

Dominik Kortschak

Zufällige Quasi Monte Carlo Methoden zur Simulation seltener Ereignisse

Diplomarbeit aus
Technische Mathematik
Studienzweig Wirtschaftsmathematik und Operations Research

durchgeführt am

*Institut für Mathematik A
Technische Universität Graz
bei O.Univ.Prof. Dr. Robert F. Tichy*

Graz, im August 2005

Ich versichere, diese Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt und mich auch sonst keiner unerlaubter Hilfsmittel bedient zu haben.

Vorwort

Eine wichtige Aufgabe der Versicherungsmathematik ist die Berechnung von Werten, die mit dem Ruin einer Versicherung zusammenhängen, wie zum Beispiel die Ruinwahrscheinlichkeit. Die Grundlagen für die dafür benötigte Ruintheorie wurden bereits in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts, vor allem von Schwedischen Mathematikern gelegt.

Für Probleme aus der Ruintheorie existieren oft keine analytischen Lösungen, daher ist Simulation eine mögliche Methode um diese Probleme näherungsweise zu lösen. Da aber Ereignisse wie der Ruin einer Versicherung seltene Ereignisse sind, sind damit verbundene Werte oft sehr klein und benötigen daher bei ihrer Berechnung eine hohe Genauigkeit. Naive Simulationstechniken, wie zum Beispiel die Monte Carlo Methode benötigen in so einem Fall einen zu großen Rechenaufwand und sind daher in der Praxis nicht brauchbar. Man benötigt daher noch zusätzliche Ideen um den Rechenaufwand zu verringern.

Diese Diplomarbeit beschäftigt sich vor allem mit der Ruinwahrscheinlichkeit im Cramér-Lundberg-Modell und der Wahrscheinlichkeit, dass der Gesamtschaden im Kollektiven Risikomodell einen vorgegebenen Wert übersteigt. Beide Probleme sind äquivalent zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällige Summe größer ist als ein vorgegebener Wert. In dieser Diplomarbeit wurden die bekannten Monte Carlo Methoden zur Berechnung dieser Wahrscheinlichkeiten zusammengefasst und mit den äquivalenten zufälligen Quasi Monte Carlo Methoden verglichen. Dabei wurden vor allem Methoden für die in der Praxis wichtigen subexponentiellen Verteilungen untersucht. Des Weiteren werden effektive Methoden zur Berechnung von dem Erwartungswert und dem zweiten Moment des Überschusses einer zufälligen Summe angegeben.

Dank

Professor Robert Tichy möchte ich für die Betreuung dieser Arbeit danken. Bei Dr. Dipl.-Ing Jürgen Hartinger, der maßgeblich an der Betreuung dieser Arbeit beteiligt war, möchte ich mich ebenfalls bedanken. Des Weiteren möchte ich mich bei allen bedanken, die mir bei der Erstellung dieser Diplomarbeit geholfen haben.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung und grundlegende Modelle	1
1.1	Seltene Ereignisse	1
1.2	Das Kollektive Risikomodell	1
1.2.1	Verteilungen für N	2
1.2.2	Verteilungen für die Schadenshöhen	3
1.3	Das Cramér-Lundberg-Modell	3
2	Subexponentielle Verteilungen	8
2.1	Regular Varying	12
2.2	Die Lognormal-Verteilung	14
2.3	Die Weibull-Verteilung	15
3	Quasi Monte Carlo Methoden	17
3.1	Monte Carlo Methode	17
3.1.1	Die Inversionsmethode	18
3.2	Methoden zur Varianzreduktion	18
3.2.1	Bedingtes Monte Carlo	18
3.2.2	Importance Sampling	19
3.2.3	Kontrollvariablen	20
3.2.4	Stratified Sampling	21
3.3	Quasi Monte Carlo Methoden	22
3.3.1	Diskrepanz	22
3.3.2	Fehlerschranken	23
3.3.3	Folgen kleiner Diskrepanz	26
3.3.4	Halton Folge	27
3.3.5	Netze und (t, s) -Folgen	29
3.3.6	Die Konstruktion von (s, t) -Folgen	30
3.4	Die effektive Dimension	32
3.4.1	ANOVA Zerlegung	32
3.4.2	Die effektive Dimension	33
3.5	Zufälliges Quasi Monte Carlo	35
3.5.1	Folgen mit zufälligem Shift	36
3.5.2	Halton Folge mit zufälligem Startpunkt	37
4	Methoden zur Simulation seltener Ereignisse	40
4.1	Das zugrunde liegende Problem	40
4.2	Light Tails	41
4.2.1	Zufällige Summen	42
4.2.2	Ruinwahrscheinlichkeit	42
4.3	Zufällige Summen mit subexponentiellen Verteilungen	44
4.3.1	Der bedingte Monte Carlo Schätzer	44

4.3.2	Eine Importance Sampling Methode	47
4.3.3	Hazard Rate Twisting	49
4.3.4	Weighted Delayed Hazard Rate Twisting	50
4.3.5	Eine asymmetrische Idee	56
4.3.6	Numerische Ergebnisse	60
4.3.7	Die effektive Dimension von Z_5	66
4.3.8	Der relative Fehler von Z_6	76
4.3.9	Die Geschwindigkeit der Konvergenz	77
5	Momente seltener Ereignisse	84
5.1	Der Erwartungswert von $(S_N - u)^+$	85
5.1.1	Eine Asymptotik für $E[(S_N - u)^+]$	85
5.1.2	Ein Schätzer für $E[(S_N - u)^+]$	86
5.1.3	Die effektive Dimension des Schätzers	86
5.1.4	Der Regular Varying Fall	89
5.1.5	Der Kontrollvariablen Schätzer	91
5.1.6	Numerische Ergebnisse	91
5.2	Das zweite Moment von $(S_N - u)^+$	92
5.2.1	Eine Asymptotik für $E[((S_N - u)^+)^2]$	92
5.2.2	Ein Schätzer für $E[((S_N - u)^+)^2]$	95
5.2.3	Die effektive Dimension des Schätzers	96
5.2.4	Der Regular Varying Fall	98
5.2.5	Der Kontrollvariablen Schätzer	100
	Tabellen	101

Kapitel 1

Einleitung und grundlegende Modelle

1.1 Seltene Ereignisse

In der Finanz- und Versicherungs-Mathematik, aber auch in anderen Teilen der Mathematik, gibt es zufällige Ereignisse welche nur mit kleiner Wahrscheinlichkeit eintreten. Man spricht in so einem Fall von seltenen Ereignissen. Beispiele für seltene Ereignisse sind Erdbeben, große Flutwellen oder der Ruin einer Versicherung. Da eine kleine Wahrscheinlichkeit kein exakter Begriff ist, definieren wir.

Definition 1.1 (Seltene Ereignisse). Sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, dann heißt eine Familie $(A(u))_{u>0}$, $A(u) \in \mathcal{A}$, von Ereignissen, Familie seltener Ereignisse falls

$$\lim_{u \rightarrow \infty} P(A(u)) = 0 \quad (1.1)$$

gilt.

Das Ziel dieser Diplomarbeit ist es effiziente Methoden zur näherungsweise Berechnung von $P(A(u))$ vorzustellen. Da es viele verschiedene seltene Ereignisse gibt, muss man um zu vernünftigen Methoden zu kommen, sich auf spezielle Ereignisse einschränken. In diesem Kapitel werden nun Modelle aus der Versicherungs-Mathematik vorgestellt (siehe [Asm96] oder [PE97]), welche auf seltene Ereignisse führen.

1.2 Das Kollektive Risikomodell

Eine Versicherung wird mehrere Versicherungsverträge in einem Portfolio zusammenfassen. Für die Versicherung ist interessant, wie viel sie für die in dem Portfolio vereinigten Verträgen eingetretenen Schäden an Leistungen zu bezahlen hat. Das kollektive Risikomodell dient dazu den in einem bestimmten Zeitintervall auftretenden Gesamtschaden S eines Portfolios zu modellieren. Die Anzahl der Schäden wird dabei durch eine diskrete Zufallsvariable N beschrieben und die jeweiligen Schäden durch die Zufallsvariablen Y_1, \dots, Y_N beschrieben. Man erhält damit den Gesamtschaden,

$$S_N = \sum_{i=1}^N Y_i = \begin{cases} 0 & \text{für } N = 0, \\ Y_1 + Y_2 \dots + Y_N & \text{für } N > 0. \end{cases}$$

Dabei gelten die folgenden Modellannahmen.

- Die Anzahl der Schäden ist eine Zufallsvariable N die nur Werte aus \mathbb{N}^0 annimmt.
- Die Schadenshöhen Y_1, Y_2, \dots, Y_N sind positive Zufallsvariablen welche unabhängig und ident (iid) verteilt sind mit Verteilungsfunktion F .

- Die Anzahl der Schäden N und die Schadenshöhen Y_1, Y_2, \dots, Y_N sind unabhängig.

Mit den Bezeichnungen $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$, $P(N = n) = p_n$ und F^{n*} der n -fachen Faltung von F gilt

$$P(S_N \leq u) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n F^{n*}(u) \quad \text{und} \quad P(S_N > u) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \bar{F}^{n*}(u).$$

Für Erwartungswert und Varianz gilt in diesem Modell

$$E[S_N] = E[N]E[Y_1], \quad \text{Var}[S_N] = E[N^2]E[Y_1^2] + E[N]\text{Var}[Y_1].$$

Bemerkung 1.1. Die Familie von Ereignissen $P(S_N > u)$ ist eine Familie seltener Ereignisse. Eine Zufallsvariable die besonders für Rückversicherungen interessant ist und sich auf dieses Modell bezieht ist $(S_N - u)^+ = \max(S_N - u, 0)$.

1.2.1 Verteilungen für N

Die Festlegung einer Verteilung für N führt auf folgende Modelle.

Das zusammengesetzte Binomialmodell: In diesem Modell führt man die folgenden zusätzlichen Annahmen ein.

- Das betrachtete Zeitintervall wird in n Teilintervalle I_k , $k \in \{1, \dots, n\}$ unterteilt:
- In jedem Intervall I_k tritt maximal ein Schaden auf.
- Die Wahrscheinlichkeit dass in einem Intervall ein Schaden auftritt ist p und ist unabhängig davon ob in den anderen Intervallen ein Schaden auftritt.

Aus diesen Annahmen folgt, dass N binomialverteilt ist, d.h. $P(N = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$. Wir schreiben, $N \stackrel{d}{\sim} B(n, p)$.

Das zusammengesetzte Poissonmodell: In diesem Modell ist $N \stackrel{d}{\sim} Pois(\lambda)$ poissonverteilt, das heißt

$$P(N = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}^0.$$

Dieses Modell erhält man, wenn man im zusammengesetzten Binomialmodell $\lambda = np$ fixiert, und n gegen unendlich gehen lässt.

Bemerkung 1.2. In diesem Modell gilt $E[N] = \text{Var}[N]$.

Das zusammengesetzte gemischte Poissonmodell: Um im zusammengesetzten Poissonmodell etwas mehr Fluktuation zuzulassen, kann man den Parameter λ stochastisch wählen. Falls man mit G die Verteilungsfunktion von λ bezeichnet, so erhält man für N ,

$$P(N = n) = E[P(N = n|\lambda)] = E \left[\frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \right] = \int_0^{\infty} \frac{l^n}{n!} e^{-l} dG(l).$$

Das zusammengesetzte negative Binomialmodell: Dieses Modell erhält man, indem man beim zusammengesetzten gemischten Poissonmodell λ gammaverteilt wählt, d.h. $\lambda \stackrel{d}{\sim} \Gamma(\alpha, \beta)$ mit Dichte $f_\lambda(x) = \beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x} / \Gamma(\alpha)$. Durch diese Wahl ergibt sich, dass N negativ binomialverteilt ist, d.h.

$$P(N = n) = \binom{r+n-1}{n} p^r q^n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}^0,$$

dabei ist $r = \alpha$ und $p = 1 - q = \frac{\beta}{\beta+1}$.

1.2.2 Verteilungen für die Schadenshöhen

Durch statistische Untersuchungen erhält man, dass die folgenden Verteilungen für die Schadenshöhen Y_i im kollektivem Risikomodell geeignet sind.

Lognormal-Verteilung: Falls Z eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 ist, dann wird die Verteilung von e^Z als Lognormal-Verteilung bezeichnet. Damit ergibt sich die Dichte als,

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(\log(x) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad x > 0.$$

Pareto-Verteilung: Für $\alpha > 0$ und $\beta > 0$ wird diese Verteilung durch die Dichte

$$f(x) = \alpha\gamma(1 + \gamma x)^{-\alpha-1}, \quad x > 0,$$

bestimmt. Für den Schwanz der Verteilungsfunktion gilt,

$$\bar{F}(x) = (1 + \gamma x)^{-\alpha}, \quad x \geq 0.$$

Weibull-Verteilung: Diese Verteilung wird durch die Dichte

$$f(x) = \beta\gamma x^{\beta-1} e^{-\gamma x^\beta}, \quad x > 0,$$

bestimmt. Dabei ist $\beta > 0$ und $\gamma > 0$. Für den Schwanz der Verteilungsfunktion gilt:

$$\bar{F}(x) = e^{-\gamma x^\beta}, \quad x \geq 0.$$

1.3 Das Cramér-Lundberg-Modell

Das Cramér-Lundberg-Modell ist ein Risiko-Modell in stetiger Zeit. Man nimmt dabei an, dass der Gesamtschaden zu einem festen Zeitpunkt t dem eines zusammengesetzten Poisson Modells entspricht. Des Weiteren nimmt man an, dass die Prämienzahlungen stetig erfolgen und linear in der Zeit sind. Damit gilt für die freie Reserve C_t zum Zeitpunkt t ,

$$C_t = u + ct + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i.$$

Hierbei ist u das Anfangskapital und c die Prämienrate. Die Anzahl der Schäden in $[0, t)$ ist ein Poisson-Prozess N_t mit Parameter λ und $N_0 = 0$. Die Schadensgrößen $(Y_i)_{i \geq 1}$ sind eine Folge unabhängiger ident verteilter positiver Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F , Erwartungswert $E[Y_i] = \mu$ und unabhängig von N_t .

Der Ruinzeitpunkt definiert sich als der erste Zeitpunkt bei dem die freie Reserve kleiner wird als 0, d.h.

$$T = \inf \{t > 0 : C_t < 0\}, \quad (\inf \emptyset = \infty).$$

Daraus ergibt sich die Ruinwahrscheinlichkeit als:

$$\Psi(u) = P(T < \infty),$$

und die Überlebenswahrscheinlichkeit als:

$$U(u) = 1 - \Psi(u).$$

Bemerkung 1.3. Die Familie von Ereignissen $\Psi(u)$, $u > 0$ ist eine Familie seltener Ereignisse.

Satz 1.1. Die Überlebenswahrscheinlichkeit U ist Lösung der Integro-Differenzialgleichung

$$c U'(x) - \lambda U(x) + \lambda \int_0^x U(x-y) dF(y) = 0, \quad (1.2)$$

mit der Nebenbedingung $\lim_{x \rightarrow \infty} U(x) = 1$.

Beweis. $U(x)$ zum Zeitpunkt t kann man aus $U(x)$ zum Zeitpunkt $t + dt$ berechnen. Die Wahrscheinlichkeit, dass zwischen t und dt ein Schaden eintritt ist $e^{-\lambda dt}$, für kleines dt kann dies mit der Taylorformel durch $1 - \lambda t + O(dt^2)$ approximiert werden. Analog ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit, dass es zu genau einem Schaden kommt, $\lambda dt e^{-\lambda dt} = \lambda dt + O(dt^2)$, und die Wahrscheinlichkeit, dass es zu mehr als einem Schaden kommt ist $O(dt^2)$. Mit dem Gesetz von der totalen Wahrscheinlichkeit gilt für $U(x)$:

$$\begin{aligned} P(\text{Überleben}) &= P(\text{kein Schaden})P(\text{Überleben}|\text{kein Schaden}) \\ &+ P(\text{ein Schaden})P(\text{Überleben}|\text{ein Schaden}) \\ &+ P(\text{mehr als ein Schaden})P(\text{Überleben}|\text{mehr als ein Schaden}) \\ &= P(\text{kein Schaden})P(\text{Überleben}|\text{kein Schaden}) \\ &+ P(\text{Schaden}) \sum_y P(\text{Schaden} \wedge Y = y)P(\text{Überleben}|\text{Schaden} \wedge Y = y) \\ &+ O(dt^2), \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} U(x) &= (1 - \lambda dt)U(x + c dt) + \lambda dt \int_0^{x+c dt} U(x + c dt - y) dF(y) + O(dt^2) \\ &= (1 - \lambda dt)(U(x) + c dt U'(x) + O(dt^2)) + \lambda dt \int_0^x U(x - y) dF(y) + O(dt^2), \\ 0 &= -\lambda dt U(x) + c dt U'(x) + \lambda dt \int_0^x U(x - y) dF(y) + O(dt^2). \end{aligned}$$

Falls man nun mit dt kürzt und dann den Grenzübergang $dt \rightarrow 0$ durchführt so erhält man (1.1) □

Lemma 1.2. Falls $Y_i \stackrel{d}{\sim} \text{Exp}(\delta)$, das heißt $F(x) = 1 - e^{-\delta x}$, dann gilt für die Überlebenswahrscheinlichkeit

$$U(u) = 1 - \frac{\lambda}{c\delta} e^{-\frac{c\delta - \lambda}{c} u}.$$

Beweis. Multipliziert man Gleichung (1.2) mit $e^{\delta u}$ so erhält man,

$$\begin{aligned} c e^{\delta u} U'(u) - \lambda e^{\delta u} U(u) + \lambda \delta \int_0^u U(u-y) e^{\delta(u-y)} dy &= 0, \\ c e^{\delta u} U'(u) - \lambda e^{\delta u} U(u) + \lambda \delta \int_0^u U(y) e^{\delta y} dy &= 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Differenziert man nach u , so erhält man

$$\begin{aligned} c\delta e^{\delta u} U'(u) + c e^{\delta u} U''(u) - \lambda \delta e^{\delta u} U(u) - \lambda e^{\delta u} U'(u) + \lambda \delta e^{\delta u} U(u) &= 0, \\ c U''(u) + (c\delta - \lambda) U'(u) &= 0. \end{aligned}$$

Die Lösung der Differentialgleichung ist

$$U(u) = A + B e^{-\frac{c\delta - \lambda}{c} u}.$$

Aus $\lim_{u \rightarrow \infty} U(u) = 1$ erhält man $A = 1$. Setzt man in (1.3) $u = 0$ erhält man.

$$-c \frac{c\delta - \lambda}{c} B = \lambda(1 + B) \quad \text{oder} \quad B = -\frac{\lambda}{\delta c}.$$

□

Definition 1.2 (Integrierter Schwanz). Sei $F(x)$ eine Verteilungsfunktion und $\mu = \int_0^\infty x dF(x) < \infty$, dann wird die Integrierter-Schwanz-Verteilung $F_I(x)$ definiert durch:

$$F_I(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x (1 - F(y)) dy = \frac{1}{\mu} \int_0^x \bar{F}(y) dy, \quad x \geq 0.$$

Die Dichte von $F_I(x)$ wird als $f_I(x)$ bezeichnet.

Satz 1.3 (Pollaczek-Khinichine-Formel). Im Cramér-Lundberg-Modell sei F die Verteilungsfunktion der Schadensgrößen Y_i , F_I^{n*} die n -fache Faltung von F_I und $\rho = \frac{\lambda\mu}{c} < 1$. Dann ist die Überlebenswahrscheinlichkeit gegeben durch

$$U(u) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \rho) \rho^n F_I^{n*}(u).$$

Zur Wiederholung der Satz von der dominierten Konvergenz, sei dazu ν ein Maß.

Satz 1.4 (Satz von der dominierten Konvergenz). Ist $(f_n)_{n \geq 1}$ eine Folge messbarer Funktionen die ν -f.s. gegen f konvergieren und besitzt die Funktionenfolge eine integrierbare Majorante (d.h. $|f_n| \leq g$ für alle $n \geq 1$ und $\int |g| d\nu < \infty$), dann ist f integrierbar und es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\nu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\nu = \int f d\nu.$$

Beweis Satz 1.3. Mit Gleichung (1.2) gilt:

$$\frac{c}{\lambda} U'(x) - U(x) + \int_0^x U(x - y) dF(y) = 0.$$

Durch Integration nach x von 0 bis u erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{c}{\lambda}(U(u) - U(0)) &= \int_0^u U(x) dx - \int_0^u \int_0^x U(x - y) dF(y) dx, \\ \frac{c}{\lambda}(U(u) - U(0)) &= \int_0^u U(x) dx - \underbrace{\int_0^u \int_y^u U(x - y) dx dF(y)}_I. \end{aligned}$$

Durch Substitution erhält man:

$$I = \int_0^u \int_0^{u-y} U(x) dx dF(y) = \int_0^u \int_0^{u-x} dF(y) U(x) dx = \int_0^u U(x) F(u - x) dx.$$

Damit erhält man:

$$\frac{c}{\lambda}(U(u) - U(0)) = \int_0^u U(x)(1 - F(u - x)) dx = \int_0^u U(u - x)(1 - F(x)) dx.$$

Da $\lim_{u \rightarrow \infty} U(u) = 1$ erhält man mit dem Grenzübergang $u \rightarrow \infty$ und dem Satz von der dominierten Konvergenz:

$$\frac{c}{\lambda}(1 - U(0)) = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u U(u - x)(1 - F(x)) dx \stackrel{d.k.}{=} \int_0^\infty (1 - F(x)) dx = \mu.$$

Damit gilt $U(0) = \frac{c-\lambda\mu}{c}$ für beliebige Schadenshöhenverteilungen F (mit $\mu < \infty$). Zusammen mit der Definition von F_I erhält man:

$$U(u) = \frac{c - \lambda\mu}{c} + \frac{\lambda\mu}{c} \int_0^u U(u-x) dF_I(x).$$

Für eine Funktion $g(x)$ sei die Laplace Transformierte $\hat{g}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} g(x) dx$. Für $Re(s) > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} \hat{U}(s) &= \frac{1-\rho}{s} + \rho \hat{U}(s) \hat{f}_I(s), \\ \hat{U}(s) &= \frac{(1-\rho)/s}{1-\rho \hat{f}_I(s)} = \frac{1-\rho}{s} \sum_{n=0}^{\infty} (\rho \hat{f}_I(s))^n. \end{aligned}$$

Durch Rücktransformation erhält man:

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-\rho) \rho^n F_I^{n*}(x).$$

□

Korollar 1.5. Die Ruinwahrscheinlichkeit ist gegeben durch:

$$\Psi(u) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-\rho) \rho^n \bar{F}_I^{n*}(u). \tag{1.4}$$

Sei \bar{F}_I der Schwanz der Verteilungsfunktion F_I , \bar{N} eine geometrischverteilte Zufallsvariable mit Parameter ρ und die Zufallsvariablen X_i seien iid \bar{F}_I . Dann ist (1.4) äquivalent zu

$$\Psi(u) = P\left(\sum_{i=1}^{\bar{N}} X_i > u\right).$$

Definition 1.3. Für $i \geq 1$ sei

$$Z_i = \inf_{t>0} \{N(t) \geq i\} - \inf_{t>0} \{N(t) \geq (i-1)\}.$$

Die Zeit zwischen dem Eintreten des $(i-1)$ -ten und des i -ten Schadens.

Lemma 1.6. Seien die Z_i iid exponentialverteilt mit Parameter λ , d.h. $F_Z(x) = e^{-\lambda x}$. Dann ist $N(t)$ ein Poissonprozess mit Parameter λ .

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $N(t)$ poissonverteilt mit Parameter λt ist, d.h.

$$P(N(t) \geq n) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}.$$

Die Summe, n exponentialverteilter Zufallsvariablen, ist Gamma verteilt mit Parametern $\beta = \lambda$ und $\alpha = n$. Zusammen mit partieller Integration gilt:

$$P(N(t) \geq n) = P\left(\sum_{i=1}^n Z_i \leq t\right) = \int_0^t \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} dx = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}.$$

Es bleibt $P(N(t+h) - N(t) \geq n | N(t) = k) = P(N(h) \geq n)$ zu zeigen. Für $k \geq 0$ genügt es $P(N(t+h) - N(t) \geq n | N(t) = k) = P(N(h) \geq n)$ zu zeigen. Sei $S_m^n = \sum_{i=m}^n Z_i$, dann gilt:

$$\begin{aligned} P(N(t+h) - N(t) \geq n | N(t) = k) &= P\left(S_{k+1}^{n+k} \geq t+h - S_1^k \mid S_1^k \leq t, X_{k+1} > t - S_1^k\right) \\ &= P\left(S_{k+1}^{n+k} \geq h\right) \\ &= P(S_1^n \geq n) = P(N(h) \geq n). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Dabei folgt die Gleichung 1.5 aus $P(Z_1 \geq x+y | Z_1 \geq x) = P(Z_1 \geq y)$. □

Lemma 1.7. *Sei*

$$S_n = \sum_{i=1}^n Y_i - cZ_i.$$

Dann ist die Ruinwahrscheinlichkeit im Cramér-Lundberg-Modell gegeben durch:

$$\Psi(u) = P\left(\sup_{n \geq 1} S_n > u\right).$$

Beweis. Das Lemma folgt aus der Tatsache, dass Ruin nur durch einen Schaden eintreten kann. □

Kapitel 2

Subexponentielle Verteilungen

In der Versicherungsmathematik werden in der Regel die Verteilungen Lognormal, Pareto und Weibull (mit Parameter $\beta < 1$) verwendet. Diese Verteilungen gehören zur Klasse der subexponentiellen Verteilungen. Dieses Kapitel folgt im wesentlichen [Asm96], eine allgemeine Einführung in subexponentielle Verteilungen findet man in [PE97]

Definition 2.1 (Subexponentielle Verteilungen). Eine auf $(0, \infty)$ konzentrierte Verteilung heißt subexponentiell falls für ihre Verteilungsfunktion F ,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}^{2*}(x)}{\overline{F}(x)} = 2 \quad (2.1)$$

gilt. Man schreibt $F \in \mathcal{S}$ falls die zu F gehörende Verteilung subexponentiell ist.

Lemma 2.1. Sei F eine beliebige Verteilung auf $(0, \infty)$ und X_1, X_2 unabhängige Zufallsvariablen mit Verteilung F . Dann gelten die folgenden (Un)gleichungen:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(\max(X_1, X_2) > x)}{2\overline{F}(x)} &= 1, \\ \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}^{2*}(x)}{\overline{F}(x)} &\geq 2. \end{aligned}$$

Beweis. Mit der Formel von Inklusion und Exklusion gilt:

$$P(\max(X_1, X_2) > x) = P(X_1 > x) + P(X_2 > x) - P(X_1 > x, X_2 > x) = 2\overline{F}(x) - \overline{F}(x)^2.$$

Damit folgt der erste Teil des Lemmas.

Da F auf $(0, \infty)$ konzentriert ist gilt $\{\max(X_1, X_2) > x\} \subseteq \{X_1 + X_2 > x\}$, damit gilt:

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}^{2*}(x)}{\overline{F}(x)} \geq \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{P(\max(X_1, X_2) > x)}{\overline{F}(x)} = 2.$$

□

Aus der Definition und dem Lemma 2.1 folgt, dass sich die Summe zweier subexponentieller Zufallsvariablen gleich verhält, wie deren Maximum.

Proposition 2.2. Für $F \in \mathcal{S}$ gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} = 1.$$

Die Konvergenz ist gleichmäßig für $y \in [0, y_0]$.

Beweis. Sei zunächst y fest. Mit der Identität

$$\frac{\overline{F}^{(n+1)*}(x)}{\overline{F}(x)} = 1 + \frac{F(x) - F^{(n+1)*}(x)}{\overline{F}(x)} = 1 + \int_0^x \frac{1 - F^{n*}(x-z)}{\overline{F}(x)} dF(z), \quad (2.2)$$

und durch Unterteilen des Integrationsbereiches in $[0, y]$ und $(y, x]$ erhält man für $n = 1$

$$\frac{\overline{F}^{2*}(x)}{\overline{F}(x)} \geq 1 + F(y) + \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)}(F(x) - F(y)).$$

Falls $\limsup_{x \rightarrow \infty} \overline{F}(x-y)/\overline{F}(x) > 1$ wäre so würde $\limsup_{x \rightarrow \infty} \overline{F}^{2*}(x)/\overline{F}(y) > 1 + F(y) + 1 - F(y) = 2$ gelten, das ist ein Widerspruch zu Definition 2.1. Da für $y > 0$, $\overline{F}(x-y) \leq \overline{F}(x)$ gilt ist damit die Aussage der Proposition für festes y bewiesen.

Die gleichmäßige Konvergenz folgt aus

$$1 \leq \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} \leq \frac{\overline{F}(x-y_0)}{\overline{F}(x)} \quad \text{für alle } y \in [0, y_0].$$

□

Das folgende Resultat ist die Verallgemeinerung der Eigenschaft der Summe zweier subexponentieller Zufallsvariablen auf die Summe von n Variablen.

Proposition 2.3. *Sei $F \in \mathcal{S}$, dann gilt für alle n :*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}^{n*}(x)}{\overline{F}(x)} = n.$$

Beweis. Der Beweis wird mittels Induktion nach n geführt.

Induktionsanfang: Der Fall $n = 2$ ist genau die Definition 2.1.

Induktionsschritt: Sei $\varepsilon > 0$, und y so groß, dass $|\overline{F}^{n*}(x)/\overline{F}(x) - n| \leq \varepsilon$ für alle $x \geq y$ gilt.

Dann folgt aus der Identität (2.2):

$$\frac{\overline{F}^{(n+1)*}(x)}{\overline{F}(x)} = 1 + \int_0^{x-y} \frac{\overline{F}^{n*}(x-z)}{\overline{F}(x-z)} \frac{\overline{F}(x-z)}{\overline{F}(x)} dF(z) + \int_{x-y}^x \frac{\overline{F}^{n*}(x-z)}{\overline{F}(x-z)} \frac{\overline{F}(x-z)}{\overline{F}(x)} dF(z).$$

Das zweite Integral ist durch

$$\sup_{v \geq 0} \frac{\overline{F}^{n*}(v)}{\overline{F}(v)} \frac{F(x) - F(x-y)}{\overline{F}(x)}$$

beschränkt. Aus der Induktionsannahme und Proposition 2.2 folgt, dass diese Schranke gegen 0 konvergiert. Für das erste Integral gilt:

$$\begin{aligned} & \int_0^{x-y} \frac{\overline{F}^{n*}(x-z)}{\overline{F}(x-z)} \frac{\overline{F}(x-z)}{\overline{F}(x)} dF(z) \\ &= (n + O(\varepsilon)) \int_0^{x-y} \frac{\overline{F}(x-z)}{\overline{F}(x)} dF(z) \\ &= (n + O(\varepsilon)) \left\{ \frac{F(x) - F^{2*}(x)}{\overline{F}(x)} - \int_{x-y}^x \frac{\overline{F}(x-z)}{\overline{F}(x)} dF(z) \right\}. \end{aligned}$$

Wegen der Definition 2.1 geht der erste Term in der Klammer gegen 1. Der zweite ist durch $(F(x) - F(x-y))/\overline{F}(x)$ beschränkt und geht daher gegen 0. Diese Aussagen zusammen mit dem Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$, beweisen den Induktionsschritt. □

Lemma 2.4. Sei $F \in \mathcal{S}$ und $\varepsilon > 0$, dann gibt es eine Konstante $K = K_\varepsilon$ mit

$$\overline{F}^{n*}(x) \leq K(1 + \varepsilon)^n \overline{F}(x)$$

für alle n und x .

Beweis. Sei $\delta > 0$ definiert durch $(1 + \delta)^2 = 1 + \varepsilon$, sei T so groß, dass $(F(x) - F^{2*}(x))/\overline{F}(x) \leq 1 + \delta$ für alle $x \geq T$, sei $A = 1/\overline{F}(T)$, $\alpha_n = \sup_{x \geq 0} \overline{F}^{n*}(x)/\overline{F}(x)$. Dann gilt mit der Identität (2.2):

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &\leq 1 + \sup_{x \leq T} \int_0^x \frac{\overline{F}^{n*}(x-z)}{\overline{F}(x)} dF(z) + \sup_{x > T} \int_0^x \frac{\overline{F}^{n*}(x-z)}{\overline{F}(x-z)} \frac{\overline{F}(x-z)}{\overline{F}(x)} dF(z) \\ &\leq 1 + A + \alpha_n \sup_{x > T} \int_0^x \frac{\overline{F}(x-z)}{\overline{F}(x)} dF(z) \leq 1 + A + \alpha_n(1 + \delta). \end{aligned}$$

Zusammen mit $\alpha_1 = 1$ erhält man, dass $\alpha_n \leq K(1 + \delta)^{2n}$ mit $K = (1 + A)/\varepsilon$. \square

Es folgt nun ein hinreichendes Kriterium für $F \in \mathcal{S}$, dazu benötigt man die Hazard Rates.

Definition 2.2 (Hazard Rates). Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F und Dichte f dann definiert man die Hazard Rate als

$$\lambda(x) = \frac{f(x)}{\overline{F}(x)}$$

und die Hazard Funktion als

$$\Lambda(x) = \int_0^x \lambda(y) dy.$$

Es gilt, $f(x) = \lambda(x)e^{-\Lambda(x)}$ und $\overline{F}(x) = e^{-\Lambda(x)}$.

Lemma 2.5. Sei F eine Verteilungsfunktion mit Dichte f und Hazard Rate $\lambda(x)$. Ist $\lambda(x)$ fallend für alle $x \geq x_0$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} \lambda(x) = 0$, dann gilt $F \in \mathcal{S}$, falls

$$\int_0^\infty e^{x\lambda(x)} f(x) dx < \infty.$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, dass $\lambda(x)$ für alle $x \geq 0$ fallend ist (sonst ersetzt man F durch eine Verteilung mit gleichem Schwanz, welche eine überall fallende Hazard Rate hat). Mit der Identität (2.2) erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{F}^{2*}(x)}{\overline{F}(x)} - 1 &= \int_0^x \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} f(y) dy \\ &= \int_0^x \exp\{\Lambda(x) - \Lambda(x-y) - \Lambda(y)\} \lambda(y) dy \\ &= \int_0^{x/2} \exp\{\Lambda(x) - \Lambda(x-y) - \Lambda(y)\} \lambda(y) dy \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$+ \int_0^{x/2} \exp\{\Lambda(x) - \Lambda(x-y) - \Lambda(y)\} \lambda(x-y) dy. \quad (2.4)$$

Da $\lambda(x)$ fallend ist, gilt für $y < x/2$:

$$\Lambda(x) - \Lambda(x-y) = \int_{x-y}^x \lambda(z) dz \leq y\lambda(x-y) \leq y\lambda(y). \quad (2.5)$$

Aus der zweiten der beiden Ungleichungen 2.5 folgt, dass das Integral 2.3 durch, die nach Voraussetzung integrierbare Funktion $\exp\{y\lambda(y) - \Lambda(y)\} \lambda(y) = \exp\{y\lambda(y)\} f(y)$ beschränkt

ist. Mit der ersten Ungleichung 2.5 und $\lambda(x - y) \rightarrow 0$ für fixes y folgt, dass der Integrand 2.3 für $x \rightarrow \infty$ gegen $f(y)$ konvergiert. Mit dem Satz von der dominierten Konvergenz folgt, dass das Integral 2.3 für $x \rightarrow \infty$ gegen 1 konvergiert. Da für $y < x/2$, $\lambda(x - y) \leq \lambda(y)$ gilt, kann man die gleiche Schranke auch für das Integral 2.4 verwenden, nur dass hier der Integrand gegen 0 strebt. Daraus folgt, dass $\lim_{x \rightarrow \infty} \overline{F}^{2*}(x)/\overline{F}(x) - 1 = 1$ und damit gilt $F \in \mathcal{S}$. \square

Definition 2.3. Seien $a(x)$ und $b(x)$ zwei Funktionen. Man schreibt $a(x) \sim b(x)$ falls

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a(x)}{b(x)} = 1.$$

Lemma 2.6. Seien X_1, X_2, \dots iid mit Verteilung $F \in \mathcal{S}$ und sei N eine ganzzahlige Zufallsvariable mit $E[z^N] < \infty$ für ein $z > 1$. Dann gilt:

$$P\left(\sum_{i=1}^N X_i > u\right) \sim E[N]\overline{F}(u).$$

Beweis. In Proposition 2.3 wurde $\overline{F}^{n*}(u) \sim n\overline{F}(u)$, $u \rightarrow \infty$ gezeigt und in Lemma 2.4 wurde gezeigt, dass für alle $z > 1$ ein K existiert mit $\overline{F}^{n*}(u) \leq Kz^n\overline{F}(u)$ für alle $u > 0$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{P\left(\sum_{i=1}^N X_i > u\right)}{\overline{F}(u)} &= \lim_{u \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n) \frac{\overline{F}^{n*}(u)}{\overline{F}(u)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n) \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}^{n*}(u)}{\overline{F}(u)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n)n = E[N]. \end{aligned}$$

Dabei darf man die Summe und den Grenzwert vertauschen, da $P(N = n)Kz^n$ eine integrierbare Majorante ist. \square

Das folgende Lemma ist notwendig, wenn man Zufallsvariablen N untersucht, welche nicht die Bedingungen des Lemmas 2.6 erfüllen:

Lemma 2.7. Seien X_1, X_2, \dots iid mit Verteilung $F \in \mathcal{S}$ und sei N eine ganzzahlige Zufallsvariable. Dann gibt es ein $c > 0$ mit

$$P\left(\sum_{i=1}^N X_i > u\right) \geq c\overline{F}(u)$$

für alle $u > 0$.

Beweis. Sei n_0 eine ganze Zahl mit $P(N \leq n_0) > 0$ wegen Lemma 2.6 gibt es ein c_1 mit $P\left(\sum_{i=1}^N X_i I_{\{N \leq n_0\}} > u\right) \sim c_1\overline{F}(u)$. Daraus folgt es gibt ein u_0 mit

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^N X_i > u\right) &= P\left(\sum_{i=1}^N X_i I_{\{N \leq n_0\}} > u\right) + P\left(\sum_{i=1}^N X_i I_{\{N > n_0\}} > u\right), \\ &\geq P\left(\sum_{i=1}^N X_i I_{\{N \leq n_0\}} > u\right) \geq \frac{c_1}{2}\overline{F}(u) \quad \text{für alle } u \geq u_0. \end{aligned}$$

Für $c = \min \left\{ c_1/2, P \left(\sum_{i=1}^N X_i > u_0 \right) \right\}$ gilt:

$$P \left(\sum_{i=1}^N X_i > u \right) \geq P \left(\sum_{i=1}^N X_i > u_0 \right) \geq P \left(\sum_{i=1}^N X_i > u_0 \right) \bar{F}(u) \geq c \bar{F}(u) \quad \text{für } u < u_0,$$

$$P \left(\sum_{i=1}^N X_i > u \right) \geq \frac{c_1}{2} \bar{F}(u) \geq c \bar{F}(u) \quad \text{für } u \geq u_0.$$

□

Satz 2.8. Falls für die Schadenshöhenverteilung im Cramér-Lundberg-Modell $F_I \in \mathcal{S}$ gilt. Dann gilt für die Ruinwahrscheinlichkeit:

$$\Psi(u) \sim \frac{\rho}{1-\rho} \bar{F}_I(u), \quad u \rightarrow \infty.$$

Beweis. Aus der Pollaczek-Khinchine Formel folgt, dass $\Psi(u) = P(X_1 + X_2 + \dots + X_N > u)$ mit X_1, X_2, \dots iid mit Verteilung F_I und $P(N = n) = (1 - \rho)\rho^n$ gilt. Für alle z mit $z\rho < 1$ gilt $E[z^N] < \infty$. Mit Lemma 2.6 und $E[N] = \rho/(1 - \rho)$ folgt die Aussage des Satzes. □

2.1 Regular Varying

Eine der wichtigsten subexponentiellen Verteilungen ist die Pareto-Verteilung. Sätze über die Pareto-Verteilung stimmen oft auch für die etwas allgemeinere Klasse der Regular-Varying-Verteilungen. Ein Standardwerk dazu ist [NBT87].

Definition 2.4 (Slowly Varying). Eine positive, lebesgue-messbare Funktion L heißt slowly varying falls

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = 1, \quad \text{für alle } t > 0.$$

Satz 2.9. Sei $L(x)$ slowly varying, dann gilt

$$L(x) = c(x) \exp \left\{ \int_z^x \frac{\delta(u)}{u} du \right\}, \quad x > z, \tag{2.6}$$

dabei ist $z > 0$, δ und c sind messbare Funktionen mit $\lim_{x \rightarrow \infty} c(x) = c_0 \in (0, \infty)$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} \delta(x) = 0$. Es gilt auch die Umkehrung.

Korollar 2.10. Sei $L(x)$ slowly varying und $\varepsilon > 0$. Dann gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\varepsilon L(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-\varepsilon} L(x) = 0.$$

Eine wichtige Eigenschaft von slowly varying Funktionen ist, dass man sie in gewisser Weise mit der Integration vertauschen kann. Karamata's Satz beschreibt diese Eigenschaft, für einen Beweis siehe [Fel71].

Satz 2.11 (Karamata). Sei $L(x)$ slowly varying und lokal beschränkt in $[x_0, \infty)$ für ein $x_0 \geq 0$. Dann gilt:

- Für $\alpha > -1$

$$\int_{x_0}^x L(y) y^\alpha dy \sim (\alpha + 1)^{-1} x^{\alpha+1} L(x), \quad x \rightarrow \infty.$$

- Für $\alpha < -1$

$$\int_x^\infty L(y) y^\alpha dy \sim -(\alpha + 1)^{-1} x^{\alpha+1} L(x), \quad x \rightarrow \infty.$$

- Für $\int_{x_0}^{\infty} L(y)/y \, dy < \infty$ ist $\int_x^{\infty} L(y)/y \, dy$ slowly varying.

Definition 2.5 (Regular Varying). Eine Verteilung F heißt regular varying falls

$$\bar{F}(x) = \frac{L(x)}{(x+1)^\alpha},$$

für $L(x)$ slowly varying und $\alpha > 0$.

Satz 2.12. Jede Regular-Varying-Verteilung F ist subexponentiell.

Beweis. Sei $\bar{F}(x) = L(x)/(x+1)^\alpha$ mit $L(x)$ slowly varying und $\alpha > 0$. Sei $0 < \delta < 1/2$. Falls $X_1 + X_2 > x$, dann ist entweder eines der beiden X_i größer als $(1-\delta)x$, oder beide sind größer als δx . Daraus folgt,

$$\begin{aligned} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}^{2*}(x)}{\bar{F}(x)} &\leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{2\bar{F}((1-\delta)x) + \bar{F}(\delta x)^2}{\bar{F}(x)} \\ &= \limsup_{x \rightarrow \infty} 2 \frac{L((1-\delta)x)}{L(x)} \frac{(1+x)^\alpha}{(1+(1-\delta)x)^\alpha} + 0 = \frac{2}{(1-\delta)^\alpha}. \end{aligned}$$

Mit $\delta \rightarrow 0$ folgt $\limsup_{x \rightarrow \infty} \bar{F}^{2*}(x)/\bar{F}(x) \leq 2$. Zusammen mit Lemma 2.1 folgt $\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{F}^{2*}(x)/\bar{F}(x) = 2$. \square

Satz 2.13. Sei $\bar{F}(x) = L(x)/(1+x)^\alpha$ mit $L(x)$ slowly varying und $\alpha > 1$. Dann ist F_I regular varying.

Beweis. Sei $\mu = \int_0^\infty x \, dF(x)$. Dann gilt mit Satz 2.11

$$\bar{F}_I(x) = \frac{1}{\mu} \int_x^\infty \frac{L(y)}{(1+y)^\alpha} \, dy \sim \frac{L(x)}{(\alpha-1)\mu(1+x)^{\alpha-1}}.$$

Es bleibt zu zeigen dass $\bar{F}_I(x)(x+1)^{\alpha-1}$ slowly varying ist. Für $t > 0$ gilt,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}_I(tx)(1+tx)^{\alpha-1}}{\bar{F}_I(x)(1+x)^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = 1.$$

\square

Lemma 2.14 ([AK97]). Sei $\bar{F}(x) = L(x)/(x+1)^\alpha$ stetig, mit $L(x)$ slowly varying, dann gibt es für alle $\varepsilon > 0$ Konstanten $C_-(\varepsilon)$ und $C_+(\varepsilon)$ mit

$$C_-(\varepsilon)(x+1)^{-\alpha-\varepsilon} \leq \bar{F}\left(\frac{x}{d}\right) \leq C_+(\varepsilon)d^{\alpha-\varepsilon}(x+1)^{-\alpha+\varepsilon}$$

für alle $d \geq 1$ und $x > 0$.

Beweis. Da $L(x)$ slowly varying ist, gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} (x+1)^{-\varepsilon} L(x) = 0$, aus $F(x)$ stetig folgt, dass $L(x)$ stetig ist und aus $F \in \mathcal{S}$ folgt $\lim_{x \rightarrow 0} L(x) = 1$. Damit gibt es eine Konstante $\bar{C}_+(\varepsilon)$ mit $L(x) \leq \bar{C}_+(\varepsilon)(1+x)^\varepsilon$ für alle $x > 0$. Daraus folgt,

$$\bar{F}\left(\frac{x}{d}\right) = \frac{L(x/d)}{(1+x/d)^\alpha} \leq \bar{C}_+(\varepsilon)(1+x/d)^{\varepsilon-\alpha} = \bar{C}_+(\varepsilon)d^{\alpha-\varepsilon}(x+d)^{-\alpha+\varepsilon} \leq C_+(\varepsilon)d^{\alpha-\varepsilon}(x+1)^{-\alpha+\varepsilon}.$$

Die untere Schranke folgt analog mit $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+x)^\varepsilon L(x) = \infty$. \square

2.2 Die Lognormal-Verteilung

Definition 2.6. Die Lognormal-Verteilung wird durch die Dichte

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(\log(x) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(\log(x/\eta))^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad x > 0,$$

definiert, dabei ist $\sigma \geq 0$ und $\eta = e^\mu > 0$.

Bemerkung 2.1. Sei $\Phi(x)$ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Dann gilt für die Verteilungsfunktion einer Lognormal-Verteilung

$$F(x) = \Phi\left(\frac{\log(x) - \mu}{\sigma}\right).$$

Wir wollen zeigen, dass die Lognormal-Verteilung zur Klasse der subexponentiellen Verteilungen gehört. Dafür benötigen wir einige Ergebnisse.

Lemma 2.15. *Sei F die Verteilungsfunktion der Lognormal-Verteilung, dann gilt:*

$$\overline{F}(x) \sim G(x) = \frac{\sigma^2}{\log(x)\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(\log(x) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Beweis. Mit der Regel von de l'Hôpital gilt:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sigma^2}{\log(x)\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(\log(x) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}}{\overline{F}(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\left(\frac{\log(x) - \mu}{x \log(x)\sqrt{2\pi\sigma^2}} + \frac{\sigma^2}{x \log^2(x)\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right) \exp\left\{-\frac{(\log(x) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}}{-\frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(\log(x) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\mu}{\log(x)} + \frac{\sigma^2}{\log^2(x)}\right) = 1. \end{aligned}$$

□

Lemma 2.16. *Sei F die Verteilungsfunktion einer Lognormal-Verteilung mit $\mu > 0$ und $G(x)$ wie in Lemma 2.15. Dann gibt es ein $x_1 > 0$ mit $\overline{F}(x) > G(x)$ für alle $x > x_1$.*

Beweis. Für $g(x) = -G'(x)$ gilt:

$$\begin{aligned} g(x) &= \left(\frac{\log(x) - \mu}{x \log(x)\sqrt{2\pi\sigma^2}} + \frac{\sigma^2}{x \log^2(x)\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right) \exp\left\{-\frac{(\log(x) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \\ &= f(x) - \left(\frac{\log(x)\mu - \sigma^2}{x \log^2(x)\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right) \exp\left\{-\frac{(\log(x) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}. \end{aligned}$$

Für $x > x_1 = e^{\sigma^2/\mu}$ gilt $g(x) < f(x)$ und damit:

$$\overline{F}(x) = \int_x^\infty f(y) dy > \int_x^\infty g(y) dy = G(x).$$

□

Lemma 2.17. *Sei $\lambda(x)$ die Hazard Rate einer Lognormal-Verteilung mit $0 < \mu < \sigma^2$. Dann gibt es ein x_0 , sodass für alle $x > x_0$ $\lambda(x)$ monoton fallend ist.*

Beweis. $\lambda(x)$ ist monoton fallend für $x > x_0$, falls $\lambda'(x) \leq 0$ für alle $x > x_0$. Es muss daher

$$\lambda' = \left(\frac{f}{\bar{F}} \right)' = \frac{f'\bar{F} + f^2}{\bar{F}^2} \leq 0 \quad \text{oder} \quad -\frac{f'\bar{F}}{f^2} \geq 1$$

gelten. Aus

$$f'(x) = - \left(\frac{1}{x^2 \sqrt{2\pi\sigma^2}} + \frac{\log(x) - \mu}{x^2 \sigma^2 \sqrt{2\pi\sigma^2}} \right) \exp \left\{ -\frac{(\log(x) - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

folgt $f'(x) < 0$ für $x > e^{\mu - \sigma^2}$. Dann gilt für alle $x > x_0 = \max(x_1, e^{\mu - \sigma^2})$ mit dem x_1 aus Lemma 2.16:

$$\begin{aligned} -\frac{f'(x)\bar{F}(x)}{f(x)^2} &\geq -\frac{f'(x)G(x)}{f(x)^2} = \frac{(\log(x) + (\sigma^2 - \mu))\sigma^2(x^2 2\pi\sigma^2)}{\log(x)x^2 2\pi\sigma^4} \\ &= 1 + \frac{\sigma^2 - \mu}{\log(x)} \geq 1, \end{aligned}$$

wegen $0 < \mu < \sigma^2$. □

Lemma 2.18. *Sei $\lambda(x)$ die Hazard Rate der Lognormal-Verteilung. Dann gibt es ein x_0 sodass $\lambda(x)$ monoton fallend für alle $x > x_0$ ist.*

Beweis. Sei $s > 0$ so gewählt, dass $0 < \mu - \log(s) < \sigma^2$ gilt. Sei \bar{F}_s die Verteilungsfunktion einer Lognormal-Verteilung mit Parametern $\mu_s = \mu - \log(s)$ und $\sigma_s^2 = \sigma^2$, weiters seien f_s und λ_s analog definiert. Dann gibt es ein x_s mit $\lambda_s(x)$ ist monoton fallend für alle $x > x_s$. Es gilt

$$\begin{aligned} \lambda(sx) = \frac{f(sx)}{\bar{F}(sx)} &= \frac{\frac{1}{sx\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{(\log(sx) - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\}}{\int_{sx}^{\infty} f(y) dy} \\ &= \frac{s^{-1} \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{(\log(x) - (\mu - \log(s)))^2}{2\pi\sigma^2} \right\}}{\int_x^{\infty} s f(st) dt} \\ &= \frac{s^{-1} f_s(x)}{\int_x^{\infty} f_s(t) ds} = \frac{f_s(x)}{s\bar{F}_s(x)} = s^{-1} \lambda_s(x). \end{aligned}$$

Aus der Monotonie von $\lambda_s(x)$ folgt, dass $\lambda(sx)$ monoton fallend für alle $x > x_s$ ist, und damit ist $\lambda(x)$ fallend für alle $x > x_0 = sx_s$. □

Satz 2.19. *Die Lognormal-Verteilung ist eine subexponentielle Verteilung.*

Beweis. Nach Lemma 2.15 gilt:

$$\lambda(x) \sim \frac{\log(x)}{\sigma^2 x}.$$

Daraus folgt, dass $e^{x\lambda(x)} f(x)$ integrierbar ist. Nach dem Lemma 2.18 gibt es ein x_0 sodass $\lambda(x)$ fallend ist für alle $x > x_0$. Aus Lemma 2.5 folgt die Aussage des Satzes. □

2.3 Die Weibull-Verteilung

Definition 2.7. Eine Verteilung mit Verteilungsfunktion F heißt Weibull-Verteilung, falls

$$\bar{F}(x) = \exp \left\{ -\gamma x^\beta \right\},$$

mit $\gamma > 0$ und $\beta > 0$ ist.

Satz 2.20. *Eine Weibull-Verteilung mit $0 < \beta < 1$ ist eine subexponentielle Verteilung.*

Beweis. Für die Hazard Rate einer Weibull-Verteilung gilt:

$$\lambda(x) = \beta\gamma x^{\beta-1}.$$

Damit ist $\lambda(x)$ monoton fallend für alle $x > 0$ und $e^{x\lambda(x)}f(x) = \gamma\beta x^{\beta-1}e^{-\gamma(1-\beta)x^\beta}$ ist integrierbar. Mit Lemma 2.5 folgt die Aussage des Satzes. \square

Kapitel 3

Quasi Monte Carlo Methoden

3.1 Monte Carlo Methode

Die in dieser Diplomarbeit betrachteten Probleme lassen sich als Integrale über das s -dimensionale Einheitsintervall $\bar{I}^s = [0, 1]^s$ schreiben, dabei kann s auch den Wert ∞ annehmen. In diesem Kapitel werden Methoden vorgestellt um solche Integrale numerisch zu berechnen. Die erste Methode welche hier beschrieben wird ist die Monte Carlo Methode. Ein Standardwerk zu diesem Thema ist [Gla03]

Sei X_1, X_2, \dots eine Folge unabhängiger auf \bar{I}^s gleichverteilter Zufallsvariablen, dann kann man das Integral einer Funktion f über \bar{I}^s durch

$$I = I(f) = \int_{\bar{I}^s} f(x) dx \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) \quad (3.1)$$

approximieren. Dabei ist $N > 0$ eine ganze Zahl und (x_1, \dots, x_N) ist eine Realisation des Zufallsvektors (X_1, \dots, X_N) . Falls für das Integral $I(f) < \infty$ gilt, dann folgt aus dem starken Gesetz der großen Zahlen, dass fast sicher

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) = \int_{\bar{I}^s} f(x) dx$$

gilt. Bevor wir zur Analyse des Approximationsfehlers kommen, stellen wir noch eine Verallgemeinerung dieser Methode vor.

Definition 3.1 (Schätzer). Eine Zufallsvariable Y heißt (Monte Carlo) Schätzer für das Integral $I(f)$, falls

$$E[Y] = \int_{\bar{I}^s} f(x) dx.$$

Man spricht hier auch von einem erwartungstreuen Schätzer.

Mit einem Schätzer Y für $I(f)$ und einer Folge iid verteilter Zufallsvariablen $(Y_i)_{i \geq 0}$, wobei Y_1 die gleiche Verteilung wie Y hat, kann man $I(f)$ durch

$$\int_{\bar{I}^s} f(x) dx \approx \bar{Y}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i$$

approximieren. Dabei ist (y_1, \dots, y_N) eine Realisation des Zufallsvektors (Y_1, \dots, Y_N) . Im weiteren wird diese Methode als Monte Carlo Methode bezeichnet. Mit dem starken Gesetz der großen Zahlen gilt:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i = \int_{\bar{I}^s} f(x) dx.$$

Bemerkung 3.1. Falls man $Y = f(X)$ mit X auf \bar{I}^s gleichverteilt wählt, so erhält man die einfache Monte Carlo Methode.

Sei $\varepsilon_N(f) = \int_{\bar{I}^s} f(x) dx - 1/N \sum_{i=1}^N y_i$ der Approximationsfehler. Falls $\sigma^2 = \text{Var}[Y] < \infty$, dann gilt mit dem zentralen Grenzwertsatz, dass die Verteilung von $\sqrt{N}/\sigma \varepsilon_N(f)$ gegen eine Standardnormalverteilung strebt, d.h.

$$\frac{\sqrt{N}}{\sigma} \varepsilon_N(f) = \frac{\sqrt{N}}{\sigma} \left(\int_{\bar{I}^s} f(x) dx - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \right) \xrightarrow{d} Z.$$

Dabei ist Z eine standardnormalverteilte Zufallsvariable. Sei $q_{1-\delta/2}$ das $100(1-\delta/2)\%$ Quantil der Standardnormalverteilung, dann approximiert man das $100(1-\delta)\%$ Konfidenzintervall durch:

$$\left[\bar{Y}_N - q_{1-\delta/2} \sqrt{S_N(Y)/N}, \bar{Y}_N + q_{1-\delta/2} \sqrt{S_N(Y)/N} \right].$$

Dabei ist $S_N(Y) = 1/(N-1) \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y}_N)^2$ der erwartungstreue Schätzer für $\text{Var}[Y]$. Das heißt, dass für den Fehler $\varepsilon_N(f) = O(N^{-1/2})$ gilt.

Bemerkung 3.2. Ein Nachteil der Monte Carlo Methode ist, dass die hier gegebene Fehler-schranke nur stochastisch ist, das heißt, dass der wahre Fehler auch größer sein kann.

Bemerkung 3.3. Ein Problem der Monte Carlo Methode ist, dass man auf einem Computer nur schwer echte Zufallsvariablen erzeugen kann. Man verwendet daher, deterministische Folgen welche sich bei statistischen Tests ähnlich verhalten wie echte Zufallsvariablen (siehe z.B.: [L'E05]).

3.1.1 Die Inversionsmethode

Lemma 3.1 (Inversionsmethode). *Sei Y eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F und X eine gleichverteilte Zufallsvariable auf $(0, 1)$. Weiters sei $G(u) = \min \{t \in \mathbb{R} | F(t) \geq u\}$. Dann hat die Zufallsvariable $G(X)$ die gleiche Verteilung wie Y .*

Beweis. Es gilt

$$P(G(X) \leq x) = P(X \leq F(x)) = F(x) = P(Y \leq x).$$

□

Bemerkung 3.4. Sei $Y = (Y_1, \dots, Y_s)$ ein Vektor unabhängiger Zufallsvariablen, weiters sei F_i die Verteilungsfunktion von Y_i , $G_i(u) = \min \{t \in \mathbb{R} | F_i(t) \geq u\}$ und $G((u_1, \dots, u_s)) = (G_1(u_1), \dots, G_s(u_s))$. Sei $f(Y)$ eine meßbare Funktion und $X = (X_1, \dots, X_s)$ ein s -dimensionale gleichverteilter Zufallsvektor. Dann gilt $E[f(Y)] = E[f(G(X))]$.

3.2 Methoden zur Varianzreduktion

Der Approximationsfehler ε_N hängt im Wesentlichen von der Varianz des Schätzers Y und der Anzahl der Iterationen N ab. In diesem Kapitel werden Methoden vorgestellt um die Varianz eines Schätzers Y zu verkleinern.

3.2.1 Bedingtes Monte Carlo

Falls man einen Schätzer Y und eine weitere Zufallsvariable Z hat, dann ist $Y' = E[Y|Z]$ eine neue Zufallsvariable mit $E[Y'] = E[E[Y|Z]] = E[Y]$ und daher wieder ein Monte Carlo Schätzer. Für dessen Varianz gilt:

Lemma 3.2. Für zwei quadratisch integrierbare Zufallsvariablen Y und Z sei $Y' = E[Y|Z]$ die bedingte Erwartung von Y gegeben Z . Dann gilt:

$$\text{Var}[Y] = \text{Var}[Y'] + E[\text{Var}[Y|Z]].$$

Beweis. Mit den Rechenregeln für bedingte Erwartungen gilt:

$$\begin{aligned} \text{Var}[Y] &= E[(Y - E[Y])^2] = E[E[(Y - E[Y])^2|Z]] \\ &= E[E[Y^2|Z] - E[E[Y|Z]]^2] \\ &= E[E[Y|Z]^2] - E[E[Y|Z]]^2 + E[E[Y^2|Z] - E[Y|Z]^2] \\ &= \text{Var}[E[Y|Z]] + E[\text{Var}[Y|Z]] = \text{Var}[Y'] + E[\text{Var}[Y|Z]]. \end{aligned}$$

□

Aus Lemma 3.2 folgt

$$\text{Var}[Y'] \leq \text{Var}[Y].$$

Somit führt bedingtes Monte Carlo immer zu einer Varianzreduktion. Man muss aber beachten, dass der bedingte Schätzer Y' mehr Zeit zur Berechnung brauchen kann und so eine eventuelle Varianzreduktion wieder zunichte macht.

3.2.2 Importance Sampling

Bei der Monte Carlo Methode wird das Integral $I = I(f)$ mit einer Zufallsvariable Y mit $E[Y] = I$ approximiert dabei liegt Y ein Wahrscheinlichkeitsmaß P zugrunde. Sei $\bar{P}(A) = P(A \cap \{Y \neq 0\})$ das Maß P eingeschränkt auf $\{Y \neq 0\}$. Die Idee beim Importance Sampling ist es Y nach einem neuen Maß Q zu simulieren. Wobei Q ein zu \bar{P} äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß ist (d.h. die jeweiligen Nullmengen stimmen überein). Sei $L = \frac{d\bar{P}}{dQ}$, die Radon-Nikodym-Dichte von \bar{P} bezüglich Q . Dann gilt:

$$I = E_P[Y] = E_Q[LY].$$

Man kann LY als neuen Monte Carlo Schätzer verwenden, muss aber nach dem neuen Maß Q simulieren. Ob eine Varianzreduktion erreicht wird hängt vom neuen Maß Q ab. Außerdem kann es schwierig oder zeitaufwendig sein nach dem neuen Maß zu simulieren. Die Wahl des Maßes Q ist entscheidend für die Qualität des neuen Schätzers. Falls $E_P[Y] \neq 0$ und $Y \geq 0$ gibt es ein optimales Q^* , definiert durch $\frac{dQ^*}{dP} = Y/E_P[Y]$. Dann gilt: $L = E_P[Y]/Y$ und $LY = E_P[Y] = I$ also ist der neue Schätzer konstant und damit gilt $\text{Var}_Q[LY] = 0$. Man kann diesen Schätzer nicht verwenden, da er die Kenntnis von I voraussetzt, man sollte aber Q möglichst ähnlich zu Q^* wählen.

Für die Varianz von LY gilt:

$$\text{Var}_Q[LY] = E_Q[(LY)^2] - (E_Q[LY])^2 = E_Q[(LY)^2 I_{\{Y \neq 0\}}] - I^2 = E_P[LY^2] - I^2.$$

Das heißt, dass $\text{Var}_Q[LY]$ nur von $E_P[LY^2]$ abhängt.

3.2.2.1 Cross Entropy Methode

Beim Importance Sampling ist die richtige Wahl des neuen Maßes Q^* von entscheidender Bedeutung. Gehen wir einmal davon aus, dass wir $Q = Q_\theta$ aus einer parametrisierten Familie von Maßen $\{Q_\theta, \theta \in \Theta\}$ wählen. Die Cross Entropy Methode ist eine Methode um ein Q möglichst nahe bei dem optimalem Maß Q^* zu bekommen, sie wurde von Reuven Y. Rubinstein

[Rub97] zur Simulation seltener Ereignisse entwickelt. Man verwendet als Maß für die Distanz zweier Maße die Kullback-Leibler Distanz

$$\mathcal{D}(Q^*, Q) = E_{Q^*} \left[\log \left(\frac{dQ^*}{dQ} \right) \right]. \quad (3.2)$$

Man wählt nun Q durch

$$\mathcal{D}(Q^*, Q) = \min_{\theta \in \Theta} \mathcal{D}(Q^*, Q_\theta). \quad (3.3)$$

Seien P und Q_θ stetig bezüglich eines Maßes μ dabei habe P die Dichte $f(x)$ und Q_θ die Dichte $g(x|\theta)$. Dann ist die Dichte von Q^* gegeben durch $f_{Q^*}(x) = (Y(x)/I)f(x)$ und es gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(Q^*, Q) &= \int \frac{Y(x)}{I} f(x) \log \left(\frac{Y(x)f(x)/I}{g(x|\theta)} \right) d\mu(x) \\ &= \int \frac{Y(x)}{I} f(x) \log \left(\frac{Y(x)}{I} f(x) \right) d\mu(x) - \frac{1}{I} \int Y(x) f(x) \log(g(x|\theta)) d\mu(x). \end{aligned}$$

Sei X eine Zufallsvariable mit Bildmaß P und $Y = Y(X)$. Dann ist

$$\max_{\theta \in \Theta} E_P[Y(X) \log(g(X|\theta))] \quad (3.4)$$

eine zu (3.3) äquivalente Optimierungsaufgabe. Sei X_1, X_2, \dots iid mit der gleichen Verteilung wie X und x_1, x_2, \dots eine Realisation von X_1, X_2, \dots . Dann kann man mit Hilfe der Monte Carlo Methode (3.4) durch

$$\max_{\theta \in \Theta} \sum_{i=1}^N Y(x_i) \log(g(x_i|\theta))$$

näherungsweise Lösen.

3.2.3 Kontrollvariablen

Falls man zu dem Monte Carlo Schätzer Y eine korrelierte Zufallsvariable G kennt von welcher der Erwartungswert $g = E[G]$ bekannt ist, so kann man den Kontrollvariablen Schätzer

$$Y' = Y - \beta(G - E[G])$$

als neuen Schätzer verwenden. Für dessen Varianz gilt:

$$\begin{aligned} \text{Var}[Y'] &= E \left[(Y - \beta(G - g) - E[Y] + E[\beta(G - g)])^2 \right] \\ &= E[(Y - E[Y])^2] - 2E[(Y - E[Y])(\beta(G - g) - E[\beta(G - g)])] \\ &\quad + E[(\beta(G - g) - E[\beta(G - g)])^2] \\ &= \text{Var}[Y] - 2\beta \text{Cov}[Y, G] + \beta^2 \text{Var}[G]. \end{aligned}$$

Der optimale Wert für β wird durch die Lösung der Gleichung

$$\frac{d}{d\beta} (2\beta \text{Cov}[Y, G] - \beta^2 \text{Var}[G]) = 0$$

festgelegt. Löst man diese Gleichung so erhält man für den optimalen Wert $\beta = \beta^* = \text{Cov}[Y, G]/\text{Var}[G]$. Dann gilt für die Varianz von Y' :

$$\begin{aligned} \text{Var}[Y'] &= \text{Var}[Y] - 2 \frac{(\text{Cov}[Y, G])^2}{\text{Var}[G]} + \frac{(\text{Cov}[Y, G])^2}{\text{Var}[G]} \\ &= \text{Var}[Y] - \frac{(\text{Cov}[Y, G])^2}{\text{Var}[G]}. \end{aligned}$$

Man sieht, dass diese Methode bei Verwendung des optimalen β^* immer zu einer Varianzreduktion führt. Vergleicht man die Varianzen der beiden Schätzer so erhält man:

$$\frac{\text{Var}[Y']}{\text{Var}[Y]} = 1 - \frac{(\text{Cov}[Y, G])^2}{\text{Var}[Y]\text{Var}[G]} = 1 - \rho_{YG}^2.$$

Man sieht, dass die Varianzreduktion umso größer ist je größer die Korrelation von Y und G ist.

3.2.4 Stratified Sampling

Der Monte Carlo Schätzer Y ist eine Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Sei $A_1, A_2, \dots, A_k \in \mathcal{A}$ eine disjunkte Zerlegung von Ω mit $\mu(A_j) > 0$ für $1 \leq j \leq k$, seien $N_1, N_2, \dots, N_k \in \mathbb{N}$, sodass $\sum_{j=1}^k N_j = N$, für $A \in \mathcal{A} \cap A_j$ sei $\mu_j(A) = \mu(A)/\mu(A_j)$ das durch μ auf A_j gegebene Wahrscheinlichkeitsmaß und $a_1^{(j)}, a_2^{(j)}, \dots, a_{N_j}^{(j)} \in A_j$ eine unabhängige Stichprobe bezüglich μ_j . Dann kann man $E[Y]$ durch

$$E[Y] = \sum_{j=1}^k \int_{A_j} Y d\mu = \sum_{j=1}^k \mu(A_j) \int_{A_j} Y d\mu_j \approx \sum_{j=1}^k \frac{\mu(A_j)}{N_j} \sum_{i=1}^{N_j} Y(a_i^{(j)})$$

approximieren. Die Varianz dieses Schätzers ist durch

$$\sum_{j=1}^k \frac{\mu(A_j)}{N_j} \int_{A_j} \left(Y - \frac{1}{\mu(A_j)} \int_{A_j} Y d\mu \right)^2 d\mu$$

gegeben. Die Frage ist wie man die N_j wählen muss um eine Varianzreduktion zu gewährleisten. Eine mögliche Antwort ist.

Lemma 3.3. Falls $N_j = \mu(A_j)N$, $1 \leq j \leq k$, ganze Zahlen sind Dann gilt:

$$\sum_{j=1}^k \frac{\mu(A_j)}{N_j} \int_{A_j} \left(Y - \frac{1}{\mu(A_j)} \int_{A_j} Y d\mu \right)^2 d\mu \leq \frac{\text{Var}[Y]}{N},$$

womit eine Varianzreduktion garantiert ist.

Beweis. Wegen der Wahl von N_j genügt es,

$$\sum_{j=1}^k \int_{A_j} \left(Y - \frac{1}{\mu(A_j)} \int_{A_j} Y d\mu \right)^2 d\mu \leq \int_{\Omega} (Y - E[Y])^2 d\mu$$

zu zeigen. Wenn man auf beiden Seiten ausquadrirt sieht man, dass dies äquivalent zu

$$E[Y]^2 \leq \sum_{j=1}^k \frac{1}{\mu(A_j)} \left(\int_{A_j} Y d\mu \right)^2$$

ist. Die letzte Ungleichung bekommt man aus der Cauchy-Schwarz Ungleichung durch:

$$\begin{aligned} E[Y]^2 &= \left(\sum_{j=1}^k \int_{A_j} Y d\mu \right)^2 = \left(\sum_{j=1}^k \mu(A_j)^{1/2} \frac{1}{\mu(A_j)^{1/2}} \int_{A_j} Y d\mu \right)^2 \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^k \mu(A_j) \right) \sum_{j=1}^k \frac{1}{\mu(A_j)} \left(\int_{A_j} Y d\mu \right)^2 = \sum_{j=1}^k \frac{1}{\mu(A_j)} \left(\int_{A_j} Y d\mu \right)^2. \end{aligned}$$

□

3.3 Quasi Monte Carlo Methoden

Quasi Monte Carlo Methoden gelten als deterministische Version der Monte Carlo Methoden, da wie bei der Monte Carlo Methode das zu berechnende Integral durch

$$\int_{\bar{I}^s} f(x) dx \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) \quad (3.5)$$

approximiert wird, wobei in diesem Fall $x_1, \dots, x_N \in \bar{I}^s$ eine Folge deterministischer Punkte ist. Es stellen sich nun drei Fragen. Erstens, unter welchen Bedingungen gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) = \int_{\bar{I}^s} f(x) dx. \quad (3.6)$$

Zweitens, wie groß ist der Approximationsfehler

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) - \int_{\bar{I}^s} f(x) dx \right|. \quad (3.7)$$

Drittens, wie konstruiert man eine Folge für die (3.6) gilt und (3.7) klein ist. Diese drei Fragen sind der Inhalt dieses Kapitels, das im Wesentlichen [Nie92] folgt.

3.3.1 Diskrepanz

Definition 3.2 (Gleichverteilung). Eine deterministische Punktfolge, $x_1, x_2, \dots \in \bar{I}^s$, heißt gleichverteilt, falls

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_J(x_i) = \lambda_s(J), \quad (3.8)$$

für alle Teilintervalle $J \in \bar{I}^s$, gilt. Dabei ist I_J die Charakteristische Funktion von J und λ_s das s -dimensionale Lebesgue-Maß.

Gleichverteilte Punktfolgen sind, in der Theorie von Quasi Monte Carlo Methoden, deswegen wichtig, weil man zeigen kann, dass für sie Gleichung (3.6) für alle Riemann integrierbaren Funktionen f gilt (siehe [KN74]).

Um ein Maß für die Gleichverteilung einer Punktmenge $P = (x_1, \dots, x_N)$ zu bekommen, definiert man einen allgemeinen Diskrepanzbegriff:

$$D_N(\mathcal{B}; P) = \sup_{B \in \mathcal{B}} \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_B(x_i) - \lambda_s(B) \right|,$$

für \mathcal{B} eine geeignete Menge von Teilmengen von \bar{I}^s . Durch Einschränkungen an die Menge \mathcal{B} erhält man die zwei wohl wichtigsten Diskrepanzbegriffe:

Definition 3.3 (Stern Diskrepanz). Die Stern Diskrepanz $D_N^*(P) = D_N^*(x_1, \dots, x_N)$ einer Punktmenge P ist definiert als $D_N^*(P) = D_N(\mathcal{J}^*; P)$, wobei \mathcal{J}^* die Familie aller Teilintervalle von \bar{I}^s der Form $\prod_{i=1}^s [0, u_i]$ ist.

Definition 3.4 (extreme Diskrepanz). Die extreme Diskrepanz $D_N(P) = D_N(x_1, \dots, x_N)$ einer Punktmenge P ist definiert als $D_N(P) = D_N(\mathcal{J}; P)$, wobei \mathcal{J} die Familie aller Teilintervalle von \bar{I}^s der Form $\prod_{i=1}^s [u_i, v_i]$ ist.

Für diese beiden Diskrepanzen gilt:

Proposition 3.4. Für jede Punktmenge P bestehend aus Punkten von \bar{I}^s gilt:

$$D_N^*(P) \leq D_N(P) \leq 2^s D_N^*.$$

Beweis. Dabei ist die erste Ungleichung trivial. Für $s = 1$ bekommt man die zweite Ungleichung aus

$$\sum_{i=1}^N I_{[u,v]}(x_i) = \sum_{i=1}^N I_{[0,v]}(x_i) - \sum_{i=1}^N I_{[0,u]}(x_i), \quad \lambda_1([u,v]) = \lambda_1([0,v]) - \lambda_1([0,u]),$$

und für $s \geq 2$ bekommt man sie mit dem Prinzip von Inklusion und Exklusion mit analogen Gleichungen. \square

Man kann folgende Ungleichungen zeigen (siehe [Nie92]).

Satz 3.5. Sei $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_N \in \bar{I}^s$, dann gilt

$$D_N^*(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{2N} + \max_{1 \leq i \leq N} \left| x_i - \frac{2i-1}{2N} \right|, \quad (3.9)$$

$$D_N(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{N} + \max_{1 \leq i \leq N} \left(\frac{i}{N} - x_i \right) - \min_{1 \leq i \leq N} \left(\frac{i}{N} - x_i \right). \quad (3.10)$$

Für eine Folge von Punkten S aus \bar{I}^s schreiben wir $D_N(S)$ für die extreme Diskrepanz und $D_N^*(S)$ für die Stern Diskrepanz der ersten N Folgenglieder von S . Ein klassisches Resultat in der Theorie der gleichverteilten Punktfolgen ist (siehe [KN74])

Satz 3.6. Für eine Folge von Punkten S aus \bar{I}^s sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) S ist gleichverteilt in \bar{I}^s ,
- (ii) $\lim_{N \rightarrow \infty} D_N(S) = 0$,
- (iii) $\lim_{N \rightarrow \infty} D_N^*(S) = 0$.

3.3.2 Fehlerschranken

In diesem Kapitel wollen wir Abschätzungen für den Approximationsfehler (3.7) finden. Zum besseren Verständniss betrachten wir zunächst den Fall $s = 1$. Ein klassisches Resultat hierfür ist die folgende Ungleichung von Koksma [Kok43] für Funktionen von beschränkter Variation, d.h.

$$V(f) = \sup_{\xi \in \Xi} \sum_{i=1}^{K_\xi-1} |f(\xi_i) - f(\xi_{i+1})| < \infty.$$

Ξ bezeichnet die Menge aller Zerlegungen $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{K_\xi})$, $0 = \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_{K_\xi} = 1$.

Satz 3.7 (Koksma Ungleichung). Falls die Funktion f auf $[0, 1]$ von beschränkter Variation $V(f)$ ist. Dann gilt für alle $x_1, \dots, x_N \in [0, 1]$:

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) - \int_0^1 f(u) du \right| \leq V(f) D_N^*(x_1, \dots, x_N).$$

Beweis. Wir nehmen an, dass $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_N$ gilt. Sei $x_0 = 0$ und $x_{N+1} = 1$. Mit Partieller Summation und Integration, erhält man

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) - \int_0^1 f(u) du &= - \sum_{i=0}^N \frac{i}{N} (f(x_{i+1}) - f(x_i)) + \int_0^1 u df(u) \\ &= \sum_{i=0}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(u - \frac{i}{N} \right) df(u). \end{aligned}$$

Für ein i , mit $0 \leq i \leq N$ und $x_i \leq u \leq x_{i+1}$ gilt:

$$\left| u - \frac{i}{N} \right| = \left| \lambda_1([0, u]) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_{[0, u]}(x_i) \right| \leq D_N^*(x_1, \dots, x_N),$$

und damit die gewünschte Ungleichung. \square

Für stetige Funktionen auf $[0, 1]$, sei

$$\omega(f; t) = \sup_{\substack{u, v \in [0, 1] \\ |u-v| \leq t}} |f(u) - f(v)| \quad \text{für } t \geq 0.$$

Die folgende Fehlerschranke für stetige Integranden wurde von Niederreiter [Nie72] eingeführt.

Satz 3.8. *Sei f stetig auf $[0, 1]$. Dann gilt für alle $x_1, \dots, x_N \in [0, 1]$:*

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) - \int_0^1 f(u) du \right| \leq \omega(f; D_N^*(x_1, \dots, x_N)).$$

Beweis. Sei $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_N$. Mit dem Mittelwert-Satz für Integrale, folgt:

$$\int_0^1 f(u) du = \sum_{i=1}^N \int_{(i-1)/N}^{i/N} f(u) du = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(t_i),$$

mit $(i-1)/N < t_i < i/N$. Damit gilt:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) - \int_0^1 f(u) du = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (f(x_i) - f(t_i)).$$

Da nach Satz 3.5 $|x_i - t_i| \leq D_N^*(x_1, \dots, x_N)$ gilt, folgt daraus das Resultat. \square

Definition 3.5. Sei \mathcal{M} eine nicht leere Menge von messbaren Teilmengen von \bar{I}^s . Eine Punktmenge $P = (x_1, \dots, x_N) \in \bar{I}^s$ heißt (\mathcal{M}, λ_s) -gleichförmig, falls:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_M(x_i) = \lambda_s(M), \quad \text{für alle } M \in \mathcal{M}.$$

Definition 3.6. Für $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_k\}$ sei

$$G_j(f) = \sup_{t \in M_j} f(t), \quad g_j(f) = \inf_{t \in M_j} f(t) \quad \text{für } 1 \leq j \leq k.$$

Satz 3.9 ([Nie03]). *Sei $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_k\}$ eine Partition von \bar{I}^s , mit M_j messbar für $1 \leq j \leq k$. Dann gilt für jede (\mathcal{M}, λ_s) -gleichförmige Punktmenge $P = (x_1, \dots, x_N)$ und jede beschränkte integrierbare Funktion f auf \bar{I}^s :*

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) - \int_{\bar{I}^s} f(u) du \right| \leq \sum_{j=1}^k \lambda_s(M_j) (G_j(f) - g_j(f)).$$

Beweis. Da \mathcal{M} eine Partition von \bar{I}^s ist gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) - \int_{\bar{I}^s} f(u) du &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^k \sum_{\substack{i=1 \\ x_i \in M_j}}^N f(x_i) - \sum_{j=1}^k \int_{M_j} f(u) du \\ &= \sum_{j=1}^k \left(\frac{1}{N} \sum_{\substack{i=1 \\ x_i \in M_j}}^N f(x_i) - \int_{M_j} f(u) du \right). \end{aligned}$$

Aus Definition 3.6 folgt:

$$\lambda_s(M_j)g_j(f) \leq \int_{M_j} f(u) du \leq \lambda_s(M_j)G_j(f), \quad \text{für } 1 \leq j \leq k.$$

Des Weiteren gilt:

$$\sum_{i=1}^N I_{M_j}(x_i)g_j(f) \leq \sum_{\substack{i=1 \\ x_i \in M_j}}^N f(x_i) \leq \sum_{i=1}^N I_{M_j}(x_i)G_j(f), \quad \text{für } 1 \leq j \leq k.$$

Da P eine (\mathcal{M}, λ_s) -gleichförmige Punktmenge ist folgt:

$$\lambda_s(M_j)g_j(f) \leq \frac{1}{N} \sum_{\substack{i=1 \\ x_i \in M_j}}^N f(x_i) \leq \lambda_s(M_j)G_j(f), \quad \text{für } 1 \leq j \leq k.$$

Daraus folgt:

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{\substack{i=1 \\ x_i \in M_j}}^N f(x_i) - \int_{M_j} f(u) du \right| \leq \lambda_s(M_j)(G_j(f) - g_j(f)), \quad \text{für } 1 \leq j \leq k,$$

und damit die Aussage des Satzes. \square

Um Satz 3.7 auf mehrere Dimensionen zu erweitern braucht man einen Variationsbegriff für Funktionen in mehreren Variablen. Für eine Funktion f auf \bar{I}^s und ein Teilintervall $J = \prod_{i=1}^s [u_i, v_i]$ von \bar{I}^s sei

$$\Delta(f; J) = \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s) \in \{0,1\}^s} (-1)^{\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_s} f(\varepsilon_1 u_1 + (1 - \varepsilon_1)v_1, \dots, \varepsilon_s u_s + (1 - \varepsilon_s)v_s)$$

Definition 3.7 (Variation nach Vitali). Für eine Funktion f auf \bar{I}^s definiert man die Variation nach Vitali durch:

$$V^{(s)}(f) = \sup_{\mathcal{P}} \sum_{J \in \mathcal{P}} |\Delta(f; J)|,$$

wobei das Supremum über alle Partitionen \mathcal{P} , die \bar{I}^s in Intervalle teilen, gebildet wird. Für $1 \leq k \leq s$ und $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq s$, sei $V^{(k)}(f; i_1, \dots, i_k)$ die k -dimensionale Variation nach Vitali eingeschränkt auf $\{(u_1, \dots, u_s) \in \bar{I}^s : u_j = 1 \text{ für } j \neq i_1, \dots, i_k\}$.

Die einfachere Formel

$$V^{(s)} = \int_0^1 \dots \int_0^1 \left| \frac{\partial^s f}{\partial u_1 \dots \partial u_s} \right| du_1 \dots du_s \quad (3.11)$$

gilt, wann immer die verwendete partielle Ableitung stetig auf \bar{I}^s ist.

Definition 3.8 (Variation nach Hardy und Krause). Die Variation einer Funktion f auf \bar{I}^s nach Hardy und Krause ist:

$$V(f) = \sum_{k=1}^s \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq s} V^{(k)}(f; i_1, \dots, i_k).$$

Man sagt eine Funktion f ist von beschränkter Variation, falls $V(f)$ endlich ist.

Damit können wir die Ungleichung von Hlawka (siehe [Hla61]) aufschreiben.

Satz 3.10 (Koksma-Hlawka Ungleichung). Wenn f eine beschränkte Variation auf \bar{I}^s hat. Dann gilt für alle $x_1, \dots, x_N \in \bar{I}^s$:

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) - \int_{\bar{I}^s} f(u) du \right| \leq V(f) D_N^*(x_1, \dots, x_N).$$

Es gibt auch eine mehrdimensionale Version von Satz 3.8. Dazu benötigt man:

$$\omega(f; t) = \sup_{\substack{u, v \in \bar{I}^s \\ \|u-v\| \leq t}} |f(u) - f(v)| \quad \text{für } t \geq 0, \quad (3.12)$$

wobei $\|u\| = \max_{1 \leq i \leq s} |u_i|$ für $u = (u_1, \dots, u_s) \in \mathbb{R}^s$ ist. Die folgende Schranke stammt von Proinov [Pro88].

Satz 3.11. Sei f stetig auf \bar{I}^s . Dann gilt für alle $x_1, \dots, x_N \in \bar{I}^s$:

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) - \int_{\bar{I}^s} f(u) du \right| \leq 4\omega(f; D_N^*(x_1, \dots, x_N)^{1/s}).$$

Für $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_k\}$ sei

$$\delta(\mathcal{M}) = \max_{1 \leq j \leq k} \sup_{u, v \in M_j} \|u - v\|.$$

Der folgende Satz gibt für stetige Funktionen und spezielle Werte von N eine bessere Schranke des Approximationsfehlers an als Satz 3.11.

Satz 3.12 ([Nie03]). Sei $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_k\}$ eine Partition von \bar{I}^s , mit M_j messbar für $1 \leq j \leq k$. Dann gilt für jede (\mathcal{M}, λ_s) -gleichförmige Punktmenge $P = (x_1, \dots, x_N)$ und jede beschränkte integrierbare Funktion f auf \bar{I}^s :

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) - \int_{\bar{I}^s} f(u) du \right| \leq \omega(f; \delta(\mathcal{M})).$$

3.3.3 Folgen kleiner Diskrepanz

Wir kommen nun zur dritten Frage die am Anfang dieses Kapitels gestellt wurde nämlich zur Konstruktion von Folgen die (3.6) erfüllen und für die (3.7) klein ist. Nach den Ergebnissen des letzten Kapitels wissen wir, dass wir Folgen mit "kleiner" Diskrepanz suchen. Eine wichtige Frage ist, wie klein die Diskrepanz einer Folge minimal sein kann. Man vermutet, dass für beliebiges s und jede s -dimensionale Folge S

$$D_N^*(S) \geq B_s N^{-1} (\log(N))^s \quad \text{für unendliche viele } N,$$

gilt, kann jedoch nur für beliebiges s und jede s -dimensionale Folge S

$$D_N^*(S) \geq B_s N^{-1} (\log(N))^{s/2} \quad \text{für unendliche viele } N,$$

zeigen. Damit kommt man zu folgender Definition.

Definition 3.9 (Folgen kleiner Diskrepanz). Eine s -dimensionale Folge von Punkten S aus \bar{I}^s heißt Folge kleiner Diskrepanz, falls

$$D_N^*(S) = O(N^{-1}(\log(N))^s)$$

gilt.

3.3.4 Halton Folge

Die erste Folge kleiner Diskrepanz, die hier beschrieben wird, ist die Halton Folge [Hal60]. Für eine ganze Zahl $b \geq 2$, sei $Z_b = \{0, 1, \dots, b-1\}$, d.h. Z_b ist das kleinste Restsystem modulo b . Jede Zahl $n \geq 0$ hat eine eindeutige Entwicklung

$$n = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(n)b^i \quad (3.13)$$

zur Basis b , wobei $a_i(n) \in Z_b$ für alle $i \geq 0$ und es sind nur endlich viele $a_i(n)$ ungleich Null.

Definition 3.10. Für eine ganze Zahl $b \geq 2$ wird die Radikal-Inverse-Funktion ϕ_b zur Basis b definiert als

$$\phi_b(n) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(n)b^{-(i+1)},$$

wobei die positive Zahl n in ihrer Ziffernentwicklung (3.13) gegeben ist.

Definition 3.11 (van der Corput Folgen). Für eine ganze Zahl $b \geq 2$ ist die van der Corput Folge $(x_n)_{n \geq 1}$ zur Basis b gegeben durch $x_n = \phi_b(n)$.

Das Konzept der van der Corput Folgen kann man leicht auf mehrere Dimensionen erweitern und erhält.

Definition 3.12 (Halton Folge). Für $s \geq 1$ und b_1, \dots, b_s ganze Zahlen größer oder gleich 2, ist die Halton Folge in der Basis b_1, \dots, b_s gegeben durch

$$x_n = (\phi_{b_1}(n), \dots, \phi_{b_s}(n)) \in I^s = [0, 1]^s \quad \text{für alle } n \geq 1.$$

Für die Variation der Halton Folge gilt:

Satz 3.13 ([Hal60]). Wenn S eine Halton Folge mit paarweise relativ primen Basis b_1, \dots, b_s ist. Dann gilt für alle $N \geq 1$:

$$D_N^*(S) < \frac{s}{N} + \frac{1}{N} \prod_{i=1}^s \left(\frac{b_i - 1}{2 \log(b_i)} \log(N) + \frac{b_i + 1}{2} \right).$$

Beweis. Sei $N \geq 1$ fest, und $D(J) = \sum_{i=1}^N I_J(x_i) - N\lambda_s(J)$ für ein Intervall $J \in I^s$. Für $1 \leq i \leq s$ und einer ganzen Zahl $e \geq 0$, sei $\mathcal{E}_i(e)$ die Familie aller Intervalle der Form $[0, ab_i^{-e}]$ mit $a \in \mathbb{Z}$, $0 < a \leq b_i^e$, und sei $\mathcal{F}_i(e)$ die Familie aller Intervalle der Form $[cb_i^{-f}, (c+1)b_i^{-f}]$ mit $c, f \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq f \leq e$ und $0 \leq c < b_i^f$. Für ganze Zahlen $e_1, \dots, e_s \geq 0$, sei $\mathcal{E}(e_1, \dots, e_s)$ die Familie aller Intervalle $E = \prod_{i=1}^s E_i$ mit $E_i \in \mathcal{E}_i(e_i) \cup \mathcal{F}_i(e_i)$ für $1 \leq i \leq s$. Wir behaupten, dass

$$|D(E)| \leq \prod_{\substack{i=1 \\ \mathcal{E}_i \notin \mathcal{F}_i(e_i)}}^s \left(\frac{1}{2}(b_i - 1)e_i + 1 \right) \quad \text{für alle } E = \prod_{i=1}^s E_i \in \mathcal{E}(e_1, \dots, e_s) \quad (3.14)$$

gilt, wobei ein leeres Produkt gleich 1 sein soll. (3.14) wird mit Induktion nach der Anzahl k von Indizes i für welche $E_i \notin \mathcal{F}_i(e_i)$ gilt bewiesen.

Induktions Anfang: Sei $k = 0$, d.h. $E = \prod_{i=1}^s [c_i b_i^{-f_i}, (c_i + 1) b_i^{-f_i}]$ mit $c_i, f_i \in \mathbb{Z}$, $0 \leq f_i \leq e_i$ und $0 \leq c_i < b_i^{-f_i}$ für $1 \leq i \leq s$. Durch

$$x_n = (\phi_{b_1}(n), \dots, \phi_{b_s}(n)) \in E$$

werden, für $1 \leq i \leq s$, die ersten f_i Stellen (in Basis b_i) von $\phi_{b_i}(n)$ hinter dem Dezimalpunkt festgelegt. Mit anderen Worten ist damit die Restklasse von n modulo $b_i^{f_i}$ bestimmt. Da die b_1, \dots, b_s paarweise relative prim sind, ist dadurch n eindeutig modulo $m = b_1^{f_1}, \dots, b_s^{f_s}$. Daraus folgt, dass von m aufeinander folgenden Punkten in S genau einer in E liegt. Damit gilt: $|D(E)| \leq 1$.

Induktionsschritt: Sei nun $k \geq 1$ und (3.14) gelte für $k-1$, und sei $E = \prod_{i=1}^s E_i \in \mathcal{E}(e_1, \dots, e_s)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit, kann man annehmen, dass $E_i \notin \mathcal{F}_i(e_i)$ für $1 \leq i \leq k$ und $E_i \in \mathcal{F}_i(e_i)$ für $k < i \leq s$. Dann ist $E_1 = [0, ab_1^{-e_1}]$ für ein $a \in \mathbb{Z}$, $0 < a < b_1^{e_1}$. Sei

$$ab_1^{-e_1} = \sum_{j=1}^{e_1} d_j b_1^{-j}$$

die Darstellung zur Basis b_1 . Dann ist E_1 die disjunkte Vereinigung von d_i Intervallen der Länge b_1^{-i} aus $\mathcal{F}_1(e_1)$ für $1 \leq i \leq e_1$. Sodass

$$E_1 = \bigcup_{r=1}^d F_r,$$

mit paarweise disjunkten $F_r \in \mathcal{F}_1(e_1)$ für $1 \leq r \leq d = \sum_{j=1}^{e_1} d_j$, somit ist E die disjunkte Vereinigung von

$$E = \bigcup_{r=1}^d (F_r \times E_2 \times \dots \times E_s).$$

Daraus folgt:

$$|D(E)| \leq \sum_{r=1}^d |D(F_r \times E_2 \times \dots \times E_s)| \leq d \prod_{i=2}^k \left(\frac{1}{2} (b_i - 1) e_i + 1 \right), \quad (3.15)$$

wobei die zweite Ungleichung aus der Induktionsannahme folgt. Für $G = [ab_1^{-e_1}, 1)$, gilt $E_1 = [0, 1) \setminus G$, und damit:

$$\begin{aligned} |D(E)| &\leq |D([0, 1) \times E_2 \times \dots \times E_s)| + |D(G \times E_2 \times \dots \times E_s)| \\ &\leq \prod_{i=2}^k \left(\frac{1}{2} (b_i - 1) e_i + 1 \right) + |D(G \times E_2 \times \dots \times E_s)|. \end{aligned}$$

Man kann G als disjunkte Vereinigung von $(b_1 - 1)e_1 - d + 1$ Intervallen aus $\mathcal{F}_1(e_1)$ schreiben, und erhält (analog wie oben):

$$|D(E)| \leq ((b_1 - 1)e_1 - d + 2) \prod_{i=2}^k \left(\frac{1}{2} (b_i - 1) e_i + 1 \right).$$

Addiert man diese Gleichung mit (3.15) und dividiert durch 2, so erhält man (3.14) für alle k .

Sei nun $J = \prod_{i=1}^s [0, u_i) \subset I^s$ beliebig. Für $1 \leq i \leq s$ sei e_i die kleinste ganze Zahl mit $b_i^{e_i} \geq N$ und sei a_i die kleinste ganze Zahl mit $a_i b_i^{-e_i} \geq u_i$. Sei $E = \prod_{i=1}^s [0, a_i b_i^{-e_i})$. Nachdem

die i -ten Koordinaten von allen Punkten aus S_N rationale Zahlen mit Nenner $b_i^{e_i}$ sind, gilt $\sum_{i=1}^N I_J(x_i) = \sum_{i=1}^N I_E(x_i)$. Weiters gilt $E \in \mathcal{E}(e_1, \dots, e_s)$, und mit (3.14) gilt:

$$\begin{aligned} |D(J)| &\leq N(\lambda_s(E) - \lambda_s(J)) + |D(E)| \\ &\leq N \sum_{i=1}^s b_i^{-e_i} + |D(E)| \leq s + |D(E)| \\ &\leq s + \prod_{i=1}^s \left(\frac{1}{2}(b_i - 1)e_i + 1 \right). \end{aligned}$$

Der Beweis des Satzes folgt nun aus $e_i < 1 + (\log(N))/(\log(b_i))$ für $1 \leq i \leq s$. \square

3.3.5 Netze und (t, s) -Folgen

Für die s -dimensionale Halton Folge gilt $D_N^*(S) = O(N^{-1}(\log N)^s)$. Wenn man als Basis die ersten s Primzahlen nimmt, dann gilt mit dem Primzahlsatz (für die Anzahl $p(n)$ der Primzahlen kleiner als n gilt $p(n) \sim n/\log(n)$), für die dabei auftretende Konstante A_s

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\log A_s}{s \log s} = 1.$$

Das heißt, dass A_s superexponentiell wächst wenn $s \rightarrow \infty$. Das legt nahe, dass Halton Folgen nur bei kleiner Dimension brauchbare Ergebnisse liefern. In diesem Kapitel geht es um die Konstruktion von Folgen die dieses Problem nicht mehr haben. Für feste Dimension $s \geq 1$ und Basis $b \geq 2$ wird ein Teilintervall von $I^s = [0, 1)^s$ der Form:

$$E = \prod_{i=1}^s [a_i b^{-d_i}, (a_i + 1)b^{-d_i}),$$

mit $a_i, d_i \in \mathbb{Z}$ $d_i \geq 0$, $0 \leq a_i < b^{d_i}$, als elementares Intervall zur Basis b bezeichnet.

Definition 3.13. Sei $0 \leq t \leq m$ eine ganze Zahl. Ein (t, m, s) -Netz in Basis b ist eine Punktmenge P mit Kardinalität b^m aus I^s , sodass $\sum_{x \in P} I_E(x) = b^t$ für jedes elementare Intervall E in Basis b mit $\lambda_s(E) = b^{t-m}$.

Definition 3.14. Sei $t \geq 0$ eine ganze Zahl. Eine Punktfolge $x_0, x_1, \dots \in I^s$ ist eine (t, s) -Folge zur Basis b falls für alle $k \geq 0$ und $m \geq t$, die Menge aller Punkte x_n mit $kb^m \leq n < (k+1)b^m$ ein (t, m, s) -Netz ist.

Bemerkung 3.5. Wenn P ein (t, m, s) -Netz zur Basis b ist, dann gilt $\sum_{x \in P} I_E(x) = b^m \lambda_s(E)$ für alle elementaren Intervalle zur Basis b mit $\lambda_s(E) = b^{t-m}$. Daraus folgt, dass für eine disjunkte Vereinigung \bar{E} von solchen Intervallen, $\sum_{x \in P} I_{\bar{E}}(x) = b^m \lambda_s(\bar{E})$ gilt. Da jedes elementare Intervall E zur Basis b , mit $\lambda_s(E) = b^{-d}$ und $d \leq m - t$ als so eine Vereinigung geschrieben werden kann, gilt für alle $u \geq t$, dass jedes (t, m, s) -Netz auch ein (u, m, s) -Netz und jede (t, s) -Folge eine (u, s) -Folge ist. Daraus folgt, dass t so klein wie möglich sein sollte.

Kommen wir nun zur Diskrepanz von (t, s) -Folgen. Im Folgenden gilt für den Binomialkoeffizienten, dass $\binom{r}{i} = 0$ falls $i > r$ oder $i < 0$. Die Beweise der folgenden Sätze findet man in [Nie92]. Sie stammen aus [Nie87].

Satz 3.14. Für die Stern Diskrepanz $D_N^*(S)$ der ersten N Glieder einer (t, s) -Folge mit Basis $b \geq 3$ gilt:

$$ND_N^*(S) \leq \frac{b-1}{2} b^t \sum_{i=1}^s \binom{s-1}{i-1} \binom{k+1-t}{i} \left[\frac{b}{2} \right]^{i-1} \quad (3.16)$$

$$+ \frac{1}{2} b^t \sum_{i=0}^{s-1} \binom{s-1}{i} \left(\binom{k+1-t}{i} + \binom{k-t}{i} \right) \left[\frac{b}{2} \right]^i, \quad (3.17)$$

für $N \geq b^t$, wobei k die größte ganze Zahl mit $b^k \leq N$ ist.

Satz 3.15. Für die Stern Diskrepanz $D_N^*(S)$ der ersten N Glieder einer (t, s) -Folge mit gerader Basis b gilt:

$$ND_N^*(S) \leq (b-1)b^{t-1} \sum_{i=1}^s \binom{k+1-t}{i} \left(\frac{b}{2}\right)^i \quad (3.18)$$

$$+ \binom{b-1}{2} b^{t-1} \sum_{i=1}^{s-1} \binom{k+i+1-t}{i} \left(\frac{b}{2}\right)^i \quad (3.19)$$

$$+ \frac{1}{2} b^t \sum_{i=0}^{s-1} \left(\binom{k+1-t}{i} + \binom{k-t}{i} \right) \left(\frac{b}{2}\right)^i \quad (3.20)$$

$$+ \frac{b-2}{4} b^t \sum_{i=0}^{s-2} \left(\binom{k+i+2-t}{i} + \binom{k+i+1-t}{i} \right) \left(\frac{b}{2}\right)^i, \quad (3.21)$$

für $N \geq b^t$, wobei k die größte ganze Zahl mit $b^k \leq N$ ist.

Aus diesen beiden Sätzen folgt.

Satz 3.16. Die Stern Diskrepanz $D_N^*(S)$ der ersten N Glieder einer (t, s) -Folge S zur Basis b erfüllt:

$$ND_N^*(S) \leq C(s, b) b^t (\log N)^s + O(b^t (\log N)^{s-1}) \quad \text{für } N \geq 2,$$

dabei hängt die implizit gegebene Konstante nur von b und s ab. Weiters gilt für $s = 2$ und $b = 2, s = 3, 4$

$$C(s, b) = \frac{1}{s} \left(\frac{b-1}{2 \log b} \right)^s,$$

und sonst

$$C(s, b) = \frac{1}{s!} \frac{b-1}{2 \lfloor b/2 \rfloor} \left(\frac{\lfloor b/2 \rfloor}{\log b} \right)^s.$$

3.3.6 Die Konstruktion von (s, t) -Folgen

Zunächst ein generelles Konstruktionsschema für (s, t) -Folgen. Seien die ganzen Zahlen $s \geq 1$ und $b \geq 2$ gegeben. Des weiteren benötigt man:

1. Einen kommutativen Ring R mit eins und Kardinalität b .
2. Bijektionen $\psi_r : Z_b \rightarrow R$ für $r \geq 1$, mit $\psi_r(0) = 0$ für alle genügend großen r .
3. Bijektionen $\eta_r^{(j)} : R \rightarrow Z_b$ für $1 \leq j \leq s$ und $r \geq 1$.
4. Matrizen $C^{(1)}, \dots, C^{(s)}$ über R mit Dimension $\infty \times \infty$.

Für $n = 1, 2, \dots$ sei

$$n = \sum_{r=1}^{\infty} a_r(n) b^{r-1}$$

mit $a_r \in Z_b$, die Entwicklung von n zur Basis b . Man definiert nun den Vektor

$$y(n) = (\psi_1(a_1(n)), \psi_2(a_2(n)), \dots)^T \in R^\infty$$

und berechnet

$$(z_1^{(j)}(n), z_2^{(j)}(n), \dots)^T = C^{(j)} y(n).$$

Für $j = 1, \dots, s$ und $n \geq 1$ bildet man

$$x_n^{(j)} = \sum_{r=1}^{\infty} \eta_r^{(j)} \left(z_r^{(j)}(n) \right) b^{-r}.$$

Man definiert nun die Folge als

$$x_n = \left(x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(s)} \right) \quad \text{für } n = 1, 2, \dots \quad (3.22)$$

Um zu garantieren, dass x_n in $I^s = [0, 1]^s$ liegt (und nicht nur in \bar{I}^s) und für die Analyse der Folge (3.22) muss folgende Bedingung erfüllt sein.

- Für alle $n \geq 1$ und $1 \leq j \leq s$, gilt $\eta_r^{(j)} \left(z_r^{(j)}(n) \right) < b - 1$ für unendlich viele r .

Es wird immer angenommen, dass diese Bedingung erfüllt ist. Die Frage ist nun, wann eine so konstruierte Folge eine (t, s) -Folge ist.

Satz 3.17. Sei $t \in \mathbb{N}^0$. Für alle ganzen Zahlen $m > t$ und $d_1, \dots, d_s \geq 0$ mit $\sum_{i=1}^s d_i = m - t$ und für alle $f_j^{(i)} \in R$, $1 \leq j \leq d_i$, $1 \leq i \leq s$, habe das System von $m - t$ linearen Gleichungen:

$$\sum_{r=1}^m c_{jr}^{(i)} z_r = f_j^{(i)}, \quad \text{für } 1 \leq j \leq d_i, 1 \leq i \leq s,$$

in den Unbekannten z_1, \dots, z_m über R genau b^t Lösungen. Dann ist die Folge (3.22) eine (t, s) -Folge zur Basis b .

Es werden nun mehrere verschiedene (t, s) -Folgen beschrieben, dabei ist b eine Primzahlpotenz und $R = \mathbb{F}_b$ Der endliche Körper mit Kardinalität b . Weiters wird eine Bijektion von \mathbb{F}_b nach \mathbb{Z}_b gewählt, und die Bijektionen ψ_r und $\eta_r^{(j)}$ werden dann nach dieser definiert. Wenn b eine Primzahl ist, dann ist $\mathbb{F}_b = \mathbb{Z}_b$ und alle Bijektionen sind die Identität.

Sobol Folgen Hier wird als Basis $b = 2$ gewählt, und jede Matrize $C^{(j)}$ wird rekursiv durch ein primitives Polynom $f^{(j)}(z)$ über \mathbb{F}_2 und ganze Zahlen $m_q^{(j)}$ mit $1 \leq q \leq k = \deg(f^{(j)}(z))$ definiert. Sei $f^{(j)}(z) = z^k + a_1^{(j)} z^{k-1} + \dots + a_k^{(j)}$ mit $a_l^{(j)} \in \mathbb{F}_2$. Die Leitzahlen $c_1^{(j)}, c_2^{(j)}, \dots$ sind rational und haben die Form:

$$c_q^{(j)} = \frac{m_q^{(j)}}{2^q} = \sum_{l=1}^q c_{ql}^{(j)} 2^{-l},$$

wobei $m_q^{(j)}$ eine ungerade Zahl kleiner als 2^q für $q \geq 1$ ist. Die ersten k Zahlen, $c_1^{(j)}, \dots, c_k^{(j)}$ müssen sorgfältig gewählt werden, und die weiteren werden rekursiv bestimmt, mittels

$$c_q^{(j)} = a_1^{(j)} c_{q-1}^{(j)} \oplus \dots \oplus a_{k-1}^{(j)} c_{q-k+1}^{(j)} \oplus c_{q-k}^{(j)} \oplus (c_{q-k}^{(j)} \ggg k),$$

wobei \oplus der bit-by-bit exklusiv-oder Operator ist und $c_{q-k}^{(j)} \ggg k$ bedeutet, dass die binäre Darstellung von $c_{q-k}^{(j)}$ um k Stellen nach rechts verschoben wird (d.h. $c_{q-k}^{(j)}$ wird durch 2^k dividiert). Diese Leitzahlen werden nun verwendet um die Matrix $C^{(j)}$ zu definieren, und zwar wird der Eintrag in der l -ten Reihe und der q -ten Spalte $c_{ql}^{(j)}$ gesetzt.

Verallgemeinerte Faure Folgen Bei dieser Art von Folge wird die Basis b als kleinste Primzahlpotenz größer oder gleich wie die Dimension s gewählt. Falls $n = b^k$, dann hat die Matrix $C^{(j)}$ die Form:

$$C^{(j)} = A^{(j)} (P^T)^{j-1},$$

wobei P die $\infty \times k$ Pascal Matrix (d.h. mit Einträgen $p_{ij} = \binom{i-1}{j-1} \in \mathbb{F}_b$) ist, und $A^{(j)}$ ist eine beliebige nicht singuläre untere Dreiecks-Matrix.

3.4 Die effektive Dimension

Quasi Monte Carlo Methoden haben eine asymptotische Fehlerschranke von $O(n^{-1}(\log n)^s)$, dies ist besser als der Fehler der Monte Carlo Methode $O(n^{-1/2})$. Allerdings gilt bei $s = 10$, $n^{-1}(\log n)^s \leq n^{-1/2}$ erst ab $n \approx 10^{39}$. Da man aber keine $n = 10^{39}$ Iterationen berechnen kann, ist in so einem Fall die asymptotische Fehlerschranke von Monte Carlo besser als jene von Quasi Monte Carlo. In der Praxis gibt es aber Funktionen mit großem s , sogar mit $s = \infty$, bei denen Quasi Monte Carlo Methoden um einiges besser funktionieren als Monte Carlo Methoden, ein Grund dafür ist, dass es bei Quasi Monte Carlo nicht so sehr auf die echte Dimension einer Funktion ankommt, sondern auf etwas was als effektive Dimension bezeichnet wird. Um die effektive Dimension zu definieren benötigt man zunächst die ANOVA-Zerlegung einer Funktion ([ES81], [Hoe48], [Owe97]).

3.4.1 ANOVA Zerlegung

Sei f eine Funktion auf \bar{I}^s mit $\int_{\bar{I}^s} f(x)^2 dx < \infty$. Für eine s -dimensional gleichverteilte Zufallsvariable auf $X = (X^{(1)}, \dots, X^{(s)})$ kann nun $f = f(X)$ auch als Zufallsvariable aufgefasst werden. Dann gilt für den Erwartungswert von f , $E[f(X)] = \mu = \mu(f) = \int_{\bar{I}^s} f(x) dx$ und für die Varianz von f , $Var[f(X)] = \sigma^2 = \sigma^2(f) = \int_{\bar{I}^s} (f(x) - \mu)^2 dx$. Um Trivialitäten zu vermeiden, werden nur Funktionen mit $\sigma^2 > 0$ betrachtet.

Zunächst ein paar notationelle Vereinbarungen. Sei $u \subseteq \{1, \dots, s\}$, dann bezeichnet man mit $|u|$ die Kardinalität von u und mit $-u$ die Menge $\{1, \dots, s\} \setminus u$. Für einen Punkt $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(s)}) \in \bar{I}^s$ bezeichne x^u den $|u|$ -dimensionalen Vektor mit den Elementen $x^{(j)}$ für $j \in u$, weiters sei $\mathcal{X}^u \subseteq \bar{I}^s$ der Teilraum aller Vektoren x^u mit $x \in \bar{I}^s$ und X^u sei der u -dimensionale Zufallsvektor mit den Elementen $X^{(j)}$ mit $j \in u$.

Definition 3.15 (ANOVA Zerlegung). Sei f eine quadratisch integrierbare Funktion, dann ist die ANOVA Zerlegung von f gegeben durch:

$$f(x) = \sum_{u \in \{1, \dots, s\}} f_u(x), \quad (3.23)$$

wobei die $f_u(x)$ nur von x^u abhängen und durch,

$$f_u(x) = \int_{\mathcal{X}^{-u}} \left(f(x) - \sum_{v \subset u} f_v(x) \right) dx^{-u} \quad (3.24)$$

$$= \int_{\mathcal{X}^{-u}} f(x) dx^{-u} - \sum_{v \subset u} f_v(x), \quad (3.25)$$

definiert werden.

Bemerkung 3.6. Es gilt:

$$f_u = E \left[f(X) - \sum_{v \subset u} f_v(X) \middle| X^u \right].$$

Es ist klar, dass $f_\emptyset(x) = \mu(f)$ und $\int_{\bar{I}^s} f_u(x) dx = 0$ gilt. Aber es gilt auch:

Lemma 3.18. Für ein $u \neq \emptyset$, $j \in u$ und alle $x \in \bar{I}^s$ gilt:

$$\int_0^1 f_u(x) dx^{\{j\}} = 0. \quad (3.26)$$

Beweis. Der Beweis wird mit Induktion nach $|u|$ geführt.
Induktions Anfang: Aus $|u| = 1$ folgt $u = \{j\}$ und damit

$$\int_0^1 f_u(x) dx^{\{j\}} = \int_{\bar{I}^u} f_u(x) dx^u = 0 \quad (3.27)$$

Induktion Schritt: Mit (3.25) gilt:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_u(x) dx^{\{j\}} &= \int_{\mathcal{X}^{-u \cup \{j\}}} f(x) dx^{-u \cup \{j\}} - \sum_{v \subset u} \int_0^1 f_v(x) dx^{\{j\}} \\ &\stackrel{I.A.}{=} \left(f_{u \setminus \{j\}}(x) + \sum_{v \subset u \setminus \{j\}} f_v(x) \right) - \sum_{\substack{v \subset u \\ j \notin v}} f_v(x) = 0. \end{aligned}$$

□

Aus Lemma 3.18 folgt, dass für $u \neq v$,

$$\int_{\bar{I}^s} f_u f_v dx = 0$$

gilt. Aus Lemma 3.18 folgt für die Varianz von f :

$$\sigma^2 = \sum_{u \subseteq \{1, \dots, s\}} \sigma_u^2 \quad \text{mit,} \quad (3.28)$$

$$\sigma_u^2 = \sigma_u^2(f) = \begin{cases} \int_{\bar{I}^s} f_u(x)^2 dx & \text{für } |u| > 0, \\ 0 & \text{für } |u| = 0. \end{cases} \quad (3.29)$$

Daher kann man σ_u^2 als Maß für die Wichtigkeit von f_u nehmen.

3.4.2 Die effektive Dimension

Ein Maß für den Einfluss einer Menge von Variablen $u \subseteq \{1, \dots, s\}$ sind folgende zwei Werte:

$$\underline{\tau}_u^2 = \sum_{v \subseteq u} \sigma_v^2, \quad \text{und} \quad (3.30)$$

$$\bar{\tau}_u^2 = \sum_{v \cap u \neq \emptyset} \sigma_v^2. \quad (3.31)$$

Dabei beschreibt $\underline{\tau}_u^2$ die Effekte von \mathcal{X}^u auf f und $\bar{\tau}_u^2$ beschreibt die Effekte von \mathcal{X}^u kombiniert mit anderen Variablen auf f . Es gilt $0 \leq \underline{\tau}_u^2 \leq \bar{\tau}_u^2 \leq \sigma^2$ und $\underline{\tau}_u^2 + \bar{\tau}_{-u}^2 = \sigma^2$. Man kann $\underline{\tau}_u^2$ und $\bar{\tau}_u^2$ durch Integrale ausdrücken und anschließend mittels Quasi Monte Carlo oder Monte Carlo Methoden berechnen (siehe auch [SL99]).

Satz 3.19 ([SL01]). Sei $f(x^u, y^{-u})$ gleich $f(z)$ mit $z^u = x^u$ und $z^{-u} = y^{-u}$. Dann gilt:

$$\underline{\tau}_u^2 = \int_{\bar{I}^{2s-|u|}} f(x^u, y^{-u}) f(x^u, z^{-u}) dx^u dy^{-u} dz^{-u} - \mu^2, \quad (3.32)$$

$$\bar{\tau}_u^2 = \frac{1}{2} \int_{\bar{I}^{s+|u|}} (f(y^u, x^{-u}) - f(z^u, x^{-u}))^2 dx^{-u} dy^u dz^u. \quad (3.33)$$

Beweis. Zu (3.32): Es gilt

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{\bar{I}^{2s-|u|}} f(x^u, y^{-u}) f(x^u, z^{-u}) dx^u dy^{-u} dz^{-u} \\
 &= \int_{\bar{I}^{|u|}} \int_{\bar{I}^{|-u|}} f(x^u, y^{-u}) dy^{-u} \int_{\bar{I}^{|-u|}} f(x^u, z^{-u}) dz^{-u} dx^u \\
 &= \int_{\bar{I}^{|u|}} \left(\int_{\bar{I}^{|-u|}} f(x^u, y^{-u}) dy^{-u} \right)^2 dx^u.
 \end{aligned}$$

Verwendet man Definition 3.15:

$$\int_{\bar{I}^{|-u|}} f(x^u, y^{-u}) dy^{-u} = \sum_{v \subseteq u} f_v(x),$$

und Lemma 3.18, dann folgt:

$$I = \sum_{v \subseteq u} \int_{\bar{I}^s} f_v^2(x) dx = f_\emptyset^2 + \underline{\tau}_u^2.$$

Zu (3.33): Es gilt:

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \int_{\bar{I}^{s+|u|}} (f(y^u, x^{-u}) - f(z^u, x^{-u}))^2 dx^{-u} dy^u dz^u \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\bar{I}^s} f^2(y^u, x^{-u}) dx^{-u} dy^u + \frac{1}{2} \int_{\bar{I}^s} f^2(z^u, x^{-u}) dx^{-u} dz^u \\
 &\quad - \int_{\bar{I}^{2s-|u|}} f(y^u, x^{-u}) f(z^u, x^{-u}) dx^{-u} dy^u dz^u \\
 &= \int_{\bar{I}^s} f^2(x) dx - (\underline{\tau}_{-u}^2 + f_\emptyset^2) = \sigma^2 - \underline{\tau}_{-u}^2 = \bar{\tau}_u^2.
 \end{aligned}$$

□

Zur Definition der effektiven Dimension.

Definition 3.16. Eine quadratisch integrierbare Funktion f hat effektive Dimension d im Superposition-Sinn falls:

$$\sum_{|u| \leq d} \sigma_u^2 \geq 0.99\sigma^2, \tag{3.34}$$

und im abgeschnittenen Sinn falls:

$$\sum_{u \subseteq \{1, \dots, d\}} \sigma_u^2 \geq 0.99\sigma^2. \tag{3.35}$$

Bemerkung 3.7. Diese Definition der effektiven Dimension stammt aus [RCO97], wobei die 0.99 willkürlich gewählt sind. Die Idee der effektiven Dimension erscheint auch in [PT95] und [SW98].

Bemerkung 3.8. Es gilt:

$$\sum_{u \subseteq \{1, \dots, d\}} \sigma_u^2 = \underline{\tau}_{\{1, \dots, d\}}^2, \quad \text{und} \tag{3.36}$$

$$\sigma_u^2 = \underline{\tau}_u^2 - \sum_{v \subset u} \sigma_v^2. \tag{3.37}$$

Das heißt, dass man σ_u^2 rekursiv durch $\underline{\tau}_v^2$ berechnen kann. Daraus folgt, dass $\sum_{|u| \leq d} \sigma_u^2$ durch $\underline{\tau}^2$ ausgedrückt werden kann.

Kommen wir zum Zusammenhang zwischen Quasi Monte Carlo und effektiver Dimension. Für eine quadratisch integrierbare Funktion f gilt für den Approximationsfehler:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) - \int_{\bar{I}^s} f(x) dx \right| &= \left| \sum_{u \subseteq \{1, \dots, s\}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_u(x_i) - \sum_{u \subseteq \{1, \dots, s\}} \int_{\bar{I}^u} f_u(x) dx \right| \\ &\leq \sum_{\substack{u \subseteq \{1, \dots, s\} \\ u \neq \emptyset}} \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_u(x_i) - \int_{\bar{I}^u} f_u(x) dx \right|. \end{aligned}$$

Grob gesprochen bedeutet das, dass sich der Approximationsfehler einer Funktion mit effektiver Dimension d (egal in welchem Sinn), bei vernünftigem N , wie der einer d dimensionalen Funktion verhält.

3.5 Zufälliges Quasi Monte Carlo

Ein Problem von Quasi Monte Carlo Methoden ist, dass der Approximationsfehler in der Praxis oft viel kleiner ist als die gegebene Fehlerschranke, außerdem ist deren Berechnung oft schwierig. Aus diesem Grund wurde zufälliges Quasi Monte Carlo entwickelt. Auch hier wird ein Integral über \bar{I}^s durch

$$\int_{\bar{I}^s} f(x) dx \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i)$$

approximiert. Nur, dass die hier verwendete Folge $S = S(\omega) = (x_1(\omega), x_2(\omega), \dots)$ für $\omega \in \Omega$ eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) ist. Um zu garantieren, dass der Erwartungswert der Approximation gleich dem Integral ist, muss für alle i , x_i eine s -dimensional gleichverteilte Zufallsvariable sein. Um die Vorteile von Quasi Monte Carlo beizubehalten soll $S(\omega)$, bei fixem $\omega \in \Omega$, eine Folge kleiner Diskrepanz sein.

Definition 3.17. Für eine zufällige Punktfolge $S(\omega)$ auf (Ω, \mathcal{A}, P) wird die Stern Diskrepanz definiert durch

$$D_N^*(S) = \sup_{\omega \in \Omega} D_N^*(S(\omega)),$$

und die extreme Diskrepanz durch

$$D_N(S) = \sup_{\omega \in \Omega} D_N(S(\omega)).$$

Definition 3.18. Eine zufällige Punktfolge $S = (x_1, x_2, \dots) \in \bar{I}^s$ heißt zufällige Punktfolge kleiner Diskrepanz, falls:

1. Für alle $i \geq 1$ ist x_i eine s -dimensionale gleichverteilte Zufallsvariable.
2. Es gilt $D_N^*(S) = O(N^{-1}(\log N)^s)$.

Da bei einer zufälligen Folge kleiner Diskrepanz für festes ω , $S(\omega)$ eine Folge mit Diskrepanz $D_N^*(S(\omega)) \leq D_N^*(S)$ ist, gelten für S die gleichen deterministischen Fehlerschranken wie für deterministische Folgen. So gilt zum Beispiel für Funktionen f mit beschränkter Variation $V(f)$, und für alle $\omega \in \Omega$,

$$\left| \int_{\bar{I}^s} f(x) dx - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i(\omega)) \right| \leq V(f) D_N^*(S).$$

Der große Vorteil der zufälligen Quasi Monte Carlo Methode ist, dass die Approximation $A_N(\omega) = 1/N \sum_{i=1}^N f(x_i(\omega))$ eine Zufallsvariable mit $E[A_N] = \int_{\bar{I}^s} f(x) dx$ ist. Man kann

daher das Integral durch unabhängige Realisationen von A_N approximieren und bekommt, analog wie bei der Monte Carlo Methode, über die Varianz eine stochastische Fehlerschranke. Falls man eine feste Anzahl K von Iterationen machen kann so wird man M unabhängige Wiederholungen von A_N machen, wobei $MN = K$ ist und M so klein wie möglich gewählt wird, dass man noch vernünftige Werte für die Varianz bekommt. Man approximiert dann das Integral durch:

$$I = \int_{\bar{I}^s} f(x) dx \approx \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M A_N^j = \frac{1}{MN} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N f(x_i^j), \quad (3.38)$$

und gibt analog wie bei Monte Carlo ein Konfidenzintervall für I an.

Es werden nun die hier verwendeten zufälligen Folgen kleiner Diskrepanz beschrieben. Eine Übersicht zu zufälligen Folgen findet man zum Beispiel in [LL02]

3.5.1 Folgen mit zufälligem Shift

Die Idee zu dieser Methode stammt aus [CP76] wurde aber nur für eine spezielle Folge beschrieben, später verwendeten [Tuf96] und [Mfer] diese Idee auch für andere Folgen. Die Idee ist mit Hilfe einer auf \bar{I}^s gleichverteilten Zufallsvariable $\Delta = (\Delta^{(1)}, \dots, \Delta^{(s)})$ aus einer deterministischen Folge kleiner Diskrepanz $\bar{S} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots) \in \bar{I}^s$ eine zufällige Folge kleiner Diskrepanz $S = (x_1, x_2, \dots) \in \bar{I}^s$ zu bauen. Dafür braucht man die Operation $(\text{mod}1)$, welche jeder Zahl $x \in \mathbb{R}^s$ jene Zahl $x \pmod{1}$ aus I^s zuordnet, für die es ein $z \in \mathbb{Z}^s$ gibt mit $z + (x \pmod{1}) = x$.

Definition 3.19. Sei $\bar{S} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots)$ eine Folge kleiner Diskrepanz auf \bar{I}^s und Δ eine auf \bar{I}^s gleichverteilte Zufallsvariable. Dann wird die Folge mit zufälligem Shift $S = (x_1, x_2, \dots)$ von \bar{S} definiert durch:

$$x_i = (\bar{x}_i + \Delta) \pmod{1}.$$

Satz 3.20. Für das i -te Folgenglied x_i der zufälligen Shift Folge S gilt, x_i ist eine auf \bar{I}^s gleichverteilte Zufallsvariable.

Beweis. Für ein $z = (z^{(1)}, \dots, z^{(s)}) \in \bar{I}^s$ gilt:

$$\begin{aligned} P(x_i \leq z) &= P((\bar{x}_i + \Delta) \pmod{1} \leq z) \\ &= \prod_{j=1}^s P\left((\bar{x}_i^{(j)} + \Delta^{(j)}) \pmod{1} \in [0, z^{(j)}]\right) \\ &= \prod_{j=1}^s \left(P\left(\Delta^{(j)} \in [0, z^{(j)} - \bar{x}_i^{(j)}]\right) \right. \\ &\quad \left. + P\left(\Delta^{(j)} \in [1 - \bar{x}_i^{(j)}, 1 - \bar{x}_i^{(j)} + \min(z^{(j)}, \bar{x}_i^{(j)})]\right) \right) \\ &= \prod_{i=1}^s P\left(\Delta^{(j)} \leq z^{(j)}\right) = P(\Delta \leq z). \end{aligned}$$

Wobei bei der vorletzten Gleichung verwendet wurde, dass die Wahrscheinlichkeit eines Intervalls bei der Gleichverteilung nur von dessen Länge abhängt. \square

Satz 3.21 ([Tuf98], [Tuf97]). *Es gilt:*

$$D_N^*(S) \leq 4^s D_N^*(\bar{S}).$$

Beweis. Für festes Δ gilt:

$$D_N^*(S) = \sup_{u \in \bar{I}^s} \left| \prod_{j=1}^s u^{(j)} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_{[0,u]}((\bar{x}_i + \Delta) \pmod{1}) \right|.$$

Für alle $j \in 1, \dots, s$ gilt:

$$\begin{aligned} & (\bar{x}_i^{(j)} + \Delta^{(j)}) \pmod{1} \in [0, u^{(j)}) \text{ genau dann wenn} \\ & \begin{cases} \bar{x}_i^{(j)} \in [0, u^{(j)}) & \text{für } \Delta^{(j)} = 0, \\ \bar{x}_i^{(j)} \in [1 - \Delta^{(j)}, 1 - \Delta^{(j)} + u^{(j)}) & \text{für } u^{(j)} \leq \Delta^{(j)}, \Delta^{(j)} > 0, \\ \bar{x}_i^{(j)} \in [1 - \Delta^{(j)}, 1) \cup [0, u^{(j)} - \Delta^{(j)}) & \text{für } u^{(j)} \geq \Delta^{(j)}, \Delta^{(j)} > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Man kann diese Aufspaltung auf alle Dimensionen erweitern und bekommt:

$$\begin{aligned} D_N^*(S) & \leq 2^s \sup_{[u,v] \in \bar{I}^s} \left| \lambda_s([u,v]) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_{[u,v]}(\bar{x}_i) \right| \\ & \leq 2^s D_N(\bar{S}) \leq 4^s D_N^*(\bar{S}). \end{aligned}$$

Dabei folgt die letzte Ungleichung aus Proposition (3.4). \square

3.5.2 Halton Folge mit zufälligem Startpunkt

In diesem Kapitel wird eine zufällige Folge kleiner Diskrepanz mit Hilfe einer rekursiven Definition der Halton Folge gebaut, diese Methode stammt aus [HW00]. Dazu benötigt man zunächst die von Neumann-Kakutani-Transformation. Die Idee solche Transformationen zu verwenden um die van der Corput Folge zu studieren stammt von [Hal84] und [Lam85].

Definition 3.20 (von Neumann-Kakutani-Transformation). Sei $b \geq 2$ eine ganze Zahl und $x \in [0, 1]$. Für $x \in [0, 1)$ sei $x = \sum_{j=0}^{\infty} a_j b^{-j-1}$ mit $0 \leq a_j \leq b-1$ und unendlich viele $a_j \neq b-1$. Sei m die kleinste Zahl mit $a_m \neq b-1$. Dann ist die von Neumann-Kakutani-Transformation definiert durch:

$$\begin{aligned} T_b(x) & = \begin{cases} \frac{1+a_m}{b^{m+1}} + \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{a_j}{b^{j+1}} & \text{für } x \in [0, 1), \\ 0 & \text{für } x = 1, \end{cases} \\ T_b^n(x) & = \begin{cases} x & \text{für } n = 0, \\ T_b(T_b^{n-1}(x)) & \text{für } n \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Für $x \in \bar{I}^s$ und ganze Zahlen $b^{(1)}, \dots, b^{(s)}$ sei

$$\begin{aligned} T(x) & = (T_{b^{(1)}}(x^{(1)}), \dots, T_{b^{(s)}}(x^{(s)})) \text{ und} \\ T^n(x) & = (T_{b^{(1)}}^n(x^{(1)}), \dots, T_{b^{(s)}}^n(x^{(s)})). \end{aligned}$$

Bemerkung 3.9. Für die radikal inverse Funktion $\phi_b(n)$ gilt,

$$\phi_b(n+1) = T_b(\phi_b(n)) \text{ und } \phi_b(n+1) = T_b^{n+1}(\phi_b(0)) = T_b^{n+1}(0).$$

Daraus folgt, dass für das i -te Folgenglied x_i der van der Corput Folge in Basis b gilt:

$$x_i = T_b(x_{i-1}) = T_b^n(0).$$

Diese Erkenntnis motiviert die folgende Definition der Halton Folge mit zufälligem Startpunkt.

Definition 3.21 (Halton Folge mit zufälligem Startpunkt). Sei Δ eine auf \bar{I}^s gleichverteilte Zufallsvariable und $b^{(1)}, \dots, b^{(s)}$ ganze Zahlen ≥ 2 , dann ist die Halton Folge mit zufälligem Startpunkt $S = (x_i)_{i \geq 1}$ zur Basis $b^{(1)}, \dots, b^{(s)}$ gegeben durch:

$$x_i = (x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(s)}) = (T_{b^{(1)}}^i(\Delta^{(1)}), \dots, T_{b^{(s)}}^i(\Delta^{(s)})) = T^i(\Delta).$$

Satz 3.22 ([HW00]). Sei $S = (x_1, x_2, \dots)$ eine Halton Folge mit zufälligem Startpunkt in Basis $b^{(1)}, \dots, b^{(s)}$, dann gilt für alle $i \geq 1$, dass x_i eine auf \bar{I}^s gleichverteilte Zufallsvariable ist.

Beweis. Auf Grund der induktiven Definition von S genügt es zu zeigen, dass für eine auf \bar{I}^s gleichverteilte Zufallsvariable Δ , $T(\Delta)$ wieder gleichverteilt ist.

Wir betrachten zunächst den eindimensionalen Fall. Sei Δ gleichverteilt auf $[0, 1]$ und b eine ganze Zahl. Sei

$$l_k = 1 - \frac{1}{b^k}, \quad k \geq 0.$$

Dann kann man $T_b(\Delta)$ auch als

$$T_b(\Delta) = \Delta - \left(1 - \frac{1}{b^k}\right) + \frac{1}{b^{k+1}}, \quad \text{für } \Delta \in [l_k, l_{k+1}), \quad k \geq 0,$$

schreiben. Aus dieser Darstellung folgt, dass $T_b(\Delta)$ gleichverteilt ist, sofern die Intervalle $[l_k, l_{k+1})$ und $[l_h, l_{h+1})$ für alle $k \neq h$, auf disjunkte Intervalle abgebildet werden. Dies folgt aus:

$$T_b(\Delta) \in \left[\frac{1}{b^{k+1}}, \frac{1}{b^k}\right) \quad \text{genau dann wenn } \Delta \in [l_k, l_{k+1}), \quad k \geq 0.$$

Damit ist jede Koordinate des Vektors $T(\Delta)$ eine auf $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariable und daraus folgt, dass $T(\Delta)$ s -dimensional gleichverteilt ist. \square

Satz 3.23. Sei $S = (x_i)_{i \geq 1}$ eine Halton Folge mit zufälligem Startpunkt mit paarweise relativ primärer Basis $b^{(1)}, \dots, b^{(s)}$. Dann gilt für die Stern Diskrepanz:

$$D_N^*(S) < \frac{2s}{N} + \frac{1}{N} \prod_{i=1}^s \left(\frac{b_i - 1}{2 \log(b_i)} \log(N) + \frac{b_i + 1}{2} \right).$$

Beweis. Aus der Definition von S folgt $x_i \in I^s$ für alle $i \geq 1$.

Sei $N \geq 1$ fest, und $D(J) = \sum_{i=1}^N I_J(x_i) - N\lambda_s(J)$ für ein Intervall $J \in I^s$. Für $1 \leq i \leq s$ und einer ganzen Zahl $e \geq 0$, sei $\mathcal{E}_i(e)$ die Familie aller Intervalle der Form $[0, ab_i^{-e})$ mit $a \in \mathbb{Z}$, $0 < a \leq b_i^e$, und sei $\mathcal{F}_i(e)$ die Familie aller Intervalle der Form $[cb_i^{-f}, (c+1)b_i^{-f})$ mit $c, f \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq f \leq e$ und $0 \leq c < b_i^f$. Für ganze Zahlen $e_1, \dots, e_s \geq 0$, sei $\mathcal{E}(e_1, \dots, e_s)$ die Familie aller Intervalle $E = \prod_{i=1}^s E_i$ mit $E_i \in \mathcal{E}_i(e_i) \cup \mathcal{F}_i(e_i)$ für $1 \leq i \leq s$. Wir behaupten, dass

$$|D(E)| \leq \prod_{\substack{i=1 \\ E_i \notin \mathcal{F}_i(e_i)}}^s \left(\frac{1}{2}(b_i - 1)e_i + 1 \right) \quad \text{für alle } E = \prod_{i=1}^s E_i \in \mathcal{E}(e_1, \dots, e_s) \quad (3.39)$$

gilt, wobei ein leeres Produkt gleich 1 sein soll. Der Beweis von (3.39) ist analog zu dem Beweis von (3.14) im Beweis von Satz 3.13.

Sei nun $J = \prod_{i=1}^s [0, u_i) \subset I^s$ beliebig. Für $1 \leq i \leq s$ sei e_i die kleinste ganze Zahl mit $b_i^{e_i} \geq N$ und sei a_i die kleinste ganze Zahl mit $a_i b_i^{-e_i} \geq u_i$. Sei $E = \prod_{i=1}^s [0, a_i b_i^{-e_i})$. Da in jeder Restklasse modulo b^{e_i} maximal ein Element aus $\{1, \dots, N\}$ liegt folgt, dass es maximal ein $x_j^{(i)}$

gibt mit $x_j^{(i)} \in [0, a_i b_i^{-e_i})$ und $x_j^{(i)} \notin [0, u_i)$. Daraus folgt $\left| \sum_{i=1}^N I_J(x_i) - \sum_{i=1}^N I_E(x_i) \right| \leq s$. Weiters gilt $E \in \mathcal{E}(e_1, \dots, e_s)$, und mit (3.39) gilt:

$$\begin{aligned} |D(J)| &\leq N(\lambda_s(E) - \lambda_s(J)) + |D(E)| + \left| \sum_{i=1}^N I_J(x_i) - \sum_{i=1}^N I_E(x_i) \right| \\ &\leq N \sum_{i=1}^s b_i^{-e_i} + |D(E)| + s \leq 2s + |D(E)| \\ &\leq 2s + \prod_{i=1}^s \left(\frac{1}{2}(b_i - 1)e_i + 1 \right). \end{aligned}$$

Der Beweis des Satzes folgt nun aus $e_i < 1 + (\log(N))/(\log(b_i))$ für $1 \leq i \leq s$. □

Kapitel 4

Methoden zur Simulation seltener Ereignisse

4.1 Das zugrunde liegende Problem

Für die Familie seltener Ereignisse $A(u)$ soll $z(u) = P(A(u))$ näherungsweise berechnet werden. Verwendet man dazu die Monte Carlo Methode mit Schätzer $Z(u)$, dann wird für $z(u)$ ein Konfidenzintervall angegeben. Da $z(u) \rightarrow 0$ für $u \rightarrow \infty$ interessiert einen nicht die absolute Länge $l(u)$ des Konfidenzintervalls sondern dessen relative Länge $l(u)/z(u)$. Ist zum Beispiel $z(u) = 10^{-5}$, dann ist ein Konfidenzintervall der Länge $l(u) = 10^{-4}$ unbrauchbar.

Die relative Länge eines Konfidenzintervalls bei n Wiederholungen hängt im Wesentlichen von $\sqrt{\text{Var}[Z(u)]}/z(u)n^{-1/2}$ ab, deshalb definiert man:

Definition 4.1 (Relative Fehler). Der relative Fehler eines Monte Carlo Schätzers $Z(u)$ ist gegeben durch

$$\varepsilon(u) = \frac{\sqrt{\text{Var}[Z(u)]}}{z(u)}.$$

Bemerkung 4.1. Man kann den relativen Fehler auch für beliebige Schätzer $Z(u)$ definieren. In diesem Fall ist $z(u) = E[Z(u)]$.

Falls der relative Fehler $\varepsilon(u)$ als Funktion in u beschränkt ist so genügt eine feste Anzahl an Iterationen um für alle u ein Konfidenzintervall mit vorgegebener relativer Länge zu berechnen. In der Praxis ist es oft nicht möglich einen Schätzer mit beschränktem relativen Fehler zu finden, deswegen benötigt man ein schwächeres Kriterium für die Qualität eines Schätzers.

Notation. Seien $a(u)$ und $b(u)$ zwei Funktionen mit $\lim_{u \rightarrow \infty} a(u) = \lim_{u \rightarrow \infty} b(u) = 0$ mit

$$\liminf_{u \rightarrow \infty} \frac{|\log(a(u))|}{|\log(b(u))|} \geq 1,$$

dann schreibt man:

$$a(u) \stackrel{\log}{\leq} b(u).$$

Definition 4.2. Ein Schätzer $Z(u)$ heißt asymptotisch oder logarithmisch effizient, falls

$$\text{Var}[Z(u)] \stackrel{\log}{\leq} z(u)^2$$

gilt.

Lemma 4.1. Falls $Z(u)$ ein asymptotisch effizienter Schätzer ist, dann gilt für den relativen Fehler $\varepsilon(u) = o(z(u)^{-\delta})$ für alle $\delta > 0$.

Beweis. Aus $\text{Var}[Z(u)] \stackrel{\log}{\leq} z(u)^2$ folgt:

$$\liminf_{u \rightarrow \infty} \frac{-\log(\text{Var}[Z(u)])}{-\log(z(u))} \geq 2.$$

Das heißt, für jedes $\delta > 0$ gibt es ein u_0 , sodass für alle $u > u_0$

$$\begin{aligned} \frac{-\log(\text{Var}[Z(u)])}{-\log(z(u))} &\geq 2 - \delta, \\ \log(\text{Var}[Z(u)]) &\leq (2 - \delta) \log(z(u)), \\ \text{Var}[Z(u)] &\leq \exp\{(2 - \delta) \log(z(u))\} = z(u)^{2-\delta} \end{aligned}$$

gilt. Daraus folgt:

$$\varepsilon(u) = \frac{\sqrt{\text{Var}[Z(u)]}}{z(u)} \leq \frac{z(u)^{1-\delta/2}}{z(u)} = z(u)^{-\delta/2} = o(z(u)^{-\delta}).$$

□

Verwendet man den naiven Monte Carlo Schätzer $Z_0(u) = I_{A(u)}$, dann gilt für dessen Varianz,

$$\text{Var}[Z_0(u)] = \text{Var}[I_{A(u)}] = E[I_{A(u)}^2] - E[I_{A(u)}]^2 = E[I_{A(u)}] - E[I_{A(u)}]^2 = z(u)(1 - z(u)).$$

Daraus folgt:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{|\log(\text{Var}[Z_0(u)])|}{|\log(z(u)^2)|} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\log(z(u)(1 - z(u)))}{2 \log(z(u))} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\log(z(u)) + \log(1 - z(u))}{2 \log(z(u))} = 1/2,$$

womit dieser Schätzer nicht asymptotisch effizient ist. Sei $z(u) = 10^{-6}$, dann gilt für den relativen Fehler von $Z(u)$, $\varepsilon(u) \approx 1000$. Das heißt, für ein 95%-Konfidenzintervall von 10% der Länge von $z(u)$ benötigt man ungefähr 3.84×10^8 Iterationen.

Um $P(A(u))$ zu berechnen genügt also der naive Schätzer $Z_0(u)$ nicht, man benötigt daher bessere Ideen. Das Ziel dieses Kapitels ist es effiziente Schätzer für seltene Ereignisse vorzustellen.

4.2 Light Tails

Definition 4.3. Sei X eine Zufallsvariable. Dann ist die momentenerzeugende Funktion von X gegeben durch:

$$M_X(t) = E[e^{tX}].$$

Definition 4.4 (Light Tails). Eine positive Zufallsvariable X heißt light-tailed falls es ein $t > 0$ gibt mit $M_X(t) < \infty$.

In diesem Kapitel wollen wir Methoden zur näherungsweise Berechnung von den in Kapitel 1 gegebenen Problemen vorstellen. Wenn die Schadenshöhenverteilung einer light-tailed Verteilung angehört verwendet man Importance Sampling als Varianzreduktionsmethode. Als neues Maß verwendet man eine exponentiell veränderte Version des alten Maßes. Das heißt, falls das alte Maß Dichte f hat, dann hat das neue Maß die Dichte

$$f_\theta(x) = e^{\theta x} f(x) / M_X(\theta) \tag{4.1}$$

mit einem $\theta > 0$.

4.2.1 Zufällige Summen

Seien X_i iid Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F und Dichte f . Weiters sei N eine ganzzahlige Zufallsvariable mit Werten in \mathbb{N}_0 . In diesem Kapitel wollen wir $z(u) = P\left(\sum_{i=1}^N X_i > u\right)$ näherungsweise berechnen.

Wir betrachten zunächst den Fall $N = n$. Verwendet man ein exponentiell verändertes Maß als Importance Sampling Maß so erhält man den Schätzer:

$$Z(u) = \exp\left\{-\theta \sum_{i=1}^n X_i\right\} M_{X_1}(\theta)^n I_{\{\sum_{i=1}^n X_i > u\}}.$$

Wobei die X_i nach dem neuen Maß (4.1) simuliert werden. Es gilt:

$$E[Z(u)^2] = E\left[\exp\left\{-2\theta \sum_{i=1}^n X_i\right\} M_{X_1}(\theta)^{2n} I_{\{\sum_{i=1}^n X_i > u\}}\right] \leq \exp\{-2\theta u\} M_{X_1}(\theta)^{2n}.$$

Da man die Varianz von $Z(u)$ nicht minimieren kann, minimiert man $n \log(M_{X_1}(\theta)) - \theta u$. Durch differenzieren erhält man:

$$\begin{aligned} n \frac{M_{X_1}(\theta)'}{M_{X_1}(\theta)} - u &= 0, \\ \frac{M_{X_1}(\theta)'}{M_{X_1}(\theta)} &= \frac{u}{n}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Man wählt θ_n als Lösung von Gleichung 4.2.

Bei zufälligem N kann man den Schätzer

$$Z^*(u) = \exp\left\{-\theta_N \sum_{i=1}^N X_i\right\} M_{X_1}(\theta_N)^N I_{\{\sum_{i=1}^N X_i > u\}}.$$

verwenden. Man simuliert zunächst N und anschließend (X_1, \dots, X_N) wobei die X_i nach dem exponentiell veränderten Maß mit Parameter θ_N simuliert werden.

4.2.1.1 Numerische Ergebnisse

Für die Tabelle 4.1 wurde für die X_i eine Exponential-Verteilung mit Parameter $\lambda = 1$ gewählt. Weiters ist N geometrischverteilt mit $\rho \in \{0.25, 0.5, 0.75\}$. Bei der Monte Carlo Methode wurden 10^7 Iterationen verwendet und bei den zufälligen Quasi Monte Carlo Folgen wurde der Schätzer (3.38) mit 10^4 Monte Carlo Iterationen und 10^3 Quasi Monte Carlo Iterationen verwendet. Die Tabelle gibt zu jedem Schätzer die halbe Länge des 95% Konfidenzintervalls in Prozent von dem geschätzten Wert von $z(u)$ an. Dabei enthält die Spalte CMC die theoretischen Werte des Schätzer $Z_0(u) = I_{\{\sum_{i=1}^N X_i > u\}}$.

Man sieht das $Z(u)$ etwas besser funktioniert als der Schätzer $Z_0(u)$. Des Weiteren sieht man, dass die Quasi Monte Carlo Methoden keine zusätzliche Varianzreduktion bringen.

4.2.2 Ruinwahrscheinlichkeit

In diesem Kapitel wollen wir $\Psi(u)$ näherungsweise berechnen. Sei $(Y_i)_{i \geq 1}$ iid mit Verteilung F und $(Z_i)_{i \geq 1}$ iid exponentialverteilt mit Parameter λ . Dann gilt mit Lemma 1.7

$$\Psi(u) = P\left(\sup_{n \geq 1} \sum_{i=1}^n Y_i - cZ_i > u\right) = P\left(\sup_{n \geq 1} S_n > u\right).$$

ρ	$z(u)$	CMC	Monte Carlo	start Halton	shift Halton	shift Sobol
0.25	0.01	0.6168	0.203872	0.115124	0.150649	0.137729
0.25	1e-05	19.6	1.82448	1.82688	1.85616	1.8418
0.25	1e-08	619.8	12.4534	14.6799	31.3053	16.1052
0.25	1e-11	19599.64	34.7308	21.7074	42.2564	34.3522
0.5	0.01	0.6168	0.66094	0.397021	0.344567	0.486056
0.5	1e-05	19.6	5.41593	5.39571	5.24081	5.53127
0.5	1e-08	619.8	69.0665	50.068	46.3478	28.8673
0.5	1e-11	19599.64	65.4584	118.993	152.282	74.8495
0.75	0.01	0.6168	1.90059	1.73156	2.96925	1.11124
0.75	1e-05	19.6	16.7235	10.7559	10.9785	12.7763
0.75	1e-08	619.8	125.836	68.5473	126.12	93.6064
0.75	1e-11	19599.64	194.676	151.113	98.4937	106.13

 Tabelle 4.1: Exponentiale Schadenshöhen mit $\lambda = 1$.

Für die in diesem Kapitel beschriebene Methode berechnet man zunächst γ als Lösung von:

$$0 = \lambda(M_{Y_1}(\gamma) - 1) - c\gamma. \quad (4.3)$$

Man verwendet Importance Sampling. Beim neuen Maß sind die Z_i exponentialverteilt mit Parameter $\lambda_L = M_{Y_1}(\gamma)\lambda$ und die Verteilung der $(Y_i)_{i \geq 1}$ wird durch die Radon-Nikodym-Dichte $\frac{dF_L}{dF} = e^{\gamma x}/M_{Y_1}(\gamma)$ definiert. Für die Radon-Nikodym-Dichte des gemeinsamen Maßes P von Y_1 und Z_1 bezüglich des neuen Maßes P_L gilt damit:

$$\frac{dP}{dP_L}(y, z) = e^{-\gamma y} M_{Y_1}(\gamma) \frac{1}{M_{Y_1}(\gamma)} e^{-\lambda z + \lambda M_{Y_1}(\gamma) z} = \exp\{c\gamma z - \gamma y\}.$$

Man berechnet den Schätzer $Z(u)$ wie folgt:

1. Man setzt $S = 0$.
2. Man simuliert Z_1 als exponentialverteilte Zufallsvariable mit Parameter λ_L und Y_1 als Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F_L . Man setzt $S = S + Y_1 - cZ_1$.
3. Falls $S > u$, setzt man $Z(u) = e^{-\gamma S}$. Ansonsten, gehe zu 2.

Da $E_L[cZ_1 - Y_1] > 0$ gilt, werden für die Berechnung von $Z(u)$ mit Wahrscheinlichkeit 1 nur endlich viele Schritte benötigt. Für die Analyse der Varianz des Schätzers $Z(u)$ benötigt man folgendes Lemma, einen Beweis findet man in [Gra92].

Lemma 4.2. *Sei die Verteilung der Y_i light-tailed und $E[cZ_1 - Y_1] < 0$. Weiters sei $\gamma > 0$ eine Lösung von Gleichung 4.3. Dann existiert eine Konstante C mit:*

$$\Psi(u) \sim Ce^{-\gamma u}.$$

Satz 4.3. *Sei die Verteilung der Y_i light-tailed und $E[cZ_1 - Y_1] < 0$. Dann hat der Schätzer $Z(u)$ beschränkten relativen Fehler.*

Beweis. Der Beweis folgt aus:

$$E[Z(u)^2] \leq e^{-2\gamma u} \sim \Psi(u)^2/C^2.$$

□

4.3 Zufällige Summen mit subexponentiellen Verteilungen

Seien X_1, X_2, \dots iid Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion $F \in \mathcal{S}$, F stetig mit Dichte f und N eine ganzzahlige Zufallsvariable mit Werten in \mathbb{N}^0 welche unabhängig von $(X_i)_{i \geq 1}$ ist. Die Zufallsvariable $S_N = \sum_{i=1}^N X_i$ wird als zufällige Summe bezeichnet. In diesem Kapitel wird ein historischer Überblick über effiziente Methoden zur näherungsweise Berechnung von $P(S_N > u)$ gegeben.

Notation. Für festes $N = n$ sei $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

4.3.1 Der bedingte Monte Carlo Schätzer

Der erste Schätzer für den man zeigen konnte, dass er asymptotisch effizient ist stammt von Asmussen und Binswanger [AK97] und verwendet die Ordnungsstatistik

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(N)}.$$

Asmussen und Binswanger verwendeten den Schätzer:

$$Z_1(u) = P(S_N > u | N, X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(N-1)}).$$

Man simuliert zunächst N , anschließend X_1, \dots, X_N verwirft dann $X_{(N)}$ und berechnet Z_1 .

Lemma 4.4. *Sei F stetig, $S_{N-1}^* = S_N - X_{(N)}$ und $a \vee b = \max(a, b)$. Dann gilt:*

$$P(S_N > u | N, X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(N-1)}) = \frac{\overline{F}((u - S_{N-1}^*) \vee X_{(N-1)})}{\overline{F}(X_{(N-1)})}. \quad (4.4)$$

Beweis. Aus der Definition von $X_{(n)}$ und $X_{(n-1)}$ folgt: $X_{(n)} \geq X_{(n-1)}$. Aus

$$P(X_1 > x | X_1 \geq x_0) = \frac{P(X_1 > (x \vee x_0))}{P(X_1 > x_0)} = \frac{\overline{F}(x \vee x_0)}{\overline{F}(x_0)}$$

folgt:

$$P(X_{(N)} > x | N, X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(N-1)}) = P(X_1 > x | X_1 \geq X_{(N-1)}) = \frac{\overline{F}(X_{(N-1)} \vee x)}{\overline{F}(X_{(N-1)})}.$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} & P(S_N > u | N, X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(N-1)}) \\ &= P(X_{(N)} + S_{N-1}^* > u | N, X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(N-1)}) \\ &= P(X_{(N)} > u - S_{N-1}^* | N, X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(N-1)}) \\ &= \frac{\overline{F}((u - S_{N-1}^*) \vee X_{(N-1)})}{\overline{F}(X_{(N-1)})}. \end{aligned}$$

□

Satz 4.5 ([AK97]). *Sei $L(x)$ slowly varying und stetig, $\overline{F}(x) = L(x)/(1+x)^\alpha$ und $E[N^{2(\alpha+1)}] < \infty$. Dann ist der Schätzer Z_1 asymptotisch effizient.*

Lemma 4.6. *Sei $F(x)$ stetig mit Dichte $f(x)$. Dann gilt*

$$f_{X_{(n-1)}}(x) = n(n-1)F(x)^{n-2}\overline{F}(x)f(x) \leq n(n-1)\overline{F}(x)f(x).$$

Beweis. Die Dichte von $X_{(n)}$ ist

$$f_{X_{(n)}}(x) = nF(x)^{n-1}f(x).$$

Sei $M_{n-1} = \max(X_1, \dots, X_{n-1})$. Es gilt:

$$\begin{aligned} P(X_{(n-1)} \leq x) &= P\left(\bigcup_{i=1}^n \{X_j \leq x | j \neq i\} \cap \left\{X_i \geq \max_{j \neq i} X_j\right\}\right) \\ &\stackrel{iid}{=} nP(\{X_1 \leq x, \dots, X_{n-1} \leq x\} \cap \{X_n \geq M_{n-1}\}) \\ &= nP(M_{n-1} \leq x, X_n \geq M_{n-1}) \\ &\stackrel{iid}{=} n \int_0^x \int_{y_1}^{\infty} (n-1)F(y_1)^{n-2}f(y_1)f(y_2) dy_2 dy_1 \\ &= \int_0^x n(n-1)F(y_1)^{n-2}\bar{F}(y_1)f(y_1) dy_1. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$f_{X_{(n-1)}}(x) = n(n-1)F(x)^{n-2}\bar{F}(x)f(x).$$

Aus $F(x) \leq 1$ folgt:

$$n(n-1)F(x)^{n-2}\bar{F}(x)f(x) \leq n(n-1)\bar{F}(x)f(x).$$

□

Beweis Satz 4.5. Wir zeigen zunächst, dass für festes $N = n$,

$$E[Z_1(u)^2] \leq n(n-1) \left[\frac{1}{2}\bar{F}\left(\frac{u}{2}\right)^2 - \bar{F}\left(\frac{u}{n}\right)^2 \log\left(\bar{F}\left(\frac{u}{2}\right)\right) \right] \quad (4.5)$$

gilt.

$$E[Z_1(u)^2] = E \left[\left(\frac{\bar{F}(u - S_{n-1}^*)}{\bar{F}(X_{(n-1)})} \right)^2 I_{\{X_{(n-1)} \leq u/n\}} \right] \quad (4.6)$$

$$+ E \left[\left(\frac{\bar{F}((u - S_{n-1}^*) \vee X_{(n-1)})}{\bar{F}(X_{(n-1)})} \right)^2 I_{\{u/n < X_{(n-1)} \leq u/2\}} \right] \quad (4.7)$$

$$+ E \left[1 I_{\{u/2 < X_{(n-1)}\}} \right] \quad (4.8)$$

Man kann den ersten Summanden (4.6) wie folgt beschränken:

Für $X_{(n-1)} \leq \frac{u}{n}$ gilt $\bar{F}(u - S_{n-1}^*) \leq \bar{F}\left(\frac{u}{n}\right)$, somit gilt:

$$\begin{aligned} &E \left[\left(\frac{\bar{F}(u - S_{n-1})}{\bar{F}(X_{(n-1)})} \right)^2 I_{\{X_{(n-1)} < u/n\}} \right] \\ &\leq \bar{F}\left(\frac{u}{n}\right)^2 \int_0^{\frac{u}{n}} \frac{f_{X_{(n-1)}}(y)}{\bar{F}(y)^2} dy \\ &\leq n(n-1)\bar{F}\left(\frac{u}{n}\right)^2 \int_0^{\frac{u}{n}} \frac{f(y)}{\bar{F}(y)} dy \\ &\leq -n(n-1)\bar{F}\left(\frac{u}{n}\right)^2 \log\left(\bar{F}\left(\frac{u}{n}\right)\right). \end{aligned}$$

Der zweite Summand (4.7) kann analog beschränkt werden. Für $\frac{u}{n} < X_{(n-1)} \leq \frac{u}{2}$ gilt $\overline{F}((u - S_{n-1}^*) \vee X_{(n-1)}) \leq \overline{F}\left(\frac{u}{n}\right)$, daraus folgt:

$$\begin{aligned} & E \left[\left(\frac{\overline{F}((u - S_{n-1}^*) \vee X_{(n-1)})}{\overline{F}(X_{(n-1)})} \right)^2 I_{\{X_{(n-1)} < u/n\}} \right] \\ & \leq \overline{F}\left(\frac{u}{n}\right)^2 \int_{\frac{u}{n}}^{\frac{u}{2}} \frac{f_{X_{(n-1)}}(y)}{\overline{F}(y)^2} dy \\ & \leq n(n-1) \overline{F}\left(\frac{u}{n}\right)^2 \int_{\frac{u}{n}}^{\frac{u}{2}} \frac{f(y)}{\overline{F}(y)} dy \\ & \leq -n(n-1) \overline{F}\left(\frac{u}{n}\right)^2 \left[\log\left(\overline{F}\left(\frac{u}{n}\right)\right) - \log\left(\overline{F}\left(\frac{u}{2}\right)\right) \right]. \end{aligned}$$

Um eine obere Schranke für (4.8) zu erhalten, schreibt man:

$$\begin{aligned} E \left[I_{\{X_{(n-1)} > u/2\}} \right] &= \int_{\frac{u}{2}}^{\infty} f_{X_{(n-1)}}(y) dy \\ &= n(n-1) \int_{\frac{u}{2}}^{\infty} F(y)^{n-2} \overline{F}(y) f(y) dy \\ &\leq n(n-1) \int_{\frac{u}{2}}^{\infty} \overline{F}(y) f(y) dy \\ &\leq n(n-1) \frac{1}{2} \overline{F}\left(\frac{u}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Durch Addition dieser drei Ergebnisse erhält man (4.5).

Aus (4.5), Lemma 2.14 und $\text{Var}[Z_1(u)] \leq E[Z_1(u)^2]$ folgt

$$\begin{aligned} \text{Var}[Z_1] &\leq E \left[N^2 \left(\frac{1}{2} \overline{F}\left(\frac{u}{2}\right)^2 + \overline{F}\left(\frac{u}{N}\right)^2 \left| \log\left(\overline{F}\left(\frac{u}{2}\right)\right) \right| \right) \right] \\ &\leq E[N^2] \frac{1}{2} C_+(\varepsilon)^2 2^{2(\alpha-\varepsilon)} (1+u)^{-2(\alpha-\varepsilon)} \\ &\quad + E[C_+(\varepsilon)^2 N^{2-2\varepsilon+2\alpha} (1+u)^{-2(\alpha-\varepsilon)} \left| \log(C_-(\varepsilon)(1+u)^{-\alpha-\varepsilon}) \right|] \\ &= (D_1(\varepsilon) + D_2(\varepsilon) |\log(1+u)|) (1+u)^{2(\varepsilon-\alpha)}. \end{aligned}$$

Für Konstanten $D_1(\varepsilon)$ und $D_2(\varepsilon)$ welche nicht von u abhängen. Zusammen mit Lemma 2.7 und $L(x)$ slowly varying folgt:

$$\begin{aligned} \liminf_{u \rightarrow \infty} \frac{|\log(\text{Var}[Z_1(u)])|}{|2 \log(z(u))|} &\geq \liminf_{u \rightarrow \infty} \frac{\log((D_1(\varepsilon) + D_2(\varepsilon) |\log(1+u)|) (1+u)^{2(\varepsilon-\alpha)})}{2 \log(cL(u)/(1+u)^\alpha)} \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{-2(\alpha-\varepsilon) \log(1+u)}{2 \log(cL(u)) - 2\alpha \log(1+u)} \\ &\quad + \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\log(D_1(\varepsilon) + D_2(\varepsilon) |\log(1+u)|)}{2 \log(cL(u)) - 2\alpha \log(1+u)} \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{-2(\alpha-\varepsilon) \log(1+u)}{-2\alpha \log(1+u)} = 1 - \frac{\varepsilon}{\alpha}. \end{aligned}$$

mit $\varepsilon \rightarrow 0$ folgt, dass Z_1 asymptotisch effizient ist. \square

Bemerkung 4.2. Für F lognormalverteilt, kann man zeigen, dass Z_1 asymptotisch effizient ist. Für einen Beweis siehe [Bin97]

Lemma 4.7 ([AK97]). Sei $\bar{F}(x) = e^{-\gamma x^\beta}$ weibullverteilt, $E[z^N] < \infty$ für ein $z > 1$ und $P(N = 2) > 0$. Dann ist Z_1 nicht asymptotisch effizient.

Beweis. Für $n = 2$ gilt:

$$\begin{aligned} E[Z_1^2 | N = 2] &= \int_0^\infty \frac{\bar{F}((u-y) \vee y)^2}{\bar{F}(y)^2} f_{X_{(1)}}(y) dy \geq \int_0^{u/2} \frac{\bar{F}(u-y)^2}{\bar{F}(y)^2} f_{X_{(1)}}(y) dy \\ &= \int_0^{u/2} 2 \frac{\bar{F}(u-y)^2}{\bar{F}(y)} f(y) dy = 2\beta\gamma \int_0^{u/2} \bar{F}(u-y)^2 y^{\beta-1} dy \\ &\geq 2\beta\gamma (u/2)^{\beta-1} \int_0^{u/2} \bar{F}(u-y)^2 dy = 2\beta\gamma (u/2)^{\beta-1} \int_{u/2}^u \bar{F}(y)^2 dy \\ &\geq \int_{u/2}^u 2\beta\gamma y^{\beta-1} e^{-2\gamma y^\beta} dy = e^{-2\gamma (u/2)^\beta} - e^{-2\gamma u^\beta} = e^{-2^{1-\beta}\gamma u^\beta} (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Zusammen mit Lemma 2.6 folgt:

$$\begin{aligned} \liminf_{u \rightarrow \infty} \frac{\log(\text{Var}[Z_1(u)])}{2 \log(z(u))} &\leq \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\log(E[Z_1(u)^2 | N = 2] P(N = 2) - E[Z_1(u)^2])}{2 \log(E[N] \bar{F}(u))} \\ &\leq \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{2^{1-\beta}\gamma u^\beta}{2\gamma u^\beta} = 2^{-\beta} < 1. \end{aligned}$$

□

4.3.2 Eine Importance Sampling Methode

Da der Schätzer Z_1 für die Weibull-Verteilung nicht asymptotisch effizient ist, geben Asmussen, Binswanger und Højgaard [ABH00] eine Importance Sampling Methode an, welche bei Weibull-, Pareto- und Lognormal-Zufallsvariablen asymptotisch effizient ist. Bezeichne $H(x)$ die Verteilungsfunktion des Importance Sampling Maßes und $h(x)$ die dazugehörige Dichte. Für $H(x)$ muss dabei folgende Bedingung erfüllt sein:

Bedingung 1. Für K die Verteilung mit Dichte $k(x) = f(x)^2 / (ch(x))$, mit $c = \int_0^\infty f(x)^2 / h(x) dx$ gelte, $K \in \mathcal{S}$ und $\bar{K}(x) \stackrel{\log}{\leq} \bar{F}(x)^2$.

Verwendet man ein H mit $H(x) \sim c_1 / \log(x)$, zum Beispiel

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\eta}{x \log(x)^2} & a < x, \\ \gamma g(x) & 0 \leq x \leq a, \end{cases}$$

mit $a > e$, $\eta > 0$, $g(x)$ eine beliebige Dichtefunktion auf $[0, a]$ und $\gamma > 0$ mit

$$\int_0^\infty h(x) dx = \eta \int_a^\infty \frac{1}{x \log(x)^2} dx + \gamma = \frac{\eta}{\log(a)} + \gamma = 1,$$

dann ist Bedingung 1 für die Verteilungen Weibull, Lognormal und Regular Varying erfüllt. Wir zeigen dies für $\bar{F}(x) = (1+x)^{-\alpha}$, die anderen Fälle gehen analog benötigen aber einen größeren Aufwand. Für $x > a$ gilt:

$$k(x) = \frac{f(x)^2}{ch(x)} = \frac{\alpha^2 (1+x)^{-2(\alpha+1)}}{c\eta / (x \log(x)^2)} = \frac{\alpha^2 x \log(x)^2}{c\eta (1+x)} (1+x)^{-2\alpha-1}.$$

Zusammen mit Satz 2.11 folgt:

$$\bar{K}(x) \sim \frac{\alpha x \log(x)^2}{2c\eta (1+x)} (1+x)^{-2\alpha} = \frac{\alpha x \log(x)^2}{2c\eta (1+x)} \bar{F}(x)^2.$$

Damit gilt $\overline{K}(x) \stackrel{\log}{\leq} \overline{F}(x)^2$. $K(x)$ ist regular varying da $\log(x)$ und $x/(1+x)$ slowly varying sind. Damit gilt, $K \in \mathcal{S}$

Als Schätzer verwendet man bei festem $N = n$

$$Z_2(u) = \frac{f(X_1)}{h(X_1)} \cdots \frac{f(X_n)}{h(X_n)} I_{\{S_n > u\}},$$

wobei die X_1, X_2, \dots, X_n iid Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion $H(x)$ sind.

Satz 4.8 ([ABH00]). Sei $F \in \mathcal{S}$ und Bedingung 1 erfüllt, dann ist Z_2 asymptotisch effizient.

Beweis.

$$\begin{aligned} E[Z_2(u)^2] &= \int \cdots \int_{\{x_1 + \cdots + x_n > u\}} \frac{f(x_1)^2}{h(x_1)^2} \cdots \frac{f(x_n)^2}{h(x_n)^2} h(x_1) \cdots h(x_n) dx_1 \cdots dx_n \\ &= c^n \int \cdots \int_{\{x_1 + \cdots + x_n > u\}} k(x_1) k(x_2) \cdots k(x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\ &= c^n P_K(X_1 + \cdots + X_n > u) = c^n \overline{K}^{n*}(u). \end{aligned}$$

Aus Bedingung 1 und Proposition 2.3 folgt $c^n \overline{K}^{n*}(u) \sim nc^n \overline{K}(u)$. Der Satz folgt mit $nc^n \overline{K}(u) \stackrel{\log}{\leq} n^2 \overline{F}(u)^2$. \square

Korollar 4.9. Sei $F \in \mathcal{S}$, Bedingung 1 erfüllt, N eine positive ganzzahlige Zufallsvariable mit $E[N(c + \varepsilon)^N] < \infty$ für ein $\varepsilon > 0$ und die X_1, X_2, \dots sind iid Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion $H(x)$. Dann ist der Schätzer

$$Z_2^*(u) = \frac{f(X_1)}{h(X_1)} \cdots \frac{f(X_N)}{h(X_N)} I_{\{S_N > u\}},$$

asymptotisch effizient.

Beweis. Aus dem Beweis von Satz 4.8 folgt: $E[Z_2^*(u)^2 | N = n] = c^n \overline{K}^{n*}(u)$. Aus Lemma 2.4 folgt die Existenz einer Konstanten L mit $c^n \overline{K}^{n*}(u) / \overline{K}(u) \leq Lc^n(1 + \varepsilon/c)^n = L(c + \varepsilon)^n$. Zusammen mit Proposition 2.3 und dem Satz von der dominierten Konvergenz folgt $E[Z_2^*(u)] \sim E[Nc^N] \overline{K}(u)$. Das Korollar folgt aus $E[Nc^N] \overline{K}(u) \stackrel{\log}{\leq} E[N]^2 \overline{F}(u)^2$. \square

Wir wollen zeigen, dass es für die Verteilungen Weibull, Lognormal, Regular Varying und für alle $z > 1$ eine Verteilung $H(x)$ gibt bei der die Konstante $c < z$ ist. Daraus folgt, dass man für alle N mit $E[(1 + \varepsilon)^N] < \infty$ für ein $\varepsilon > 0$ einen asymptotisch effizienten Schätzer für $P(S_N > u)$ findet. Sei

$$\gamma(a) = 1 - \frac{1}{\log(a)}, \quad \varepsilon(a) = \int_a^\infty f(x)^2 x \log(x)^2 dx$$

und a so groß, dass

$$\frac{F(a)^2}{\gamma(a)} + \varepsilon(a) < z.$$

So ein a existiert da $\lim_{a \rightarrow \infty} \gamma(a) = \lim_{a \rightarrow \infty} F(a) = 1$ und $\lim_{a \rightarrow \infty} \varepsilon(a) = 0$. Sei

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x \log(x)^2} & x > a, \\ \gamma(a) \frac{f(x)}{F(a)} & 0 \leq x \leq a. \end{cases}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 c &= \int_0^\infty \frac{f(x)^2}{h(x)} dx \\
 &= \frac{1}{\gamma(a)} \int_0^a f(x)F(a) dx + \int_a^\infty f(x)^2 x \log(x)^2 dx \\
 &= \frac{F(a)^2}{\gamma(a)} + \varepsilon(a) < z.
 \end{aligned}$$

4.3.3 Hazard Rate Twisting

Im Jahr 2002 stellten Juneja und Shahabuddin [JS02] eine weitere Importance Sampling Methode zur Berechnung von $P(S_N > u)$ vor. Die Idee ist, das neue Maß durch die Veränderung der Hazard Rate $\lambda(x)$ auf $(1-\theta)\lambda(x)$, $0 < \theta < 1$ zu konstruieren. Die Dichte des neuen Maßes ist dann gegeben durch:

$$f_\theta(x) = (1-\theta)\lambda(x) \exp\{-(1-\theta)\Lambda(x)\}.$$

Beispiel 4.1. Verwendet man als ursprüngliches Maß eine Pareto-Verteilung mit $\bar{F}(x) = 1/(1+x)^\alpha$ so gilt für das neue Maß $\bar{F}_\theta(x) = 1/(1+x)^{(1-\theta)\alpha}$, es ist also wieder eine Pareto-Verteilung.

Betrachten wir nun das Problem $P(S_n > u)$ mit n fest. Beim Hazard Rate Twisting verwendet man den Schätzer:

$$Z_3(u) = \frac{f(X_1)}{f_\theta(X_1)} \cdots \frac{f(X_n)}{f_\theta(X_n)} I_{\{S_n > u\}} = \frac{1}{(1-\theta)^n} \exp\left\{-\theta \sum_{i=1}^n \Lambda(X_i)\right\} I_{\{S_n > u\}},$$

mit X_1, X_2, \dots, X_n iid mit Verteilungsfunktion \bar{F}_θ . Um zu zeigen, dass Z_3 asymptotisch effizient ist, brauchen wir.

Lemma 4.10. *Es existiere ein $d > 0$, sodass die Hazard Rate λ für alle $x > d$ fallend und differenzierbar ist. Sei $\lim_{x \rightarrow \infty} \lambda(x) = 0$. Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$*

$$\sum_{i=1}^n \Lambda(x_i) \geq \Lambda\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) - \varepsilon,$$

für alle $(x_1, \dots, x_n) \geq 0$ mit $\sum_{i=1}^n x_i$ groß genug.

Beweis. Sei $\sum_{i=1}^n x_i \geq nd$. Bezeichne $x_{(i)}$ die i -te Ordnungsstatistik, mit $x_{(n)}$ als Maximum. Dann gilt für alle $x \in [\sum_{i=2}^n x_{(i)}, \sum_{i=1}^n x_i]$, dass $x \geq x_{(n)} \geq d$ und damit $\lambda'(x) \leq 0$. Aus $\Lambda'(x) = \lambda(x)$ und $\Lambda''(x) = \lambda'(x)$ folgt die Taylorentwicklung um $\sum_{i=2}^n x_{(i)}$:

$$\Lambda\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \Lambda\left(\sum_{i=2}^n x_{(i)}\right) + x_{(1)}\lambda\left(\sum_{i=2}^n x_{(i)}\right) + x_{(1)}^2 \frac{\lambda'(\xi)}{2}, \quad (4.9)$$

für ein $\xi \in [\sum_{i=2}^n x_{(i)}, \sum_{i=1}^n x_i]$ mit $\lambda'(\xi) \leq 0$. Wegen der Monotonie von $\lambda(x)$ für $x \geq d$ gilt:

$$x_{(1)}\lambda\left(\sum_{i=2}^n x_{(i)}\right) \leq x_{(1)}\lambda(x_{(n)}). \quad (4.10)$$

Sei $a_{\varepsilon, n} \geq d$ eine Zahl mit $\lambda(x) \leq \varepsilon/(nd)$ für alle $x \geq a_{\varepsilon, n}$. Wir behaupten, dass für $\sum_{i=1}^n x_i/n \geq a_{\varepsilon, n}$

$$x_{(1)}\lambda(x_{(n)}) \leq \Lambda(x_{(1)}) + \frac{\varepsilon}{n} \quad (4.11)$$

gilt. Für $x_{(1)} \leq d$ gilt: $x_{(1)}\lambda(x_{(n)}) \leq d\lambda(\sum_{i=1}^n x_i/n) \leq \varepsilon/n$. Für $x_{(1)} > d$ gilt: $(x_{(1)} - d)\lambda(x_{(n)}) \leq \int_d^{x_{(1)}} \lambda(x) dx \leq \Lambda(x_{(1)})$ und damit $x_{(1)}\lambda(x_{(n)}) \leq \Lambda(x_{(1)}) + d\lambda(x_{(n)}) \leq \Lambda(x_{(1)}) + \varepsilon/n$. Somit gilt unsere Behauptung.

Aus (4.9), (4.10) und (4.11) folgt mit $\lambda'(\xi) \leq 0$:

$$\Lambda\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \leq \Lambda\left(\sum_{i=2}^n x_i\right) + \Lambda(x_{(1)}) + \frac{\varepsilon}{n}.$$

Wiederholt man dieses Argument n mal so folgt das Lemma. \square

Satz 4.11 ([JS02]). Sei $F \in \mathcal{S}$. Es existiere ein $d > 0$, sodass $\lambda(x)$ für alle $x > d$ fallend und differenzierbar ist. Sei $\lim_{x \rightarrow \infty} \lambda(x) = 0$. Weiters sei $b > 0$ eine Konstante. Dann ist Z_3 asymptotisch effizient, für $\theta = 1 - b/\Lambda(u)$.

Beweis. Aus der Definition von Z_3 und Lemma 4.10 folgt für u groß genug und $0 < \theta < 1$,

$$Z_3(u) \leq \frac{1}{(1-\theta)^n} e^{-\theta(\Lambda(u)-\varepsilon)} \leq \frac{1}{(1-\theta)^n} e^{-\theta\Lambda(u)+\varepsilon}. \quad (4.12)$$

Setzt man für $\theta = 1 - b/\Lambda(u)$, quadriert beide Seiten und bildet den Erwartungswert bezüglich des neuen Maßes P_θ so erhält man,

$$E_{P_\theta}[Z_3(u)^2] \leq e^{2(\varepsilon+b)} \left(\frac{\Lambda(u)}{b}\right)^{2n} e^{-2\Lambda(u)}.$$

Aus Proposition 2.3 folgt $P(S_n > u) \sim n\bar{F}(u) = ne^{-\Lambda(u)}$. Damit gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\log(\text{Var}_{P_\theta}[Z_3(u)])}{2 \log(P(S_n > u))} &\geq \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\log(E_{P_\theta}[Z_3(u)^2])}{2 \log(P(S_n > u))} \\ &\geq \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\log\left(e^{2(\varepsilon+b)} \left(\frac{\Lambda(u)}{b}\right)^{2n} e^{-2\Lambda(u)}\right)}{2 \log(ne^{-\Lambda(u)})} \\ &\geq \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{-2\Lambda(u) + 2(\varepsilon + b) + 2n \log(\Lambda(u)) - 2n \log(b)}{-2\Lambda(u) + 2 \log(n)} = 1 \end{aligned}$$

Somit ist Z_3 asymptotisch effizient. \square

Um den minimalen Wert der rechten Seite der Ungleichung (4.12) zu finden, logarithmiert man diese, differenziert anschließend nach θ und setzt das Ergebnis gleich Null, danach erhält man

$$-\frac{n}{1-\theta} - \Lambda(u) = 0 \text{ und damit } \theta = 1 - \frac{n}{\Lambda(u)}.$$

Daraus folgt dass $\theta = 1 - n/\Lambda(u)$ der optimale Wert für θ ist.

Bemerkung 4.3. Bei zufälligem N gibt es Beispiele bei denen Z_3 nicht asymptotisch effizient ist (siehe [JS02]).

4.3.4 Weighted Delayed Hazard Rate Twisting

Um Hazard Rate Twisting auch für zufälliges N brauchbar zu machen, entwickelten Juneja und Shahabuddin [JS02] Weighted Delayed Hazard Rate Twisting, die Idee hierbei ist die ursprüngliche Dichte $f(x)$ erst ab einem x_u^* zu verändern und zusätzlich die Teile unterschiedlich zu gewichten. Man erhält damit die neue Dichte

$$f_{\theta_u, x_u^*}(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{1+\omega} & \text{für } x \leq x_u^*, \\ \left(1 - \frac{F(x_u^*)}{1+\omega}\right) \frac{f_{\theta_u}(x)}{F_{\theta_u}(x_u^*)} & \text{für } x > x_u^*. \end{cases}$$

Bedingung 2. Sei $E[z^N] < \infty$ für ein $z > 1$. Dann werden die Parameter ω , θ_u und x_u^* wie folgt gewählt:

- Für das Gewicht ω gilt $0 < \omega < z - 1$;
- Für ein $b > 0$ ist $\theta_u = 1 - b/\Lambda(u)$;
- Sei a eine Konstante mit $0 < a < 1/[z^{-1}(1 + \omega)] - 1$.
Dann ist x_u^* die Lösung von

$$\Lambda(x_u^*) = \log(\Lambda(u)) - \frac{1}{2} \log(a\omega b^2). \quad (4.13)$$

Als Schätzer wird

$$Z_4(u) = \frac{f(X_1)}{f_{\theta_u, x_u^*}(X_1)} \cdots \frac{f(X_N)}{f_{\theta_u, x_u^*}(X_N)} I_{\{S_N > u\}}$$

verwendet. Dabei sind die X_1, X_2, \dots iid mit Verteilungsfunktion F_{θ_u, x_u^*} . Es wird zunächst N simuliert und anschließend Z_4 berechnet.

Wir wollen zeigen, dass Z_4 asymptotisch effizient ist, brauchen dazu aber noch Annahmen für F .

Annahme 1. Es existiere ein $d > 0$, so dass die Hazard Rate $\lambda(x)$ für alle $x > d$ differenzierbar und fallend ist. Weiters hat $\lambda(x)$ die Form:

$$\lambda(x) = \frac{L(x)}{x^\beta},$$

mit $0 < \beta \leq 1$ und $L(x)$ ist slowly varying.

Bemerkung 4.4. Eine Verteilung welche Annahme 1 erfüllt ist subexponentiell.

Annahme 2. Ist $\beta = 1$, so gibt es Konstanten p_1, p_2 ($p_1 < p_2$) und $x_0 > 0$ mit

$$\log(x)^{p_1} \leq \Lambda(x) \leq \log(x)^{p_2},$$

für alle $x > x_0$.

Satz 4.12 ([JS02]). Sei $F \in \mathcal{S}$ eine Verteilungsfunktion, welche die Annahmen 1 und 2 erfüllt. Weiters sei $E[z^N] < \infty$ für ein $z > 1$ und die Parameter der Importance Sampling Verteilung F_{θ_u, x_u^*} erfüllen die Bedingung 2. Dann ist Z_4 asymptotisch effizient.

Um diesen Satz zu beweisen zerlegt man $\{S_N > u\}$ in folgende Teilmengen:

- Sei $X_{(0)} = 0$. Für $n > 0$ und $0 \leq k \leq n - 1$ sei

$$A_{n,k} = \{N = n, S_n > u, X_{(k)} < x_u^*, X_{(k+1)} \geq x_u^*\}.$$

- Sei $A_n = \bigcup_{k=0}^{n-1} A_{n,k}$ und

$$B_n = \{N = n, S_n > u, X_{(n)} < x_u^*\}.$$

- Sei $\psi = -2/\log((1+a)(1+\omega)z^{-1})$, dann ist $A = \bigcup_{n=1}^{\lfloor \psi \Lambda(u) \rfloor} A_n$, $A' = \bigcup_{n > \psi \Lambda(u)} A_n$ und $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.

Nun gilt:

$$\{S_N > u\} = A \cup A' \cup B.$$

Wir benötigen nun ein paar technische Lemmas. Sei $d \geq 0$ jene Zahl ab der die Hazard Rate fallend und differenzierbar ist, weiters bezeichne \underline{x} eine beliebige Zahl größer als d , dann gilt.

Lemma 4.13. *Unter Annahme 1, gilt für alle n und (x_1, \dots, x_n) mit $x_i \geq \underline{x}$ für $1 \leq i \leq n$:*

$$\sum_{i=1}^n \Lambda(x_i) \geq \lambda \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) + (n-1)\Lambda(\underline{x}) - (n-1)\underline{x}\lambda(x_n). \quad (4.14)$$

Beweis. Aus (4.9) folgt für $\sum_{i=1}^n x_i/n \geq d$:

$$\Lambda \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \leq \Lambda \left(\sum_{i=2}^n x_i \right) + x_{(1)} \lambda \left(\sum_{i=2}^n x_i \right). \quad (4.15)$$

Durch Addition und Subtraktion von $\Lambda(x_{(1)})$, kann man die rechte Seite als,

$$\Lambda \left(\sum_{i=2}^n x_i \right) + \Lambda(x_{(1)}) - \int_0^{x_{(1)}} \left(\lambda(x) - \lambda \left(\sum_{i=2}^n x_i \right) \right) dx \quad (4.16)$$

schreiben. Da $\lambda(x)$ monoton fallend ist für alle $x \geq \underline{x}$ und $\Lambda(0) = 0$ gilt:

$$\int_0^{x_{(1)}} \left(\lambda(x) - \lambda \left(\sum_{i=2}^n x_i \right) \right) dx \geq \int_0^{\underline{x}} \left(\lambda(x) - \lambda \left(\sum_{i=2}^n x_i \right) \right) dx \geq \Lambda(\underline{x}) - \underline{x}\lambda(x_n).$$

Kombiniert man dieses Ergebnis mit (4.15) und (4.16) erhält man die Ungleichung:

$$\Lambda \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) + \Lambda(\underline{x}) - \underline{x}\lambda(x_n) \leq \Lambda \left(\sum_{i=2}^n x_i \right) + \Lambda(x_{(1)}).$$

Wiederholt man dieses Argument $n-1$ mal so erhält man die Aussage des Lemmas. \square

Lemma 4.14. *Sei x_u^* definiert durch $\Lambda(x_u^*) = \log(\Lambda(u)) - \log(c_1)$ für eine Konstante $c_1 > 0$, weiters sei c_2 eine positive Konstante. Dann gilt unter den Annahmen 1 und 2:*

$$\lim_{u \rightarrow \infty} x_u^* \lambda \left(\frac{u}{c_2 \Lambda(u)} \right) = 0, \quad (4.17)$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{x_u^* \Lambda(u)}{u} = 0. \quad (4.18)$$

Beweis. Für jedes \bar{L} slowly varying, jedes $\varepsilon > 0$ und u groß genug gilt

$$u^{-\varepsilon} \leq \bar{L}(u) \leq u^\varepsilon \quad (4.19)$$

Für $0 < \beta < 1$ folgt aus Satz 2.11 und (4.19), dass

$$\frac{u}{c_2 \Lambda(u)} \sim \frac{(1-\beta)u^\beta}{c_2 \bar{L}(u)} \geq u^{\beta-\varepsilon}, \quad (4.20)$$

für u groß genug gilt. Da $\lambda(x)$ fallend ist für alle $x \geq d$, gilt für jedes groß genuge u und jedes ε mit $\beta > \varepsilon > 0$:

$$\lambda \left(\frac{u}{c_2 \Lambda(u)} \right) \leq \lambda(u^{\beta-\varepsilon}). \quad (4.21)$$

Aus (4.19) folgt $\lambda(x) \leq x^{-(\beta-\varepsilon)}$ für x groß genug. Zusammen mit (4.21) folgt daraus:

$$\lambda \left(\frac{u}{c_2 \Lambda(u)} \right) \leq \frac{1}{u^{(\beta-\varepsilon)^2}}. \quad (4.22)$$

Aus Satz 2.11 folgt, für x_u^* (und u groß genug):

$$x_u^* \leq \Lambda(x_u^*)^{1/(1-\beta-\varepsilon)} = (\log(\Lambda(u)) - \log(c_1))^{1/(1-\beta-\varepsilon)}. \quad (4.23)$$

Die Aussage (4.17) folgt aus (4.22) und (4.23). Die Aussage (4.18) folgt aus (4.20) und (4.23). Betrachten wir nun den Fall $\beta = 1$ (d.h. $\lambda(x) = L(x)/x$). In diesem Fall ist $\Lambda(x)$ slowly varying (siehe Satz 2.11), daraus folgt, dass für alle $\varepsilon > 0$, $u/(c_2\Lambda(u)) \geq u^{1-\varepsilon/2}$ für u groß genug gilt. Damit gilt für alle u groß genug:

$$\lambda\left(\frac{u}{c_2\Lambda(u)}\right) \leq \lambda(u^{1-\varepsilon/2}) \leq \frac{1}{u^{1-\varepsilon}}. \quad (4.24)$$

Die untere Schranke für die Hazard Funktion gegeben durch Annahme 2 liefert eine obere Schranke für x_u^* , nämlich:

$$x_u^* \leq \exp\left\{\Lambda(x_u^*)^{1/p_1}\right\} = \exp\left\{\log(\Lambda(u) - \log(c_1))^{1/p_1}\right\} \leq K_4 \exp\left\{c_3 \log(\Lambda(u))^{1/p_1}\right\},$$

mit geeignet gewählten Konstanten K_4 und c_3 . Verwendet man nun die obere Schranke der Hazard Funktion aus Annahme 2 so erhält man eine obere Schranke für x_u^* :

$$x_u^* \leq K_4 \exp\left\{c_3 \log(\log(u)^{p_2})^{1/p_1}\right\},$$

für u groß genug. Verwendet man diese Schranke zusammen mit (4.24) so folgt (4.17). Aussage (4.18) folgt ähnlich mit der Tatsache dass $\Lambda(u)/u \leq 1/u^{1-\varepsilon}$ für alle $\varepsilon > 0$ und u groß genug. \square

Lemma 4.15. *Unter den Annahmen 1, 2 und für u groß genug gilt:*

1. *Es existiert eine Konstante $K_1 > 0$ mit:*

$$E_{P^*}[Z_4(u)^2 I_A] \leq K_1 \Lambda(u)^2 \exp\{-2\Lambda(u - x_u^* \psi \Lambda(u))\}. \quad (4.25)$$

2. *Es existiert eine Konstante $K_2 > 0$ mit:*

$$E_{P^*}[Z_4(u)^2 I_{A'}] \leq K_2 e^{-2\Lambda(u)}. \quad (4.26)$$

3.

$$E_{P^*}[Z_4(u)^2 I_B] \leq e^{-2\Lambda(u)} \quad (4.27)$$

Dabei bedeutet $E_{P^*}[\cdot]$, dass der Erwartungswert bezüglich dem Importance Sampling Maß berechnet wird.

Beweis. Für $x \leq x_u^*$ gilt:

$$\frac{f(x)}{f_{\theta_u, x_u^*}(x)} = (1 + \omega),$$

und für $x > x_u^*$ gilt:

$$\frac{f(x)}{f_{\theta_u, x_u^*}(x)} = \frac{1 + \omega}{\omega + \bar{F}(x_u^*)} \bar{F}_{\theta_u}(x_u^*) \frac{f(x)}{f_{\theta_u}(x)} = \left(\frac{1 + \omega}{1 - \theta_u}\right) \left(\frac{\bar{F}_{\theta_u}(x_u^*)}{1 + \omega - F(x_u^*)}\right) \frac{1}{e^{\theta_u \Lambda(x)}}.$$

1.) Auf der Menge $A_{n,k}$ gilt:

$$Z_4(u) = (1 + \omega)^n \left(\frac{\bar{F}_{\theta_u}(x_u^*)}{(1 - \theta_u)(1 + \omega - F(x_u^*))}\right)^{n-k} \exp\left\{-\theta_u \sum_{i=k+1}^n \Lambda(X_{(i)})\right\}. \quad (4.28)$$

Es gilt $X_{(i)} \geq x_u^*$ für $k+1 \leq i \leq n$. Verwendet man (4.14) mit $\underline{x} = x_u^*$ (wobei u so groß ist, dass $x_u^* > d$ gilt) so erhält man:

$$\sum_{i=k+1}^n \Lambda(X_{(i)}) \geq \Lambda\left(\sum_{i=k+1}^n X_{(i)}\right) + (n-k-1)\Lambda(x_u^*) - (n-k-1)x_u^*\lambda(X_{(n)}).$$

Auf der Menge $A_{n,k}$, mit $n \leq \psi\Lambda(u)$ gilt:

$$\sum_{i=k+1}^n X_{(i)} \geq u - kx_u^* \geq u - nx_u^* \geq u - \psi\Lambda(u)x_u^*,$$

und damit:

$$\sum_{i=k+1}^n \Lambda(X_{(i)}) \geq \Lambda(u - \psi\Lambda(u)x_u^*) + (n-k-1)\Lambda(x_u^*) - (n-k-1)x_u^*\lambda(X_{(n)}). \quad (4.29)$$

Aus (4.28), (4.29), $\theta_u = 1 - b/\Lambda(u)$, und $\bar{F}_{\theta_u}(x_u^*) = e^{-(1-\theta_u)\Lambda(x_u^*)}$ folgt, dass für alle u groß genug und $n \leq \psi\Lambda(u)$, $X_{(n)} \geq u/n \geq u/(\psi\Lambda(u))$ gilt:

$$\begin{aligned} Z_4(u)I_{A_{n,k}} &\leq (1+\omega)^n \left(\frac{\Lambda(u)e^{-(1-\theta_u)\Lambda(x_u^*)}}{b(1+\omega-F(x_u^*))} \right)^{n-k} \\ &\quad \times \exp\{-\theta_u(\Lambda(u - \psi\Lambda(u)x_u^*) + (n-k-1)\Lambda(x_u^*))\} \\ &\quad \times \exp\left\{\theta_u(n-k-1)x_u^*\lambda\left(\frac{u}{\psi\Lambda(u)}\right)\right\} \\ &\leq (1+\omega)^n \left(\frac{\Lambda(u)e^{-\Lambda(x_u^*)}}{b(1+\omega-F(x_u^*))} \right)^{n-k} \\ &\quad \times \exp\left\{-\Lambda(u - x_u^*\psi\Lambda(u)) + b\frac{\Lambda(u - x_u^*\psi\Lambda(u))}{\Lambda(u)} + \theta_u\Lambda(x_u^*)\right\} \\ &\quad \times \exp\left\{(n-k)x_u^*\lambda\left(\frac{u}{\psi\Lambda(u)}\right)\right\} \\ &\leq (1+\omega)^n \left(\frac{\Lambda(u)e^{-\Lambda(x_u^*)}e^{x_u^*\lambda(u/(\psi\Lambda(u)))}}{b(1+\omega-F(x_u^*))} \right)^{n-k} \\ &\quad \times \exp\{-\Lambda(u - x_u^*\psi\Lambda(u)) + \Lambda(x_u^*) + b\}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Aus der Tatsache, dass $P^*(X \leq x_u^*) \leq 1/(1+\omega)$ und $P^*(X > x_u^*) = (1+\omega - F(x_u^*))/(1+\omega)$ erhält man mit $p_n = P(N = n)$:

$$P^*(A_{n,k}) \leq \binom{n}{k} \frac{1}{(1+\omega)^k} \left(\frac{1+\omega - F(x_u^*)}{1+\omega} \right)^{n-k} p_n. \quad (4.31)$$

Quadriert man die Ungleichung (4.30), bildet auf beiden Seiten den Erwartungswert und summiert über $k = 0, \dots, n-1$ so erhält man:

$$\begin{aligned} E[Z_4^2 I_{A_n}] &\leq e^{2\Lambda(x_u^*)+2b} e^{-2\Lambda(u-x_u^*\psi\Lambda(u))} (1+\omega)^n p_n \\ &\quad \times \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \left(\frac{\Lambda(u)^2 e^{-2\Lambda(x_u^*)} e^{2x_u^*\lambda(u/(\psi\Lambda(u)))}}{b^2(1+\omega-F(x_u^*))} \right)^{n-k}. \end{aligned}$$

Verwendet man $a * \omega = (\Lambda(u)e^{-\Lambda(x_u^*)}/b)^2$ (siehe (4.13)), $1 - \bar{F}(x_u^*) \geq 0$, wählt u so groß, dass $\exp\{2x_u^*\lambda(u/(\psi\Lambda(u)))\} \leq (1+\varepsilon_0)$ mit $(1+a(1+\varepsilon_0)) < z/(1+\omega)$ (dies geht wegen (4.17)) und verwendet den binomischen Lehrsatz $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p+q)^n$, so erhält man:

$$E_{P^*}[Z_4^2 I_{A_n}] \leq e^{2\Lambda(x_u^*)+2b} e^{-2\Lambda(u-x_u^*\psi\Lambda(u))} (1+\omega)^n p_n (1+a(1+\varepsilon_0))^n.$$

Der $E_{P^*}[Z_4^2 I_A]$ kann durch die rechte Seite summiert über alle n beschränkt werden. Die Summe ist endlich, da $(1 + \omega)^n (1 + a(1 + \varepsilon_0))^n < z^n$ und $E[z^N] < \infty$. (4.25) erhält man in dem man $\Lambda(x_u^*) = \log(\Lambda(u)) - 1/2 \log(a\omega b^2)$ in die letzte Ungleichung einsetzt und über alle n summiert.

2.) Aus (4.28) folgt auf $A_{n,k}$:

$$Z_4 \leq (1 + \omega)^n \left(\frac{e^{-\Lambda(x_u^*)}}{(1 - \theta_u)(1 + \omega - F(x_u^*))} \right)^{n-k}. \quad (4.32)$$

Wie im Beweis von (1) quadriert man diese Ungleichung, bildet den Erwartungswert und summiert über alle k . Das führt auf:

$$E_{P^*}[Z^2 I_{A_n}] \leq [z^{-1}(1 + \omega)(1 + a)]^n p_n z^n \leq c_4 [z^{-1}(1 + \omega)(1 + a)]^n,$$

mit c_4 einer geeignete Konstante. Summiert man beide Seiten über alle $n > \psi\Lambda(u)$ so erhält man (4.26) (da $\psi = -2/(\log(1 + a)(1 + \omega)z^{-1})$ und $z^{-1}(1 + \omega)(1 + a) < 1$).

3.) Für $n < u/x_u^*$ gilt $P^*(B_n) = 0$. Für $n \geq u/x_u^*$ gilt auf B_n , $Z_4 = (1 + \omega)^n$. Daraus folgt,

$$\begin{aligned} E_{P^*}[Z_4^2 I_B] &\leq \sum_{n \geq u/x_u^*} [(1 + \omega)z^{-1}]^n p_n z^n \leq c_4 \sum_{n \geq u/x_u^*} [(1 + \omega)z^{-1}]^n \\ &\leq \frac{c_4 [(1 + \omega)z^{-1}]^{u/x_u^* - 1}}{1 - (1 + \omega)z^{-1}} = c_5 e^{\log((1 + \omega)z^{-1})u/x_u^*} = c_5 e^{-c_6 u/x_u^*} \end{aligned}$$

für c_5 und c_6 positive Konstanten. Aus (4.18) folgt dass $e^{c_5 u/x_u^*} e^{-2\Lambda(u)} \rightarrow 0$ für $u \rightarrow \infty$ und damit folgt (4.27). \square

Beweis Satz 4.12. Um zu zeigen, dass Z_4 asymptotisch effizient ist braucht man zunächst $E[Z_4(u)] \sim E[N]\bar{F}(u) = E[N]e^{-\Lambda(u)}$. Da nach dem Lemma 4.15,

$$\text{Var}[Z_4] \leq E[Z_4^2] \leq K_1 \Lambda(u)^2 e^{-2\Lambda(u - \psi x_u^* \Lambda(u))} + (K_2 + 1)e^{-2\Lambda(u)} \leq K_3 \Lambda(u)^2 e^{-2\Lambda(u - \psi x_u^* \Lambda(u))},$$

für u groß genug gilt, genügt es,

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\Lambda(u - \psi x_u^* \Lambda(u))}{\Lambda(u)} = 1, \quad (4.33)$$

zu zeigen. Für u groß genug gilt $u - \psi x_u^* \Lambda(u) > d$. Da $\lambda(x)$ differenzierbar und fallend für $x > d$ ist, ist $\Lambda(x)$ konkav für $x > d$. Daraus folgt:

$$\frac{\Lambda(u - x_u^* \psi \Lambda(u)) - \Lambda(d)}{(u - x_u^* \psi \Lambda(u)) - d} \geq \frac{\Lambda(u) - \Lambda(d)}{u - d}.$$

Zusammen mit $\Lambda(x)$ ist nicht fallend folgt:

$$\Lambda(u) \geq \Lambda(u - x_u^* \psi \Lambda(u)) \geq \Lambda(d) + \frac{u - x_u^* \psi \Lambda(u) - d}{u - d} (\Lambda(u) - \Lambda(d)).$$

Dividiert man durch $\Lambda(u)$ und bildet $u \rightarrow \infty$ dann folgt mit (4.18) die Gleichung (4.33). \square

Bemerkung 4.5. Da man nicht nur $E_{P^*}[Z_4]$ berechnen will sondern auch ein Konfidenzintervall angeben möchte, sollte auch der Schätzer für $E_{P^*}[Z_4^2]$ asymptotisch effizient sein. Um das zu garantieren müssen die Parameter auch die folgenden Bedingungen erfüllen. Für ω gilt:

$$0 < \omega < z^{1/3} - 1,$$

und x_u^* wird durch die Gleichung,

$$\Lambda(x_u^*) = \log(\Lambda(u)) - \frac{1}{4} \log(a\omega^3 b^4),$$

bestimmt, wobei $a > 0$, $(1 + a)(1 + \omega)^3 < z$ erfüllen muss.

4.3.5 Eine asymmetrische Idee

Aus der Definition der subexponentiellen Verteilungen folgt, dass sich die Summe subexponentieller Zufallsvariablen gleich wie deren Maximum verhält. Das heißt aber auch, dass die Summe groß wird wenn ein Summand groß wird. Um diese Erkenntnis in die Algorithmen einfließen zu lassen verwenden Asmussen und Kroese [AK04] die Identität:

$$P(S_n > u) = nP(S_n > u, M_n = X_n), \quad (4.34)$$

wobei $M_k = \max\{X_1, \dots, X_k\}$. Diese Identität gilt da die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n iid sind. Sei f die Dichte von F und f^* die Dichte des Importance Sampling Maßes (z.B.: $f^* = f_\theta$ mit dem f_θ aus Kapitel 4.3.3). Man verwendet den Schätzer:

$$n \frac{f(X_n)}{f^*(X_n)} I_{\{S_n > u, M_n = X_n\}}, \quad (4.35)$$

wobei X_1, \dots, X_{n-1} nach dem ursprünglichen Maß f und X_n nach dem Importance Sampling Maß f^* simuliert werden. Verbindet man die Idee mit bedingtem Monte Carlo, so erhält man den Schätzer

$$Z_5(u) = nP(S_n > u, M_n = X_n | X_1, \dots, X_{n-1}) = n\bar{F}(M_{n-1} \vee (u - S_{n-1})). \quad (4.36)$$

Fall 1, F ist regular varying: Das heißt $f(x) = L(x)/(1+x)^{\alpha+1}$, $x \geq 0$, $\alpha > 0$ und $L(x)$ slowly varying. Aus Satz 2.11 folgt $\bar{F}(x) \sim L(x)/(\alpha(x+1)^\alpha)$. Die Importance Sampling Dichte f^* wird analog wie beim Hazard Rate Twisting wieder regular varying gewählt, mit dem Parameter $\alpha^* = b/\log(u)$.

Satz 4.16 ([AK04]). (a) Mit $f^* = \alpha^*/(1+x)^{\alpha^*+1}$ ist der Schätzer (4.35) asymptotisch effizient für festes n ; (b) Gibt es Konstanten u_0, z_0 sodass $L(uz)/L(u)$ entweder monoton fallend oder monoton steigend in $u > u_0$ für alle $z > z_0$ ist. Dann ist

$$c_1 n^2 \log(u)$$

eine asymptotische obere Schranke für den quadrierten relativen Fehler, wobei c_1 eine Konstante ist welche nicht von n abhängt. (c) Falls N eine Zufallsvariable mit $E[N^{3\alpha+3}] < \infty$, dann ist der Schätzer asymptotisch effizient.

Für den Beweis brauchen wir die Dichte g^* welche proportional zu $L(x)^2/(1+x)^{1+2\alpha-\alpha^*}$ ist (diese Dichte hängt von u über $\alpha^* = b/\log(u)$ ab). Wir definieren $g^* = f^2/(c^* f^*)$ mit

$$c^* = \int f^2/f^* \sim c_2 \log(u) \text{ mit } c_2 = b^{-1} \int_0^\infty \frac{L(x)^2}{(1+x)^{2\alpha+1}} dx.$$

Lemma 4.17. Sei X^* eine Zufallsvariable mit Dichte g^* . Dann (a) gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Konstante c_ε mit $P(X^* > u) \leq c_\varepsilon (1+u)^{-(2\alpha-\varepsilon)}$ für alle u groß genug; (b) unter den Bedingungen von Satz 4.16 (b), gilt $P(X^* > u) \sim c_3 \bar{F}(u)^2$.

Beweis. Es gilt:

$$P(X^* > u) \sim c_4 \int_u^\infty \frac{L(x)^2}{(1+z)^{2\alpha-\alpha^*+1}} dz \sim c_4 \int_u^\infty \frac{L(z)^2}{z^{2\alpha-\alpha^*+1}} dz.$$

(a) folgt nun da man α^* für u groß genug mit ε beschränken kann und Satz 2.11 mit $\int_u^\infty L(z)^2/z^{1+\beta} dz \sim L(u)^2/u^\beta$. Für (b) substituiert man $z = uy$ und erhält:

$$P(X^* > u) \sim c_4 \frac{L(u)^2}{u^{2\alpha-\alpha^*}} \int_1^\infty \frac{L(uy)^2/L(u)^2}{(1+y)^{2\alpha-\alpha^*+1}} dy.$$

Nun gilt $u^{\alpha^*} \rightarrow e^b$ und $L(uy)/L(u) \rightarrow 1$ für alle y . Verwendet man gleichmäßige Konvergenz für $y \in [0, z_0]$ und monotone Konvergenz für $y \in (z_0, \infty)$, dann kann man Grenzwert und Integral vertauschen und erhält die Aussage des Lemmas. \square

Beweis Satz 4.16. Sei $A = \{x_1 + \dots + x_n > u, \max_{k \leq n} x_k = x_n\}$. Dann ist das zweite Moment von (4.35) gegeben durch:

$$\begin{aligned} n^2 \int \dots \int_A \frac{f^2(x_n)}{f^*(x_n)} dx_n \prod_{i=1}^{n-1} (f(x_i) dx_i) &= n^2 c^* \int \dots \int_A g^*(x_n) dx_n \prod_{i=1}^{n-1} (f(x_i) dx_i) \\ &= n^2 c^* P^{**}(M_n = X_n, S_n > u), \end{aligned}$$

wobei P^{**} das Maß ist, bei dem die X_i unabhängig sind, X_n die Dichte g^* und der Rest die Dichte f hat.

Sei $\beta \in (2/3, 1)$ und sei $u' = u^\beta / (n-1)$ und $u'' = u - (n-1)u' = u(1 - u^{\beta-1})$. Dann gilt auf $\{M_{n-1} < u'\}$, $X_n > u''$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} P^{**}(M_n = X_n, S_n > u) &\leq P^{**}(X_n > u'') + P^{**}(M_{n-1} > u', X_n > u') \\ &\leq P^{**}(X_n > u'') + nP^{**}(X_n > u')P^{**}(X_1 > u'). \end{aligned}$$

Seien $\delta, \varepsilon > 0$ sodass $2\alpha + \delta < 2\alpha + \delta + 2\varepsilon\beta < 3\alpha\beta$. Mit Lemma 4.17 (a) kann der zweite Term mit,

$$c_5 n \left(\frac{n-1}{u^\beta}\right)^{2\alpha-\varepsilon} \left(\frac{n-1}{u^\beta}\right)^{\alpha-\varepsilon} = c_5 n \frac{(n-1)^{3\alpha-2\varepsilon}}{u^{3\alpha\beta-2\varepsilon\beta}} \leq c_5 n \frac{(n-1)^{3\alpha-2\varepsilon}}{u^{2\alpha+\delta}},$$

beschränkt werden. Weiters folgt, dass $(u(1-u^{\beta-1}))^{-(2\alpha-\varepsilon)}$ eine obere Schranke für den ersten Term ist. Nachdem der asymptotische Anteil der beiden Schranken $u^{-(2\alpha-\varepsilon)}$ ist, folgt der Teil (a) des Satzes.

Teil (b) des Satzes folgt analog in dem man Teil (b) Anstelle von Teil (a) des Lemmas anwendet. Der Teil (c) des Satzes folgt in dem man auf $N = n$ bedingt und dominierte Konvergenz verwendet. \square

Kommen wir zum bedingten Schätzer. Ab jetzt sei $\bar{F}(x) = L(x)/(1+x)^\alpha$ mit $L(x)$ slowly varying.

Satz 4.18. *Der Schätzer Z_5 hat beschränkten relativen Fehler, falls*

$$\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{E[L(u/N)^2 N^{2\alpha+2}]}{L_1(u)^2} < \infty, \quad (4.37)$$

für eine Funktion $L_1(x)$ mit $L_1(x) \sim L(x)$ gilt.

Bemerkung 4.6. In [AK04] wird der Satz für die etwas stärkere Bedingung

$$\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{E[L(u/2N)N^{2\alpha+4}]}{L_1(u)} < \infty$$

gezeigt.

Bemerkung 4.7. Die Bedingung (4.37) ist in den meisten Fällen nicht viel stärker als $E[N^{2\alpha+2}] < \infty$.

Lemma 4.19. *Es gilt: $M_{n-1} \vee (u - S_{n-1}) \geq u/n$.*

Beweis. Entweder ist $M_{n-1} > u/n$ oder

$$u - S_{n-1} \geq u - (n-1)M_{n-1} \geq u - (n-1)\frac{u}{n} \geq \frac{u}{n}.$$

\square

Beweis Satz 4.18. Es gilt $M_{n-1} \vee (u - S_{n-1}) \geq u/n$. Für das zweite Moment von Z_5 gilt:

$$\begin{aligned} E[Z_5^2] &= n^2 E[\overline{F}(M_{n-1} \vee (u - S_{n-1}))^2] \leq n^2 \overline{F}(u/n)^2 \\ &\leq n^2 \frac{L(u/n)^2}{(1 + u/n)^{2\alpha}} \leq n^{2+2\alpha} \frac{L(u)^2}{(1 + u)^{2\alpha}} \frac{L(u/n)^2}{L(u)^2}. \end{aligned}$$

Mit Lemma 2.7 folgt die Aussage des Satzes bei festem n . Bei zufälligen N gilt:

$$E[Z_5^2] = E[E[Z_5^2|N]] \leq \frac{L(u)^2}{(1 + u)^{2\alpha}} \frac{E[N^{2+2\alpha} L(u/N)^2]}{L(u)^2}.$$

□

Fall 2, F ist weibullähnlich: Das heißt, es gilt $f(x) \sim cx^\gamma e^{-x^\beta}$ mit $0 < \beta < 1$. Für den Schwanz der Verteilung gilt dann $\overline{F}(x) \sim cx^{1+\gamma-\beta} e^{-x^\beta} / \beta$. Wir werden nur den Schätzer Z_5 betrachten.

Satz 4.20 ([AK04]). Sei $\beta < \bar{\beta} = \log(3/2)/\log(2) \approx 0.585$, d.h. $2^{1+\beta} < 3$, dann ist der Schätzer Z_5 asymptotisch effizient für jedes feste n .

Für den Beweis verwenden wir $n + 1$ statt n . In Abbildung 4.1, wird der Träger der gemeinsamen Dichte von (M_n, S_n) durch die Geraden $y = x$ und $y = nx$ beschränkt. Für den Beweis zerlegt man für jedes u den Träger der gemeinsamen Dichte in $2n - 1$ Bereiche $0, 1', \dots, (n-1)', 1'', \dots, (n-1)''$ wie dies in Abbildung 4.1 gezeigt wird (d.h. k' ist das Dreieck welches durch die Geraden $u = x + y$, $y = kx$ und $y = (k+1)x$ bestimmt wird). Auf den Bereichen $1', \dots, k'$ gilt $x \leq u - y$ und auf den Bereichen $0, 1'', \dots, (n-1)''$ gilt $x \geq u - y$. Mit $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ werden bestimmte Potenzen von x oder y bezeichnet und c_1, c_2, \dots bezeichnen Konstanten. Um zu zeigen, dass Z_5 asymptotisch effizient ist genügt es das zweite Moment durch $c_k u^{\gamma_k} e^{-2x^\beta}$ zu beschränken.

Lemma 4.21. Sei $kx \leq y \leq (k+1)y$, für ein $k = 1, \dots, n-1$. Dann gilt für die bedingte Dichte $g(\cdot|x)$ von S_n gegeben $M_n = X_n = x$:

$$g(y|x) \leq c_1 (1+x)^{\gamma_1} \exp\left\{-(k-1)x^\beta - (y-kx)^\beta\right\}, \quad kx \leq y \leq (k+1)x.$$

Beweis. Es gilt: $f(x) \leq c_2 (1+x)^\gamma e^{-x^\beta} \psi(x)$ mit

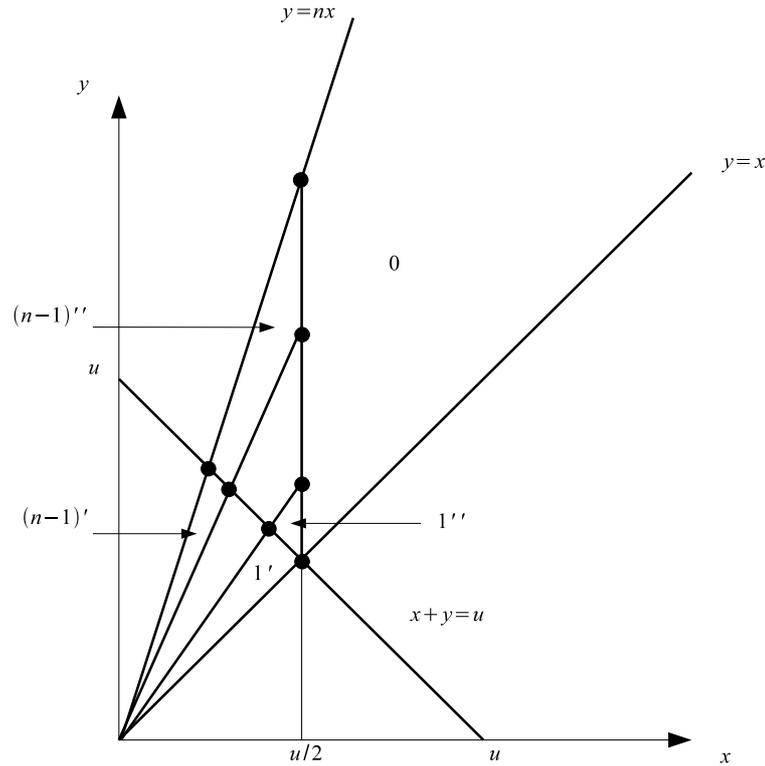
$$c_3 = \sup_{y \geq a} \psi(y) < \infty, \quad \psi(y) \leq c_4 f(y), \quad y \leq a, \quad (4.38)$$

für ein $a > 0$. Sei S das kompakte Simplex $\subset \mathbb{R}^{n-1}$ welches durch die Bedingungen,

$$0 \leq x_1 \leq x, \dots, 0 \leq x_n \leq x, \quad x_1 + \dots + x_{n-1} = y - x,$$

definiert wird. Sei λ das Lebesgue Maß auf S , dann gilt:

$$\begin{aligned} g(y|x) &= \int_S f(x_1) \dots f(x_{n-1}) d\lambda(x_1, \dots, x_{n-1}) \\ &\leq [c_2 (1+x)^{\gamma_2}]^{n-1} \sup_S \exp\left\{-x_1^\beta - \dots - x_{n-1}^\beta\right\} \\ &\quad \times \int_S \psi(x_1) \dots \psi(x_{n-1}) d\lambda(x_1, \dots, x_{n-1}) \\ &\leq c_5 (1+x)^{\gamma_1} \sup_S \exp\left\{-x_1^\beta - \dots - x_{n-1}^\beta\right\}, \end{aligned}$$


 Abbildung 4.1: Der Träger der Dichte von (M_n, S_n) und die Unterteilung in $2n - 1$ Bereiche.

wobei im letzten Schritt (4.38) verwendet wurde um ein λ -Integral über einen Bereich der Form:

$$S \cap \{x_1 \leq a, \dots, x_k \leq a, x_{k+1} > a, \dots, x_{n-1} > a\},$$

durch $c_4^k [c_3(x-a)]^{n-k-1}$ zu beschränken. Aus der Konkavität von $x_1^\beta + \dots + x_{n-1}^\beta$ folgt, dass es sein Minimum auf S in einer Ecke annimmt. In unserem Fall wird diese dadurch, dass $k-1$ der x_i gleich x , eines gleich $y-kx$ und der Rest gleich 0 ist bestimmt. Damit kann man das Supremum durch $\exp\{-(k-1)x^\beta - (y-kx)^\beta\}$ beschränken. \square

Beweis des Satzes 4.20. Sei $h(x, y)$ die gemeinsame Dichte von M_n und S_n . Weiters sei u groß genug. Dann gilt für das zweite Moment des Schätzers Z_5 :

$$E[Z_5^2] = \iint k(x, y) dx dy \text{ mit } k(x, y) \leq c_9(x \vee (u-y))^{2\gamma} \exp\{-2(x \vee (u-y))^\beta\} h(x, y).$$

Betrachten wir die Zerlegung des Trägers von $h(x, y)$ in die Bereiche $0, 1', \dots, (n-1)', 1'', \dots, (n-1)''$ aus Abbildung 4.1. Wir werden den Satz beweisen, indem wir zeigen, dass die Integrale über diese Bereiche $0, 1', \dots$ nicht schneller als $c_m u^{\gamma m} e^{-2u^\beta}$ wachsen. Bei den Bereichen k' und k'' wird wieder verwendet, dass eine konkave Funktion ihr Minimum in einem Extrempunkt annimmt (die Eckpunkte sind in Abbildung 4.1 markiert).

Im Bereich 0 gilt $x > u - y$ und $x > u/2$. Zusammen mit der Dichte von M_n ,

$$f_{M_n}(x) = n f(x) F(x)^{n-1} \leq n f(x), \quad (4.39)$$

und der Bedingung an β erhält man:

$$\begin{aligned} I_0 &\leq c_9 e^{-2(u/2)^\beta} \int_{u/2}^{\infty} x^{2\gamma} f_{M_n}(x) dx \\ &\leq c_{10} e^{-2(u/2)^\beta} \int_{u/2}^{\infty} x^{2\gamma+\gamma} e^{-x^\beta} dx \leq c_6 u^{\gamma_3} e^{-3(u/2)^\beta} \leq c_6 u^{\gamma_3} e^{-2u^\beta}. \end{aligned}$$

Im Bereich k' gilt $u - y \geq x$ und aus Lemma 4.21 folgt:

$$h(x, y) \leq c_7(1+x)^{\gamma_4} \exp \left\{ -kx^\beta - (y - kx)^\beta \right\}.$$

Da $x \leq u$ für $x \in k'$ gilt:

$$I_{k'} \leq c_7 u^{\gamma_5} \iint_{k'} \exp \left\{ -kx^\beta - (y - kx)^\beta - 2(u - y)^\beta \right\} dx dy.$$

Da die Fläche von k' kleiner ist als u^2 , reicht es zu zeigen, dass der negative Exponent an allen drei Eckpunkten größer oder gleich ist wie $2u^\beta$. Für den Punkt $(0, 0)$ ist das klar. Die anderen zwei Eckpunkte (auf der Geraden $x + y = u$) sind $(u/(k+1), ku/(k+1))$ und $(u/(k+2), (k+1)u/(k+2))$ auf welchen der negative Exponent gleich $(k+2)u^\beta/(k+1)^\beta$ beziehungsweise $(k+3)u^\beta/(k+2)^\beta$ ist. Beide sind größer als $2u^\beta$, da für $\beta < \bar{\beta}$ die Funktion $(x+2)/(x+1)^\beta$ an der Stelle $x = 1$ gleich $3/2^\beta > 2$ ist und für $x \geq 1$ monoton steigend ist.

Im Bereich k'' gilt $u - y \leq x$. Mit den gleichen Argumenten wie bei k' gilt:

$$I_{k''} \leq c_8 u^{\gamma_6} \iint_{k''} \exp \left\{ -(k+2)x^\beta - (y - kx)^\beta \right\} dx dy.$$

Wir müssen wieder zeigen, dass der negative Exponent auf den vier Eckpunkten größer oder gleich ist wie $2u^\beta$. Die beiden Eckpunkte auf der Geraden $u = x + y$ sind dieselben wie bei k' , verhalten sich also wie gewünscht. Die anderen beiden auf der Geraden $x = u/2$ sind $((u/2), (k+1)u/2)$ und $((u/2), ku/2)$, damit ist der negative Exponent mindestens $(k+2)x^\beta = (k+2)u^\beta/2^\beta \geq 2u^\beta$. \square

4.3.6 Numerische Ergebnisse

Im Zuge dieser Diplomarbeit wurden numerische Vergleiche zwischen den einzelnen Schätzern angestellt. Analog wie in [AK04] wurde für die Verteilung der X_i eine Pareto-Verteilung mit $\bar{F}(x) = (1+x)^{-\alpha}$, $\alpha \in \{0.5, 1.5\}$ und eine Weibull-Verteilung mit $\bar{F}(x) = e^{-x^\beta}$, $\beta \in \{0.25, 0.5, 0.75\}$ gewählt. Als Verteilung für N wurde eine Geometrische-Verteilung mit $P(N = n) = p_n = \rho^n(1 - \rho)$, $\rho \in \{0.25, 0.5, 0.75\}$ gewählt. Die Werte für u wurden so gewählt, dass für die Standard-Approximation $A(u) = \rho/(1 - \rho)\bar{F}(u)$ von $P(S_N > u)$, $A(u) \in \{10^{-k} | k \in \{2, 5, 8, 11\}\}$ gilt.

Als Schätzer wurden Z_1 , Z_3 , Z_4 und Z_5 so wie die asymmetrischen Versionen von Z_3 und Z_4 , Z_3^* und Z_4^* (siehe (4.35)) verwendet. Aus $P(S_n > u) \sim n\bar{F}(u)$ folgt, dass ein Teil der Varianz eines Schätzers von N kommt um diesen Teil zu verkleinern verwenden Asmussen und Kroese [AK04] noch weitere Varianzreduktionstechniken, nämlich Stratifikation und Kontrollvariablen. Da diese Methoden vor allem bei Z_5 zu einer signifikanten Varianzreduktion führen, wird hier auch der Kontrollvariablen Schätzer

$$Z_6(u) = N(\bar{F}(M_{N-1} \vee (u - S_N)) - \bar{F}(u)) + E[N]\bar{F}(u)$$

verwendet.

Für die Schätzer Z_3 und Z_3^* wurden die Parameter über die Cross Entropy Methode bestimmt (siehe [AKR05] und [AK04]), damit ergibt sich bei Pareto für Z_3 , $\theta = 1 - n/(\alpha \log(u))$ und für Z_3^* , $\theta = 1 - 1/(\alpha \log(u))$, bei Weibull ergibt sich für Z_3 , $\theta = 1 - n/u^\beta$ und für Z_3^* , $\theta = 1 - 1/u^\beta$. Für die Schätzer Z_4 und Z_4^* wurden die Parameter wie in [JS02] vorgeschlagen gewählt, das heißt $a = 0.5(\rho^{-1/4} - 1)$, $\omega = a$ und $b = 1$.

In [AK04] wurde die Monte Carlo Methode als Integrationsmethode verwendet, hier werden zusätzlich verschiedene zufällige Quasi Monte Carlo Methoden verwendet. Diese sind die Halton Folge mit zufälligem Startpunkt, die Halton Folge mit zufälligem Shift und die Sobol Folge mit zufälligem Shift. Vergleiche dazu Kapitel 3.5.

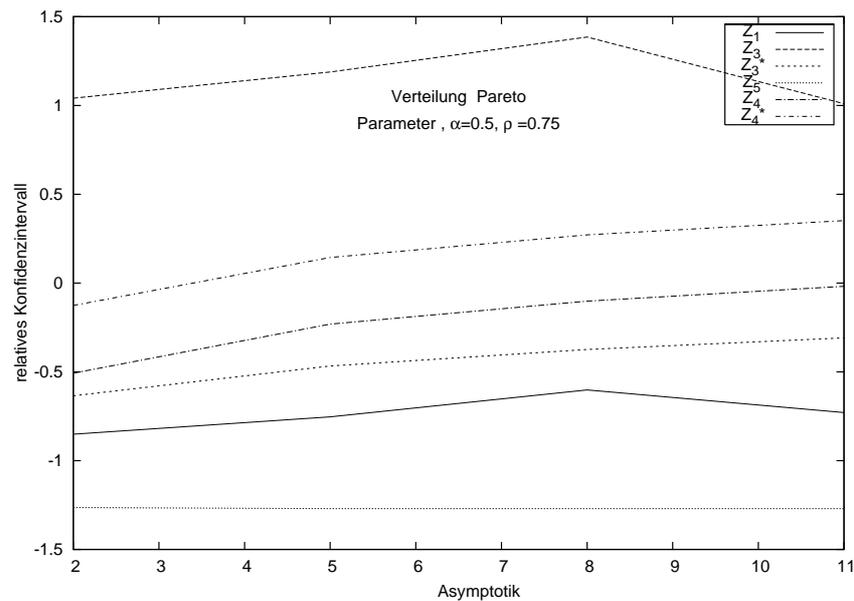


Abbildung 4.2: Vergleich der verschiedenen Schätzer mit $X_i \sim \text{Pareto}(0.5)$, $N \sim \text{Geometrisch}(0.75)$ und 10^7 Iterationen.

Zur Implementation sollte man noch erwähnen, dass zur Berechnung von $P(S_N > u)$, $P(S_N > u) = \rho P(S_{N^*} > u)$ mit $P(N^* = n) = \rho^{n-1}(1 - \rho)$, $n = 1, 2, \dots$ verwendet wurde.

Für die Tabellen wurden bei der Monte Carlo Methode 10^7 Iterationen verwendet und bei den zufälligen Quasi Monte Carlo Folgen wurde der Schätzer (3.38) mit 10^4 Monte Carlo Iterationen und 10^3 Quasi Monte Carlo Iterationen verwendet. Die Tabellen geben zu jedem Schätzer die halbe Länge des 95% Konfidenzintervalls in Prozent von dem geschätzten Wert von $P(S_N > u)$ an.

Bei den Abbildungen ist die y-Achse der dekadische Logarithmus der halben Länge des Konfidenzintervalls in Prozent von dem geschätzten Wert von $P(S_N > u)$. Die x-Achse ist entweder der negative dekadische Logarithmus von $A(u)$, in diesem Fall sind die Iterationen gleich wie bei den Tabellen gewählt. Oder die x-Achse ist der negative dekadische Logarithmus der Anzahl der Iterationen. Bei den zufälligen Quasi Monte Carlo Methoden wird der Schätzer (3.38) mit einer Monte Carlo Iteration verwendet.

Nun zu den Ergebnissen: Bei der Monte Carlo Methode als Integrationsmethode wurden die Ergebnisse von [AK04] bestätigt. Sie lauten (bei [AK04] wird Z_1 nur bei Pareto eingesetzt): Bei Pareto ist der Schätzer Z_5 mit Abstand der Beste. Danach kommen Z_1 , Z_3^* , Z_4 und Z_4^* . Mit Abstand am schlechtesten funktioniert Z_3 . Tabelle 4.2 und Abbildung 4.2 zeigen hierfür typische Ergebnisse (weitere Tabellen findet man im Anhang). In Abbildung 4.2 fällt auf, dass Z_1 fast konstant in u ist, dies weist auf einen beschränkten relativen Fehler (wie in Satz 4.18 bewiesen) hin. Das Z_3 am schlechtesten funktioniert sollte klar sein, da dieser Schätzer als einziger nicht asymptotisch effizient ist.

Für Weibull mit Parameter $\beta \in \{0.25, 0.5\}$ gilt ähnliches wie im Fall von Pareto, nur dass der Schätzer Z_1 bei machen Parametern schlechter funktioniert als Z_3^* oder Z_4 (siehe dazu Tabelle 4.3).

Wie man in Tabelle 4.4 sehen kann, funktionieren alle Schätzer eher schlecht wenn man als Parameter $\beta = 0.75$ wählt. Dies liegt vermutlich daran, dass sich bei diesen Parametern die Zufallsvariablen nicht wie Subexponentielle Verteilungen verhalten, die Schätzer aber für ein solches Verhalten gebaut wurden.

Betrachten wir nun die Ergebnisse der zufälligen Quasi Monte Carlo Methoden. Vergleicht man die Werte aus den Tabellen 4.5, 4.6 und 4.7 mit jenen in 4.2, dann sieht man dass zufälli-

ρ	$A(u)$	Z_1	Z_3	Z_3^*	Z_5	Z_4	Z_4^*
0.25	0.01	0.0709337	0.245927	0.152019	0.0320192	0.181985	0.225041
0.25	1e-05	0.101527	0.474178	0.260133	0.0309927	0.419141	0.507523
0.25	1e-08	0.134486	1.04589	0.335458	0.0309726	0.580912	0.702904
0.25	1e-11	0.121469	1.55656	0.396564	0.0310187	0.712162	0.858224
0.5	0.01	0.110578	1.01681	0.192466	0.0446832	0.250323	0.404071
0.5	1e-05	0.150737	1.24397	0.300788	0.0438575	0.512641	0.811218
0.5	1e-08	0.160579	2.62713	0.380248	0.0438134	0.69991	1.10507
0.5	1e-11	0.146654	4.4705	0.445161	0.0438299	0.853862	1.33881
0.75	0.01	0.140988	10.9961	0.231754	0.0544624	0.310728	0.748476
0.75	1e-05	0.176487	15.4324	0.341221	0.0536804	0.587561	1.39303
0.75	1e-08	0.250063	24.2861	0.422997	0.053652	0.791019	1.8684
0.75	1e-11	0.186687	10.2378	0.491684	0.0536937	0.9597	2.24754

 Tabelle 4.2: Monte Carlo, Pareto $\alpha = 0.5$.

ρ	$A(u)$	Z_1	Z_3	Z_3^*	Z_5	Z_4	Z_4^*
0.25	0.01	0.0783198	0.230822	0.152844	0.0347246	0.18269	0.228049
0.25	1e-05	0.206779	0.457125	0.261003	0.0318766	0.417807	0.510965
0.25	1e-08	0.124994	0.966677	0.335714	0.0311081	0.580673	0.701448
0.25	1e-11	0.103493	1.185	0.397385	0.0310238	0.712585	0.86059
0.5	0.01	0.134595	1.27175	0.199539	0.0515948	0.253841	0.420879
0.5	1e-05	0.309638	1.25663	0.303388	0.0451837	0.510882	0.818914
0.5	1e-08	0.221284	3.32428	0.380655	0.04405	0.700264	1.10218
0.5	1e-11	0.177946	4.91162	0.446225	0.0439144	0.853694	1.35027
0.75	0.01	0.188564	7.21851	0.256774	0.0707371	0.324918	0.825692
0.75	1e-05	0.877328	7.75925	0.34644	0.0562171	0.585054	1.41543
0.75	1e-08	0.480319	8.17936	0.425159	0.0541064	0.793852	1.89494
0.75	1e-11	0.194989	18.7337	0.492953	0.0538432	0.959641	2.26036

 Tabelle 4.3: Monte Carlo, Weibull $\beta = 0.25$.

ρ	$A(u)$	Z_1	Z_3	Z_3^*	Z_5	Z_4	Z_4^*
0.25	0.01	0.126496	0.233499	0.196451	0.0816907	0.207221	0.283183
0.25	1e-05	2.43995	0.681537	1.58726	0.509574	1.37195	3.05593
0.25	1e-08	35.3823	1.33921	2.63379	1.60625	1.77094	4.70714
0.25	1e-11	12.5569	1.87728	1.6203	5.16912	1.74298	3.29169
0.5	0.01	0.176711	1.16293	0.327993	0.135162	0.259869	0.48587
0.5	1e-05	2.67687	3.38564	3.6928	1.1027	3.27079	7.74137
0.5	1e-08	15.0031	7.64137	20.5753	13.8269	14.6166	29.438
0.5	1e-11	156.14	12.6488	103.424	135.153	76.9772	10.4167
0.75	0.01	0.138264	5.63039	0.346059	0.141403	0.187249	0.51862
0.75	1e-05	0.86498	60.5845	2.24038	0.707829	1.31046	4.06256
0.75	1e-08	7.30507	28.9771	20.3177	5.20206	12.9297	40.4391
0.75	1e-11	72.292	85.9775	158.206	39.4037	62.7605	170.818

 Tabelle 4.4: Monte Carlo, Weibull $\beta = 0.75$.

ρ	$A(u)$	Z_1	Z_3	Z_3^*	Z_5	Z_4	Z_4^*
0.25	0.01	0.0304892	0.47404	0.0389226	0.00533793	0.183855	0.149795
0.25	1e-05	0.0989457	0.364633	0.0542908	0.00179215	0.554858	0.553085
0.25	1e-08	0.104048	1.02951	0.0815402	0.00175175	0.684424	0.665326
0.25	1e-11	0.102424	1.31823	0.108607	0.00178142	1.09055	1.23001
0.5	0.01	0.0650057	1.61285	0.052433	0.00715903	0.203731	0.21676
0.5	1e-05	0.115388	1.31475	0.0731977	0.00218993	0.527186	0.600504
0.5	1e-08	0.13477	4.56097	0.106559	0.00218794	0.781265	0.961576
0.5	1e-11	0.132439	4.26906	0.139426	0.00216647	0.94012	1.19743
0.75	0.01	0.100922	7.76638	0.0671537	0.00890435	0.241429	0.435552
0.75	1e-05	0.168343	14.6354	0.0931499	0.00400524	0.516359	1.11585
0.75	1e-08	0.170186	12.8119	0.132731	0.00411195	0.741105	1.54956
0.75	1e-11	0.266647	16.2308	0.173972	0.00406479	0.962545	2.11343

 Tabelle 4.5: Quasi Monte Carlo, Start Halton, Pareto $\alpha = 0.5$.

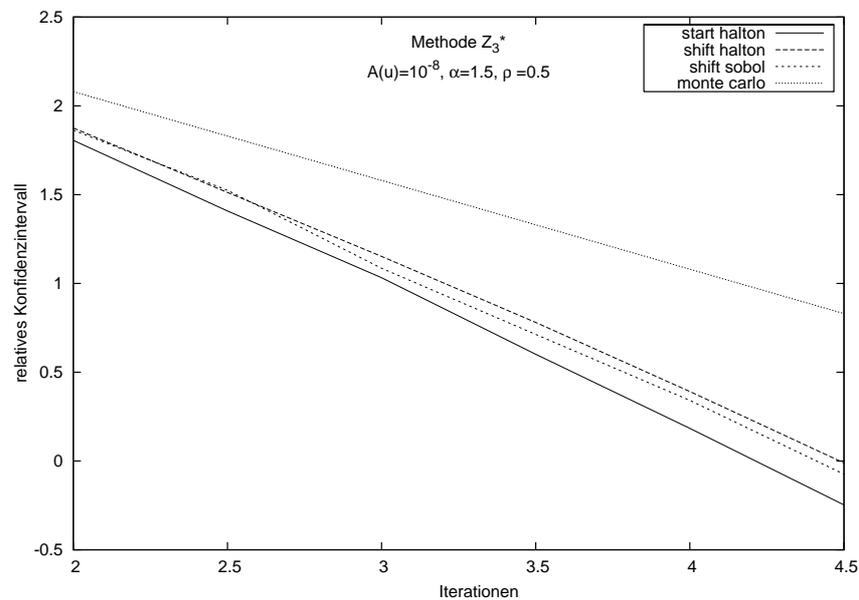
ρ	$A(u)$	Z_1	Z_3	Z_3^*	Z_5	Z_4	Z_4^*
0.25	0.01	0.0425335	0.216809	0.0446267	0.00638282	0.19843	0.219558
0.25	1e-05	0.159087	0.404159	0.0728369	0.0022525	0.565779	0.642879
0.25	1e-08	0.101989	0.851055	0.103463	0.00223542	0.862156	1.00376
0.25	1e-11	0.082276	1.49688	0.131789	0.0022817	1.13471	1.2995
0.5	0.01	0.0759319	2.17178	0.0634074	0.00775638	0.218215	0.297219
0.5	1e-05	0.125074	1.07093	0.101662	0.00290459	0.528646	0.74311
0.5	1e-08	0.129715	2.32658	0.142509	0.00288855	0.7923	1.12956
0.5	1e-11	0.197014	6.70379	0.179644	0.00285513	0.981351	1.5155
0.75	0.01	0.105836	4.13657	0.0835719	0.0104983	0.246723	0.509085
0.75	1e-05	0.156181	4.2885	0.129272	0.00633178	0.542166	1.19277
0.75	1e-08	0.186769	7.93837	0.175139	0.00633472	0.786188	1.7348
0.75	1e-11	0.207784	16.563	0.222267	0.00640217	0.973231	2.16741

 Tabelle 4.6: Quasi Monte Carlo, Shift Halton, Pareto $\alpha = 0.5$.

ges Quasi Monte Carlo vor allem bei den Methoden Z_3^* und Z_5 zu signifikanten Verbesserungen gegenüber Monte Carlo führt. Auch bei den Schätzern Z_4 und Z_4^* kommt es durch den Einsatz von zufälligem Quasi Monte Carlo zu einer signifikanten Verbesserung allerdings benötigt man dazu eine größere Anzahl von Quasi Monte Carlo Iterationen als in den Tabellen verwendet. Abbildung 4.4 zeigt die beiden Schätzer mit der Monte Carlo Methode und jeweils der besten zufälligen Quasi Monte Carlo Methode. Abbildung 4.3 zeigt die vier Integrationsmethoden bei Z_3^* im Vergleich, man sieht deutlich, dass die zufälligen Quasi Monte Carlo Methoden eine schnellere Konvergenzrate haben als die Monte Carlo Methode. Vergleicht man die zufälligen Quasi Monte Carlo Methoden untereinander so stellt man fest, dass in den meisten Fällen die Halton Folge mit zufälligem Startpunkt am besten funktioniert, danach kommt die Sobol Folge mit zufälligem Shift und die Halton Folge mit zufälligem Shift. Interessant ist, dass vor allem die asymmetrischen Methoden Z_3^* und Z_4^* vom zufälligen Quasi Monte Carlo profitieren. So ist zum Beispiel Z_3^* kombiniert mit zufälligem Quasi Monte Carlo besser als jede hier betrachtete Form von Z_1 (siehe Abbildung 4.5), dies ist bemerkenswert, da bei Monte Carlo Z_1 besser ist als Z_3^* . Wenn man die Anzahl der Iterationen groß genug wählt gilt eine analoge Aussage für Z_4 und Z_4^* (siehe Abbildung 4.4).

Kommen wir nun zum besten Schätzer Z_5 und den dazu gehörigen Kontrollvariablen Schätzer Z_6 . Vergleicht man bei Z_5 die Monte Carlo Methode und die zufälligen Quasi Monte Carlo Methoden so fällt auf, dass die zufälligen Quasi Monte Carlo Methoden ein viel klei-

ρ	$A(u)$	Z_1	Z_3	Z_3^*	Z_5	Z_4	Z_4^*
0.25	0.01	0.0411862	0.183975	0.0405653	0.00553618	0.18775	0.228526
0.25	1e-05	0.0925088	0.382731	0.0594117	0.00206109	0.572338	0.706206
0.25	1e-08	0.0878573	0.857917	0.0859691	0.00204584	0.874281	1.06788
0.25	1e-11	0.0884307	1.68391	0.111077	0.00203357	1.12625	1.37648
0.5	0.01	0.0754512	0.937699	0.0572468	0.00734643	0.203553	0.262066
0.5	1e-05	0.118051	1.20296	0.0850626	0.00268454	0.513222	0.694633
0.5	1e-08	0.153699	2.83567	0.119942	0.00269742	0.762979	1.08497
0.5	1e-11	0.147885	8.77427	0.152944	0.00266885	0.980636	1.4385
0.75	0.01	0.107587	4.81702	0.0784889	0.0100241	0.251066	0.521053
0.75	1e-05	0.171235	12.676	0.119331	0.00601054	0.542522	1.1832
0.75	1e-08	0.15942	9.64883	0.163994	0.00602119	0.77893	1.70997
0.75	1e-11	0.152873	15.3041	0.203839	0.0060031	0.975364	2.19017

 Tabelle 4.7: Quasi Monte Carlo, Shift Sobol, Pareto $\alpha = 0.5$.

 Abbildung 4.3: Vergleich der verschiedenen Integrationsmethoden mit $X_i \sim \text{Pareto}(1.5)$, $N \sim \text{Geometrisch}(0.5)$ und $A(u) = 10^8$ Iterationen.

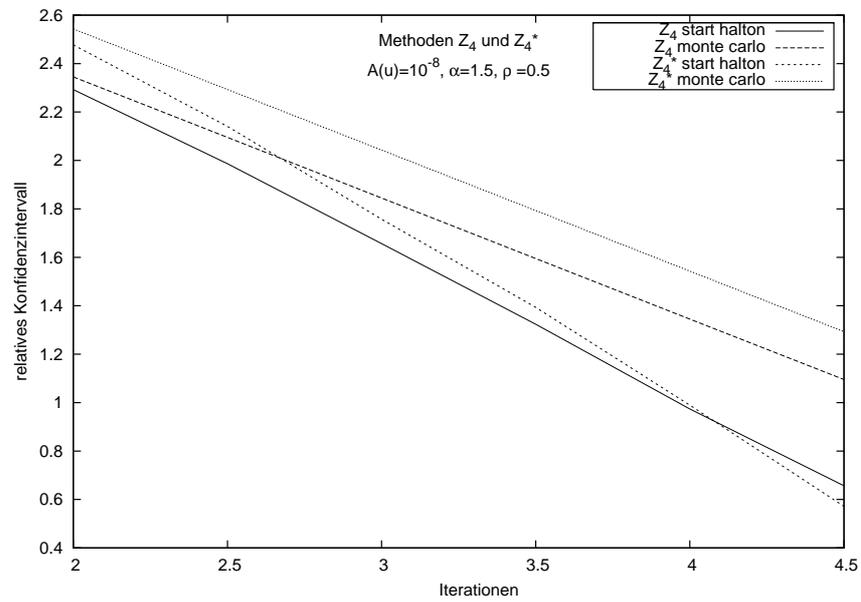


Abbildung 4.4: Vergleich der verschiedenen Integrationsmethoden mit $X_i \sim \text{Pareto}(1.5)$, $N \sim \text{Geometrisch}(0.5)$ und $A(u) = 10^8$ Iterationen.

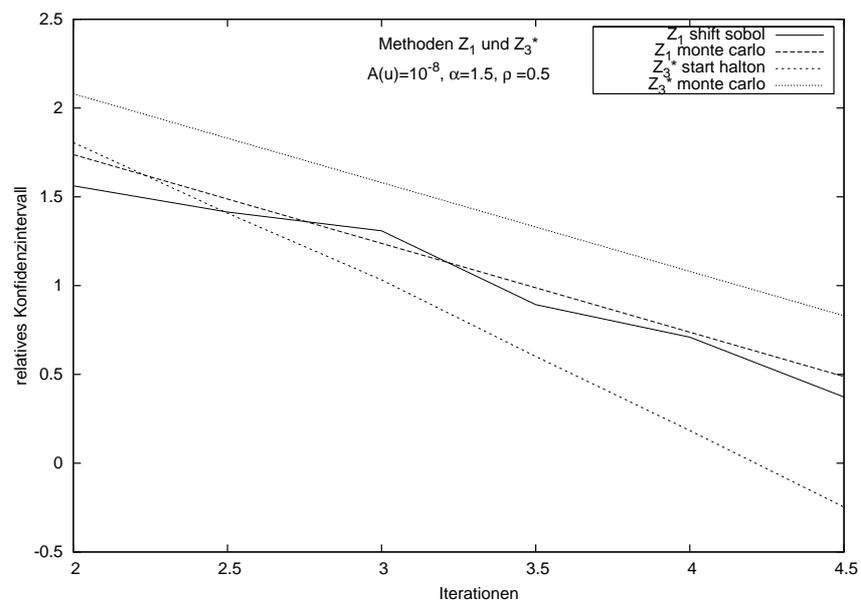


Abbildung 4.5: Vergleich der verschiedenen Integrationsmethoden mit $X_i \sim \text{Pareto}(1.5)$, $N \sim \text{Geometrisch}(0.5)$ und $A(u) = 10^8$ Iterationen.

ρ	$A(u)$	Monte Carlo	start Halton	shift Halton	shift Sobol
0.25	0.01	0.0305524	0.0148244	0.0160266	0.0144646
0.25	1e-05	0.00137541	0.00118966	0.00121305	0.0011943
0.25	1e-08	3.21911e-05	4.84192e-05	2.95408e-05	3.3069e-05
0.25	1e-11	2.56853e-07	3.01545e-07	1.19868e-06	3.60678e-07
0.5	0.01	0.0517288	0.0276689	0.0292519	0.0284166
0.5	1e-05	0.00147144	0.00138275	0.00133059	0.0013189
0.5	1e-08	5.43469e-05	5.58883e-05	2.6883e-05	0.000125458
0.5	1e-11	4.16477e-07	3.46019e-07	3.18171e-07	2.24239e-07
0.75	0.01	0.0912163	0.0544717	0.0582597	0.0572946
0.75	1e-05	0.0016776	0.0014665	0.00146688	0.00148238
0.75	1e-08	3.72004e-05	2.69142e-05	2.44095e-05	2.25985e-05
0.75	1e-11	2.8046e-07	3.81549e-07	3.19441e-07	3.77026e-07

 Tabelle 4.8: Kontrollvariablen, Pareto $\alpha = 1.5$.

neres Konfidenzintervall liefern als die Monte Carlo Methode. Eine mögliche Erklärung dafür ist die effektive Dimension von $Z_5(u)$, im Pareto Fall kann man zeigen, dass für $u \rightarrow \infty$ die effektive Dimension gegen 1 strebt und Z_5 dann nur von N abhängt (diese Aussagen sind der Inhalt des nächsten Kapitels). Dies ist auch eine Erklärung dafür, dass Z_6 viel besser funktioniert als Z_5 . Tabelle 4.8 zeigt typische Ergebnisse für Z_6 , man sieht, dass der relative Fehler von $Z_6(u)$ gegen Null strebt für $u \rightarrow \infty$. Weiters fällt auf, dass zufällige Quasi Monte Carlo Methoden nur bei $A(u) = 10^{-2}$ etwas bringen. Man sollte aber auch erwähnen, dass ein relatives Konfidenzintervall der Länge $10^{-4}\%$ oder kleiner bei 10^7 Iterationen bedeutet, dass man bei nur einer Iteration ein relatives Konfidenzintervall von einer Länge kleiner als ein Prozent erhält. Abbildung 4.6 und 4.7 zeigen die Schätzer Z_5 und Z_6 im vergleich. Man sieht dass bei diesen Parametern die Monte Carlo Version von Z_6 zwar viel besser sein kann als die von Z_5 , dass die zufälligen Quasi Monte Carlo Versionen der Schätzer ähnliche Ergebnissen liefern. Vergrößert man u so gilt diese Beobachtung nicht mehr.

4.3.7 Die effektive Dimension von Z_5

In diesem Kapitel sei N eine ganzzahlige Zufallsvariable mit $E[z^N] < \infty$ für ein $z > 1$ und $P(N = n) = p_n$. Weiters sei $F \in S$ die Verteilung der X_i . Sei $E_X[\cdot] = E[\cdot|N]$ die bedingte Erwartung gegeben N . Weiters sei für eine Funktion $g(X_1, X_2, \dots) = g(X)$. In diesem Kapitel wollen wir den Einfluss von N auf $Z_5(u)$ untersuchen. Dazu berechnen wir zunächst den ANOVA Term $g_N(n)$ von N bezüglich Z_5 und dessen Varianz (vergleiche Kapitel 3.4).

Lemma 4.22. *Für den ANOVA Term $g_N(n)$ von $Z_5(u)$ gilt:*

$$g_N(n) = P(S_n > u) - P(S_N > u) = \overline{F}^{n*}(u) - E[Z_5].$$

Beweis. Es gilt:

$$\begin{aligned} g_N(n) &= E[N\overline{F}(M_{N-1} \vee (u - S_{N-1})) - E[Z_5]|N = n] \\ &= nE[P(S_n > u, M_n = X_n|X_1, \dots, X_{n-1})] - E[Z_5] \\ &= nP(S_n > u, M_n = X_n) - P(S_N > u) = P(S_n > u) - P(S_N > u). \end{aligned}$$

Dabei ist die erste Gleichung die Definition der ANOVA und die letzte Gleichung folgt aus der Identität 4.34. \square

Lemma 4.23. *Für die Varianz von g_N gilt:*

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}[g_N(N)]}{\overline{F}(u)^2} = \text{Var}[N].$$

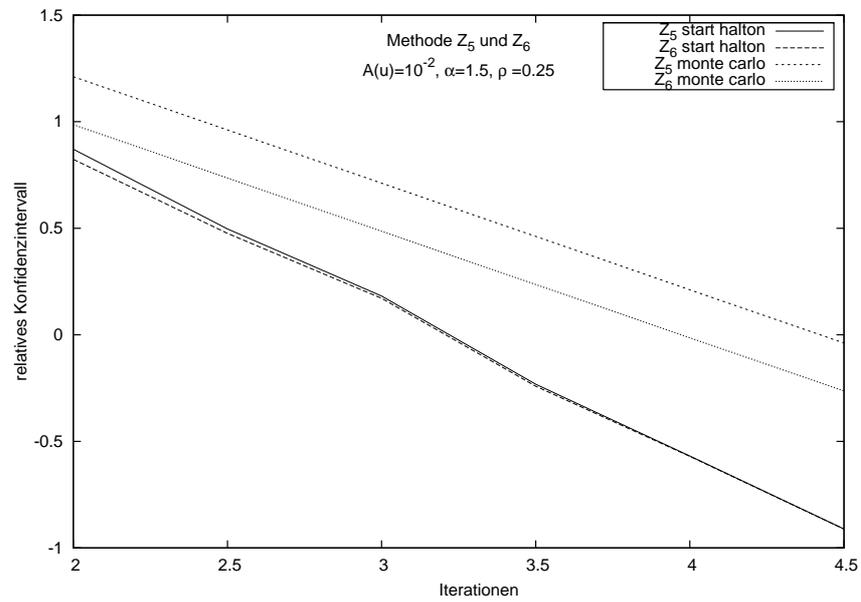


Abbildung 4.6: Vergleich der verschiedenen Integrationsmethoden mit $X_i \sim \text{Pareto}(1.5)$, $N \sim \text{Geometrisch}(0.25)$ und $A(u) = 10^{-2}$ Iterationen.

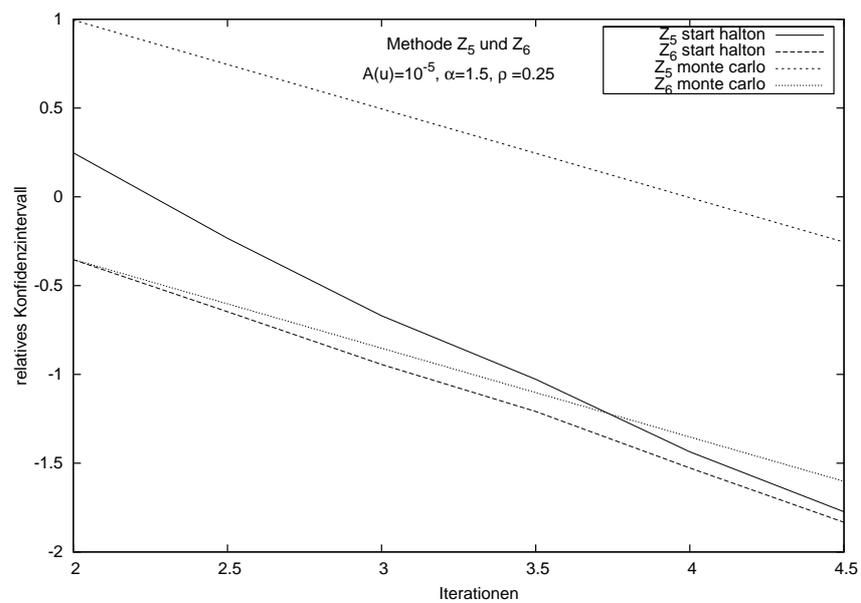


Abbildung 4.7: Vergleich der verschiedenen Integrationsmethoden mit $X_i \sim \text{Pareto}(1.5)$, $N \sim \text{Geometrisch}(0.25)$ und $A(u) = 10^{-5}$ Iterationen.

Beweis.

$$\begin{aligned}
 \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}[g_N(N)]}{\bar{F}(u)^2} &= \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n \frac{\bar{F}^{n*}(u)^2}{\bar{F}(u)^2} - \frac{P(S_N > u)^2}{\bar{F}(u)^2} \right) \\
 &= \lim_{u \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} p_n \frac{\bar{F}^{n*}(u)^2}{\bar{F}(u)^2} - \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{P(S_N > u)^2}{\bar{F}(u)^2} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n \left(\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}^{n*}(u)}{\bar{F}(u)} \right)^2 - E[N]^2 \tag{4.40}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 p_n - E[N]^2 \tag{4.41} \\
 &= E[N^2] - E[N]^2 = \text{Var}[N].
 \end{aligned}$$

Gleichung (4.40) folgt aus Lemma 2.6 und Gleichung (4.41) folgt aus Proposition 2.3. Die Vertauschung von Summe und Grenzwert ist wegen dem Satz von der dominierten Konvergenz erlaubt, da nach Lemma 2.4 $(\bar{F}^{n*}(u)/\bar{F}(u))^2 \leq Kz^n$ mit $E[z^N] < \infty$ gilt und somit eine integrierbare Majorante existiert. \square

Nach dem wir die asymptotische Varianz von g_N kennen, brauchen wir noch die asymptotische Varianz von Z_5 .

Lemma 4.24. *Für festes $N = n$ gilt:*

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(M_{n-1} \vee (u - S_{n-1}))}{\bar{F}(u)} = 1,$$

gleichmäßig auf $M_{n-1} \in [0, \bar{x}]$ für jedes $\bar{x} > 0$.

Beweis. Für $M_{n-1} \in [0, \bar{x}]$ und $u > n\bar{x}$ gilt:

$$u \geq M_{n-1} \vee (u - S_{n-1}) \geq u - S_{n-1} \geq u - (n-1)M_{n-1} \geq u - (n-1)\bar{x}.$$

Daraus folgt: $\bar{F}(M_{n-1} \vee (u - S_{n-1})) \geq \bar{F}(u)$ und somit:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(M_{n-1} \vee (u - S_{n-1}))}{\bar{F}(u)} \geq \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(u)}{\bar{F}(u)} = 1.$$

Zusammen mit Proposition 2.2 folgt:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(M_{n-1} \vee (u - S_{n-1}))}{\bar{F}(u)} \leq \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(u - (n-1)\bar{x})}{\bar{F}(u)} = 1.$$

\square

Korollar 4.25. *Es gilt:*

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{Z_5(u)^2}{\bar{F}(u)^2} = N^2.$$

Beweis. Für jedes N gilt nach der Definition von $Z_5(u)$ und dem Lemma 4.24:

$$\begin{aligned}
 \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{Z_5(u)^2}{\bar{F}(u)^2} &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(N\bar{F}(M_{N-1} \vee (u - S_{N-1})))^2}{\bar{F}(u)^2} \\
 &= N^2 \left(\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(M_{N-1} \vee (u - S_{N-1}))}{\bar{F}(u)} \right)^2 = N^2.
 \end{aligned}$$

\square

Damit wir die asymptotische Varianz von Z_5 berechnen können, benötigen wir eine integrierbare Majorante für $Z_5(u)^2$.

Bedingung 3. Es existiert eine Funktion $M(X, N)$ mit

$$M(X, N) \geq \left(\frac{\overline{F}(M_{N-1} \vee (u - S_{N-1}))}{\overline{F}(u)} \right)^2$$

für alle $u > 0$, mit $E_X[M(X, N)] < \infty$ für alle N und $E[N^2 M(X, N)] < \infty$.

Lemma 4.26. Sei Bedingung 3 erfüllt. Dann gilt:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}[Z_5(u)]}{\overline{F}(u)^2} = \text{Var}[N]$$

Beweis. Mit dem Satz von der dominierten Konvergenz und Lemma 2.6 gilt:

$$\begin{aligned} & \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}[Z_5(u)]}{\overline{F}(u)^2} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{E[Z_5(u)^2] - E[Z_5(u)]^2}{\overline{F}(u)^2} \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \left(E \left[N^2 \frac{\overline{F}(M_{N-1} \vee (u - S_{N-1}))^2}{\overline{F}(u)^2} \right] - \frac{P(S_N > u)^2}{\overline{F}(u)^2} \right) \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} E \left[N^2 E_X \left[\frac{\overline{F}(M_{N-1} \vee (u - S_{N-1}))^2}{\overline{F}(u)^2} \right] \right] - \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{P(S_N > u)^2}{\overline{F}(u)^2} \\ &= E \left[N^2 E_X \left[\left(\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(M_{N-1} \vee (u - S_{N-1}))}{\overline{F}(u)} \right)^2 \right] \right] - E[N]^2 \\ &= E[N^2] - E[N]^2 = \text{Var}[N]. \end{aligned}$$

□

Satz 4.27. Sei Bedingung 3 erfüllt. Dann gilt:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}[Z_5(u)]}{P(S_N > u)^2} = \frac{\text{Var}[N]}{E[N]^2}.$$

Beweis. Der Satz folgt aus $P(S_N > u) \sim E[N]\overline{F}(u)$ (Lemma 2.6) und Lemma 4.26. □

Satz 4.28. Sei Bedingung 3 erfüllt. Dann gilt:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}[g_N(N)]}{\text{Var}[Z_5(u)]} = 1.$$

Beweis. Aus Lemma 4.23 und Lemma 4.26 folgt:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}[g_N(N)]}{\text{Var}[Z_5(u)]} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}[g_N(N)]/\overline{F}(u)^2}{\text{Var}[Z_5(u)]/\overline{F}(u)^2} = \frac{\text{Var}[N]}{\text{Var}[N]} = 1.$$

□

Korollar 4.29. Für $u \rightarrow \infty$ geht die effektive Dimension von $Z_5(u)$ in beiden Sinnen gegen 1 (vergleiche Definition 3.16).

Beweis. Das Korollar folgt unmittelbar aus Satz 4.28 und der Definition 3.16. □

Es folgt ein nützliches Lemma zur Bestimmung einer Majorante $M(X, N)$ für Bedingung 3.

Lemma 4.30. *Es existiere ein x_0 , sodass die Hazard Rate $\lambda(x)$ für alle $x \geq x_0$ monoton fällt. Dann gilt auf $\{M_{n-1} \geq x_0\}$:*

$$\frac{\overline{F}(M_{n-1} \vee (u - S_{n-1}))}{\overline{F}(u)} \leq \frac{\overline{F}(M_{n-1})}{\overline{F}(M_{n-1} + S_{n-1})} \leq \frac{\overline{F}(M_{n-1})}{\overline{F}(nM_{n-1})}. \quad (4.42)$$

Beweis. Die zweite Ungleichung folgt mit $S_{n-1} \leq (n-1)M_{n-1}$ aus der Ersten. Für die erste Ungleichung unterscheidet man zwei Fälle.

Fall 1: $u - S_{n-1} \leq M_{n-1}$ oder $u \leq M_{n-1} + S_{n-1}$. Hier gilt:

$$\frac{\overline{F}(M_{n-1} \vee (u - S_{n-1}))}{\overline{F}(u)} = \frac{\overline{F}(M_{n-1})}{\overline{F}(u)} \leq \frac{\overline{F}(M_{n-1})}{\overline{F}(M_{n-1} + S_{n-1})}.$$

Fall 2: $u - S_{n-1} > M_{n-1}$ oder $u > S_{n-1} + M_{n-1}$.

Es gibt ein $z > 0$ mit $u = M_{n-1} + S_{n-1} + z$ und $u - S_{n-1} = M_{n-1} + z$. Damit gilt:

$$\frac{\overline{F}(M_{n-1} \vee (u - S_{n-1}))}{\overline{F}(u)} = \frac{\overline{F}(u - S_{n-1})}{\overline{F}(u)} = \frac{\overline{F}(M_{n-1} + z)}{\overline{F}(M_{n-1} + S_{n-1} + z)}.$$

Aus $\lambda(x)$ monoton fallend für $x \geq x_0$ und $M_{n-1} > x_0$ folgt $\lambda(M_{n-1} + S_{n-1} + z) \leq \lambda(M_{n-1} + z)$. Damit gilt:

$$\begin{aligned} \int_0^z \lambda(M_{n-1} + S_{n-1} + y) dy &\leq \int_0^z \lambda(M_{n-1} + y) dy, \\ \int_{M_{n-1} + S_{n-1}}^{M_{n-1} + S_{n-1} + z} \lambda(x) dx &\leq \int_{M_{n-1}}^{M_{n-1} + z} \lambda(x) dx, \\ \Lambda(M_{n-1} + S_{n-1} + z) - \Lambda(M_{n-1} + S_{n-1}) &\leq \Lambda(M_{n-1} + z) - \Lambda(M_{n-1}), \\ -\Lambda(M_{n-1} + z) + \Lambda(M_{n-1} + S_{n-1} + z) &\leq -\Lambda(M_{n-1}) + \Lambda(M_{n-1} + S_{n-1}), \\ \exp\{-\Lambda(M_{n-1} + z) + \Lambda(M_{n-1} + S_{n-1} + z)\} &\leq \exp\{-\Lambda(M_{n-1}) + \Lambda(M_{n-1} + S_{n-1})\}, \\ \frac{\overline{F}(M_{n-1} + z)}{\overline{F}(M_{n-1} + S_{n-1} + z)} &\leq \frac{\overline{F}(M_{n-1})}{\overline{F}(M_{n-1} + S_{n-1})}. \end{aligned}$$

□

4.3.7.1 Der Regular Varying Fall

In diesem Kapitel wollen wir zeigen, dass Regular-Varying-Verteilungen die Bedingung 3 erfüllen.

Lemma 4.31. *Sei $L(x)$ slowly varying und existiere eine stetige Verteilung $F \in S$ mit $\overline{F}(x) = L(x)/(x+1)^\alpha$ und $\alpha > 0$. Für jedes $\gamma > 0$, gibt es eine Konstanten c_2 mit*

$$\frac{L(x/n)}{L(x)} \leq c_2 n^\gamma,$$

für alle $x > 0$ und alle ganzen Zahlen $n \geq 1$.

Beweis. Für L werden wir die Darstellung aus Satz 2.9,

$$L(x) = c(x) \exp\left\{\int_z^x \frac{\delta(u)}{u} du\right\}, \quad x > z,$$

mit $z > 0$, δ und c meßbare Funktionen mit $\lim_{x \rightarrow \infty} c(x) = c_0 \in (0, \infty)$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} \delta(x) = 0$, verwenden. Seien c_i , ($i \geq 3$) Konstanten. Aus der Definition von $c(x)$ und $\delta(x)$ folgt, dass es ein

$x_0 > z$ gibt, sodass $x_0 \geq 1$, $\infty > c_3 \geq c(x) \geq c_4 > 0$ für alle $x \geq x_0$ und $-\gamma/2 \leq \delta(x) \leq \gamma/2$ für alle $x > x_0$.

Aus $\bar{F}(x) \leq 1$ folgt $L(x) \leq (1+x)^\alpha$ für alle $x \geq 0$. Da $\bar{F}(x)$ und $(x+1)^\alpha$ stetig sind ist $L(x)$ stetig. Aus $\bar{F}(x) > 0$ für alle $x > 0$ ($F \in \mathcal{S}$) folgt, $\inf_{0 \leq x \leq \bar{x}} L(x) > 0$ für alle $\infty > \bar{x} > 0$. Wir wollen $L(x) \geq 1/(c_5(1+x)^\gamma)$ für alle $x \geq 0$ zeigen. Nachdem für alle $\bar{x} > 0$, $\inf_{0 \leq x \leq \bar{x}} L(x) > 0$ gilt, reicht es $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+x)^\gamma L(x) = \infty$ zu zeigen. Für $x \geq x_0$ gilt:

$$\begin{aligned} (1+x)^\gamma L(x) &= c(x) \exp \left\{ \int_z^x \frac{\delta(u)}{u} du + \gamma \log(1+x) \right\} \\ &= c(x) \exp \left\{ \int_z^{x_0} \frac{\delta(u)}{u} du + \int_{x_0}^x \frac{\delta(u)}{u} du + \gamma \log(1+x) \right\} \\ &\geq c(x) \exp \left\{ c_9 - \frac{\gamma}{2} \int_{x_0}^x \frac{1}{u} du + \gamma \log(1+x) \right\} \\ &= c(x) \exp \left\{ -\frac{\gamma}{2} \log(x) + \gamma \log(1+x) + c_{10} \right\} \\ &= c_{11} c(x) \sqrt{\left(\frac{(x+1)^2}{x} \right)^\gamma} \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Für $x/n \leq x_0$ gilt $x \leq nx_0$ und damit:

$$\begin{aligned} \frac{L(x/n)}{L(x)} &\leq c_5(1+x)^\gamma \left(1 + \frac{x}{n}\right)^\alpha \leq c_5(1+nx_0)^\gamma (1+x_0)^\alpha \\ &\leq c_5(1+x_0)^\alpha x_0^\gamma (1/x_0 + n)^\gamma \leq c_6(1+n)^\gamma \leq c_6(2n)^\gamma. \end{aligned}$$

Für $x/n > x_0$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{L(x/n)}{L(x)} &= \frac{c(x/n)}{c(x)} \exp \left\{ \int_z^{x/n} \frac{\delta(u)}{u} du - \int_z^x \frac{\delta(u)}{u} du \right\} \\ &\leq c_7 \exp \left\{ - \int_{x/n}^x \frac{\delta(u)}{u} du \right\} \\ &\leq c_7 \exp \left\{ \frac{\gamma}{2} \int_{x/n}^x \frac{1}{u} du \right\} \\ &= c_7 \exp \left\{ \frac{\gamma}{2} (\log(x) - \log(x/n)) \right\} \\ &= c_7 \exp \left\{ \frac{\gamma}{2} \log(n) \right\} = c_7 n^{\gamma/2} \leq c_7 n^\gamma. \end{aligned}$$

□

Lemma 4.32. Sei $\gamma > 0$, dann erfüllt $M(X, N) = cN^{2(\gamma+\alpha)}$ die Bedingung 3, dabei ist c eine Konstante die nur von γ abhängt.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $M(X, N)$ eine Majorante ist. Aus $M_{N-1} \vee (u - S_{N-1}) \geq u/n$ (Lemma 4.19) und Lemma 4.31 folgt:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\bar{F}(M_{N-1} \vee (u - S_{N-1}))}{\bar{F}(u)} \right)^2 &\leq \left(\frac{\bar{F}(u/N)}{\bar{F}(u)} \right)^2 \\ &= \left(\frac{L(u/N)}{L(u)} \frac{(1+u)^\alpha}{(1+u/N)^\alpha} \right)^2 \\ &\leq \left(c_1 N^\gamma N^\alpha \frac{(1+u)^\alpha}{(N+u)^\alpha} \right)^2 \\ &\leq cN^{2\gamma} N^{2\alpha} = cN^{2(\gamma+\alpha)}. \end{aligned}$$

Da $cN^{2(\gamma+\alpha)}$ nur von N abhängt gilt $E_X[cN^{2(\gamma+\alpha)}] = cN^{2(\gamma+\alpha)} < \infty$ aus $E[z^N] < \infty$ für ein $z > 1$ folgt: $E[N^2 M(X, N)] = E[cN^{2(\gamma+\alpha)+2}] < \infty$. \square

4.3.7.2 Der Lognormal Fall

In diesem Kapitel wollen wir zeigen, dass die Lognormal-Verteilung (vergleiche Kapitel 2.2) die Bedingung 3 erfüllt. Da wir die Verteilungsfunktion F nur asymptotisch kennen (Lemma 2.15), brauchen wir die folgenden Abschätzungen.

Lemma 4.33. *Sei*

$$\bar{G}(x) = \exp \left\{ \frac{-(\log(x/\eta))^2}{2\sigma^2} \right\}.$$

Dann gilt $\bar{F}(x) \leq \bar{G}(x)$ für alle $x \geq x_1 = \eta \exp \{ \sigma/\sqrt{2\pi} \}$.

Beweis. Aus

$$\begin{aligned} \bar{G}(x) &= \int_x^\infty \frac{\log(y/\eta)}{\sigma^2 y} \exp \left\{ \frac{-(\log(y/\eta))^2}{2\sigma^2} \right\} dy = \int_x^\infty g(y) dy \\ \bar{F}(x) &= \int_x^\infty \frac{1}{y\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{(\log(y/\eta))^2}{2\sigma^2} \right\} dy = \int_x^\infty f(y) dy, \end{aligned}$$

und $g(x) \geq f(x)$ für alle $x \geq \eta \exp \{ \sigma/\sqrt{2\pi} \}$ folgt die Aussage des Lemmas. \square

Lemma 4.34. *Sei*

$$\bar{H}(x) = \frac{1}{x} \exp \left\{ -\frac{(\log(x/\eta))^2}{2\sigma^2} \right\}.$$

Dann gilt $\bar{F}(x) \geq \bar{H}(x)$ für alle $x \geq x_2$.

Beweis. Aus

$$\begin{aligned} \bar{H}(x) &= \int_x^\infty \frac{\sigma^2 + \log(y/\eta)}{\sigma^2 y^2} \exp \left\{ -\frac{(\log(y/\eta))^2}{2\sigma^2} \right\} dy = \int_x^\infty h(y) dy \\ \bar{F}(x) &= \int_x^\infty \frac{1}{y\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{(\log(y/\eta))^2}{2\sigma^2} \right\} dx = \int_x^\infty f(y) dy \end{aligned}$$

und $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/g(x) = 0$ folgt die Existenz einer Konstanten x_2 mit $\bar{F}(x) \geq \bar{H}(x)$ für alle $x \geq x_2$. \square

Um zu zeigen, dass Bedingung 3 erfüllt ist, brauchen wir eine integrierbare Majorante für

$$\left(\frac{\bar{F}(M_{n-1} \vee (u - S_{n-1}))}{\bar{F}(u)} \right)^2.$$

Da nach Lemma 2.18 die Hazard Rate $\lambda(x)$ für alle $x \geq x_0$ monoton fallend ist, definiert man $\bar{x} = \max \{x_0, x_1, x_2, \eta\}$. Wir unterscheiden die Fälle $M_{n-1} > \bar{x}$ und $M_{n-1} \leq \bar{x}$. Beginnen wir mit $M_{n-1} > \bar{x}$. Hier gilt mit Lemma 4.30:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{F}(M_{n-1} \vee (u - S_{n-1}))}{\bar{F}(u)} &\leq \frac{\bar{F}(M_{n-1})}{\bar{F}(nM_{n-1})} \leq \frac{\bar{G}(M_{n-1})}{\bar{H}(nM_{n-1})} \\ &= nM_{n-1} \exp \left\{ \frac{(\log(nM_{n-1}/\eta))^2 - (\log(M_{n-1}/\eta))^2}{2\sigma^2} \right\}. \end{aligned}$$

Für die Dichte von M_{n-1} gilt:

$$f_{M_{n-1}}(x) = (n-1)(F(x))^{n-2} f(x) \leq (n-1)f(x).$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
 & E \left[\left(\frac{\overline{F}(M_{n-1} \vee (u - S_{n-1}))}{\overline{F}(u)} \right)^2 I_{\{M_{n-1} > \bar{x}\}} \right] \\
 & \leq (n-1) \int_{\eta}^{\infty} \left(\frac{\overline{G}(x)}{\overline{H}(nx)} \right)^2 f(x) dx \\
 & \leq \frac{n^2(n-1)}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\eta}^{\infty} x \exp \left\{ \frac{2(\log(nx/\eta))^2 - 2(\log(x/\eta))^2 - (\log(x/\eta))^2}{2\sigma^2} \right\} dx.
 \end{aligned}$$

Sei $A(n) = \eta^2 n^2 (n-1) / \sqrt{2\pi\sigma^2} \exp \{ (\log(n))^2 / (\sigma^2) \}$. Substituiert man in der letzten Gleichung $y = x/\eta$ so erhält man mit ausquadrieren:

$$\begin{aligned}
 & = \frac{\eta^2 n^2 (n-1)}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_1^{\infty} y \exp \left\{ \frac{2(\log(y))^2 + 4 \log(n) \log(y) + 2(\log(n))^2 - 3(\log(y))^2}{2\sigma^2} \right\} dy \\
 & = A(n) \int_1^{\infty} y \exp \left\{ \frac{4 \log(n) \log(y) - (\log(y))^2}{2\sigma^2} \right\} dy \\
 & = A(n) \underbrace{\int_1^{n^4} y \exp \left\{ -\frac{\log(y) \log(y/n^4)}{2\sigma^2} \right\} dy}_{I_1} + A(n) \underbrace{\int_{n^4}^{\infty} y \exp \left\{ -\frac{\log(y) \log(y/n^4)}{2\sigma^2} \right\} dy}_{I_2}.
 \end{aligned}$$

Für I_1 gilt:

$$\begin{aligned}
 I_1 & = \int_1^{n^4} y \exp \left\{ \frac{\log(y) \log(n^4/y)}{2\sigma^2} \right\} dy \\
 & \leq \int_1^{n^4} n^4 \exp \left\{ \frac{(\log(n^4))^2}{2\sigma^2} \right\} dy \leq n^8 \exp \left\{ \frac{16(\log(n))^2}{2\sigma^2} \right\}.
 \end{aligned}$$

Für I_2 gilt:

$$I_2 \leq \int_{n^4}^{\infty} y \exp \left\{ -\frac{(\log(y/n^4))^2}{2\sigma^2} \right\} dy.$$

Substituiert man $t = y/n^4$ so erhält man:

$$I_2 \leq n^8 \int_1^{\infty} t \exp \left\{ -\frac{(\log(t))^2}{2\sigma^2} \right\} = cn^8,$$

mit einer Konstante $c < \infty$. Falls $E[z^N] < \infty$ für ein $z > 1$ dann gilt mit dem oben Berechnetem:

$$E_X \left[\left(\frac{\overline{F}(M_{N-1} \vee (u - S_{N-1}))}{\overline{F}(u)} \right)^2 I_{\{M_{N-1} > \bar{x}\}} \right] \leq B(N),$$

mit $E[N^2 B(N)] < \infty$. Des Weiteren ist

$$\left(\frac{\overline{G}(M_{N-1})}{\overline{H}(NM_{N-1})} \right)^2 I_{\{M_{N-1} > \bar{x}\}}$$

eine integrierbare Majorante für

$$\left(\frac{\overline{F}(M_{N-1} \vee (u - S_{N-1}))}{\overline{F}(u)} \right)^2 I_{\{M_{N-1} > \bar{x}\}}.$$

Betrachten wir den Fall $M_{n-1} \leq \bar{x}$. Falls $u \leq n\bar{x}$ dann gilt:

$$\begin{aligned} & E \left[\left(\frac{\overline{F}(M_{n-1} \vee (u - S_{n-1}))}{\overline{F}(u)} \right)^2 I_{\{M_{n-1} \leq \bar{x}\}} \right] \\ & \leq E \left[\frac{1}{(\overline{F}(n\bar{x}))^2} \right] \leq \frac{1}{(\overline{H}(n\bar{x}))^2} \\ & \leq n^2 \bar{x}^2 \exp \left\{ \frac{(\log(n\bar{x}/\eta))^2}{\sigma^2} \right\}. \end{aligned}$$

Falls $u > n\bar{x}$ gilt:

$$M_{n-1} \vee (u - S_{n-1}) \geq u - S_{n-1} \geq u - (n-1)M_{n-1} \geq u - (n-1)\bar{x} \geq \bar{x}.$$

Da $\lambda(x)$ für $x \geq \bar{x} \geq x_0$ monoton fallend und $\Lambda(x) \geq 0$ ist, gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{F}(u - (n-1)\bar{x})}{\overline{F}(u)} &= e^{\Lambda(u) - \Lambda(u - (n-1)\bar{x})} \\ &= \exp \left\{ \int_{u - (n-1)\bar{x}}^u \lambda(x) dx \right\} \\ &= \exp \left\{ \int_{\bar{x}}^{n\bar{x}} \lambda(y + (u - n\bar{x})) dy \right\} \\ &\leq \exp \left\{ \int_{\bar{x}}^{n\bar{x}} \lambda(y) dy \right\} = e^{\Lambda(n\bar{x}) - \Lambda(\bar{x})} \\ &\leq e^{\Lambda(n\bar{x})} \leq \frac{1}{\overline{F}(n\bar{x})} \leq \frac{1}{\overline{H}(n\bar{x})}. \end{aligned}$$

Zusammen mit dem Fall $u \leq n\bar{x}$ gilt:

$$\begin{aligned} & E \left[\left(\frac{\overline{F}(M_{n-1} \vee (u - S_{n-1}))}{\overline{F}(u)} \right)^2 I_{\{M_{n-1} \leq \bar{x}\}} \right] \\ & \leq E \left[\frac{1}{(\overline{H}(n\bar{x}))^2} \right] = n^2 \bar{x}^2 \exp \left\{ \frac{(\log(n\bar{x}/\eta))^2}{2\sigma^2} \right\}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Da $E[z^N] < \infty$ für ein $z > 1$, gilt

$$E_X \left[\left(\frac{\overline{F}(M_{N-1} \vee (u - S_{N-1}))}{\overline{F}(u)} \right)^2 I_{\{M_{N-1} \leq \bar{x}\}} \right] \leq C(N),$$

und $E[N^2 C(N)] < \infty$. Des Weiteren ist

$$\frac{1}{(\overline{H}(N\bar{x}))^2}$$

eine integrierbare Majorante für

$$\left(\frac{\overline{F}(M_{N-1} \vee (u - S_{N-1}))}{\overline{F}(u)} \right)^2 I_{\{M_{N-1} \leq \bar{x}\}}.$$

Setzt man beide Fälle zusammen folgt, dass Bedingung 3 erfüllt ist.

4.3.7.3 Der Weibull Fall

In diesem Kapitel, betrachten wir $\bar{F}(x) = e^{-x^\beta}$. Wir werden die Bedingung 3 für deterministische Schadensanzahl $N = n + 1$ zeigen, falls $\beta < \log(3/2)/\log(3) = 1 - \log(2)/\log(3) \approx 0.369$. Das heißt, wir suchen eine integrierbare Majorante für

$$\left(\frac{\bar{F}(M_n \vee (u - S_n))}{\bar{F}(u)} \right)^2. \quad (4.44)$$

Lemma 4.35. Für $\beta < \log(3/2)/\log(3)$ und $N = n + 1$, ist

$$M(X, n + 1) = M(X) = \left(\frac{\bar{F}(M_n)}{\bar{F}(M_n + S_n)} \right)^2 = \exp \left\{ -2(M_n)^\beta + 2(M_{n-1} + S_{n-1})^\beta \right\}$$

eine integrierbare Majorante für (4.44).

Beweis. Aus der Monotonie der Hazard Rate $\lambda(x) = \beta x^{\beta-1}$ und Lemma 4.30 folgt, dass $M(X)$ eine Majorante für (4.44) ist. Es bleibt die Integrierbarkeit zu zeigen. Ab jetzt bezeichnen c_k und γ_k Konstanten. Aus Lemma 4.21 folgt für die gemeinsame Dichte $h(x, y)$ von (M_n, S_n) auf $kx \leq y \leq (k+1)x$, $k \in \{1, \dots, n-1\}$:

$$h(x, y) \leq c_2(1+x)^{\gamma_2} \exp \left\{ -kx^\beta - (y - kx)^\beta \right\} \leq c_2(1+x)^{\gamma_2} \exp \left\{ -kx^\beta \right\}, \quad kx \leq y \leq (k+1)x.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} E[M(X)] &= E \left[\left(\frac{\bar{F}(M_n)}{\bar{F}(M_n + S_n)} \right)^2 \right] \\ &\leq \int_0^\infty \sum_{k=1}^{n-1} \int_{kx}^{(k+1)x} c_2(1+x)^{\gamma_2} \exp \left\{ -2x^\beta + 2(x+y)^\beta - kx^\beta \right\} dy dx \\ &\leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^\infty \int_{kx}^{(k+1)x} c_2(1+x)^{\gamma_2} \exp \left\{ 2((k+2)x)^\beta - (k+2)x^\beta \right\} dy dx \\ &\leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^\infty c_2(1+x)^{\gamma_2+1} \exp \left\{ (2(k+2)^\beta - (k+2))x^\beta \right\} dx. \end{aligned}$$

Falls $2(k+2)^\beta - (k+2) < 0$ für alle $k \in \{1, \dots, n-1\}$ dann existieren alle Integrale und damit gilt: $E[M(X)] < \infty$. Es gilt:

$$2(k+2)^\beta - (k+2) < 0 \text{ oder } (k+2)^\beta < \frac{k+2}{2} \text{ oder } \beta < \frac{\log((k+2)/2)}{\log(k+2)},$$

und:

$$\frac{\log((k+2)/2)}{\log(k+2)} = 1 - \frac{\log(2)}{\log(k+2)} < 1 - \frac{\log(2)}{\log(3)} \approx 0.369.$$

Womit alles gezeigt wäre. \square

Bemerkung 4.8. Da γ_2 noch von n abhängt ist $M(X, N)$ bei zufälligem N im Allgemeinen nicht integrierbar.

4.3.8 Der relative Fehler von Z_6

In diesem Kapitel wollen wir zeigen, dass mit den Bedingungen von Kapitel 4.3.7 (d.h. $E[z^N] < \infty$ für ein $z > 1$, Bedingung 3, F ist stetig und subexponentiell), der relative Fehler von

$$Z_6(u) = N(\overline{F}(M_{n-1} \vee (u - S_{n-1})) - \overline{F}(u)) + E[N]\overline{F}(u)$$

für $u \rightarrow \infty$ gegen Null strebt.

Lemma 4.36. *Es gilt:*

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{Z_6(u)^2}{\overline{F}(u)^2} = E[N]^2.$$

Beweis. Für jedes N gilt nach der Definition von $Z_6(u)$ und Lemma 4.24:

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{Z_6(u)^2}{\overline{F}(u)^2} &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(N(\overline{F}(M_{N-1} \vee (u - S_{N-1})) - \overline{F}(u)) + E[N]\overline{F}(u))^2}{\overline{F}(u)^2} \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \left(N \left(\frac{\overline{F}(M_{N-1} \vee (u - S_{N-1}))}{\overline{F}(u)} - 1 \right) + E[N] \right)^2 \\ &= \left(N \left(\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(M_{N-1} \vee (u - S_{N-1}))}{\overline{F}(u)} - 1 \right) + E[N] \right)^2 \\ &= (N(1 - 1) + E[N])^2 = E[N]^2. \end{aligned}$$

□

Satz 4.37. *Sei Bedingung 3 erfüllt. Dann gilt für den relativen Fehler von Z_6 :*

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\text{Var}[Z_6(u)]}}{P(S_N > u)} = 0.$$

Beweis. Wegen $P(S_N > u) \sim E[N]\overline{F}(u)$ (Lemma 2.6) und $E[N] > 0$ ist der Satz äquivalent zu:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}[Z_6(u)]}{\overline{F}(u)^2} = 0.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{Z_6(u)^2}{\overline{F}(u)^2} &= \frac{(N\overline{F}(M_{N-1} \vee (u - S_{N-1})) - N\overline{F}(u) + E[N]\overline{F}(u))^2}{\overline{F}(u)^2} \\ &= N^2 \frac{\overline{F}(M_{N-1} \vee (u - S_{N-1}))^2}{\overline{F}(u)^2} \\ &\quad - 2N(N - E[N]) \frac{\overline{F}(M_{N-1} \vee (u - S_{N-1}))}{\overline{F}(u)} + (N - E[N])^2. \end{aligned}$$

Zusammen mit Bedingung 3 folgt:

$$\frac{Z_6(u)^2}{\overline{F}(u)^2} \leq N^2 M(X, N) + 2 |N^2 - NE[N]| \sqrt{M(X, N)} + (N - E[N])^2 = \bar{M}(X, N).$$

Aus $E[N^2 M(X, N)] < \infty$ folgt: $E[\bar{M}(X, N)] < \infty$ und somit hat $Z_6(u)^2/\bar{F}(u)^2$ eine integrierbare Majorante. Mit dem Satz von der dominierten Konvergenz und Lemma 2.6 folgt:

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}[Z_6(u)]}{\bar{F}(u)^2} &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{E[Z_6(u)^2] - E[Z_6(u)]^2}{\bar{F}(u)^2} \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} E \left[\frac{Z_6(u)^2}{\bar{F}(u)^2} \right] - \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{E[Z_6(u)]^2}{\bar{F}(u)^2} \\ &= E \left[\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{Z_6(u)^2}{\bar{F}(u)^2} \right] - \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{P(S_N > u)^2}{\bar{F}(u)^2} \\ &= E[E[N]^2] - E[N]^2 = 0. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 4.9. Da die Bedingungen von Satz 4.37 die Gleichen sind wie die von Satz 4.28, folgt, dass die Aussage des Satzes 4.37 für Regular-Varying- und Lognormal-Verteilungen gültig ist. Für die Weibull-Verteilung mit Parameter $0 < \beta < 1 - \log(2)/\log(3)$ ist er unter der zusätzlichen Annahme, dass N beschränkt ist, gültig.

4.3.9 Die Geschwindigkeit der Konvergenz

In den Kapiteln 4.3.7 und 4.3.8 haben wir gesehen, dass der relative Fehler von Z_6 gegen Null strebt und sich die Varianz von Z_5 asymptotisch wie die Varianz von $g_N(n) = P(S_n > u) = \bar{F}^{n*}(u)$ verhält. In diesem Kapitel wollen wir für Pareto mit $\bar{F}(x) = (1+x)^{-\alpha}$ quantitative Ausdrücke für diesen Sachverhalt herleiten. Dazu brauchen wir zwei technische Lemmas (die Aussagen der Lemmas sind allgemein bekannt wir wiederholen hier die Beweise).

Lemma 4.38. *Für $\alpha > 0$, $c \geq 1$ und $0 \leq x \leq c$ gilt: $c^\alpha - (c-x)^\alpha$ ist monoton wachsend in α .*

Beweis. Sei $f(\alpha) = c^\alpha - (c-x)^\alpha$. Dann ist $f(\alpha)$ monoton wachsend genau dann wenn $f'(\alpha) = \log(c)c^\alpha - \log(c-x)(c-x)^\alpha \geq 0$ gilt. Aus $c^\alpha \geq (c-x)^\alpha \geq 0$ und $\log(c) \geq \log(c-x)$ folgt:

$$\begin{aligned} \log(c)c^\alpha &\geq \log(c-x)(c-x)^\alpha, \\ \log(c)c^\alpha - \log(c-x)(c-x)^\alpha &\geq 0, \\ f'(\alpha) &\geq 0. \end{aligned}$$

□

Korollar 4.39. *Für $\alpha \leq 1$ gilt: $c^\alpha - (c-x)^\alpha \leq x$.*

Lemma 4.40 (Bernoulli). *Für $\alpha \geq 1$, $c > 0$ und $x > -c$ gilt:*

$$(c+x)^\alpha \geq c^\alpha + \alpha c^{\alpha-1} x.$$

Beweis. Da $f(x) = (c+x)^\alpha$ konvex ist kann diese Funktion durch ihre Tangente im Punkt $x = 0$ nach unten abgeschätzt werden. □

Lemma 4.41. *Sei $\bar{F}(x) = (1+x)^{-\alpha}$ und $u > 0$. Dann gilt:*

$$1 - \frac{\bar{F}^{n*}(u)^2}{n^2 \bar{F}(u)^2} \leq 2(n-1)u^{-\alpha}.$$

Beweis. Es gilt:

$$\begin{aligned}\bar{F}^{n*}(x) &= P\left(\sum_{i=1}^n X_i > x\right) \geq P\left(\bigcup_{i=1}^n \left\{X_i > x, \max_{j \neq i}(X_j) \leq x\right\}\right) \\ &= \sum_{i=1}^n P(X_i > x)P(\max_{j \neq i}(X_j) \leq x) = n\bar{F}(x)F(x)^{n-1}.\end{aligned}\quad (4.45)$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}1 - \frac{\bar{F}^{n*}(u)^2}{n^2\bar{F}(u)^2} &\leq 1 - \frac{n^2\bar{F}(u)^2F(u)^{2(n-1)}}{n^2\bar{F}(u)^2} = 1 - \bar{F}(u)^{2(n-1)} \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{(1+u)^\alpha}\right)^{2(n-1)} \\ &\leq 1 - \left(1 - \frac{2(n-1)}{(1+u)^\alpha}\right) \leq 2(n-1)u^{-\alpha}.\end{aligned}$$

Dabei folgt die vorletzte Ungleichung aus der Bernoulli'schen Ungleichung. \square

Lemma 4.42. Sei $\bar{F}(x) = (1+x)^{-\alpha}$ und $u > 2^{(\alpha+1)/\alpha}$. Dann gibt es eine Konstante k_2 sodass:

$$\frac{E[\bar{F}(M_{n-1} \vee (u - S_{n-1}))^2]}{\bar{F}(u)^2} - 1 \leq k_2 n^{3\alpha+1} u^{-\alpha/(\alpha+1)}.$$

Beweis. Sei $x_0 > 0$. Wir unterscheiden die Fälle $M_{n-1} \leq x_0/(n-1)$, hier gilt:

$$M_{n-1} \vee (u - S_{n-1}) \geq u - S_{n-1} \geq u - (n-1)M_{n-1} \geq u - x_0,$$

und $M_{n-1} > x_0/(n-1)$, es gilt: $M_{n-1} \vee (u - S_{n-1}) \geq u/n$ (siehe Lemma 4.19). Es gilt:

$$\begin{aligned}\frac{E[\bar{F}(M_{n-1} \vee (u - S_{n-1}))^2]}{\bar{F}(u)^2} - 1 &= \frac{E[\bar{F}(M_{n-1} \vee (u - S_{n-1}))^2 I_{\{M_{n-1} \leq x_0/(n-1)\}}]}{\bar{F}(u)^2} \\ &\quad + \frac{E[\bar{F}(M_{n-1} \vee (u - S_{n-1}))^2 I_{\{M_{n-1} > x_0/(n-1)\}}]}{\bar{F}(u)^2} - 1 \\ &\leq \frac{\bar{F}(u - x_0)^2}{\bar{F}(u)^2} + \left(1 - F\left(\frac{x_0}{n-1}\right)^{n-1}\right) \frac{\bar{F}(u/n)^2}{\bar{F}(u)^2} - 1 \\ &= \left(\frac{(1+u)^{2\alpha}}{(1+u-x_0)^{2\alpha}} - 1\right) \\ &\quad + \left(1 - \left(1 - \frac{1}{(1+x_0/(n-1))^\alpha}\right)^{n-1}\right) \frac{(1+u)^{2\alpha}}{(1+u/n)^{2\alpha}}.\end{aligned}$$

Sei

$$\begin{aligned}B_1 &= \frac{(1+u)^{2\alpha}}{(1+u-x_0)^{2\alpha}} - 1 \\ &= \frac{(1+u)^{2\alpha} - (1+u-x_0)^{2\alpha}}{(1+u-x_0)^{2\alpha}} \\ &= \frac{(1/u+1)^{2\alpha} - (1/u-x_0/u+1)^{2\alpha}}{(1/u-x_0/u+1)^{2\alpha}}.\end{aligned}$$

Für $\alpha > 1/2$ und $x_0 < u/2$ gilt mit Lemma 4.40

$$\begin{aligned} B_1 &\leq \frac{(1/u + 1)^{2\alpha} - (1/u + 1)^{2\alpha} + 2\alpha(1/u + 1)^{2\alpha-1}x_0/u}{(1/u - x_0/u + 1)^{2\alpha}} \\ &\leq \frac{2\alpha(1/u + 1)^{2\alpha-1}}{(1/u - x_0/u + 1)^{2\alpha}} \frac{x_0}{u} \leq c_1 \frac{x_0}{u}, \end{aligned}$$

für eine Konstante c_1 .

Für $\alpha \leq 1/2$ und $x_0 < u/2$ gilt mit Korollar 4.39

$$B_1 \leq \frac{1}{(1/u - x_0/u + 1)^{2\alpha}} \frac{x_0}{u} \leq c_2 \frac{x_0}{u},$$

für eine Konstante c_2 . Insgesamt folgt $B_1 \leq c_3 x_0/u$ für alle $x_0 < u/2$.

Aus

$$\frac{(1+u)^{2\alpha}}{(1+u/n)^{2\alpha}} = n^{2\alpha} \frac{(1+u)^{2\alpha}}{(n+u)^{2\alpha}} \leq n^{2\alpha},$$

und der Bernoulli'schen Ungleichung folgt:

$$\begin{aligned} B_2 &= \left(1 - \left(1 - \frac{1}{(1+x_0/(n-1))^\alpha} \right)^{n-1} \right) \frac{(1+u)^{2\alpha}}{(1+u/n)^{2\alpha}} \\ &\leq n^{2\alpha} \left(1 - \left(1 - \frac{n-1}{(1+x_0/(n-1))^\alpha} \right) \right) \\ &\leq n^{2\alpha} (n-1)^{\alpha+1} \frac{1}{(n-1+x_0)^\alpha} \leq n^{3\alpha+1} x_0^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Setzt man $x_0 = u^\beta$ mit $\beta = 1/(\alpha+1)$ dann gilt: $x_0 < u/2$ für $u > 2^{(\alpha+1)/\alpha}$ und damit:

$$\frac{E[\overline{F}(M_{n-1} \vee (u - S_{n-1}))^2]}{n^2 \overline{F}(u)^2} - 1 \leq B_1 + B_2 \leq c_3 u^{\alpha/(\alpha+1)} + n^{3\alpha+1} u^{\alpha/(\alpha+1)} \leq k_2 n^{3\alpha+1} u^{\alpha/(\alpha+1)}.$$

□

Satz 4.43. Sei $\overline{F}(x) = (1+x)^{-\alpha}$ und $E[N^{3\alpha+3}] < \infty$. Dann existiert ein u_0 und eine Konstante k , sodass für alle $u > u_0$:

$$0 \leq 1 - \frac{\text{Var}[g_N(N)]}{\text{Var}[Z_5(u)]} \leq k u^{-\alpha/(\alpha+1)}.$$

Beweis. Sei $P(N=n) = p_n$, $P(S_N > u) = \mu$, $A(u) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n n^2 \overline{F}(u)^2 - \mu^2$ und $c_1 = 2E[N^3]$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{Var}[g_N(N)] &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n \overline{F}^{n*}(u)^2 - \mu^2 = A(u) + \sum_{n=1}^{\infty} p_n \left(\overline{F}^{n*}(u) - n^2 \overline{F}(u)^2 \right) \\ &= A(u) + \sum_{n=1}^{\infty} p_n n^2 \overline{F}(u)^2 \left(\frac{\overline{F}^{n*}(u)^2}{n^2 \overline{F}(u)^2} - 1 \right) \\ &\geq A(u) - 2u^{-\alpha} \overline{F}(u)^2 \sum_{n=1}^{\infty} p_n n^3 \\ &= A(u) - c_1 u^{-\alpha} \overline{F}(u)^2. \end{aligned}$$

Des Weiteren gilt:

$$\begin{aligned}
 \text{Var}[Z_5(u)] &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n n^2 E[\overline{F}(M_{n-1} \vee (u - S_{n-1}))^2] - \mu^2 \\
 &= A(u) + \sum_{n=1}^{\infty} p_n (n^2 E[\overline{F}(M_{n-1} \vee (u - S_{n-1}))^2] - n^2 \overline{F}(u)^2) \\
 &= A(u) + \sum_{n=1}^{\infty} p_n n^2 \overline{F}(u)^2 \left(\frac{E[\overline{F}(M_{n-1} \vee (u - S_{n-1}))^2]}{\overline{F}(u)^2} - 1 \right) \\
 &\leq A(u) + k_2 u^{-\alpha/(\alpha+1)} \overline{F}(u)^2 \sum_{n=1}^{\infty} p_n n^{3\alpha+3} \\
 &= A(u) + c_2 u^{-\alpha/(1+\alpha)} \overline{F}(u)^2.
 \end{aligned}$$

Für $c_2 = k_2 E[N^{3\alpha+3}]$. Aus $P(S_N > u) \sim E[N] \overline{F}(u)$ und $E[N^2] - E[N]^2 = \text{Var}[N] > 0$ folgt die Existenz einer Konstanten $c_3 > 0$ und eines $u_0 > 0$ mit:

$$A(u) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n n^2 \overline{F}(u)^2 - \mu^2 = E[N^2] \overline{F}(u)^2 - P(S_N > u)^2 \geq c_3 \overline{F}(u)^2, \quad \text{für } u > u_0.$$

Zusammen folgt:

$$\begin{aligned}
 1 - \frac{\text{Var}[g_N(N)]}{\text{Var}[Z_5(u)]} &\leq 1 - \frac{A(u) - c_1 u^{-\alpha} \overline{F}(u)^2}{A(u) + c_2 u^{-\alpha/(\alpha+1)} \overline{F}(u)^2} \\
 &\leq \frac{(c_2 u^{-\alpha/(\alpha+1)} + c_1 u^{-\alpha}) \overline{F}(u)^2}{(c_3 + c_2 u^{-\alpha/(\alpha+1)}) \overline{F}(u)^2} \\
 &\leq c_4 u^{-\alpha/(\alpha+1)}.
 \end{aligned}$$

Für eine Konstante $c_4 > 0$. □

Kommen wir zu Z_6 :

Lemma 4.44. Sei $\overline{F}(x) = (1+x)^{-\alpha}$ und $E[c^N] < \infty$ für ein $c > 1$. Dann existiert ein K_1 mit:

$$E \left[N^2 \left(\frac{\overline{F}(M_{N-1} \vee (u - S_{N-1}))}{\overline{F}(u)} - 1 \right)^2 \right] \leq K_1 u^{-\frac{2\alpha}{2+\alpha}}, \quad \text{für } u > u_0.$$

Beweis. Für ein $x_0 = u^\beta$ mit $0 < \beta < 1$ und alle $u > u_0$ gilt:

$$\begin{aligned}
 &E_X \left[\left(\frac{\overline{F}(M_{n-1} \vee (u - S_{n-1}))}{\overline{F}(u)} - 1 \right)^2 \right] \\
 &= E_X \left[\left(\frac{\overline{F}(M_{n-1} \vee (u - S_{n-1}))}{\overline{F}(u)} - 1 \right)^2 I_{\{M_{n-1} \leq x_0/(n-1)\}} \right] \tag{4.46}
 \end{aligned}$$

$$+ E_X \left[\left(\frac{\overline{F}(M_{n-1} \vee (u - S_{n-1}))}{\overline{F}(u)} - 1 \right)^2 I_{\{M_{n-1} > x_0/(n-1)\}} \right]. \tag{4.47}$$

Zu 4.46: Auf der Menge $\{M_{n-1} \leq x_0/(n-1)\}$ gilt: $M_{n-1} \vee (u - S_{n-1}) \leq u$ und

$$\overline{F}(M_{n-1} \vee (u - S_{n-1})) \leq \overline{F}(u - S_{n-1}) \leq \overline{F}(u - x_0).$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\overline{F}(M_{n-1} \vee (u - S_{n-1}))}{\overline{F}(u)} - 1 \right| &= \frac{\overline{F}(M_{n-1} \vee (u - S_{n-1}))}{\overline{F}(u)} - 1 \\ &\leq \frac{\overline{F}(u - x_0)}{\overline{F}(u)} - 1 = \frac{(1+u)^\alpha}{(1+u-x_0)^\alpha} - 1 \\ &= \frac{(1+\frac{1}{u})^\alpha - (1+\frac{1}{u}-\frac{x_0}{u})^\alpha}{(1+\frac{1}{u}-\frac{x_0}{u})^\alpha}. \end{aligned}$$

Für $\alpha \leq 1$ gilt mit Korollar 4.39

$$\left| \frac{\overline{F}(M_{n-1} \vee (u - S_{n-1}))}{\overline{F}(u)} - 1 \right| \leq \frac{x_0}{u} \left(1 - \frac{x_0 - 1}{u}\right)^{-\alpha}.$$

Für $\alpha > 1$ gilt mit Lemma 4.40

$$\left| \frac{\overline{F}(M_{n-1} \vee (u - S_{n-1}))}{\overline{F}(u)} - 1 \right| \leq \frac{x_0}{u} \frac{\alpha (1 + \frac{1}{u})^{\alpha-1}}{(1 - \frac{x_0-1}{u})^\alpha}.$$

Damit gibt es für alle $u > u_0$ ein $K > 0$ mit:

$$E_X \left[\left(\frac{\overline{F}(M_{n-1} \vee (u - S_{n-1}))}{\overline{F}(u)} - 1 \right)^2 I_{\{M_{n-1} \leq x_0/(n-1)\}} \right] \leq K \left(\frac{x_0}{u} \right)^2.$$

Zu 4.47: Aus $M_{n-1} \vee (u - S_{n-1}) \geq u/n$ folgt:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\overline{F}(M_{n-1} \vee (u - S_{n-1}))}{\overline{F}(u)} - 1 \right| &\leq 1 + \frac{\overline{F}(M_{n-1} \vee (u - S_{n-1}))}{\overline{F}(u)} \\ &\leq 1 + \frac{\overline{F}(\frac{u}{n})}{\overline{F}(u)} \\ &= 1 + \frac{(1+u)^\alpha}{(1+\frac{u}{n})^\alpha} \\ &= 1 + n^\alpha \frac{(1+u)^\alpha}{(n+u)^\alpha} \leq 1 + n^\alpha. \end{aligned}$$

Des Weiteren gilt:

$$\begin{aligned} E_X [I_{\{M_{n-1} > x_0/(n-1)\}}] &= P \left(M_{n-1} > \frac{x_0}{n-1} \right) \\ &= 1 - F \left(\frac{x_0}{n-1} \right)^{n-1} \\ &= 1 - \left(1 - \frac{(n-1)^\alpha}{((n-1)+x_0)^\alpha} \right)^{n-1} \\ &\stackrel{\text{Bernoulli}}{\leq} \frac{(n-1)^{\alpha+1}}{((n-1)+x_0)^\alpha} \\ &\leq (n-1)^{\alpha+1} x_0^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} &E_X \left[\left(\frac{\overline{F}(M_{n-1} \vee (u - S_{n-1}))}{\overline{F}(u)} - 1 \right)^2 I_{\{M_{n-1} > x_0/(n-1)\}} \right] \\ &\leq (1+n^\alpha)^2 E_X [I_{\{M_{n-1} > x_0/(n-1)\}}] \\ &\leq (1+n^\alpha)^2 (n-1)^{\alpha+1} x_0^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Setzt man $x_0 = u^\beta$ mit $\beta = 2/(2 + \alpha)$. Dann gilt: $x_0^{-\alpha} = (x_0/u)^2 = u^{-2\alpha/(2+\alpha)}$ und für alle $u > u_0$:

$$E_X \left[\left(\frac{\overline{F}(M_{n-1} \vee (u - S_{n-1}))}{\overline{F}(u)} - 1 \right)^2 \right] \leq C(n) u^{-\frac{2\alpha}{2+\alpha}}.$$

Dabei ist $C(n)$ eine Funktion mit $E[N^2 C(N)] < \infty$.

Es gilt:

$$\begin{aligned} & E \left[N^2 \left(\frac{\overline{F}(M_{N-1} \vee (u - S_{N-1}))}{\overline{F}(u)} - 1 \right)^2 \right] \\ &= E \left[N^2 E_X \left[\left(\frac{\overline{F}(M_{N-1} \vee (u - S_{N-1}))}{\overline{F}(u)} - 1 \right)^2 \right] \right] \\ &\leq E[N^2 C(N)] u^{-\frac{2\alpha}{2+\alpha}} = K_1 u^{-\frac{2\alpha}{2+\alpha}}. \end{aligned}$$

□

Lemma 4.45. Sei $\overline{F}(x) = (1 + x)^{-\alpha}$ und $E[c^N] < \infty$ für ein $c > 1$. Dann existiert ein K_2 mit:

$$E \left[N \left(\frac{\overline{F}(M_{N-1} \vee (u - S_{N-1}))}{\overline{F}(u)} - 1 \right) \right] \leq K_2 u^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}, \quad \text{für } u > u_0. \quad (4.48)$$

Beweis. Analog zum Beweis von Lemma 4.44 gilt:

$$\begin{aligned} E_X \left[\left(\frac{\overline{F}(M_{N-1} \vee (u - S_{N-1}))}{\overline{F}(u)} - 1 \right) I_{\{M_{n-1} \leq x_0/(n-1)\}} \right] &\leq K \frac{x_0}{u} \quad \text{und} \\ E_X \left[\left(\frac{\overline{F}(M_{N-1} \vee (u - S_{N-1}))}{\overline{F}(u)} - 1 \right) I_{\{M_{n-1} > x_0/(n-1)\}} \right] &\leq (1 + n^\alpha)(n-1)^{\alpha+1} x_0^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Mit $x_0 = u^\beta$ und $\beta = 1/(1 + \alpha)$ gilt: $x_0^{-\alpha} = x_0/u = u^{1/(1+\alpha)}$. Analog wie im Beweis von Lemma 4.44 folgt:

$$E \left[N \left(\frac{\overline{F}(M_{N-1} \vee (u - S_{N-1}))}{\overline{F}(u)} - 1 \right) \right] \leq K_2 u^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

□

Lemma 4.46. Sei $\overline{F}(x) = (1 + x)^{-\alpha}$ und $E[c^N] < \infty$ für ein $c > 1$. Dann existiert ein K_3 mit:

$$E[N]^2 - \frac{E[Z_6(u)]^2}{\overline{F}(u)^2} \leq K_3 u^{-\alpha}, \quad \text{für } u > u_0.$$

Beweis. Sei $u > u_0$. Es gilt:

$$\begin{aligned} E[N]^2 - \left(\frac{E[Z_6(u)]}{\overline{F}(u)} \right)^2 &= \left(E[N] + \frac{P(S_N > u)}{\overline{F}(u)} \right) \left(E[N] - \frac{P(S_N > u)}{\overline{F}(u)} \right) \\ &\leq K_0 \left(E[N] - \frac{P(S_N > u)}{\overline{F}(u)} \right), \end{aligned} \quad (4.49)$$

für eine Konstante $K_0 > 0$.

Mit $P(N = n) = p_n$ gilt:

$$\begin{aligned} E[N] - \frac{P(S_N > u)}{\bar{F}(u)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(n - \frac{P(S_n > u)}{\bar{F}(u)} \right) p_n \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} n \left(1 - \frac{\bar{F}^{n*}(u)}{n\bar{F}(u)} \right) p_n. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \bar{F}^{n*}(u) &= P(S_n > u) \\ &\geq P\left(\bigcup_{i=1}^n \left\{ X_i > u, \max_{j \neq i} X_j \leq u \right\}\right) \\ &\stackrel{iid}{=} n\bar{F}(u)F(u)^{n-1}. \end{aligned}$$

Mit der Bernoulli'schen Ungleichung folgt:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\bar{F}^{n*}(u)}{n\bar{F}(u)} &\leq 1 - F(u)^{n-1} = 1 - \left(1 - \frac{1}{(1+u)^\alpha} \right)^{n-1} \\ &\leq \frac{n-1}{(1+u)^{-\alpha}} \leq nu^{-\alpha}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Daraus folgt, mit (4.49) und (4.50), die Aussage des Lemmas. \square

Satz 4.47. Sei $\bar{F}(x) = (1+x)^{-\alpha}$ und $E[c^N] < \infty$ für ein $c > 1$. Dann existiert ein K_4 mit:

$$\frac{\text{Var}[Z_6(u)]}{\bar{F}(u)^2} \leq K_4 u^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}, \quad \text{für } u > u_0.$$

Beweis. Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\text{Var}(Z_6(u))}{\bar{F}(u)^2} &= \frac{E[(N\bar{F}(M_{N-1} \vee (u - S_{N-1})) - N\bar{F}(u) + E[N]\bar{F}(u))^2]}{\bar{F}(u)^2} \\ &\quad - \frac{E[Z_6(u)]^2}{\bar{F}(u)^2} \\ &= E \left[N^2 \left(\frac{\bar{F}(M_{N-1} \vee (u - S_{N-1})) - \bar{F}(u)}{\bar{F}(u)} \right)^2 \right] \\ &\quad + 2E[N]E \left[N \left(\frac{\bar{F}(M_{N-1} \vee (u - S_{N-1})) - \bar{F}(u)}{\bar{F}(u)} \right) \right] \\ &\quad + E[N]^2 - \frac{E[Z_6(u)]^2}{\bar{F}(u)^2}, \end{aligned}$$

Mit den Lemmas 4.44, 4.45 und 4.46 gilt:

$$\frac{\text{Var}(Z_6(u))}{\bar{F}(u)^2} \leq K_1 u^{-2\alpha/(\alpha+2)} + 2E[N]K_2 u^{-\alpha/(\alpha+1)} + K_3 u^{-\alpha} \leq K_4 u^{-\alpha/(\alpha+1)}.$$

\square

Korollar 4.48. Sei $\bar{F}(x) = (1+x)^{-\alpha}$ und $E[c^N] < \infty$ für ein $c > 1$. Dann existiert ein K_5 mit:

$$\frac{\text{Var}[Z_6(u)]}{P(S_N > u)^2} = K_5 u^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}, \quad \text{für } u > u_0.$$

Beweis. Das Korollar folgt aus $P(S_N > u) \sim E[N]\bar{F}(u)$ (Lemma 2.6). \square

Kapitel 5

Momente seltener Ereignisse

Sei $(X_i)_{i \geq 1}$ eine Folge iid verteilter Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F . Sei N eine von $(X_i)_{i \geq 1}$ unabhängige Zufallsvariable mit Werten in \mathbb{N}^0 . Weiters sei $p_n = P(N = n)$, $S_N = \sum_{i=1}^N X_i$ und für festes n sei $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Sei $x^+ = \max(0, x)$.

Im Kollektiven Risikomodell kann der Gesamtschaden durch S_N beschrieben werden (vergleiche Kapitel 1.2). Bei einer Stop-Loss-Rückversicherung übernimmt die Rückversicherung den Schaden der einen vorgegebenen Wert u übersteigt. Der von der Rückversicherung übernommene Schaden ist dann $(S_N - u)^+$. In diesem Kapitel wollen wir den Erwartungswert und das zweite Moment von $(S_N - u)^+$ untersuchen.

In diesem Kapitel sei $F \in \mathcal{S}$ und F stetig mit Dichte f . Um zu garantieren, dass $E[(S_N - u)^+] < \infty$ gilt, sei $E[X_1] < \infty$.

Definition 5.1 (Mean Excess Funktion). Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F und $E[X] < \infty$. Dann wird die Mean Excess Funktion definiert durch:

$$e(u) = E[(X - u)^+ | X > u] = \frac{1}{\bar{F}(u)} \int_u^\infty (x - u) dF(x).$$

Lemma 5.1. Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F und $E[X] < \infty$. Dann gilt:

$$e(u) = \frac{1}{\bar{F}(u)} \int_u^\infty \bar{F}(x) dx.$$

Beweis. Mit partieller Integration folgt:

$$\begin{aligned} e(u) &= \frac{1}{\bar{F}(u)} \int_u^\infty (x - u) dF(x) \\ &= -\frac{1}{\bar{F}(u)} \int_u^\infty (x - u) d\bar{F}(x) \\ &= -\frac{1}{\bar{F}(u)} \left((x - u)\bar{F}(x) \Big|_u^\infty - \int_u^\infty \bar{F}(x) dx \right) \\ &= \frac{1}{\bar{F}(u)} \int_u^\infty \bar{F}(x) dx. \end{aligned}$$

□

Lemma 5.2. Sei $F(x)$ eine stetige Verteilung mit Dichte $f(x)$ und Hazard Rate $\lambda(x)$. Weiters sei $\lim_{x \rightarrow \infty} \lambda(x) = 0$. Dann gilt:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} e(u) = \infty.$$

Beweis. Mit der Regel von de l'Hôpital gilt:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} e(u) = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{\overline{F}(u)} \int_u^\infty \overline{F}(x) dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(u)}{f(u)} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda(u)} = \infty.$$

□

5.1 Der Erwartungswert von $(S_N - u)^+$

5.1.1 Eine Asymptotik für $E[(S_N - u)^+]$

Satz 5.3. Sei $F \in \mathcal{S}$. Dann gilt:

$$E[(S_n - u)^+] \sim ne(u)\overline{F}(u). \quad (5.1)$$

Bemerkung 5.1. Für F regular varying wird in [KM97] eine äquivalente Asymptotik für $E[(S_N - u)^+]$ hergeleitet.

Bemerkung 5.2. Aus Lemma 5.1 folgt:

$$ne(u)\overline{F}(u) = n \int_u^\infty \overline{F}(x) dx. \quad (5.2)$$

Beweis. Mit partieller Integration folgt:

$$\begin{aligned} E[(S_n - u)^+] &= \int_u^\infty (x - u) dF^{n*}(x) \\ &= -(x - u)\overline{F}^{n*}(x) \Big|_u^\infty + \int_u^\infty \overline{F}^{n*}(x) dx \\ &= n \int_u^\infty \overline{F}(x) dx + n \int_u^\infty \overline{F}(x) \left(\frac{\overline{F}^{n*}(x)}{n\overline{F}(x)} - 1 \right) dx. \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\frac{E[(S_n - u)^+]}{ne(u)\overline{F}(u)} = 1 + \underbrace{\frac{n \int_u^\infty \overline{F}(x) \left(\frac{\overline{F}^{n*}(x)}{n\overline{F}(x)} - 1 \right) dx}{n \int_u^\infty \overline{F}(x) dx}}_{=A}. \quad (5.3)$$

Für $A = A(u)$ gilt

$$|A(u)| \leq \sup_{x>u} \left| \frac{\overline{F}^{n*}(x)}{n\overline{F}(x)} - 1 \right| \frac{\int_u^\infty \overline{F}(x) dx}{\int_u^\infty \overline{F}(x) dx} = \sup_{x>u} \left| \frac{\overline{F}^{n*}(x)}{n\overline{F}(x)} - 1 \right|. \quad (5.4)$$

Aus $F \in \mathcal{S}$ und Proposition 2.3 folgt: $\lim_{u \rightarrow \infty} A(u) = 0$. Aus (5.3) folgt damit der Satz. □

Satz 5.4. Sei $F \in \mathcal{S}$ und $E[c^N] < \infty$ für ein $c > 1$. Dann gilt:

$$E[(S_N - u)^+] \sim E[N]e(u)\overline{F}(u). \quad (5.5)$$

Beweis. Aus (5.3) und (5.4) und Lemma 2.4 folgt die Existenz eines $\varepsilon > 0$ mit

$$\left| \frac{E[(S_n - u)^+]}{e(u)\overline{F}(u)} \right| \leq n \left(1 + \sup_{x>u} \left| \frac{\overline{F}^{n*}(x)}{n\overline{F}(x)} - 1 \right| \right) \leq n(2 + K_0(c - \varepsilon)^n) \leq Kc^n. \quad (5.6)$$

Zusammen mit dem Satz von der dominierten Konvergenz gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{E[(S_N - u)^+]}{E[N]e(u)\overline{F}(u)} &= \frac{1}{E[N]} E \left[N \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{E_X[(S_N - u)^+]}{Ne(u)\overline{F}(u)} \right] \\ &= \frac{1}{E[N]} E[N] = 1. \end{aligned}$$

□

5.1.2 Ein Schätzer für $E[(S_N - u)^+]$

Analog wie den Schätzer Z_5 für $P(S_N > u)$ in Kapitel 4.3, kann man für $E[(S_N - u)^+]$ einen effektiven Schätzer konstruieren. Sei

$$Z_7(u) = NE \left[(S_N - u)^+ I_{\{M_N = X_N\}} \middle| N, X_1, \dots, X_{N-1} \right].$$

Lemma 5.5. *Es gilt:*

$$E[Z_7] = E[(S_N - u)^+].$$

Beweis. Das Lemma folgt aus

$$\begin{aligned} E[(S_n - u)^+] &= E \left[\sum_{i=1}^n (S_n - u)^+ I_{\{M_n = X_i\}} \right] \\ &= \sum_{i=1}^n E[(S_n - u)^+ I_{\{M_n = X_i\}}] \\ &\stackrel{iid}{=} nE[(S_n - u)^+ I_{\{M_n = X_n\}}]. \end{aligned}$$

□

Lemma 5.6. *Es gilt:*

$$Z_7(u) = N \left((M_{N-1} + S_{N-1} - u)^+ + e(M_{N-1} \vee (u - S_{N-1})) \right) \bar{F}(M_{N-1} \vee (u - S_{N-1})).$$

Beweis. Es gilt:

$$\begin{aligned} Z_7(u) &= NE \left[(S_N - u)^+ I_{\{M_N = X_N\}} \middle| N, X_1, \dots, X_{N-1} \right] \\ &= NE \left[(S_N - u) I_{\{M_N = X_N\}} I_{\{X_N \geq u - S_{N-1}\}} \middle| N, X_1, \dots, X_{N-1} \right] \\ &= N \int_{M_{N-1} \vee (u - S_{N-1})}^{\infty} (x + S_{N-1} - u) dF(x) \\ &= -N(x + S_{N-1} - u) \bar{F}(x) \Big|_{M_{N-1} \vee (u - S_{N-1})}^{\infty} \\ &\quad + N \int_{M_{N-1} \vee (u - S_{N-1})}^{\infty} \bar{F}(x) dx \\ &= N(M_{N-1} \vee (u - S_{N-1}) + S_{N-1} - u) \bar{F}(M_{N-1} \vee (u - S_{N-1})) \\ &\quad + Ne(M_{N-1} \vee (u - S_{N-1})) \bar{F}(M_{N-1} \vee (u - S_{N-1})) \\ &= N(M_{N-1} + S_{N-1} - u)^+ \bar{F}(M_{N-1} \vee (u - S_{N-1})) \\ &\quad + Ne(M_{N-1} \vee (u - S_{N-1})) \bar{F}(M_{N-1} \vee (u - S_{N-1})). \end{aligned}$$

□

5.1.3 Die effektive Dimension des Schätzers

Analog wie bei $P(S_N > u)$ kann man für $Z_7(u)$ zeigen, dass die Varianz von Z_7 nur von N abhängt.

Lemma 5.7. *Für den ANOVA Term der zu N gehörenden Variable gilt:*

$$g_N(n, u) = E[(S_n - u)^+] - E[Z_7(u)].$$

Beweis. Nach der Definition der ANOVA gilt:

$$\begin{aligned}
 g_N(n, u) &= E[Z_7|N = n] - E[Z_7] \\
 &= E \left[NE \left[(S_N - u)^+ I_{\{M_N = X_N\}} \middle| N, X_1, \dots, X_{N-1} \right] \middle| N = n \right] - E[Z_7] \\
 &= E[N(S_N - u)^+ I_{\{M_N = X_N\}} | N = n] - E[Z_7] \\
 &= E[n(S_n - u)^+ I_{\{M_n = X_n\}}] - E[Z_7] = E[(S_n - u)^+] - E[Z_7].
 \end{aligned}$$

□

Lemma 5.8. Sei $F \in \mathcal{S}$ und $E[c^N] < \infty$ für ein $c > 1$. Dann gilt:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}[g_N(N, u)]}{e(u)^2 \bar{F}(u)^2} = \text{Var}[N]. \quad (5.7)$$

Beweis. Es gilt:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}[g_N(n, u)]}{(e(u)\bar{F}(u))^2} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{E \left[E_X [(S_N - u)^+]^2 \right]}{e(u)^2 \bar{F}(u)^2} - \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{E[Z_7(u)]^2}{e(u)^2 \bar{F}(u)^2}.$$

Sei $c - 1 > \varepsilon > 0$. Dann folgt analog wie im Beweis von Satz 5.4

$$\left(\frac{E_X [(S_N - u)^+]}{e(u)\bar{F}(u)} \right)^2 \leq K_2 N^2 (c - \varepsilon)^N \leq K_1 c^N.$$

Zusammen mit Satz 5.3 und dem Satz von der dominierten Konvergenz folgt:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{E \left[E_X [(S_N - u)^+]^2 \right]}{e(u)^2 \bar{F}(u)^2} = E \left[\left(\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{E_X [(S_N - u)^+]}{e(u)\bar{F}(u)} \right)^2 \right] = E[N^2].$$

Aus Satz 5.4 folgt:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{E[Z_7(u)]^2}{e(u)^2 \bar{F}(u)^2} = E[N]^2.$$

Damit gilt:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}[g_N(n, u)]}{(e(u)\bar{F}(u))^2} = E[N^2] - E[N]^2 = \text{Var}[N].$$

□

Notation. Sei

$$B(u) = \frac{\int_{M_{N-1} \vee (u - S_{N-1})}^{\infty} x - (u - S_{N-1}) dF(x)}{e(u)\bar{F}(u)}.$$

Lemma 5.9. Sei $\lim_{u \rightarrow \infty} e(u) = \infty$. Dann gilt:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\int_{M_{N-1} \vee (u - S_{N-1})}^{\infty} x - (u - S_{N-1}) dF(x)}{e(u)\bar{F}(u)} = 1. \quad (5.8)$$

Beweis. Für $u > M_{N-1} + S_{N-1}$ gilt mit partieller Integration:

$$\begin{aligned}
 B(u) &= \frac{\int_{(u-S_{N-1})}^{\infty} (x + S_{N-1} - u) dF(x)}{e(u)\overline{F}(u)} \\
 &= \frac{\int_{(u-S_{N-1})}^{\infty} \overline{F}(x) dx}{e(u)\overline{F}(u)} \\
 &= \frac{\int_u^{\infty} \overline{F}(x) dx}{e(u)\overline{F}(u)} + \frac{\int_{u-S_{N-1}}^u \overline{F}(x) dx}{e(u)\overline{F}(u)} \\
 &\leq 1 + \frac{S_{N-1}\overline{F}(u - S_{N-1})}{e(u)\overline{F}(u)}.
 \end{aligned}$$

Damit gilt $B(u) \geq 1$. Es bleibt noch

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{S_{N-1}\overline{F}(u - S_{N-1})}{e(u)\overline{F}(u)} = 0 \tag{5.9}$$

zu zeigen. Dies gilt wegen $\lim_{u \rightarrow \infty} S_{N-1}/e(u) = 0$ ($e(u) \rightarrow \infty$) und $\lim_{u \rightarrow \infty} \overline{F}(u - S_{N-1})/\overline{F}(u) = 1$ (siehe Proposition 2.2). \square

Bedingung 4. Es existiere eine Funktion $M(X, N)$ mit

$$M(X, N) \geq B(u)^2$$

für alle $u > 0$ und $E[N^2 M(X, N)] < \infty$.

Lemma 5.10. Sei $F \in \mathcal{S}$, $E[c^N] < \infty$ für ein $c > 1$ und $\lim_{u \rightarrow \infty} e(u) = \infty$. Weiters sei Bedingung 4 erfüllt. Dann gilt:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}[Z_7(u)^2]}{e(u)^2 \overline{F}(u)^2} = \text{Var}[N].$$

Beweis. Mit dem Satz von der dominierten Konvergenz folgt:

$$\begin{aligned}
 \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}[Z_7(u)^2]}{e(u)^2 \overline{F}(u)^2} &= \lim_{u \rightarrow \infty} E[N^2 B(u)^2] - \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{E[Z_7]^2}{e(u)^2 \overline{F}(u)^2} \\
 &= E\left[N^2 \left(\lim_{u \rightarrow \infty} B(u)\right)^2\right] - E[N]^2 \\
 &= E[N^2] - E[N]^2 = \text{Var}[N].
 \end{aligned}$$

\square

Satz 5.11. Sei $F \in \mathcal{S}$, $E[c^N] < \infty$ für ein $c > 1$ und $\lim_{u \rightarrow \infty} e(u) = \infty$. Weiters sei Bedingung 4 erfüllt. Dann gilt:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}[g_N(N, u)]}{\text{Var}[Z_7(u)]} = 1$$

Beweis. Aus Lemma 5.10 und 5.8 folgt:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}[g_N(N, u)]}{\text{Var}[Z_7(u)]} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}[g_N(N, u)]}{e(u)^2 \overline{F}(u)^2} \frac{e(u)^2 \overline{F}(u)^2}{\text{Var}[Z_7(u)]} = \frac{\text{Var}[N]}{\text{Var}[N]} = 1.$$

\square

5.1.4 Der Regular Varying Fall

In diesem Kapitel sei $\bar{F}(x) = L(x)/(1+x)^\alpha$ für $L(x)$ slowly varying und $\alpha > 1$. Weiters sei $f(x) = l(x)/(1+x)^{\alpha+1}$ mit $l(x)$ slowly varying die Dichte von F . Aus Satz 2.11 folgt $L(x) \sim l(x)/\alpha$

Lemma 5.12. *Es gilt:*

$$e(u) \sim \frac{1+u}{\alpha-1}.$$

Beweis. Aus Satz 2.11 folgt:

$$e(u) = \frac{(1+u)^\alpha}{L(u)} \int_u^\infty \frac{L(x)}{(1+x)^\alpha} dx \sim \frac{(1+u)^\alpha}{L(u)} \frac{L(u)}{(\alpha-1)(1+u)^{\alpha-1}} = \frac{1+u}{\alpha-1}.$$

□

Korollar 5.13. *Es gibt Konstanten c_1 und c_2 mit*

$$c_1(1+u) \leq e(u) \leq c_2(1+u), \quad \text{für } u \geq 0.$$

Notation.

$$C(u, n) = \left(\frac{((M_{n-1} - (u - S_{n-1}))^+ + e(M_{n-1} \vee (u - S_{n-1}))) \bar{F}(M_{n-1} \vee (u - S_{n-1}))}{e(u) \bar{F}(u)} \right)^2$$

Lemma 5.14. *Sei $E[c^N] < \infty$ für ein $c > 1$. Für festes n gilt:*

$$\lim_{u \rightarrow \infty} E[C(u, n)] = 1.$$

Weiters existiert eine Funktion $M(n)$ mit $E[N^2 M(N)] < \infty$ und

$$M(n) \geq E[C(u, n)].$$

Beweis. Es gilt:

$$E[C(u, n)] = E[C(u, n) I_{\{M_{n-1} > (u - S_{n-1})\}}] + E[C(u, n) I_{\{M_{n-1} \leq (u - S_{n-1})\}}].$$

Auf $\{M_{n-1} \leq (u - S_{n-1})\}$ gilt mit Korollar 5.13:

$$\begin{aligned} C(u, n) &= \left(\frac{e(u - S_{n-1}) \bar{F}(u - S_{n-1})}{e(u) \bar{F}(u)} \right)^2 \\ &\leq \left(\frac{c_2(1 + (u - S_{n-1})) \bar{F}(u - S_{n-1})}{c_1(1 + u) \bar{F}(u)} \right)^2 \\ &\leq \left(\frac{c_2 \bar{F}(u - S_{n-1})}{c_1 \bar{F}(u)} \right)^2. \end{aligned}$$

Sei $\gamma > 0$ und c_3 eine Konstante. Dann folgt aus Lemma 4.31 und 4.19:

$$\frac{\bar{F}(u - S_{n-1})}{\bar{F}(u)} \leq \frac{\bar{F}(u/n)}{\bar{F}(u)} = \frac{L(u/n)}{L(u)} \frac{(1+u)^\alpha}{(1+u/n)^\alpha} \leq c_3 n^{\alpha+\gamma}.$$

Aus Lemma 5.9 und dem Satz von der dominierten Konvergenz folgt:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} E[C(u, n) I_{\{M_{n-1} \leq (u - S_{n-1})\}}] = E \left[\lim_{u \rightarrow \infty} C(u, n) I_{\{M_{n-1} \leq (u - S_{n-1})\}} \right] = 1.$$

Auf $\{M_{n-1} > (u - S_{n-1})\}$ gilt für eine Konstante c_4 :

$$\begin{aligned} C(u, n) &= \left(\frac{(M_{n-1} + S_{n-1} - u + e(M_{n-1}))\overline{F}(M_{n-1})}{e(u)\overline{F}(u)} \right)^2 \\ &\leq \left(\frac{c_4 n(1 + M_{n-1})\overline{F}(M_{n-1})}{(1 + u)\overline{F}(u)} \right)^2. \end{aligned}$$

Zusammen mit Lemma 4.19 folgt:

$$\begin{aligned} E[C(u, n)I_{\{M_{n-1} > (u - S_{n-1})\}}] &\leq E \left[\left(\frac{c_4 n(1 + M_{n-1})\overline{F}(M_{n-1})}{(1 + u)\overline{F}(u)} \right)^2 I_{\{M_{n-1} > (u - S_{n-1})\}} \right] \\ &\leq E \left[\left(\frac{c_4 n(1 + M_{n-1})\overline{F}(M_{n-1})}{(1 + u)\overline{F}(u)} \right)^2 I_{\{M_{n-1} > u/n\}} \right] \\ &\leq \frac{c_4^2 n^2}{((1 + u)\overline{F}(u))^2} \int_{u/n}^{\infty} (1 + x)^2 \overline{F}(x)^2 f_{M_{n-1}}(x) dx \\ &\leq \frac{c_4^2 n^3}{((1 + u)\overline{F}(u))^2} \int_{u/n}^{\infty} \frac{(1 + x)^2 L(x)^2}{(1 + x)^{2\alpha}} \frac{l(x)}{(1 + x)^{\alpha+1}} dx \\ &= \frac{c_4^2 n^3}{((1 + u)\overline{F}(u))^2} \int_{u/n}^{\infty} L(x)^2 l(x) (1 + x)^{-(3\alpha-1)} dx. \end{aligned}$$

Aus Satz 2.11 und Lemma 4.31 folgt:

$$\begin{aligned} E[C(u, n)I_{\{M_{n-1} > (u - S_{n-1})\}}] &\leq \frac{c_5 n^3}{3\alpha((1 + u)\overline{F}(u))^2} \frac{L(u/n)^3}{(1 + u/n)^{3\alpha}} \\ &= \frac{c_6 n^3 \overline{F}(u/n)^3}{((1 + u)\overline{F}(u))^2} \\ &\leq c_7 n^{3+2\alpha+2\gamma} \frac{\overline{F}(u/n)}{(1 + u)^2}. \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} E[C(u, n)I_{\{M_{n-1} > (u - S_{n-1})\}}] = 0 \quad \text{und} \quad E[C(u, n)I_{\{M_{n-1} > (u - S_{n-1})\}}] \leq c_7 n^{3+2\alpha+2\gamma}.$$

Für ein $\gamma > 0$ sei

$$M(n) = (c_2 c_3 / c_1)^2 n^{2\alpha+2\gamma} + c_7 n^{3+2\alpha+2\gamma}.$$

Dann gilt: $E[C(u, n)] \leq M(n)$ und $E[N^2 M(N)] < \infty$. □

Lemma 5.15. Sei $E[c^N] < \infty$ für ein $c > 1$. Dann gilt:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{E[Z_7(u)^2]}{(e(u)\overline{F}(u))^2} = E[N^2].$$

Beweis. Mit dem Satz von der dominierten Konvergenz folgt:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{E[Z_7(u)^2]}{(e(u)\overline{F}(u))^2} = \lim_{u \rightarrow \infty} E[N^2 C(u, N)] = E[N^2 \lim_{u \rightarrow \infty} E_X[C(u, N)]] = E[N^2].$$

□

Satz 5.16. Sei $E[c^N] < \infty$ für ein $c > 1$. Dann gilt:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}[g_N(N, u)]}{\text{Var}[Z_7(u)]} = 1.$$

Beweis. Der Beweis ist analog zum Beweis von Satz 5.11. □

5.1.5 Der Kontrollvariablen Schätzer

Analog wie Z_6 definiert man den Schätzer

$$Z_8(u) = Z_7(u) - Ne(u)\overline{F}(u) + E[N]e(u)\overline{F}(u).$$

Satz 5.17. *Sei*

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{E[Z_7(u)^2]}{(e(u)\overline{F}(u))^2} = E[N^2], \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{E[Z_7(u)]}{e(u)\overline{F}(u)} = E[N] \text{ und } \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{E[NZ_7(u)]}{e(u)\overline{F}(u)} = E[N^2].$$

Dann gilt:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}[Z_8(u)]}{E[Z_8(u)]^2} = 0$$

Beweis. Wegen $E[Z_8(u)] \sim E[N]e(u)\overline{F}(u)$ genügt es

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}[Z_8(u)]}{(e(u)\overline{F}(u))^2} = 0$$

zu zeigen. Es gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}[Z_8(u)]}{(e(u)\overline{F}(u))^2} &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{E[(Z_7(u) - Ne(u)\overline{F}(u) + E[N]e(u)\overline{F}(u))^2]}{(e(u)\overline{F}(u))^2} - \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{E[Z_8(u)]^2}{(e(u)\overline{F}(u))^2} \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \left(E \left[\frac{Z_7(u)^2}{(e(u)\overline{F}(u))^2} \right] - 2E \left[\frac{Z_7(u)(N - E[N])}{e(u)\overline{F}(u)} \right] \right) \\ &\quad + E[(N - E[N])^2] - E[N]^2 \\ &= E[N^2] - 2(E[N^2] - E[N]^2) + E[N^2] - E[N]^2 - E[N]^2 = 0. \end{aligned}$$

□

Satz 5.18. *Im Regular Varying Fall strebt der relative Fehler des Schätzers $Z_8(u)$ gegen 0.*

Beweis. Analog wie

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{E[Z_7(u)^2]}{(e(u)\overline{F}(u))^2} = E[N^2],$$

kann man auch

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{E[Z_7(u)]}{e(u)\overline{F}(u)} = E[N] \text{ und } \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{E[NZ_7(u)]}{e(u)\overline{F}(u)} = E[N^2]$$

zeigen. Damit sind die Bedingungen von Satz 5.17 erfüllt und der relative Fehler des Schätzers $Z_8(u)$ strebt gegen 0. □

5.1.6 Numerische Ergebnisse

Die Tabellen und Abbildungen in diesem Kapitel haben die gleichen Bezeichnungen wie in Kapitel 4.3.6, nur das eine zusätzliche Spalte mit dem asymptotischen Ergebnis (5.5) eingefügt wurde.

Die Schlüsse die man aus den Ergebnissen für die Schätzer Z_7 und Z_8 ziehen kann sind die Gleichen wie die für die Schätzer Z_5 und Z_6 . Das heißt, bei $Z_7(u)$ bringt zufälliges Quasi Monte Carlo eine wesentliche Verbesserung gegenüber der Monte Carlo Methode. Bei Z_8 ist diese Verbesserung nur bei kleinen Werten von u zu beobachten. Des Weiteren sieht man, dass Z_8 bessere Ergebnisse liefert als Z_7 . Tabelle 5.3 zeigt die Ergebnisse für den naiven Schätzer $Z_{11}(u) = (S_N - u)^+$ dabei bedeutet *NaN*, dass der geschätzte Erwartungswert gleich Null ist. Vergleicht man die Werte von Z_{11} mit denen von Z_7 und Z_8 so sieht man, dass beide zu einer deutlichen Varianzreduktion gegenüber Z_{11} führen. Abbildung 5.1 zeigt die drei Schätzer im Vergleich.

ρ	$A(u)$	Asymptotik	Monte Carlo	start Halton	shift Halton	shift Sobol
0.25	0.01	0.0271057	0.0613586	0.0139085	0.0173345	0.0154917
0.25	1e-05	0.000429596	0.0325854	0.00312694	0.00376291	0.00346558
0.25	1e-08	6.80864e-06	0.0310972	0.00176345	0.00231347	0.00206894
0.25	1e-11	1.0791e-07	0.0309957	0.00174933	0.00224986	0.00203807
0.5	0.01	0.0420638	0.105485	0.0334741	0.0383703	0.0363971
0.5	1e-05	0.000666667	0.0459152	0.00400508	0.00474443	0.00443035
0.5	1e-08	1.0566e-05	0.0439571	0.00221101	0.0028874	0.00269869
0.5	1e-11	1.67459e-07	0.0438368	0.00216992	0.00282774	0.00269741
0.75	0.01	0.0652766	0.17919	0.0770163	0.0850738	0.0829086
0.75	1e-05	0.00103456	0.057048	0.00625184	0.0087881	0.00849688
0.75	1e-08	1.63967e-05	0.0538494	0.00407842	0.0063134	0.00601718
0.75	1e-11	2.59871e-07	0.0537112	0.00397696	0.00638494	0.00601432

 Tabelle 5.1: Schätzer Z_7 mit Pareto $\alpha = 2.5$ als Schadenshöhenverteilung.

ρ	$A(u)$	Asymptotik	Monte Carlo	start Halton	shift Halton	shift Sobol
0.25	0.01	0.0271057	0.0409056	0.0132841	0.0165181	0.0148369
0.25	1e-05	0.000429596	0.00392768	0.00246088	0.00285833	0.0026572
0.25	1e-08	6.80864e-06	0.00020998	0.000176135	0.000270594	0.000150057
0.25	1e-11	1.0791e-07	1.22294e-05	6.60328e-06	7.98124e-06	1.90169e-05
0.5	0.01	0.0420638	0.0848076	0.033074	0.0369746	0.0356641
0.5	1e-05	0.000666667	0.00513937	0.00301751	0.00335592	0.00330025
0.5	1e-08	1.0566e-05	0.000263732	0.000143791	0.000169905	0.000186486
0.5	1e-11	1.67459e-07	1.64812e-05	7.89949e-06	9.75356e-06	9.48594e-06
0.75	0.01	0.0652766	0.166166	0.0766017	0.0833548	0.0811315
0.75	1e-05	0.00103456	0.00774374	0.0039618	0.00437595	0.00440309
0.75	1e-08	1.63967e-05	0.000433403	0.000172121	0.000246539	0.000224479
0.75	1e-11	2.59871e-07	2.5672e-05	1.08625e-05	1.23332e-05	1.18425e-05

 Tabelle 5.2: Schätzer Z_8 mit Pareto $\alpha = 2.5$ als Schadenshöhenverteilung.

Bemerkung 5.3. Wählt man für die X_i eine Regular-Varying-Verteilung mit Parameter $1 < \alpha \leq 2$. Dann gilt $\text{Var}[X_1] = \infty$ und damit $\text{Var}[Z_{11}] = \infty$. Hingegen gilt: $\text{Var}[Z_7] < \infty$ und $\text{Var}[Z_8] < \infty$.

Bemerkung 5.4. Die Schätzer Z_7 und Z_8 benötigen die Mean-Excess-Funktion. Ist diese nicht bekannt so kann der Aufwand für eine Iteration signifikant ansteigen.

5.2 Das zweite Moment von $(S_N - u)^+$

Um zu garantieren, dass $E[((S_N - u)^+)^2] < \infty$ gilt, sei ab jetzt $E[X_1^2] < \infty$. Sei $F \in \mathcal{S}$ und $F_I \in \mathcal{S}$. Weiters sei $\mu = E[X_1]$ und e_I die Mean Excess Funktion bezüglich F_I .

5.2.1 Eine Asymptotik für $E[((S_N - u)^+)^2]$

Satz 5.19. Sei $E[c^N] < \infty$ für ein $c > 1$. Dann gilt:

$$E \left[((S_N - u)^+)^2 \right] \sim 2\mu E[N] e_I(u) \overline{F}_I(u). \quad (5.10)$$

Bemerkung 5.5. Für F regular varying wird in [KM97] eine äquivalente Asymptotik für $E[((S_N - u)^+)^2]$ hergeleitet.

ρ	$A(u)$	Assymptotik	Monte Carlo	start Halton	shift Halton	shift Sobol
0.25	0.01	0.0271057	0.640233	0.397102	0.469472	0.423299
0.25	1e-05	0.000429596	26.0236	22.1608	17.5052	20.3402
0.25	1e-08	6.80864e-06	NaN	NaN	NaN	196.039
0.25	1e-11	1.0791e-07	NaN	NaN	NaN	NaN
0.5	0.01	0.0420638	0.682594	0.64985	0.621099	0.902347
0.5	1e-05	0.000666667	22.7324	26.4131	24.8369	27.9253
0.5	1e-08	1.0566e-05	NaN	NaN	NaN	NaN
0.5	1e-11	1.67459e-07	NaN	NaN	NaN	NaN
0.75	0.01	0.0652766	0.55738	0.495581	0.454221	0.429774
0.75	1e-05	0.00103456	28.4214	35.786	26.9431	32.7286
0.75	1e-08	1.63967e-05	NaN	NaN	NaN	NaN
0.75	1e-11	2.59871e-07	NaN	NaN	NaN	NaN

Tabelle 5.3: Schätzer Z_{11} mit Pareto $\alpha = 2.5$ als Schadenshöhenverteilung.

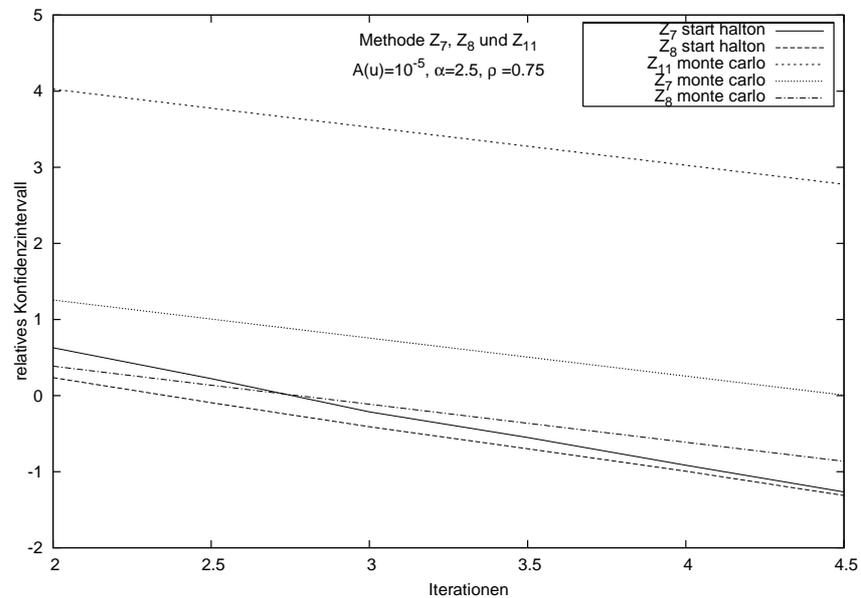


Abbildung 5.1: Vergleich der verschiedenen Schätzer mit $X_i \sim \text{Pareto}(2.5), N \sim \text{Geometrisch}(0.75)$.

Beweis. Für festes $N = n$ gilt:

$$\begin{aligned} E \left[((S_n - u)^+)^2 \right] &= \int_u^\infty (x - u)^2 dF^{n^*}(x) \\ &= -(x - u)^2 \overline{F}^{n^*}(x) \Big|_u^\infty + 2 \int_u^\infty (x - u) \overline{F}^{n^*}(x) dx. \end{aligned}$$

Substituiert man $y = (x - u)^2$ so erhält man:

$$\begin{aligned} E \left[((S_n - u)^+)^2 \right] &= \int_0^\infty \overline{F}^{n^*}(\sqrt{y} + u) dy \\ &= n \int_0^\infty \overline{F}(\sqrt{y} + u) dy \\ &\quad + n \int_0^\infty \overline{F}(\sqrt{y} + u) \left(\frac{\overline{F}^{n^*}(\sqrt{y} + u)}{n\overline{F}(\sqrt{y} + u)} - 1 \right) dy. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Durch Substitution $x = \sqrt{y} + u$ erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^\infty \overline{F}(\sqrt{y} + u) dy &= \int_u^\infty (x - u) \overline{F}(x) dx \\ &= \mu \int_u^\infty (x - u) f_I(x) dx \\ &= \mu e_I(u) \overline{F}_I(u). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Des Weiteren gilt:

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^\infty \overline{F}(\sqrt{y} + u) \left(\frac{\overline{F}^{n^*}(\sqrt{y} + u)}{n\overline{F}(\sqrt{y} + u)} - 1 \right) dy \right| \\ &\leq \int_0^\infty \overline{F}(\sqrt{y} + u) \left| \frac{\overline{F}^{n^*}(\sqrt{y} + u)}{n\overline{F}(\sqrt{y} + u)} - 1 \right| dy \\ &\leq \sup_{x \geq 0} \left| \frac{\overline{F}^{n^*}(\sqrt{x} + u)}{n\overline{F}(\sqrt{x} + u)} - 1 \right| \int_0^\infty \overline{F}(\sqrt{y} + u) dy \\ &\leq \sup_{x \geq 0} \left| \frac{\overline{F}^{n^*}(\sqrt{x} + u)}{n\overline{F}(\sqrt{x} + u)} - 1 \right| 2\mu e_I(u) \overline{F}_I(u). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Aus (5.11), (5.12) und (5.13) folgt:

$$\left| n - \frac{E \left[((S_n - u)^+)^2 \right]}{2\mu e_I(u) \overline{F}_I(u)} \right| \leq n \sup_{x \geq 0} \left| \frac{\overline{F}^{n^*}(\sqrt{x} + u)}{n\overline{F}(\sqrt{x} + u)} - 1 \right|.$$

Aus $F \in \mathcal{S}$ und Proposition 2.3 folgt:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{E \left[((S_n - u)^+)^2 \right]}{2\mu e_I(u) \overline{F}_I(u)} = n.$$

Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es eine K mit (Lemma 2.4):

$$\left| \frac{E \left[((S_n - u)^+)^2 \right]}{2\mu e_I(u) \overline{F}_I(u)} \right| \leq n \left(1 + \sup_{x \geq 0} \left| \frac{\overline{F}^{n^*}(\sqrt{x} + u)}{n\overline{F}(\sqrt{x} + u)} - 1 \right| \right) \leq n(2 + K(1 + \varepsilon)^n). \quad (5.14)$$

Mit dem Satz von der dominierten Konvergenz folgt:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{E \left[((S_N - u)^+)^2 \right]}{2\mu E[N] e_I(u) \bar{F}_I(u)} = \frac{1}{E[N]} E \left[N \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{E_X \left[((S_N - u)^+)^2 \right]}{2\mu N e_I(u) \bar{F}_I(u)} \right] = \frac{1}{E[N]} E[N] = 1.$$

□

5.2.2 Ein Schätzer für $E[((S_N - u)^+)^2]$

Analog wie den Schätzer Z_5 für $P(S_N > u)$ in Kapitel 4.3, kann man für $E[((S_N - u)^+)^2]$ einen effektiven Schätzer konstruieren. Sei

$$Z_9(u) = NE \left[((S_N - u)^+)^2 I_{\{M_N = X_N\}} \middle| N, X_1, \dots, X_{N-1} \right].$$

Lemma 5.20. *Es gilt:*

$$E[Z_9] = E[((S_N - u)^+)^2].$$

Beweis. Das Lemma folgt aus

$$\begin{aligned} E \left[((S_n - u)^+)^2 \right] &= E \left[\sum_{i=1}^n ((S_n - u)^+)^2 I_{\{M_n = X_i\}} \right] \\ &= \sum_{i=1}^n E \left[((S_n - u)^+)^2 I_{\{M_n = X_i\}} \right] \\ &\stackrel{iid}{=} n E \left[((S_n - u)^+)^2 I_{\{M_n = X_n\}} \right]. \end{aligned}$$

□

Lemma 5.21. *Für Z_9 gilt:*

$$\begin{aligned} Z_9 &= N((M_{N-1} - (u - S_{N-1}))^+)^2 \bar{F}(M_{N-1}) \\ &\quad + 2\mu N(M_{N-1} - (u - S_{N-1}))^+ \bar{F}_I(M_{N-1}) \\ &\quad + 2\mu N e_I(M_{N-1} \vee (u - S_{N-1})) \bar{F}_I(M_{N-1} \vee (u - S_{N-1})). \end{aligned}$$

Beweis. Mit partieller Integration folgt:

$$\begin{aligned} Z_9(u) &= NE \left[((S_N - u)^+)^2 I_{\{M_N = X_N\}} \middle| N, X_1, \dots, X_{N-1} \right] \\ &= N \int_{M_{N-1} \vee (u - S_{N-1})}^{\infty} (x - (u - S_{N-1}))^2 dF(x) \\ &= -N(x - (u - S_{N-1}))^2 \bar{F}(x) \Big|_{M_{N-1} \vee (u - S_{N-1})}^{\infty} \\ &\quad + 2N \int_{M_{N-1} \vee (u - S_{N-1})}^{\infty} (x - (u - S_{N-1})) \bar{F}(x) dx \\ &= N((M_{N-1} - (u - S_{N-1}))^+)^2 \bar{F}(M_{N-1} \vee (u - S_{N-1})) \\ &\quad + 2\mu N \int_{M_{N-1} \vee (u - S_{N-1})}^{\infty} (x - (u - S_{N-1})) dF_I(x) \\ &= N((M_{N-1} - (u - S_{N-1}))^+)^2 \bar{F}(M_{N-1}) \\ &\quad + 2\mu N(M_{N-1} - (u - S_{N-1}))^+ \bar{F}_I(M_{N-1}) \\ &\quad + 2\mu N e_I(M_{N-1} \vee (u - S_{N-1})) \bar{F}_I(M_{N-1} \vee (u - S_{N-1})). \end{aligned}$$

Wobei die letzte Gleichung aus dem Schätzer für $E[(S_N - u)^+]$ folgt.

□

5.2.3 Die effektive Dimension des Schätzers

Analog wie bei $P(S_N > u)$ kann man für $Z_9(u)$ zeigen, dass die Varianz von Z_9 nur von N abhängt.

Lemma 5.22. *Für den ANOVA Term der zu N gehörenden Variable gilt:*

$$g_N(n, u) = E[((S_n - u)^+)^2] - E[Z_9(u)]$$

Beweis. Der Beweis ist Analog zu dem Beweis von Lemma 5.7. □

Lemma 5.23. *Sei $E[c^N] < \infty$ für ein $c > 1$. Dann gilt:*

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}[g_N(N, u)]}{(2\mu e_I(u) \bar{F}_I(u))^2} = \text{Var}[N]. \quad (5.15)$$

Beweis. Es gilt:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}[g_N(N, u)]}{(2\mu e_I(u) \bar{F}_I(u))^2} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{E \left[E_X \left[((S_N - u)^+)^2 \right]^2 \right]}{(2\mu e_I(u) \bar{F}_I(u))^2} - \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{E[Z_9(u)]^2}{(2\mu e_I(u) \bar{F}_I(u))^2}.$$

Sei $c - 1 > \varepsilon > 0$. Dann folgt analog wie im Beweis von Satz 5.19

$$\left(\frac{E_X \left[((S_N - u)^+)^2 \right]}{2\mu e_I(u) \bar{F}_I(u)} \right)^2 \leq K_0 N^2 (c - \varepsilon)^N \leq K_1 c^N.$$

Zusammen mit Satz 5.19 und dem Satz von der dominierten Konvergenz folgt:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{E \left[E_X \left[((S_N - u)^+)^2 \right]^2 \right]}{(2\mu e_I(u) \bar{F}_I(u))^2} = E \left[\lim_{u \rightarrow \infty} \left(\frac{E_X \left[((S_N - u)^+)^2 \right]}{2\mu e_I(u) \bar{F}_I(u)} \right)^2 \right] = E[N^2].$$

Aus Satz 5.19 folgt:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{E[Z_9(u)]^2}{(2\mu e_I(u) \bar{F}_I(u))^2} = E[N]^2.$$

Damit gilt:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}[g_N(N, u)]}{(2\mu e_I(u) \bar{F}_I(u))^2} = E[N^2] - E[N]^2 = \text{Var}[N].$$

□

Lemma 5.24. *Sei $\lim_{u \rightarrow \infty} e_I(u) = \infty$. Dann gilt:*

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{Z_9(u)}{2\mu N e_I(u) \bar{F}_I(u)} = 1.$$

Beweis. Für $u > M_{N-1} + S_{N-1}$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{Z_9(u)}{2\mu N e_I(u) \bar{F}_I(u)} &= \frac{e_I(u - S_{N-1}) \bar{F}_I(u - S_{N-1})}{e_I(u) \bar{F}_I(u)} \\ &= \frac{\int_{u-S_{N-1}}^{\infty} \bar{F}_I(x) dx}{\int_u^{\infty} \bar{F}_I(x) dx} \\ &= \frac{\int_u^{\infty} \bar{F}_I(x) dx}{\int_u^{\infty} \bar{F}_I(x) dx} + \frac{\int_{u-S_{N-1}}^u \bar{F}_I(x) dx}{\int_u^{\infty} \bar{F}_I(x) dx} \\ &\leq 1 + \frac{S_{N-1} \bar{F}_I(u - S_{N-1})}{e_I(u) \bar{F}_I(u)}. \end{aligned}$$

Damit gilt $Z_9(u)/(2\mu N e_I(u)\overline{F}_I(u)) \geq 1$. Aus $\lim_{u \rightarrow \infty} e(u) = \infty$ und Proposition 2.2 folgt:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{S_{N-1}\overline{F}_I(u - S_{N-1})}{e_I(u)\overline{F}_I(u)} = 0.$$

Und damit das Lemma. □

Bedingung 5. Es existiere eine Funktion $M(X, N)$ mit

$$M(X, N) \geq \left(\frac{Z_9(u)}{2\mu N e_I(u)\overline{F}_I(u)} \right)^2,$$

für alle $u > 0$ und $E[N^2 M(X, N)] < \infty$.

Lemma 5.25. Sei $E[c^N] < \infty$ für ein $c > 1$, $\lim_{u \rightarrow \infty} e_I(u) = \infty$. Weiters sei Bedingung 5 erfüllt. Dann gilt:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{E[Z_9(u)^2]}{(2\mu e_I(u)\overline{F}_I(u))^2} = E[N^2].$$

Beweis. Mit dem Satz von der dominierten Konvergenz und Lemma 5.24 gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{E[Z_9(u)^2]}{(2\mu e_I(u)\overline{F}_I(u))^2} &= \lim_{u \rightarrow \infty} E \left[N^2 \left(\frac{Z_9(u)}{2\mu N e_I(u)\overline{F}_I(u)} \right)^2 \right] \\ &= E \left[N^2 \left(\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{Z_9(u)}{2\mu N e_I(u)\overline{F}_I(u)} \right)^2 \right] \\ &= E[N^2]. \end{aligned}$$

□

Satz 5.26. Sei $E[c^N] < \infty$ für ein $c > 1$, $\lim_{u \rightarrow \infty} e_I(u)$. Weiters sei Bedingung 5 erfüllt. Dann gilt:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{Var[g_N(N, u)]}{Var[Z_9]} = 1.$$

Beweis. Aus Lemma 5.25 und Satz 5.19 folgt:

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{Var[Z_9(u)]}{(2\mu e_I(u)\overline{F}_I(u))^2} &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{E[Z_9(u)^2]}{(2\mu e_I(u)\overline{F}_I(u))^2} - \frac{E[Z_9(u)]^2}{(2\mu e_I(u)\overline{F}_I(u))^2} \\ &= E[N^2] - E[N]^2 = Var[N]. \end{aligned}$$

Zusammen mit Lemma 5.23 gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{Var[g_N(N, u)]}{Var[Z_9]} &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{Var[g_N(N, u)]}{(2\mu e_I(u)\overline{F}_I(u))^2} \frac{(2\mu e_I(u)\overline{F}_I(u))^2}{Var[Z_9]} \\ &= \frac{Var[N]}{Var[N]} = 1. \end{aligned}$$

□

5.2.4 Der Regular Varying Fall

In diesem Kapitel sei $\bar{F}(x) = L(x)/(1+x)^\alpha$ mit $L(x)$ slowly varying und $\alpha > 2$. Weiters sei $f(x) = l(x)/(1+x)^{\alpha+1}$ mit $l(x)$ slowly varying und $\bar{F}_I(x) = L_I(x)/(1+x)^{\alpha-1}$. Aus Satz 2.11 folgt $L(x) \sim l(x)/\alpha$ und $L_I(x) \sim L(x)/((\alpha-1)\mu)$. Weiters seien c_i und γ Konstanten.

Notation.

$$\begin{aligned} D(u, n) &= ((M_{n-1} - (u - S_{n-1}))^+)^2 \bar{F}(M_{n-1}) \\ &\quad + 2\mu(M_{n-1} - (u - S_{n-1}))^+ \bar{F}_I(M_{n-1}) \\ &\quad + 2\mu e_I(M_{n-1} \vee (u - S_{n-1})) \bar{F}_I(M_{n-1} \vee (u - S_{n-1})). \end{aligned}$$

Lemma 5.27. *Sei $E[c^N] < \infty$ für ein $c > 1$. Dann gilt:*

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{E[D(u, n)^2]}{(2\mu e_I(u) \bar{F}_I(u))^2} = 1.$$

Des Weiteren existiert eine Funktion $M(n)$ mit $E[N^2 M(N)] < \infty$ und

$$M(n) \geq \frac{E[D(u, n)^2]}{(2\mu e_I(u) \bar{F}_I(u))^2}.$$

Beweis. Es gilt:

$$\frac{E[D(u, n)^2]}{(2\mu e_I(u) \bar{F}_I(u))^2} = \frac{E[D(u, n)^2 I_{\{M_{n-1} > (u - S_{n-1})\}}]}{(2\mu e_I(u) \bar{F}_I(u))^2} + \frac{E[D(u, n)^2 I_{\{M_{n-1} \leq (u - S_{n-1})\}}]}{(2\mu e_I(u) \bar{F}_I(u))^2}.$$

Auf $\{M_{n-1} \leq (u - S_{n-1})\}$ gilt mit Korollar 5.13 und Lemma 4.31:

$$\begin{aligned} \frac{D(u, n)^2 I_{\{M_{n-1} \leq (u - S_{n-1})\}}}{(2\mu e_I(u) \bar{F}_I(u))^2} &\leq \left(\frac{2\mu e_I(u - S_{n-1}) \bar{F}_I(u - S_{n-1})}{2\mu e_I(u) \bar{F}_I(u)} \right)^2 \\ &\leq \left(\frac{c_2(1 + u - S_{n-1}) \bar{F}_I(u/n)}{c_1(1 + u) \bar{F}_I(u)} \right)^2 \\ &\leq \left(\frac{c_3(1 + u) n^{\gamma + \alpha - 1}}{(1 + u)} \right)^2 \leq c_3^2 n^{2(\gamma + \alpha - 1)}. \end{aligned}$$

Aus Lemma 5.24 und dem Satz von der dominierten Konvergenz folgt:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{E[D(u, n)^2 I_{\{M_{n-1} \leq (u - S_{n-1})\}}]}{(2\mu e_I(u) \bar{F}_I(u))^2} = 1.$$

Auf $\{M_{n-1} > (u - S_{n-1})\}$ gilt mit Korollar 5.13:

$$\begin{aligned} \frac{D(u, n)}{(2\mu e_I(u) \bar{F}_I(u))} &= \frac{((M_{n-1} - (u - S_{n-1}))^+)^2 \bar{F}(M_{n-1})}{2\mu e_I(u) \bar{F}_I(u)} \\ &\quad + \frac{2\mu(M_{n-1} - (u - S_{n-1}))^+ \bar{F}_I(M_{n-1})}{2\mu e_I(u) \bar{F}_I(u)} \\ &\quad + \frac{2\mu e_I(M_{n-1}) \bar{F}_I(M_{n-1})}{2\mu e_I(u) \bar{F}_I(u)} \\ &\leq \frac{n^2 M_{n-1}^2 \bar{F}(M_{n-1})}{2\mu c_1(1 + u) \bar{F}_I(u)} + \frac{n M_{n-1} \bar{F}_I(M_{n-1})}{c_1(1 + u) \bar{F}_I(u)} \\ &\quad + \frac{c_4(1 + M_{n-1}) \bar{F}_I(M_{n-1})}{c_1(1 + u) \bar{F}_I(u)}. \end{aligned}$$

Zusammen mit $M_{n-1} > u/n$ gilt:

$$\begin{aligned}
 & \frac{E [D(u, n)^2 I_{\{M_{n-1} > (u - S_{n-1})\}}]}{(2\mu e_I(u) \bar{F}_I(u))^2} \\
 & \leq \int_{u/n}^{\infty} \left(\frac{n^2 x^2 \bar{F}(x)}{2\mu c_1(1+u) \bar{F}_I(u)} + \frac{nx \bar{F}_I(x) + c_4(1+x) \bar{F}_I(x)}{c_1(1+u) \bar{F}_I(u)} \right)^2 f_{M_{n-1}}(x) dx \\
 & \leq \frac{n}{(c_8(1+u) \bar{F}_I(u))^2} \int_{u/n}^{\infty} \left(\frac{n^2(x+1)^2 L(x)}{(1+x)^\alpha} + \frac{n(1+x)L_I(x) + c_4(1+x)L_I(x)}{(1+x)^{\alpha-1}} \right)^2 \frac{l(x)}{(1+x)^{\alpha+1}} dx \\
 & \leq \frac{n}{(c_8(1+u) \bar{F}_I(u))^2} \int_{u/n}^{\infty} \left(\frac{n^2 L(x) + n(1+c_4)L_I(x)}{(1+x)^{\alpha-2}} \right)^2 \frac{l(x)}{(1+x)^{\alpha+1}} dx \\
 & \leq \frac{n^5(1+c_4)^2}{(c_8(1+u) \bar{F}_I(u))^2} \int_{u/n}^{\infty} \frac{(L(x)^2 + 2L(x)L_I(x) + L_I(x)^2)l(x)}{(1+x)^{3(\alpha-1)}} dx.
 \end{aligned}$$

Aus Satz 2.11 folgt:

$$\begin{aligned}
 \frac{E [D(u, n)^2 I_{\{M_{n-1} > (u - S_{n-1})\}}]}{(2\mu e_I(u) \bar{F}_I(u))^2} & \leq \frac{n^5(1+c_4)^2}{(c_8(1+u) \bar{F}_I(u))^2} \frac{c_5 L_I(u/n)^2 L(u/n)}{(1+u/n)^{3\alpha-4}} \\
 & = \frac{c_6 n^5 (1+u/n)^2 \bar{F}_I(u/n)^2 \bar{F}(u/n)}{(1+u)^2 \bar{F}_I(u)^2} \\
 & \leq c_7 n^{5+2(\alpha-1)+2\gamma} \bar{F}(u/n).
 \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
 \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{E [D(u, n)^2 I_{\{M_{n-1} > (u - S_{n-1})\}}]}{(2\mu e_I(u) \bar{F}_I(u))^2} & = 0 \quad \text{und} \\
 \frac{E [D(u, n)^2 I_{\{M_{n-1} > (u - S_{n-1})\}}]}{(2\mu e_I(u) \bar{F}_I(u))^2} & \leq c_7 n^{3+2(\alpha+\gamma)}.
 \end{aligned}$$

Zusammen gilt:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{E[D(u, n)^2]}{(2\mu e_I(u) \bar{F}_I(u))^2} = 1.$$

Weiters erfüllt $M(n) = c_7 n^{3+2(\alpha+\gamma)} + c_3^2 n^{2(\alpha-1+\gamma)}$ die geforderten Bedingungen. \square

Lemma 5.28. Sei $E[c^N] < \infty$ für ein $c > 1$. Dann gilt:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{E[Z_9(u)^2]}{(2\mu e_I(u) \bar{F}_I(u))^2} = E[N^2].$$

Beweis. Mit dem Satz von der dominierten Konvergenz gilt:

$$\begin{aligned}
 \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{E[Z_9(u)^2]}{2\mu e_I(u) \bar{F}_I(u)} & = \lim_{u \rightarrow \infty} E \left[N^2 E_X \left[\frac{Z_9(u)^2}{(2N\mu e_I(u) \bar{F}_I(u))^2} \right] \right] \\
 & = \lim_{u \rightarrow \infty} E \left[N^2 E_X \left[\frac{D(u, N)^2}{(2\mu e_I(u) \bar{F}_I(u))^2} \right] \right] \\
 & = E \left[N^2 \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{E_X [D(u, N)^2]}{(2\mu e_I(u) \bar{F}_I(u))^2} \right] = E[N^2].
 \end{aligned}$$

\square

Satz 5.29. Sei $E[c^N] < \infty$ für ein $c > 1$. Dann gilt:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}[g_N(N, u)]}{\text{Var}[Z_9]} = 1.$$

Beweis. Der Beweis ist analog zum Beweis von Satz 5.26. \square

5.2.5 Der Kontrollvariablen Schätzer

Analog wie Z_6 definiert man den Schätzer:

$$Z_{10}(u) = Z_9(u) - N2\mu e_I(u)\overline{F}_I(u) + E[N]2\mu e_I(u)\overline{F}_I(u).$$

Satz 5.30. Sei

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{E[Z_9(u)^2]}{(2\mu e_I(u)\overline{F}_I(u))^2} &= E[N^2], \\ \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{E[Z_9(u)]}{2\mu e_I(u)\overline{F}_I(u)} &= E[N] \quad \text{und} \\ \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{E[NZ_9(u)]}{2\mu e_I(u)\overline{F}_I(u)} &= E[N^2]. \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}[Z_{10}(u)]}{E[Z_{10}(u)]^2} = 0.$$

Beweis. Wegen $E[Z_{10}(u)] \sim 2\mu E[N]e_I(u)\overline{F}_I(u)$ genügt es

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}[Z_{10}(u)]}{(2\mu e_I(u)\overline{F}_I(u))^2} = 0$$

zu zeigen. Es gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}[Z_{10}(u)]}{(2\mu e_I(u)\overline{F}_I(u))^2} &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{E[(Z_9(u) - N2\mu e_I(u)\overline{F}_I(u) + E[N]2\mu e_I(u)\overline{F}_I(u))^2]}{(2\mu e_I(u)\overline{F}_I(u))^2} \\ &\quad - \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{E[Z_{10}(u)]^2}{(2\mu e_I(u)\overline{F}_I(u))^2} \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \left(E \left[\frac{Z_9(u)^2}{(2\mu e_I(u)\overline{F}_I(u))^2} \right] - 2E \left[\frac{Z_9(u)(N - E[N])}{2\mu e_I(u)\overline{F}_I(u)} \right] \right) \\ &\quad + E[(N - E[N])^2] - E[N]^2 \\ &= E[N^2] - 2(E[N^2] - E[N]^2) + E[N^2] - E[N]^2 - E[N]^2 = 0. \end{aligned}$$

□

Satz 5.31. Im Regular Varying Fall strebt der relative Fehler des Schätzers $Z_{10}(u)$ gegen 0.

Beweis. Analog wie

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{E[Z_9(u)^2]}{(2\mu e_I(u)\overline{F}_I(u))^2} = E[N^2],$$

kann man auch

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{E[Z_9(u)]}{2\mu e_I(u)\overline{F}_I(u)} = E[N] \quad \text{und} \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{E[NZ_9(u)]}{2\mu e_I(u)\overline{F}_I(u)} = E[N^2]$$

zeigen. Damit sind die Bedingungen von Satz 5.30 erfüllt und der relative Fehler des Schätzers $Z_{10}(u)$ strebt gegen 0. □

Tabellen

ρ	$A(u)$	Z_1	Z_3	Z_3^*	Z_5	Z_4	Z_4^*
0.25	0.01	0.100194	0.233633	0.169615	0.0515125	0.19104	0.249095
0.25	1e-05	0.125808	0.457606	0.260106	0.031258	0.41741	0.508428
0.25	1e-08	0.100446	0.820439	0.335548	0.0310024	0.580609	0.702455
0.25	1e-11	0.118369	1.44883	0.396976	0.0309895	0.711494	0.860444
0.5	0.01	0.160934	6.91374	0.233882	0.0773502	0.272661	0.481092
0.5	1e-05	0.217428	1.29275	0.301759	0.0441152	0.511355	0.810225
0.5	1e-08	0.151257	2.97528	0.380545	0.0438264	0.701087	1.10483
0.5	1e-11	0.155917	7.53215	0.446488	0.0438214	0.849074	1.33652
0.75	0.01	0.211472	3.33903	0.329914	0.114256	0.349505	0.953697
0.75	1e-05	0.187435	4.83928	0.341162	0.054009	0.587395	1.40043
0.75	1e-08	0.183463	8.42576	0.422321	0.0537007	0.791464	1.86298
0.75	1e-11	0.187144	13.5456	0.49173	0.0536942	0.961478	2.27914

Tabelle 4: Monte Carlo, Pareto $\alpha = 1.5$.

ρ	$A(u)$	Z_1	Z_3	Z_3^*	Z_5	Z_4	Z_4^*
0.25	0.01	0.10593	0.237619	0.166232	0.0538568	0.192957	0.251797
0.25	1e-05	0.922503	0.459402	0.303229	0.0707226	0.42692	0.720107
0.25	1e-08	0.262991	0.934183	0.351026	0.0549426	0.586173	0.765565
0.25	1e-11	0.234998	1.45285	0.409611	0.0376957	0.717877	0.882988
0.5	0.01	0.182153	3.20291	0.265366	0.0979785	0.28416	0.513317
0.5	1e-05	1.5457	1.62981	0.647093	0.15641	0.623735	1.45105
0.5	1e-08	3.58252	3.43989	0.508814	0.0951585	0.73289	1.47602
0.5	1e-11	0.36435	4.48638	0.496458	0.0717051	0.877092	1.57796
0.75	0.01	0.210187	27.1862	0.400681	0.153787	0.309618	0.865441
0.75	1e-05	3.28803	15.2276	2.52397	0.765279	1.82816	5.98254
0.75	1e-08	1.80261	17.4536	1.44642	0.256908	0.991823	3.42172
0.75	1e-11	0.547094	38.4249	0.654054	0.131032	1.11676	7.36663

Tabelle 5: Monte Carlo, Weibull $\beta = 0.5$.

ρ	$A(u)$	Z_1	Z_3	Z_3^*	Z_5	Z_4	Z_4^*
0.25	0.01	0.0362895	0.284737	0.0754897	0.0152355	0.224112	0.265903
0.25	1e-05	0.115723	0.372484	0.0564645	0.00212978	0.550009	0.553866
0.25	1e-08	0.0799597	0.782267	0.0817748	0.00176114	0.708281	0.664624
0.25	1e-11	0.0897694	1.51139	0.109232	0.00174533	1.09311	1.23067
0.5	0.01	0.082243	1.98046	0.134267	0.0273729	0.279247	0.446786
0.5	1e-05	0.12237	3.06404	0.0740393	0.0025512	0.521818	0.6054
0.5	1e-08	0.210317	3.32778	0.10686	0.00215533	0.779883	0.947737
0.5	1e-11	0.151967	3.73402	0.140287	0.00215247	0.942118	1.24322
0.75	0.01	0.132249	8.25527	0.23545	0.0554712	0.324491	0.830225
0.75	1e-05	0.170699	14.0674	0.0934318	0.00438199	0.520323	1.10501
0.75	1e-08	0.176988	7.14021	0.133516	0.00408351	0.737833	1.55429
0.75	1e-11	0.183743	73.8341	0.173009	0.00398136	0.969865	2.07648

Tabelle 6: Quasi Monte Carlo, Start Halton, Pareto $\alpha = 1.5$.

ρ	$A(u)$	Z_1	Z_3	Z_3^*	Z_5	Z_4	Z_4^*
0.25	0.01	0.0332019	0.170928	0.0374937	0.00697224	0.185625	0.176047
0.25	1e-05	0.141046	0.387267	0.0574431	0.00430902	0.552247	0.551635
0.25	1e-08	0.071377	0.76317	0.082911	0.00218785	0.686945	0.681417
0.25	1e-11	0.0916567	1.70822	0.110271	0.00180894	1.07839	1.26648
0.5	0.01	0.078963	0.944481	0.0756074	0.0123906	0.225249	0.28884
0.5	1e-05	0.190016	1.23653	0.0830183	0.00624068	0.524828	0.610672
0.5	1e-08	0.264518	2.72032	0.109007	0.00266471	0.778345	0.941435
0.5	1e-11	0.179932	5.49886	0.140361	0.00224299	0.929868	1.2313
0.75	0.01	0.134778	9.40633	0.134559	0.0225998	0.281336	0.62644
0.75	1e-05	0.300715	12.4514	0.115229	0.0104829	0.521979	1.1467
0.75	1e-08	0.191081	15.7538	0.136361	0.00465075	0.750308	1.56655
0.75	1e-11	0.203639	10.2119	0.171091	0.00409965	0.963569	2.09055

Tabelle 7: Quasi Monte Carlo, Start Halton, Weibull $\beta = 0.25$.

ρ	$A(u)$	Z_1	Z_3	Z_3^*	Z_5	Z_4	Z_4^*
0.25	0.01	0.0382664	0.194911	0.0676506	0.0159892	0.232575	0.285825
0.25	1e-05	1.03276	0.403845	0.167334	0.0399082	0.666167	1.25703
0.25	1e-08	0.441037	0.785646	0.132934	0.0653996	0.750644	0.902197
0.25	1e-11	0.228507	2.32522	0.164214	0.0141375	1.10754	1.32853
0.5	0.01	0.0840824	1.62512	0.171846	0.0375037	0.305937	0.513171
0.5	1e-05	2.34265	1.18645	0.510166	0.120603	0.711413	1.64573
0.5	1e-08	1.67348	3.23956	0.35897	0.0772496	0.879493	3.55163
0.5	1e-11	0.554314	4.43227	0.234396	0.0335038	1.02489	1.6458
0.75	0.01	0.101539	12.5349	0.302726	0.0775536	0.277222	0.723729
0.75	1e-05	3.66504	7.18935	2.65497	0.614349	3.68757	6.51248
0.75	1e-08	1.65373	14.0636	1.98728	0.557374	1.25895	2.68185
0.75	1e-11	0.951689	14.082	0.535293	0.17546	1.13377	2.78319

Tabelle 8: Quasi Monte Carlo, Start Halton, Weibull $\beta = 0.5$.

ρ	$A(u)$	Z_1	Z_3	Z_3^*	Z_5	Z_4	Z_4^*
0.25	0.01	0.0385661	0.133742	0.108554	0.0251682	0.265785	0.373959
0.25	1e-05	2.35233	0.628165	1.56903	0.379471	6.54236	6.0311
0.25	1e-08	2.48063	1.36032	16.828	2.2351	4.42792	7.99424
0.25	1e-11	6.03693	2.65288	1.05337	2.20201	2.83279	7.13976
0.5	0.01	0.0626377	1.11791	0.225034	0.0500384	0.253236	0.465197
0.5	1e-05	2.49727	5.69024	3.44252	0.953892	4.89768	10.231
0.5	1e-08	36.1305	9.36725	18.7254	21.7306	78.8234	65.4371
0.5	1e-11	19.7876	8.10815	17.0898	7.62897	28.0128	46.152
0.75	0.01	0.0465576	3.78341	0.260959	0.0646953	0.129963	0.398741
0.75	1e-05	0.605374	26.9761	2.14284	0.488028	1.36221	4.47241
0.75	1e-08	7.26108	36.5081	17.0376	4.85339	15.4329	54.5688
0.75	1e-11	85.6778	70.1467	97.348	52.7205	158.162	100.475

Tabelle 9: Quasi Monte Carlo, Start Halton, Weibull $\beta = 0.75$.

ρ	$A(u)$	Z_1	Z_3	Z_3^*	Z_5	Z_4	Z_4^*
0.25	0.01	0.0541289	0.209823	0.0839172	0.0164132	0.239357	0.314957
0.25	1e-05	0.119954	0.391516	0.0739545	0.00259372	0.575595	0.637997
0.25	1e-08	0.0991259	0.805249	0.103457	0.00224408	0.863505	1.00733
0.25	1e-11	0.129698	1.30838	0.13422	0.00226836	1.11516	1.30998
0.5	0.01	0.103151	1.78466	0.145721	0.0299532	0.282871	0.472106
0.5	1e-05	0.260271	1.34894	0.103221	0.00323616	0.534018	0.75558
0.5	1e-08	0.137188	6.28181	0.142252	0.00285771	0.782907	1.16102
0.5	1e-11	0.145834	6.01847	0.1797	0.00285579	0.996142	1.4647
0.75	0.01	0.14624	9.19138	0.244249	0.0586736	0.33135	0.875205
0.75	1e-05	0.199976	5.07137	0.132271	0.00664332	0.54376	1.19539
0.75	1e-08	0.234734	6.58221	0.178978	0.00632522	0.786767	1.71436
0.75	1e-11	0.158032	20.0952	0.222459	0.00635828	0.979248	2.24987

Tabelle 10: Quasi Monte Carlo, Shift Halton, Pareto $\alpha = 1.5$.

ρ	$A(u)$	Z_1	Z_3	Z_3^*	Z_5	Z_4	Z_4^*
0.25	0.01	0.0467925	0.177704	0.0443883	0.00809969	0.206629	0.237245
0.25	1e-05	0.116209	0.375225	0.0739614	0.00481775	0.578131	0.644913
0.25	1e-08	0.10396	0.896383	0.103948	0.00262478	0.876133	0.986957
0.25	1e-11	0.0874967	1.3991	0.134223	0.0022792	1.10835	1.31002
0.5	0.01	0.0929195	1.59615	0.0868109	0.013644	0.235506	0.350812
0.5	1e-05	0.912365	1.27597	0.108684	0.00721335	0.530287	0.766559
0.5	1e-08	0.139504	2.4408	0.144557	0.00336316	0.787455	1.14091
0.5	1e-11	0.140161	6.47862	0.178899	0.00293327	0.999692	1.49814
0.75	0.01	0.145274	14.7441	0.1476	0.0250155	0.287252	0.663463
0.75	1e-05	0.372585	6.72683	0.146068	0.0120562	0.547249	1.22069
0.75	1e-08	0.227378	14.6094	0.179325	0.00728795	0.783471	1.74862
0.75	1e-11	0.214455	106.093	0.22005	0.00647137	0.983155	2.21111

Tabelle 11: Quasi Monte Carlo, Shift Halton, Weibull $\beta = 0.25$.

ρ	$A(u)$	Z_1	Z_3	Z_3^*	Z_5	Z_4	Z_4^*
0.25	0.01	0.055641	0.229018	0.0771246	0.0175031	0.246213	0.331752
0.25	1e-05	1.30241	0.396117	0.178141	0.0478944	0.660764	1.00024
0.25	1e-08	0.22133	0.957343	0.190948	0.0355087	0.900176	1.1715
0.25	1e-11	0.493758	1.35402	0.160255	0.0135949	1.15504	1.39121
0.5	0.01	0.108648	1.24965	0.181598	0.0403114	0.306887	0.54383
0.5	1e-05	2.07502	1.50823	0.430048	0.136834	0.794933	1.57771
0.5	1e-08	0.953908	6.69036	0.441602	0.0752378	0.865263	1.55798
0.5	1e-11	0.297397	3.96941	0.277442	0.0277461	1.06122	1.7147
0.75	0.01	0.116785	9.19319	0.315121	0.0808711	0.280653	0.781436
0.75	1e-05	3.5088	8.00089	1.78616	0.852754	3.43088	6.15293
0.75	1e-08	10.4996	25.7722	0.725857	0.22839	1.23895	9.25297
0.75	1e-11	0.584828	11.7087	0.500166	0.0820694	1.16524	3.16015

Tabelle 12: Quasi Monte Carlo, Shift Halton, Weibull $\beta = 0.5$.

ρ	$A(u)$	Z_1	Z_3	Z_3^*	Z_5	Z_4	Z_4^*
0.25	0.01	0.0566557	0.148909	0.118532	0.028202	0.283457	0.410986
0.25	1e-05	2.27598	0.626869	1.01714	0.396361	2.11139	5.03974
0.25	1e-08	12.8379	1.83778	10.787	2.47972	3.81521	4.35044
0.25	1e-11	11.2131	3.52818	1.0207	1.43854	10.9786	7.19705
0.5	0.01	0.0810533	2.90145	0.233506	0.0587765	0.266722	0.50069
0.5	1e-05	2.5864	3.54848	3.69535	0.977149	5.19156	10.8484
0.5	1e-08	63.6585	6.93358	18.7677	9.43198	102.94	25.4082
0.5	1e-11	73.3996	12.2123	27.6111	18.2433	31.7924	10.925
0.75	0.01	0.0514013	5.88149	0.260223	0.0700811	0.135845	0.420445
0.75	1e-05	0.658835	18.8351	2.11316	0.518129	1.3982	4.55375
0.75	1e-08	7.15493	48.1023	22.1521	4.93937	15.0376	47.2425
0.75	1e-11	56.1426	106.369	62.1398	37.1379	125.109	53.03

Tabelle 13: Quasi Monte Carlo, Shift Halton, Weibull $\beta = 0.75$.

ρ	$A(u)$	Z_1	Z_3	Z_3^*	Z_5	Z_4	Z_4^*
0.25	0.01	0.0523786	0.668367	0.0797566	0.0147825	0.235298	0.305488
0.25	1e-05	0.106112	0.403082	0.0604489	0.00241158	0.568771	0.691482
0.25	1e-08	0.102178	0.923581	0.0859342	0.00209024	0.865836	1.07224
0.25	1e-11	0.0909363	1.15519	0.109354	0.00206869	1.12453	1.37906
0.5	0.01	0.102438	2.14835	0.140794	0.0286296	0.274016	0.475504
0.5	1e-05	0.999556	1.14039	0.0865186	0.00306617	0.509144	0.697228
0.5	1e-08	0.136769	3.71212	0.120818	0.0026488	0.763726	1.10171
0.5	1e-11	0.172526	4.98969	0.151585	0.00262181	0.987226	1.45944
0.75	0.01	0.147861	5.5787	0.235728	0.0578266	0.323779	0.891641
0.75	1e-05	0.201679	11.1325	0.121191	0.00621817	0.540261	1.21674
0.75	1e-08	0.206453	23.6254	0.166028	0.00602095	0.766472	1.73002
0.75	1e-11	0.337735	15.5881	0.204574	0.00598567	0.96955	2.17365

Tabelle 14: Quasi Monte Carlo, Shift Sobol, Pareto $\alpha = 1.5$.

ρ	$A(u)$	Z_1	Z_3	Z_3^*	Z_5	Z_4	Z_4^*
0.25	0.01	0.045883	0.404162	0.0395292	0.00693744	0.194426	0.242873
0.25	1e-05	0.175441	0.360546	0.0626212	0.00442066	0.573523	0.697857
0.25	1e-08	0.123871	0.777272	0.0878048	0.00240372	0.855318	1.06492
0.25	1e-11	0.132069	1.26128	0.110581	0.00205797	1.11078	1.38796
0.5	0.01	0.0935596	0.828928	0.0800381	0.0126363	0.223331	0.325206
0.5	1e-05	0.411665	1.92752	0.0936471	0.00685251	0.506114	0.712904
0.5	1e-08	0.128747	4.00606	0.122094	0.00315323	0.75502	1.11381
0.5	1e-11	0.288787	5.82295	0.151192	0.00267115	0.977321	1.42823
0.75	0.01	0.144577	10.7837	0.143715	0.0252159	0.283871	0.677008
0.75	1e-05	0.403452	5.1202	0.139246	0.0117949	0.541312	1.2905
0.75	1e-08	0.178845	38.5353	0.166264	0.00669186	0.778403	1.71957
0.75	1e-11	0.302326	41.427	0.208097	0.00604772	0.985985	2.13861

Tabelle 15: Quasi Monte Carlo, Shift Sobol, Weibull $\beta = 0.25$.

ρ	$A(u)$	Z_1	Z_3	Z_3^*	Z_5	Z_4	Z_4^*
0.25	0.01	0.0546455	0.192939	0.072976	0.0153782	0.237547	0.324205
0.25	1e-05	0.972234	0.39198	0.18904	0.0449935	0.633997	1.01379
0.25	1e-08	0.251936	0.879779	0.143982	0.0400317	0.892642	1.2093
0.25	1e-11	0.227391	1.04639	0.145072	0.0324804	1.13474	1.42358
0.5	0.01	0.10529	1.34791	0.175425	0.0388247	0.302499	0.536739
0.5	1e-05	1.96066	1.7704	0.576683	0.134587	0.70864	1.997
0.5	1e-08	0.914641	3.48786	0.443934	0.0814214	0.844517	1.49535
0.5	1e-11	0.593307	3.68743	0.315968	0.031534	1.02258	1.65488
0.75	0.01	0.114502	8.27473	0.313888	0.0803169	0.27759	0.775964
0.75	1e-05	3.40558	12.7352	2.17805	0.68483	2.06043	20.0744
0.75	1e-08	1.03913	10.1187	1.00063	0.353237	1.11211	4.63291
0.75	1e-11	0.634228	18.3868	0.532759	0.0823097	1.12994	3.19607

Tabelle 16: Quasi Monte Carlo, Shift Sobol, Weibull $\beta = 0.5$.

ρ	$A(u)$	Z_1	Z_3	Z_3^*	Z_5	Z_4	Z_4^*
0.25	0.01	0.053894	0.23518	0.112203	0.025975	0.275882	0.390317
0.25	1e-05	2.37904	0.713679	1.67822	0.402528	3.27975	4.1496
0.25	1e-08	5.56503	1.14928	3.64455	2.56043	4.78512	33.9634
0.25	1e-11	5.89113	2.47242	13.2466	3.8905	3.45512	9.77219
0.5	0.01	0.077694	2.24164	0.229121	0.0565454	0.257719	0.487612
0.5	1e-05	2.57398	3.18921	3.3608	0.985135	4.40733	10.2514
0.5	1e-08	69.3752	8.33028	20.597	15.9511	23.718	90.7244
0.5	1e-11	19.4338	11.5386	20.4614	12.9606	25.5607	28.6704
0.75	0.01	0.0519208	3.03116	0.257834	0.069317	0.132589	0.417549
0.75	1e-05	0.660396	17.0499	2.0901	0.515322	1.38173	4.60574
0.75	1e-08	7.02564	40.9811	18.2499	4.72393	15.3308	49.0499
0.75	1e-11	63.5593	75.5924	93.2376	36.6065	107.329	133.04

Tabelle 17: Quasi Monte Carlo, Shift Sobol, Weibull $\beta = 0.75$.

ρ	$A(u)$	Monte Carlo	start Halton	shift Halton	shift Sobol
0.25	0.01	0.00844119	0.00507251	0.00604526	0.00518576
0.25	1e-05	0.000253489	0.000264575	0.000287035	0.00027244
0.25	1e-08	1.32345e-06	1.5468e-07	1.12623e-06	3.0752e-07
0.25	1e-11	3.26548e-12	1.89518e-13	6.98963e-13	1.92472e-12
0.5	0.01	0.00891359	0.00685026	0.00727396	0.00689832
0.5	1e-05	0.000282575	0.000279484	0.000245584	0.000301344
0.5	1e-08	6.86871e-07	1.91248e-05	9.00839e-08	2.3792e-07
0.5	1e-11	3.31906e-12	2.66878e-13	1.17502e-13	1.19904e-13
0.75	0.01	0.00940132	0.00788623	0.00825364	0.00816979
0.75	1e-05	0.000302029	0.000311129	0.00028584	0.000265527
0.75	1e-08	6.14169e-06	1.45176e-07	1.05729e-07	8.74096e-08
0.75	1e-11	3.34731e-12	1.25631e-13	1.89415e-12	1.26599e-13

Tabelle 18: Kontrollvariablen, Pareto $\alpha = 0.5$.

ρ	$A(u)$	Monte Carlo	start Halton	shift Halton	shift Sobol
0.25	0.01	0.0116456	0.00672402	0.00785884	0.0064835
0.25	1e-05	0.00481008	0.00375596	0.004136	0.00402812
0.25	1e-08	0.00100453	0.00116254	0.00108891	0.00142679
0.25	1e-11	0.000305208	0.000308494	0.000292582	0.00246569
0.5	0.01	0.0194348	0.0119817	0.0130968	0.0121121
0.5	1e-05	0.00726952	0.00627971	0.00627759	0.00625228
0.5	1e-08	0.00215577	0.00136734	0.00187073	0.00160108
0.5	1e-11	0.000511304	0.000424462	0.000490821	0.000409008
0.75	0.01	0.035445	0.0219906	0.0235827	0.023576
0.75	1e-05	0.0112562	0.00951117	0.0101683	0.00980831
0.75	1e-08	0.00297799	0.00230669	0.00215467	0.00239697
0.75	1e-11	0.000795384	0.000669175	0.000694454	0.00088959

Tabelle 19: Kontrollvariablen, Weibull $\beta = 0.25$.

ρ	$A(u)$	Monte Carlo	start Halton	shift Halton	shift Sobol
0.25	0.01	0.0340232	0.0156339	0.0170962	0.0150871
0.25	1e-05	0.0577091	0.0416202	0.0467907	0.0451604
0.25	1e-08	0.0362488	0.0389254	0.048482	0.038845
0.25	1e-11	0.0167383	0.0177584	0.0278201	0.0277029
0.5	0.01	0.0777067	0.0377581	0.040249	0.038714
0.5	1e-05	0.144354	0.128971	0.125533	0.121119
0.5	1e-08	0.0987756	0.0853035	0.0829769	0.0778799
0.5	1e-11	0.0311246	0.0360373	0.0296549	0.0482282
0.75	0.01	0.14197	0.0773388	0.0799778	0.0792904
0.75	1e-05	0.775704	0.649989	0.754282	0.630272
0.75	1e-08	0.243248	0.280265	0.289328	0.302551
0.75	1e-11	0.111678	0.126714	0.130234	0.120371

Tabelle 20: Kontrollvariablen, Weibull $\beta = 0.5$.

ρ	$A(u)$	Monte Carlo	start Halton	shift Halton	shift Sobol
0.25	0.01	0.0655471	0.0249365	0.0278574	0.0258339
0.25	1e-05	0.478149	0.399184	0.387299	0.404613
0.25	1e-08	3.20718	3.91786	2.1931	2.30909
0.25	1e-11	3.74052	1.3302	2.48046	3.17308
0.5	0.01	0.123935	0.0505769	0.0583044	0.056367
0.5	1e-05	1.05971	0.932977	0.994122	0.967234
0.5	1e-08	11.3404	7.80722	16.1045	14.424
0.5	1e-11	22.0952	50.2825	14.7809	13.9411
0.75	0.01	0.137316	0.0651947	0.0704295	0.069532
0.75	1e-05	0.709958	0.494698	0.509886	0.50946
0.75	1e-08	5.26052	5.17346	4.77147	4.84174
0.75	1e-11	35.5728	47.2806	44.3374	32.5801

Tabelle 21: Kontrollvariablen, Weibull $\beta = 0.75$.

ρ	$A(u)$	Assymptotik	Monte Carlo	start Halton	shift Halton	shift Sobol
0.25	0.01	0.207149	0.0384818	0.0050103	0.00634495	0.00549559
0.25	1e-05	0.0207149	0.0310725	0.00180229	0.00232916	0.0020863
0.25	1e-08	0.00207149	0.030993	0.00176779	0.0022672	0.00203928
0.25	1e-11	0.000207149	0.0310047	0.00176653	0.0022124	0.00207307
0.5	0.01	0.430887	0.054267	0.00847311	0.0102202	0.00943759
0.5	1e-05	0.0430887	0.0439123	0.00222214	0.0029142	0.00270755
0.5	1e-08	0.00430887	0.0438261	0.00214529	0.00284995	0.00266726
0.5	1e-11	0.000430887	0.0438482	0.0021907	0.00282461	0.0026321
0.75	0.01	0.896281	0.0711001	0.0164748	0.0204698	0.0195621
0.75	1e-05	0.0896281	0.0537979	0.0040609	0.00643118	0.00603675
0.75	1e-08	0.00896281	0.0537141	0.00408352	0.00633266	0.00599254
0.75	1e-11	0.000896281	0.053697	0.00403506	0.00637119	0.00606878

Tabelle 22: Schätzer Z_7 mit Pareto $\alpha = 1.5$ als Schadenshöhenverteilung.

ρ	$A(u)$	Assymptotik	Monte Carlo	start Halton	shift Halton	shift Sobol
0.25	0.01	0.207149	0.0123027	0.00429299	0.0053802	0.00469664
0.25	1e-05	0.0207149	0.000473189	0.000405758	0.000421027	0.000419089
0.25	1e-08	0.00207149	1.58407e-05	1.72024e-05	7.86036e-06	1.52922e-05
0.25	1e-11	0.000207149	1.06832e-07	1.08006e-07	6.02651e-08	8.69875e-08
0.5	0.01	0.430887	0.0192091	0.00759978	0.00906995	0.00849976
0.5	1e-05	0.0430887	0.000505743	0.000455055	0.000463414	0.000494024
0.5	1e-08	0.00430887	6.83233e-06	8.67457e-06	7.86662e-06	9.06992e-06
0.5	1e-11	0.000430887	7.53554e-08	1.40827e-07	6.56479e-08	1.16045e-07
0.75	0.01	0.896281	0.0322978	0.0150974	0.0173013	0.0170229
0.75	1e-05	0.0896281	0.000541312	0.000473279	0.000502111	0.000493053
0.75	1e-08	0.00896281	2.02703e-05	1.80948e-05	1.09509e-05	1.33899e-05
0.75	1e-11	0.000896281	1.00864e-07	7.38667e-08	7.80979e-08	7.62257e-08

Tabelle 23: Schätzer Z_8 mit Pareto $\alpha = 1.5$ als Schadenshöhenverteilung.

ρ	$A(u)$	Assymptotik	Monte Carlo	start Halton	shift Halton	shift Sobol
0.25	0.01	0.207149	4.24253	2.04343	8.17694	2.85491
0.25	1e-05	0.0207149	24.9205	28.4803	23.2175	23.5344
0.25	1e-08	0.00207149	NaN	196.039	196.039	NaN
0.25	1e-11	0.000207149	NaN	NaN	NaN	NaN
0.5	0.01	0.430887	19.0487	3.45136	2.21849	5.09586
0.5	1e-05	0.0430887	37.8723	38.4179	30.9361	27.621
0.5	1e-08	0.00430887	NaN	NaN	NaN	NaN
0.5	1e-11	0.000430887	NaN	NaN	NaN	NaN
0.75	0.01	0.896281	2.84567	2.68428	8.45654	7.56066
0.75	1e-05	0.0896281	99.0413	59.1385	47.4512	30.2972
0.75	1e-08	0.00896281	NaN	NaN	NaN	NaN
0.75	1e-11	0.000896281	NaN	NaN	NaN	NaN

Tabelle 24: Schätzer Z_{11} mit Pareto $\alpha = 1.5$ als Schadenshöhenverteilung.

Abbildungsverzeichnis

4.1	Der Träger der Dichte von (M_n, S_n) und die Unterteilung in $2n - 1$ Bereiche.	59
4.2	Vergleich der verschiedenen Schätzer mit $X_i \sim \text{Pareto}(0.5)$, $N \sim \text{Geometrisch}(0.75)$ und 10^7 Iterationen.	61
4.3	Vergleich der verschiedenen Integrationsmethoden mit $X_i \sim \text{Pareto}(1.5)$, $N \sim \text{Geometrisch}(0.5)$ und $A(u) = 10^8$ Iterationen.	64
4.4	Vergleich der verschiedenen Integrationsmethoden mit $X_i \sim \text{Pareto}(1.5)$, $N \sim \text{Geometrisch}(0.5)$ und $A(u) = 10^8$ Iterationen.	65
4.5	Vergleich der verschiedenen Integrationsmethoden mit $X_i \sim \text{Pareto}(1.5)$, $N \sim \text{Geometrisch}(0.5)$ und $A(u) = 10^8$ Iterationen.	65
4.6	Vergleich der verschiedenen Integrationsmethoden mit $X_i \sim \text{Pareto}(1.5)$, $N \sim \text{Geometrisch}(0.25)$ und $A(u) = 10^{-2}$ Iterationen.	67
4.7	Vergleich der verschiedenen Integrationsmethoden mit $X_i \sim \text{Pareto}(1.5)$, $N \sim \text{Geometrisch}(0.25)$ und $A(u) = 10^{-5}$ Iterationen.	67
5.1	Vergleich der verschiedenen Schätzer mit $X_i \sim \text{Pareto}(2.5)$, $N \sim \text{Geometrisch}(0.75)$.	93

Tabellenverzeichnis

4.1	Exponentiale Schadenshöhen mit $\lambda = 1$.	43
4.2	Monte Carlo, Pareto $\alpha = 0.5$.	62
4.3	Monte Carlo, Weibull $\beta = 0.25$.	62
4.4	Monte Carlo, Weibull $\beta = 0.75$.	62
4.5	Quasi Monte Carlo, Start Halton, Pareto $\alpha = 0.5$.	63
4.6	Quasi Monte Carlo, Shift Halton, Pareto $\alpha = 0.5$.	63
4.7	Quasi Monte Carlo, Shift Sobol, Pareto $\alpha = 0.5$.	64
4.8	Kontrollvariablen, Pareto $\alpha = 1.5$.	66
5.1	Schätzer Z_7 mit Pareto $\alpha = 2.5$ als Schadenshöhenverteilung.	92
5.2	Schätzer Z_8 mit Pareto $\alpha = 2.5$ als Schadenshöhenverteilung.	92
5.3	Schätzer Z_{11} mit Pareto $\alpha = 2.5$ als Schadenshöhenverteilung.	93
4	Monte Carlo, Pareto $\alpha = 1.5$.	101
5	Monte Carlo, Weibull $\beta = 0.5$.	101
6	Quasi Monte Carlo, Start Halton, Pareto $\alpha = 1.5$.	102
7	Quasi Monte Carlo, Start Halton, Weibull $\beta = 0.25$.	102
8	Quasi Monte Carlo, Start Halton, Weibull $\beta = 0.5$.	102
9	Quasi Monte Carlo, Start Halton, Weibull $\beta = 0.75$.	103
10	Quasi Monte Carlo, Shift Halton, Pareto $\alpha = 1.5$.	103
11	Quasi Monte Carlo, Shift Halton, Weibull $\beta = 0.25$.	103
12	Quasi Monte Carlo, Shift Halton, Weibull $\beta = 0.5$.	104
13	Quasi Monte Carlo, Shift Halton, Weibull $\beta = 0.75$.	104
14	Quasi Monte Carlo, Shift Sobol, Pareto $\alpha = 1.5$.	104
15	Quasi Monte Carlo, Shift Sobol, Weibull $\beta = 0.25$.	105
16	Quasi Monte Carlo, Shift Sobol, Weibull $\beta = 0.5$.	105
17	Quasi Monte Carlo, Shift Sobol, Weibull $\beta = 0.75$.	105
18	Kontrollvariablen, Pareto $\alpha = 0.5$.	106
19	Kontrollvariablen, Weibull $\beta = 0.25$.	106
20	Kontrollvariablen, Weibull $\beta = 0.5$.	106
21	Kontrollvariablen, Weibull $\beta = 0.75$.	107
22	Schätzer Z_7 mit Pareto $\alpha = 1.5$ als Schadenshöhenverteilung.	107
23	Schätzer Z_8 mit Pareto $\alpha = 1.5$ als Schadenshöhenverteilung.	107
24	Schätzer Z_{11} mit Pareto $\alpha = 1.5$ als Schadenshöhenverteilung.	108

Literaturverzeichnis

- [ABH00] ASMUSSEN, SØREN, KLEMENS BINSWANGER und BJARNE HØJGAARD: *Rare events simulation for heavy-tailed distributions*. Bernoulli, 6(2):303–322, 2000.
- [AK97] ASMUSSEN, SØREN und BINSWANGER KLEMENS: *Simulation of ruin probabilities for sub-exponential claims*. Astin Bulletin, 27(2):297–318, 1997.
- [AK04] ASMUSSEN, S. und D.P. KROESE: *Improved algorithms for rare event simulation with heavy tails*. Technical Report, Aarhus University Denmark, January 2004.
- [AKR05] ASMUSSEN, SØREN, DIRK P. KROESE und REUVEN Y. RUBINSTEIN: *Heavy tails, importance sampling and cross-entropy*. Stoch. Models, 21(1):57–76, 2005.
- [Asm96] ASMUSSEN, S.: *Ruin probabilities*. World Scientific, Singapore, 1996.
- [AT03] ALBRECHER, H. und R. F. TICHY: *Vorlesungs-Skript: Finanz- und Versicherungsmathematik 1*. TU-Graz, 2003.
- [Bin97] BINSWANGER, K.: *Rare Events and Insurance*. Dissertation, ETH Zürich, 1997.
- [CP76] CRANLEY, R. und T. N. L. PATTERSON: *Randomization of number theoretic methods for multiple integration*. SIAM Journal of Numerical Analysis, 13(6):904–914, 1976.
- [ES81] EFRON, B. und C. STEIN: *The jackknife estimator of variance*. Annals of Statistics, 9:586–596, 1981.
- [Fel71] FELLER, W.: *An Introduction to Probability Theory and its Applications II*. 2nd ed. Wiley, New York, 1971.
- [Ger79] GERBER, H. U.: *An Introduction to Mathematical Risk Theory*. Huebner Foundation Monograph 8, Homewood, Ill, 1979.
- [Gla03] GLASSERMAN, P.: *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer, 2003.
- [Gra92] GRANDPELL, J.: *Aspects of Risk Theory*. Springer, New York, 1992.
- [Hal60] HALTON, J.: *On the efficiency of certain quasi-random points in evaluating multidimensional integrals*. Numer. Math 2, 1960.
- [Hal84] HALLEKALEK, P.: *Regularities of distribution of special sequences*. Journal of Number Theory, 18:41–55, 1984.
- [Har01] HARTINGER, J.: *Preissetzung Asiatischer Optionen mittels Quasi-Monte Carlo Methoden*. Diplomarbeit, TU Graz, 2001.
- [Hei87] HEILMANN, W.: *Grundbegriffe der Risikotheorie*. Verlag Versicherungswirtschaft E.V., Karlsruhe, 1987.
- [Hei95] HEIDELBERGER, PHILIP: *Fast simulation of rare events in queueing and reliability models*. ACM Trans. Model. Comput. Simul., 5(1):43–85, 1995.
- [Hla61] HLAWKA, E.: *Funktionen von beschränkter Variation in der Theorie der Gleichverteilung*. Ann. Mat. Pura Appl., 54:325–333, 1961.
- [Hoe48] Hoeffding, W.: *A class of statistics with asymptotically normal distributions*. Annals of Mathematical Statistics, 19:293–325, 1948.

- [HS03] HUANG, ZHI und PERWEZ SHAHABUDDIN: *New simulation methodology for risk analysis: rare-event, heavy-tailed simulations using hazard function transformations, with applications to value-at-risk*. In: *WSC '03: Proceedings of the 35th conference on Winter simulation*, Seiten 276–284. Winter Simulation Conference, 2003.
- [HW00] HICKERNELL, F.J. und X. WANG: *Randomized Halton Sequences*. *Mathematical Computer Modelling*, 32:887–899, 2000.
- [JS02] JUNEJA, SANDEEP und PERWEZ SHAHABUDDIN: *Simulating heavy tailed processes using delayed hazard rate twisting*. *ACM Trans. Model. Comput. Simul.*, 12(2):94–118, 2002.
- [KM97] KLÜPPELBERG, C. und T. MIKOSCH: *Large deviations of heavy-tailed random sums with applications to insurance and finance*. *J. Appl. Probab.*, 34, 1997.
- [KN74] KUIPERS, L. und H. NIEDERREITER: *Uniform Distribution of Sequences*. John Wiley, New York, 1974.
- [Kok43] KOKSMA, J. F.: *Een algemeene stelling uit de theorie der gelijkmatige verdeeling modulo 1*. *Mathematica B (Zutphen)*, 11:7–11, 1942/1943.
- [Lam85] LAMBERT, J.P.: *Quasi-Monte Carlo, low discrepancy sequences, and ergodic transformations*. *J. Comput. Appl. Math.*, 12(13):419–423, 1985.
- [L'E05] L'ECUYER, P.: *Random Number Generation*. chapter 3 of *Elsevier Handbooks in Operations Research and Management Science: Simulation*, S. G. Henderson and B. L. Nelson, eds., Elsevier Science, circa 2005.
- [LL02] L'ECUYER, P. und C. LEMIEUX: *A survey of randomized quasi-Monte Carlo methods*. In M. Dror, P. L'Ecuyer und F. Szidarovszki, edidors, *Modeling Uncertainty: An Examination of Stochastic Theorie, Methods and Applications*, pages 419–474. Kluwer Academic Publisher, 2002.
- [Mac96] MACK, T.: *Schadensversicherungsmathematik*. Verlag Versicherungswirtschaft E.V., Karlsruhe 1996.
- [MFer] MOROHOSI, H. und N. FUSHIMI: *A practical approach to the error estimation of quasi-Monte Carlo integration*. In H. Niederreiter und J. Spanier, editors, *Monte Carlo and Quasi Monte Carlo Methods*, 1998, Seiten 377–390, Berlin 2000, Springer.
- [NBT87] N.H. BINGHAM, C.M. GOLDIE und J.L. TEUGLES: *Regular Variation*. Cambridge University Press, Cambridge., 1987.
- [Nie72] NIEDERREITER, H.: *Methods for estimating discrepancy, in Applications to Number Theory to Numerical Analysis*. S. K. Zaremba, ed., Academic Press, New York, Seiten 203–236, 1972.
- [Nie87] NIEDERREITER, H.: *Point Sets and Sequences with small Discrepancy*. *Monatsheft für Mathematik* 104, Seiten 273–337, 1987.
- [Nie92] NIEDERREITER, H.: *Random Number Generation and Quasi-Monte-Carlo Methods*. CBMS-NSF regional conference series and applied mathematics 63. SIAM Philadelphia, 1992.
- [Nie03] NIEDERREITER, H.: *Error bounds for quasi-Monte Carlo integration with uniform point sets*. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 150:283–292, 2003.
- [Owe97] OWEN, A. B.: *Monte Carlo variance of scrambled equidistribution quadrature*. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 34(5):1884–1910, 1997.
- [Owe98] OWEN, A. B.: *Latin supercube sampling for very high-dimensional simulations*. *ACM Transactions of Modeling and Computer Simulation*, 8(1):71–102, 1998.
- [Pag92] PAGÉS, GILLES: *Van der Corput sequences, Kakutani transforms and one-dimensional numerical integration*. *J. Comput. Appl. Math.*, 44(1):21–39, 1992.
- [PE97] P. EMBRECHTS, C. KLÜPPELBERG & T. MIKOSCH: *Modelling Extremal Events for Finance and Insurance*. Springer, Heidelberg, 1997.
- [Pit80] PITMAN, E. J. G.: *Subexponential distribution functions*. *J. Austr. Math. Soc.* 29 A, Seiten 337–347, 1980.

- [Pro88] PROINOV, P. D.: *Discrepancy and integration of continuous functions*. J. Approx. Theory, 52:121–131, 1988.
- [PT95] PASKOV, S. und J. TRAUB: *Faster valuation of financial derivatives*. The Journal of Portfolio Management, 22:113–120, 1995.
- [RCO97] R.E. CAFLISCH, W. MOROKOFF und A.B. OWEN: *Valuation of mortgage backed securities using brownian bridges to reduce effective dimension*. Journal of Computational Finance, 1:27–46, 1997.
- [Rub97] RUBINSTEIN, R.Y.: *Optimization of computer simulation models with rare events*. European Journal of Operations Research, 99:89–112, 1997.
- [SL99] SOBOL, I. M. und YU. L. LEVITAN: *On the use of variance reducing multipliers in Monte Carlo computations of a global sensitivity index*. Computer Physics Communications, 117:52–61, 1999.
- [SL01] SOBOL, I. M. und YU. L. LEVITAN: *Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates*. Mathematics and Computers in Simulation, 55:271–280, 2001.
- [SW98] SLOAN, I. H. und H. WOZNIAKOWSKI: *When are quasi-Monte Carlo algorithms efficient for high dimensional integration?* Journal of Complexity, 14:1–33, 1998.
- [Tuf96] TUFFIN, B.: *On the use of low-discrepancy point sequences in Monte Carlo methods*. Technical Report No 1060, I.R.I.S.A, Rennes, France, 1996.
- [Tuf97] TUFFIN, B.: *Variance Reduction Applied to Product-From Multiclass Queuing Network*. ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation, 7(4):478–500, October 1997.
- [Tuf98] TUFFIN, B.: *On the Use of Low Discrepancy Sequences in Monte Carlo Methods*. Monte Carlo Methods and Applications, 2:295–320, 4:87–90, 1998.