_{k-1}^c | \mathcal{B}_{k-2}] &= \frac{\hat{\rho}_{k-1}}{n-k+2} \\
&\quad \sum_{i=1} \pi_i \\
2. \widehat{\text{Cov}}[\hat{m}_{k-1}^d; \hat{b}_{k-1}^c | \mathcal{B}_{k-2}] &= \frac{\sum_{i=1}^{n-k+2} \hat{\rho}_{k-1} \pi_i Y_{k-2}^c}{n-k+2} \text{ mit } Y_{k-2}^c = \frac{D_{k-2} - C_{k-2}}{\pi_i} - Q_{k-2}^c \\
&\quad \frac{\sum_{i=1} (Y_{k-2}^c)^2 \pi_i}{n-k+2} \sum_{i=1} \pi_i \\
3. \widehat{\text{Cov}}[\hat{b}_{k-1}^d; \hat{m}_{k-1}^c | \mathcal{B}_{k-2}] &= \frac{\sum_{i=1}^{n-k+2} \hat{\rho}_{k-1} \pi_i Y_{k-2}^d}{n-k+2} \text{ mit } Y_{k-2}^d = \frac{D_{k-2} - C_{k-2}}{\pi_i} - Q_{k-2}^d \\
&\quad \frac{\sum_{i=1} \pi_i (Y_{k-2}^d)^2}{n-k+2} \sum_{i=1} \pi_i
\end{aligned}$$

$$4. \widehat{\text{Cov}}[\hat{b}_{k-1}^d; \hat{b}_{k-1}^c | \mathcal{B}_{k-2}] = \frac{\sum_{i=1}^{n-k+2} \hat{\rho}_{k-1} \pi_i Y_{k-2}^c Y_{k-2}^d}{\sum_{i=1}^{n-k+2} \pi_i (Y_{k-2}^c)^2 \sum_{i=1}^{n-k+2} \pi_i (Y_{k-2}^d)^2}$$

Beweis. Der Beweis wird exemplarisch für 1. durchgeführt, für 2. bis 4. verläuft er dann analog.

$$\begin{aligned} & \text{Cov}[\hat{m}_{k-1}^c; \hat{m}_{k-1}^d | \mathcal{B}_{k-2}] \\ = & \text{Cov} \left[\frac{\sum_{i=1}^{n-k+2} C_{i,k-1} - C_{i,k-2}}{\sum_{i=1}^{n-k+2} \pi_i}; \frac{\sum_{j=1}^{n-k+2} D_{j,k-1} - D_{j,k-2}}{\sum_{j=1}^{n-k+2} \pi_j} \middle| \mathcal{B}_{k-2} \right] \\ = & \sum_{i=1}^{n-k+2} \sum_{j=1}^{n-k+2} \frac{\text{Cov}[C_{i,k-1} - C_{i,k-2}; D_{j,k-1} - D_{j,k-2} | \mathcal{B}_{k-2}]}{\left(\sum_{j=1}^{n-k+2} \pi_j \right)^2} \\ \stackrel{\text{(BAD 1.1)}}{=} & \sum_{i=1}^{n-k+2} \frac{\text{Cov}[C_{i,k-1} - C_{i,k-2}; D_{i,k-1} - D_{i,k-2} | \mathcal{B}_{k-2}]}{\left(\sum_{j=1}^{n-k+2} \pi_j \right)^2} \\ \stackrel{\text{(BAD 1.2)}}{=} & \sum_{i=1}^{n-k+2} \frac{\pi_i \rho_{k-1}}{\left(\sum_{j=1}^{n-k+2} \pi_j \right)^2} \\ \stackrel{\text{(BAD 4)}}{=} & \frac{\sum_{i=1}^{n-k+2} \pi_i \rho_{k-1}}{\left(\sum_{j=1}^{n-k+2} \pi_j \right)^2} = \frac{\rho_{k-1}}{\sum_{j=1}^{n-k+2} \pi_j} \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt durch Einsetzen des Schätzers $\hat{\rho}_{k-1}$ aus Gleichung (2.9) für ρ_{k-1} . \square

Mit den Gleichungen (2.16) und (2.17) ist nun eine rekursive Berechnungsformel für $\text{Cov}[\hat{C}_{i,k-1}; \hat{D}_{i,k-1} | \mathcal{B}_{n-i+1}]$ vorhanden. Insgesamt ergibt sich mit den Gleichungen (2.14), (2.15), (2.16) und (2.17) für den Schätzfehler folgende approximativ gültige Rekursionsformel:

$$\begin{aligned}
\text{Var}[\hat{C}_{i,k}|\mathcal{B}_{n-i+1}] &\approx (\pi_i)^2 \text{Var}[\hat{m}_k^c|\mathcal{B}_{k-1}] + (\hat{D}_{i,k-1} - \hat{C}_{i,k-1} - \pi_i Q_{k-1}^c)^2 \text{Var}[\hat{b}_k^c|\mathcal{B}_{k-1}] \\
&\quad + (1 - b_k^c)^2 \text{Var}[\hat{C}_{i,k-1}|\mathcal{B}_{n-i+1}] + (b_k^c)^2 \text{Var}[\hat{D}_{i,k-1}|\mathcal{B}_{n-i+1}] \\
&\quad + 2(1 - b_k^c)b_k^c \left[(1 - b_{k-1}^c)b_{k-1}^d \text{Var}[\hat{C}_{i,k-2}|\mathcal{B}_{n-i+1}] \right. \\
&\quad + b_{k-1}^c(1 - b_{k-1}^d) \text{Var}[\hat{D}_{i,k-2}|\mathcal{B}_{n-i+1}] \\
&\quad + (b_{k-1}^c + b_{k-1}^d + (1 - b_{k-1}^c)(1 - b_{k-1}^d)) \text{Cov}[\hat{C}_{i,k-2}; \hat{D}_{i,k-2}|\mathcal{B}_{n-i+1}] \\
&\quad + (\pi_i)^2 \text{Cov}[\hat{m}_{k-1}^c; \hat{m}_{k-1}^d|\mathcal{B}_{k-2}] + \pi_i \hat{X}_{k-2}^d \text{Cov}[\hat{m}_{k-1}^c; \hat{b}_{k-1}^d|\mathcal{B}_{k-2}] \\
&\quad \left. + \hat{X}_{k-2}^c \pi_i \text{Cov}[\hat{b}_{k-1}^c; \hat{m}_{k-1}^d|\mathcal{B}_{k-2}] + \hat{X}_{k-2}^c \hat{X}_{k-2}^d \text{Cov}[\hat{b}_{k-1}^c; \hat{b}_{k-1}^d|\mathcal{B}_{k-2}] \right]
\end{aligned}$$

In dieser Formel werden für b_k die entsprechenden erwartungstreuen Schätzer eingesetzt, für die Varianzen von m_k und b_k die Schätzer aus Lemma 2.4.9 und für die Kovarianzen zwischen m_k und b_k die Schätzer aus Lemma 2.4.10 verwendet. Die Kovarianz zwischen C und D wird gemäß angegebener Rekursionsformel ermittelt.

Somit ist eine komplette Rekursion für die Abschätzung des Schätzfehlers gegeben und es kann im Weiteren die Berechnung eines Gesamtfehlers betrachtet werden.

2.4.3 Fehlerabschätzung für die Gesamtreserve

In diesem Abschnitt soll eine Abschätzung des Fehlers für die Gesamtreserve R^c bzw. R^d bestimmt werden. Die Gesamtreserve und der Schätzer für die Gesamtreserve sind wie folgt definiert:

2.4.11 Notation (Gesamtreserve, Gesamtreserveschätzer). Seien R_i^c und R_i^d die Reserve des Anfalljahres i und \hat{R}_i^c und \hat{R}_i^d die zugehörigen Schätzer der Reserve, dann ist die Gesamtreserve bzw. deren Schätzer über alle Anfalljahre definiert als:

$$R^c = \sum_{i=2}^n R_i^c, \quad R^d = \sum_{i=2}^n R_i^d, \quad \text{bzw.} \quad \hat{R}^c = \sum_{i=2}^n \hat{R}_i^c, \quad \hat{R}^d = \sum_{i=2}^n \hat{R}_i^d$$

Analog zur Fehlerabschätzung des Anfalljahres i betrachten wir für die Gesamtreserve die mittlere quadratische Abweichung zwischen R^c und \hat{R}^c gegeben die bereits bekannte Entwicklung von Paid und Incurred. Wir betrachten also

$$\text{E}\left[\left(\sum_{i=2}^n R_i^c - \sum_{i=2}^n \hat{R}_i^c\right)^2 \middle| \mathcal{B}_n\right]$$

bzw. dessen Zusammensetzung als Summe aus Zufalls- und Schätzfehler.

$$\underbrace{\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=2}^n R_i^c - \sum_{i=2}^n \hat{R}_i^c\right)^2 \middle| \mathcal{B}_n\right]}_{\text{Gesamtfehler}} = \underbrace{\text{Var}\left[\sum_{i=2}^n R_i^c \middle| \mathcal{B}_n\right]}_{\text{Zufallsfehler}} + \underbrace{\left(\mathbb{E}\left[\sum_{i=2}^n R_i^c \middle| \mathcal{B}_n\right] - \sum_{i=2}^n \hat{R}_i^c\right)^2}_{\text{Schätzfehler}}$$

Gemäß Satz 2.4.3 und Bemerkung 2.4.4 kann dazu auch äquivalent betrachtet werden:

$$\underbrace{\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=2}^n C_{i,n} - \sum_{i=2}^n \hat{C}_{i,n}\right)^2 \middle| \mathcal{B}_n\right]}_{\text{Gesamtfehler}} = \underbrace{\text{Var}\left[\sum_{i=2}^n C_{i,n} \middle| \mathcal{B}_n\right]}_{\text{Zufallsfehler}} + \underbrace{\left(\mathbb{E}\left[\sum_{i=2}^n C_{i,n} \middle| \mathcal{B}_n\right] - \sum_{i=2}^n \hat{C}_{i,n}\right)^2}_{\text{Schätzfehler}}$$

Im folgendem wollen wir wieder Zufalls- und Schätzfehler separat betrachten.

Der Zufallsfehler kann aufgrund der Unabhängigkeit der Anfalljahre (gegeben durch (BAD 1.1)) und Bemerkung 2.4.5 folgendermaßen umgeformt werden:

$$\text{Var}\left[\sum_{i=2}^n C_{i,n} \middle| \mathcal{B}_n\right] = \sum_{i=2}^n \text{Var}\left[C_{i,n} \middle| \mathcal{B}_n\right] = \sum_{i=2}^n \text{Var}\left[C_{i,n} \middle| \mathcal{A}_{i,n-i+1}\right]$$

Der Zufallsfehler für die Gesamtreserve ergibt sich also durch einfaches Summieren des Zufallsfehlers pro Anfalljahr, für welchen in Abschnitt 2.4.1 die entsprechenden Berechnungsformeln hergeleitet wurden.

Der Schätzfehler wird zunächst folgendermaßen umgeformt:

$$\begin{aligned} & \left(\mathbb{E}\left[\sum_{i=2}^n C_{i,n} \middle| \mathcal{B}_n\right] - \sum_{i=2}^n \hat{C}_{i,n}\right)^2 \\ &= \left(\sum_{i=2}^n (\mathbb{E}[C_{i,n} | \mathcal{B}_n] - \hat{C}_{i,n})\right)^2 \\ &= \sum_{i=2}^n (\mathbb{E}[C_{i,n} | \mathcal{B}_n] - \hat{C}_{i,n})^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n (\hat{C}_{i,n} - \mathbb{E}[C_{i,n} | \mathcal{B}_n])(\hat{C}_{j,n} - \mathbb{E}[C_{j,n} | \mathcal{B}_n]) \end{aligned}$$

Der erste Summand der letzten Zeile kann wie der Zufallsfehler leicht berechnet werden, da lediglich der Schätzfehler pro Anfalljahr summiert wird. Dieser wurde bereits in Abschnitt 2.4.2 berechnet.

Die Berechnung der Doppelsumme hingegen, erfordert noch weitere Berechnungen, wie etwa die Bestimmung von $\text{Cov}[\hat{C}_{i,k}; \hat{C}_{j,k} | \mathcal{B}_{n-i+1}]$ für $k \geq n - i + 1$ und $i \neq j$. Diese Berechnung überschreitet aber den Umfang der vorliegenden Bachelorarbeit und wird deshalb nicht weiter ausgeführt.

3 Praktische Anwendung

3.1 Ziel und Ablauf

Im folgendem Kapitel soll das Bavarian Additiv Verfahren anhand von Sachversicherungsdaten des BLBV (Bayerische Landesbrand Versicherung AG, München) in die Praxis umgesetzt werden. Hierzu werden zunächst die vorliegenden Daten dahingehend überprüft, ob sie sich für ein additives Reserveverfahren grundsätzlich eignen. Danach wird untersucht, ob der nötige Zusammenhang zwischen Paid und Incurred für die Anwendung des Bavarian Additivs vorhanden ist. Im Zuge der eigentlichen Reserveberechnung folgen dann einige Eingriffe in die Daten und speziell getroffene Annahmen werden genauer erläutert. Abschließend wird das Ergebnis der Reserveberechnung mit dem Bavarian Additiv dem Ergebnis mit dem klassischen Additiven Verfahren gegenübergestellt und kommentiert.

3.2 Daten und Modellvoraussetzungen

Die vorliegenden Daten, anhand derer das Bavarian Additiv Verfahren in die Praxis umgesetzt wird, sind Schadendaten aller Sachversicherungen des gesamten BLBV. Hauptanteil dieser Schäden sind Feuerschäden, die beispielsweise aus der Industriefeuerversicherung/Betriebsunterbrechung, der landwirtschaftlichen Feuerversicherung oder der Wohngebäudeversicherung stammen. Darüber hinaus sind in den Schadendaten noch andere Sachversicherungen, wie beispielsweise Einbruch und Diebstahl oder Leitungswasser vertreten, allerdings mit einem geringeren Anteil. Die Daten liegen in Form zweier Abwicklungsdreiecke vor, die zum einen die Schadenzahlungen (Paid) und zum anderen die Schadenaufwände (Incurred) für die Anfalljahre ab 1998 enthalten. Bei den Sachversicherungen handelt es sich um eine sogenannte „short tail“ Sparte, d.h. der Großteil des Schadens wird in den ersten Entwicklungsjahren nach dem Anfalljahr reguliert. Daher sind im nachfolgenden, z.B. beim Überprüfen von Modellvoraussetzungen, die ersten EJ nach Schadeneintritt von großer Bedeutung, wohingegen die EJ am Ende der Schadenabwicklung kaum noch Einfluss auf die Reserveschätzung besitzen. Bevor mit der Reserveberechnung begonnen wird, prüfen wir zunächst, ob die gegebenen Daten einen additiven Modellansatz zulassen. Hierfür wird für festes k der Schadenzuwachs $C_{i,k} - C_{i,k-1}$ für jedes Anfalljahr i gegen die Prämie π_i geplottet und geprüft, ob die Punkte in etwa auf einer Gerade liegen. Die Steigung der Gerade entspricht dann in etwa dem AUSQZ-Schätzer m_k^c aus dem klassischen additiven Reserveverfahren.

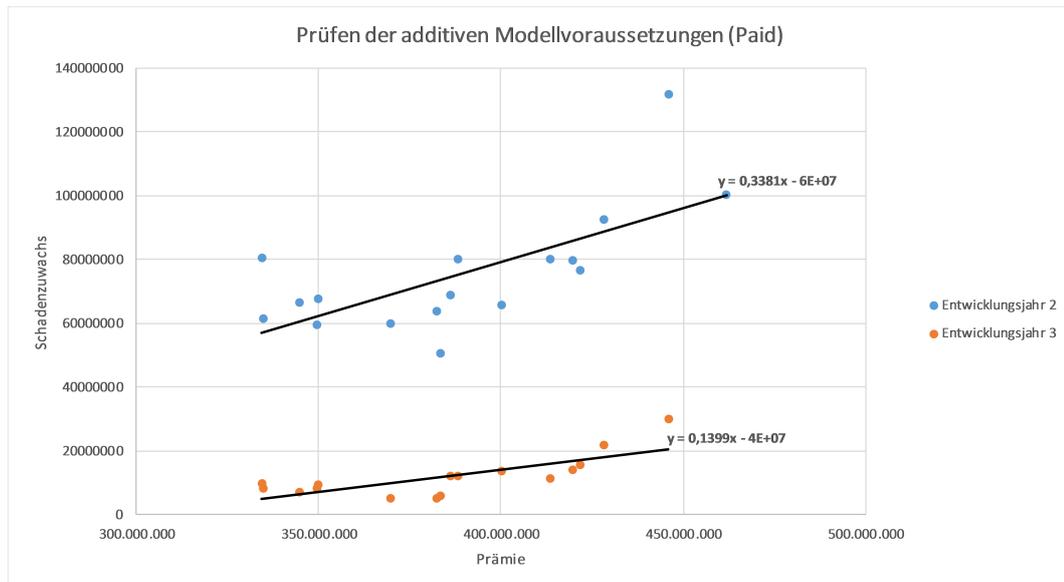


Abbildung 1: Plot der Prämie gegen den absoluten Schadenzahlungszuwachs

Abbildung 1 zeigt auf der y-Achse die Schadenzuwächse $C_{i,k} - C_{i,k-1}$ und auf der x-Achse die zugehörige Prämie für das Anfalljahr i . In vorliegender Grafik wurden die additiven Modellvoraussetzungen für die Entwicklungsjahre 2 und 3 für Paid geprüft. Bei beiden zeigt sich ein positiver linearer Zusammenhang zwischen Prämie und Schadenzuwachs, wodurch der Annahme, auf diese Daten ein additives Reserveverfahren anzuwenden zu können, nicht widersprochen werden kann.

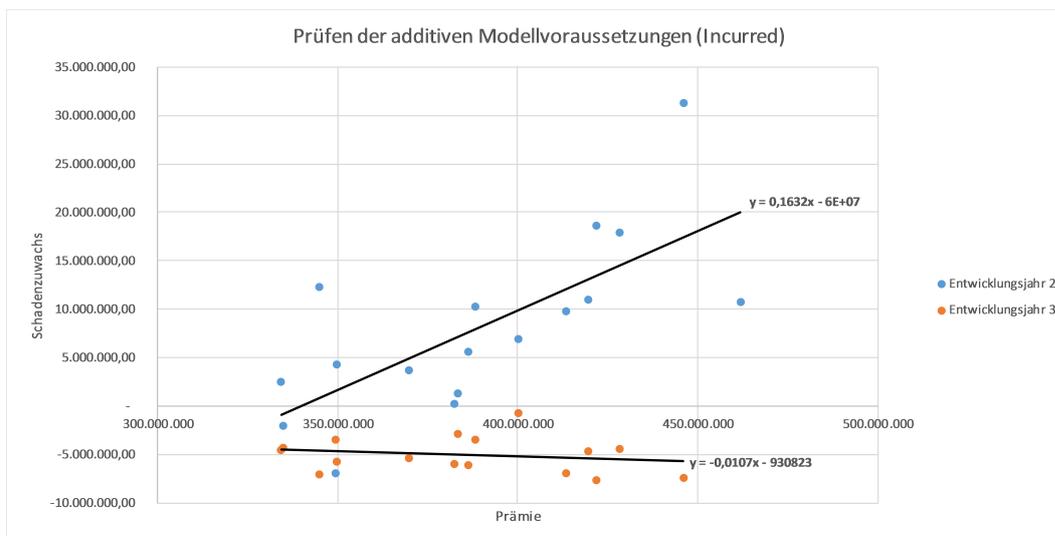


Abbildung 2: Plot der Prämie gegen den absoluten Schadenaufwandszuwachs

Ein ähnliches Bild zeigt sich bei Incurred. Auch hier wurde für die Entwicklungsjahre 2 und 3 der absolute Schadenzuwachs $C_{i,k} - C_{i,k-1}$ gegen die Prämie π_i gezeichnet. Beim Entwicklungsjahr 2 zeigt sich ein positiver linearer Trend. Hingegen beim Entwicklungsjahr 3 ein schwach negativer. Dies bedeutet heuristisch gesprochen für Entwicklungsjahr 2: je mehr Prämie vorhanden war, desto höher war der Zuwachs des Schadenaufwands (Zahlung + Reserve). Für Entwicklungsjahr 3 hingegen bedeutet dies, je mehr Prämie vorhanden war, desto stärker ging der Schadenaufwand (wenn auch nur leicht) zurück, d.h. es wurden vor allem Reserven aufgelöst, weil sich eine Besserentwicklung des Schadens als ursprünglich angenommen eingestellt hat. Insgesamt sind für beide Entwicklungsjahre lineare Zusammenhänge erkennbar, womit auch dies die Anwendung eines additiven Reserveverfahrens stützt.

Nachdem nun die Modellvoraussetzungen für das additive Reserveverfahren getestet wurden, ist noch zu prüfen, ob der für die sinnvolle Anwendung des Bavarian Additiv notwendige Zusammenhang zwischen den beiden Abwicklungsdreiecken in Form einer Korrelation zwischen Vorjahresreservequote und Schadenquotenzuwachs besteht. Auch hier wird dies wieder für die für die Reserveberechnung besonders relevanten Entwicklungsjahre 2 und 3 geprüft.

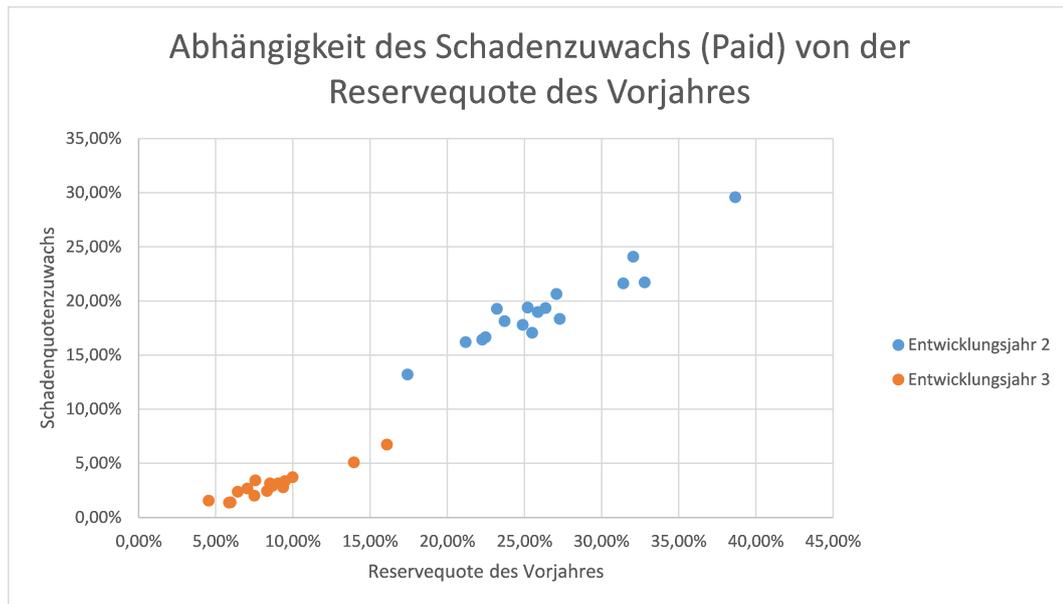


Abbildung 3: Plot der Reservequote gegen den Schadenquotenzuwachs (Paid)

In Abbildung 3 wurde die Reservequote des Vorjahres $\frac{D_{i,k-1}-C_{i,k-1}}{\pi_i}$ auf der x-Achse gegen die Schadenquotenzuwächse $\frac{C_{i,k}-C_{i,k-1}}{\pi_i}$ auf der y-Achse aufgetragen. In der Grafik sieht man deutlich, dass eine hohe Reservequote im Vorjahr immer zu einer höheren Auszahlung im Folgejahr geführt hat. Es besteht also mit hoher Wahrscheinlichkeit eine positive lineare Abhängigkeit zwischen der Reserve des Vorjahres und dem Schadenquotenzuwachs. Somit ist also ein Zusammenhang (Korrelation) zwischen den beiden Abwicklungsdreiecken vorhanden, was für die Verwendung des Bavarian Additiv spricht.

der relevanten Entwicklungsjahre und untersuchen diese auf Trends.

AY	1	2	3	4	5	AY	1	2	3	4	5
1998	36,34%	17,08%	2,38%	0,36%	0,35%	1998	61,84%	-2,00%	-1,00%	-1,06%	-0,31%
1999	33,89%	24,09%	2,94%	1,27%	0,31%	1999	65,93%	0,73%	-1,36%	-0,91%	-0,66%
2000	33,96%	18,36%	2,45%	0,56%	0,30%	2000	61,24%	-0,59%	-1,29%	-1,03%	-0,86%
2001	33,18%	19,29%	2,03%	0,51%	0,32%	2001	56,40%	3,57%	-2,05%	-1,00%	-0,76%
2002	41,32%	19,41%	2,67%	0,10%	0,13%	2002	66,54%	1,24%	-1,64%	-1,45%	-0,33%
2003	33,33%	16,22%	1,39%	0,68%	0,21%	2003	54,53%	0,98%	-1,45%	-1,05%	-0,39%
2004	27,98%	13,21%	1,57%	-0,14%	0,15%	2004	45,40%	0,33%	-0,74%	-0,99%	-0,40%
2005	32,17%	17,80%	3,16%	0,94%	0,34%	2005	57,05%	1,44%	-1,59%	-0,32%	-0,59%
2006	32,16%	16,67%	1,38%	0,41%	0,13%	2006	54,63%	0,06%	-1,55%	-0,67%	-0,50%
2007	36,93%	20,66%	3,15%	1,47%	0,32%	2007	64,01%	2,63%	-0,88%	-0,58%	-0,24%
2008	31,54%	16,43%	3,44%	0,64%	0,40%	2008	53,81%	1,74%	-0,19%	-0,89%	-0,83%
2009	30,90%	19,36%	2,79%	0,83%	0,55%	2009	57,28%	2,35%	-1,69%	-1,35%	-0,93%
2010	27,43%	19,00%	3,36%	1,36%	0,27%	2010	53,31%	2,61%	-1,12%	-0,87%	-0,46%
2011	27,31%	18,15%	3,73%	1,52%	0,69%	2011	51,03%	4,43%	-1,82%	-0,29%	-0,46%
2012	31,31%	21,64%	5,09%	2,17%		2012	62,71%	4,18%	-1,03%	-1,51%	
2013	31,52%	29,59%	6,74%			2013	70,18%	7,02%	-1,67%		
2014	22,25%	21,72%				2014	55,04%	2,34%			
2015	24,38%					2015	58,32%				
LDF	30,92%	19,45%	3,10%	0,87%	0,32%	LDF	58,20%	2,08%	-1,31%	-0,93%	-0,55%

(a) Paid

(b) Incurred

Abbildung 5: Schadenquotenzuwächse der Entwicklungsjahre 1 bis 5

Abbildung 5 zeigt die individuellen Schadenquotenzuwächse für Paid und Incurred für alle Anfalljahre seit 1998 für die Entwicklungsjahre 1 bis 5. Die Zeile LDF (Loss Development Factor) enthält die gewichteten mittleren Schadenquotenzuwächse je Entwicklungsjahr. Individuelle Entwicklungsfaktoren die unter dem mittleren Schadenquotenzuwachs liegen sind grün gefärbt, überdurchschnittliche rot. Beim genaueren betrachten der Abbildungen stellt man fest, dass in den Anfalljahren 1998 bis 2004 bei Paid in den Entwicklungsjahren 2 bis 4 eine stark unterdurchschnittliche Entwicklung vorhanden ist. Diese Abwicklungsfaktoren werden als für heutige Berechnungen nicht mehr repräsentativ angesehen und daher bei der Reserveschätzung ausgewichtet. Dies bedeutet, dass diese Werte für die Schätzung des LDF und bei sämtlichen anderen zu berechnenden Schätzwerten nicht mehr miteinbezogen werden. Nachdem die genannten Jahre ausgewichtet werden ändern sich die LDFs der Entwicklungsjahre 2 bis 4 von 19,45 %, 3,10 % und 0,87 % auf 20,25 %, 3,71 % und 1,18 %. Bei Incurred lässt sich ein solcher Trend zumindest im Entwicklungsjahr 2 für die Anfalljahre 1998 bis 2006 erkennen. Da die vorgenommenen Ausgewichtungen für beide Abwicklungsdreiecke möglichst gleich sein sollen, wird für Incurred aber nur der Zeitraum 1998 bis 2004 im Entwicklungsjahr 2 ausgewichtet. Nach den Ausgewichtungen änderte sich der LDF von Entwicklungsjahr 2 von 2,08 % auf 2,95 %. Diese Änderungen mögen zunächst gering erscheinen, besitzen aber aufgrund der hohen Prämien volumina durchaus Einfluss. Ferner haben die ausgewichteten Werte keinen Einfluss mehr auf die Bestimmung des Korrelationsparameters λ_k des Bavarian Additiv.

3.4 Residuenkorrelation

Im nächsten Schritt wollen wir die für das Bavarian Additiv wichtige Korrelation zwischen den Abwicklungsdreiecken, welche im Parameter λ_k erfasst wird, bei den gegebenen Daten analysieren.

Entwicklungsjahr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Korrelation pro EJ:		96%	96%	88%	57%	67%	73%	45%	12%	-41%	-87%	71%	44%	-36%	73%	-78%

Abbildung 6: Korrelation zwischen Schadenquotenzuwachs und Reservequote des Vorjahres pro Entwicklungsjahr (Paid)

Abbildung 6 zeigt die individuelle Korrelation λ_k^c zwischen Schadenquotenzuwachs und Reservequote des Vorjahres für die Paid-Daten. Die Korrelation wird deshalb als „individuell“ bezeichnet, weil sie pro Entwicklungsjahr gemessen wird. Hier ist die individuelle Korrelation für die Jahre 2 bis 16 abgebildet. Für die letzten beiden Jahre 17 und 18 ist eine Berechnung aufgrund der wenigen Datenpunkte nicht möglich. Im Entwicklungsjahr 1 existiert keine Vorjahresreservequote und damit auch keine entsprechende Korrelation. Entgegen dem im Theoriemodell eingeführten entwicklungsjahrabhängigen Korrelationsparameter λ_k^c (λ_k^d) ist man in der Praxis aufgrund der Stabilität von Schätzungen daran interessiert, einen Korrelationsparameter λ^c (λ^d) für alle Entwicklungsjahre gemeinsam zu schätzen. Hierzu wollen wir nun anhand der anfalljahresabhängigen Korrelation in Abbildung 6 prüfen, ob der Ansatz einer allgemeinen Korrelation gerechtfertigt ist.

Bei den vorhandenen Korrelationen fällt auf, dass in den ersten Entwicklungsjahren ein sehr starker positiver Zusammenhang festzustellen ist. Ab ca. Entwicklungsjahr 8 ist die Korrelation sehr volatil. Dies liegt vor allem daran, dass die Korrelation in späteren Entwicklungsjahren nur mit sehr wenigen Punkten geschätzt werden kann, wie beispielsweise im EJ 16 mit 3 Werten. Eine gemeinsame Korrelation für alle Entwicklungsjahre anzusetzen erscheint nicht angemessen weshalb wir dazu übergehen, den Korrelationsparameter λ_k^c für Gruppen von Entwicklungsjahren über eine Residuenkorrelation zu schätzen (vergleiche dieses Vorgehen mit [QM, S. 25]). Die Verwendung von Residuen ermöglicht es, durch die Normierung von Werten eine Korrelation für mehrere Entwicklungsjahre gemeinsam zu schätzen. Hier erfolgt dies nun für alle EJ ab EJ 8.

Auch für die Entwicklungsjahre 2 bis 7, für die ein sehr starker Zusammenhang zwischen Reservequote des Vorjahres und Schadenquotenzuwachs messbar ist, wird eine gemeinsame Residuenkorrelation angesetzt. Zum einen, da auch hier aufgrund der Trendbereinigung in den Daten die Schätzung der Korrelation teilweise auf eher wenigen Datenpunkten beruht. Zum anderen deshalb, weil die Schätzung der Korrelation über mehrere Jahre möglichst stabil bleiben und sich nicht durch jede neu hinzukommende Diagonale komplett ändern soll. Um diese Stabilität zu erreichen werden also mehrere Entwicklungsjahre zu einer Gruppe zusammengefasst und für diese eine gemeinsame Korrelation, auf

vielen Punkten beruht, geschätzt. Bei den vorliegenden Paid-Daten erfolgt dies nach qualitativen Überlegungen für die Entwicklungsjahre 2 bis 7 sowie für die Entwicklungsjahre 8 bis 18.

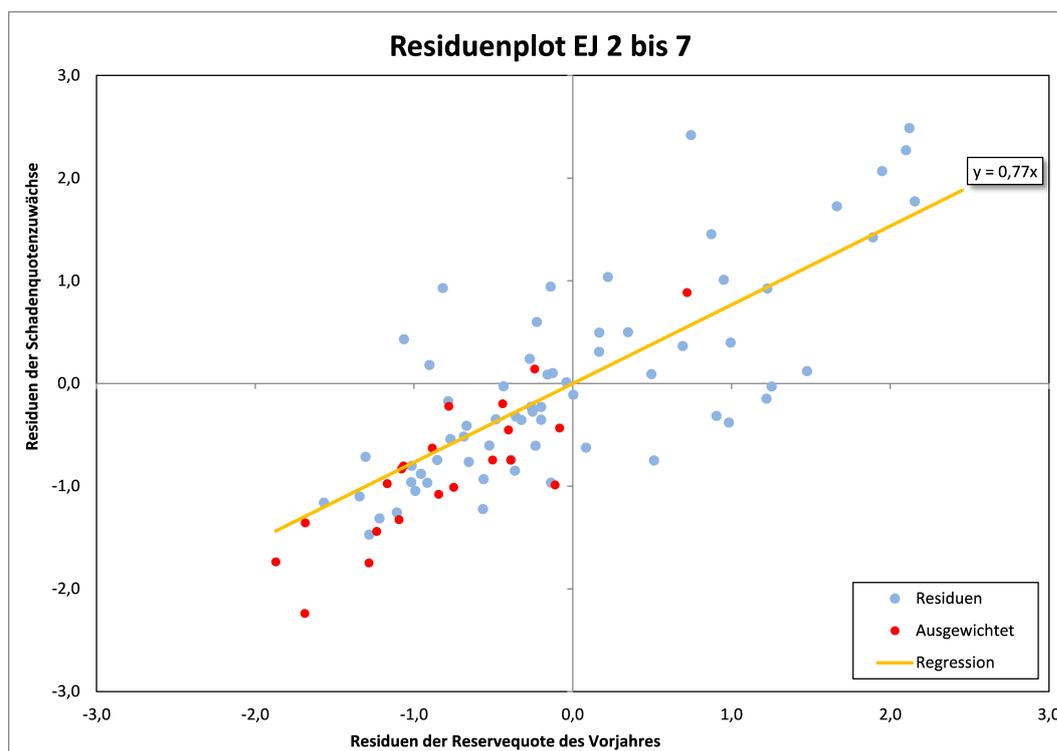


Abbildung 7: Residuenplot der Entwicklungsjahre 2 bis 7 für Paid

Abbildung 7 zeigt, wie die gemeinsame Schätzung des Korrelationsparameters λ_k^c für die Entwicklungsjahre 2 bis 7 mittels Residuen erfolgt. Die roten Punkte in der Grafik sind die Residuen derjenigen Werte, welche im vorherigen Schritt ausgewichtet wurden. Diese haben keinen Einfluss auf die berechnete Korrelation. Die Korrelation wird ausschließlich mit den blauen Punkten berechnet, indem gemäß einer linearen Regression eine Ursprungsgerade „optimal“ (Minimum-Quadrat-Methode) in die Punkte eingepasst wird. Deren Steigung gibt die gesuchte Korrelation an. Bei den gegebenen Daten ergibt sich nun eine Residuenkorrelation von 0,77 bzw. 77 %.

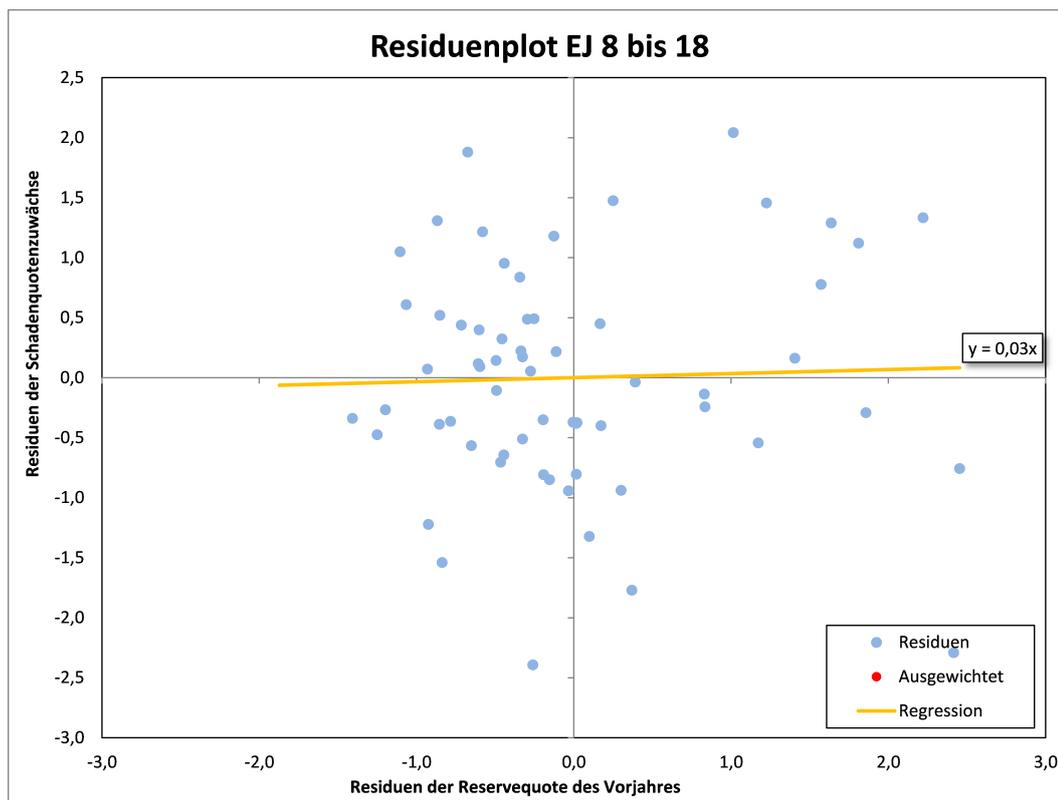


Abbildung 8: Residuenplot der Entwicklungsjahre 8 bis 18 für Paid

Abbildung 8 zeigt die Schätzung der Korrelation mittels Residuen für die restlichen Entwicklungsjahre 8 bis 18 von Paid. Hier ergibt sich für den Parameter λ_k^c ein Wert von 0,03 bzw. 3 %.

Entwicklungsjahr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Korrelation pro EJ:		-74%	19%	23%	40%	31%	28%	-53%	50%	3%	91%	32%	10%	37%	83%	4%

Abbildung 9: Korrelation zwischen Schadenquotenzuwachs und negativer Reservequote des Vorjahres pro Entwicklungsjahr (Incurred)

Abbildung 9 zeigt die individuelle Korrelation λ_k^d zwischen Schadenquotenzuwachs und negativer Reservequote des Vorjahres für die Incurred-Daten. Man sieht eine sehr volatile Korrelation zwischen Schadenquotenzuwachs und negativer Reservequote des Vorjahres. Um eine möglichst stabile Schätzung zu erhalten wird eine gesammelte Residuen Korrelation über alle Entwicklungsjahre geschätzt. Gruppen von Entwicklungsjahren zu bilden wie bei Paid erscheint hier aufgrund der hohen Schwankung nicht sinnvoll.

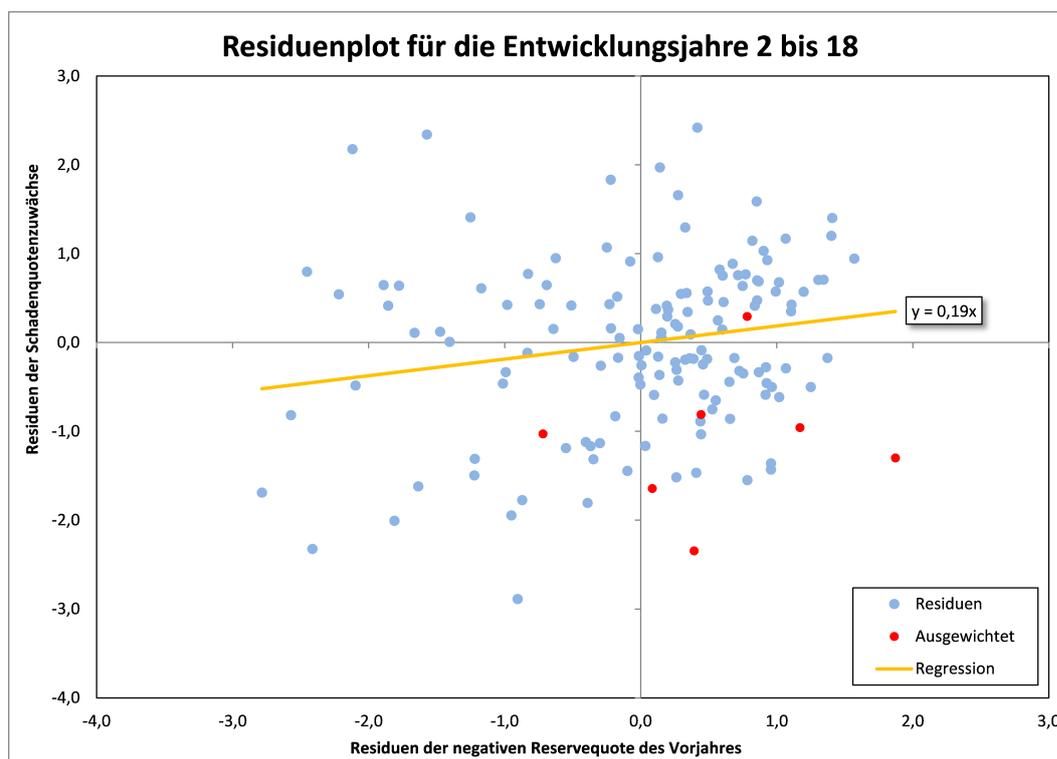


Abbildung 10: Residuenplot der Entwicklungsjahre 2 bis 18 für Incurred

In Abbildung 10 sind die Residuen der negativen Reservequote des Vorjahres gegen die Residuen der Schadenquotenzuwächse von Incurred der Entwicklungsjahre 2 bis 18 gemeinsam abgebildet. Rote Punkte bezeichnen wieder die in Abschnitt 3.3 ausgewichteten Werte. Diese haben auf die Bestimmung des Parameters λ_k^d keinen Einfluss. Insgesamt ergibt sich durch den Residuen Ansatz ein Parameter λ_k^d von 0,19 bzw. 19 %.

3.5 Vergleich der Verfahren

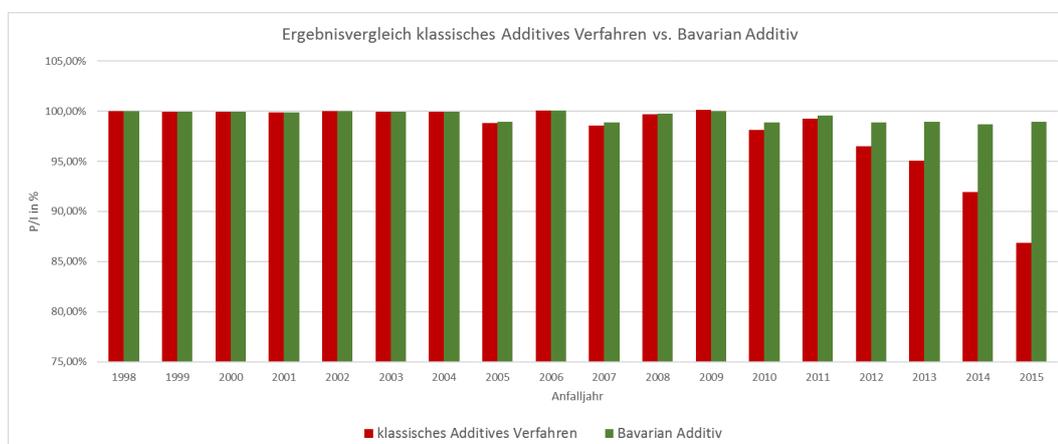


Abbildung 11: Ergebnisvergleich klassisches Additives Verfahren, Bavarian Additiv

In Abbildung 11 werden nun die Ergebnisse der klassischen Additiven Reserveberechnung mit denen des Bavarian Additiv verglichen. Hierzu sind in der Grafik auf der x-Achse die Anfalljahre 1998 bis 2015 und auf der y-Achse der jeweilige Quotient aus Paid- und Incurred-Endschadenstand (Ultimate) aufgetragen.

Für das jüngste Anfalljahr 2015 ergibt sich für das klassische Additive Verfahren ein (P/I)-Endschadenstand von ca. 86 %. Im Vergleich dazu liefert das Bavarian Additiv einen (P/I)-Endschadenstand von ca. 99 %. Das bedeutet, dass die Lücke, die bei getrennter Projektion der Endschadenstände mit dem klassischen Additiven Verfahren entsteht, durch das Bavarian Additiv sehr gut geschlossen wird. Dieser Effekt ist vor allem bei den jungen Anfalljahren 2012 bis 2015 zu sehen. Für ältere Anfalljahre vor 2011 ist dieser Effekt nicht mehr so stark sichtbar, da diese Anfalljahre schon weitestgehend abgewickelt sind und daher Paid und Incurred ohnehin schon sehr nahe beieinander liegen.

4 Schlussbemerkung

Das Bavarian Additiv hat bei der Anwendung auf echte Daten gezeigt, dass es das eingangs formulierte Ziel sehr gut erfüllt. Es verringert die Lücke zwischen Schadenzahlungs- und Schadenaufwandsreserveschätzung, die bei Anwendung des klassischen Additiven Verfahren entsteht, indem es beide Projektionen zusammenführt. Das Verfahren besitzt ein vollständiges mathematisches Modell, die Schätzung der Parameter beruht auf der gängigen Methode der kleinsten Quadrate und für alle verwendeten Schätzer wurde die Erwartungstreue bewiesen. Darüber hinaus ist eine detaillierte Fehlerabschätzung vorhanden, mit der man eine Aussage über die Qualität der geschätzten Best Estimate Reserve erhält und mit der man das Verfahren auch mit anderen Reserveverfahren vergleichen kann.

Für eine sinnvolle Anwendung des Bavarian Additiv ist es notwendig, das Modell und seine Schätzer genau zu kennen bzw. zu wissen, welche reale Größe hinter welchem Schätzer im Modell steht. Daher wurde im Theoriekapitel dieser Arbeit versucht die Schätzer für a und b so umzuformen, dass sich der praktische Anwender etwas vorstellen kann. Insbesondere das im Theorieteil vorgenommene Aufspalten und Erweitern des Schätzers b in einen Korrelationskoeffizienten λ und den Quotienten der Standardabweichungen von Reservequote und Schadenzuwachsquote hilft in der Praxis, die berechneten Schätzer einfacher interpretieren und mögliche unplausible Entwicklungen schneller erkennen zu können.

Wichtigster zu schätzender Parameter ist sicherlich der Parameter λ . Durch ihn wird das Zusammenwirken von Paid- und Incurred in Form einer Korrelation quantifizierbar. Negative Werte für λ können je nach Datenlage auftreten, sind aus praktischer Sicht aber nie sinnvoll. Etwa würde die anschauliche Interpretation eines negativen Korrelationsparameter λ bei Paid im hiesigen Modell lauten, dass immer dort, wo besonders viele Reserven vorhanden sind, eine besonders niedrige Auszahlung folgt. In der Realität wäre ein solcher Zusammenhang allerdings äußerst fragwürdig.

Wie sich im Praxisteil gezeigt hat, ist es unter Umständen notwendig, als Modellierer manuell in das Verfahren einzugreifen, um sinnvolle Ergebnisse bei der Bestimmung der Best Estimate Reserve zu gewährleisten. Im Kapitel Praktische Anwendung wurde ein solcher Eingriff beispielsweise durch die Verwendung einer Residuenkorrelation aufgezeigt.

Mit dem hier vorgestellten Bavarian Additiv ist die Hoffnung verbunden, dass eine erwartungstreue Schätzung der Reserve, die auf einer größeren Information (Paid und Incurred Abwicklung) beruht, zu besseren Prognoseergebnissen führen kann.

Erklärung

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst, noch nicht anderweitig für Prüfungszwecke vorgelegt, keine anderen als die angegebenen Quellen oder Hilfsmittel benützt sowie wörtliche und sinngemäße Zitate als solche gekennzeichnet habe.

Rosenheim, den 14.03.2017

Literaturverzeichnis

- [DAV13] *Klausur Spezialwissen Schaden.* 2013. – Deutsche Aktuarvereinigung e. V., Veröffentlicht auf "https://aktuar.de/Loesungsvorschlaege_klausuren/musterloesungen/004SMusterloesung2013.pdf" Letzter Zugriff am 25.02.2017
- [Mac02] MACK, Thomas: *Schadensversicherungsmathematik.* Karlsruhe : Verlag Versicherungswirtschaft, 2002
- [Mac09] MACK, Thomas: *Vortragsskript: Munich Chain Ladder.* Wien: ÖFdv Seminar „stochastische Schaden-Reservierung“, 5./6. November 2009
- [QM] QUARG, Gerhard ; MACK, Thomas: *Munich Chain Ladder.* Münchner Rückversicherungs-Gesellschaft