

CONSERVATOIRE NATIONAL DES ARTS ET METIERS

PARIS

MEMOIRE

Présenté en vue d'obtenir

Le DIPLOME D'ECONOMISTE du C.N.A.M

Spécialité ACTUARIAT

Par

Géraldine KRAUTH

PROVISIONNEMENT ET CORRELATION ENTRE BRANCHES

Soutenu le 22 Juin 2007

JURY

Président : M. Michel FROMENTEAU

**Membres: M. Pierre PETAUTON
M. Serge VAN DER HEYDEN
M. Patrick WARIN
M. François WEISS**

RESUME

La prise en compte de la corrélation dans le calcul des provisions techniques est un sujet qui devient de plus en plus prégnant. L'arrivée de « Solvency II », en imposant des critères de Value-at-Risk dans la fixation du niveau des provisions et en incitant les compagnies d'assurance à utiliser un modèle interne de détermination du besoin en capital, systématise l'utilisation de méthodes stochastiques de provisionnement.

La dépendance dans le cadre du provisionnement peut être prise en compte au travers de différentes méthodes (parfois anciennes) que l'on adapte alors à cette problématique, comme le Bootstrap, les modèles à choc commun et l'utilisation de la théorie des copules. Ce mémoire se propose de mettre en pratique ces trois méthodes sur la base des mêmes données et des mêmes hypothèses et de comparer leurs résultats notamment en terme de Value-at-Risk, dans le cadre de Solvency II.

MOTS CLES

Provisionnement - Modèle Linéaire Généralisé - Bootstrap - Modèle à Choc Commun - Dépendance - Copule - Méthode de Monte-Carlo - Value-at-Risk

ABSTRACT

The correlation impact in the level of technical reserves is an issue that becomes more and more important. The new european solvency system « Solvency II », by setting Value-at-Risk criteria in the level of reserves and by inciting insurance companies to use internal model for estimating the economic capital, needs the use of stochastic methods for reserving.

Dependence in reserving can be taken into account by different methods like the Bootstrap, the common shock model and the theory of copulas.

This paper intends to implement these three methods, on the same data and under the same hypothesis, and to compare their results especially in terms of Value-at-Risk in the framework of Solvency II.

KEYWORDS

Reserving - Generalized Linear Model - Bootstrap - Common Shock Model - Dependence - Copula - Monte-Carlo Method - Value-at-Risk

REMERCIEMENTS

Les travaux relatifs au présent mémoire ont été effectués sous la direction de M. Christian PARTRAT.

La problématique des méthodes de provisionnement stochastiques, ainsi que la prise en compte de la dépendance au travers de différentes méthodes ont toujours constituées pour lui un sujet majeur, qu'il a de nombreuses fois traité dans ses ouvrages ou lors de conférences.

Son implication importante dans le domaine de l'actuariat ainsi que son grand sens pédagogique l'ont conduit à encadrer des générations d'étudiants, dont j'ai eu la chance de faire partie, dans la réalisation de leur travail de fin d'études.

Personnalité reconnue et respectée du monde de l'actuariat, et bien que très occupé par ses diverses fonctions, il savait néanmoins rester disponible pour ses étudiants. Je le remercie pour le temps et les conseils qu'il m'a accordés et qui ont permis à cet ouvrage de voir le jour.

Je dédie ce travail à la mémoire de M. Christian PARTRAT, décédé le 16 Octobre 2006.

Je remercie aussi M. Christian ROBERT, qui s'est substitué à M. Christian PARTRAT pour effectuer la relecture de mon mémoire, et qui m'a prodigué ses conseils éclairés.

Je remercie enfin toutes les personnes qui m'ont encouragée et soutenue tout au long de mon travail, au premier rang desquelles mon mari et ma famille.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION	5
PARTIE I : PRESENTATION DU MEMOIRE	6
I. L'ASSURANCE	6
I.1 L'histoire de l'assurance	6
I.2 Quelques notions sur les risques et les sinistres	6
II. LES PROVISIONS	8
II.1 Réglementation	8
II.2 Les Provisions pour Sinistres A Payer (PSAP)	8
III. LES DONNEES ET OUTILS UTILISES	10
III.1 Bases de données	10
III.2 Outils	11
PARTIE II : FONDEMENTS THEORIQUES	12
I. LES METHODES DE CALCUL DES PROVISIONS	12
I.1. Méthode Chain-Ladder	13
I.2 Extension du Chain-Ladder en stochastique : le modèle de Mack	14
I.3 Modèles GLM	15
II. DEPENDANCE ENTRE BRANCHES	21
II.1 Corrélation	21
II.2 Bootstrap	25
II.3 Modèle à chocs communs	30
II.4 La théorie des copules	33
PARTIE III : APPLICATION	44
I. CALCULS PREALABLES	44
I.1 Calcul des coefficients de corrélation sur les triangles de règlements	44
I.2 Calcul des provisions par différentes méthodes	46
I.3 Calcul des coefficients de corrélation sur les triangles de probabilités	57
II. MODELISATION DE LA CORRELATION	65
II.1 Par la technique du Bootstrap	65
II.2 Par le modèle à chocs communs	78
II.3 Par la théorie des copules	88
II.4 Mesures de risque	101
CONCLUSION	112
ANNEXES	115
ANNEXE 1 : Tableau des règlements	115
ANNEXE 2 : Résultats des modélisations GLM retenues	120
ANNEXE 3 : Résultats des tests sur résidus	128
ANNEXE 4 : Résultats par catégorie ministérielle des différentes méthodes	133
ANNEXE 5 : Résultats détaillés de la méthode Bootstrap	137
ANNEXE 6 : Résultats détaillés du modèle à choc commun	143
ANNEXE 7 : Résultats détaillés du modèle avec copules	149
BIBLIOGRAPHIE	155

INTRODUCTION

L'un des travaux importants de tout actuaire en assurance IARD est d'estimer le montant des provisions pour sinistres à payer (PSAP), c'est à dire la somme à mettre en réserve pour faire face au coût total des sinistres pour chaque année de survenance écoulée. Cette estimation est d'une importance considérable car ce montant représente la partie la plus importante du bilan des réserves à constituer.

Ce montant aura donc une influence sur le niveau de rentabilité d'une branche d'activité.

La précision de cette estimation intéresse de plus le législateur, pour des raisons de protection des intérêts des assurés, et les instances fiscales, pour la vision du bénéfice imposable.

La réglementation oblige donc l'assureur à constituer ces réserves, alors même que ce coût total définitif lui est encore inconnu.

L'actuaire met alors en pratique plusieurs méthodes de calcul des provisions, chaque méthode donnant un résultat possible. Les nombreuses méthodes qui existent ont toutes été développées dans le but de pallier un problème spécifique (manque de données, historique insuffisant, développements longs, environnement incertain, ...). Généralement, l'actuaire se fait une idée médiane du montant des réserves à retenir en utilisant plusieurs techniques.

Ce montant de réserves n'en demeure pas moins une estimation, dont la précision peut être plus ou moins grande. La seconde problématique de l'actuaire est donc de déterminer l'incertitude autour du montant qu'il a estimé. Pour ce faire, il peut :

- soit calculer directement la variabilité par des intervalles de confiance lorsqu'il travaille dans un cadre théorique utilisant des lois connues : modèle à chocs communs et théorie des copules
- soit utiliser une méthode d'échantillonnage permettant de déterminer une loi de distribution empirique lorsque les lois réelles sont inconnues ou trop complexes à estimer (trop de paramètres), c'est la technique du Bootstrap

Le calcul des provisions s'effectue généralement par branche d'activités (Automobile, Dommages aux Biens, RC Générale, ...). Ce calcul séparé suppose donc que les branches étudiées sont indépendantes. En pratique, cette hypothèse est difficilement admissible. Effectivement, une augmentation du coût des soins médicaux, touchant aux sinistres corporels, aura des effets à la fois en RC Automobile, en RC Générale et pour les Accidents du Travail (cf. mémoire de O. Belguise). De même, l'influence des événements naturels sur les branches Automobile et Dommages aux Biens n'est plus à démontrer. Dès lors, on peut se demander quel est l'impact de cette dépendance entre branches sur le niveau d'incertitude se rapportant au montant des provisions.

Nous nous proposons donc dans ce mémoire, après une revue de quelques-unes des méthodes de calcul des provisions existantes et des modèles de prise en compte de la dépendance, de pratiquer une analyse comparée de ces différents modèles notamment en terme de variabilité du montant des provisions en cas de dépendance. Pour cela, nous avons décidé de partir du même jeu de données et de lui appliquer ces trois méthodes.

PARTIE I : PRESENTATION DU MEMOIRE

I. L'ASSURANCE.

I.1 L'histoire de l'assurance.

C'est en Angleterre, dans le domaine maritime que l'assurance prend naissance. La perte des navires, et de leur contenu, étant souvent une cause de faillite des armateurs, ceux-ci ont essayé de s'en prémunir en mutualisant le risque sous forme de coassurance. Les armateurs partagent les mêmes risques, chacun prenant une part du risque sur chaque bateau qui navigue.

En France, c'est Colbert, intendant des Finances de Louis XIV, qui est l'artisan du cadre légal de la toute première loi sur l'assurance maritime. En 1681, une nouvelle ordonnance royale lance officiellement le commerce de l'assurance. En 1686, la première « Compagnie générale pour les assurances maritimes en France » voit le jour.

Complémentaires à l'assurance maritime, des assurances « terrestres » apparaissent au XVIIème siècle pour assurer, par exemple, les transports des marchandises arrivées par mer.

L'assurance incendie, bien que prévue dès 1686, ne verra le jour qu'un siècle plus tard : sous l'impulsion des frères Périer, directeurs de la Compagnie des Eaux, est créée la première compagnie d'assurance contre le feu.

Quelques mutuelles furent ensuite autorisées sous le Consulat et l'Empire, mais leur essor véritable commence à partir de la Restauration, en 1815.

Les Compagnies d'assurance à primes apparaissent alors.

I.2 Quelques notions sur les risques et les sinistres.

a] Les catégories de risques

Les risques couverts en assurance Iard (Incendie, Automobile, Risques Divers) sont très hétérogènes. En assurance Iard (aussi appelée Non-Vie), on considère les assurances de choses (assurance contre leur détérioration) et les assurances de responsabilité (on se garantit soi-même contre sa propre faute).

➤ Risques courts / risques longs

Au-delà de la distinction de nature que l'on vient de citer entre risques de biens et risques de responsabilités, ces deux types de risques ont des comportements très différents.

Ainsi, les sinistres dits de Dommages aux Biens (= DAB : vol, incendie, dégâts des eaux, ...) sont déclarés et réglés rapidement (en 2-3 ans) alors que les sinistres de responsabilité civile sont déclarés parfois bien après la survenance. C'est par exemple le cas des sinistres amiante, pour lesquels l'assuré n'a connaissance du sinistre dont il a été l'objet qu'une fois la maladie déclarée, c'est à dire des années après. Qui plus est, ces sinistres

donnent lieu à expertise, contre-expertise, réclamation et sont souvent en contentieux ce qui a pour cause de retarder le remboursement.

Les risques « courts » sont assez simples à estimer : leur charge est souvent faible et est évaluée à un coût moyen.

➤ *Risques de fréquence / risques à forte volatilité*

Les risques (hors RC) touchant le marché des particuliers ainsi que les risques automobiles sont dits des risques de fréquence (par l'observation du passé, on peut prédire des probabilités de survenance). Ce sont des risques observables sur un grand nombre d'individus (risques de masse) et ayant une probabilité de survenance parmi les plus élevées.

Il en va différemment pour les risques industriels qui, s'ils sont moins fréquents, présentent une forte volatilité dans la survenance et la charge.

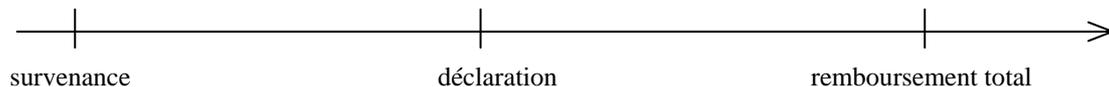
b] Notions de sinistres

L'activité de l'assurance consiste à couvrir un risque aléatoire moyennant une prime.

La survenance du risque s'appelle un sinistre.

➤ *Trois notions de date sont importantes en matière de sinistre :*

- la date à laquelle le sinistre a lieu = date de survenance
- la date à laquelle il est déclaré = date de déclaration
- les dates auxquelles il est remboursé à l'assuré = date de règlement



Ces trois dates ne correspondent jamais et il s'écoule souvent plusieurs années entre la date de survenance et la date à laquelle le sinistre est réglé définitivement.

Il peut ainsi s'écouler un temps plus ou moins long entre la date de survenance du sinistre et sa date d'ouverture, et ce pour plusieurs raisons : contraintes administratives (envoi du courrier) ou structurelles (les conséquences de certains sinistres ne sont connus que longtemps après leur survenance). Les sinistres RC médicale seront par exemple qualifiés **de sinistres à déclaration lente**, car il s'écoule couramment plusieurs années entre la survenance du sinistre et le moment où les conséquences apparaissent.

Une fois le sinistre ouvert, celui-ci n'est réglé rapidement que dans les cas simples, qui ne nécessitent pas ou peu d'expertise et dont le coût moyen est connu. C'est le cas des sinistres DAB des Particuliers qui correspondent aux risques courts. Inversement, comme on l'a vu, les sinistres corporels sont des **sinistres à liquidation lente**. L'assureur peut ainsi être informé rapidement de l'existence d'un sinistre corporel (suite à un accident automobile, par exemple), mais son règlement total ne pourra pas intervenir, en tout état de cause, avant que toutes les conséquences en terme de santé ne soient connues, c'est à dire que l'état de santé de l'assuré ne soit stabilisé (c'est la phase dite de consolidation).

II. LES PROVISIONS.

II.1 Réglementation

L'article R.331-1 du Code des Assurances stipule que les assureurs sont tenus de constituer des «... provisions techniques suffisantes pour le règlement intégral de leurs engagements vis-à-vis des assurés ou bénéficiaires des contrats ».

Le calcul de ces provisions pour sinistres à payer doit se faire par année de survenance (art. R.331-15).

L'évaluation se fait brute de réassurance : l'assureur est tenu de constituer intégralement les provisions dont il est contractuellement responsable.

Les provisions ne peuvent être escomptées.

Les risques sont regroupés au sein de catégories homogènes de risques, et communes à toutes les compagnies d'assurance. Il s'agit des « Catégories ministérielles » des risques d'assurance, dont nous citons ici les composantes dans le cadre de l'assurance dommages :

20 - Dommages corporels individuels
21 - Dommages corporels collectif
22 - Automobile Responsabilité Civile
23 - Automobile Dommages
24 - Dommages aux biens particuliers
25 - Dommages aux biens professionnels
26 - Dommages aux biens agricoles
27 - Catastrophes naturelles
28 - Responsabilité Civile Générale
29 - Protection juridique
30 - Assistance
31 - Pertes pécuniaires diverses
34 - Transport
35 - Construction Dommages-Ouvrage (DO)
36 - Construction RC Décennale (RCD)
38 - Caution

II.2 Les Provisions pour Sinistres A Payer (PSAP).

Comme on l'a vu, la réglementation oblige les compagnies d'assurance Iard à imputer le coût total d'un sinistre sur son année de survenance.

Or, comme nous l'avons aussi vu précédemment, un sinistre est rarement réglé en totalité l'année même de sa survenance. D'où la nécessité, et même l'obligation, pour les compagnies d'assurance d'estimer le coût définitif des sinistres afin de provisionner la différence entre ce coût estimé définitif et les règlements déjà effectués. Ces provisions, renseignées pour chaque sinistre ouvert (et donc connu de l'assureur) s'appellent les **provisions dossier/dossier (D/D)**. Pour les sinistres relevant des risques de fréquence ce coût définitif est souvent un coût moyen.

Ces provisions peuvent toutefois ne pas être justes et seront alors revues à la hausse (ou à la baisse), en fonction d'informations supplémentaires, ultérieurement. Ce sera ainsi le cas lorsqu'un sinistre RC, estimé et donc provisionné à X euros à un instant t_0 , aura un coût réel de X+200 lors de son règlement définitif en t_{+10} . Ces montants sont alors des **mali** (le terme anglais est IBNER : incurred but not enough reported). Inversement, dans le cas où le coût aurait été sur-estimé, des boni apparaîtront.

Enfin, il ne faut pas oublier qu'en raison du délai existant souvent entre la date de survenance et la date de déclaration, un certain nombre de sinistres, déjà survenus, ne sont toujours pas connus de l'assureur à la fin de l'année calendaire de survenance. Il n'existe donc pas de provisions D/D à ce titre. Ces sinistres, pour lesquels l'année d'ouverture est postérieure à l'année de survenance, sont appelés **tardifs** (IBNR : incurred but not reported). L'assureur doit alors constituer des provisions complémentaires pour y faire face. Tout le problème de l'assureur sera alors de déterminer la meilleure estimation possible du coût de ses sinistres.

III. LES DONNEES ET OUTILS UTILISES.

III.1 Bases de données.

a) Données sélectionnées

Dans un souci de confidentialité, nous avons utilisé les données relatives à une sélection d'affaires issues du portefeuille d'une compagnie française d'assurance IARD.

Ces données sont homogènes dans le temps (elles n'ont notamment pas été impactées par une quelconque migration informatique) et dans leurs caractéristiques (elles n'ont pas été non plus impactées par une fusion entre diverses sociétés).

Nous avons alors reconstitué l'historique « sinistres » des affaires de ce portefeuille.

Il est à noter que ce portefeuille est fermé : il n'y a pas intégration de nouvelles affaires au fil du temps.

Il y a en revanche les sorties naturelles du portefeuille, ce qui explique la décroissance des montants afférents aux années de survenance les plus récentes.

Remarques :

- Les données ont été corrigées des sinistres « Tempête 1999 » et « AZF » qui, par l'ampleur des montants engendrés, risquaient de perturber nos résultats.
- Nous avons travaillé sur les montants de règlements, et n'avons donc pas été soumis à des problèmes de ruptures dans les données suite aux changements de forfait d'ouverture (ceux-ci concernant les provisions Dossier/Dossier n'affectent que les charges observées).
- Notre problématique étant de comparer différentes méthodes de prise en compte de la corrélation, nous sommes partis pour les trois méthodes étudiées des mêmes données, à savoir les triangles de règlements par catégories ministérielles. Cela nous conduira, pour le modèle à choc commun, à adopter une démarche légèrement différente de la démarche théorique (pour laquelle la modélisation du choc commun se fait au niveau du nombre de sinistres).
- Suite aux sélections effectuées, les données sur lesquelles nous avons travaillé sont donc des données intégralement reconstituées (que nous pourrions qualifier de « fictives »), et qui, en tout état de cause, ne sont jamais apparues dans des triangles réels utilisés au sein de la compagnie dont elles sont issues.

b) Ventilation des règlements par catégorie ministérielle et par année d'inventaire

	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	Total
20+21	2 469	3 754	3 304	3 662	3 820	4 447	3 441	3 131	2 557	3 223	2 538	36 346
22C	7 943	27 325	39 738	42 987	43 152	46 589	48 193	61 643	67 729	75 221	47 919	508 441
22M	40 186	61 183	58 413	62 083	64 246	76 387	74 548	89 036	83 297	69 742	46 907	726 028
23	100 763	124 783	121 075	121 003	129 985	134 445	148 070	167 764	158 541	136 079	90 872	1 433 381
24	18 208	28 666	31 453	35 975	40 968	37 524	34 408	29 536	32 441	27 339	14 373	330 890
25	17 897	39 568	54 492	53 919	42 610	41 720	50 708	48 004	48 701	35 249	19 277	452 148
26	2 601	2 546	2 644	4 457	4 330	4 522	5 438	4 327	3 052	3 874	3 248	41 040
27	1 545	7 472	3 208	4 260	4 744	5 084	9 824	9 792	9 175	8 440	6 164	69 708
28	1 474	4 417	6 687	9 819	13 395	13 967	16 228	23 369	24 865	25 301	12 999	152 520
29	494	1 550	1 552	2 229	1 629	2 039	1 672	1 233	894	1 365	954	15 611
30	67	704	929	920	1 033	2 324	335	52	2	1	13	6 380
34	6 903	20 844	29 936	29 979	34 179	31 546	8 134	4 030	2 707	1 932	1 235	171 426
35	1 676	4 111	5 507	6 452	7 139	6 993	10 382	10 722	11 734	10 616	3 590	78 923
36	419	1 217	2 133	3 423	3 768	3 377	3 629	5 469	5 553	6 044	7 014	42 044
38	2	22	364	235	169	228	336	428	256	76	125	2 242
79				1	45	0	920	3	1	0		970
TOTAL	202 649	328 161	361 437	381 404	395 213	411 190	416 266	458 538	451 508	404 504	257 227	4 068 097

c) Ventilation des règlements par année de survenance et par année d'inventaire

	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	Total
1994	202 649	131 855	32 172	16 993	12 390	10 994	6 885	6 461	4 219	2 974	4 402	431 995
1995		196 305	127 374	31 162	13 544	9 989	4 628	7 688	8 639	6 106	1 991	407 426
1996			201 891	135 154	31 037	14 318	11 733	12 303	10 784	9 510	4 315	431 045
1997				198 095	127 644	27 611	17 917	11 481	8 694	9 374	3 868	404 683
1998					210 599	137 358	32 228	17 782	14 714	12 577	4 405	429 663
1999						210 920	143 749	38 052	22 817	17 858	8 856	442 251
2000							199 127	149 564	40 025	26 581	9 400	424 696
2001								215 206	145 094	36 031	16 843	413 174
2002									196 522	117 942	19 486	333 949
2003										165 551	71 973	237 524
2004											111 690	111 690
Total	202 649	328 161	361 437	381 404	395 213	411 190	416 266	458 538	451 508	404 504	257 227	4 068 097

Le détail des montants de règlements, par catégories ministérielles, figure en annexe.

III.2 Outils.

Les principaux outils informatiques à notre disposition sont de 2 types :

- un tableur : Excel
- un logiciel statistique : SAS

Notre outil principal sera plus particulièrement SAS car de par sa puissance et ses fonctionnalités diverses, il nous permet d'effectuer tous types de calculs sur un volume de données important.

PARTIE II : FONDEMENTS THEORIQUES

I. LES METHODES DE CALCUL DES PROVISIONS.

Les triangles de liquidation, qui se présentent ainsi :

Année de survenance	Année de développement			
	0	1	j	n
0				
i			$X_{i,j}$	
n				

permettent de décrire comment la charge de sinistres $X_{i,j}$ de chaque année de survenance i (en lignes) se liquide dans le temps, par année de développement j (en colonnes).

La partie grisée correspond à la partie déjà observée.

Notre objectif est alors de remplir complètement le tableau : la partie non grisée correspondant aux flux non encore observés.

On suppose qu'après n années de développement, le sinistre est entièrement réglé.

La valeur $X_{i,n}$ est appelée ultime et notée $X_{i,\infty}$ ou X_i

Remarque : on peut de la même façon construire des triangles de :

- Primes acquises = $P_{i,j}$

- Règlements = $C_{i,j}$
(ces montants peuvent être des flux annuels ou des montants cumulés depuis l'origine)

- Provisions = $S_{i,j}$

Il existe différentes méthodes de calcul de provisions. La littérature étant abondante sur le sujet, nous nous limiterons à la description des méthodes classiques que nous mettrons en œuvre dans ce mémoire : la méthode Chain-Ladder qui est une méthode déterministe, le modèle de Mack qui correspond à l'extension du modèle Chain-Ladder en stochastique et les modélisations GLM.

I.1. Méthode Chain-Ladder

C'est la méthode de calcul des provisions la plus classique. Elle servira donc de référence tout au long de notre étude.

Les hypothèses de cette méthode sont :

- les années de survenance sont indépendantes entre elles
- les années de développement sont les variables explicatives du comportement des sinistres futurs

① Pour chaque année de développement, on définit le facteur de développement :

$$F_j = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j}}{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j-1}}$$

Ce calcul s'appuie donc sur les données cumulées.

L'hypothèse sous-jacente est donc que ces ratios sont indépendants de l'année d'origine i .

Exemple pour les règlements Dommages Auto :

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1994	100 763	131 698	133 265	133 776	133 862	133 992	134 176	134 216	134 225	134 242	134 256
1995	93 848	123 463	124 471	124 824	124 894	125 030	125 113	125 255	125 275	125 282	
1996	89 894	116 949	117 864	118 232	118 379	118 529	118 642	118 732	118 761		
1997	92 430	119 257	120 321	121 255	121 584	121 802	122 056	122 103			
1998	101 802	132 598	134 536	135 293	135 835	136 193	136 239				
1999	102 018	141 776	144 190	144 916	145 544	145 823					
2000	104 973	150 710	153 480	154 425	154 724						
2001	118 255	162 696	165 867	166 606	166 981						
2002	109 579	144 281	145 909								
2003	95 895	117 343									
2004	66 336										

F_j		1,328	1,013	1,005	1,002	1,002	1,001	1,001	1,000	1,000	1,000
-------	--	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

$$\text{Ainsi : } F_3 = 1,005 = \frac{\sum \text{colonne } j = 3 \text{ encadrée}}{\sum \text{colonne } j = 2 \text{ encadrée}}$$

On peut alors déterminer

$$C_{i,j} = F_j * C_{i,j-1}$$

Exemple : $C_{2001,4} = 1,002 \times 166\,606 = 166\,981$

② En appliquant de manière récursive cette formule, on en déduit le montant des règlements cumulés après k années de développement pour chacune des années de survénance i :

$$C_{i,k} = C_{i,k-i} * \prod_{l=k-i+1}^k F_l$$

Ainsi que l'ultime :

$$C_{i,\infty} = C_i = C_{i,n-i} * \prod_{l=n-i+1}^n F_l$$

La réserve pour la survénance i s'exprime comme $R_i = C_{i,n} - C_{i,n+1-i}$ et la réserve totale pour le risque considéré

$$\text{est égale à } R = \sum_{i=1}^n R_i .$$

I.2 Extension du Chain-Ladder en stochastique : le modèle de Mack

Le but recherché est de pouvoir quantifier la variabilité des réserves estimées, et ce afin de construire des intervalles de confiance sur les estimations faites.

Le modèle stochastique de Mack repose sur 3 hypothèses :

- (1) $E(C_{i,j+1} | C_{i,1}, \dots, C_{i,j}) = C_{i,j} F_{j+1}$ pour $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n-1$
- (2) $\{C_{i,1}, \dots, C_{i,n}\}, \{C_{j,1}, \dots, C_{j,n}\}$ sont indépendants pour $i \neq j$
- (3) $Var(C_{i,j+1} | C_{i,1}, \dots, C_{i,j}) = C_{i,j} \sigma_j^2$ pour $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n-1$

Sous les hypothèses (1) et (2), les estimateurs \hat{F}_j de F_j sont non biaisés et non corrélés.

Sous ces 3 hypothèses, le modèle stochastique de Mack fournit exactement les mêmes réserves que la méthode originale de Chain-Ladder.

On peut exprimer l'erreur carrée moyenne de \hat{R}_i :

$$mse(\hat{R}_i) = \hat{C}_{i,n}^2 \sum_{j=n+1-i}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{F}_j^2} \left(\frac{1}{\hat{C}_{i,j}} + \frac{1}{\sum_{k=1}^{n-j} C_{k,j}} \right)$$

$$\text{où } \hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \hat{F}_j \right)^2$$

$$\text{et } \hat{\sigma}_{n-1}^2 = \min \left(\frac{\hat{\sigma}_{n-2}^4}{\hat{\sigma}_{n-3}^2}, \hat{\sigma}_{n-2}^2 \right)$$

ainsi que l'erreur commise sur la réserve totale estimée \hat{R} :

$$mse(\hat{R}) = \sum_{i=2}^n \left\{ mse(\hat{R}_i) + \hat{C}_{i,n} \left(\sum_{k=i+1}^n \hat{C}_{k,n} \right) \sum_{j=n+1-i}^{n-1} \frac{2\hat{\sigma}_j^2 / \hat{F}_j^2}{\sum_{k=1}^{n-j} C_{k,j}} \right\}$$

I.3 Modèles GLM.

(Generalized Linear Models)

Ces modèles correspondent à une généralisation du modèle linéaire classique, ce sont des modèles statistiques du type « variable à expliquer / variables explicatives ».

Cette famille de modèles permet donc d'étudier la liaison entre une variable dépendante Y et un ensemble de variables explicatives $X_1 \dots X_k$.

Ils ont été introduits par J. Nelder et R. Wedderburn en 1972. Parmi les ouvrages de référence auxquels on pourra se rapporter pour plus d'informations, le plus classique est celui de Mc Cullagh et Nelder (1989).

➤ *Les modèles linéaires généralisés sont formés de 3 composantes :*

① une composante aléatoire Y à laquelle est associée une loi de probabilité $f(y_i, \theta_i, \varphi, \omega_i)$, cette loi appartenant à la famille des exponentielles

② une composante déterministe combinaison linéaire des $X_1 \dots X_k$ appelée prédicteur linéaire :

$$\eta = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_k X_k$$

③ une fonction de lien g entre la composante aléatoire Y et la composante déterministe η , spécifiant comment l'espérance mathématique de Y : $E(Y) = \mu$ est liée au prédicteur linéaire η : $g(\mu) = \eta$

On a alors :

$$(1) \quad f(y_i, \theta_i, \varphi, \omega_i) = \exp \left[\frac{y_i \theta_i - b(\theta_i)}{a(\varphi)} \omega_i + c(y_i, \varphi, \omega_i) \right]$$

$$(2) \quad g(\mu) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_k X_k = \eta$$

La fonction a est une fonction non nulle définie sur les réels

La fonction b est une fonction définie sur les réels et deux fois dérivable

La fonction c est une fonction définie sur \mathbb{R}^2

θ_i est un paramètre réel appelé paramètre canonique ou paramètre de la moyenne

φ est un paramètre réel appelé paramètre de dispersion

On a $\mu = E(Y_i) = b'(\theta_i)$ et on peut donc exprimer θ_i en fonction de $\beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_k X_k$:

$$\theta_i = (b')^{-1}(E(Y_i)) = T(E(Y_i))$$

$$E(Y_i) = g^{-1}(\beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_k X_k)$$

Et donc, (3) $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, $\theta_i = T(E(Y_i)) = (T \circ g^{-1})(\beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_k X_k)$

Le paramètre de dispersion φ est supposé connu. Dans le cas contraire, il est estimé.

Les paramètres $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ (et éventuellement φ) sont estimés par la méthode du maximum de vraisemblance en remplaçant dans la vraisemblance (1), $\theta_1, \dots, \theta_n$ par leur expression donnée dans (3).

La prédiction de l'observation Y_i est définie comme l'estimateur du maximum de vraisemblance $E(Y_i)$:

$$\hat{Y}_i = g^{-1}(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{i1} + \dots + \hat{\beta}_k X_{ik})$$

On montre que $\text{Var}(Y_i) = \varphi b''(\theta_i) = \varphi b''([b^{-1}(\mu)]) = \varphi V(\mu)$

Cette fonction V , qui est donc égale à $V(\mu) = b''(\theta) = b''([b^{-1}(\mu)])$ est appelée fonction variance de la distribution.

➤ *Loi de Poisson sur-dispersée et loi Binomiale Négative:*

Ces 2 lois n'appartiennent pas à la famille des lois exponentielles car elles dépendent d'un paramètre de dispersion aléatoire, elles ne devraient donc pas être possibles dans le cadre d'une modélisation GLM.

① Famille exponentielle des lois de Poisson :

Cette famille est constituée de lois de probabilités p , de support égal à \mathbb{N} , associée chacune de manière injective à un paramètre canonique $\theta \in \mathbb{R}$ par la relation :

$$p(x, \theta) = \frac{1}{x!} \exp(x\theta - e^\theta)$$

$$\text{On a } \lambda = \exp(\theta) = \sum_{x=0}^{+\infty} xp(x, \theta) \quad \text{et} \quad \lambda = \sum_{x=0}^{+\infty} (x - \lambda)^2 p(x, \theta)$$

L'égalité entre la moyenne et la variance d'une loi de Poisson exprimée par les expressions ci-dessus caractérise la famille des lois de Poisson parmi les familles exponentielles de lois de probabilités.

Lorsque le modèle poissonnien n'est pas approprié, il est courant de chercher des familles alternatives de lois de probabilités en se fondant sur la position du rapport $\phi = \frac{\text{variance}}{\text{moyenne}}$ relativement à 1 :

- lorsque ce rapport est significativement supérieur à 1, la situation est qualifiée de sur-dispersion
- si par contre ce rapport est inférieur à 1, on est en situation de sous-dispersion

On a souvent recours à la loi binomiale négative comme alternative à la loi de Poisson lorsqu'il s'avère que la variabilité observée dans les données est significativement supérieure à celle que prévoit le modèle poissonnien.

② Prise en compte de ces lois dans les modèles GLM :

La loi Binomiale Négative $BN(r, \frac{r}{r+\mu})$ à deux paramètres r et μ n'appartient pas au type exponentiel des GLM.

$$\text{On a en effet } P(X = x) = \frac{\Gamma(r+x)}{\Gamma(r)x!} \frac{r^r \mu^x}{(r+\mu)^{r+x}}$$

$$\text{que l'on peut écrire } P(X = x) = \exp\left[x \ln \frac{\mu}{r+\mu} + r \ln \frac{r}{r+\mu} + c(x, r)\right]$$

Cependant si r est donné, on récupère une distribution de type exponentiel avec

$$\theta = \ln \frac{\mu}{r+\mu}, \quad \varphi = 1, \quad E(X) = \mu, \quad V(\mu) = \mu + \frac{\mu^2}{r}$$

Remarque : ce paramètre r est égal à $1/k$, k étant le paramètre de « dispersion » de la loi binomiale négative, fourni par SAS dans la procédure Genmod. Malgré son nom, il faut toutefois prendre garde au fait que ce paramètre k ne correspond pas au paramètre ϕ de dispersion d'un modèle GLM. En effet, ce paramètre ϕ pour une binomiale négative est égal à 1. Ce paramètre r (ou k) est donc un paramètre additionnel dont la valeur doit être fixée ou estimée par maximum de vraisemblance.

De la même façon, dans le cas d'une loi de Poisson sur-dispersée, le domaine de variation de X dépendant de ϕ , cette distribution n'est pas du type exponentiel. Mais, en le fixant, on récupère une distribution de type exponentiel.

Ce paramètre ϕ n'apparaissant pas dans la fonction de densité, on ne peut l'estimer par la méthode du maximum de vraisemblance. On travaillera alors sur des modèles de quasi-vraisemblance.

➤ *Fonction de lien canonique et fonction variance:*

Les fonctions de lien classiques sont les suivantes :

Fonction identité	$g(z) = z$
Fonction logarithme	$g(z) = \text{Log}(z)$
Fonction inverse	$g(z) = 1/z$
Fonction Logit	$g(z) = \text{Log}(z/(1-z))$
Fonction Probit	$g(z) = \Phi(z)$

Où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale $N(0,1)$.

Lorsque la fonction de lien utilisée est la fonction identité, on parle de modèle additif.

Lorsque la fonction de lien utilisée est la fonction logarithme, on parle de modèle multiplicatif.

A toute loi de probabilité de la composante aléatoire est associée une fonction spécifique de l'espérance appelée paramètre canonique : $\theta_i = g_c(\mu_i) = \eta_i$.

La fonction de lien qui utilise le paramètre canonique dans la famille des modèles linéaires généralisés est appelée la fonction de lien canonique, elle correspond donc à la fonction T (égale à la fonction inverse de b') décrite auparavant.

En pratique, dans de nombreux cas les modèles linéaires généralisés sont construits en utilisant la fonction de lien canonique.

Distribution	Fonction de lien canonique $g(\mu)$	Fonction Variance $V(\mu)$
Normale $N(\mu, \sigma^2)$	μ	1
Poisson $P(\mu)$	$\text{Log } \mu$	μ
Gamma $G(\mu, \nu)$	$-1/\mu$	μ^2
Binomiale Négative	$\text{Log}(k\mu / (1+k\mu))$	$\mu+k\mu^2$

➤ *Résidus du modèle:*

Ils sont de 3 types :

- (1) les résidus lignes : c'est la notion classique des résidus c'est-à-dire la différence entre valeur observée et valeur estimée $r_i = y_i - \hat{\mu}_i$

La valeur de $E(r_i)$ doit être proche de 0 car les $\hat{\mu}_i$ sont des estimateurs asymptotiquement sans biais de μ_i .

Graphiquement, les nuages de points de r_i fonction de i , p ou Y_i doivent se répartir autour de l'axe des abscisses.

- (2) les résidus de Pearson : qui sont en fait les résidus lignes « standardisés » $r_{p_i} = \frac{y_i - \hat{\mu}_i}{\sqrt{V(\hat{\mu}_i)}}$

La valeur de $E(r_{p_i})$ doit elle aussi être proche de 0, les nuages de points de r_{p_i} devant de plus avoir une forme cylindrique.

- (3) et enfin les résidus de la déviance : $r_{D_i} = \sqrt{d_i} \text{signe}(y_i - \hat{\mu}_i)$ où d_i représente la contribution de l'observation i à la déviance D

Rappel : définition de la déviance normalisée

On note b l'estimation du maximum de vraisemblance de β .

On note b_{\max} l'estimation des paramètres β du modèle saturé (c'est à dire le modèle ayant la même loi de probabilité et la même fonction de lien mais contenant autant de paramètres que d'observations) alors la déviance normalisée D^* compare le logarithme de la vraisemblance de ces 2 modèles : $D^* = -2[l(b; y) - l(b_{\max}; y)]$

La déviance D s'exprime alors comme $D = \varphi D^*$

Remarque : si φ est inconnu, D^* n'est pas une statistique.

Distribution	φ	Déviance
Normale	σ^2	$\sum_i (y_i - \mu_i)^2$
Binomiale Négative	1	$2 \sum_i \left[y_i \log(y_i / \mu_i) - (y_i + 1/k) \log\left(\frac{y_i + 1/k}{\mu_i + 1/k}\right) \right]$
Poisson	1	$2 \sum_i [y_i \log(y_i / \mu_i) - (y_i - \mu_i)]$
Gamma	$1/v$	$2 \sum_i \left[-\log(y_i / \mu_i) + \frac{y_i - \mu_i}{\mu_i} \right]$

➤ *Adéquation du modèle:*

On utilise couramment deux statistiques pour déterminer l'adéquation du modèle aux données :

- la déviance normalisée (scaled deviance) D^* définie ci-dessus. Lorsque le modèle étudié est exact, on considère que D^* suit approximativement une loi du chi-deux à $n-K$ degrés de liberté. Selon Nelder et Mac Cullagh, cette approximation n'est pas justifiée dans le cas général. Par contre son résultat est exact dans le cas normal.
- la statistique du Chi-deux de Pearson : $\chi^2 = \sum (y_i - \hat{\mu}_i)^2 / V(\hat{\mu}_i)$. De même que pour la déviance, si le modèle est exact, cette statistique est distribuée approximativement selon une loi du Chi-deux à $n-K$ degrés de liberté.

Lorsque le paramètre de dispersion ϕ est inconnu, on peut utiliser ces statistiques pour l'estimer, on a ainsi :

A partir de la déviance : $\hat{\phi} = \frac{D}{n-K}$

A partir du Chi-deux de Pearson : $\hat{\phi} = \frac{\chi^2}{n-K}$

Remarques :

Dans les cas de lois binomiale ou de Poisson, pour lesquelles ce paramètre ϕ est supposé égal à 1, si la déviance normalisée ou le Chi-deux de Pearson normalisé sont nettement supérieurs à 1, on parle de sur-dispersion.

Dans ce cas, on modifie la fonction $V(\mu)$ en la multipliant par ϕ .

La sur-dispersion n'intervient pas au niveau de l'estimation de β . La matrice de variance-covariance est quant à elle multipliée par ϕ , alors que la déviance normalisée et la log-vraisemblance sont divisées par ϕ .

Le modèle est d'autant mieux ajusté aux données que ces indicateurs, D et χ^2 , prennent de faibles valeurs.

Cependant ces statistiques ne permettent la comparaison directe de modèles que s'ils sont issus d'une même composante aléatoire (mêmes fonctions variance V et, éventuellement, ϕ).

Nelder a alors introduit la notion de quasi-vraisemblance étendue q^+ afin de permettre une totale comparaison de modèles GLM,

$$-2q^+(x, \mu) = \frac{1}{\phi} \sum_{i+j \leq n} d_{ij} + \sum_{i+j \leq n} \ln[2\pi \phi V(x_{ij})]$$

Avec $D = \sum_{i+j \leq n} d_{ij}$ la quasi-déviance et $d_{ij} = 2 \int_{\mu_{ij}}^{x_{ij}} \frac{x_{ij} - u}{V(u)} du$

La statistique q^+ , à maximiser, permet de comparer des modèles à structures (V, ϕ, g) différentes.

Remarque : Il est équivalent de minimiser $-2q^+$.

➤ *Estimation de la moyenne:*

$$\text{On a } \mu_i = E(Y_i) = g^{-1}(x_i'\beta)$$

Pour obtenir l'intervalle de confiance de μ_i , on utilisera l'intervalle de confiance de $x_i'\beta$:

la variance de $x_i'\beta$ étant estimée par $x_i'J^{-1}x_i$ (où J désigne la matrice d'information), l'intervalle de confiance de μ_i d'ordre $1-\alpha$ est donné par la formule :

$$g^{-1}\left(x_i \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{x_i'J^{-1}x_i}\right)$$

avec $z_{1-\alpha/2}$ = le fractile d'ordre $1-\alpha/2$ d'une loi normale réduite.

➤ *Estimation de la variance:*

$$\text{On a } V(Y_i) = \phi b''[b^{-1}(\mu_i)] = \phi V(\mu_i)$$

$$\text{Et } \mu_i = g^{-1}(\eta_i)$$

L'expression de la variance des provisions estimées par exercice de survenance s'écrit :

$$V[\hat{E}(R_i)] = \sum_{j=n-i+1}^n V(\hat{\mu}_{ij}) + \sum_{j_1=n-i+1}^n \sum_{j_2=n-i+1}^n \text{cov}(\hat{\mu}_{ij_1}, \hat{\mu}_{ij_2}) \quad \text{pour } j_1 \neq j_2$$

Et celle des provisions estimées totales :

$$V[\hat{E}(R)] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=n-i+1}^n V(\hat{\mu}_{ij}) + \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \sum_{j_1=n_1-i_1+1}^n \sum_{j_2=n_2-i_2+1}^n \text{cov}(\hat{\mu}_{i_1j_1}, \hat{\mu}_{i_2j_2}) \quad \text{pour } i_1 \neq i_2$$

Le calcul de $V(\hat{\mu}_{ij})$ ainsi que des covariances $\text{Cov}(\hat{\mu}_{i_1j_1}, \hat{\mu}_{i_2j_2})$ est complexe à obtenir.

Par le biais de la méthode Delta, nous pouvons par contre obtenir des expressions asymptotiques :

$$V_{as}(\hat{\mu}_i) = \left[(g^{-1})'(\eta_i)\right]^2 \sigma_{as}^2(\hat{\eta}_i)$$

$$\text{Avec } \sigma_{as}^2(\hat{\eta}_i) = \sum_i \sigma_{as}^2(\hat{\beta}_i) + \sum_i \sum_{j \neq i} \text{cov}_{as}(\hat{\beta}_i, \hat{\beta}_j)$$

Remarque : Nous nous limiterons volontairement à la variance des $\hat{\mu}_{ij}$, qui nous sera indispensable dans la suite de notre étude.

Un autre moyen d'estimer cette variance est d'utiliser la technique du Bootstrap.

II. DEPENDANCE ENTRE BRANCHES.

II.1 Corrélation

a) Notions de corrélation

➤ *Corrélation et dépendance*

Par abus de langage, on parle souvent de corrélation en lieu et place de dépendance. La corrélation (souvent appelée corrélation linéaire), permet de rendre compte d'une dépendance existant entre 2 variables linéairement liées. La dépendance englobe ce type de liaison, mais aussi les liaisons non linéaires.

Ce mémoire a pour but de quantifier et comparer différentes méthodes de prise en compte de la dépendance sur le niveau de provisionnement et sa variabilité. Il faut donc entendre, dans le titre « Provisionnement et corrélation entre branches » non pas l'étude d'une simple corrélation linéaire, mais celle de la dépendance. Cet abus de langage, pratiqué par un certain nombre de personnes y compris les praticiens, est de plus entretenue par les définitions qui en sont données dans de nombreux ouvrages.

➤ *Définition générale*

« La corrélation est la dépendance réciproque de deux phénomènes qui varient simultanément, qui sont fonction l'un de l'autre ou qui manifestent un lien de cause à effet. »

Il faut toutefois prendre garde de ne pas confondre corrélation et causalité.

Ainsi, deux éléments peuvent être corrélés car influencés par un troisième élément sans présenter pour autant un lien de cause à effet entre eux.

De plus, comme précisé dans le paragraphe précédent, la non-corrélation n'est pas nécessairement l'indépendance. Un exemple classique de dépendance pour lequel le coefficient de corrélation linéaire est nul sera donné ultérieurement lorsque nous traiterons du coefficient de corrélation linéaire de Pearson.

L'indépendance entre 2 variables X et Y se caractérise par l'équation suivante : $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$ qui signifie que la fonction de répartition jointe est égale au produit des fonctions de répartition marginales.

➤ *En statistique*

En statistique, le coefficient de corrélation est un indice mesurant le degré de liaison entre deux variables.

On dit qu'il y a corrélation entre deux variables X et Y s'il y a dépendance en moyenne :

A $X=x$ fixé, la moyenne $E(Y)$ est fonction de x .

Lorsque la liaison existant entre X et Y est linéaire, on se trouve dans le cas de la corrélation linéaire.

Lorsque l'on étudie la corrélation existant entre variables numériques, le coefficient le plus utilisé est le coefficient de corrélation linéaire dit de « Bravais-Pearson » qui mesure le caractère plus ou moins linéaire de la liaison. Lorsque l'on étudie la liaison entre variables ordinales, on étudie la corrélation des rangs par le biais des coefficients de Spearman et de Kendall.

b] Coefficients de corrélation

➤ coefficient de Daniels

Si l'on considère, pour toute paire d'observations i et j , deux indices a_{ij} et b_{ij} associé respectivement à X et à Y , le coefficient de Daniels s'exprime comme :

$$\frac{\sum \sum a_{ij} b_{ij}}{\sqrt{(\sum \sum a_{ij}^2)(\sum \sum b_{ij}^2)}}$$

Ce coefficient varie entre -1 et 1 : les valeurs négatives indiquant une corrélation négative (X et Y varient en sens inverse) et les valeurs positives une corrélation positive (X et Y varient dans le même sens), et si ce coefficient est égal à 0 , X et Y sont non-corrélées (mais pas forcément indépendantes).

➤ coefficient de corrélation linéaire (de Pearson)

Le coefficient de corrélation linéaire $\rho(X, Y)$ entre deux variables aléatoires X et Y est :

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}}$$

Il correspond au coefficient de Daniels dans le cas où $a_{ij} = x_i - x_j$ et $b_{ij} = y_i - y_j$.

Ce coefficient est très sensible aux valeurs extrêmes.

Voici l'exemple classique où le coefficient de corrélation est nul mais X et Y sont dépendantes : $X \approx \text{Nor}(0,1)$ et $Y = X^2$.

Les 2 coefficients suivants, basés sur la corrélation des rangs, sont en fait des coefficients de dépendance monotone et contrairement au coefficient de Pearson, ils sont robustes car non-sensibles aux valeurs extrêmes.

➤ Coefficient de corrélation de Kendall

Le τ de Kendall entre 2 variables aléatoires X et Y est :

$$\tau(X, Y) = P[(X-X')(Y-Y') > 0] - P[(X-X')(Y-Y') < 0]$$

où (X', Y') est un vecteur aléatoire identique à (X, Y)

$P[(X-X')(Y-Y') > 0]$ est la probabilité de concordance (probabilité que X et Y varie dans le même sens)

$P[(X-X')(Y-Y') < 0]$ est la probabilité de discordance (probabilité que X et Y varie en sens contraire)

Il correspond au coefficient de Daniels dans le cas où $a_{ij} = \text{signe de } (x_i - x_j)$ et $b_{ij} = \text{signe de } (y_i - y_j)$:

$$a_{ij} = \frac{x_i - x_j}{|x_i - x_j|} \quad \text{et} \quad b_{ij} = \frac{y_i - y_j}{|y_i - y_j|}$$

➤ *Coefficient de corrélation de Spearman*

Le ρ_s de Spearman entre 2 variables aléatoires X et Y est :

$$\rho_s = 3 (P[(X-X')(Y-Y^*) > 0] - P[(X-X')(Y-Y^*) < 0])$$

où (X', Y') et (X^*, Y^*) sont des vecteurs aléatoires identiques à (X, Y)

On peut aussi l'exprimer comme

$$\rho_s = \rho (F_X(X), F_Y(Y))$$

Il est donc égal au coefficient de corrélation linéaire de Pearson appliqué aux fonctions de répartition de X et Y. Il correspond au coefficient de Daniels dans le cas où $a_{ij} = r_i - r_j$ et $b_{ij} = s_i - s_j$ où r et s sont les rangs de classement selon X et Y.

c] Notions de dépendance

➤ *Dépendance Positive (resp. Négative) par Quadrant :*

On dit que $X=(X_1, X_2)$ de fonction de répartition F_X est **Dépendante Positivement par Quadrant (DPQ)** lorsque $\bar{F}_X(x_1, x_2) \geq \bar{F}_1(x_1) \cdot \bar{F}_2(x_2)$ pour tout $x_1, x_2 \in \mathfrak{R}$

On a alors $\Pr [X_2 \geq x_2 | X_1 \geq x_1] \geq \Pr [X_2 \geq x_2]$ et $\rho (X_1, X_2) \geq 0$, $\rho_s (X_1, X_2) \geq 0$ et $\tau (X_1, X_2) \geq 0$.

Remarque : si X et Y sont DPQ, alors $\text{cov}(X, Y) \geq 0$.

On dit que $X=(X_1, X_2)$ de fonction de répartition F_X est **Dépendante Négativement par Quadrant (DNQ)** lorsque $F_X(x_1, x_2) \leq F_1(x_1) \cdot F_2(x_2)$ pour tout $x_1, x_2 \in \mathfrak{R}$

➤ *Dépendance Parfaite :*

On parle de dépendance parfaite lorsque deux risques peuvent s'écrire comme des fonctions croissantes ou décroissantes d'une même variable aléatoire sous-jacente.

La comonotonie est le cas de Dépendance Totale Positive :

On dit que $X=(X_1, X_2)$ de fonction de répartition F_X est **Comonotone** si $\exists g_1$ et g_2 des fonctions non décroissantes et Z une variable aléatoire telles que $X = \text{loi} (g_1(Z), g_2(Z))$.

On a alors $\rho_s (X_1, X_2) = 1$ et $\tau (X_1, X_2) = 1$.

L'antimonotonie est le cas de Dépendance Totale Négative :

On dit que $X=(X_1, X_2)$ de fonction de répartition F_X est **Antimonotone** si $\exists g_1$ une fonction non-décroissante, g_2 une fonction non-croissante et Z une variable aléatoire telles que $X = \text{loi} (g_1(Z), g_2(Z))$.

On a alors $\rho_s (X_1, X_2) = -1$ et $\tau (X_1, X_2) = -1$.

➤ *Dépendance de queue :*

Introduisons la notion de mesures de dépendance quantile-quantile :

$$\lambda_U(\alpha) = \Pr \left[X_2 > F_2^{-1}(\alpha) \mid X_1 > F_1^{-1}(\alpha) \right] \quad \text{et} \quad \lambda_L(\alpha) = \Pr \left[X_2 < F_2^{-1}(\alpha) \mid X_1 < F_1^{-1}(\alpha) \right]$$

Alors, on parle de **Upper Tail Dependence** quand $\lambda_U = \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \lambda_U(\alpha) > 0$. Il s'agit de la probabilité que X_2 soit extrême sachant que X_1 est extrême, ce qui justifie son appellation de dépendance dans les valeurs extrêmes.

Et on parle de **Lower Tail Dependence** quand $\lambda_L = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \lambda_L(\alpha) > 0$. Il s'agit alors de la probabilité que X_2 soit petit sachant que X_1 est petit, ce qui justifie ici son appellation de dépendance dans les valeurs petites.

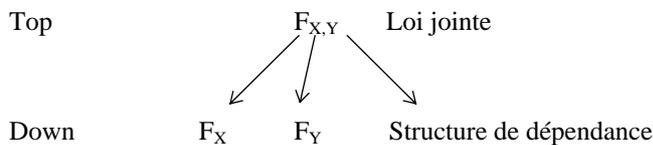
d] Approches retenues

Une fois la dépendance établie entre variables, le problème sera de déterminer l'influence de cette dépendance dans les calculs effectués.

Traditionnellement, 2 approches existent pour prendre en compte cette dépendance :

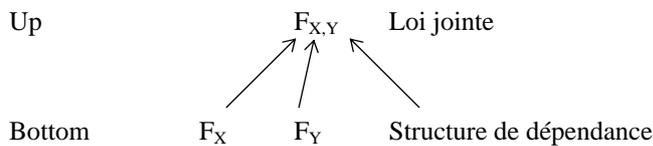
① L'approche Top-down :

C'est l'approche standard, elle consiste en la donnée directe de la loi jointe $F_{X,Y}$: il s'agit donc de la construction de modèles bivariés



② L'approche Bottom-up:

Dans cette approche, on part des marginales et de la structure de dépendance pour obtenir la loi bivariée :



Partant des mêmes éléments de départ (données et hypothèses), nous avons décidé de mettre en œuvre trois techniques pour prendre en compte la dépendance :

- la première consistera à utiliser la technique du Bootstrap, pour laquelle la connaissance de la fonction de distribution conjointe et de la corrélation existante n'est pas utile
- la seconde se placera dans le cadre du modèle à chocs communs (approche Top-Down)
- la troisième utilisera le concept de copule (approche Bottom-Up)

Nous comparerons ensuite les résultats obtenus selon ces trois techniques, notamment en terme de Value-at-Risk.

II.2 Bootstrap

a) Idée fondatrice

On cherche à trouver des techniques permettant d'obtenir des notions de variance afin de déterminer des intervalles de confiance dès que la théorie ne s'applique pas.

La technique du Bootstrap, dont l'idée est due à Efron, est une méthode de ré-échantillonnage utilisée pour estimer, de manière robuste, la variabilité d'un paramètre.

Elle consiste à effectuer n tirages avec remises au sein d'un même échantillon de n valeurs. On parvient ainsi à simuler la variabilité du phénomène dans le but d'approcher les lois des caractéristiques liées à l'échantillon.

L'idée est que si n est grand, la distribution empirique sera une bonne approximation de la loi suivie.

On substitue donc à des calculs complexes l'usage du principe de substitution et de simulations de Monte-Carlo à partir de l'échantillon originel.

Ainsi, si on a un n -échantillon i.i.d (Y_1, \dots, Y_n) d'une variable aléatoire Y de fonction de répartition F , et $y = (y_1, \dots, y_n)$ une réalisation.

Soit $\pi(F)$ un paramètre d'intérêt. On recherche alors la distribution de $\pi(F)$.

Si F est inconnue ou trop complexe, on simulera, par la technique du Bootstrap, une distribution proche de F et on utilisera alors la fonction de répartition des valeurs observées : $F_n \sim F$

b) Méthode du Bootstrap

➤ *Principe de substitution*

Si on note :

F la fonction de répartition inconnue, F_n la fonction de répartition empirique de l'échantillon, $\pi(F)$ le paramètre que l'on cherche à estimer et T_n un estimateur de ce paramètre, alors les espérance et variance de cet estimateur ont pour expression :

$$E(T_n) = \int \dots \int T(y_1, \dots, y_n) dF(y_1) \dots dF(y_n)$$

$$V(T_n) = \int \dots \int [T(y_1, \dots, y_n) - E(T_n)]^2 dF(y_1) \dots dF(y_n)$$

On utilise alors le théorème de Glivenko, qui énonce que la fonction de répartition empirique d'un échantillon iid converge uniformément vers la fonction de répartition de ce même échantillon. On remplace donc F par F_n . Ce qui nous conduit aux expressions des estimateurs de $E(T_n)$ et $V(T_n)$ appelés Espérance Bootstrap et Variance Bootstrap de T_n :

$$E_{Boot}(T_n) = \int \dots \int T(y_1, \dots, y_n) dF_n(y_1) \dots dF_n(y_n)$$

$$V_{Boot}(T_n) = \int \dots \int [T(y_1, \dots, y_n) - E_{Boot}(T_n)]^2 dF_n(y_1) \dots dF_n(y_n)$$

L'expression de la variance Bootstrap étant bien souvent trop complexe à décrire de manière analytique, on la détermine en ayant recours aux méthodes de Monte-Carlo.

➤ Simulation de Monte-Carlo

On tire B échantillons indépendants de F_n .

Pour chaque $b=1, \dots, B$, on obtient T_n^{*b} une valeur Bootstrap de T_n .

La variance empirique obtenue s'exprime alors par $V_{Boot}^{(B)} = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B (T_n^{*b} - \bar{T}_n^*)^2$ où $\bar{T}_n^* = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B T_n^{*b}$

Et d'après la loi des grands nombres, $V_{Boot}^{(B)} \xrightarrow[B \rightarrow +\infty]{P} V_{Boot}$

On approximera ensuite $MSE(T_n)$ par $MSE_{Boot}^{(B)} = \frac{1}{B} \sum [T(Y_1^{*b}, \dots, Y_n^{*b}) - \pi(F_n)]^2$

Dans le cadre de cette étude, le Bootstrap va nous aider à estimer la variance dans nos modèles.

Nous connaissons en effet déjà les lois marginales suivies car nous allons partir des modélisations GLM effectuées auparavant. Nous avons vu lors de ces modélisations que la variance était difficile à calculer et nous avons déjà évoqué à ce moment-là l'usage du Bootstrap pour en avoir une estimation de manière aisée.

c] Simulation de Monte-Carlo

Les méthodes de Monte-Carlo visent à simuler une variable aléatoire n fois de façon indépendante afin de déterminer les paramètres d'un modèle dont le calcul explicite serait trop complexe, elles consistent donc en une approximation numérique de ces calculs.

Elles peuvent servir pour :

- le calcul d'intégrale ou d'espérance de variable aléatoire
- la résolution d'équation aux dérivées partielles
- la résolution de système linéaire
- la résolution de problème d'optimisation

Elles reposent sur la loi forte des grands nombres :

Soit $X_i, i \geq 1$, une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi que X , avec $E(|X|) < +\infty$

Alors pour ω une réalisation de X ,

$$E(X) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} (X_1(\omega) + \dots + X_n(\omega))$$

Si de plus $E(X^2) < +\infty$ alors, d'après le Théorème Central-Limit, on a

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{E(X^2) - (E(X))^2}} \varepsilon_n \xrightarrow[loi]{} Normale(0,1)$$

avec $\varepsilon_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - E(X)$ l'erreur

➤ *Méthode d'inversion (ou de la fonction de répartition):*

Soit X une variable aléatoire réelle et $F(x)$ sa fonction de répartition : $F(x) = P [X \leq x]$, F est donc une fonction croissante et continue à droite.

On définit la fonction pseudo-inverse de F sur $[0,1]$ par $F^{-1}(u) = \inf \{y \in \mathbf{R}, F(y) \geq u\}$

Par définition $\{F^{-1}(u) \leq x\} \Leftrightarrow \{u \leq F(x)\}$

De plus, on sait que si U suit une loi uniforme sur $[0,1]$, la variable $F^{-1}(U)$ suit une loi de fonction de répartition F .

Donc $P [F^{-1}(U) \leq x] = P [U \leq F(x)] = F(x) = P [X \leq x]$ et par-là même $F^{-1}(U)$ et X ont même loi car même fonction de répartition.

D'où la méthode de simulation de X : (si $F^{-1}(u)$ s'exprime de façon explicite)

- on calcule F^{-1}
- on simule (U_1, \dots, U_n) un échantillon de variables de loi uniforme sur $[0,1]$
- $(F^{-1}(U_1), \dots, F^{-1}(U_n))$ donne un échantillon selon la loi de X

➤ *Méthode de rejet :*

On veut simuler une variable aléatoire de loi de densité f .

On sait simuler une variable aléatoire de loi de densité g avec $f(x) \leq k g(x)$ où k est une constante réelle.

On appelle $\alpha(x) = \frac{f(x)}{k g(x)}$.

Alors, si X est une variable aléatoire de densité g et U une loi uniforme sur $[0,1]$ indépendante de X , la loi conditionnelle de X sachant $U < \alpha(x)$ a pour densité f .

La méthode de rejet de Von Neumann consiste alors :

- à simuler une suite $(Y_i, i \geq 1)$ de variables aléatoires i.i.d de loi de densité g
- à simuler une suite $(U_i, i \geq 1)$ de variables aléatoires i.i.d de loi uniforme sur $[0,1]$ indépendantes des $(Y_i, i \geq 1)$
- à tirer Y selon la loi de densité g jusqu'à ce que $U_p \leq \alpha(Y_p)$, alors $X = Y_p$.

p est alors le nombre d'essais nécessaires pour obtenir la condition d'acceptation de la valeur de Y , et on peut

écrire X sous la forme $X = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n 1_{\{p=n\}}$

La probabilité d'acceptation de Y_i est de $\frac{1}{k}$, on a donc intérêt à prendre la plus petite valeur possible de k , pour

que cette probabilité d'acceptation soit la plus grande possible. Ce sera notamment le cas lorsque les courbes de f et de kg sont tangentes.

d] Dans le cadre d'un modèle linéaire

Il existe deux approches alternatives pour pratiquer le Bootstrap dans le cadre d'un modèle linéaire :

- le Bootstrap sur les observations (Data resampling)
- le Bootstrap sur les résidus (Residual resampling)

En effet, dans la théorie, le Bootstrap doit s'appliquer sur des données indépendantes, identiquement distribuées (iid). Or dans le cadre de modèles linéaires, les données sont indépendantes mais non identiquement distribuées. Il est alors préférable de travailler sur les résidus.

Pratiquer un Bootstrap sur les observations ou sur les résidus n'est pas équivalent pour les petits échantillons mais l'est asymptotiquement.

L'inconvénient est que le Bootstrap sur les résidus nécessite une modélisation, et que ce modèle soit approprié. De plus, les variables explicatives doivent être certaines et les résidus iid.

En revanche, l'avantage de cette méthode est de conserver l'information des variables explicatives.

Le problème est alors de déterminer sur quels résidus pratiquer le Bootstrap.

e] Prise en compte de la corrélation dans le Bootstrap

- *1^{ère} approche possible :*

Ne connaissant pas la corrélation existant entre deux risques, une technique de prise en compte de cette corrélation dans le cadre du Bootstrap serait de retenir, pour une même simulation b , sur le risque B le paramètre de variabilité ayant même année de survenance et même année de développement que celui tiré aléatoirement pour le risque A.

Ainsi, par exemple :

Risque A :	Ré échantillonnage aléatoire							
(1A,1A)	(1A,2A)	(1A,3A)	(2A,2A)	(3A,1A)	(1A,1A)			
(2A,1A)	(2A,2A)		(1A,3A)	(2A,1A)				
(3A,1A)			(1A,2A)					
Risque B :	Rééch. aléatoire non corrélé			Rééch. aléatoire corrélé				
(1B,1B)	(1B,2B)	(1B,3B)	(3B,1B)	(1B,2B)	(2B,1B)	(2B,2B)	(3B,1B)	(1B,1B)
(2B,1B)	(2B,2B)		(2B,2B)	(1B,1B)		(1B,3B)	(2B,1B)	
(3B,1B)			(1B,3B)			(1B,2B)		

- *2^{ème} approche possible :*

Cette approche, inspirée des travaux de Kirschner, suggère une méthode en 2 étapes pour intégrer la corrélation dans le calcul des réserves. Cette procédure consiste d'une part en la génération de N simulations des réserves à estimer (via la technique du Bootstrap par exemple) et d'autre part à la prise en compte d'une matrice de corrélation de rangs.

De manière plus précise :

- On génère N simulations des paiements pour chaque cellule du triangle des deux catégories ministérielles étudiées (par Bootstrap)
- On calcule le rang de chaque simulation, pour chaque cellule
- On génère autant de simulations bivariées issues d'une loi normale avec la matrice de corrélation, que l'on a généré de simulations de réserves à estimer pour chaque cellule du triangle (donc N couples de valeur pour chaque cellule)
- On calcule les couples de rang issus de ces simulations de normales bivariées
- On ré-ordonne pour chaque cellule du triangle les couples de catégories ministérielles obtenus par simulation selon les couples de rang précédents.

Par exemple, pour 5 simulations :

Simulation	Variable n°1		Variable n° 2		rangs d'une normale bivariée (r=0,5)		
	Valeur	Rang	Valeur	Rang	X	Y indep	Y corrélée
1	100	1	200	2	1	3	3
2	200	2	700	5	2	4	2
3	300	3	100	1	3	5	4
4	400	4	300	3	4	2	5
5	500	5	500	4	5	1	1

Simulation indépendante					Simulation corrélée				
Variable n°1		Variable n° 2		Agrégation	Variable n°1		Variable n° 2		Agrégation
Rang	Valeur	Rang	Valeur	Z=var1+var2	Rang	Valeur	Rang	Valeur	Z=var1+var2
1	100	3	300	400	1	100	3	300	400
2	200	4	500	700	2	200	2	200	400
3	300	5	700	1000	3	300	4	500	800
4	400	2	200	600	4	400	5	700	1100
5	500	1	100	600	5	500	1	100	600

$$E(Z_{\text{indep}}) = 660$$

$$\sigma(Z_{\text{indep}}) = 219$$

$$E(Z_{\text{corr}}) = 660$$

$$\sigma(Z_{\text{corr}}) = 297$$

Remarques :

Cette méthode nécessite donc la connaissance de la matrice de corrélation des rangs.

De plus, en ne retenant qu'un coefficient de corrélation de rang pour tout le triangle, on suppose la constance de ce coefficient dans toutes les cellules du triangle.

II.3 Modèle à chocs communs

Ce modèle suppose que deux variables aléatoires peuvent être corrélées par le biais d'un même paramètre externe.

Ainsi, le modèle s'écrira :

$$X_j = X_{ja} \oplus X_{jb} \quad \text{pour } j=1, \dots, k$$

avec X_{ja} et X_{jb} indépendants i.e la variable aléatoire X_j peut se décomposer en deux éléments indépendants.

Si de plus, $X_{1a} = \dots = X_{ka} = X_0$ et que les X_{ib} sont indépendants, alors $\text{Cov}(X_i, X_j) = \text{Var}(X_0)$.

La seule source de corrélation provient donc de la variable X_0 qui constitue le choc commun.

Remarques :

Dans la littérature sur le sujet, cette modélisation est appliquée aux nombres de sinistres dans le cadre d'un modèle Poisson-composé.

Pour notre étude, nous ne possédons que les triangles de règlements des sinistres. Nous avons alors décidé d'essayer d'adapter ce modèle à nos données, sachant que les lois couramment utilisées dans les modèles à choc commun (Poisson et Gamma) auront déjà été estimées sur nos données dans le cadre de la modélisation GLM précédente.

Ce choc commun peut-être :

- une modification touchant par exemple le montant des indemnités dans le cadre de sinistres corporels comme le coût de la Tierce Personne et qui affectera donc toutes les branches ministérielles impactées par des sinistres corporels comme la RC Corporelle Automobile, les Dommages Corporels ou les sinistres RC Générale corporels (comme les sinistres RC Médicale)
- un évènement naturel tel que les Tempêtes de 1999 qui ont touché les risques Automobiles et DAB
- ...

Ainsi, en ayant calculé les paramètres des lois de X_1 et X_2 par une modélisation GLM, il suffit de calculer la covariance entre les deux variables pour spécifier tous les paramètres du modèle à choc commun.

a] Détermination de la covariance

Notre premier problème va donc être de déterminer la covariance entre les catégories ministérielles étudiées. Nous rappelons que notre modélisation GLM nous a amené à estimer une distribution du même type, mais avec des paramètres différents pour chaque cellule des triangles dont nous disposons. Nous ne possédons donc qu'une observation pour chaque C_{ij} .

Il nous est donc impossible de déterminer une covariance empirique, pour chaque cellule.

Nous allons alors faire les hypothèses que le coefficient de corrélation linéaire calculé sur l'ensemble du triangle est le coefficient de corrélation réel (et non pas une variable aléatoire) et qu'il est le même en chaque cellule du triangle.

Sous ces hypothèses, en utilisant la définition du coefficient de corrélation linéaire ainsi que les variances des C_{ij} estimées par le modèle GLM, on peut estimer la covariance de chaque cellule :

$$\text{Cov}(C_{ij}^1, C_{ij}^2) = \rho_{C^1, C^2} \cdot \sqrt{\text{Var}(C_{ij}^1) \text{Var}(C_{ij}^2)}$$

Remarque :

Même si on conserve le même coefficient de corrélation pour toutes les cellules du triangle à estimer, on aura un modèle à choc commun avec des paramètres différents pour chaque cellule i.e un modèle à choc commun différent par année de survenance et année de développement.

b] Avec une loi de Poisson :➤ *Loi de Poisson :*

Si $X \approx P(\lambda)$ alors la fonction de densité de X s'écrit $f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$

Et on a $E(X) = \lambda$ et $V(X) = \lambda$

Si $X \approx P(\lambda)$ et $Y \approx P(\mu)$ et X et Y indépendantes, alors $(X + Y) \approx P(\lambda + \mu)$

➤ *Modèle à choc commun :*

Soient X_1 et X_2 deux variables de Poisson pouvant se décomposer en

$$X_1 = X_{1b} \oplus X_0 \text{ et } X_2 = X_{2b} \oplus X_0$$

Avec $X_{1b} \approx P(\lambda_{1b})$, $X_{2b} \approx P(\lambda_{2b})$ et $X_0 \approx P(\lambda_0)$, X_{1b} , X_{2b} et X_0 étant des variables indépendantes

Alors les paramètres de X_1 et X_2 sont : $X_1 \approx P(\lambda_1)$ et $X_2 \approx P(\lambda_2)$ avec $\lambda_1 = \lambda_{1b} + \lambda_0$ et $\lambda_2 = \lambda_{2b} + \lambda_0$

Et on a : $\text{Cov}(X_1, X_2) = \text{Var}(X_0) = \lambda_0$

➤ *Intégration de la sur-dispersion :*

On rappelle que si $X \approx P_{\text{surdisp } \phi}(\lambda)$, alors $X / \phi \approx P(\lambda / \phi)$.

On pourra dès lors écrire :

$$Z_1 = X_1 / \phi_1 = X_{1b} \oplus X_0 \text{ et } Z_2 = X_2 / \phi_2 = X_{2b} \oplus X_0$$

Avec $X_{1b} \approx P(\lambda_{1b})$, $X_{2b} \approx P(\lambda_{2b})$ et $X_0 \approx P(\lambda_0)$, X_{1b} , X_{2b} et X_0 étant des variables indépendantes

Alors $Z_1 \approx P(\lambda_1)$ et $Z_2 \approx P(\lambda_2)$ et $X_1 = \phi_1 \cdot Z_1$, $X_2 = \phi_2 \cdot Z_2$ avec $\lambda_1 = \lambda_{1b} + \lambda_0$ et $\lambda_2 = \lambda_{2b} + \lambda_0$

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = \text{Cov}(\phi_1 Z_1, \phi_2 Z_2) = \phi_1 \phi_2 \text{Cov}(Z_1, Z_2) = \phi_1 \phi_2 \text{Var}(X_0) = \phi_1 \phi_2 \lambda_0$$

Il suffira donc de déterminer les paramètres des lois de Poisson de X_1 : $E(X_1) = \lambda_1$ et X_2 : $E(X_2) = \lambda_2$, ainsi que leur covariance et ϕ_1 et ϕ_2 afin de spécifier tous les paramètres du modèle à choc commun.

c] Avec une loi Gamma :

➤ *Loi de Gamma* :

Si $X \approx \text{Gamma}(\alpha, 1)$ alors $f(x) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-x}}{\Gamma(\alpha)}$

et $Y = \beta X \approx \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ avec $f(y) = \frac{y^{\alpha-1} e^{-y/\beta}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}$

Et on a $E(Y) = \alpha \beta$ et $V(Y) = \alpha \beta^2$

Si $X \approx \text{Gamma}(\alpha_1, 1)$ et $Y \approx \text{Gamma}(\alpha_2, 1)$ et X et Y indépendantes, alors $(X + Y) \approx \text{Gamma}(\alpha_1 + \alpha_2, 1)$

➤ *Modèle à choc commun* :

Soient $Z_1 = X_1 / \beta_1 = X_{1b} \oplus X_0$ et $Z_2 = X_2 / \beta_2 = X_{2b} \oplus X_0$

Avec $X_{1b} \approx \text{Gamma}(\alpha_{1b}, 1)$, $X_{2b} \approx \text{Gamma}(\alpha_{2b}, 1)$ et $X_0 \approx \text{Gamma}(\alpha_0, 1)$ indépendantes

Alors $Z_1 \approx \text{Gamma}(\alpha_1, 1)$ et $X_1 = \beta_1 \cdot Z_1 \approx \text{Gamma}(\alpha_1, \beta_1)$ avec $\alpha_1 = \alpha_{1b} + \alpha_0$

et $Z_2 \approx \text{Gamma}(\alpha_2, 1)$ et $X_2 = \beta_2 \cdot Z_2 \approx \text{Gamma}(\alpha_2, \beta_2)$ avec $\alpha_2 = \alpha_{2b} + \alpha_0$

Et $\text{Cov}(X_1, X_2) = \text{Cov}(\beta_1 Z_1, \beta_2 Z_2) = \beta_1 \beta_2 \text{Cov}(Z_1, Z_2) = \beta_1 \beta_2 \text{Var}(X_0) = \beta_1 \beta_2 \alpha_0$

Il suffira donc de déterminer les paramètres des lois de Gamma

de X_1 : $E(X_1) = \alpha_1 \beta_1$ et $V(X_1) = \alpha_1 \beta_1^2$

de X_2 : $E(X_2) = \alpha_2 \beta_2$ et $V(X_2) = \alpha_2 \beta_2^2$

ainsi que leur covariance afin de spécifier tous les paramètres du modèle à choc commun.

II.4 La théorie des copules

a) Définition et propriétés

Une copule est une fonction qui lie des marginales pour générer la loi jointe.

L'idée de base est de séparer la structure de dépendance (représentée par la copule) des marginales.

➤ Définition :

Une copule est définie comme étant une fonction de répartition multivariée ayant des lois marginales uniformes sur $[0,1]$.

$C(u_1, \dots, u_n) = P[U_1 \leq u_1, \dots, U_n \leq u_n]$ définie de $[0,1]^n$ vers $[0,1]$ et vérifiant :

① $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $C(u_1, \dots, u_n)$ fonction croissante en u_i

② $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$

③ $\forall (a_1, \dots, a_n)$ et $(b_1, \dots, b_n) \in [0,1]^n$ et $a_i \leq b_i$

$$\sum_{i_1}^2 \dots \sum_{i_n}^2 (-1)^{i_1 + \dots + i_n} C(u_{i_1}, \dots, u_{i_n}) \geq 0 \quad \text{avec } u_{j_1} = a_j \text{ et } u_{j_2} = b_j \quad j \in \{1, \dots, n\}$$

➤ Théorème de Sklar (1959) :

Soit H une fonction de distribution en n dimensions ayant des marginales F_1, F_2, \dots, F_n

Alors \exists une n -copule $C / \forall x \in [-\infty, +\infty]^n \quad H(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$

Si les marges sont continues, alors cette copule est unique.

Inversement, si C est une copule à n dimensions et que F_1, F_2, \dots, F_n sont des fonctions de distribution alors H est une fonction de distribution à n -dimensions ayant pour marginales F_1, F_2, \dots, F_n .

➤ Densité d'une copule:

La densité c d'une copule $C : c(u_1, \dots, u_n) = P[U_1 = u_1, \dots, U_n = u_n]$ s'exprime ainsi :

$$c(u_1, \dots, u_n) = \frac{\partial^n C}{\partial u_1 \dots \partial u_n}(u_1, \dots, u_n)$$

A partir du théorème de Sklar, on peut donc en déduire la densité multivariée des variables X_1, \dots, X_n :

On a effet $F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$

Et donc $f(x_1, \dots, x_n) = c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \prod_{i=1}^n f_i(x_i)$

➤ *Copule conditionnelle:*

On peut aussi donner la distribution conditionnelle d'une copule C à l'aide de ses dérivées :

$$C(u_n | u_1, \dots, u_{n-1}) = P[U_n \leq u_n | U_1 = u_1, \dots, U_{n-1} = u_{n-1}] = \frac{\partial^{n-1} C}{\partial u_1 \dots \partial u_{n-1}}(u_1, \dots, u_n) / \frac{\partial^{n-1} C}{\partial u_1 \dots \partial u_{n-1}}(u_1, \dots, u_{n-1})$$

➤ *Tail Dependence:*

On peut donner l'expression des mesures de dépendance de queue en fonction des copules :

$$\text{Upper Tail Dependence : } \lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{C(u, u) - 2u + 1}{1 - u}$$

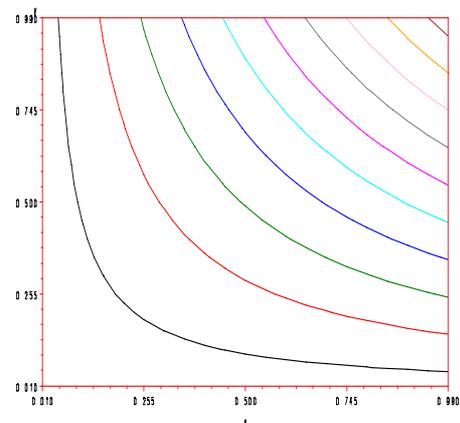
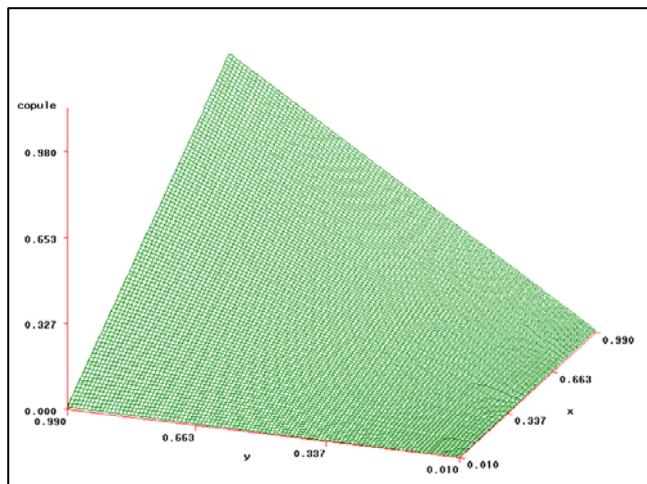
$$\text{Lower Tail Dependence : } \lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{C(u, u)}{u}$$

b) Les différentes copules de référence

① Copule d'indépendance :

➤ *Fonction de répartition de la copule :*

$$C^\perp(u_1, \dots, u_n) = \prod_{i=1}^n u_i$$



➤ *Fonction de densité de la copule :*

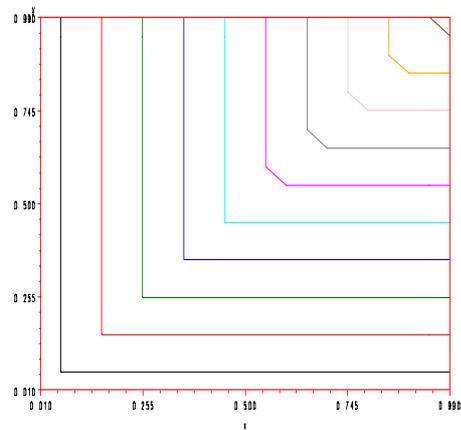
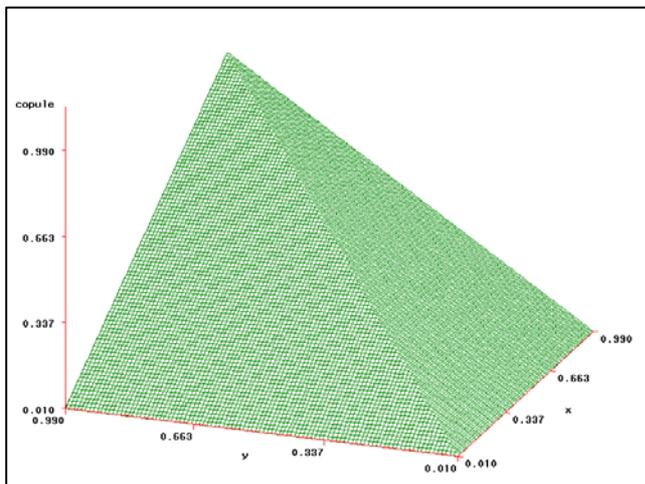
$$c^{\perp}(u_1, \dots, u_n) = 1$$

② Copule comonotone ou de dépendance totale positive :

Cette copule correspond à la borne supérieure de Fréchet-Hoeffding.

➤ *Fonction de répartition de la copule :*

$$C^+(u_1, \dots, u_n) = \min(u_1, \dots, u_n)$$



➤ *Fonction de densité de la copule :*

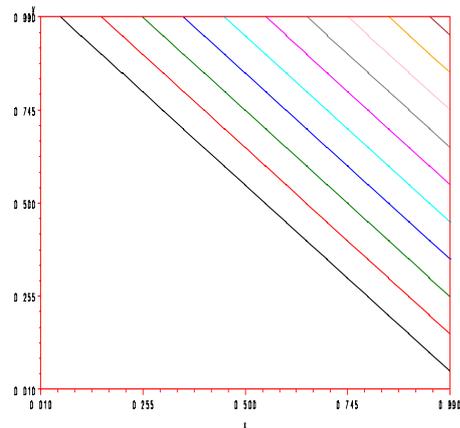
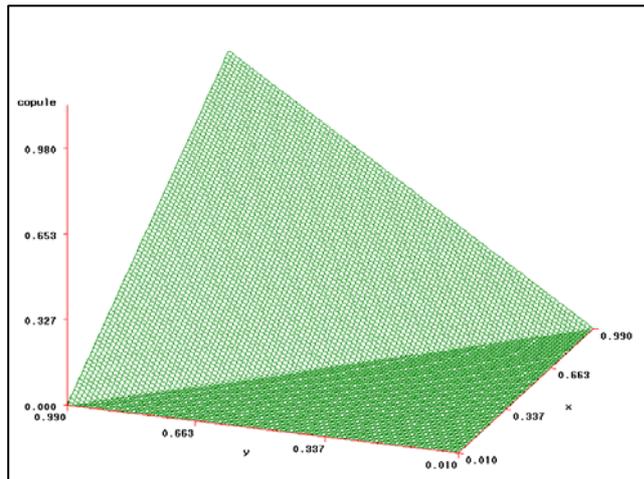
$$c^+(u_1, \dots, u_n) = 0$$

③ Copule antimonotone ou de dépendance totale négative :

Cette copule correspond à la borne inférieure de Fréchet-Hoeffding.

➤ *Fonction de répartition de la copule :*

$$C^-(u, v) = \max(u + v - 1, 0) \quad \text{sin} = 2$$



➤ *Fonction de densité de la copule :*

$$c^-(u_1, \dots, u_n) = 0$$

Remarques :

- C^+ et C^\perp sont des copules pour tout $n \geq 2$ alors que C^- n'est pas une copule pour $n > 2$.
- On a le théorème : soit C une copule, alors pour tout $u \in [0 ; 1]^n$, $C^-(u) \leq C(u) \leq C^+(u)$.

c) Les copules archimédiennes

① Définitions :

➤ *Définition :*

Soit $\varphi : [0,1] \rightarrow [0, +\infty[$ continue, strictement décroissante avec $\varphi(1) = 0$ et $\varphi^{[-1]}$ fonction pseudo-inverse de φ

Soit $C : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ telle que $C(u,v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))$

Cette fonction est une copule si et seulement si φ est convexe.

C est alors une copule archimédienne et φ est le générateur de la copule.

Ces copules permettent de décrire des structures de dépendances très diverses et notamment des dépendances asymétriques (pour lesquelles les coefficients de queue inférieure et de queue supérieure diffèrent), lorsque la structure de dépendance est décrite par plusieurs paramètres.

Copule	Générateur
Frank	$\varphi(t) = -\ln[(e^{-at} - 1) / (e^{-a} - 1)]$
Clayton	$\varphi(t) = a(t^{-1/a} - 1)$ avec $a > 0$
Gumbel	$\varphi(t) = (-\ln(t))^a$
Ali-Mikail-Haq (AMH)	$\varphi(t) = \ln[(1-a(1-t)) / t]$

Le paramètre a mesure le degré de dépendance entre les risques. Plus il est élevé, plus la dépendance est forte, une valeur positive de a indique une dépendance positive.

➤ Expression de la densité de la copule et du τ de Kendall en fonction du générateur :

$$\text{Densité : } \frac{\partial^2 C(u,v)}{\partial u \partial v} = \frac{-\varphi''(C(u,v))\varphi'(u)\varphi'(v)}{[\varphi'(C(u,v))]^3}$$

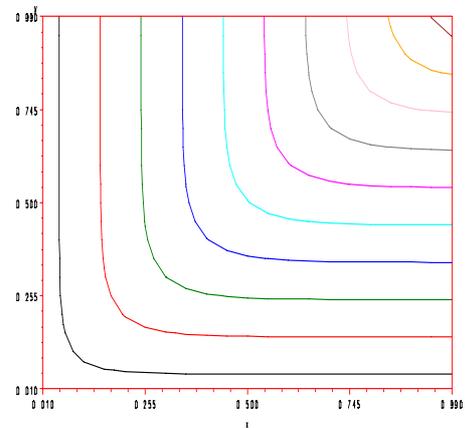
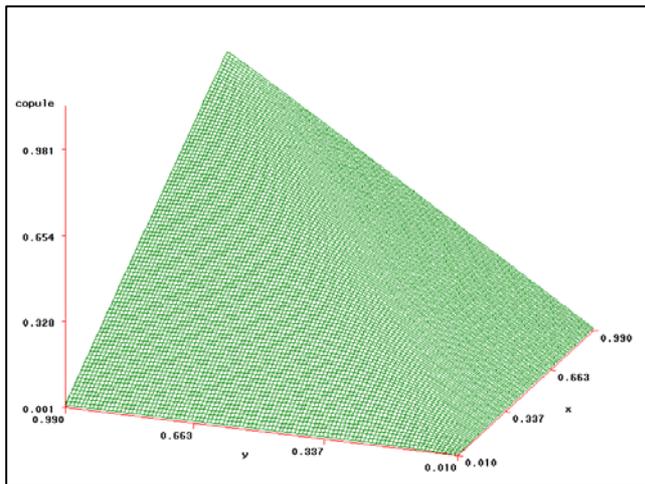
$$\tau \text{ de Kendall : } \tau = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt$$

② Copule de Frank :

➤ Fonction de répartition :

$$C(u,v) = -\frac{1}{a} \ln \left(1 + \frac{(e^{-au} - 1)(e^{-av} - 1)}{e^{-a} - 1} \right) \text{ avec } a \neq 0$$

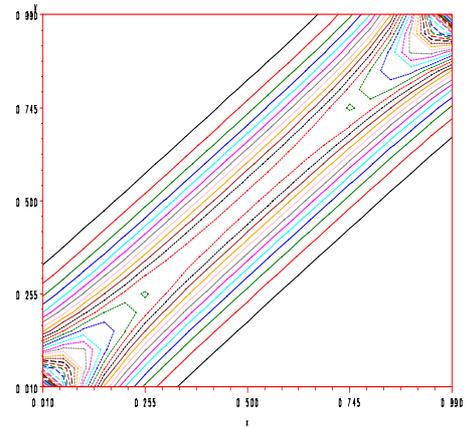
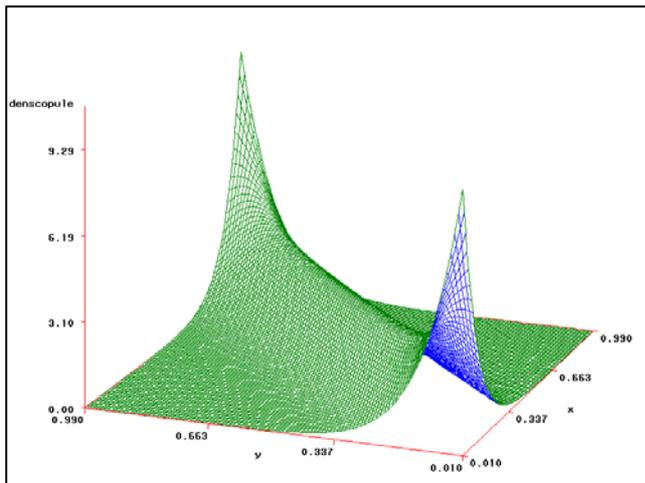
Exemple pour $\tau = 0,7$:



➤ Fonction de densité :

$$c(u,v) = \frac{ae^{-a(u+v)}(1-e^{-a})}{(e^{-a(u+v)} - e^{-au} - e^{-av} + e^{-a})^2}$$

Exemple pour $\tau = 0,7$:

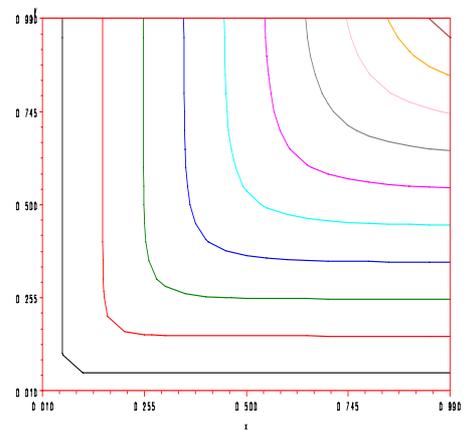
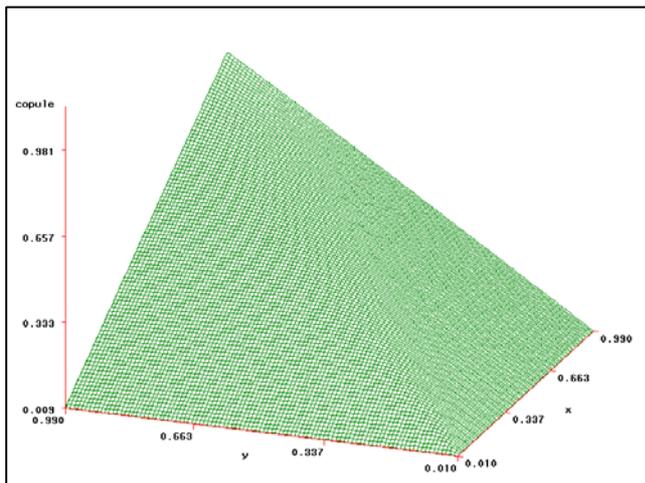


③ Copule de Clayton :

➤ *Fonction de répartition :*

$$C(u,v) = (u^{-a} + v^{-a} - 1)^{-1/a}, \text{ avec } a \geq -1 \text{ et } a \neq 0$$

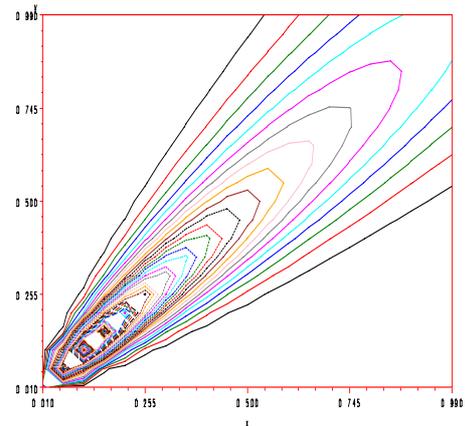
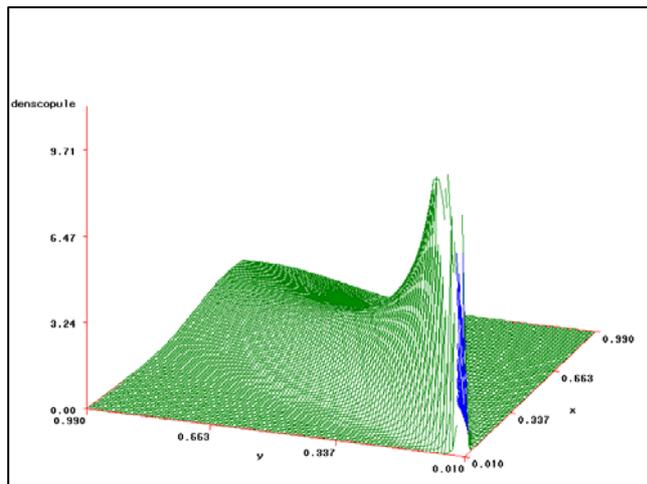
Exemple pour $\tau = 0,7$:



➤ *Fonction de densité :*

$$c(u,v) = \frac{1+a}{(uv)^{a+1}} (u^{-a} + v^{-a} - 1)^{-2-1/a}$$

Exemple pour $\tau = 0,7$:



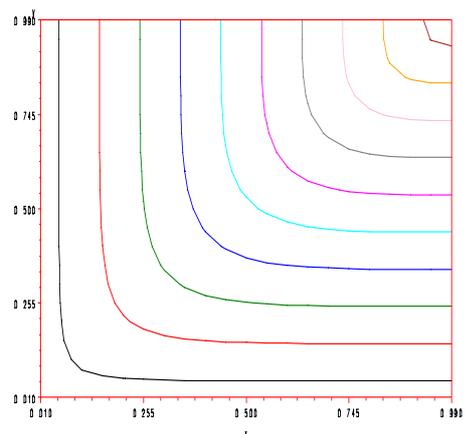
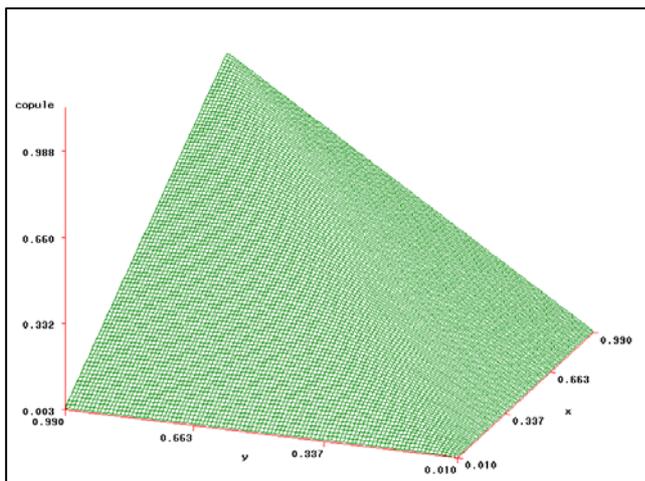
➤ τ de Kendall : $\tau = \frac{a}{a+2}$

④ Copule de Gumbel :

➤ *Fonction de répartition* :

$$C(u, v) = \exp\left(-\left[(-\ln u)^a + (-\ln v)^a\right]^{1/a}\right), \text{ avec } a \geq 1$$

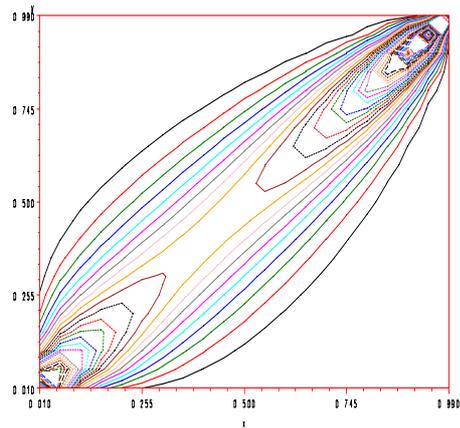
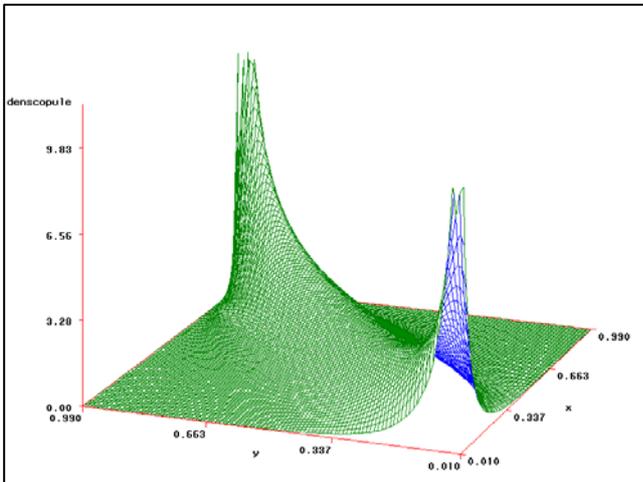
Exemple pour $\tau = 0,7$:



➤ *Fonction de densité :*

$$c(u, v) = \frac{C(u, v)}{uv} \frac{(\ln u \ln v)^{a-1}}{\left[(-\ln u)^a + (-\ln v)^a\right]^{2-1/a}} \left[(a-1) + \left((-\ln u)^a + (-\ln v)^a \right)^{1/a} \right]$$

Exemple pour $\tau = 0,7$:



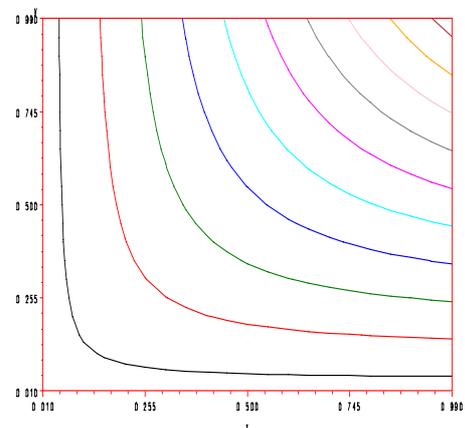
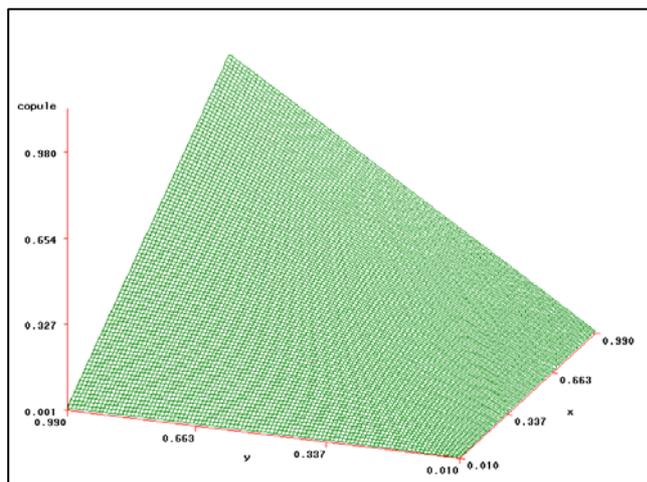
➤ τ de Kendall : $\tau = 1 - \frac{1}{a}$

⑤ Copule de Ali-Mikail-Haq (AMH) :

➤ *Fonction de répartition :*

$$C(u, v) = \frac{uv}{1 - a(1-u)(1-v)} \quad , \text{ avec } -1 \leq a \leq 1$$

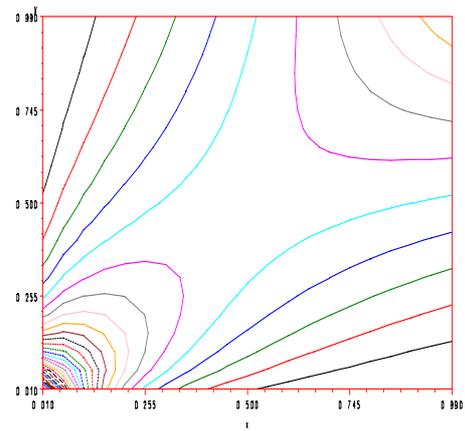
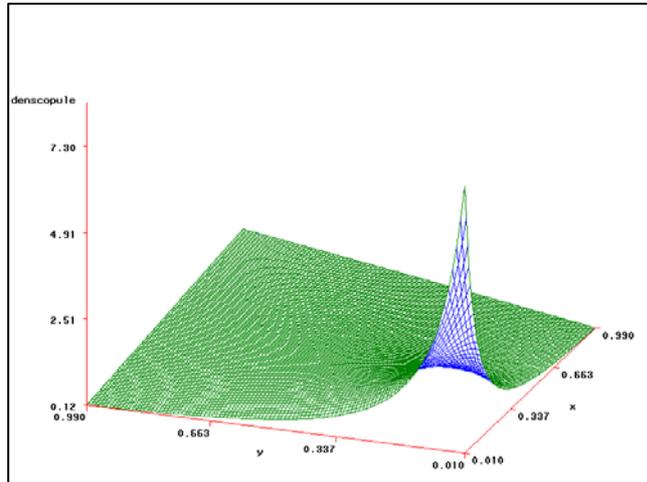
Exemple pour $\tau = 0,27$:



➤ *Fonction de densité :*

$$c(u, v) = \frac{1 + a[(u+1)(v+1) - 3] + a^2[(u-1)(v-1)]}{[1 - a(1-u)(1-v)]^3}$$

Exemple pour $\tau = 0,27$:



➤ τ de Kendall : $\tau = \frac{3a-2}{3a} - \frac{2(1-a)^2}{3a^2} \text{Log}(1-a)$

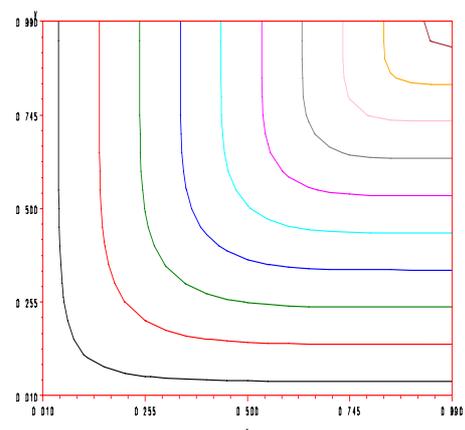
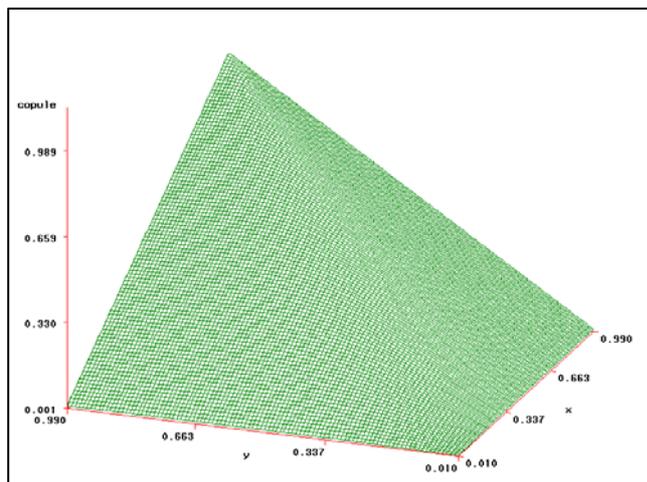
d] Autres copules

① Copule Heavy Right Tail (HRT)

➤ *Fonction de répartition :*

$$C(u, v) = u + v - 1 + [(1-u)^{-1/a} + (1-v)^{-1/a} - 1]^{-a}, \text{ avec } a > 0$$

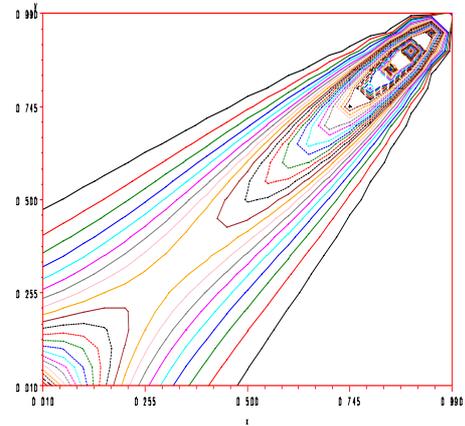
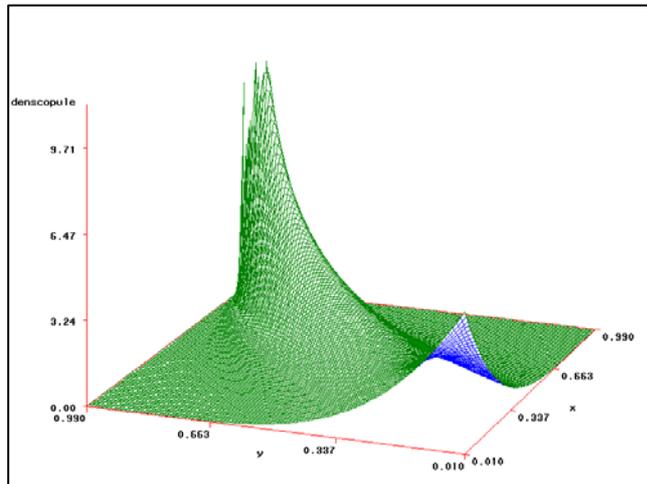
Exemple pour $\tau = 0,7$:



➤ *Fonction de densité :*

$$c(u, v) = \left(1 + \frac{1}{a}\right) [(1-u)^{-1/a} + (1-v)^{-1/a} - 1]^{-a-2} [(1-u)(1-v)]^{-1/a-1}$$

Exemple pour $\tau = 0,7$:



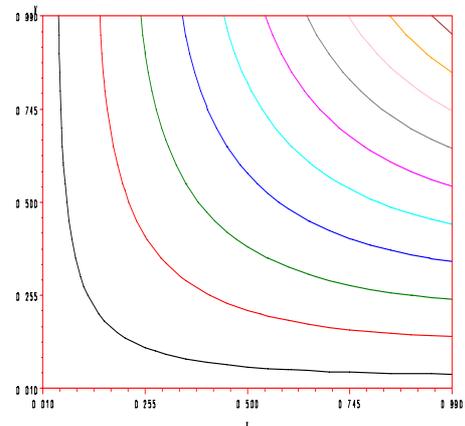
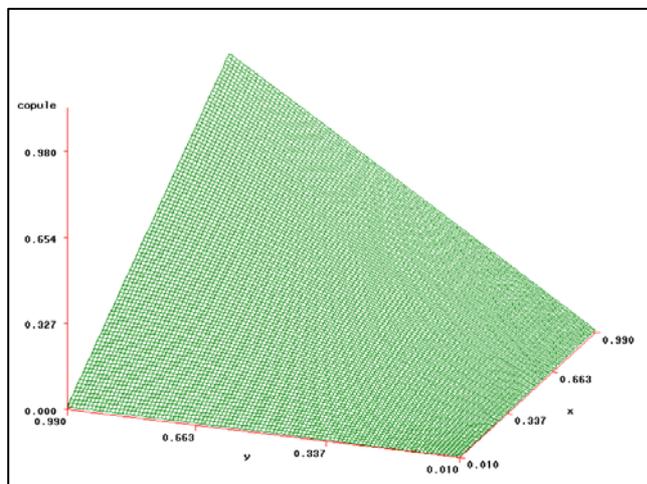
➤ τ de Kendall : $\tau = \frac{1}{1+2a}$

② Copule de Farlie-Morgenstern-Gumbel (FMG)

➤ *Fonction de répartition :*

$$C(u, v) = uv[1 + a(1-u)(1-v)] \text{ , avec } -1 \leq a \leq 1$$

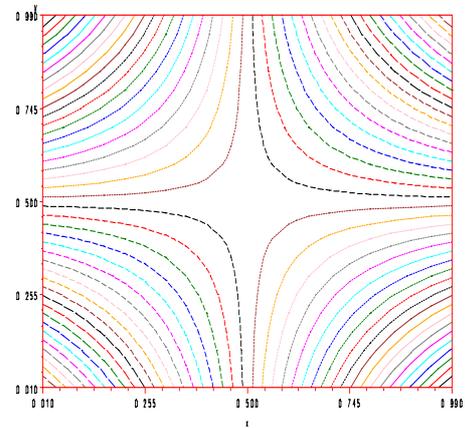
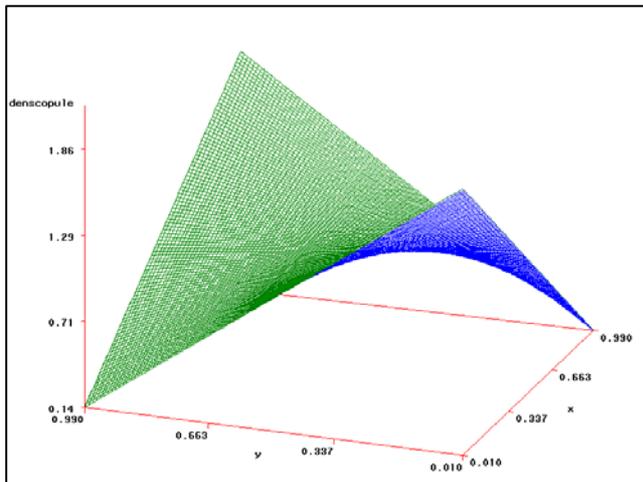
Exemple pour $\tau = 0,2$:



➤ *Fonction de densité :*

$$c(u, v) = 1 + a(1 - 2u)(1 - 2v)$$

Exemple pour $\tau = 0,2$:



➤ *τ de Kendall :* $\tau = \frac{2}{9}a$

Nous venons de passer en revue, de manière volontairement assez succincte, les éléments théoriques indispensables à la suite de notre étude.

Pour plus de développements sur ces éléments théoriques, on pourra se référer aux ouvrages cités dans la bibliographie.

Nous allons maintenant mettre en oeuvre les trois méthodes que nous venons de décrire, en détaillant notamment les processus pratiques d'application.

PARTIE III : APPLICATION

I. CALCULS PREALABLES

I.1 Calcul des coefficients de corrélation sur les triangles de règlements

a) Principe

Ces coefficients nous donnent une information sur les branches présentant une corrélation entre elles mais ne nous permettent pas de modéliser cette corrélation et d'en étudier l'influence sur le montant et la variabilité des provisions. A partir de ces coefficients, nous déterminerons quelles seront les branches sur lesquelles nous ferons porter cette seconde partie de notre étude.

Nous essaierons alors de modéliser la dépendance perçue par le biais de ces coefficients.

Si on appelle $A_{i,j}$ le montant de règlements effectué pour la survenance i et l'année de liquidation j de la première catégorie ministérielle étudiée, et $B_{i,j}$ le montant de règlements effectué pour la survenance i et l'année de liquidation j de la deuxième catégorie ministérielle étudiée, nous pouvons alors constituer un couple de valeurs $(A_{i,j}, B_{i,j})$ pour chaque cellule du triangle de liquidation.

Ce couple de valeurs associe donc les deux catégories ministérielles étudiées pour une même année de survenance et une même année de développement.

Le calcul du coefficient de corrélation sur ces couples de valeurs devrait donc permettre de mettre en évidence une éventuelle corrélation liée à l'année de survenance et/ou à l'année de développement.

On peut toutefois dès à présent soulever une limite dans cette méthodologie qui est que l'on suppose un coefficient de corrélation unique sur tout le triangle. Une corrélation ne touchant qu'une seule année de survenance et une seule année de développement, c'est à dire une seule cellule du tableau (et donc un seul couple de valeurs $(A_{i,j}, B_{i,j})$) risque donc d'être « masquée » car ce calcul peut ne pas laisser apparaître de corrélation au total sur le triangle.

b) Résultats

➤ *Coefficients de corrélation de Pearson:*

Pearson Correlation Coefficients										
	Dom corp	RC Corp	RC Mat	Dom Auto	DAB Part	DAB Pro	Cat Nat	RCG	DO	RCD
Dommages corporels	1	0,53744	0,81211	0,70971	0,90345	0,88337	0,61158	0,39502	0,76846	0,5548
RC Corporelle Auto	0,53744	1	0,24981	0,09808	0,45085	0,51638	0,39047	0,68199	0,5691	0,59379
RC Matérielle Auto	0,81211	0,24981	1	0,97242	0,91086	0,87652	0,52056	0,24857	0,7494	0,4259
Dommages Auto	0,70971	0,09808	0,97242	1	0,83759	0,78064	0,39542	0,07638	0,6074	0,26899
DAB Particuliers	0,90345	0,45085	0,91086	0,83759	1	0,93537	0,54444	0,38803	0,78297	0,5145
DAB Professionnels	0,88337	0,51638	0,87652	0,78064	0,93537	1	0,58593	0,44746	0,84057	0,56663
Catastrophes Naturelles	0,61158	0,39047	0,52056	0,39542	0,54444	0,58593	1	0,4762	0,65392	0,55798
RC Générale	0,39502	0,68199	0,24857	0,07638	0,38803	0,44746	0,4762	1	0,63813	0,58289
Dommages-Ouvrage	0,76846	0,5691	0,7494	0,6074	0,78297	0,84057	0,65392	0,63813	1	0,66256
RC Décennale	0,5548	0,59379	0,4259	0,26899	0,5145	0,56663	0,55798	0,58289	0,66256	1

➤ *Coefficients de corrélation de Spearman:*

Spearman Correlation Coefficients										
	<i>Dom corp</i>	<i>RC Corp</i>	<i>RC Mat</i>	<i>Dom Auto</i>	<i>DAB Part</i>	<i>DAB Pro</i>	<i>Cat Nat</i>	<i>RCG</i>	<i>DO</i>	<i>RCD</i>
<i>Dommages corporels</i>	1	0,63073	0,87809	0,87358	0,88957	0,88218	0,6387	0,45747	0,79251	0,68868
<i>RC Corporelle Auto</i>	0,63073	1	0,63731	0,64369	0,72892	0,72756	0,47442	0,70293	0,59056	0,63215
<i>RC Matérielle Auto</i>	0,87809	0,63731	1	0,96542	0,94431	0,91193	0,61787	0,40957	0,81021	0,68116
<i>Dommages Auto</i>	0,87358	0,64369	0,96542	1	0,95877	0,94133	0,6359	0,45083	0,83142	0,69373
<i>DAB Particuliers</i>	0,88957	0,72892	0,94431	0,95877	1	0,94434	0,65085	0,49086	0,86448	0,70066
<i>DAB Professionnels</i>	0,88218	0,72756	0,91193	0,94133	0,94434	1	0,6564	0,52087	0,84256	0,74437
<i>Catastrophes Naturelles</i>	0,6387	0,47442	0,61787	0,6359	0,65085	0,6564	1	0,55654	0,6539	0,46657
<i>RC Générale</i>	0,45747	0,70293	0,40957	0,45083	0,49086	0,52087	0,55654	1	0,51279	0,49254
<i>Dommages-Ouvrage</i>	0,79251	0,59056	0,81021	0,83142	0,86448	0,84256	0,6539	0,51279	1	0,66788
<i>RC Décennale</i>	0,68868	0,63215	0,68116	0,69373	0,70066	0,74437	0,46657	0,49254	0,66788	1

➤ *Coefficients de corrélation de Kendall:*

Kendall Tau b Correlation Coefficients										
	<i>Dom corp</i>	<i>RC Corp</i>	<i>RC Mat</i>	<i>Dom Auto</i>	<i>DAB Part</i>	<i>DAB Pro</i>	<i>Cat Nat</i>	<i>RCG</i>	<i>DO</i>	<i>RCD</i>
<i>Dommages corporels</i>	1	0,44242	0,68298	0,68112	0,71469	0,69231	0,45082	0,32308	0,59534	0,4965
<i>RC Corporelle Auto</i>	0,44242	1	0,49466	0,51493	0,56125	0,55556	0,34079	0,51153	0,42564	0,45734
<i>RC Matérielle Auto</i>	0,68298	0,49466	1	0,87478	0,82684	0,74704	0,43963	0,31615	0,6028	0,49464
<i>Dommages Auto</i>	0,68112	0,51493	0,87478	1	0,841	0,79095	0,4676	0,35414	0,64382	0,50023
<i>DAB Particuliers</i>	0,71469	0,56125	0,82684	0,841	1	0,80501	0,46573	0,37404	0,66807	0,51142
<i>DAB Professionnels</i>	0,69231	0,55556	0,74704	0,79095	0,80501	1	0,47692	0,37856	0,66061	0,54872
<i>Catastrophes Naturelles</i>	0,45082	0,34079	0,43963	0,4676	0,46573	0,47692	1	0,3986	0,47319	0,3296
<i>RC Générale</i>	0,32308	0,51153	0,31615	0,35414	0,37404	0,37856	0,3986	1	0,37902	0,37156
<i>Dommages-Ouvrage</i>	0,59534	0,42564	0,6028	0,64382	0,66807	0,66061	0,47319	0,37902	1	0,50023
<i>RC Décennale</i>	0,4965	0,45734	0,49464	0,50023	0,51142	0,54872	0,3296	0,37156	0,50023	1

Les résultats obtenus laissent tous apparaître une corrélation positive.

Ces corrélations semblent de plus toutes démontrer un fort lien entre les catégories ministérielles. Ce résultat est toutefois trompeur car les liaisons fortes sont constatées entre risque de même nature, ou plutôt ayant le même comportement de liquidation.

Ainsi, les risques courts que sont la RC Matérielle Automobile et le Dommages Automobile sont très corrélés entre eux et avec les autres risques courts (DAB Particuliers et DAB Professionnels), mais beaucoup moins avec les risques longs comme la RC Corporelle Automobile ou la RC Générale.

Aussi, après avoir lancé les calculs de corrélation (via la procédure CORR de SAS), nous n'avons retenu que 4 catégories ministérielles pour notre étude : la RC Matérielle Automobile, le Dommages Automobile, le Dommages aux Biens Particulier et le Dommages aux Biens Professionnels.

Notre choix a été motivé par trois raisons principales :

- ces quatre catégories ministérielles regroupent des risques courts, ce qui nous permet, vu la faible profondeur de notre historique, d'avoir des données fiables et complètes
- ce sont des catégories ministérielles semblables dans la nature des risques (dommages matériels) et le déroulement de la liquidation
- les montants constatés dans les triangles de ces quatre catégories ministérielles sont suffisamment importants pour être significatifs

I.2 Calcul des provisions par différentes méthodes

a] Méthode Chain-Ladder

Ce calcul sera effectué pour toutes les branches retenues dans notre étude en supposant qu'il n'existe pas de corrélation entre elles. Il s'agit du calcul le plus fréquemment utilisé par les compagnies d'assurance.

On retiendra comme coefficients la moyenne pondérée sur toutes les observations i.e le coefficient décrit dans le modèle Chain-Ladder déterministe car c'est celui qui donnera des résultats comparables avec la méthode GLM et le modèle de Mack.

RC Matérielle Automobile			
	$C_{i,j}$	$C_{i,n}$	Réserves R_i (SAP+IBNR)
1994	63 736	63 736	0
1995	63 770	64 661	892
1996	61 777	62 656	879
1997	64 328	65 266	939
1998	71 925	73 120	1 195
1999	78 452	79 867	1 416
2000	83 692	85 448	1 756
2001	87 353	89 797	2 444
2002	71 743	74 829	3 086
2003	53 973	58 721	4 748
2004	25 279	43 094	17 815
Total	726 028	761 196	35 168

Dommages Automobile			
	$C_{i,j}$	$C_{i,n}$	Réserves R_i (SAP+IBNR)
1994	134 256	134 256	0
1995	125 282	125 295	13
1996	118 761	118 784	23
1997	122 103	122 146	43
1998	136 239	136 374	135
1999	145 823	146 124	300
2000	154 724	155 295	571
2001	166 606	167 598	992
2002	145 909	147 493	1 584
2003	117 343	120 214	2 871
2004	66 336	90 264	23 928
Total	1 433 381	1 463 843	30 461

DAB Particuliers			
	$C_{i,j}$	$C_{i,n}$	Réserves R_i (SAP+IBNR)
1994	33 141	33 141	0
1995	31 085	31 096	11
1996	35 096	35 130	34
1997	46 097	46 297	200
1998	36 876	37 303	427
1999	44 191	44 905	714
2000	29 689	30 465	775
2001	30 461	31 615	1 154
2002	23 838	25 438	1 600
2003	15 605	17 927	2 323
2004	4 810	10 155	5 344
Total	330 890	343 472	12 582

DAB Professionnels			
	$C_{i,j}$	$C_{i,n}$	Réserves R_i (SAP+IBNR)
1994	45 764	45 764	0
1995	43 335	43 335	0
1996	66 927	67 451	524
1997	39 748	40 125	377
1998	49 414	50 154	740
1999	52 113	53 156	1 044
2000	47 835	49 140	1 305
2001	48 400	50 352	1 953
2002	32 554	34 821	2 268
2003	18 550	21 586	3 036
2004	7 509	17 743	10 234
Total	452 042	473 628	21 480

Nous constatons bien ce qui avait été annoncé en 1^{ère} partie sur l'origine de nos données : que, travaillant sur un portefeuille fermé, les montants à l'ultime obtenus par survenance vont en décroissant.

b) Modèle de Mack : extension du Chain-Ladder en stochastique

① Résultats par catégorie ministérielle :

➤ *RC Matérielle Automobile :*

	R_i	$C_{i,n}$	$mse(R_i)$	$se(R_i)$	$se(R_i) / R_i$	$R_i / C_{i,n}$
1994	0	63 736	0	0		0,00%
1995	892	64 661	5 453	2	0%	0,48%
1996	879	62 656	40 232	6	1%	0,50%
1997	939	65 266	329 808	18	2%	0,52%
1998	1 195	73 120	18 615 323	136	11%	0,63%
1999	1 416	79 867	28 423 392	169	12%	0,76%
2000	1 756	85 448	38 294 139	196	11%	0,97%
2001	2 444	89 797	76 027 184	276	11%	1,33%
2002	3 086	74 829	228 502 412	478	15%	2,10%
2003	4 748	58 721	1 171 226 014	1 082	23%	4,26%
2004	17 815	43 094	11 821 893 963	3 438	19%	31,30%
TOTAL	35 168	761 196	13 830 337 810	3 719	10,57%	2,95%

Près de 70% des règlements sont effectués dès la 1^{ère} année, plus de 99% dès la fin de la 5^{ème} année.
L'écart-type rapporté au montant de charge ultime ($se(R_i) / C_{i,n}$) s'élève au total à 0,29%.

➤ *Dommages Automobile :*

	R_i	$C_{i,n}$	$mse(R_i)$	$se(R_i)$	$se(R_i) / R_i$	$R_i / C_{i,n}$
1994	0	134 256	0	0		0,00%
1995	13	125 295	28 325	5	40%	0,02%
1996	23	118 784	83 092	9	39%	0,04%
1997	43	122 146	235 604	15	36%	0,14%
1998	135	136 374	3 531 433	59	44%	0,32%
1999	300	146 124	14 280 541	120	40%	0,53%
2000	571	155 295	25 218 856	159	28%	0,72%
2001	992	167 598	90 450 934	301	30%	1,08%
2002	1 584	147 493	135 079 240	368	23%	1,84%
2003	2 871	120 214	471 915 352	687	24%	3,76%
2004	23 928	90 264	27 195 270 436	5 215	22%	29,15%
TOTAL	30 461	1 463 843	28 190 623 937	5 309	17,43%	2,38%

Plus de 70% des règlements sont effectués dès la 1^{ère} année, et plus de 99% dès la fin de la 5^{ème} année.
L'écart-type rapporté au montant de charge ultime s'élève au total à 0,33%.

➤ *DAB Particuliers :*

	R_i	$C_{i,n}$	$mse(R_i)$	$se(R_i)$	$se(R_i) / R_i$	$R_i / C_{i,n}$
1994	0	33 141	0	0		0,00%
1995	11	31 096	1 012	1	10%	0,94%
1996	34	35 130	109 130	10	31%	0,93%
1997	200	46 297	16 070 156	127	63%	1,02%
1998	427	37 303	130 173 865	361	84%	1,47%
1999	714	44 905	169 947 380	412	58%	1,71%
2000	775	30 465	117 270 756	342	44%	2,18%
2001	1 154	31 615	154 762 154	393	34%	2,96%
2002	1 600	25 438	222 782 299	472	30%	4,67%
2003	2 323	17 927	618 902 796	787	34%	9,23%
2004	5 344	10 155	5 385 525 698	2 321	43%	43,49%
TOTAL	12 582	343 472	7 601 072 476	2 757	21,91%	4,32%

Près de 60% des règlements sont effectués dès la 1^{ère} année, mais il faut ici attendre 9 ans avant que plus de 99% des règlements n'aient été effectués.

L'écart-type rapporté au montant de charge ultime s'élève au total à 0,42%.

➤ *DAB Professionnels :*

	R_i	$C_{i,n}$	$mse(R_i)$	$se(R_i)$	$se(R_i) / R_i$	$R_i / C_{i,n}$
1994	0	45 764	0	0		0,00%
1995	0	43 335	8 716 931	93		0,01%
1996	524	67 451	390 514 605	625	119%	0,29%
1997	377	40 125	196 314 172	443	118%	0,26%
1998	740	50 154	342 218 444	585	79%	0,47%
1999	1 044	53 156	398 549 017	631	60%	0,67%
2000	1 305	49 140	422 684 055	650	50%	0,92%
2001	1 953	50 352	609 285 069	781	40%	1,35%
2002	2 268	34 821	590 422 521	768	34%	2,11%
2003	3 036	21 586	1 506 034 793	1 227	40%	4,17%
2004	10 234	17 743	10 719 288 539	3 274	32%	31,63%
TOTAL	21 480	473 628	20 979 770 081	4 580	21,32%	2,68%

Pour cette catégorie ministérielle aussi, près de 70% des règlements sont effectués dès la 1^{ère} année, et plus de 99% dès la fin de la 5^{ème} année.

L'écart-type rapporté au montant de charge ultime s'élève au total à 0,36%.

En conclusion, ce modèle nous fournit les mêmes valeurs que le modèle Chain-Ladder, avec de plus une estimation de la variance, par année de survenance et au total, ce qui justifie son appellation de « Chain-Ladder stochastique ».

On constate bien que les quatre risques considérés sont des risques courts, qui se déclarent et se liquident vite (plus de 60% des règlements ultimes sont effectués dès la 1^{ère} année). Sur nos données, le risque à développement le plus long est celui du DAB Particuliers.

Au total, le montant estimé de provisions représente 2,5 à 3% (un peu plus de 4% pour le DAB Particuliers) du montant total estimé de la charge ultime et la variabilité totale 0,3 à 0,4% du montant total de cette charge ultime estimée. Nous pouvons donc considérer que notre estimation de la charge ultime est robuste.

Enfin, la variabilité du montant des provisions provient, comme nous pouvions nous y attendre, essentiellement des deux exercices de survenance les plus récents, c'est-à-dire les deux exercices pour lesquels nous ne disposons pas de beaucoup d'informations.

La variabilité rapportée au montant des réserves est plus importante pour les risques DAB (Particuliers et Professionnels) que pour les risques Automobile.

② Réserves totales des croisements de catégories ministérielles en cas d'indépendance :

En cas d'indépendance entre deux risques, la variance de la somme est égale à la somme des variances. Si l'on suppose donc l'indépendance entre les catégories ministérielles considérées, on obtient alors les montants suivants :

	1 ^{ère} catégorie ministérielle		2 ^{ème} catégorie ministérielle		TOTAL		
	Réserves est.	Ecart-type	Réserves est.	Ecart-type	Réserves est.	Ecart-type	% réserves
RC Matérielle + Dommages Auto	35 168	3 719	30 461	5 309	65 630	6 482	9,88%
RC Matérielle + DAB Particuliers	35 168	3 719	12 582	2 757	47 750	4 629	9,70%
Dommages Auto + DAB Particuliers	30 461	5 309	12 582	2 757	43 043	5 983	13,90%
Dommages Auto + DAB Professionnels	30 461	5 309	21 480	4 580	51 941	7 012	13,50%

Alors que la variabilité rapportée au montant des réserves est de l'ordre de 10% pour les risques Automobile, elle est de l'ordre de 14% pour les risques DAB.

L'agrégation, en augmentant le montant de réserves estimées (l'assiette de calcul) permet de diminuer la variabilité des réserves.

c] Modélisation GLM

Ce calcul sera lui aussi effectué pour toutes ces branches, en supposant une absence de corrélation puis sera comparé dans une première étape aux résultats obtenus dans le paragraphe précédent.

On suppose que les (C_{ij}) $i,j = 0, \dots, n$ sont indépendants.

En pratique, cette hypothèse est difficilement admissible : des retards administratifs par exemple entraîneront un décalage d'une année de développement à la suivante des règlements à effectuer.

Nous avons utilisé la procédure GENMOD de SAS pour effectuer ces calculs. Il est à noter que cette procédure nous fournit un certain nombre de statistiques et notamment un intervalle de confiance pour chaque paramètre estimé.

Nous avons testé différents modèles GLM avec une fonction de lien Log.

Cette modélisation s'effectue sur les données incrémentales (les flux de règlements annuels).

Nous obtenons alors le modèle : $\hat{C}_{ij} = E(C_{ij}) = \hat{\mu}_{ij} = e^{(\hat{\eta}_{ij})}$

Avec $\hat{\eta}_{ij} = \hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j$

où $\hat{\mu}$ = paramètre estimé de la moyenne

$\hat{\alpha}_i$ = paramètre estimé de l'année de survenance i

$\hat{\beta}_j$ = paramètre estimé de l'année de développement j

Nous pouvons alors reconstituer la partie non-grisée du tableau :

Année de survenance	Année de développement			
	0	1	j	n
0				
i			$C_{i,j}$	
n				

① Modélisation par une loi de Poisson :

Nous avons dans une première étape supposé que les règlements annuels suivaient une loi de Poisson. Ce choix implique que les valeurs modélisées doivent être entières et positives, ce qui est supposé être le cas de règlements (on ne tiendra pas compte des décimales).

La fonction de lien retenue est la fonction Log, qui est la fonction de lien canonique.

➤ *Montants des réserves R_i estimées :*

Loi de Poisson	RC Matérielle	Dommages Auto	DAB Particuliers	DAB Professionnels
1994	0	0	0	0
1995	892	13	11	0
1996	879	23	34	524
1997	939	43	200	377
1998	1 195	135	427	740
1999	1 416	300	714	1 044
2000	1 756	571	775	1 305
2001	2 444	992	1 154	1 953
2002	3 087	1 584	1 600	2 268
2003	4 748	2 872	2 323	3 036
2004	17 815	23 930	5 344	10 235
TOTAL	35 169	30 463	12 582	21 480

➤ *Calcul des statistiques de test:*

<i>Criteria For Assessing Goodness Of Fit</i>		RC Matérielle	
<i>Criterion</i>	<i>DF</i>	<i>Value</i>	<i>Value/DF</i>
<i>Deviance</i>	45	7 910 234,51	175 782,99
<i>Scaled Deviance</i>	45	7 910 234,51	175 782,99
<i>Pearson Chi-Square</i>	45	8 058 689,01	179 081,98
<i>Scaled Pearson X2</i>	45	8 058 689,01	179 081,98
<i>Log Likelihood</i>		11 747 107 923,00	

<i>Criteria For Assessing Goodness Of Fit</i>		Dommages Auto	
<i>Criterion</i>	<i>DF</i>	<i>Value</i>	<i>Value/DF</i>
<i>Deviance</i>	45	10 971 553,43	243 812,30
<i>Scaled Deviance</i>	45	10 971 553,43	243 812,30
<i>Pearson Chi-Square</i>	45	10 843 987,47	240 977,50
<i>Scaled Pearson X2</i>	45	10 843 987,47	240 977,50
<i>Log Likelihood</i>		24 475 195 373,00	

<i>Criteria For Assessing Goodness Of Fit</i>		DAB Particuliers	
<i>Criterion</i>	<i>DF</i>	<i>Value</i>	<i>Value/DF</i>
<i>Deviance</i>	45	8 922 127,95	198 269,51
<i>Scaled Deviance</i>	45	8 922 127,95	198 269,51
<i>Pearson Chi-Square</i>	45	9 207 160,43	204 603,57
<i>Scaled Pearson X2</i>	45	9 207 160,43	204 603,57
<i>Log Likelihood</i>		5 043 239 563,70	

<i>Criteria For Assessing Goodness Of Fit</i>		DAB Professionnels	
<i>Criterion</i>	<i>DF</i>	<i>Value</i>	<i>Value/DF</i>
<i>Deviance</i>	45	12 898 283,91	286 628,53
<i>Scaled Deviance</i>	45	12 898 283,91	286 628,53
<i>Pearson Chi-Square</i>	45	13 079 289,93	290 650,89
<i>Scaled Pearson X2</i>	45	13 079 289,93	290 650,89
<i>Log Likelihood</i>		7 025 683 578,10	

Comme attendu, cette modélisation donne les mêmes résultats que la méthode chain-ladder. Toutefois, l'estimation du paramètre de dispersion ϕ à partir de la déviance et du Chi-deux de Pearson indique clairement une sur-dispersion.

Nous allons donc intégrer cette sur-dispersion, en fixant le paramètre ϕ .

② **Modélisation par une loi de Poisson sur-dispersée:**

Nous avons décidé de modéliser nos données à l'aide d'une loi de Poisson sur-dispersée, en prenant comme estimation du paramètre de dispersion ϕ , l'estimation fournie par le Chi-Deux de Pearson : $\hat{\phi} = \frac{\chi^2}{n-K}$, cela pour rester cohérent avec le Bootstrap qui sera effectué ultérieurement et qui travaille sur les résidus de Pearson.

➤ *Montants des réserves R_i estimées :*

Loi de Poisson sur-dispersée	RC Matérielle	Dommages Auto	DAB Particuliers	DAB Professionnels
1994	0	0	0	0
1995	892	13	11	0
1996	879	23	34	524
1997	939	43	200	377
1998	1 195	135	427	740
1999	1 416	300	714	1 044
2000	1 756	571	775	1 305
2001	2 444	992	1 154	1 953
2002	3 087	1 584	1 600	2 268
2003	4 748	2 872	2 323	3 036
2004	17 815	23 930	5 344	10 235
TOTAL	35 169	30 463	12 582	21 480

Comme attendu, nous retrouvons bien les mêmes montants que pour la modélisation par la loi de Poisson, le paramètre ϕ n'ayant pas d'incidence sur l'estimation de C_{ij} .

➤ *Calcul des statistiques de test:*

<i>Criteria For Assessing Goodness Of Fit</i>				RC Matérielle
<i>Criterion</i>	<i>DF</i>	<i>Value</i>	<i>Value/DF</i>	
<i>Deviance</i>	45	7 910 234,51	175 782,99	
<i>Scaled Deviance</i>	45	44,17	0,98	
<i>Pearson Chi-Square</i>	45	8 058 689,01	179 081,98	
<i>Scaled Pearson X2</i>	45	45,00	1,00	
<i>Log Likelihood</i>		65 596,26		

<i>Criteria For Assessing Goodness Of Fit</i>				Dommages Auto
<i>Criterion</i>	<i>DF</i>	<i>Value</i>	<i>Value/DF</i>	
<i>Deviance</i>	45	10 971 553,43	243 812,30	
<i>Scaled Deviance</i>	45	45,53	1,01	
<i>Pearson Chi-Square</i>	45	10 843 987,47	240 977,50	
<i>Scaled Pearson X2</i>	45	45,00	1,00	
<i>Log Likelihood</i>		101 566,31		

<i>Criteria For Assessing Goodness Of Fit</i>				DAB Particuliers
<i>Criterion</i>	<i>DF</i>	<i>Value</i>	<i>Value/DF</i>	
<i>Deviance</i>	45	8 922 127,95	198 269,51	
<i>Scaled Deviance</i>	45	43,61	0,97	
<i>Pearson Chi-Square</i>	45	9 207 160,43	204 603,57	
<i>Scaled Pearson X2</i>	45	45,00	1,00	
<i>Log Likelihood</i>		24 648,84		

<i>Criteria For Assessing Goodness Of Fit</i>				DAB Professionnels
<i>Criterion</i>	<i>DF</i>	<i>Value</i>	<i>Value/DF</i>	
<i>Deviance</i>	45	12 898 283,91	286 628,53	
<i>Scaled Deviance</i>	45	44,38	0,99	
<i>Pearson Chi-Square</i>	45	13 079 289,93	290 650,89	
<i>Scaled Pearson X2</i>	45	45,00	1,00	
<i>Log Likelihood</i>		24 511,46		

Nous retrouvons bien les montants déterminés lors de la modélisation Poisson, divisés par l'estimation de ϕ obtenue par le Chi-deux de Pearson (et notre Chi-deux de Pearson normalisé est dès lors égal à 1).

Nous allons maintenant aussi procéder à une modélisation par une loi binomiale négative, loi qui est couramment utilisée à la place de la loi de Poisson en cas de sur-dispersion.

③ Modélisation par une loi Binomiale Négative :

Comme décrit dans notre partie théorique, cette loi de probabilité ne fait pas partie de la famille des lois exponentielles. Toutefois SAS l'intègre dans ses possibilités de modélisation, en fixant un paramètre k qui n'est pas le même que le paramètre de dispersion ϕ des modèles linéaires généralisés, et qui est soit fixé, soit estimé par maximum de vraisemblance.

➤ Montants des réserves R_i estimées :

Loi Binomiale négative	RC Matérielle	Dommages Auto	DAB Particuliers	DAB Professionnels
1994	0	0	0	0
1995	728	13	11	0
1996	713	26	36	364
1997	1 176	62	179	473
1998	1 475	199	536	930
1999	1 838	464	840	1 338
2000	2 463	728	980	1 327
2001	2 549	1 128	1 437	2 005
2002	2 859	1 478	1 534	2 073
2003	4 365	2 464	2 275	2 934
2004	17 138	23 100	5 240	9 928
TOTAL	35 305	29 660	13 070	21 372
Ecart p/r à Chain-Ladder	0,39%	-2,64%	3,88%	-0,50%

➤ Calcul des statistiques de test :

Criteria For Assessing Goodness Of Fit		RC Matérielle		
Criterion	DF	Value	Value/DF	
Deviance	45	67,53	1,50	
Scaled Deviance	45	67,53	1,50	
Pearson Chi-Square	45	63,15	1,40	
Scaled Pearson X2	45	63,15	1,40	
Log Likelihood		11 751 062 613,00		

Criteria For Assessing Goodness Of Fit		Dommages Auto		
Criterion	DF	Value	Value/DF	
Deviance	45	67,63	1,50	
Scaled Deviance	45	67,63	1,50	
Pearson Chi-Square	45	59,64	1,33	
Scaled Pearson X2	45	59,64	1,33	
Log Likelihood		24 480 680 720,00		

<i>Criteria For Assessing Goodness Of Fit</i>			
DAB Particuliers			
<i>Criterion</i>	<i>DF</i>	<i>Value</i>	<i>Value/DF</i>
<i>Deviance</i>	45	67,68	1,50
<i>Scaled Deviance</i>	45	67,68	1,50
<i>Pearson Chi-Square</i>	45	73,30	1,63
<i>Scaled Pearson X2</i>	45	73,30	1,63
<i>Log Likelihood</i>		5 047 700 202,70	

<i>Criteria For Assessing Goodness Of Fit</i>			
DAB Professionnels			
<i>Criterion</i>	<i>DF</i>	<i>Value</i>	<i>Value/DF</i>
<i>Deviance</i>	45	67,46	1,50
<i>Scaled Deviance</i>	45	67,46	1,50
<i>Pearson Chi-Square</i>	45	61,46	1,37
<i>Scaled Pearson X2</i>	45	61,46	1,37
<i>Log Likelihood</i>		7 032 132 274,30	

Cette modélisation donne des résultats très proches de ceux de la méthode Chain-Ladder pour la RC Matérielle et le DAB Professionnels, mais avec des valeurs pour la déviance et le Chi-deux de Pearson bien inférieures à celles obtenues par une modélisation Poisson (sans sur-dispersion).

➤ *En terme de montant sur les croisements de catégories ministérielles dans le cas indépendant, nous obtenons les résultats suivants :*

	1ere catégorie ministérielle		2 ^{ème} catégorie ministérielle		TOTAL		
	Chain-Ladder	GLM Nég. bin	Chain-Ladder	GLM Nég. bin	Chain-Ladder	GLM Nég. bin	écart
RC Matérielle + Dommages Auto	35 168	35 305	30 461	29 660	65 629	64 965	-1,01%
RC Matérielle + DAB Particuliers	35 168	35 305	12 582	13 070	47 750	48 375	1,31%
Dommages Auto + DAB Particuliers	30 461	29 660	12 582	13 070	43 043	42 730	-0,73%
Dommages Auto + DAB Professionnels	30 461	29 660	21 480	21 372	51 941	51 032	-1,75%

④ Modélisation par une loi Gamma :

Cette modélisation permet de travailler sur des variables continues.

➤ *Montants des réserves R_i estimées :*

Loi Gamma	RC Matérielle	Dommages Auto	DAB Particuliers	DAB Professionnels
1994	0	0	0	0
1995	727	13	11	0
1996	712	26	36	368
1997	1 174	62	180	477
1998	1 474	199	539	937
1999	1 839	465	844	1 344
2000	2 464	729	984	1 334
2001	2 550	1 130	1 440	2 012
2002	2 859	1 479	1 536	2 078
2003	4 365	2 465	2 277	2 938
2004	17 135	23 098	5 240	9 931
TOTAL	35 301	29 666	13 087	21 418
Ecart p/r à Chain-Ladder	0,38%	-2,62%	4,01%	-0,29%

➤ *Calcul des statistiques de test:*

<i>Criteria For Assessing Goodness Of Fit</i> RC Matérielle			
<i>Criterion</i>	<i>DF</i>	<i>Value</i>	<i>Value/DF</i>
<i>Deviance</i>	45	7,20	0,16
<i>Scaled Deviance</i>	45	67,18	1,49
<i>Pearson Chi-Square</i>	45	6,70	0,15
<i>Scaled Pearson X2</i>	45	62,49	1,39
<i>Log Likelihood</i>		-953,95	

<i>Criteria For Assessing Goodness Of Fit</i> Dommages Auto			
<i>Criterion</i>	<i>DF</i>	<i>Value</i>	<i>Value/DF</i>
<i>Deviance</i>	45	8,13	0,18
<i>Scaled Deviance</i>	45	67,33	1,50
<i>Pearson Chi-Square</i>	45	7,14	0,16
<i>Scaled Pearson X2</i>	45	59,14	1,31
<i>Log Likelihood</i>		-955,86	

<i>Criteria For Assessing Goodness Of Fit</i> DAB Particuliers			
<i>Criterion</i>	<i>DF</i>	<i>Value</i>	<i>Value/DF</i>
<i>Deviance</i>	45	7,84	0,17
<i>Scaled Deviance</i>	45	67,28	1,50
<i>Pearson Chi-Square</i>	45	8,42	0,19
<i>Scaled Pearson X2</i>	45	72,29	1,61
<i>Log Likelihood</i>		-947,13	

<i>Criteria For Assessing Goodness Of Fit</i> DAB Professionnels			
<i>Criterion</i>	<i>DF</i>	<i>Value</i>	<i>Value/DF</i>
<i>Deviance</i>	45	11,95	0,27
<i>Scaled Deviance</i>	45	67,93	1,51
<i>Pearson Chi-Square</i>	45	10,82	0,24
<i>Scaled Pearson X2</i>	45	61,52	1,37
<i>Log Likelihood</i>		-972,68	

De même que la modélisation précédente, pour la RC Matérielle et le DAB Professionnels, cette modélisation donne des résultats très proches de ceux de la méthode chain-ladder, mais avec des valeurs pour la déviance et le Chi-deux de Pearson bien inférieures à celles obtenues par une modélisation Poisson (sans sur-dispersion). Il est à noter que les résultats obtenus par une modélisation Gamma sont très proches de ceux obtenus par une modélisation Binomiale Négative.

➤ *En terme de montant sur les croisements de catégories ministérielles dans le cas indépendant, nous obtenons les résultats suivants :*

	1ere catégorie ministérielle		2 ^{ème} catégorie ministérielle		TOTAL		
	Chain-Ladder	GLM Gamma	Chain-Ladder	GLM Gamma	Chain-Ladder	GLM Gamma	écart
RC Matérielle + Dommages Auto	35 168	35 301	30 461	29 666	65 629	64 967	-1,01%
RC Matérielle + DAB Particuliers	35 168	35 301	12 582	13 087	47 750	48 388	1,34%
Dommages Auto + DAB Particuliers	30 461	29 666	12 582	13 087	43 043	42 753	-0,67%
Dommages Auto + DAB Professionnels	30 461	29 666	21 480	21 418	51 941	51 084	-1,65%

⑤ Modèles retenus:

Comme nous l'avons vu dans notre partie théorique, c'est à l'aide de la quasi-vraisemblance étendue q^+ que nous pourrons comparer des modèles ayant des structures (V, φ, g) différentes.

Voici les montants que nous avons obtenus :

$-2q^+$	Poisson	Poisson surdisp	Bin. Negative	Gamma
RC Matérielle	7 911 205,17	2 612,29	1 839,31	1 692,12
Dommages	10 972 518,98	2 646,36	1 843,97	1 704,59
DAB Particuliers	8 923 089,57	2 620,82	1 826,57	1 684,83
DAB Professionnels	8 923 089,57	2 680,26	1 883,38	1 767,07

Pour chacune de ces catégories ministérielles, le modèle qui semble donc le plus adapté est celui faisant intervenir une loi Gamma.

Nous avons donc décidé de retenir les modèles de Poisson sur-dispersée (car ce modèle nous fournit les mêmes résultats que le modèle Chain-Ladder) ainsi que le modèle avec loi Gamma.

Remarque :

Les données chiffrées détaillées des modèles retenus figurent en annexe.

I.3 Calcul des coefficients de corrélation sur les triangles de probabilités

a) Justification.

Comme nous l'avons déjà vu au point 1, les coefficients de corrélation que nous avons calculés nous ont permis d'identifier les risques ayant une liquidation similaire. Mais ils ne nous ont pas renseigné sur le lien existant entre les montants de deux risques considérés.

Ainsi, un montant important en 1^{ère} année en RC Matérielle et en Dommages Automobile est « normal » car ces risques, courts, se liquident très rapidement. Mais les coefficients de corrélation calculés au point I.1 ne nous permettent pas de dire qu'un montant plus important « que d'habitude » en 1^{ère} année en RC Matérielle se traduira par un montant plus important « que d'habitude » en 1^{ère} année en Dommages Automobile.

Autrement dit, ces coefficients ne permettent pas d'établir une corrélation entre mauvaise (ou bonne) année.

Ainsi, pour prendre l'exemple de l'étude entre RC Matérielle Automobile et Dommages Automobile, avec une modélisation Gamma :

➤ *Triangles en montants :*

RC Matérielle

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1994	40 186	19 583	1 629	664	328	119	21	282	27	19	879
1995	41 599	19 090	1 907	639	289	112	54	34	34	12	
1996	37 694	20 923	1 979	609	237	197	56	76	6		
1997	38 589	21 579	2 245	976	419	208	200	111			
1998	39 721	27 930	2 235	1 033	559	322	124				
1999	45 195	26 568	4 012	1 799	679	198					
2000	44 399	31 563	5 334	1 608	788						
2001	51 475	30 483	4 522	873							
2002	44 797	24 690	2 255								
2003	37 592	16 380									
2004	25 279										

Dommages Auto

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1994	100 763	30 935	1 567	511	87	130	184	40	10	16	14
1995	93 848	29 614	1 008	353	70	136	83	142	20	6	
1996	89 894	27 055	915	368	147	149	113	90	29		
1997	92 430	26 828	1 063	934	329	218	254	47			
1998	101 802	30 796	1 938	757	542	358	46				
1999	102 018	39 758	2 414	726	628	280					
2000	104 973	45 736	2 770	944	299						
2001	118 255	44 440	3 172	739							
2002	109 579	34 702	1 628								
2003	95 895	21 448									
2004	66 336										

Ainsi, un fort coefficient de corrélation entre ces montants découle tout naturellement de la liquidation : pour chaque année de survenance, c'est en première année que l'on constate les montants les plus élevés. Peut-on pour autant dire qu'une année exceptionnelle en Dommages est constatée en même temps qu'une année exceptionnelle en RC Matérielle ?

➤ *Corrélations sur les résidus normalisés.*

Nous venons de modéliser nos données dans le cadre d'un modèle GLM, nous pouvons donc désormais nous appuyer sur les résultats de ces modélisations afin de déterminer un coefficient de corrélation sur des données « normalisées » et reflétant donc la véritable corrélation entre les variables et non pas une similarité de liquidation.

Nous souhaitons déterminer la corrélation entre deux variables aléatoires y et z , dans le cadre de modèles linéaires généralisés, avec en variables explicatives X les années de survenance et les années de développement. Ces variables explicatives sont donc identiques dans les deux modèles.

Nous pouvons donc écrire $y = \alpha X + e$ et $z = \alpha' X + e'$.

Sous les hypothèses que les variables explicatives X sont certaines et que ces variables explicatives sont indépendantes des résidus e et e' , déterminer la corrélation entre y et z revient donc à déterminer la corrélation entre e et e' .

Le calcul effectué lors du point I.1 sur les règlements C_{ij} ne donnait pas des résultats pertinents car ces variables, supposées indépendantes, ne sont pas identiquement distribuées (elles n'ont pas la même variance). Ce problème demeure si on effectue le calcul de la corrélation sur les résidus e et e' .

Il nous faut donc travailler sur les résidus de Pearson définis par $r_{p_i} = \frac{y_i - \hat{\mu}_i}{\sqrt{V(\hat{\mu}_i)}}$ ou plutôt sur les résidus de

Pearson normalisés $r^*_{p_i} = \frac{y_i - \hat{\mu}_i}{\sqrt{V(\hat{\mu}_i)(1 - h_i)}}$ qui, par le biais du levier h_i , ont une variance asymptotique unitaire.

Nous obtenons alors les résultats suivants selon les deux modèles GLM retenus.

➤ *Loi Poisson sur-dispersée :*

Coefficient de corrélation de Pearson

Coefficients de corrélation de Pearson, $N = 66$				
Prob > r under H_0 : $Rho=0$				
	RC Matérielle	Dommages Auto	DAB Particuliers	DAB Professionnels
RC Matérielle	1	0,65021 <,0001	0,56978 <,0001	0,18379 0,146
Dommages Auto	0,65021 <,0001	1	0,64791 <,0001	0,58375 <,0001
DAB Particuliers	0,56978 <,0001	0,64791 <,0001	1	0,32242 0,0094
DAB Professionnels	0,18379 0,146	0,58375 <,0001	0,32242 0,0094	1

Coefficient de corrélation de Spearman

Coefficients de corrélation de Spearman, N = 66				
Prob > r under H0: Rho=0				
	RC Matérielle	Dommages Auto	DAB Particuliers	DAB Professionnels
RC Matérielle	1	0,60435 <,0001	0,55701 <,0001	0,26946 0,0313
Dommages Auto	0,60435 <,0001	1	0,65302 <,0001	0,63695 <,0001
DAB Particuliers	0,55701 <,0001	0,65302 <,0001	1	0,29835 0,0166
DAB Professionnels	0,26946 0,0313	0,63695 <,0001	0,29835 0,0166	1

Coefficient de corrélation de Kendall

Coefficients de corrélation du Tau b de Kendall, N = 66				
Prob > r under H0: Rho=0				
	RC Matérielle	Dommages Auto	DAB Particuliers	DAB Professionnels
RC Matérielle	1	0,44147 <,0001	0,42063 <,0001	0,20635 0,0159
Dommages Auto	0,44147 <,0001	1	0,46131 <,0001	0,46329 <,0001
DAB Particuliers	0,42063 <,0001	0,46131 <,0001	1	0,2123 0,0132
DAB Professionnels	0,20635 0,0159	0,46329 <,0001	0,2123 0,0132	1

Par rapport aux résultats obtenus au point I.1, on constate une forte baisse des coefficients de corrélations calculés.

Ces coefficients demeurent toutefois positifs ce qui dénote une corrélation positive entre les risques considérés.

➤ *Loi Gamma :*

Coefficient de corrélation de Pearson

Coefficients de corrélation de Pearson, N = 66				
Prob > r under H0: Rho=0				
	RC Matérielle	Dommages Auto	DAB Particuliers	DAB Professionnels
RC Matérielle	1	-0,00721 0,9549	0,13448 0,2894	-0,03981 0,7548
Dommages Auto	-0,00721 0,9549	1	0,27086 0,0304	0,34256 0,0056
DAB Particuliers	0,13448 0,2894	0,27086 0,0304	1	-0,06966 0,5844
DAB Professionnels	-0,03981 0,7548	0,34256 0,0056	-0,06966 0,5844	1

Coefficient de corrélation de Spearman

Coefficients de corrélation de Spearman, $N = 66$				
Prob $> r $ under $H_0: \rho=0$				
	RC Matérielle	Dommages Auto	DAB Particuliers	DAB Professionnels
RC Matérielle	1	0,24565 0,0504	0,32001 0,0099	0,17152 0,1754
Dommages Auto	0,24565 0,0504	1	0,36575 0,003	0,39863 0,0011
DAB Particuliers	0,32001 0,0099	0,36575 0,003	1	0,04107 0,7473
DAB Professionnels	0,17152 0,1754	0,39863 0,0011	0,04107 0,7473	1

Coefficient de corrélation de Kendall

Coefficients de corrélation du Tau b de Kendall, $N = 66$				
Prob $> r $ under $H_0: \rho=0$				
	RC Matérielle	Dommages Auto	DAB Particuliers	DAB Professionnels
RC Matérielle	1	0,18552 0,0302	0,22321 0,0091	0,12798 0,135
Dommages Auto	0,18552 0,0302	1	0,26984 0,0016	0,29563 0,0006
DAB Particuliers	0,22321 0,0091	0,26984 0,0016	1	0,02976 0,7281
DAB Professionnels	0,12798 0,135	0,29563 0,0006	0,02976 0,7281	1

Dans ce cas aussi les coefficients sont beaucoup moins élevés. Ils sont de plus beaucoup plus faibles que ceux obtenus avec la modélisation Poisson sur-dispersée.

b) Coefficients de corrélation sur les triangles de probabilités

Une méthode alternative pour déterminer quels sont les risques corrélés consiste à calculer un coefficient de corrélation sur les triangles de probabilités.

Cette méthode nous permet elle aussi en effet de faire disparaître l'effet lié à la distribution des montants C_{ij} .

Ces probabilités s'interprètent comme le rang que prendrait l'observation réalisée, suivant la loi suivie par la variable aléatoire montant de règlements C_{ij} . Cette interprétation est fondamentale pour la suite de notre étude car c'est à partir de ces données en probabilités que nous effectuerons notre travail dans le cadre de la théorie des copules, et c'est sur la base de ces rangs que nous prendrons en compte la corrélation dans le cadre de notre Bootstrap.

Pour reprendre l'exemple cité dans le point précédent, si nous remplaçons dans les triangles les montants par la probabilité que ceux-ci avaient de se réaliser, d'après la modélisation GLM retenue (Poisson sur-dispersée ou Gamma), nous obtiendrons dès lors une vision plus précise de cette éventuelle corrélation entre mauvaise (ou bonne) année.

➤ *Détermination des triangles en probabilités :*

Pour déterminer ces probabilités, nous nous sommes donc appuyés aussi sur les modélisations GLM effectuées auparavant, et qui nous fournissaient donc pour chaque C_{ij} , l'espérance et la variance estimées.

Ainsi, par exemple, nous avons pour la RC Matérielle, survenance 1995, année de développement 2 (cf. annexe)

Règlements observés = 19 090

Estimation par le modèle GLM avec une loi Gamma :

$$\hat{\mu} = 17,4369$$

$$\hat{\alpha}_{1995} = 0,0144$$

$$\hat{\beta}_2 = -0,5676$$

$$\eta_{1995,2} = 16,6067$$

$$\sigma_{\eta_{1995,2}} = 0,1491$$

On recherche alors la probabilité $P[\ln(19090) < \text{Normale}(16,6067 ; 0,1491)] = 85,54\%$

On peut interpréter cette valeur ainsi : sur 100 réalisations de la variable aléatoire montant de règlement $C_{1995,2}$ la valeur observée a un rang de 86.

On obtient alors les triangles suivants :

RC Matérielle

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1994	77%	49%	3%	16%	28%	2%	0%	100%	62%	69%	50%
1995	99%	86%	61%	48%	41%	9%	12%	0%	99%	30%	
1996	97%	98%	78%	46%	12%	99%	25%	8%	0%		
1997	14%	17%	8%	46%	28%	42%	100%	3%			
1998	7%	52%	2%	36%	71%	96%	69%				
1999	6%	13%	74%	98%	79%	4%					
2000	1%	17%	92%	68%	78%						
2001	36%	51%	94%	6%							
2002	62%	63%	25%								
2003	67%	31%									
2004	50%										

Dommages Auto

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1994	95%	92%	91%	69%	0%	11%	99%	0%	0%	91%	50%
1995	96%	96%	21%	13%	0%	32%	7%	100%	62%	3%	
1996	83%	74%	3%	9%	5%	36%	38%	73%	96%		
1997	23%	10%	0%	99%	87%	51%	99%	0%			
1998	15%	9%	45%	55%	100%	97%	0%				
1999	3%	20%	54%	15%	100%	34%					
2000	7%	59%	87%	74%	19%						
2001	17%	44%	94%	21%							
2002	56%	55%	39%								
2003	74%	23%									
2004	50%										

Remarques :

La valeur prévue par le modèle était de 16 301, ce qui correspond à la probabilité de 50%.

On constate bien, pour les deux risques considérés, que le modèle fixe à 50% (i.e valeur prévue = valeur observée) les valeurs des « pointes » du triangle : survenance 1994 & 11^{ème} année de développement et survenance 2004 & 1^{ère} année de développement.

➤ **Loi de Poisson sur-dispersée :**

Ces coefficients ont été calculés sur les triangles de probabilité issus de la modélisation GLM avec une loi de Poisson sur-dispersée retenue précédemment.

Coefficient de corrélation de Pearson

Coefficients de corrélation de Pearson, N = 66				
Prob > r under H0: Rho=0				
	RC Matérielle	Dommages Auto	DAB Particuliers	DAB Professionnels
p22C	0,22122 0,0742	0,31374 0,0103	0,32304 0,0082	0,18212 0,1433
RC Matérielle	1 <,0001	0,53059 <,0001	0,40435 0,0008	0,28927 0,0185
Dommages Auto	0,53059 <,0001	1	0,50064 <,0001	0,51031 <,0001
DAB Particuliers	0,40435 0,0008	0,50064 <,0001	1	0,12805 0,3055
DAB Professionnels	0,28927 0,0185	0,51031 <,0001	0,12805 0,3055	1

Coefficient de corrélation de Spearman

Coefficients de corrélation de Spearman, N = 66				
Prob > r under H0: Rho=0				
	RC Matérielle	Dommages Auto	DAB Particuliers	DAB Professionnels
p22C	0,23706 0,0553	0,30254 0,0135	0,33874 0,0054	0,17641 0,1565
RC Matérielle	1 <,0001	0,51012 <,0001	0,41078 0,0006	0,31158 0,0109
Dommages Auto	0,51012 <,0001	1	0,47524 <,0001	0,53545 <,0001
DAB Particuliers	0,41078 0,0006	0,47524 <,0001	1	0,1195 0,3392
DAB Professionnels	0,31158 0,0109	0,53545 <,0001	0,1195 0,3392	1

Coefficient de corrélation de Kendall

Coefficients de corrélation du Tau b de Kendall, N = 66				
Prob > r under H0: Rho=0				
	RC Matérielle	Dommages Auto	DAB Particuliers	DAB Professionnels
p22C	0,23445 0,0504	0,30092 0,012	0,33593 0,005	0,17654 0,1406
RC Matérielle	1 <,0001	0,50382 <,0001	0,40411 0,0007	0,30521 0,0104
Dommages Auto	0,50382 <,0001	1	0,46995 <,0001	0,5256 <,0001
DAB Particuliers	0,40411	0,46995	1	0,1185

	0,0007	<,0001		0,3194
DAB Professionnels	0,30521	0,5256	0,1185	
	0,0104	<,0001	0,3194	1

Comme le calcul sur les résidus normalisés, le calcul sur les probabilités conduit à des coefficients beaucoup plus faibles que ceux obtenus lors du point I .1.

➤ *Loi Gamma* :

Ces coefficients ont été calculés sur les triangles de probabilité issus de la modélisation GLM Gamma retenue précédemment.

Coefficient de corrélation de Pearson

Coefficients de corrélation de Pearson, N = 66				
Prob > r under H0: Rho=0				
	RC Matérielle	Dommages Auto	DAB Particuliers	DAB Professionnels
RC Matérielle	1	0,30693 0,0122	0,32798 0,0072	0,23901 0,0533
Dommages Auto	0,30693 0,0122	1	0,36867 0,0023	0,44167 0,0002
DAB Particuliers	0,32798 0,0072	0,36867 0,0023	1	0,02101 0,867
DAB Professionnels	0,23901 0,0533	0,44167 0,0002	0,02101 0,867	1

Coefficient de corrélation de Spearman

Coefficients de corrélation de Spearman, N = 66				
Prob > r under H0: Rho=0				
	RC Matérielle	Dommages Auto	DAB Particuliers	DAB Professionnels
RC Matérielle	1	0,24279 0,0495	0,30527 0,0127	0,18568 0,1355
Dommages Auto	0,24279 0,0495	1	0,34527 0,0045	0,44966 0,0002
DAB Particuliers	0,30527 0,0127	0,34527 0,0045	1	0,05073 0,6859
DAB Professionnels	0,18568 0,1355	0,44966 0,0002	0,05073 0,6859	1

Coefficient de corrélation de Kendall

Coefficients de corrélation du Tau b de Kendall, N = 66				
Prob > r under H0: Rho=0				
	RC Matérielle	Dommages Auto	DAB Particuliers	DAB Professionnels
RC Matérielle	1	0,17855 0,034	0,22569 0,0074	0,1366 0,1049
Dommages Auto	0,17855 0,034	1	0,2546 0,0025	0,3296 <,0001
DAB Particuliers	0,22569 0,0074	0,2546 0,0025	1	0,05129 0,5427
DAB Professionnels	0,1366 0,1049	0,3296 <,0001	0,05129 0,5427	1

Ces coefficients confirment les résultats obtenus sur les résidus normalisés.

En effet, l'étude de la corrélation sur les triangles de probabilité, plutôt que sur les triangles en montant, amène là aussi à des coefficients beaucoup moins élevés et des corrélations plus fortes sur certains segments.

De la même façon, ces coefficients avec une modélisation Gamma sont beaucoup plus faibles que ceux obtenus avec la modélisation Poisson sur-dispersée.

Par la suite, nous retiendrons les coefficients de corrélation déterminés sur ces probabilités, plutôt que sur les résidus normalisés, car comme nous l'avons vu, nous utiliserons ces probabilités dans le cadre du Bootstrap et de la théorie des copules.

II. MODELISATION DE LA CORRELATION.

II.1 Par la technique du Bootstrap

a) Méthodologie du Bootstrap

➤ *La procédure générale du Bootstrap :*

- ① Estimation des paramètres du modèle
- ② Calcul des valeurs « attendues » d'après ce modèle estimé
- ③ Détermination des résidus entre les valeurs réelles et les valeurs « attendues »
- ④ Création de nouvelles valeurs par l'ajout de résidus tirés au hasard aux valeurs attendues
- ⑤ Application des paramètres du modèle à ces pseudo-valeurs afin de déterminer le montant des réserves
- ⑥ Répétition des étapes ④ et ⑤ un grand nombre de fois (1000 – 5000 fois)
- ⑦ Détermination des moyenne et variance empirique ainsi que des intervalles de confiance

Dans le cas de modèle linéaire ($y=f(X)$), il est possible de pratiquer la méthode de Bootstrap :

- soit directement sur les observations : y et X
- soit sur les résidus du modèle

Le Bootstrap devant être appliqué sur des variables i.i.d, nous l'appliquerons sur les résidus (2nde méthode) car effectivement, les C_{ij} ne sont pas i.i.d.

Dans le cadre d'un modèle GLM, plusieurs résidus peuvent être utilisés, mais England et Verrall (1999)

recommande l'usage du résidu de Pearson: $r_{p_i} = \frac{y_i - \hat{\mu}_i}{\sqrt{V(\hat{\mu}_i)}}$

Remarque :

Pour correction de biais dans la comparaison des estimations analytique et bootstrap d'erreur de prédiction, il est recommandé d'intégrer le nombre de paramètres de régression p du modèle dans l'erreur bootstrap de prédiction.

Les résidus bootstrappés doivent alors être tirés avec remise dans les résidus ajustés : $\sqrt{\frac{n}{n-p}} r_{p_i}$

➤ *Processus utilisé dans notre cas (Bootstrap seul):*

1. Estimation des paramètres du modèle par une modélisation GLM (Poisson sur-dispersée ou Gamma) = résultats obtenus dans la section I.3 de cette partie
2. Calcul des valeurs « attendues » d'après ce modèle estimé
3. Calcul des résidus de Pearson selon la formule $r_{p_i} = \frac{y_i - \hat{\mu}_i}{\sqrt{V(\hat{\mu}_i)}}$
4. Création d'un nouveau triangle par tirage aléatoire avec remise de ces résidus et calcul des pseudo-valeurs selon la formule $pseudo - valeur = r_{p_i} * \sqrt{V(\hat{\mu}_i)} + \hat{\mu}_i$

5. Modélisation GLM sur ce triangle de pseudo-valeurs et calcul des valeurs attendues = étapes similaires aux étapes 1 et 2 décrites précédemment mais appliquées au triangle de pseudo-valeurs calculé lors de l'étape 4
6. Répétition des étapes 4 et 5 durant 10 000 itérations

➤ *Vérification du caractère i.i.d des résidus utilisés :*

On rappelle les hypothèses portant sur les résidus à utiliser, qui doivent être indépendants identiquement distribués (i.i.d) selon une loi normale :

- | | |
|---|---|
| (1) $E(r_{p_i})=0$ | (2) $V(r_{p_i})=\sigma^2$ constante |
| (3) $Cov(r_{p_i}, r_{p_j})=0$ pour $i \neq j$ | (4) $r_{p_i} \approx \text{Nor}(0, \sigma^2)$ |

Via la procédure UNIVARIATE de SAS, nous avons testé ces hypothèses (cf. les données et graphiques en annexe pour plus de détails).

Tous les tests satisfont l'hypothèse (1). Les graphiques des résidus en fonction de l'année de survenance et des valeurs prédites ne laissent pas apparaître de structure non aléatoire. En revanche les résidus en fonction de l'année de développement, pour une loi de Poisson sur-dispersée ont une légère forme d'entonnoir ce qui pourrait éventuellement invalider notre hypothèse (2). Nous supposons toutefois que cette hypothèse est vérifiée.

Enfin, en plus des différents tests d'adéquation à une loi Normale : Kolmogorov-Smirnov (KS), Anderson-Darling (AD) et Cramer-Von Mises (CvM) fournis par SAS et que l'on peut retrouver en annexe, nous avons généré les graphiques QQ-Plot. Dans ces graphiques, pour que l'hypothèse d'adéquation à la loi soit vérifiée, les résidus doivent être sensiblement alignés sur une droite passant par l'origine et ayant une pente positive.

On rappelle les statistiques de test utilisées par SAS : si on note F la fonction de répartition que l'on cherche à valider, et $U = F(X)$ alors on a :

Kolmogorov – Smirnov :

$$D^+ = \max_i \left(\frac{i}{n} - U_{(i)} \right)$$

$$D^- = \max_i \left(U_{(i)} - \frac{i-1}{n} \right)$$

$$D = \max(D^+, D^-)$$

Anderson-Darling (statistique de test pour les distributions normale et log-normale):

$$A^2 = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[(2i-1) \ln U_{(i)} + (2n+1-2i) \ln(1-U_{(i)}) \right]$$

Cette statistique doit être légèrement modifiée quand n la taille de l'échantillon est petite :

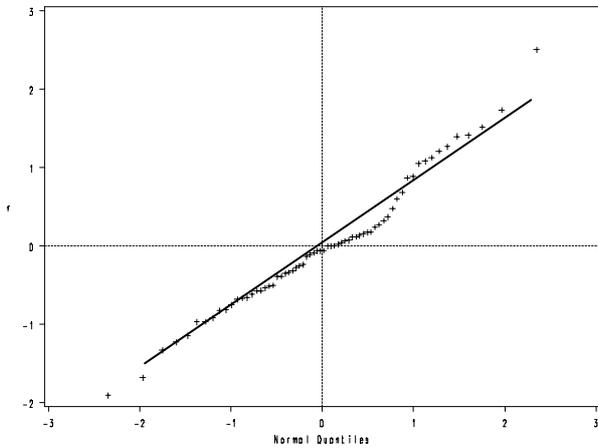
$$A_m^2 = A^2 \left(1 + \frac{0.75}{n} + \frac{2.25}{n^2} \right)$$

Cramer-Von Mises

$$W^2 = \sum_{i=1}^n \left(U_{(i)} - \frac{2i-1}{2n} \right)^2 + \frac{1}{12n}$$

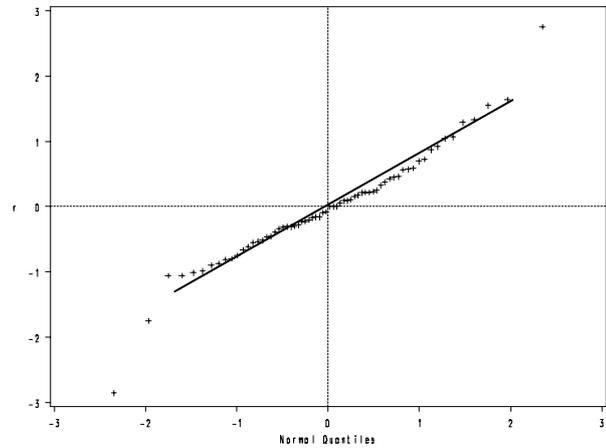
Modélisation GLM par une loi de Poisson sur-dispersée:

RC Matérielle



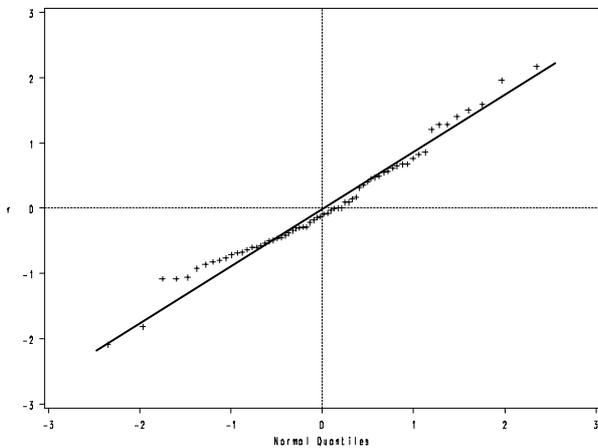
KS : hypothèse rejetée à 5%
 AD : hypothèse rejetée à 5% mais acceptée à 4%
 CvM : hypothèse acceptée à 5%

Dommages Auto



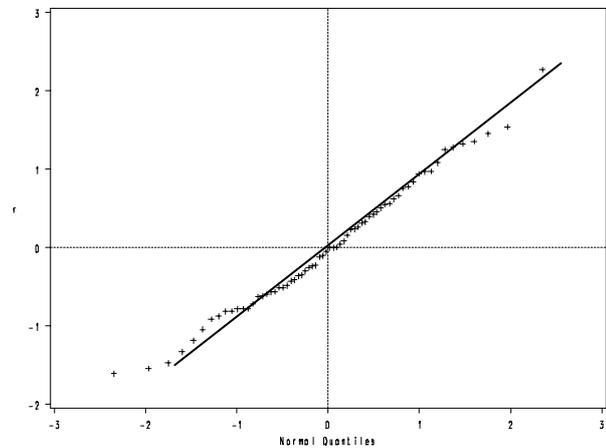
KS : hypothèse acceptée à 5%
 AD : hypothèse acceptée à 5%
 CvM : hypothèse acceptée à 5%

DAB Particuliers



KS : hypothèse acceptée à 5%
 AD : hypothèse acceptée à 5%
 CvM : hypothèse acceptée à 5%

DAB Professionnels



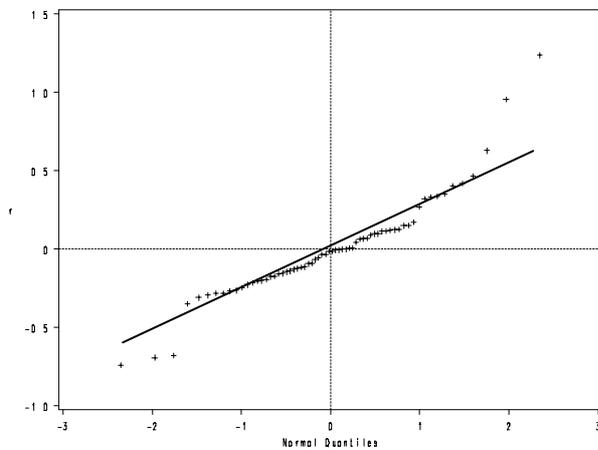
KS : hypothèse acceptée à 5%
 AD : hypothèse acceptée à 5%
 CvM : hypothèse acceptée à 5%

Excepté pour la RC Matérielle qui est à la limite, l'hypothèse de normalité des résidus semble bien vérifiée pour la modélisation par une loi de Poisson sur-dispersée.

On vérifie bien que les points sont alignés sur une droite passant par l'origine et de pente positive, hormis pour les valeurs extrêmes.

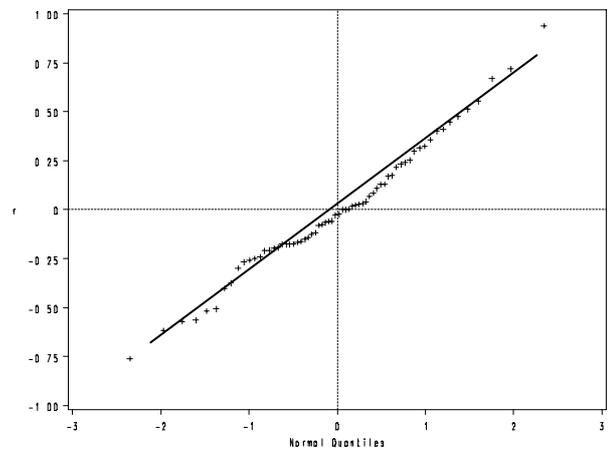
Modélisation GLM par une loi Gamma:

RC Matérielle



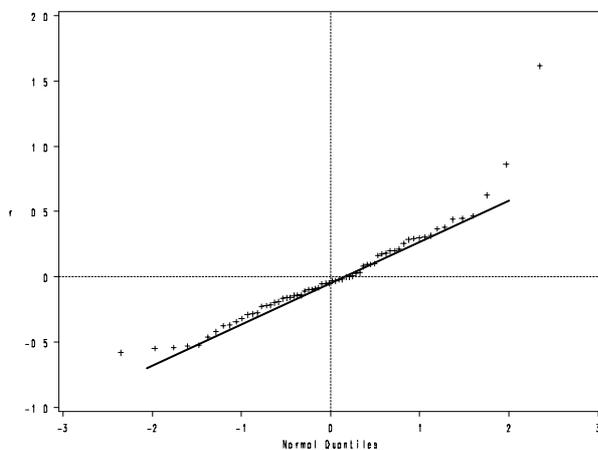
KS : hypothèse rejetée à 5%
 AD : hypothèse rejetée à 5%
 CvM : hypothèse rejetée à 5%

Dommages Auto



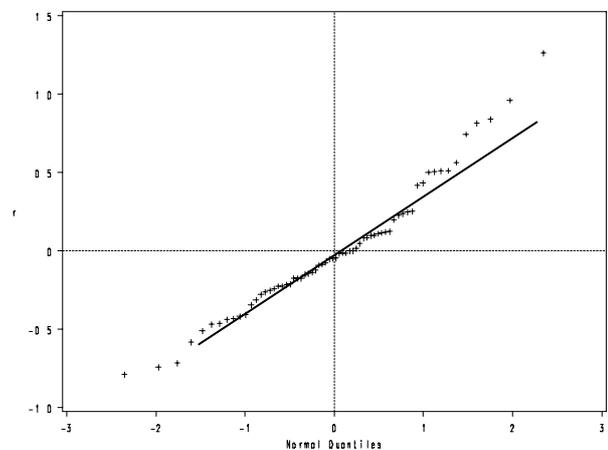
KS : hypothèse acceptée à 5%
 AD : hypothèse acceptée à 5%
 CvM : hypothèse acceptée à 5%

DAB Particuliers



KS : hypothèse acceptée à 5%
 AD : hypothèse acceptée à 5%
 CvM : hypothèse rejetée à 5%

DAB Professionnels



KS : hypothèse rejetée à 5%
 AD : hypothèse rejetée à 5%
 CvM : hypothèse rejetée à 5%

L'adéquation des résidus à une loi normale est moins évidente pour les modélisations GLM par une loi Gamma. Ainsi, celle-ci est rejetée pour deux risques sur les quatre considérés : la RC Matérielle et le DAB Professionnels.

Nous effectuerons tout de même notre Bootstrap sur ces deux risques tout en gardant à l'esprit dans nos futurs commentaires ce problème.

➤ *Processus utilisé pour prendre en compte la corrélation:*

Nous avons choisi de retenir la 2^{ème} approche possible, dans laquelle on suppose connue la matrice de corrélation de rangs existant entre les deux catégories ministérielles considérées.

Effectivement, la 1^{ère} approche posait des problèmes de mise en oeuvre car elle nécessite que les simulations Bootstrap des deux risques considérés soient faites en même temps. Or, comme nous souhaitons effectuer 10 000 simulations, cela nécessiterait que la puissance de notre machine puisse gérer simultanément $55 \times 10\,000 \times 2 = 1\,100\,000$ observations et qu'elle soit capable d'effectuer $10\,000 \times 2 = 20\,000$ modélisations GLM à chaque Bootstrap. Il était donc plus simple de retenir la 2^{ème} approche dans laquelle le processus est décomposé en deux étapes séparant la simulation Bootstrap de la prise en compte de la corrélation.

De plus, cette hypothèse de connaissance de la matrice de corrélation, indispensable à cette approche, a déjà été faite dans le cadre du modèle à choc commun.

- Calcul des rangs, pour chaque cellule du triangle (année de survenance \times année de développement = 55 cellules), sur les 10 000 simulations effectuées, et ce pour les deux catégories ministérielles étudiées. On obtient pour chaque cellule du triangle :
 $\text{rang} (c_{ij}^{1,b}) = \text{rang de la simulation n}^\circ b, \text{ pour la catégorie ministérielle n}^\circ 1, \text{ pour l'année de survenance } i \text{ et l'année de développement } j \text{ (} b=1, \dots, 10\,000 \text{)}$
 $\text{rang} (c_{ij}^{2,b}) = \text{rang de la simulation n}^\circ b, \text{ pour la catégorie ministérielle n}^\circ 2, \text{ pour l'année de survenance } i \text{ et l'année de développement } j \text{ (} b=1, \dots, 10\,000 \text{)}$
- Création de 10 000 couples de normale bivariable $X \approx \text{Nor}(0,1)$ et $Y^{\text{ind}} \approx \text{Nor}(0,1)$, X et Y^{ind} indépendantes, pour chaque cellule du triangle

La dépendance sera prise en compte à l'aide de la décomposition de Cholesky, sur la base du coefficient de corrélation de rang de la modélisation retenue (Poisson sur-dispersée ou Gamma) ρ .
(cf. tableaux de la section I.3 de cette partie)

On rappelle que si on note Σ la matrice de corrélation, alors on peut construire la matrice triangulaire inférieure B via la décomposition de Cholesky, avec $\Sigma = BB'$. Dans le cas bivarié, cela conduit à la matrice B suivante :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} \end{bmatrix}$$

$$\text{On a alors } \begin{pmatrix} X \\ Y^{\text{dep}} \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y^{\text{ind}} \end{pmatrix}$$

Et X et Y^{dep} sont alors deux variables aléatoires normales corrélées avec le coefficient de corrélation ρ .

- Calcul des 10 000 couples de rang indépendants et dépendants, pour chaque cellule du triangle, issus des 10 000 couples de normale bivariable précédents.

On obtient alors :

$\text{rang} (X_{ij}^b) = \text{rang}$ de la simulation n° b , pour la variable X , pour l'année de survenance i et l'année de développement j

$\text{rang} (Y_{ij}^{\text{ind},b}) = \text{rang}$ de la simulation n° b , pour la variable Y^{ind} , pour l'année de survenance i et l'année de développement j

$\text{rang} (Y_{ij}^{\text{dep},b}) = \text{rang}$ de la simulation n° b , pour la variable Y^{dep} , pour l'année de survenance i et l'année de développement j

- Application de ces 10 000 couples de rang aux rangs trouvés lors de la première étape, on ré-ordonne donc les simulations trouvées lors de la procédure Bootstrap, selon les rangs obtenus sur les couples de normale bivariée, c'est-à-dire :

Dans le cas indépendant, pour la simulation n° b :

$c_{ij}^1 = \text{valeur de } c_{ij}^{1,s}$ telle que $\text{rang} (c_{ij}^{1,s}) = \text{rang} (X_{ij}^b)$, ($s=1, \dots, 10\ 000$)

$c_{ij}^2 = \text{valeur de } c_{ij}^{2,r}$ telle que $\text{rang} (c_{ij}^{2,r}) = \text{rang} (Y_{ij}^{\text{ind},b})$, ($r=1, \dots, 10\ 000$)

On obtient alors 10 000 simulations de $ci_{ij}^{\text{tot}} = c_{ij}^1 + ci_{ij}^2$, et de $R_{\text{indep}} = \sum_{i+j \geq n} ci_{ij}^{\text{tot}}$ et on peut dès lors calculer

l'espérance et la variance empiriques sur cet échantillon simulé dans le cas indépendant.

Dans le cas dépendant, pour la simulation n° b :

$c_{ij}^1 = \text{valeur de } c_{ij}^{1,s}$ telle que $\text{rang} (c_{ij}^{1,s}) = \text{rang} (X_{ij}^b)$, ($s=1, \dots, 10\ 000$)

$cd_{ij}^2 = \text{valeur de } c_{ij}^{2,t}$ telle que $\text{rang} (c_{ij}^{2,t}) = \text{rang} (Y_{ij}^{\text{dep},b})$, ($t=1, \dots, 10\ 000$)

On obtient alors 10 000 simulations de $cd_{ij}^{\text{tot}} = c_{ij}^1 + cd_{ij}^2$, et de $R_{\text{dep}} = \sum_{i+j \geq n} cd_{ij}^{\text{tot}}$ et on peut dès lors calculer

l'espérance et la variance empiriques sur cet échantillon simulé dans le cas dépendant.

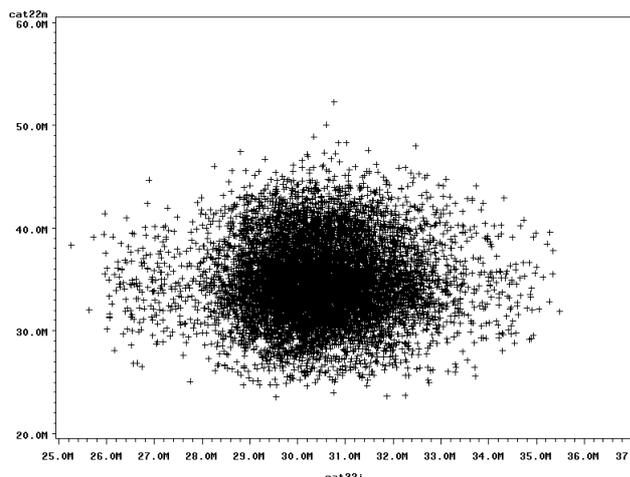
c] Résultats

➤ *Bootstrap sur modélisation GLM Poisson sur-dispersée:*

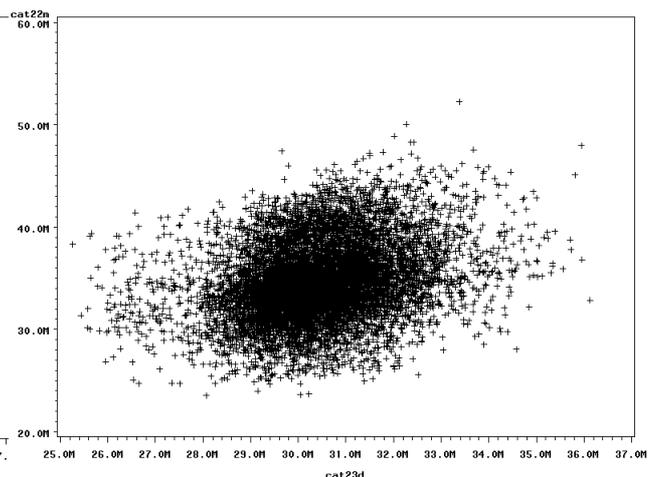
RC Matérielle et Dommages Auto:

	Bootstrap indépendant		Bootstrap corrélé		Chain-Ladder stochastique	
	Moy empirique	écart-type emp.	Moy empirique	écart-type emp.	Moy empirique	écart-type emp.
TOTAL	65 269	3 949	65 269	4 288	65 630	6 482

Cas indépendant



Avec corrélation



L'écart-type empirique représente 6,05% des réserves estimées dans le cas indépendant et 6,57% lorsque l'on prend en compte la corrélation, ce qui représente une augmentation de la variabilité de 8,6%. Cette augmentation provient essentiellement de la survenance 2004, pour laquelle elle est de 25,34%.

On constate bien que le nuage de points, circulaire dans le cas indépendant, s'allonge et s'étire vers les pointes selon une pente positive lorsque l'on prend en compte la corrélation.

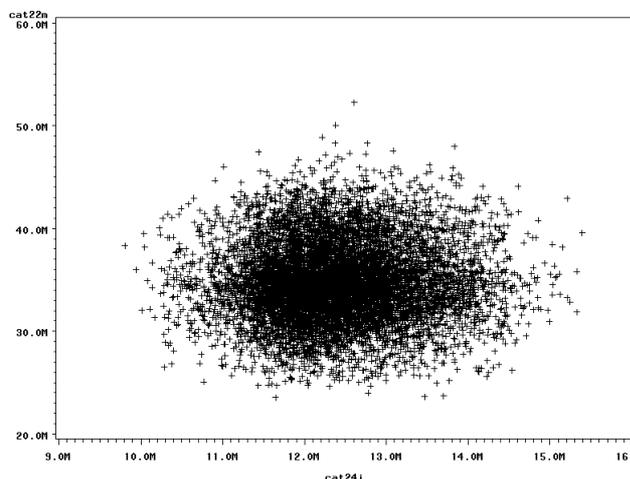
Le coefficient de corrélation pris en compte dans ce cas était de 0,50382.

Remarque : l'écart entre l'estimation Bootstrap des provisions = 65 269 et l'estimation que l'on avait obtenue par Chain-Ladder = 65 630 est de -0,55%.

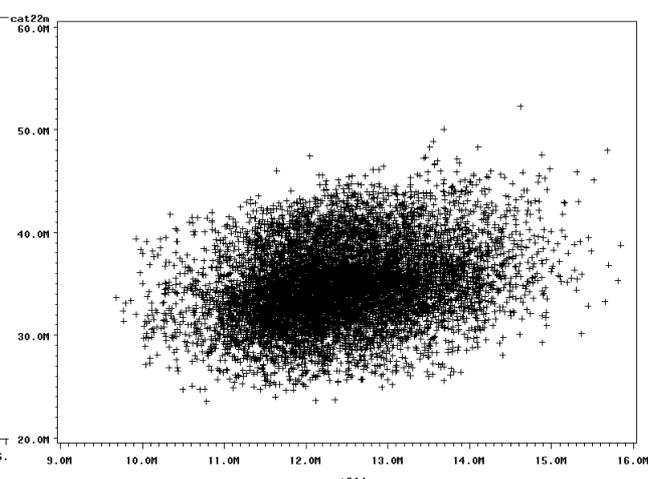
RC Matérielle et DAB Particuliers:

	<i>Bootstrap indépendant</i>		<i>Bootstrap corrélé</i>		<i>Chain-Ladder stochastique</i>	
	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>
TOTAL	47 212	3 831	47 212	4 064	47 750	4 629

Cas indépendant



Avec corrélation



L'écart-type empirique représente 8,11% des réserves estimées dans le cas indépendant et 8,61% lorsque l'on prend en compte la corrélation, ce qui représente une augmentation de la variabilité de 6,0%. Cette augmentation provient là aussi essentiellement de la survenance 2004, pour laquelle elle est de 19%.

On constate aussi que le nuage de points, circulaire dans le cas indépendant, s'allonge et s'étire vers les pointes selon une pente positive lorsque l'on prend en compte la corrélation.

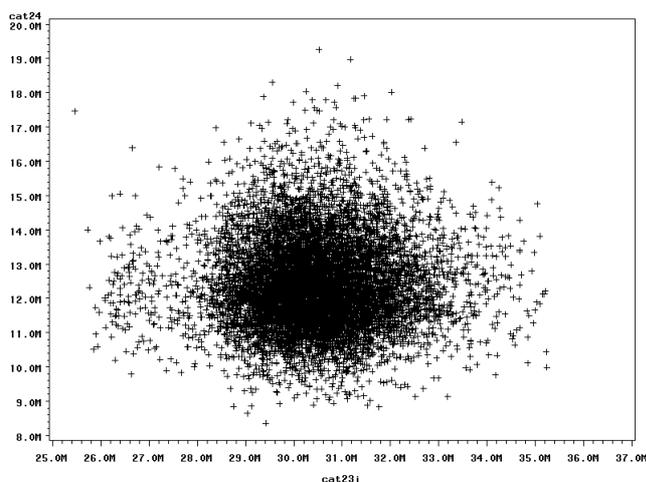
Le coefficient de corrélation pris en compte dans ce cas était de 0,40411.

Remarque : l'écart entre l'estimation Bootstrap des provisions = 47 212 et l'estimation que l'on avait obtenue par Chain-Ladder = 47 750 est de -1,13%.

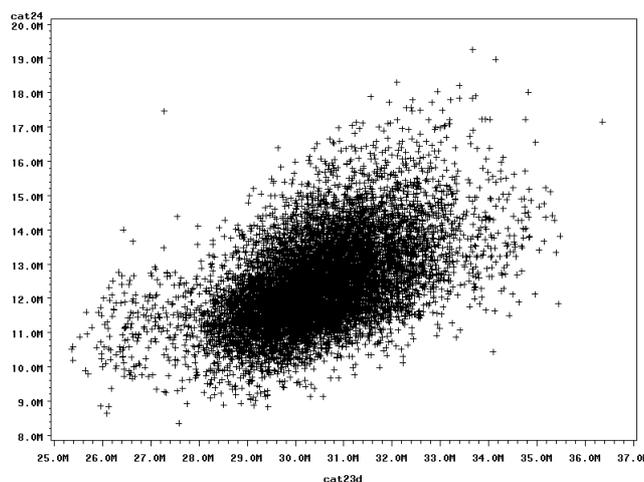
Dommages Auto et DAB Particuliers:

	<i>Bootstrap indépendant</i>		<i>Bootstrap corrélé</i>		<i>Chain-Ladder stochastique</i>	
	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>
TOTAL	42 887	1 786	42 887	2 271	43 043	5 983

Cas indépendant



Avec corrélation



L'écart-type empirique représente 4,16% des réserves estimées dans le cas indépendant et 5,30% lorsque l'on prend en compte la corrélation, ce qui représente une augmentation de la variabilité de 27,16%. Cette augmentation très importante de la variabilité est particulièrement visible sur le nuage de points, qui prend ici une légère forme d'entonnoir dans le cas dépendant, en se diffusant dans le cadran supérieur droit.

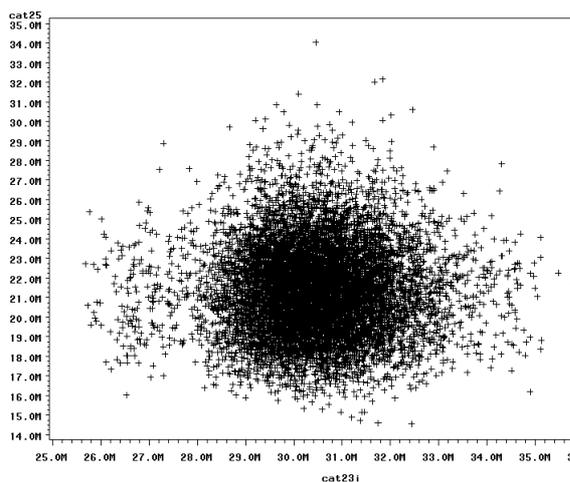
Le coefficient de corrélation pris en compte dans ce cas était de 0,46995.

Remarque : l'écart entre l'estimation Bootstrap des provisions = 42 887 et l'estimation que l'on avait obtenue par Chain-Ladder = 43 043 est de -0,36%.

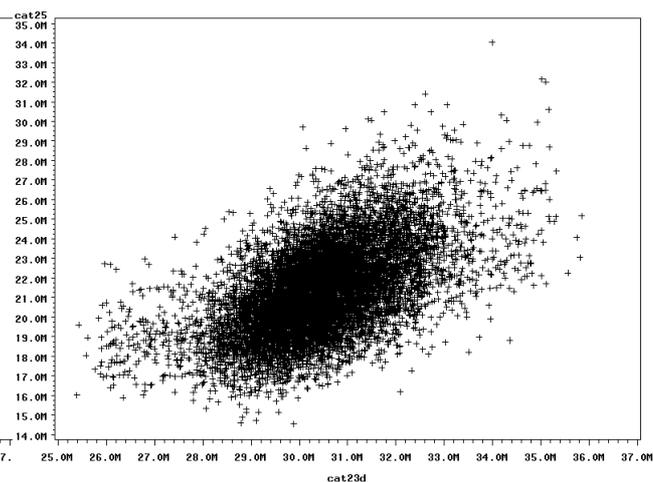
Dommages Auto et DAB Professionnels:

	<i>Bootstrap indépendant</i>		<i>Bootstrap corrélé</i>		<i>Chain-Ladder stochastique</i>	
	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>
TOTAL	51 868	2 604	51 868	3 221	51 941	7 012

Cas indépendant



Avec corrélation



L'écart-type empirique représente 5,02% des réserves estimées dans le cas indépendant et 6,21% lorsque l'on prend en compte la corrélation, ce qui représente une augmentation de la variabilité de 23,68%. A nouveau, cette augmentation très importante de la variabilité est particulièrement visible sur le nuage de points, qui s'allonge suivant une pente positive (la pente est ici plus importante que dans les deux premiers croisements étudiés).

Le coefficient de corrélation pris en compte dans ce cas était de 0,5256.

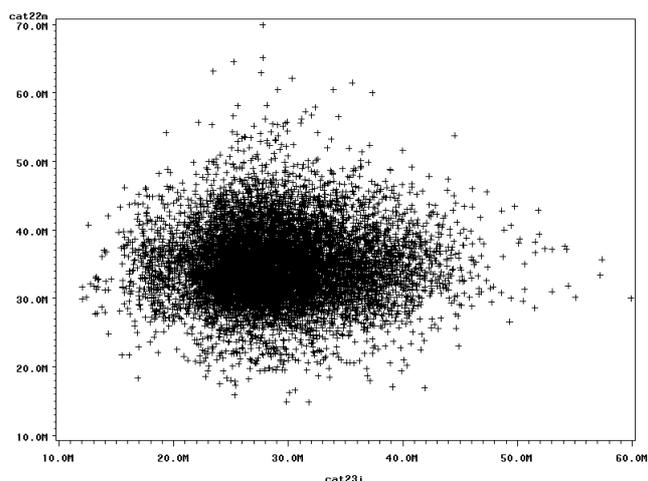
Remarque : l'écart entre l'estimation Bootstrap des provisions = 51 868 et l'estimation que l'on avait obtenue par Chain-Ladder = 51 941 est de -0,14%.

➤ *Bootstrap sur modélisation GLM Gamma:*

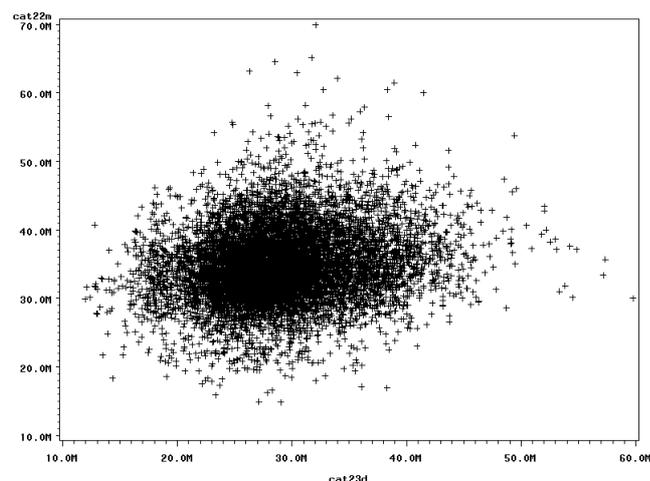
RC Matérielle et Dommages Auto:

	<i>Bootstrap indépendant</i>		<i>Bootstrap corrélé</i>		<i>Chain-Ladder stochastique</i>	
	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>
TOTAL	63 999	7 757	63 999	8 381	65 630	6 482

Cas indépendant



Avec corrélation



L'écart-type empirique représente 12,12% des réserves estimées dans le cas indépendant et 13,10% lorsque l'on prend en compte la corrélation, ce qui représente une augmentation de la variabilité de 8,04%. Graphiquement, cette augmentation n'est pas très visible car le nuage de points dans le cas indépendant avait déjà une légère forme allongée. En effet, la variabilité dans le cas indépendant avec un Bootstrap sur loi Gamma (7 757) est bien supérieure à celle obtenue avec le Bootstrap sur loi de Poisson sur-dispersée (3 949).

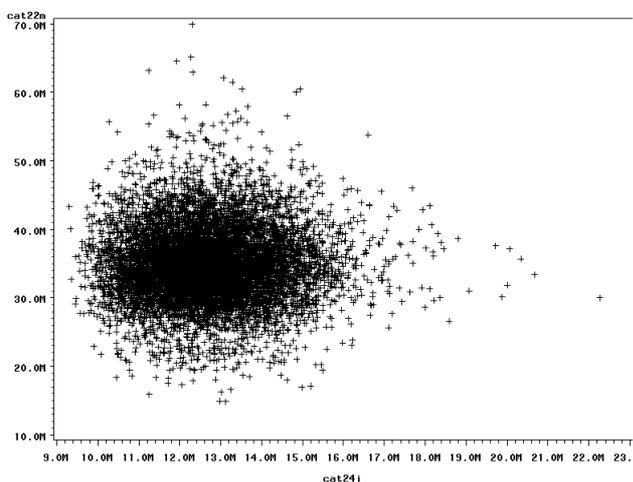
Le coefficient de corrélation pris en compte dans ce cas était de 0,17855.

Remarque : l'écart entre l'estimation Bootstrap des provisions = 63 999 et l'estimation que l'on avait obtenue par Chain-Ladder = 65 630 est de -2,49%, mais de -1,49% avec l'estimation que l'on avait obtenue par la modélisation GLM Gamma = 64 967.

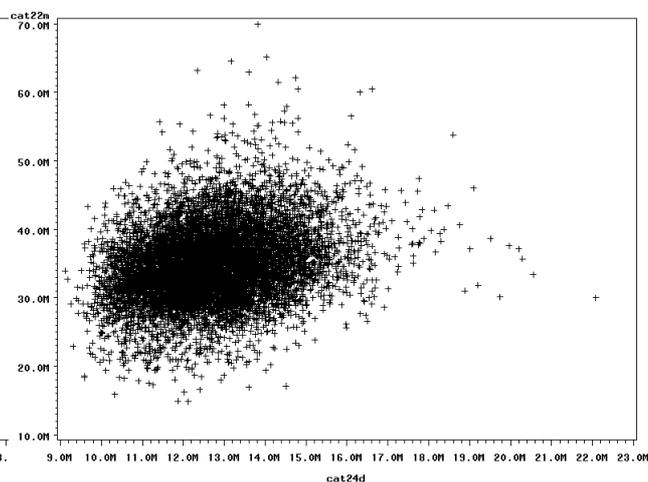
RC Matérielle et DAB Particuliers:

	Bootstrap indépendant		Bootstrap corrélé		Chain-Ladder stochastique	
	Moy empirique	écart-type emp.	Moy empirique	écart-type emp.	Moy empirique	écart-type emp.
TOTAL	47 643	5 524	47 643	5 861	47 750	4 629

Cas indépendant



Avec corrélation



L'écart-type empirique représente 11,59% des réserves estimées dans le cas indépendant et 12,30% lorsque l'on prend en compte la corrélation, ce qui représente une augmentation de la variabilité de 6,11%. Graphiquement, cette augmentation est légèrement visible: le nuage de points adopte une légère forme d'entonnoir dirigée vers le haut.

Dans ce cas, c'est la survenance 2003 qui connaît la plus grande augmentation de variabilité entre cas indépendant et cas dépendant : +11,63%.

Le coefficient de corrélation pris en compte dans ce cas était de 0,22569.

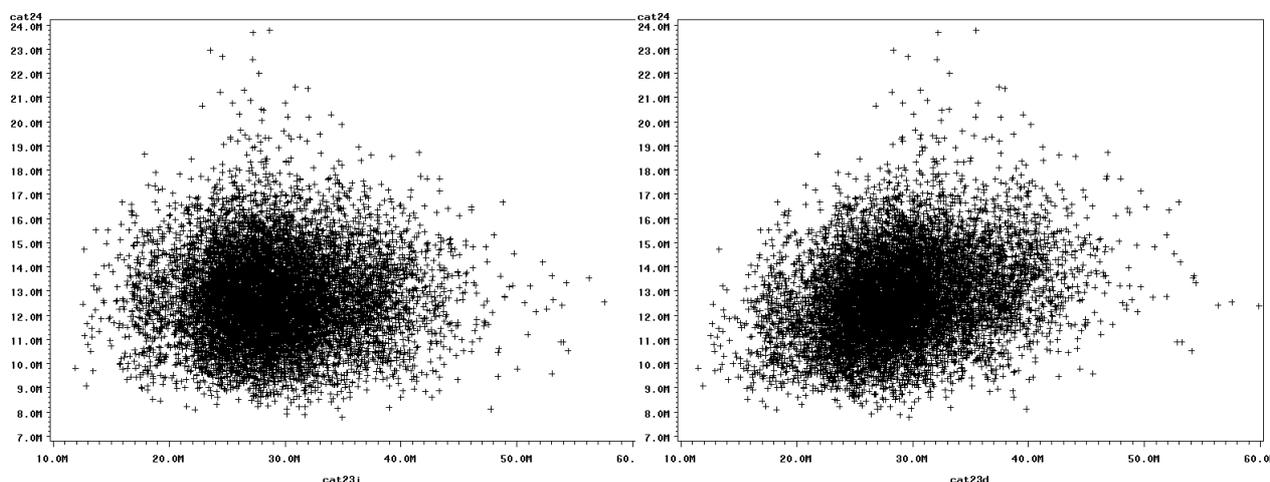
Remarque : l'écart entre l'estimation Bootstrap des provisions 47 643 et l'estimation que l'on avait obtenue par Chain-Ladder = 47 750 est de -0,22%, alors qu'elle est de 1,54% avec l'estimation que l'on avait obtenue par la modélisation GLM Gamma = 48 388. Le Bootstrap nous a ici permis de nous rapprocher des valeurs obtenues par Chain-Ladder.

Dommages Auto et DAB Particuliers:

	<i>Bootstrap indépendant</i>		<i>Bootstrap corrélé</i>		<i>Chain-Ladder stochastique</i>	
	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>
TOTAL	41 820	5 877	41 820	6 347	43 043	5 983

Cas indépendant

Avec corrélation



L'écart-type empirique représente 14,05% des réserves estimées dans le cas indépendant et 15,18% lorsque l'on prend en compte la corrélation, ce qui représente une augmentation de la variabilité de 8,01%. Alors que dans le cas de Bootstrap avec la loi de Poisson sur-dispersée, l'allongement du nuage de points était très important (l'augmentation de la variabilité était supérieure à 27%), ce n'est plus le cas avec une loi Gamma. On continue toutefois à observer un léger allongement de ce nuage le long d'une droite de pente positive.

Le coefficient de corrélation pris en compte dans ce cas était de 0,2546.

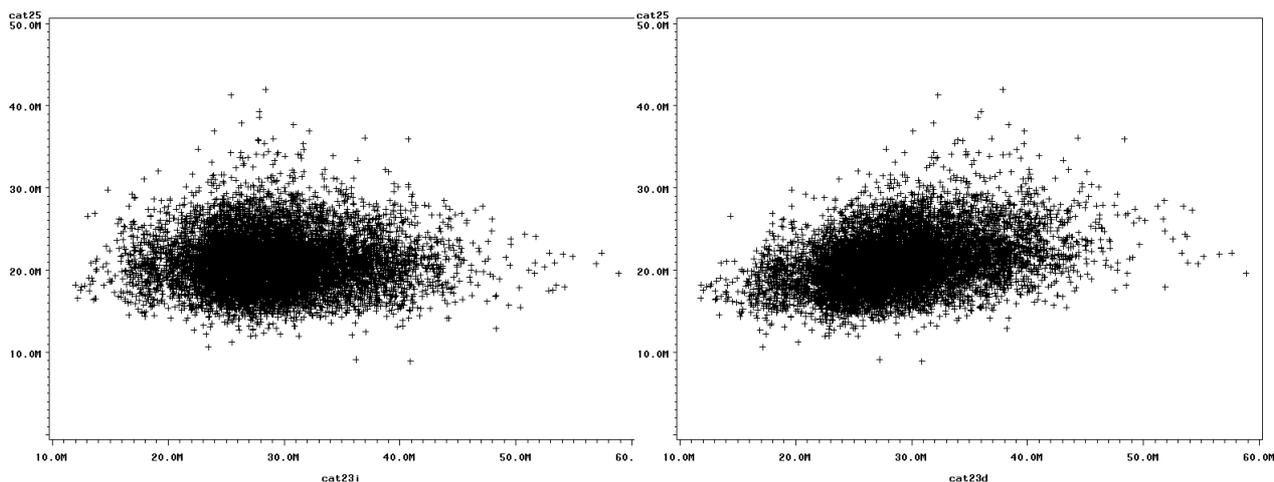
Remarque : l'écart entre l'estimation Bootstrap des provisions 41 820 et l'estimation que l'on avait obtenue par Chain-Ladder = 43 043 est de -2,84%, il est de -2,18% avec l'estimation que l'on avait obtenue par la modélisation GLM Gamma = 42 753.

Dommages Auto et DAB Professionnels:

	Bootstrap indépendant		Bootstrap corrélé		Chain-Ladder stochastique	
	Moy empirique	écart-type emp.	Moy empirique	écart-type emp.	Moy empirique	écart-type emp.
TOTAL	50 115	6 475	50 115	7 428	51 941	7 012

Cas indépendant

Avec corrélation



L'écart-type empirique représente 12,92% des réserves estimées dans le cas indépendant et 14,82% lorsque l'on prend en compte la corrélation, ce qui représente une augmentation de la variabilité de 14,72%. Comme pour le croisement RC Matérielle + Dommages Auto avec loi Gamma, cette augmentation n'est pas très visible graphiquement car le nuage de points dans le cas indépendant avait déjà une forme allongée.

Le coefficient de corrélation pris en compte dans ce cas était de 0,3296.

Remarque : l'écart entre l'estimation Bootstrap des provisions = 50 115 et l'estimation que l'on avait obtenue par Chain-Ladder = 51 941 est de -3,52%, il est de -1,9% avec l'estimation que l'on avait obtenue par la modélisation GLM Gamma = 51 084.

d] Synthèse sur le Bootstrap**➤ Commentaires sur les résultats obtenus:**

La variabilité pour chaque catégorie ministérielle est toujours considérablement augmentée lorsque l'on retient l'hypothèse que les C_{ij} suivent une loi Gamma plutôt qu'une loi de Poisson sur-dispersée (cf. tableaux en annexe).

Les augmentations importantes de variabilité sont très clairement visibles dans les nuages de points, ceux-ci devenant ovales selon une pente positive et indiquant une corrélation entre montants élevés (augmentation du nombre de points dans le cadran supérieur droit).

Alors que les augmentations de la variabilité sont sensiblement les mêmes avec une loi Gamma et avec une loi de Poisson sur-dispersée, pour les croisements RC Matérielle + Dommages Auto (environ 8%) et RC Matérielle + DAB Particuliers (environ 6%), elles sont très nettement supérieures avec une loi de Poisson sur-dispersée par rapport à une loi Gamma pour les croisements Dommages Auto + DAB Particuliers (+27% avec une loi de Poisson sur-dispersée contre +8% avec une loi Gamma) et Dommages Auto + DAB Professionnels (+23,7% avec une loi de Poisson sur-dispersée contre +14,7% avec une loi Gamma).

Malgré cela, la variabilité individuelle (par catégorie ministérielle) étant bien supérieure avec une loi Gamma qu'avec une loi de Poisson sur-dispersée, la variabilité du montant agrégé estimé reste toujours inférieure avec une loi de Poisson sur-dispersée qu'avec une loi Gamma.

➤ *Limites du modèle:*

Enfin, nous rappelons les réserves qui avaient été formulées lors de l'étude des résidus quant à la validité du modèle, notamment pour la RC Matérielle et le DAB Professionnels. Effectivement, la non-indépendance des données utilisées lors du Bootstrap amène à fausser les résultats obtenus.

Il faut de plus garder en mémoire que l'utilisation du Bootstrap peut poser problème dans l'estimation des statistiques extrêmes (minimum, maximum) ainsi que des quantiles d'ordre élevé. Pour les risques ayant une distribution à queue épaisse, les très grandes valeurs ayant tendance à apparaître très souvent, cette méthode ne peut être utilisée pour estimer ces statistiques extrêmes.

Enfin, et pour finir, nous rappellerons que la fiabilité du modèle est aussi conditionnée par le nombre de simulations effectuées.

Ainsi, par exemple sur l'agrégation entre RC Matérielle + Dommages Auto avec une loi de Poisson sur-dispersée, on obtient les résultats suivants en fonction du nombre de simulations effectuées :

Nb simulations	Bootstrap indépendant		Bootstrap corrélé		% augmentation	Ecart p/r CL
	Moyenne	Ecart-type	Moyenne	Ecart-type		
2 000	67 139	4 122	67 139	4 655	12,93%	2,30%
<i>en % des réserves</i>		<i>6,14%</i>		<i>6,93%</i>		
5 000	65 787	4 050	65 787	4 464	10,20%	0,24%
<i>en % des réserves</i>		<i>6,16%</i>		<i>6,78%</i>		
10 000	65 269	3 949	65 269	4 288	8,59%	-0,55%
<i>en % des réserves</i>		<i>6,05%</i>		<i>6,57%</i>		

Si, à partir de 5000 simulations, on obtient une bonne approximation de la moyenne, la valeur estimée de l'écart-type reste encore imparfaite. Un nombre de simulations plus élevé pourrait permettre de réduire cette valeur, ainsi que le pourcentage d'augmentation de la variabilité. Ce phénomène sera de plus d'autant plus marqué que la queue de distribution est lourde et la variabilité individuelle (par catégorie ministérielle) importante.

II.2 Par le modèle à chocs communs

a] Modélisation par des lois de Poisson

Nous avons retenu le modèle de Poisson sur-dispersée, avec comme valeurs des paramètres les résultats de la modélisation GLM.

Le paramètre ϕ a été estimé à l'aide du χ^2 de Pearson, selon la formule $\hat{\phi} = \frac{\chi^2}{n - K}$, et cela par souci de cohérence avec la méthode Bootstrap, qui repose sur des résidus de Pearson.

On rappelle que l'on aurait pu estimer ce paramètre par la formule de la déviance, ce qui aurait modifié légèrement les résultats.

Nous avons à chaque fois effectué 10 000 simulations de couples de catégories ministérielles pour chaque cellule du triangle à estimer (= le triangle inférieur).

➤ *Procédure de simulation sur le modèle avec loi de Poisson :*

On rappelle que si $X \approx P_{\text{surdisp } \phi}(\lambda)$, alors $X / \phi \approx P(\lambda / \phi)$.

Nous avons donc généré, pour chaque cellule du triangle à estimer des observations de loi de Poisson ayant pour paramètre :

① Dans le cas indépendant :

- Pour la 1^{ère} catégorie ministérielle $\lambda_1 = \frac{\hat{\mu}_{ij}^1}{\phi_1}$. La simulation x_1 obtenue étant ensuite multipliée par ϕ_1 afin d'obtenir une réalisation $ci_{ij}^1 = \phi_1 x_1$
- Pour la 2^{ème} catégorie ministérielle $\lambda_2 = \frac{\hat{\mu}_{ij}^2}{\phi_2}$. La simulation x_2 obtenue étant ensuite multipliée par ϕ_2 afin d'obtenir une réalisation $ci_{ij}^2 = \phi_2 x_2$

On obtient alors 10 000 simulations de $ci_{ij}^{\text{tot}} = ci_{ij}^1 + ci_{ij}^2$, et de $R_{\text{indep}} = \sum_{i+j \geq n} ci_{ij}^{\text{tot}}$ et on peut dès lors calculer

l'espérance et la variance empiriques sur cet échantillon simulé dans le cas indépendant.

② dans le cas de choc commun :

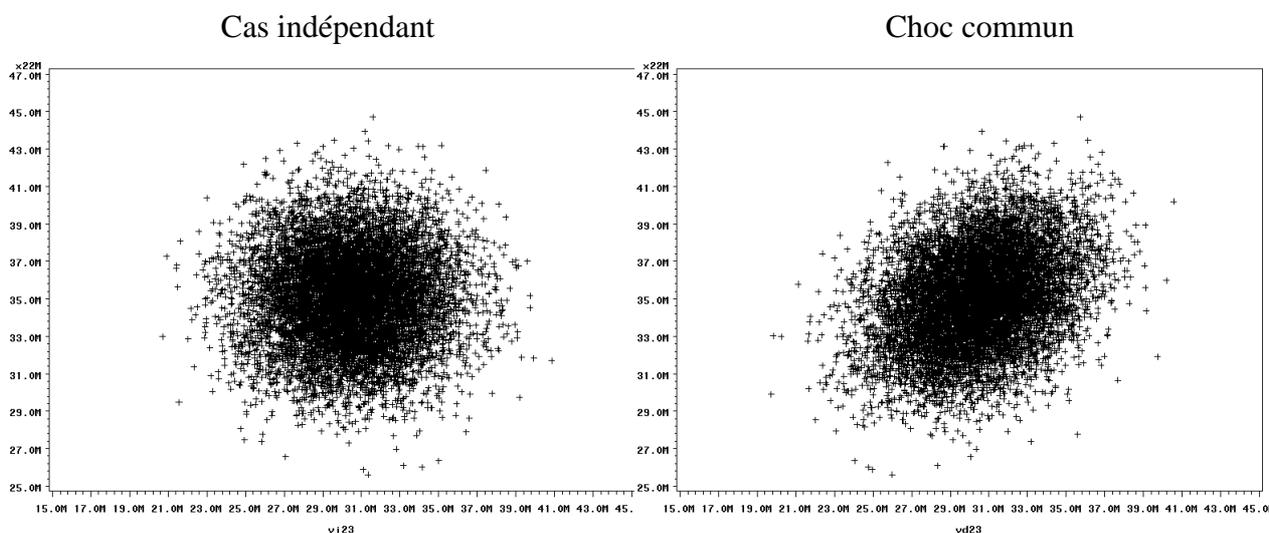
- Pour le choc commun : $\lambda_0 = \frac{\text{cov}(X_1, X_2)}{\phi_1 \phi_2}$. On obtient alors une réalisation x_0 du choc commun.
- Pour la 1^{ère} catégorie ministérielle $\lambda_1 = \frac{\hat{\mu}_{ij}^1}{\phi_1} - \lambda_0$. On somme alors à la réalisation x_1 obtenue le choc commun x_0 que l'on multiplie ensuite par ϕ_1 afin d'obtenir une réalisation $ci_{ij}^1 = \phi_1 (x_1 + x_0)$
- Pour la 2^{ème} catégorie ministérielle $\lambda_2 = \frac{\hat{\mu}_{ij}^2}{\phi_2} - \lambda_0$. On somme alors à la réalisation x_2 obtenue le choc commun x_0 que l'on multiplie ensuite par ϕ_2 afin d'obtenir une réalisation $ci_{ij}^2 = \phi_2 (x_2 + x_0)$

On obtient alors 10 000 simulations de $cd_{ij}^{tot} = cd_{ij}^1 + cd_{ij}^2$, et de $R_{dep} = \sum_{i+j \geq n} cd_{ij}^{tot}$ et on peut dès lors calculer l'espérance et la variance empiriques sur cet échantillon simulé dans le cas de choc commun.

➤ *Montants des réserves obtenues :*

RC Matérielle + Dommages Auto

	Cas indépendant		Choc commun		Chain-Ladder stochastique	
	Moy empirique	écart-type emp.	Moy empirique	écart-type emp.	Moy empirique	écart-type emp.
TOTAL	65 607	3 701	65 538	4 220	65 630	6 482



L'écart-type empirique représente 5,64% des réserves estimées dans le cas indépendant et 6,44% lorsque l'on prend en compte la corrélation, ce qui représente une augmentation de la variabilité de 14%. Comme dans le cas du Bootstrap, cette augmentation provient essentiellement de la survenance 2004, pour laquelle elle est de 19,34%.

On constate bien que le nuage de points, circulaire dans le cas indépendant, s'allonge et s'étire vers les pointes selon une pente positive lorsque l'on prend en compte la corrélation.

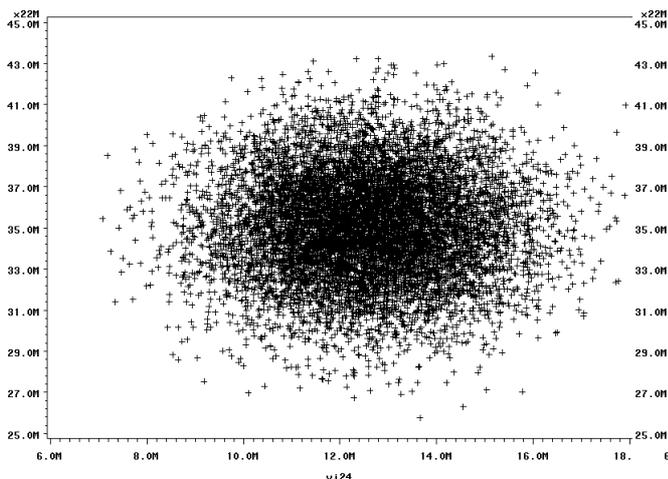
Le coefficient de corrélation linéaire pris en compte dans ce cas était de 0,97242.

Remarque : l'écart entre l'estimation que l'on avait obtenue par Chain-Ladder = 65 630 et l'estimation par le modèle à choc commun des provisions dans le cas indépendant = 65 607 est de -0,04%. Il est de -0,14% dans le cas dépendant.

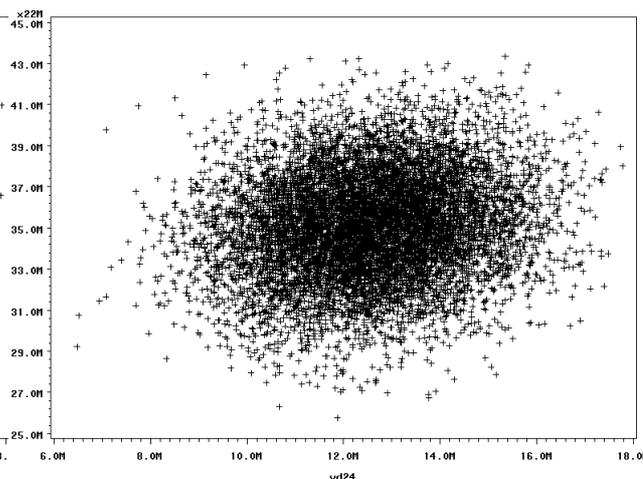
RC Matérielle + DAB Particuliers

	Cas indépendant		Choc commun		Chain-Ladder stochastique	
	Moy empirique	écart-type emp.	Moy empirique	écart-type emp.	Moy empirique	écart-type emp.
TOTAL	47 733	2 999	47 652	3 163	47 750	4 629

Cas indépendant



Choc commun



L'écart-type empirique représente 6,28% des réserves estimées dans le cas indépendant et 6,64% lorsque l'on prend en compte la corrélation, ce qui représente une augmentation de la variabilité de 5,45%. Cette petite augmentation de la variabilité n'est que légèrement perceptible dans le nuage de points qui devient moins dense au centre pour se diffuser dans le cadran supérieur droit.

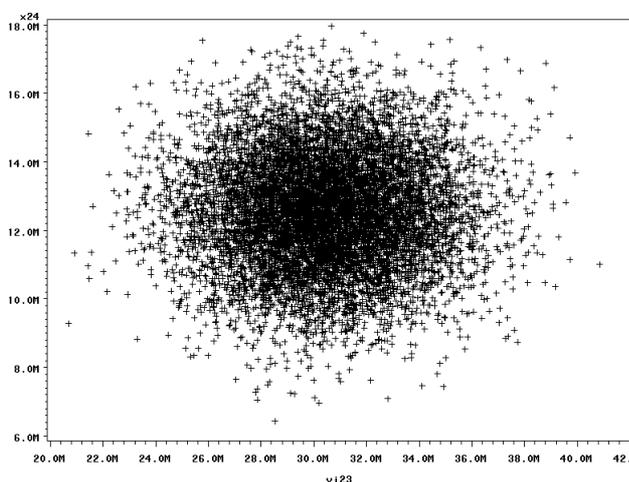
Le coefficient de corrélation linéaire pris en compte dans ce cas était de 0,91086.

Remarque : l'écart entre l'estimation que l'on avait obtenue par Chain-Ladder = 47 750 et l'estimation par le modèle à choc commun des provisions dans le cas indépendant = 47 733 est, comme pour le cas précédent, de -0,04%. Il est de -0,20% dans le cas dépendant.

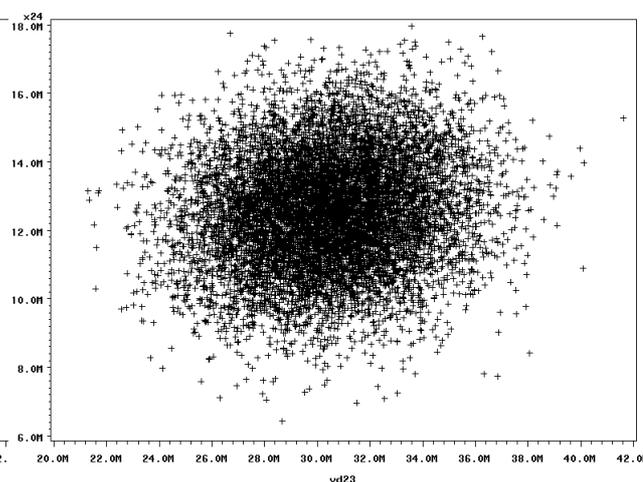
Dommages Auto + DAB Particuliers

	<i>Cas indépendant</i>		<i>Choc commun</i>		<i>Chain-Ladder stochastique</i>	
	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>
TOTAL	43 024	3 155	43 010	3 306	43 043	5 983

Cas indépendant



Choc commun



L'écart-type empirique représente 7,33% des réserves estimées dans le cas indépendant et 7,69% lorsque l'on prend en compte la corrélation, ce qui représente une augmentation de la variabilité de 4,78%. Ce chiffre est très éloigné de celui obtenu dans le cadre du Bootstrap (+27,16%) Cette augmentation n'est donc ici aussi que légèrement perceptible dans le nuage de points alors qu'elle était flagrante dans le cas du Bootstrap où ce nuage prenait une forme nettement étirée.

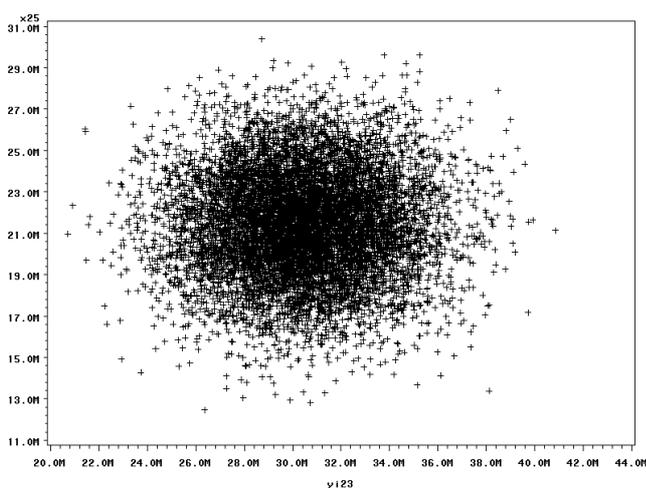
Le coefficient de corrélation linéaire pris en compte dans ce cas était de 0,83759.

Remarque : l'écart entre l'estimation que l'on avait obtenue par Chain-Ladder = 43 043 et l'estimation par le modèle à choc commun des provisions dans le cas indépendant = 43 024 est, comme pour les deux cas précédent, de -0,04%. Il est de -0,08% dans le cas dépendant.

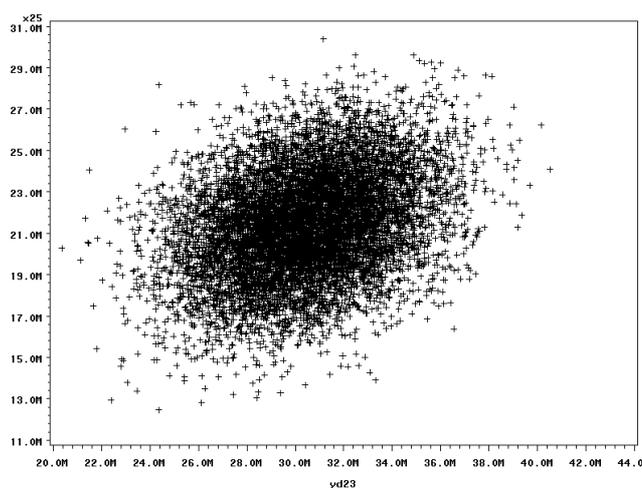
Dommages Auto + DAB Professionnels

	<i>Cas indépendant</i>		<i>Choc commun</i>		<i>Chain-Ladder stochastique</i>	
	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>
TOTAL	51 931	3 704	51 910	4 227	51 941	7 012

Cas indépendant



Choc commun



L'écart-type empirique représente 7,13% des réserves estimées dans le cas indépendant et 8,14% lorsque l'on prend en compte la corrélation, ce qui représente une augmentation de la variabilité de 14,13%. Cette augmentation de la variabilité est surtout importante pour la survenance 2004 pour laquelle elle est de 21,10%. Cette augmentation importante de la variabilité est particulièrement visible sur le nuage de points, qui, circulaire dans le cas indépendant, s'allonge en ovale suivant une pente positive dans le cas dépendant.

Le coefficient de corrélation pris en compte dans ce cas était de 0,78064.

Remarque : l'écart entre l'estimation que l'on avait obtenue par Chain-Ladder = 51 941 et l'estimation par le modèle à choc commun des provisions dans le cas indépendant = 51 931 est de -0,02%. Il est de -0,06% dans le cas dépendant.

b) Modélisation par des lois Gamma

Nous avons retenu le modèle avec une loi Gamma, avec comme valeurs des paramètres les résultats issus de la modélisation GLM.

Nous avons ici aussi à chaque fois effectué 10 000 simulations de couples de catégories ministérielles pour chaque cellule du triangle à estimer (= le triangle inférieur).

➤ *Procédure de simulation sur le modèle avec loi Gamma :*

On rappelle que si $X \approx \text{Gamma}(\alpha, 1)$ alors $\beta X \approx \text{Gamma}(\alpha, \beta)$

Nous avons donc généré, pour chaque cellule du triangle à estimer des observations de loi Gamma ayant pour paramètre :

① Dans le cas indépendant :

- Pour la 1^{ère} catégorie ministérielle $\alpha_1 = \frac{(\hat{\mu}_{ij}^1)^2}{(\hat{\sigma}_{ij}^1)^2}$. La simulation x_1 obtenue étant ensuite multipliée par

$$\hat{\beta}_1 = \frac{(\hat{\sigma}_{ij}^1)^2}{\hat{\mu}_{ij}^1} \text{ afin d'obtenir une réalisation } c_{ij}^1 = \beta_1 x_1$$

- Pour la 2^{ème} catégorie ministérielle $\alpha_2 = \frac{(\hat{\mu}_{ij}^2)^2}{(\hat{\sigma}_{ij}^2)^2}$. La simulation x_2 obtenue étant ensuite multipliée par

$$\hat{\beta}_2 = \frac{(\hat{\sigma}_{ij}^2)^2}{\hat{\mu}_{ij}^2} \text{ afin d'obtenir une réalisation } c_{ij}^2 = \beta_2 x_2$$

On obtient alors 10 000 simulations de $ci_{ij}^{tot} = c_{ij}^1 + c_{ij}^2$, et de $R_{indep} = \sum_{i+j \geq n} ci_{ij}^{tot}$ et on peut dès lors calculer

l'espérance et la variance empiriques sur cet échantillon simulé dans le cas indépendant.

② dans le cas de choc commun :

- Pour le choc commun : $\alpha_0 = \frac{\text{cov}(X_1, X_2)}{\hat{\beta}_1 \hat{\beta}_2}$. On obtient alors une réalisation x_0 du choc commun.

- Pour la 1^{ère} catégorie ministérielle $\alpha_1 = \frac{(\hat{\mu}_{ij}^1)^2}{(\hat{\sigma}_{ij}^1)^2} - \alpha_0$. On somme alors à la réalisation x_1 obtenue le choc

$$\text{commun } x_0 \text{ que l'on multiplie ensuite par } \hat{\beta}_1 = \frac{(\hat{\sigma}_{ij}^1)^2}{\hat{\mu}_{ij}^1} \text{ afin d'obtenir une réalisation } c_{ij}^1 = \beta_1(x_1 + x_0)$$

- Pour la 2^{ème} catégorie ministérielle $\alpha_2 = \frac{(\hat{\mu}_{ij}^2)^2}{(\hat{\sigma}_{ij}^2)^2} - \alpha_0$. On somme alors à la réalisation x_2 obtenue le choc

$$\text{commun } x_0 \text{ que l'on multiplie ensuite par } \hat{\beta}_2 = \frac{(\hat{\sigma}_{ij}^2)^2}{\hat{\mu}_{ij}^2} \text{ afin d'obtenir une réalisation } cd_{ij}^2 = \beta_2(x_2 + x_0)$$

On obtient alors 10 000 simulations de $cd_{ij}^{tot} = c_{ij}^1 + cd_{ij}^2$, et de $R_{dep} = \sum_{i+j \geq n} cd_{ij}^{tot}$ et on peut dès lors calculer

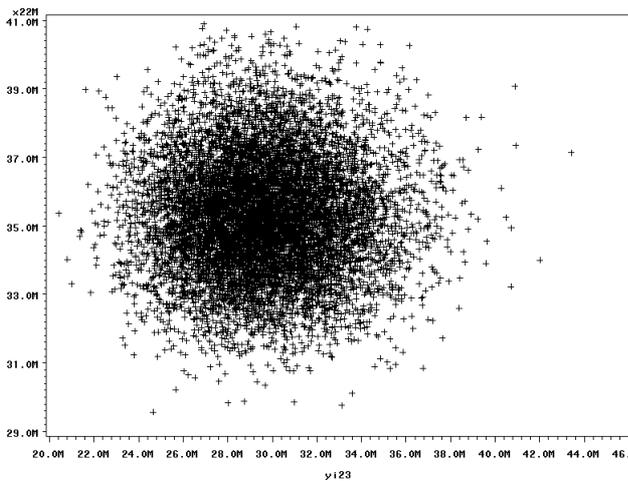
l'espérance et la variance empiriques sur cet échantillon simulé dans le cas de choc commun.

➤ *Montants des réserves obtenues :*

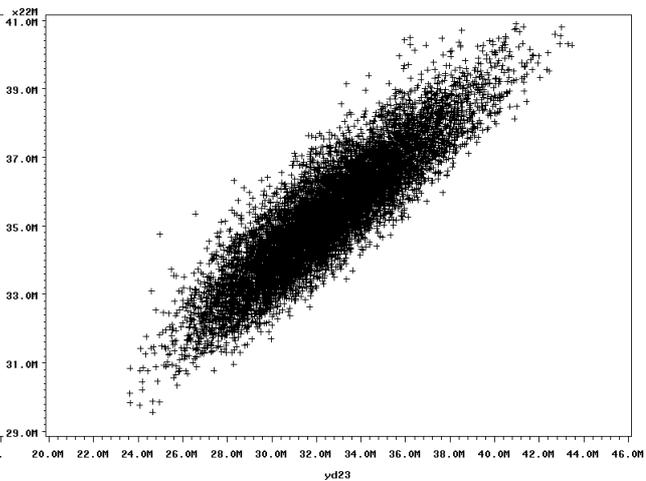
RC Matérielle + Dommages Auto

	<i>Cas indépendant</i>		<i>Choc commun</i>		<i>Chain-Ladder stochastique</i>	
	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>
TOTAL	65 008	3 310	67 860	4 544	65 630	6 482

Cas indépendant



Choc commun



L'écart-type empirique représente 5,09% des réserves estimées dans le cas indépendant et 6,70% lorsque l'on prend en compte la corrélation, ce qui représente une augmentation de la variabilité de 37,26%. Cette très importante augmentation provient essentiellement des deux survenances les plus récentes.

On constate bien que le nuage de points, circulaire dans le cas indépendant, a une forme de disque très aplati, les points s'alignant sur une droite.

Le coefficient de corrélation linéaire pris en compte dans ce cas était de 0,97242.

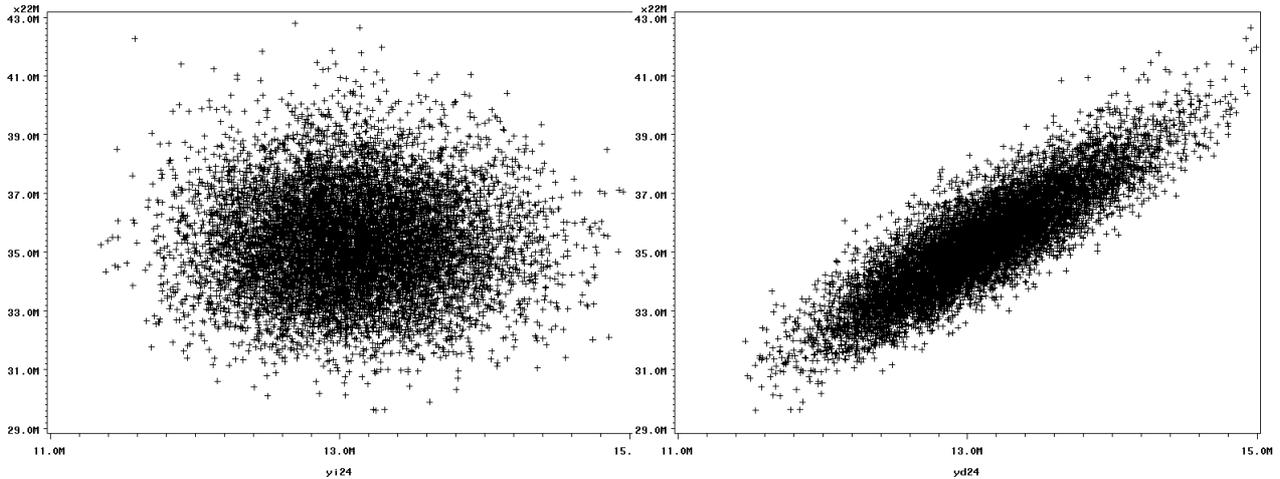
Remarque : l'écart entre l'estimation que l'on avait obtenue par Chain-Ladder = 65 630 et l'estimation par le modèle à choc commun des provisions dans le cas indépendant = 65 008 est de -0,95%. Il est de +3,40% dans le cas dépendant. Par rapport à l'estimation obtenue dans le cadre de la modélisation GLM = 64 967, l'écart est de 0,06% dans le cas indépendant et de 4,45% dans le cas dépendant.

RC Matérielle + DAB Particuliers

	<i>Cas indépendant</i>		<i>Choc commun</i>		<i>Chain-Ladder stochastique</i>	
	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>
TOTAL	48 415	1 788	48 421	2 213	47 750	4 629

Cas indépendant

Choc commun



L'écart-type empirique représente 3,69% des réserves estimées dans le cas indépendant et 4,57% lorsque l'on prend en compte la corrélation, ce qui représente une augmentation de la variabilité de 23,74%. Dans ce cas comme dans le précédent, cette augmentation de variabilité très importante est très nettement visible dans le nuage de points, qui tend à adopter une forme quasi-linéaire le long d'une droite de pente positive.

Le coefficient de corrélation linéaire pris en compte dans ce cas était de 0,91086.

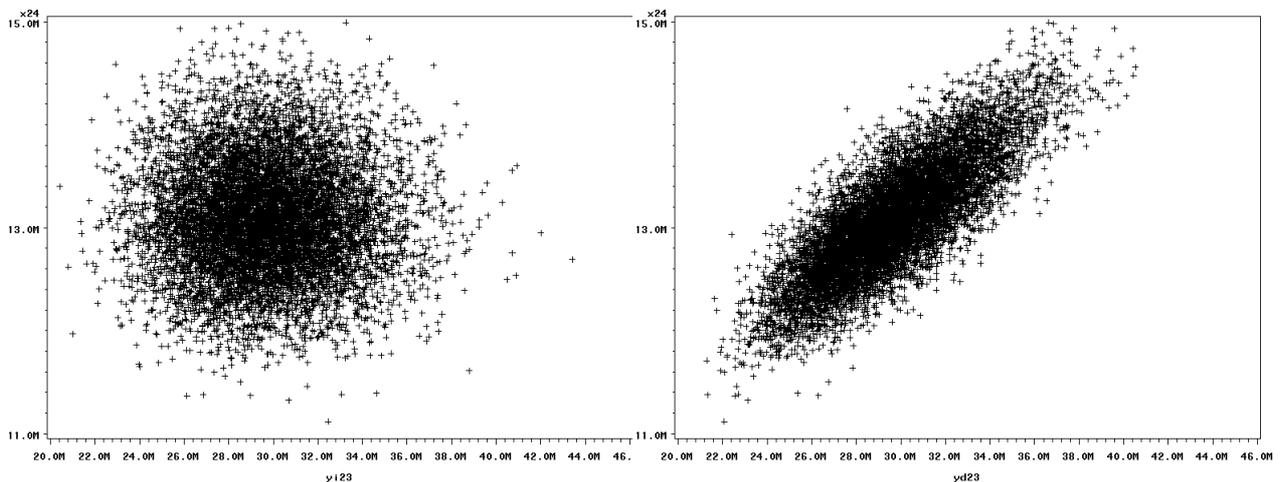
Remarque : l'écart entre l'estimation que l'on avait obtenue par Chain-Ladder = 47 750 et l'estimation par le modèle à choc commun des provisions dans le cas indépendant = 48 415 est de 1,39%. Il est identique dans le cas indépendant à +1,40%. Par rapport à l'estimation obtenue dans le cadre de la modélisation GLM = 48 388, l'écart est de 0,06% dans le cas indépendant et de 0,07% dans le cas dépendant.

Dommages Auto + DAB Particuliers

	Cas indépendant		Choc commun		Chain-Ladder stochastique	
	Moy empirique	écart-type emp.	Moy empirique	écart-type emp.	Moy empirique	écart-type emp.
TOTAL	42 777	2 885	42 811	3 273	43 043	5 983

Cas indépendant

Choc commun



L'écart-type empirique représente 6,74% des réserves estimées dans le cas indépendant et 7,64% lorsque l'on prend en compte la corrélation, ce qui représente une augmentation de la variabilité de 13,43%. Tout comme c'était le cas pour la loi de Poisson, ce chiffre est très éloigné de celui obtenu dans le cadre du Bootstrap (+27,16%). Malgré cela, le nuage de points adopte ici encore une forme très aplatie selon une pente positive.

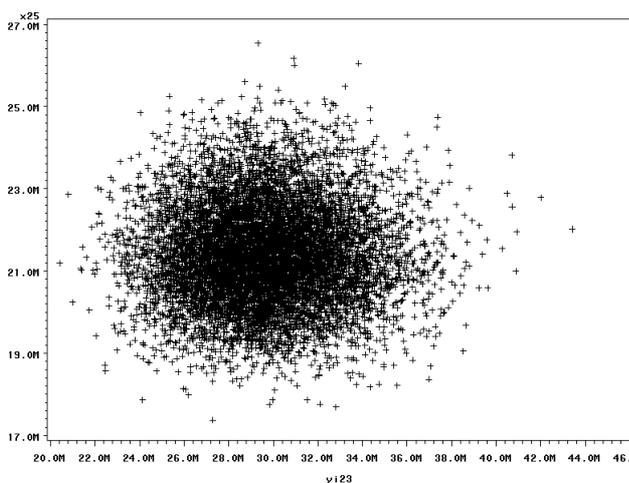
Le coefficient de corrélation linéaire pris en compte dans ce cas était de 0,83759.

Remarque : l'écart entre l'estimation que l'on avait obtenue par Chain-Ladder = 43 043 et l'estimation par le modèle à choc commun des provisions dans le cas indépendant = 42 777 est de -0,62%. Il est de -0,54% dans le cas dépendant. Par rapport à l'estimation obtenue dans le cadre de la modélisation GLM = 42 753, l'écart est de 0,06% dans le cas indépendant et de 0,13% dans le cas dépendant.

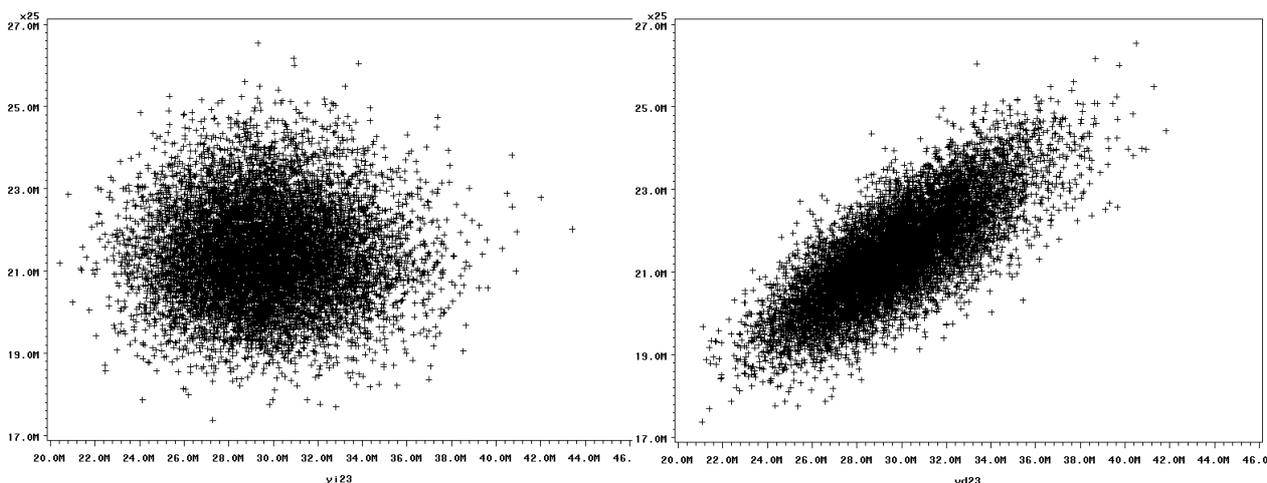
Dommages Auto + DAB Professionnels

	<i>Cas indépendant</i>		<i>Choc commun</i>		<i>Chain-Ladder stochastique</i>	
	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>
TOTAL	51 117	3 055	51 125	3 847	51 941	7 012

Cas indépendant



Choc commun



L'écart-type empirique représente 5,98% des réserves estimées dans le cas indépendant et 7,53% lorsque l'on prend en compte la corrélation, ce qui représente une augmentation de la variabilité de 25,93%. Cette augmentation importante de la variabilité est ici encore particulièrement visible sur le nuage de points, qui, circulaire dans le cas indépendant, s'allonge en ovale suivant une pente positive dans le cas dépendant.

Le coefficient de corrélation pris en compte dans ce cas était de 0,78064.

Remarque : l'écart entre l'estimation que l'on avait obtenue par Chain-Ladder = 51 941 et l'estimation par le modèle à choc commun des provisions dans le cas indépendant = 51 117 est de -1,59%. Il est de -1,57% dans le cas dépendant. Par rapport à l'estimation obtenue dans le cadre de la modélisation GLM = 51 084, l'écart est de 0,06% dans le cas indépendant et de 0,08% dans le cas dépendant.

c] Synthèse sur le modèle à choc commun

➤ Commentaires sur les résultats obtenus:

Contrairement au Bootstrap, la variabilité (pour chaque catégorie ministérielle) est toujours bien plus faible lorsque l'on retient l'hypothèse que les C_{ij} suivent une loi Gamma plutôt qu'une loi de Poisson sur-dispersée, excepté pour le Dommages Automobile, pour lequel ces deux lois donnent une variabilité équivalente.

Lorsque l'on retient l'hypothèse de la loi Gamma, la variabilité (pour chaque catégorie ministérielle) obtenue par le modèle à choc commun est toujours bien inférieure à celle obtenue par Bootstrap.

Pour la loi de Poisson sur-dispersée, c'est l'inverse, hormis pour la RC Matérielle.

L'intégration du choc commun dans le modèle est beaucoup plus importante (l'augmentation de variabilité dans le montant des provisions totales est plus important) lorsque l'on retient l'hypothèse de loi Gamma.

Cela est nettement visible au niveau des nuages de points : de circulaires, ceux-ci adoptent quasiment une forme linéaire dans le cas de choc commun.

➤ Limites du modèle:

L'une des limites les plus connues de ce modèle est qu'il ne peut prendre en compte que des marginales ayant la même loi. De plus, les marginales et la structure de dépendance restent liées.

Une autre critique dans notre cas, est que ces modèles ayant des marginales Poisson ou Gamma, c'est à dire des lois avec paramètres positifs, ne peuvent prendre en compte que des dépendances positives.

Effectivement, le paramètre du choc commun (forcément positif car suivant une loi Poisson ou Gamma) est égal à la covariance entre les deux risques considérés, ce qui implique que cette covariance doit être positive.

Cela ne posait pas problème dans notre cas, car nous avons vu que les risques étudiés présentaient tous une dépendance positive. Dans un autre contexte, il faudrait modéliser les données avec d'autres lois multivariées.

De plus, ce modèle implique des contraintes sur les valeurs des paramètres. Ainsi, on a :

dans le cas de loi de Poisson sur-dispersée :

$$\lambda_0 = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\phi_1 \phi_2} = \rho \frac{\sigma_{X_1} \sigma_{X_2}}{\phi_1 \phi_2} = \rho \frac{\sqrt{\lambda_1} \sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\phi_1 \phi_2}}$$

et donc comme $\alpha_{ib} = \alpha_i - \alpha_0 \geq 0$ ($i = (1,2)$) les conditions suivantes :

$$\sqrt{\phi_1 \phi_2} \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \geq \rho \quad \text{et} \quad \sqrt{\phi_1 \phi_2} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \geq \rho.$$

dans le cas de loi Gamma :

$$\alpha_0 = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\beta_1 \beta_2} = \rho \frac{\sigma_{X_1} \sigma_{X_2}}{\beta_1 \beta_2} = \rho \sqrt{\alpha_1} \sqrt{\alpha_2}$$

et donc comme $\alpha_{ib} = \alpha_i - \alpha_0 \geq 0$ ($i = (1,2)$) les conditions suivantes :

$$\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \geq \rho \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \geq \rho.$$

On peut aussi soulever le problème de la modélisation elle-même et notamment de l'intégration de la sur-dispersion dans le cas d'une loi de Poisson ou du paramètre d'échelle dans le cas de la loi Gamma. Effectivement, on a supposé que ce paramètre de dispersion ou d'échelle était le même sur le choc commun que sur la composante propre à chaque catégorie ministérielle : on l'applique sur la somme des deux composantes et on ne considère donc pas qu'il puisse être différent pour chacune de ces deux composantes.

Enfin, on peut retenir que la modélisation Gamma pour l'agrégation RC Matérielle + Dommages Automobile n'est pas satisfaisante car les écarts trouvés par rapport à la modélisation GLM sont généralement bien inférieurs à 1% hormis pour ce risque dans le cas dépendant où ils sont de plus de 4%. Il est à noter que le coefficient de corrélation retenu pour cet agrégat était de 0,97242 i.e le coefficient de corrélation le plus élevé retenu dans notre étude.

II.3 Par la théorie des copules

a) Choix des paramètres

Le choix s'effectue généralement d'abord parmi une famille de copule, les données permettant ensuite d'ajuster le paramètre de la copule.

Plusieurs méthodes existent afin de déterminer les paramètres de cette copule. On pourra se référer à l'ouvrage de T. Roncalli pour plus de détails sur ces méthodes.

① La copule empirique de Deheuvels

② L'identification d'une copule Archimédienne par la méthode de Genest et Rivest via la fonction K définie par $K(u) = \Pr [C(U_1, U_2) \leq u]$

③ La méthode des moments dans laquelle on utilise la relation directe entre le τ de Kendall et le paramètre de la copule :

Copule	τ de Kendall
Indépendance	0
Clayton	$\alpha / (\alpha+2)$
Frank	$1-4[D1(-\alpha)-1] / \alpha$
Gumbel	$1 - 1/\alpha$
Normale	$2 \arcsin(\alpha) / \pi$

Avec $D_k(x)$ = la fonction de Debye

④ La méthode du maximum de vraisemblance :

Cette méthode présente néanmoins l'inconvénient de devoir estimer à la fois les paramètres des fonctions marginales et les paramètres de la structure de dépendance

⑤ La méthode IFM (Inference Functions for Margins) :

Cette méthode permet d'estimer les paramètres de la copule indépendamment des paramètres des fonctions marginales

⑥ L'estimateur omnibus :

Cette méthode consiste à estimer le paramètre de la copule en considérant les estimateurs non paramétriques des marginales

Dans notre cas, nous utiliserons la méthode IFM car nous avons déjà estimé les marginales lors de la modélisation GLM.

De plus, comme nous avons une loi de paramètres différents pour chaque C_{ij} , la méthode du maximum de vraisemblance nous conduirait à estimer un nombre de paramètres très important, ce qui serait assez difficile à mettre en œuvre.

➤ *Choix des marginales :*

Nous allons dans cette modélisation aussi retenir les lois de Poisson sur-dispersée et Gamma utilisées lors des modélisations Bootstrap et Choc Commun. Nous allons donc partir des estimations obtenues lors de nos modélisations GLM.

Pour cela, nous avons utilisé les valeurs de probabilités calculées au point I.3 de cette section.

Pour chaque cellule du triangle, nous avons donc constitué un couple de valeurs ($F_1(x_1)$, $F_2(x_2)$), avec, pour reprendre l'exemple du point I.3, $x_1 = 19090$ et $F_1(x_1) = 86\%$ si le risque n° 1 considéré est la RC Matérielle et la marginale une loi Gamma.

De même, pour le Dommages Auto, la cellule correspondante (même année de survenance et même année de développement) correspondait à $x_2 = 29614$ et $F_2(x_2) = 96\%$.

Pour la survenance 1995, année de développement 2, avec des marginales Gamma, nous avons donc constitué le couple de valeurs : (0.86 , 0.96).

Nous avons fait de même sur toutes les cellules connues du triangles.

➤ *Choix de la copule:*

Nous avons choisi de tester les copules suivantes :

Gumbel

Clayton

Ali-Mikail-Haq (AMH)

Farlie-Morgenstern

Frank

HRT

Nous avons alors déterminé par la méthode du maximum de vraisemblance, avec les données calculées précédemment, pour chaque marginale et chaque copule, les paramètres de cette copule ainsi que la log-vraisemblance associée.

Copule	Marginales	RC Matérielle + Dommages		RC Matérielle + DAB Part		Dommages + DAB Part		Dommages + DAB Pro	
		Paramètre	Log-vraisemblance	Paramètre	Log-vraisemblance	Paramètre	Log-vraisemblance	Paramètre	Log-vraisemblance
Gumbel	Poisson surdispersée	1,328	18,60	1,351	24,18	1,280	15,61	1,332	15,35
Clayton	Poisson surdispersée	0,808	-65,38	0,929	-48,74	0,741	-83,92	0,843	-58,29
AMH	Poisson surdispersée	0,932	20,09	0,872	13,25	0,840	14,41	0,957	26,61
Farlie	Poisson surdispersée	1,000	12,68	0,874	8,10	1,000	13,97	0,874	8,10
Frank	Poisson surdispersée	4,100	19,13	3,135	12,91	3,427	15,80	4,238	21,91
HRT	Poisson surdispersée	3,492	11,02	2,294	17,66	2,800	12,28	3,944	5,72
Gumbel	Gamma	1,062	2,12	1,094	3,04	1,146	6,72	1,270	18,43
Clayton	Gamma	0,565	-135,78	0,714	-86,43	0,655	-99,02	0,707	-80,47
AMH	Gamma	0,540	3,45	0,686	5,21	0,659	5,77	0,865	11,06
Farlie	Gamma	0,527	2,88	0,584	3,44	0,690	5,84	0,584	3,44
Frank	Gamma	1,687	4,23	1,827	4,96	2,133	6,79	2,591	9,46
HRT	Gamma	9,141	1,95	34,614	0,14	6,110	4,07	3,394	9,58

Remarque :

L'un des grands avantages de la théorie des copules est qu'il nous est possible de lier des marginales de lois différentes. Nous avons donc effectué le calcul précédent en liant une loi de Poisson sur-dispersée et une loi Gamma. Toutefois, aucun résultat n'a donné une meilleure log-vraisemblance que celle trouvée dans les meilleurs modèles ci-dessus.

Copule	Marginales	RC Matérielle +- Dommages		RC Matérielle + DAB Part		Dommages + DAB Part		Dommages + DAB Pro	
		Paramètre	Log-vraisemblance	Paramètre	Log-vraisemblance	Paramètre	Log-vraisemblance	Paramètre	Log-vraisemblance
Gumbel	Poisson-Gamma	1,046	0,582	1,082	2,409	1,085	2,582	1,086	1,542
Clayton	Poisson-Gamma	0,598	-112,746	0,681	-86,520	0,608	-110,627	0,621	-106,465
AMH	Poisson-Gamma	0,582	4,084	0,642	5,803	0,602	5,177	0,868	11,295
Farlie	Poisson-Gamma	0,514	2,856	0,658	4,549	0,779	5,408	0,872	7,667
Frank	Poisson-Gamma	4,100	-4,113	3,135	3,671	3,427	2,300	4,238	4,512
HRT	Poisson-Gamma	14,171	0,948	11,303	1,889	9,840	1,633	11,482	1,048
Gumbel	Gamma-Poisson	1,000	0,000	1,071	1,346	1,093	2,299	1,171	7,647
Clayton	Gamma-Poisson	0,577	-130,717	0,675	-105,444	0,629	-108,731	0,631	-99,418
AMH	Gamma-Poisson	0,439	2,029	0,550	3,398	0,588	4,175	0,808	11,210
Farlie	Gamma-Poisson	0,642	2,486	0,585	3,030	0,596	3,413	0,822	7,278
Frank	Gamma-Poisson	1,139	2,161	1,599	3,928	1,668	4,577	2,412	9,516
HRT	Gamma-Poisson	30,178	0,189	10,979	1,306	6,727	3,116	5,203	4,393

En conclusion, compte tenu des log-vraisemblances obtenues, nous avons décidé d'effectuer les simulations suivantes :

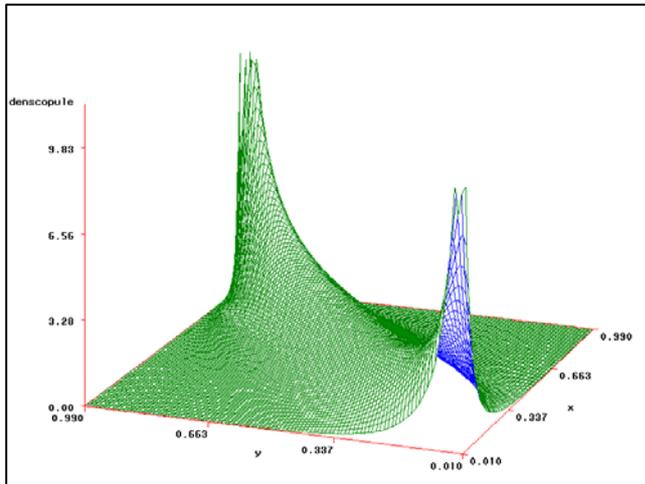
- RC Matérielle + Dommages Automobile:
copule AMH avec marginales Poisson sur-dispersées
copule de Frank avec marginales Gamma
- RC Matérielle + DAB Particuliers :
copule de Gumbel avec marginales Poisson sur-dispersées
copule AMH avec marginales Gamma
- Dommages Automobile + DAB Particuliers :
copule de Frank avec marginales Poisson sur-dispersées
copule de Frank avec marginales Gamma
- Dommages Automobile + DAB Professionnels :
copule AMH avec marginales Poisson sur-dispersées
copule de Gumbel avec marginales Gamma

➤ *Commentaires:*

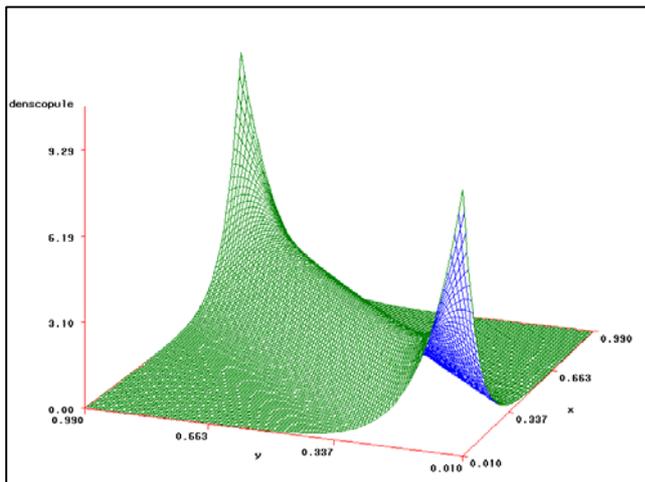
Nous avons donc au final retenu 3 copules possibles pour modéliser la dépendance. Comme attendu, ces 3 copules modélisent une dépendance positive (le coefficient de la copule de Frank est ici supérieur à 0). On rappellera le graphique de leur fonction de densité qui permet de visualiser assez bien les dépendances modélisées.

La copule de *Gumbel* est une copule de valeurs extrêmes, elle rend compte de la dépendance entre gros sinistres et de la dépendance entre petits sinistres. Sa concentration est par contre plus forte sur la queue droite (supérieure).

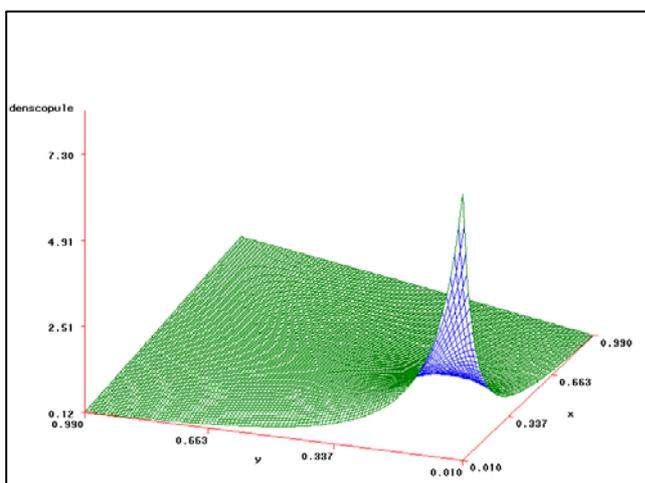
Ainsi, ses coefficients de queue s'expriment comme: $\lambda_U = 2 - 2^{1/a}$ et $\lambda_L = 0$.



La copule de **Frank** modélise la dépendance positive lorsque son paramètre α est positif. Elle modélise la dépendance négative lorsque ce même coefficient est négatif. Cette copule n'a pas de dépendance de queue : $\lambda_U = \lambda_L = 0$.



La copule de **Ali-Mikhail-Haq** modélise elle aussi la dépendance positive. Elle vise à rendre compte d'une dépendance sur les événements de faible intensité (pas de dépendance sur gros sinistres).



b) Simulation de Monte-Carlo

Nous allons effectuer pour chaque cellule du triangle à estimer (le triangle inférieur) 10 000 simulations dans le cas indépendant et dans le cas de dépendance avec modélisation par des copules. Nous allons pour cela utiliser l'algorithme suggéré par Genest et MacKay [1986] que l'on peut qualifier de méthode des distributions conditionnelles.

① Dans le cas indépendant :

- Simulation d'une variable aléatoire uniforme sur $[0,1] = u$
- Simulation d'une variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$, indépendante de u , $= v_i$
- On obtient alors une simulation c_{ij}^1 de la 1^{ère} catégorie ministérielle étudiée en résolvant $u = F_1(c_{ij}^1)$, F_1 étant la loi de distribution suivie par cette 1^{ère} catégorie ministérielle
- On obtient aussi une simulation ci_{ij}^2 de la 2^{ème} catégorie ministérielle étudiée, indépendante de c_{ij}^1 , en résolvant $v_i = F_2(ci_{ij}^2)$, F_2 étant la loi de distribution suivie par cette 2^{ème} catégorie ministérielle

② Dans le cas de dépendance modélisée par une copule :

L'algorithme sera le même que dans le cas indépendant, avec en plus, les étapes suivantes :

- Simulation d'une variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$, indépendante de u et v_i , $= p$
- Détermination de la valeur v_d telle que la probabilité conditionnelle de la copule choisie

$$C(v_d | U = u) = C_1(u, v_d) = \frac{\partial C(u, v_d)}{\partial u} = p$$

- On obtient alors une simulation cd_{ij}^2 de la 2^{ème} catégorie ministérielle étudiée, liée à c_{ij}^1 par la copule choisie, en résolvant $v_d = F_2(cd_{ij}^2)$, F_2 étant la loi de distribution suivie par cette 2^{ème} catégorie ministérielle

On obtient alors 10 000 simulations de $ci_{ij}^{tot} = c_{ij}^1 + ci_{ij}^2$ et de $R_{indep} = \sum_{i+j \geq n} ci_{ij}^{tot}$ dans le cas indépendant et de

$cd_{ij}^{tot} = c_{ij}^1 + cd_{ij}^2$ et de $R_{dep} = \sum_{i+j \geq n} cd_{ij}^{tot}$ dans le cas de dépendance et on peut dès lors calculer les espérances et les

variances empiriques sur cet échantillon simulé.

➤ *Simulation d'une copule de Frank :*

Nous pouvons passer par la méthode de la copule conditionnelle.

La fonction de répartition d'une copule de Frank s'écrit :

$$C(u, v) = -\frac{1}{a} \ln \left(1 + \frac{(e^{-au} - 1)(e^{-av} - 1)}{e^{-a} - 1} \right) \text{ avec } a \neq 0$$

La distribution conditionnelle de V , sachant $U=u$ s'exprime comme

$$p = C_1(u, v) = \frac{(e^{-av} - 1)e^{-au}}{(e^{-a} - 1) + (e^{-au} - 1)(e^{-av} - 1)}$$

On peut alors exprimer v en fonction de u et p :

$$v = -\frac{1}{a} \ln \left[1 + \frac{p(e^{-a} - 1)}{p + (1-p)e^{-au}} \right]$$

L'algorithme de simulation d'une copule de Frank sera donc le suivant :

- Simulation d'une variable aléatoire uniforme sur $[0,1] = u$
- Simulation d'une variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$, indépendante de u , $= p$
- Détermination de v_d par la formule présentée ci-dessus

➤ *Simulation d'une copule de Ali-Mikhail-Haq :*

On rappelle la fonction de répartition de cette copule :

$$C(u,v) = \frac{uv}{1 - a(1-u)(1-v)}, \text{ avec } -1 \leq a \leq 1$$

La distribution conditionnelle de V , sachant $U=u$ s'exprime comme

$$p = C_1(u,v) = \frac{v[1 - a(1-v)]}{[1 - a(1-u)(1-v)]^2}$$

On obtient donc v en résolvant l'équation du 2nd degré découlant de l'égalité ci-dessus.

L'algorithme de simulation d'une copule AMH sera donc le même que celui de la copule de Frank :

- Simulation d'une variable aléatoire uniforme sur $[0,1] = u$
- Simulation d'une variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$, indépendante de u , $= p$
- Détermination de v_d par résolution de l'équation $p = \frac{v_d [1 - a(1 - v_d)]}{[1 - a(1 - u)(1 - v_d)]^2}$

➤ *Simulation d'une copule de Gumbel :*

La fonction de répartition de la copule de Gumbel s'écrit :

$$C(u,v) = \exp\left(-\left[(-\ln u)^a + (-\ln v)^a\right]^{1/a}\right)$$

Ce qui donne comme distribution conditionnelle de V , sachant $U=u$

$$p = C_1(u,v) = C(u,v) \frac{(-\ln u)^{a-1}}{u} \left[(-\ln u)^a + (-\ln v)^a\right]^{1/a-1}$$

Cette fonction $C_1(u,v)$ n'étant pas inversible, l'obtention de v en fonction de p et u s'obtiendra par résolution numérique.

L'algorithme de simulation d'une copule de Gumbel sera dans le principe le même que celui vu pour les deux copules précédentes :

- Simulation d'une variable aléatoire uniforme sur $[0,1] = u$
- Simulation d'une variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$, indépendante de u , $= p$
- Détermination de v_d par résolution numérique de l'équation $p = C(u, v_d) \frac{(-\ln u)^{a-1}}{u} \left[(-\ln u)^a + (-\ln v_d)^a\right]^{1/a-1}$

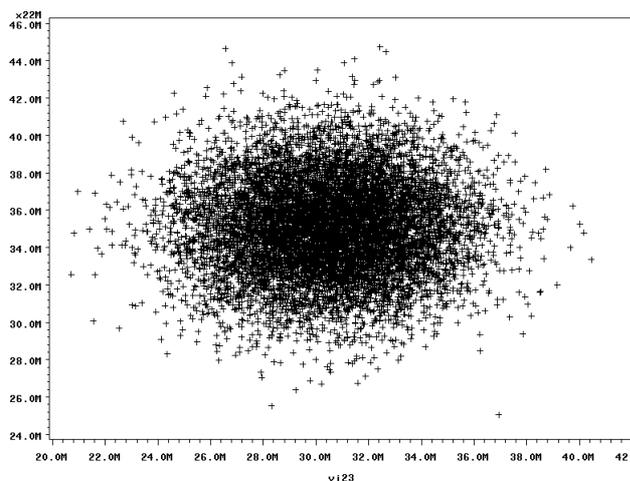
c] Résultats

➤ *RC Matérielle + Dommages Auto :*

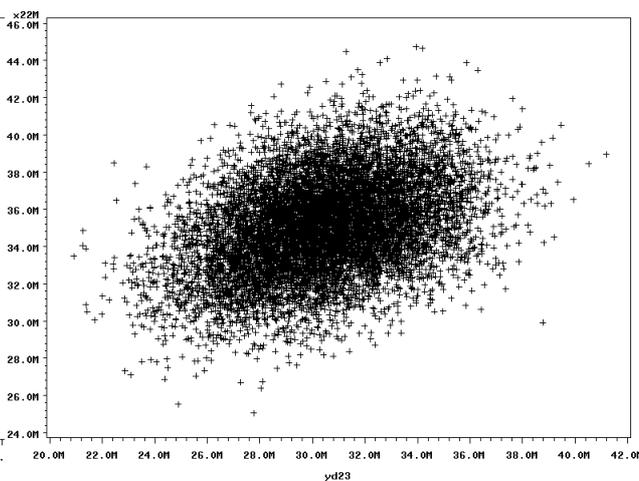
Copule AMH avec marginales Poisson sur-dispersées

	<i>Cas indépendant – Marg. Poisson</i>		<i>Copule Ali – Marginales Poisson</i>		<i>Chain-Ladder stochastique</i>	
	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>
TOTAL	65 612	3 707	65 582	4 361	65 630	6 482

Cas indépendant



Avec copule AMH



L'écart-type empirique représente 5,65% des réserves estimées dans le cas indépendant et 6,65% lorsque l'on prend en compte la corrélation, ce qui représente une augmentation de la variabilité de 17,65%.

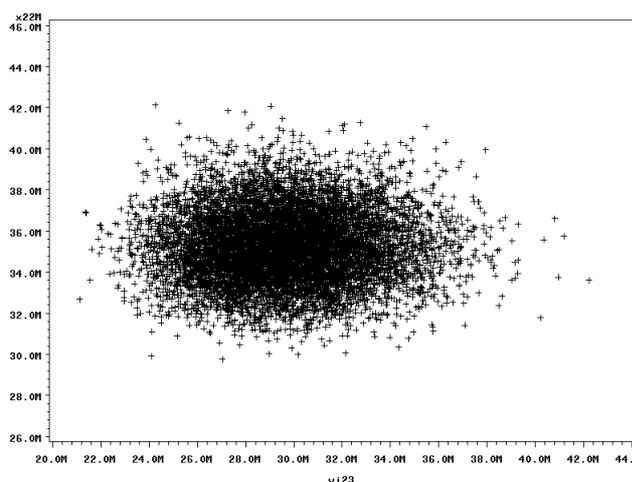
On constate bien que le nuage de points, circulaire dans le cas indépendant, s'allonge et s'étire vers les pointes selon une pente positive lorsque l'on prend en compte la corrélation. La copule AMH modélisant la dépendance entre petits sinistres, cet allongement du nuage de points se fait vers le cadran inférieur gauche.

Remarque : l'écart entre l'estimation que l'on avait obtenue par Chain-Ladder = 65 630 et l'estimation par le modèle avec copule des provisions dans le cas indépendant = 65 612 est de -0,03%. Il est de -0,07% dans le cas dépendant.

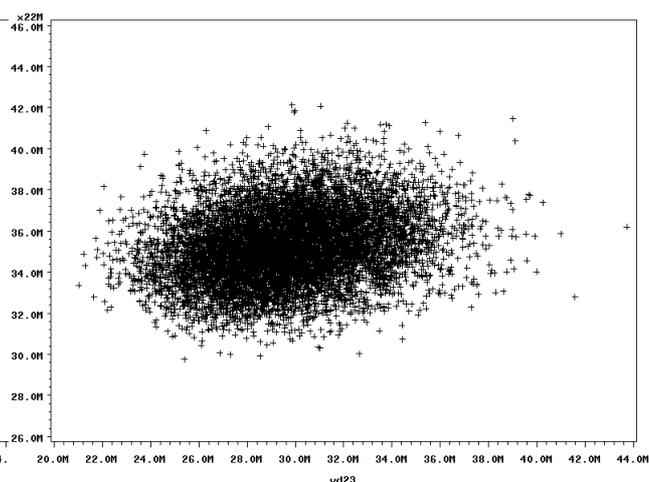
Copule de Frank avec marginales Gamma

	<i>Cas indépendant – Marg. Gamma</i>		<i>Copule Frank – Marginales Gamma</i>		<i>Chain-Ladder stochastique</i>	
	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>
TOTAL	64 952	3 274	64 951	3 666	65 630	6 482

Cas indépendant



Avec copule de Frank



L'écart-type empirique représente 5,04% des réserves estimées dans le cas indépendant et 5,64% lorsque l'on prend en compte la corrélation, ce qui représente une augmentation de la variabilité de 11,97%. Cette augmentation de la variabilité est nettement moins importante que celle que l'on avait obtenue dans le cadre du modèle à choc commun (+37,26%). Le nuage de points dans le cas indépendant a une forme légèrement ovale, qui s'accroît dans le cas dépendant en se « diffusant » vers la droite.

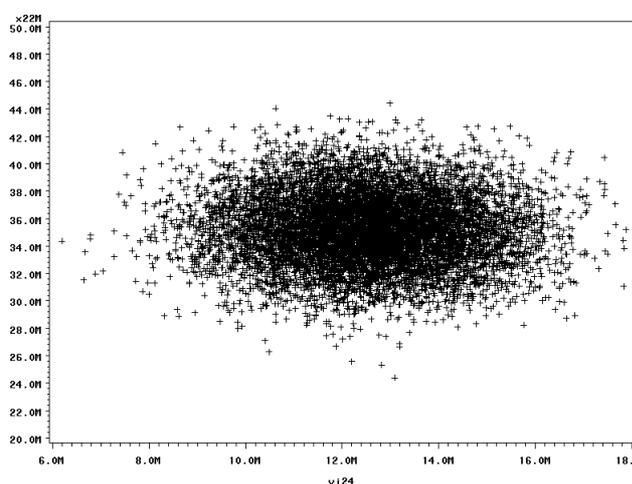
Remarque : l'écart entre l'estimation que l'on avait obtenue par Chain-Ladder = 65 630 et l'estimation par le modèle avec copule des provisions dans le cas indépendant = 64 952 est de -1,03%. Il est de -1,04% dans le cas dépendant. Par rapport à l'estimation obtenue dans le cadre de la modélisation GLM = 64 967, l'écart est de -0,02% dans le cas indépendant et de -0,03% dans le cas dépendant.

➤ *RC Matérielle + DAB Particuliers :*

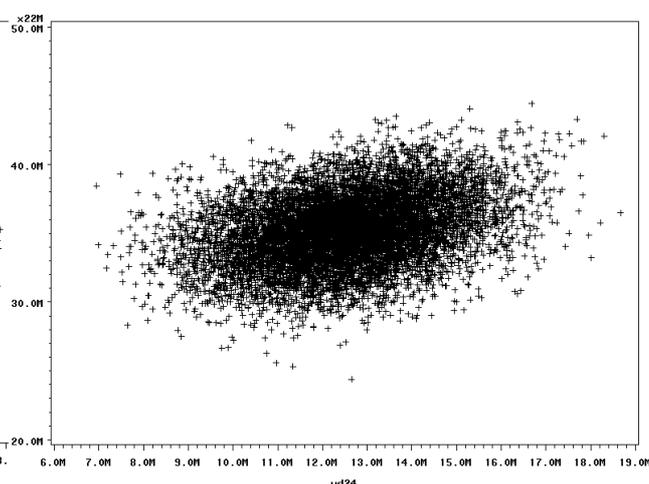
Copule de Gumbel avec marginales Poisson sur-dispersées

	Cas indépendant – Marg. Poisson		Copule Gumbel – Marginales Poisson		Chain-Ladder stochastique	
	Moy empirique	écart-type emp.	Moy empirique	écart-type emp.	Moy empirique	écart-type emp.
TOTAL	47 737	2 993	47 752	3 479	47 750	4 629

Cas indépendant



Avec copule de Gumbel

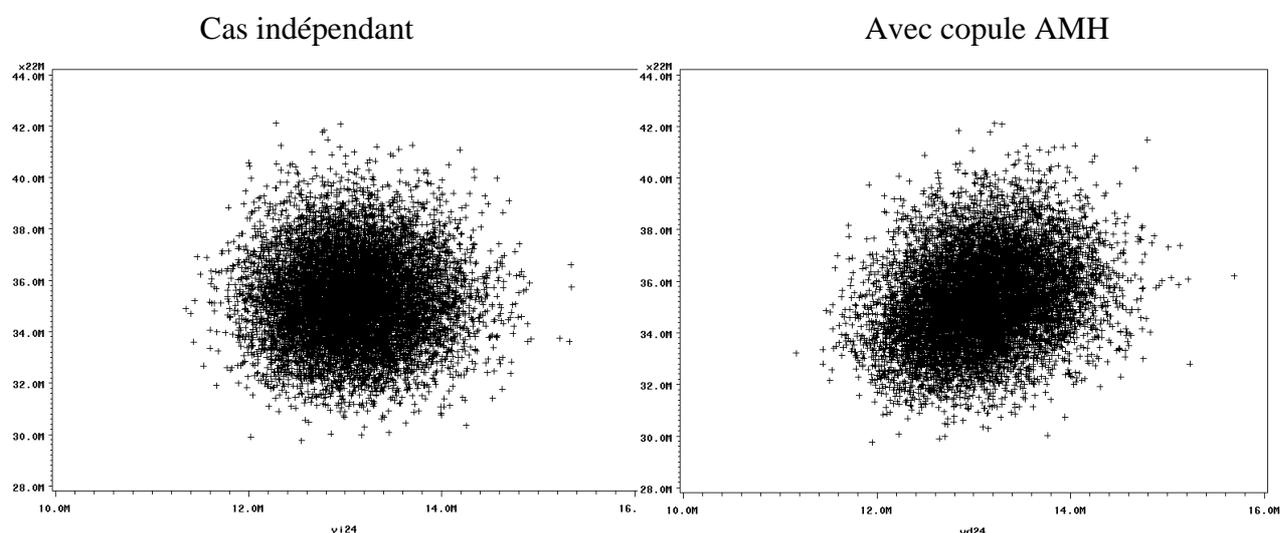


L'écart-type empirique représente 6,27% des réserves estimées dans le cas indépendant et 7,29% lorsque l'on prend en compte la corrélation, ce qui représente une augmentation de la variabilité de 16,26%. Ici aussi, le nuage de points dans le cas indépendant a une forme légèrement ovale, qui s'accroît dans le cas dépendant en se « diffusant » vers le cadran supérieur droit.

Remarque : l'écart entre l'estimation que l'on avait obtenue par Chain-Ladder = 47 750 et l'estimation par le modèle avec copule des provisions dans le cas indépendant = 47 737 est de -0,03%. Il est de 0% dans le cas dépendant.

Copule AMH avec marginales Gamma

	Cas indépendant – Marg. Gamma		Copule Ali – Marginales Gamma		Chain-Ladder stochastique	
	Moy empirique	écart-type emp.	Moy empirique	écart-type emp.	Moy empirique	écart-type emp.
TOTAL	48 370	1 801	48 368	1 925	47 750	4 629



L'écart-type empirique représente 3,72% des réserves estimées dans le cas indépendant et 3,98% lorsque l'on prend en compte la corrélation, ce qui représente une augmentation de la variabilité de 6,91%.

On a à nouveau un impact de la prise en compte de la dépendance bien moins important que dans le cadre du modèle à choc commun où l'augmentation de la variabilité avait été de +23,74%.

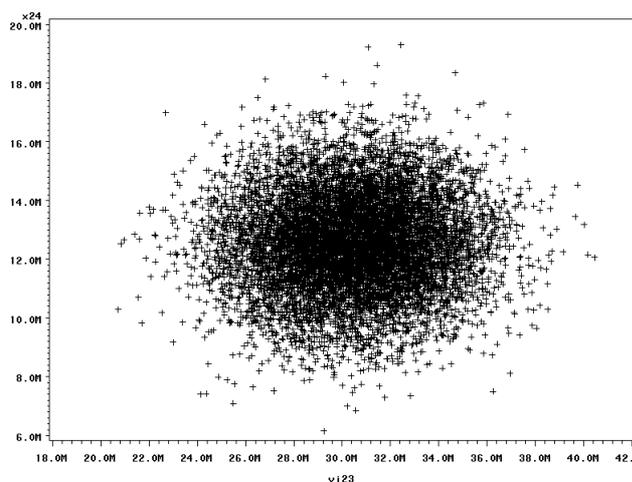
Remarque : l'écart entre l'estimation que l'on avait obtenue par Chain-Ladder = 47 750 et l'estimation par le modèle avec copule des provisions dans le cas indépendant = 48 370 est de +1,30%. Il est de +1,29% dans le cas dépendant. Par rapport à l'estimation obtenue dans le cadre de la modélisation GLM = 48 388, l'écart est de -0,04% dans les cas indépendant et dépendant.

➤ *Dommages Auto + DAB Particuliers :*

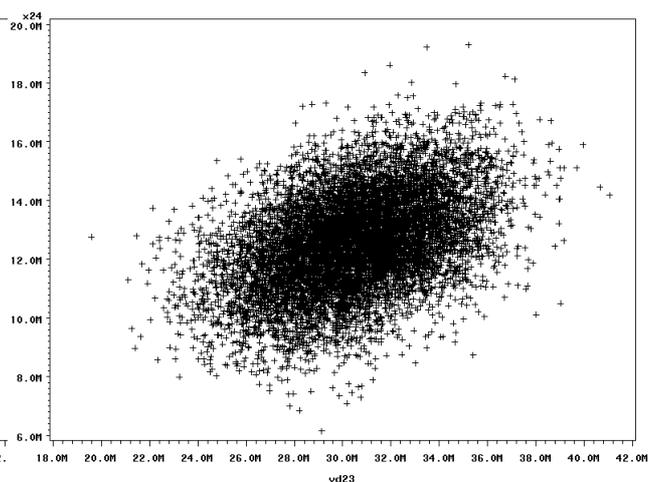
Copule de Frank avec marginales Poisson sur-dispersées

	Cas indépendant – Marg. Poisson		Copule Frank – Marginales Poisson		Chain-Ladder stochastique	
	Moy empirique	écart-type emp.	Moy empirique	écart-type emp.	Moy empirique	écart-type emp.
TOTAL	43 044	3 168	43 016	3 744	43 043	5 983

Cas indépendant



Avec copule de Frank



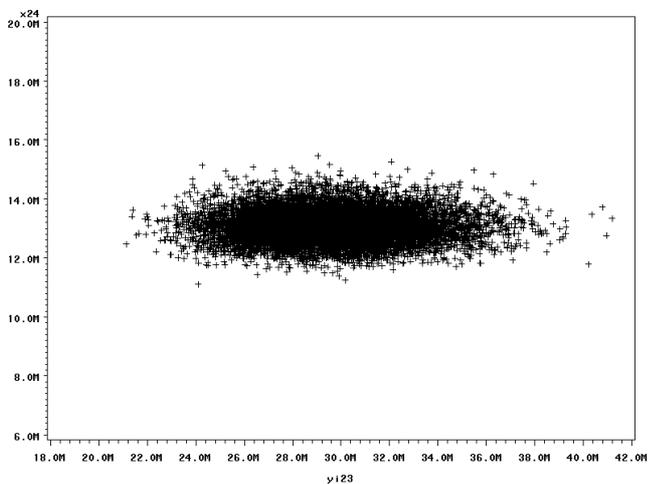
L'écart-type empirique représente 7,36% des réserves estimées dans le cas indépendant et 8,70% lorsque l'on prend en compte la corrélation, ce qui représente une augmentation de la variabilité de 18,16%. On constate bien la transformation du nuage : de circulaire, celui-ci devient ovale en s'étirant vers les bas (dépendance entre petits sinistres) et vers le haut (dépendance entre gros sinistres) selon une pente positive.

Remarque : l'écart entre l'estimation que l'on avait obtenue par Chain-Ladder = 43 043 et l'estimation par le modèle avec copule des provisions dans le cas indépendant = 43 044 est de 0%. Il est de -0,06% dans le cas dépendant.

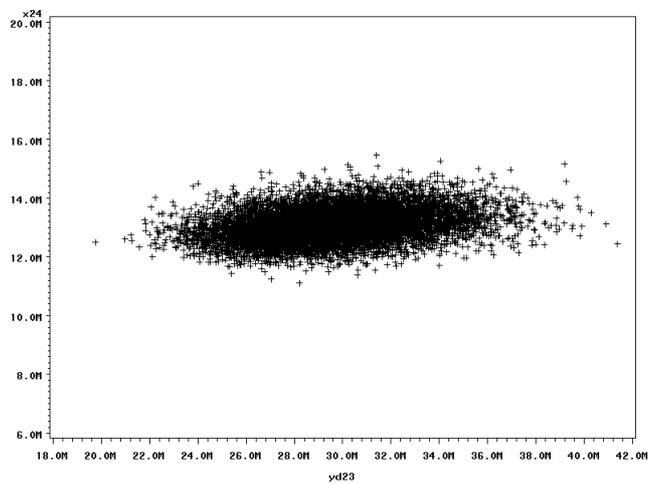
Copule de Frank avec marginales Gamma

	Cas indépendant – Marg. Gamma		Copule Frank – Marginales Gamma		Chain-Ladder stochastique	
	Moy empirique	écart-type emp.	Moy empirique	écart-type emp.	Moy empirique	écart-type emp.
TOTAL	42 751	2 831	42 748	3 053	43 043	5 983

Cas indépendant



Avec copule de Frank



L'écart-type empirique représente 6,62% des réserves estimées dans le cas indépendant et 7,14% lorsque l'on prend en compte la corrélation, ce qui représente une augmentation de la variabilité de 7,86%. Nous avons retenu la même copule que dans le cas précédent, appliquée aux mêmes triangles. Seules changent les lois marginales. On voit qu'avec une loi Gamma, le nuage de points, même dans le cas indépendant, a une forme nettement ovale, ce qui nous empêche de voir nettement dans le graphique l'impact de la prise en compte de la dépendance.

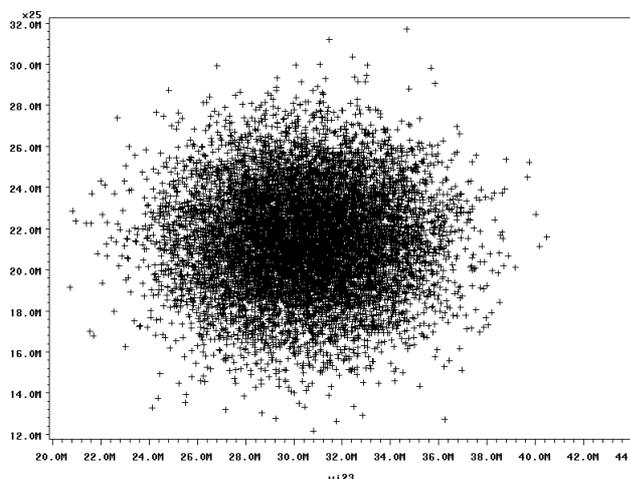
Remarque : l'écart entre l'estimation que l'on avait obtenue par Chain-Ladder = 43 043 et l'estimation par le modèle avec copule des provisions dans le cas indépendant = 42 751 est de -0,68%. Il est aussi de -0,68% dans le cas dépendant. Par rapport à l'estimation obtenue dans le cadre de la modélisation GLM = 42 753, l'écart est de 0% dans le cas indépendant et de -0,01% dans le cas dépendant.

➤ *Dommages Auto + DAB Professionnels :*

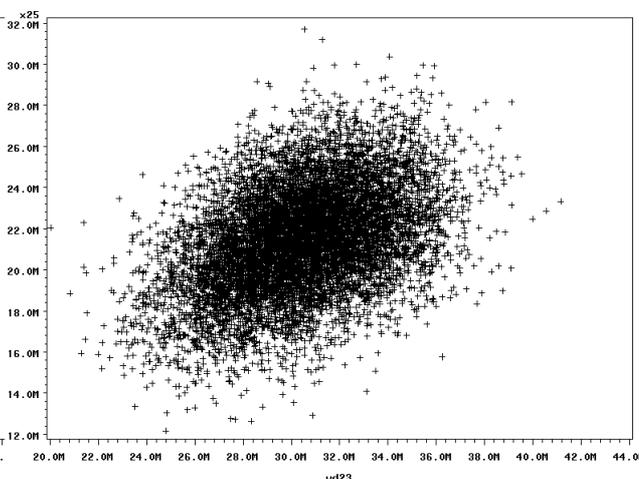
Copule AMH avec marginales Poisson sur-dispersées

	<i>Cas indépendant – Marg. Poisson</i>		<i>Copule Ali – Marginales Poisson</i>		<i>Chain-Ladder stochastique</i>	
	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>
TOTAL	51 944	3 730	51 914	4 421	51 941	7 012

Cas indépendant



Avec copule AMH



L'écart-type empirique représente 7,18% des réserves estimées dans le cas indépendant et 8,52% lorsque l'on prend en compte la corrélation, ce qui représente une augmentation de la variabilité de 18,53%.

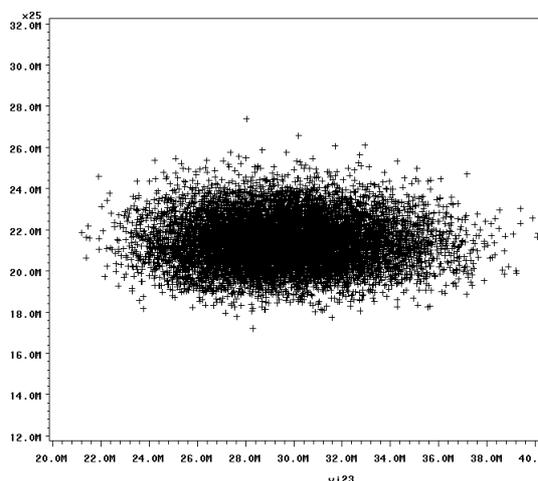
On constate ici aussi que le nuage de points, circulaire dans le cas indépendant, se diffuse dans le cadran inférieur gauche indiquant une dépendance entre petites sinistres.

Remarque : l'écart entre l'estimation que l'on avait obtenue par Chain-Ladder = 51 941 et l'estimation par le modèle avec copule des provisions dans le cas indépendant = 51 944 est de 0,01%. Il est aussi de -0,05% dans le cas dépendant.

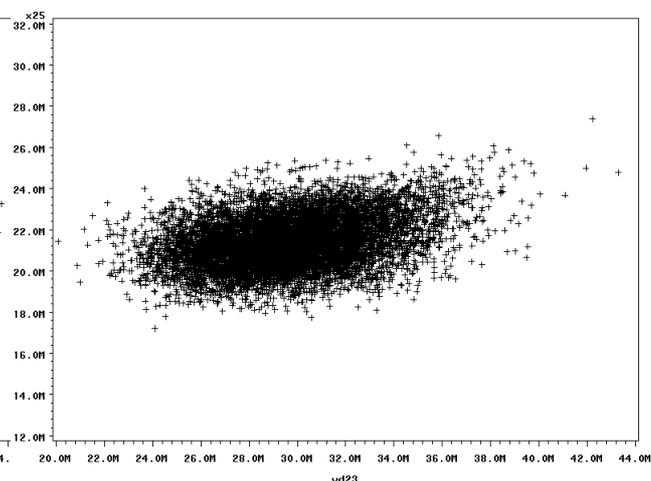
Copule de Gumbel avec marginales Gamma

	Cas indépendant – Marg. Gamma		Copule Gumbel – Marginales Gamma		Chain-Ladder stochastique	
	Moy empirique	écart-type emp.	Moy empirique	écart-type emp.	Moy empirique	écart-type emp.
TOTAL	51 022	3 048	51 073	3 425	51 941	7 012

Cas indépendant



Avec copule de Gumbel



L'écart-type empirique représente 5,97% des réserves estimées dans le cas indépendant et 6,71% lorsque l'on prend en compte la corrélation, ce qui représente une augmentation de la variabilité de 12,37%.

Le nuage de points est déjà ovale dans le cas indépendant mais on peut noter qu'il se diffuse légèrement vers le cadran supérieur droit, indiquant une dépendance entre gros sinistres.

Remarque : l'écart entre l'estimation que l'on avait obtenue par Chain-Ladder = 51 941 et l'estimation par le modèle avec copule des provisions dans le cas indépendant = 51 022 est de -1,77%. Il est aussi de -1,67% dans le cas dépendant.

Par rapport à l'estimation obtenue dans le cadre de la modélisation GLM = 51 084, l'écart est de -0,12% dans le cas indépendant et de -0,02% dans le cas dépendant.

d] Synthèse sur le modèle avec copules**➤ Commentaires sur les résultats obtenus:**

On peut déjà noter que lorsque l'on étudie les résultats des simulations pour chaque catégorie ministérielle (cf. annexe), on retrouve des chiffres similaires à ceux obtenus par la méthode à choc commun. Cela est normal car ces résultats reposent sur deux manières alternatives de simuler les marginales considérées : pour les données du modèle à choc commun, on utilise directement le générateur aléatoire de SAS (RANPOI pour une loi de Poisson et RANGAM pour une loi Gamma), alors que pour le modèle avec copule, on détermine tout d'abord une probabilité en utilisant le générateur aléatoire de loi uniforme de SAS (RANUNI) et l'on obtient la valeur de la loi considérée en utilisant la fonction inverse (GAMINV pour une loi Gamma ou méthode de Newton-Raphson ou de la bissection pour une loi de Poisson).

On rappelle que la copule est unique quand les marginales sont continues, ce qui n'est pas le cas lorsque l'on retient l'hypothèse de la loi de Poisson sur-dispersée. On peut constater dans ce cas que d'autres copules obtenaient des log-vraisemblance proches de celle de la copule retenue.

Ainsi, dans le cas de l'agrégation RC Matérielle + Dommages Automobile, la copule de Frank donnait une log-vraisemblance proche de celle de la copule AMH que nous avons retenue. Retenir cette copule de Frank nous permettrait donc de prendre en compte une dépendance sur gros sinistres que la copule AMH ne modélise pas. De même, pour l'agrégation Dommages Automobile + DAB Particuliers, nous avons retenu la copule de Frank, mais la copule de Gumbel était aussi une bonne candidate, et celle-ci rendrait compte tout comme la copule de Frank de la dépendance entre petits sinistres et de celle entre gros sinistres, tout en considérant sur les gros sinistres une dépendance plus importante.

Enfin, on constate que mis à part l'agrégation Dommages Automobile + DAB Particuliers, la copule retenue est différente selon les marginales utilisées.

➤ *Limites du modèle:*

La première limite que l'on peut faire à ce modèle est qu'effectivement, dans le cas de marginales discrètes, la copule n'est pas unique.

On peut aussi noter qu'il existe peu de statistiques de test pour déterminer la bonne adéquation du modèle aux données utilisées.

Enfin, l'estimation séparée des lois marginales et des paramètres de la copule (et non simultanée) engendre un biais lié au choix de la loi marginale retenue.

Effectivement, compte tenu des résultats obtenus dans le cadre des modélisations GLM, la loi marginale la plus adéquate semblait être la loi Gamma. Toutefois, en effectuant nos simulations de modèles avec copules sur des marginales Poisson sur-dispersée et Gamma, le critère du maximum de vraisemblance nous donnait systématiquement de meilleurs résultats avec les lois de Poisson sur-dispersées, or nous venons juste de constater que le choix de la marginale retenue avait une importance dans le choix de la copule associée (hormis pour le Dommages Automobile + le DAB Particulier). Ce choix a priori induit donc des résultats différents sur la structure de dépendance.

Comme nous avons pu le constater sur ces trois méthodes de prise en compte de la corrélation, la non-indépendance n'engendre pas d'augmentation du « Best Estimate » (c'est à dire la valeur actuelle probable des flux futurs, on entend couramment par ce terme une estimation de la valeur centrale).

Cela est normal, car l'espérance mathématique de la somme de deux variables est égale à la somme de l'espérance mathématique de chaque variable, que ces variables soient indépendantes ou pas.

La dépendance entre branches n'a donc de conséquence que sur le niveau d'incertitude se rapportant à ce montant « Best Estimate », mais ne change pas la valeur de ce montant.

Il paraît donc nécessaire que nous nous intéressions à présent à la comparaison de ces trois méthodes en terme de mesures de risque.

II.4 Mesures de risque

a) Définitions

➤ *Quantile:*

On appelle **quantile** d'ordre p d'une variable aléatoire X , $q_p = F_X^{-1}(p) = \inf \{ x \in \mathfrak{R} \mid F_X(x) \geq p \}$ $p \in [0,1]$.

Il s'agit d'un seuil qui ne sera dépassé que dans une proportion fixée de cas.

➤ *Value-at-Risk:*

Etant donné un risque X et un niveau de probabilité $\alpha \in [0,1]$, on appelle la **Value-at-Risk** (VaR) correspondante, notée $VaR[X; \alpha]$, le quantile d'ordre α de X : $VaR[X; \alpha] = F_X^{-1}(\alpha)$.

Cela est équivalent à dire que $\Pr [X \leq VaR [X; \alpha]] = \alpha$.

Cette notion, adoptée dans le monde de l'assurance, provient du secteur bancaire via la réforme Bale II. Elle a été créée historiquement pour estimer le risque de marché : elle représente un niveau de perte, pour une position ou un portefeuille, qui ne sera dépassé durant une période donnée qu'avec un certain degré de confiance. Cette valeur en revanche ne nous fournit aucune indication sur ce qui se passe lorsqu'elle est dépassée.

➤ *Tail - Value-at-Risk:*

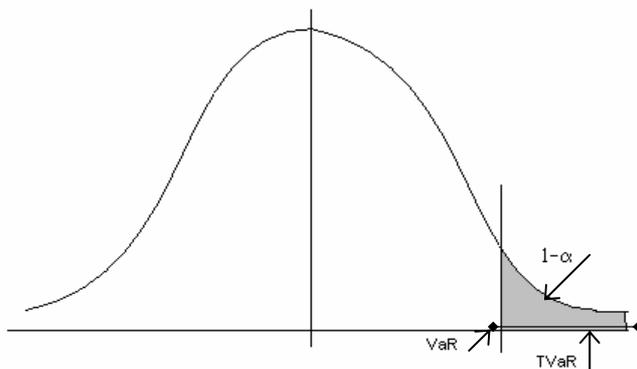
On peut alors introduire la notion de Tail Value-at-Risk.

On appelle **Tail Value-at-Risk** (Tail-VaR) au niveau de probabilité α , notée $TVaR[X; \alpha]$, la valeur suivante :

$$TVaR[X; \alpha] = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 VaR[X; \xi] d\xi = E [X \mid X > VaR[X; \alpha]]$$

La Tail-VaR est donc la moyenne des VaR de niveau supérieur à α .

On peut représenter graphiquement ces notions ainsi :



b] Marges de solvabilité

➤ *Introduction:*

Nous avons vu, dans notre présentation du mémoire, que les assureurs avaient l'obligation réglementaire de constituer des provisions techniques suffisantes.

C'est donc tout naturellement, qu'après avoir développé des méthodes déterministes de calcul de ces provisions, au premier rang desquelles la méthode Chain-Ladder, les assureurs (et les législateurs) ont voulu étendre leur connaissance sur le risque encouru. Effectivement, ces méthodes déterministes ne fournissaient que le 1^{er} moment non centré (l'espérance mathématique) de la distribution sous-jacente du risque.

Alors, se sont développées différentes méthodes de calcul stochastiques (comme le modèle de Mack, le Bootstrap, les modèles GLM, que nous avons passés en revue dans la 1^{ère} partie de ce mémoire), afin de déterminer le moment d'ordre 2 et donc la mesure de dispersion de cette distribution sous-jacente.

Une fois déterminée l'espérance et la variance, il est en effet possible de définir certaines mesures de risques, et donc possible de déterminer la probabilité d'avoir des provisions suffisantes pour couvrir le coût des sinistres. De manière plus générale, et avec des informations ou des hypothèses sur le modèle de solvabilité, il devient alors possible de déterminer le besoin en fonds propres et la probabilité de ruine.

Dans le cadre de **Solvency I**, les Autorités ont jusqu'à présent obligé les compagnies d'assurance à détenir un niveau minimum de Fonds Propres appelé Marge de Solvabilité Réglementaire (MSR) afin de protéger les assurés de la faillite, et donc du risque de défaut de paiement, des compagnies d'assurance. La MSR repose sur deux calculs : un appliqué aux primes et un autre appliqué aux sinistres. Le calcul de cette MSR ne nécessitait pas (et donc n'imposait pas aux assureurs) l'utilisation de méthodes stochastiques de provisionnement.

Suite aux crises financières qui ont pu avoir lieu ces dernières années ainsi que l'émergence de nouveaux risques susceptibles d'affecter la solvabilité des compagnies d'assurance, une réflexion importante a été menée sur les mesures de solvabilité et la gestion des risques d'assurance. L'adoption d'un nouveau système prudentiel au niveau européen, **Solvency II**, ainsi que la mise en place de nouvelles normes comptables, dans le cadre de la phase II de la norme IFRS dédiée aux contrats d'assurance, vont rendre systématique l'usage de ces méthodes stochastiques et des mesures de risque qui en découlent comme nous allons pouvoir le constater en détaillant un peu plus le régime Solvency II.

➤ *Solvency II:*

Pour plus d'informations sur Solvency II, on pourra se reporter à la note MARKT/2515/06 (l' "Amended Framework for Consultation on Solvency II" publié par la Commission Européenne en avril 2006), dont nous allons ici reprendre quelques extraits.

Structure du nouveau régime :

Cette directive Solvency II s'intéresse principalement aux exigences de fonds propres et à la surveillance prudentielle. Elle est directement inspirée de la Directive Bâle II (qui concerne le monde bancaire) et s'organise autour de 3 piliers.

Le Pilier I détermine des exigences quantitatives en capital, en spécifiant une harmonisation des provisions entre compagnies au niveau européen et l'instauration de minima de fonds propres.

Le Pilier II impose la mise en place de dispositifs de gouvernance des risques. Son principal objectif est de donner aux autorités de contrôle les moyens d'identifier « les entreprises présentant des caractéristiques financières, organisationnelles ou autres susceptibles de leur conférer un profil de risque plus élevé ».

Enfin, le Pilier III traite de l'information aux marchés en fixant des exigences (notamment d'harmonisation) en matière d'informations prudentielles et de publication d'informations.

On peut noter que ces reportings destinés aux autorités de contrôle et les informations destinées au public devront être en ligne avec les travaux de l'IASB sur la norme IFRS 4 phase 2 relative aux contrats d'assurance.

Plus précisément, concernant le Pilier I :

« Le premier pilier du nouveau régime de solvabilité prévoit deux exigences en matière de fonds propres, qui répondent à des finalités différentes et devraient être calculées en fonction de ces finalités : le Capital de Solvabilité Requis (SCR, ou « Solvency Capital Requirement » en anglais) et le Minimum de Capital Requis (MCR, ou « Minimum Capital Requirement » en anglais). Le Capital de Solvabilité Requis ne doit pas être inférieur au Minimum de Capital Requis ».

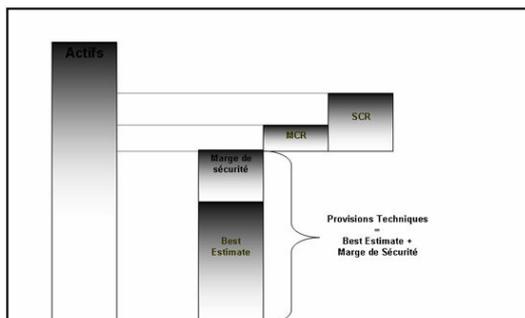
Ainsi, dans une première étape, ce pilier prévoit « une plus grande harmonisation en matière de provisions techniques », celles-ci devant correspondre à la somme du « best estimate » et d'une « marge de risque » (« Market Value Margin » en anglais). Cette marge de risque « couvre les risques liés à l'écoulement des passifs sur la totalité de leur durée ». Elle peut être calculée « comme la différence entre le « best estimate » et le 75^e centile de la distribution de probabilité sous-jacente, jusqu'à la liquidation ». Cette notion fait donc intervenir la Value-at-Risk des provisions au niveau de probabilité de 75%.

« Pour faciliter et stabiliser le passage au nouveau régime de solvabilité, le Minimum de Capital Requis doit être structuré d'une manière simple, comme c'est le cas dans les directives « Solvabilité I » actuellement en vigueur, tout en assurant un niveau de prudence suffisant. Un minimum absolu sera prévu ».

Enfin, « le Capital de Solvabilité Requis correspond à un niveau de fonds propres permettant à une entreprise d'absorber des pertes imprévues importantes et d'offrir une sécurité raisonnable aux assurés et aux souscripteurs » ... « Les paramètres de calcul du Capital de Solvabilité Requis doivent être établis de manière à prendre en compte les risques quantifiables auxquels une entreprise possédant un portefeuille de risques diversifié est exposée, sur la base d'un besoin de fonds propres économique correspondant à une probabilité de ruine de 0,5% (« Value at Risk » de 99,5%) à horizon d'un an ».

Enfin, ce document précise que les sociétés seront économiquement incitées à utiliser un modèle interne de risque pour déterminer leur SCR.

Nous fournissons ci-dessous un graphique (réalisé par Ernst & Young) illustrant l'imbrication de ces différentes valeurs :



Ainsi, la détermination de ces différentes Value-at-Risk va devenir cruciale dans le cadre du nouveau régime de solvabilité, et le choix du modèle ainsi que la méthode de prise en compte de la corrélation entre les branches auront une importance capitale.

Nous nous proposons donc maintenant d'évaluer les Value-et-Risk et Tail – Value-at-Risk obtenues selon nos différents modèles.

c] Résultats

Nous rappelons que notre démarche était, en partant des mêmes données et des mêmes hypothèses, de comparer trois modèles de prise en compte de la corrélation, en retenant deux lois marginales possibles. Nous avons donc, pour chaque agrégation considérée, $2 \times 3 = 6$ cas possibles que nous allons comparer sur la base des mesures de risque que nous venons de décrire.

Nous allons en premier lieu regarder l'impact de l'intégration de la marge de risque (VaR à 75%) par rapport au best estimate de la loi de distribution considérée (Poisson sur-dispersée ou Gamma) i.e les résultats des modélisations GLM effectuées en début de mémoire, et ensuite regarder l'impact de la prise en compte de la corrélation en plus de l'intégration de cette marge de risque.

Remarques :

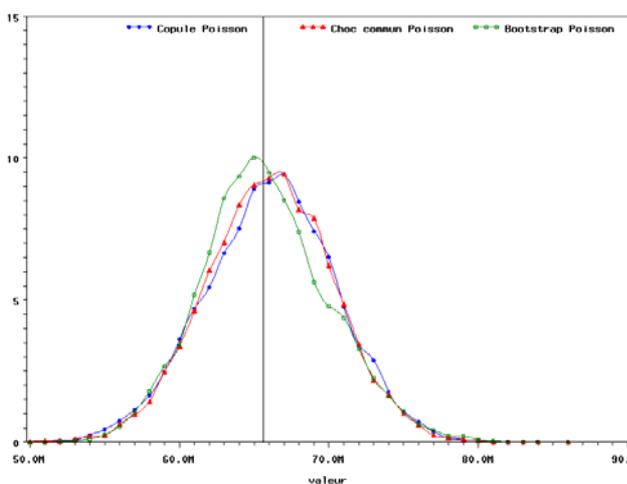
Nous avons, pour chaque cas, effectué 10 000 simulations. Nous n'avons donc pour la probabilité $\alpha = 99,9\%$ que 10 simulations pour le calcul de la Tail - Value-at-Risk. Il nous faudra donc être d'autant plus prudent dans l'interprétation des résultats concernant cette valeur.

Nous avons de plus fait figurer les graphiques des densités empiriques obtenues pour le cas dépendant, en positionnant une droite à la valeur du montant obtenu par la moyenne lors de la modélisation GLM (Poisson sur-dispersée ou Gamma).

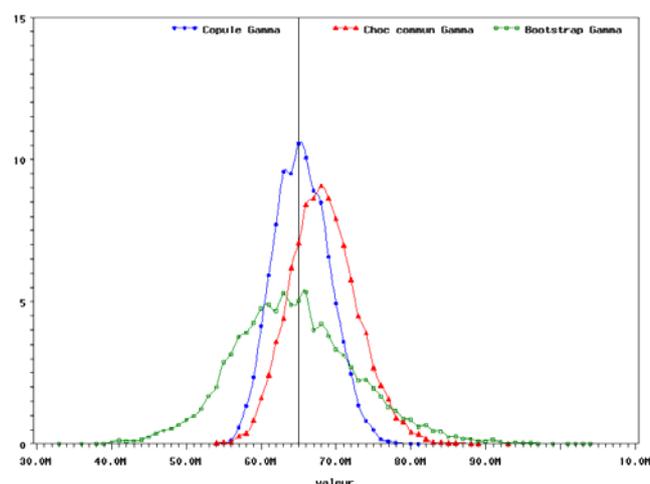
Ces calculs ont été effectués sur des montants de **provisions non escomptées**.

➤ RC Matérielle & Dommages Auto

Avec une loi de Poisson sur-dispersée



Avec une loi Gamma



Excepté pour les Tail - Value-at-Risk sur les quantiles extrêmes (99,9%), les trois méthodes étudiées (Bootstrap, Choc Commun et Copules), dans le cas de lois marginales Poisson sur-dispersées, donnent des résultats très similaires, ce que l'on peut observer sur le graphique des densités empiriques obtenues.

		Bootstrap		Choc commun		Copule		
		<i>Cas indépendant</i>	<i>Cas dépendant</i>	<i>Cas indépendant</i>	<i>Cas dépendant</i>	<i>Cas indépendant</i>	<i>Cas dépendant</i>	
Loi de Poisson sur-dispersée	<i>Moyenne</i>	65 269	65 269	65 607	65 538	65 612	65 582	
	<i>Ecart-type</i>	3 949	4 288	3 701	4 220	3 707	4 361	
	<i>Minimum</i>	52 829	51 371	51 851	49 641	51 607	50 197	
	<i>Maximum</i>	83 045	85 664	81 741	80 751	77 969	80 160	
	VaR	75%	67 751	67 965	68 084	68 391	68 142	68 540
		90%	70 617	70 972	70 365	70 904	70 419	71 107
		95%	72 140	72 614	71 662	72 484	71 654	72 683
		99%	74 942	76 135	74 059	75 193	74 058	75 365
		99,9%	77 926	79 734	77 440	78 821	76 573	78 525
	TVaR	90%	72 637	73 233	72 083	72 893	72 044	73 103
		95%	73 941	74 731	73 225	74 201	73 106	74 343
		99%	76 486	77 816	75 549	76 651	75 179	76 696
		99,9%	79 496	81 601	78 368	79 436	77 272	79 415
	Loi Gamma	<i>Moyenne</i>	63 999	63 999	65 008	67 860	64 952	64 951
<i>Ecart-type</i>		7 757	8 381	3 310	4 544	3 274	3 666	
<i>Minimum</i>		35 304	32 768	53 946	53 484	53 817	53 030	
<i>Maximum</i>		98 311	103 195	78 956	92 207	77 897	80 485	
VaR		75%	68 717	69 069	67 178	70 770	67 152	67 481
		90%	74 010	74 850	69 318	73 772	69 202	69 792
		95%	77 573	78 551	70 579	75 706	70 475	71 146
		99%	84 332	86 226	73 287	79 447	72 929	73 701
		99,9%	92 694	95 391	76 535	84 606	75 872	76 823
TVaR		90%	78 646	79 869	71 054	76 317	70 883	71 577
		95%	81 703	83 279	72 214	77 986	71 997	72 726
		99%	88 164	90 390	74 722	81 448	74 136	75 026
		99,9%	95 180	98 601	77 769	86 606	76 565	78 059

Lorsque l'on retient des marginales Poisson sur-dispersées, la VaR à 75% est la plus élevée avec le modèle à copules. Ce n'est plus le cas si l'on considère la VaR à 99,9%, pour laquelle ce modèle obtient les résultats les plus faibles.

Lorsque l'on retient des marginales Gamma, la VaR à 75% est la plus élevée avec le modèle à choc commun. En revanche, si l'on considère la VaR à 99,9%, les résultats les plus élevés sont constatés pour le modèle Bootstrap.

Si on observe avec plus d'attention les cas où les marginales suivent une loi Gamma, on constate que la méthode du Bootstrap se détache très nettement des deux autres méthodes : elle est beaucoup plus « étalée » sur les extrêmes et donc bien moins concentrée sur la moyenne, ce qui est révélateur de la forte valeur prise par l'écart-type. Nous rappelons ici que nous avons formulé des limites sur notre modèle Bootstrap en raison de la non-vérification des hypothèses sur les résidus dans le cas de l'utilisation de la loi Gamma, notamment pour la RC Matérielle.

La prise en compte de la corrélation ne fait augmenter la Value-at-Risk à 75% que très faiblement : dans le cas de lois marginales Poisson sur-dispersées, on obtient :

+0,32% pour le Bootstrap +0,45% avec un choc commun +0,58% avec les copules

et dans le cas de lois marginales Gamma :

+0,51% pour le Bootstrap +5,35% avec un choc commun +0,49% avec les copules

On rappelle que la modélisation Gamma dans le cadre d'un modèle à choc commun n'avait pas été jugée satisfaisante, le chiffre très élevé que l'on obtient dans ce cas-là pour la VaR, notamment par rapport aux évolutions constatées dans les autres cas, nous conforte dans cette idée.

On peut alors calculer les augmentations de provisions techniques liées à l'intégration de la marge de risque et à la prise en compte de la corrélation :

		Best Estimate GLM	Intégration Marge de risque	Marge de risque + corrélation	Impact corrélation
Poisson sur- dispersée	Bootstrap		3,23%	3,56%	0,33%
	Choc commun	65 630	3,74%	4,21%	0,47%
	Copule		3,83%	4,43%	0,61%
Gamma	Bootstrap		5,77%	6,31%	0,54%
	Choc commun	64 967	3,40%	8,93%	5,53%
	Copule		3,36%	3,87%	0,51%

Au final, sur les 6 cas étudiés, en ne retenant que les Value-at-Risk à 75% et après prise en compte de la corrélation, le modèle ayant la VaR la plus faible est le modèle avec copules avec des marginales suivant une loi Gamma (67 481) et le modèle ayant la VaR la plus élevée est le modèle à choc commun avec marginales suivant une loi Gamma (70 770) soit un écart de +4,87%.

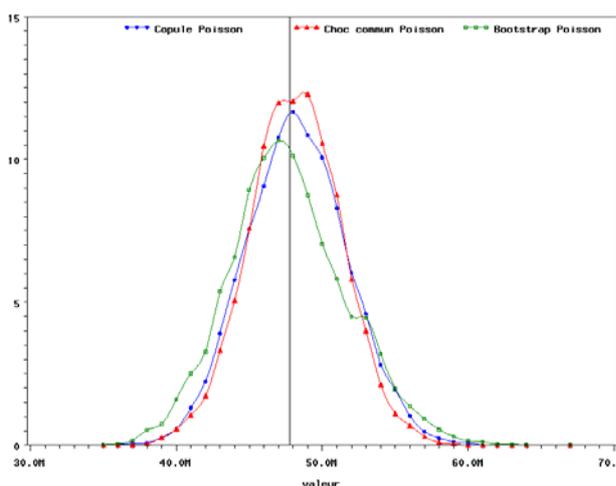
➤ RC Matérielle & DAB Particuliers

		Bootstrap		Choc commun		Copule		
		Cas indépendant	Cas dépendant	Cas indépendant	Cas dépendant	Cas indépendant	Cas dépendant	
Loi de Poisson sur- dispersée	Moyenne	47 212	47 212	47 733	47 652	47 737	47 752	
	Ecart-type	3 831	4 064	2 999	3 163	2 993	3 479	
	Minimum	35 230	34 367	37 513	35 727	36 773	35 974	
	Maximum	64 890	66 901	59 773	58 744	58 223	61 096	
	VaR	75%	49 576	49 766	49 788	49 789	49 786	50 071
		90%	52 464	52 666	51 572	51 704	51 578	52 265
		95%	53 915	54 217	52 552	52 802	52 594	53 520
		99%	56 674	57 324	54 640	55 166	54 644	55 932
		99,9%	59 687	60 901	57 536	57 157	57 244	59 296
	TVaR	90%	54 398	54 796	52 940	53 201	52 942	53 965
		95%	55 647	56 189	53 859	54 202	53 854	55 086
		99%	58 087	59 030	55 852	56 167	55 712	57 345
		99,9%	61 214	62 668	58 274	58 047	57 622	59 884
	Loi Gamma	Moyenne	47 643	47 643	48 415	48 421	48 370	48 368
Ecart-type		5 524	5 861	1 788	2 213	1 801	1 925	
Minimum		27 192	26 265	42 598	41 158	41 933	41 710	
Maximum		82 248	83 756	55 948	59 045	55 261	56 268	
VaR		75%	50 884	51 100	49 580	49 861	49 562	49 674
		90%	54 624	55 029	50 739	51 291	50 718	50 853
		95%	56 950	57 607	51 419	52 188	51 395	51 590
		99%	62 308	63 238	52 832	53 984	52 746	53 017
		99,9%	72 800	73 965	54 435	56 123	54 465	54 827
TVaR		90%	58 065	58 705	51 661	52 507	51 636	51 812
		95%	60 438	61 193	52 262	53 319	52 236	52 461
		99%	66 405	67 435	53 536	54 989	53 488	53 733
		99,9%	76 017	77 421	54 736	57 096	54 736	55 234

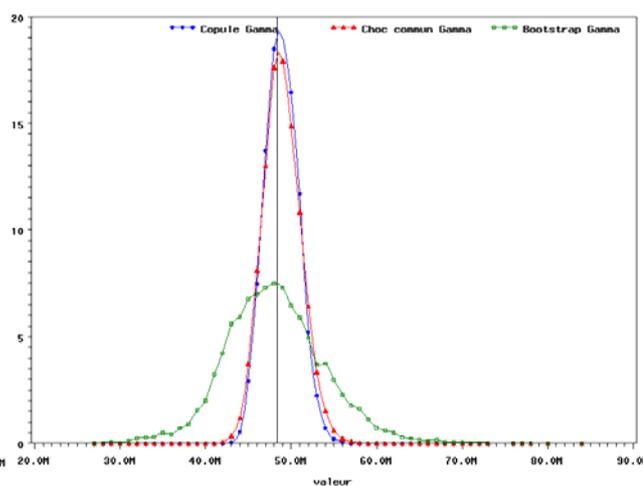
Ici encore, lorsque l'on retient des marginales Poisson sur-dispersées, la VaR à 75% est la plus élevée avec le modèle à copules. Pour une VaR à 99,9%, il s'agit du modèle Bootstrap.

Lorsque l'on retient des marginales Gamma, la VaR à 75% est la plus élevée avec le modèle Bootstrap. Si l'on considère la VaR à 99,9%, les résultats les plus élevés sont à nouveau constatés pour le modèle Bootstrap.

Avec une loi de Poisson sur-dispersée



Avec une loi Gamma



Comme pour l'agrégation précédente, dans le cas de marginales Gamma, le modèle Bootstrap s'éloigne très nettement des résultats des deux autres modèles considérés (on peut faire les mêmes constatations que précédemment), ce qui n'est pas le cas lorsque l'on considère le cas de marginales suivant une loi de Poisson sur-dispersée.

Enfin, concernant cette agrégation aussi la prise en compte de la corrélation ne fait augmenter la Value-at-Risk à 75% que très faiblement :

dans le cas de lois marginales Poisson sur-dispersées, on obtient :

+0,38% pour le Bootstrap +0% avec un choc commun +0,57% avec les copules

et dans le cas de lois marginales Gamma :

+0,42% pour le Bootstrap +0,57% avec un choc commun +0,23% avec les copules

On obtient pour cette agrégation le tableau suivant :

		Best Estimate GLM	Intégration Marge de risque	Marge de risque + corrélacion	Impact corrélacion
Poisson sur- dispersée	Bootstrap	47 750	3,82%	4,22%	0,40%
	Choc commun		4,27%	4,27%	0,00%
	Copule		4,26%	4,86%	0,60%
Gamma	Bootstrap	48 388	5,16%	5,60%	0,45%
	Choc commun		2,46%	3,04%	0,58%
	Copule		2,43%	2,66%	0,23%

En ce qui concerne les cas de marginales suivant une loi de Poisson sur-dispersée, l'impact total (marge de risque + corrélation) est à peu près le même quelle que soit la méthode retenue. On peut noter l'impact nul de la prise en compte de la corrélation dans le modèle à choc commun à ce niveau de probabilité. Si on avait retenu une VaR à 90%, on en aurait vu apparaître un.

Alors que pour l'agrégat précédent, la VaR à 99,9% était similaire entre modèle à choc commun et copules, ce n'est plus le cas ici, où les résultats du modèle avec copules sont supérieurs à ceux du modèle à choc commun. Nous rappelons que la copule retenue dans cette modélisation avec marginales Poisson sur-dispersées, était la copule de Gumbel, qui représente une dépendance forte entre sinistres importants.

Au final, sur les 6 cas étudiés, en ne retenant que les Value-at-Risk à 75% et après prise en compte de la corrélation, le modèle ayant la VaR la plus faible est ici aussi le modèle avec copules avec des marginales suivant une loi Gamma (49 674) et le modèle ayant la VaR la plus élevée est le modèle Bootstrap avec marginales suivant une loi Gamma (51 100) soit un écart de 2,87%.

➤ *Dommages Auto & DAB Particuliers*

		Bootstrap		Choc commun		Copule		
		<i>Cas indépendant</i>	<i>Cas dépendant</i>	<i>Cas indépendant</i>	<i>Cas dépendant</i>	<i>Cas indépendant</i>	<i>Cas dépendant</i>	
Loi de Poisson sur-dispersée	<i>Moyenne</i>	42 887	42 887	43 024	43 010	43 044	43 016	
	<i>Ecart-type</i>	1 786	2 271	3 155	3 306	3 168	3 744	
	<i>Minimum</i>	36 371	34 744	32 068	31 881	31 010	30 375	
	<i>Maximum</i>	50 630	53 509	56 197	56 904	54 289	55 853	
	<i>VaR</i>	75%	43 994	44 262	45 141	45 262	45 182	45 554
		90%	45 182	45 841	47 043	47 251	47 147	47 852
		95%	45 975	46 862	48 185	48 525	48 224	49 127
		99%	47 653	48 926	50 534	50 604	50 166	51 607
		99,9%	49 410	51 243	53 261	53 067	52 885	54 566
	<i>TVaR</i>	90%	46 238	47 219	48 573	48 840	48 543	49 556
		95%	46 948	48 138	49 592	49 846	49 456	50 681
		99%	48 344	49 985	51 621	51 780	51 205	52 834
		99,9%	49 850	52 188	54 285	54 194	53 305	55 082
	Loi Gamma	<i>Moyenne</i>	41 820	41 820	42 777	42 811	42 751	42 751
<i>Ecart-type</i>		5 877	6 347	2 885	3 273	2 831	2 831	
<i>Minimum</i>		21 717	20 988	33 478	31 270	33 618	33 618	
<i>Maximum</i>		72 425	72 249	56 371	59 919	55 145	55 145	
<i>VaR</i>		75%	45 292	45 544	44 639	44 915	44 592	44 805
		90%	49 587	50 199	46 517	47 102	46 477	46 477
		95%	52 251	53 204	47 735	48 359	47 586	47 586
		99%	57 400	58 505	49 974	51 225	49 799	49 799
		99,9%	64 926	67 174	52 801	54 586	52 056	52 896
<i>TVaR</i>		90%	53 166	54 088	48 078	48 901	47 957	48 322
		95%	55 483	56 632	49 117	50 111	48 933	49 317
		99%	60 546	61 853	51 161	52 590	50 900	51 389
		99,9%	67 546	68 704	54 156	55 908	53 346	54 054

Dans notre troisième agrégation étudiée aussi, lorsque l'on retient des marginales Poisson sur-dispersées, la VaR à 75% est la plus élevée avec le modèle avec copules. Mais en revanche, c'est toujours ce modèle qui nous donne la VaR la plus élevée à 99,9%.

Lorsque l'on retient des marginales Gamma, la VaR à 75% est la plus élevée avec le modèle Bootstrap. Si l'on considère la VaR à 99,9%, les résultats les plus élevés sont à nouveau constatés pour le modèle Bootstrap.

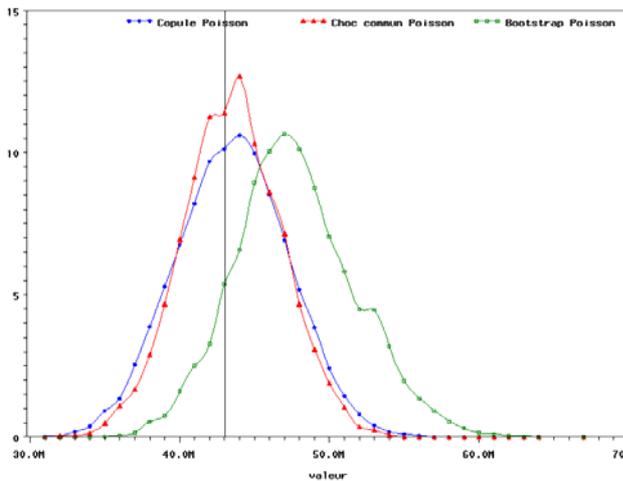
Pour cette agrégation aussi, dans le cas de marginales Gamma, le modèle Bootstrap s'éloigne très nettement des résultats des deux autres modèles considérés (on peut à nouveau faire les mêmes constatations que précédemment).

On peut noter, sur les graphiques des densités empiriques, la similitude des courbes entre modèle à choc commun et copules, dans le cas où les marginales suivent une loi Gamma. Les résultats diffèrent toutefois notablement dès qu'on considère les quantiles extrêmes.

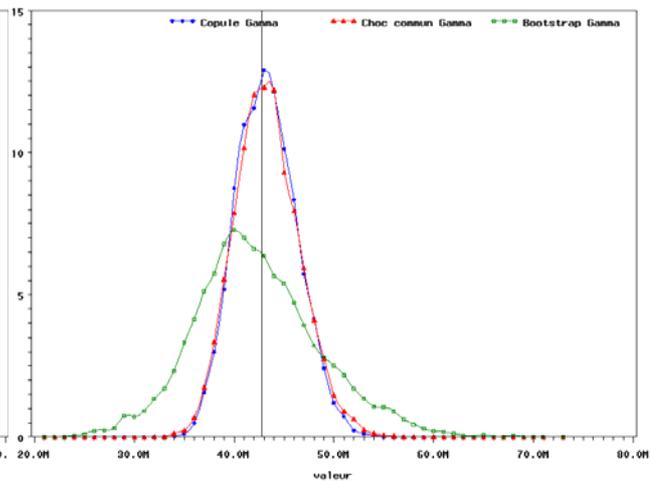
Il est à noter que pour cette somme Dommages Automobile + DAB Particuliers, nous avons retenu la même copule (de Frank) quelle que soit les marginales retenues. Comme nous l'avons dit alors, l'écart constaté entre les deux résultats ne provenait donc que du choix du modèle.

Alors que les résultats du modèle à choc commun sont toujours inférieurs à ceux du modèle avec copules dans le cas de marginales suivant une loi de Poisson sur-dispersée, c'est l'inverse lorsque les marginales suivent une loi Gamma.

Avec une loi de Poisson sur-dispersée



Avec une loi Gamma



Enfin, comme constaté jusqu'à présent, la prise en compte de la corrélation ne fait augmenter la Value-at-Risk à 75% que très faiblement :

dans le cas de lois marginales Poisson sur-dispersées, on obtient :

+0,61% pour le Bootstrap +0,27% avec un choc commun +0,82% avec les copules

et dans le cas de lois marginales Gamma :

+0,56% pour le Bootstrap +0,62% avec un choc commun +0,48% avec les copules

On obtient les augmentations de provisions techniques liées à l'intégration de la marge de risque et à la prise en compte de la corrélation suivantes :

		Best Estimate GLM	Intégration Marge de risque	Marge de risque + corrélation	Impact corrélation
Poisson sur- dispersée	Bootstrap	43 043	2,21%	2,83%	0,62%
	Choc commun		4,87%	5,16%	0,28%
	Copule		4,97%	5,83%	0,86%
Gamma	Bootstrap	42 753	5,94%	6,53%	0,59%
	Choc commun		4,41%	5,06%	0,65%
	Copule		4,30%	4,80%	0,50%

Au final, sur les 6 cas étudiés, en ne retenant que les Value-at-Risk à 75% et après prise en compte de la corrélation, le modèle ayant la VaR la plus faible est le modèle Bootstrap avec des marginales suivant une loi de Poisson sur-dispersée (44 262) et le modèle ayant la VaR la plus élevée est le modèle avec copules avec des marginales suivant ici aussi une loi de Poisson sur-dispersée (45 554) soit un écart de +2,92%.

➤ Dommages Auto & DAB Professionnels

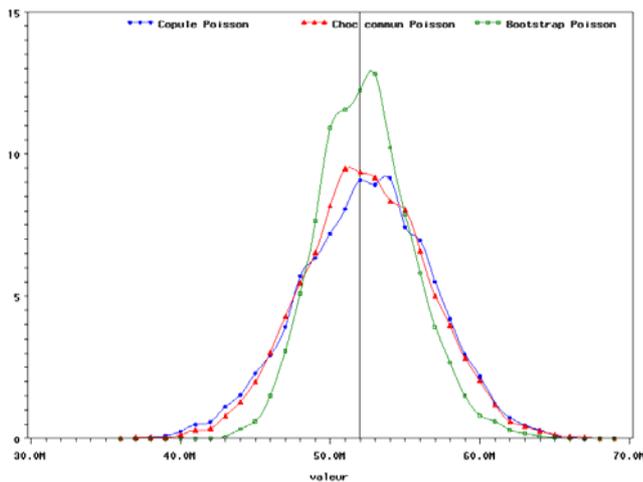
		Bootstrap		Choc commun		Copule		
		Cas indépendant	Cas dépendant	Cas indépendant	Cas dépendant	Cas indépendant	Cas dépendant	
Loi de Poisson sur-dispersée	Moyenne	51 868	51 868	51 931	51 910	51 944	51 914	
	Ecart-type	2 604	3 221	3 704	4 227	3 730	4 421	
	Minimum	42 552	41 412	38 287	35 338	37 434	36 869	
	Maximum	64 489	68 025	68 095	66 929	66 403	67 289	
	VaR	75%	53 490	53 883	54 400	54 772	54 510	54 968
		90%	55 268	56 027	56 630	57 391	56 716	57 525
		95%	56 331	57 424	57 956	58 901	58 115	59 045
		99%	58 598	60 308	60 646	61 851	60 403	61 851
		99,9%	61 384	63 703	63 886	65 081	63 061	64 593
	TVaR	90%	56 719	57 895	58 417	59 373	58 441	59 451
		95%	57 679	59 131	59 597	60 651	59 544	60 717
		99%	59 740	61 827	61 963	63 329	61 579	63 136
		99,9%	62 615	65 363	65 256	65 939	64 405	65 513
		Loi Gamma	Moyenne	50 115	50 115	51 117	51 125	51 022
Ecart-type	6 475		7 428	3 055	3 847	3 048	3 425	
Minimum	28 796		27 857	40 271	38 464	41 890	40 445	
Maximum	79 495		84 316	65 095	69 028	66 998	69 620	
VaR	75%		54 101	54 642	53 092	53 615	53 058	53 222
	90%		58 743	59 872	55 134	56 128	55 044	55 553
	95%		61 528	63 310	56 278	57 715	56 186	57 021
	99%		67 011	69 917	58 660	60 985	58 409	60 136
	99,9%		74 575	78 224	61 842	64 866	60 882	63 977
TVaR	90%		62 456	64 413	56 716	58 274	56 568	57 568
	95%		64 983	67 430	57 752	59 696	57 581	58 905
	99%		70 327	73 789	59 919	62 589	59 569	61 748
	99,9%		76 575	80 327	63 069	66 273	62 702	65 639

Ici encore, lorsque l'on retient des marginales Poisson sur-dispersées, la VaR à 75% est la plus élevée avec le modèle avec copules. Pour une VaR à 99,9%, il s'agit du modèle à choc commun.

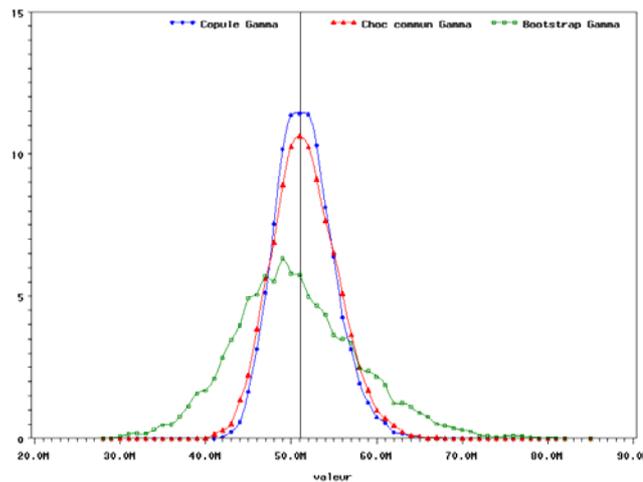
Lorsque l'on retient des marginales Gamma, la VaR à 75% est la plus élevée avec le modèle Bootstrap. Si l'on considère la VaR à 99,9%, les résultats les plus élevés sont à nouveau constatés pour le modèle Bootstrap.

On observe à nouveau sur les graphiques des densités empiriques que le modèle Bootstrap s'éloigne très nettement des deux autres modèles dans le cas où les marginales suivent une loi Gamma.

Avec une loi de Poisson sur-dispersée



Avec une loi Gamma



Ici encore, la prise en compte de la corrélation ne fait augmenter la Value-at-Risk à 75% que très faiblement : dans le cas de lois marginales Poisson sur-dispersées , on obtient :

+0,74% pour le Bootstrap +0,68% avec un choc commun +0,84% avec les copules

et dans le cas de lois marginales Gamma :

+1% pour le Bootstrap +0,99% avec un choc commun +0,31% avec les copules

Concernant les augmentations de provisions techniques liées à l'intégration de la marge de risque et à la prise en compte de la corrélation, on obtient le tableau suivant :

		Best Estimate GLM	Intégration Marge de risque	Marge de risque + corrélation	Impact corrélation
Poisson sur- dispersée	Bootstrap	51 941	2,98%	3,74%	0,76%
	Choc commun		4,73%	5,45%	0,72%
	Copule		4,95%	5,83%	0,88%
Gamma	Bootstrap	51 084	5,91%	6,96%	1,06%
	Choc commun		3,93%	4,95%	1,02%
	Copule		3,86%	4,19%	0,32%

Enfin, sur les 6 cas étudiés, en ne retenant que les Value-at-Risk à 75% et après prise en compte de la corrélation, le modèle ayant la VaR la plus faible est le modèle avec copule avec des marginales suivant une loi Gamma (53 222) et le modèle ayant la VaR la plus élevée est le modèle avec copule avec des marginales suivant une loi de Poisson sur-dispersée (54 968) soit un écart de +3,28%.

CONCLUSION

Pour conclure, nous pouvons surtout noter que c'est l'exigence d'une Value-at-Risk à 75% sur les provisions (c'est à dire l'intégration de la marge de risque) qui tend à faire augmenter le niveau des provisions à constituer. Effectivement, comme nous l'avons souligné précédemment, la prise en compte de la dépendance existant entre catégories ministérielles n'a aucun effet sur le montant des provisions « Best Estimate », en raison de la propriété d'additivité de l'espérance mathématique.

La prise en compte de la corrélation entre catégories ministérielles, après l'intégration de cette marge de risque, n'a qu'un impact limité. Cet impact est généralement inférieur à 1% sur la Value-at-Risk à 75%. Cela est dû au fait qu'avec une VaR à 75%, nous nous situons dans le cœur de la distribution.

Avec une Value-at-Risk à 99,9%, cet impact serait en revanche plus important (de l'ordre de 2 à 5%), les quantiles extrêmes reflétant plus l'impact de la dépendance entre risques.

Enfin, nous ne pouvons dire qu'une méthode est préférable à une autre dans tous les cas.

Ainsi, nous avons vu, sur différentes agrégations, avec différentes lois marginales, et selon différents modèles, que nous n'obtenions pas systématiquement des résultats convergents, même si le modèle à choc commun et la théorie des copules avaient tendance à se rapprocher.

Outre les problèmes communs aux trois méthodes mises en application, nous avons pu constater que chacune de ces méthodes avaient ses limites propres qui conduisaient à obtenir des résultats différents.

Le choix de l'utilisation de l'une ou l'autre de ces méthodes dépend donc tout à la fois de la nature des données (en terme de quantité et de qualité) et des moyens techniques disponibles.

Dans les limites communes aux méthodes que nous avons pu soulever au fil de ce mémoire, nous pouvons en tout premier lieu citer le faible nombre d'observations.

Ainsi, toute notre modélisation reposait sur les résultats de la modélisation GLM, celle-ci nous donnant une loi de distribution avec des paramètres différents pour chaque cellule du triangle. Nous avons donc 21 paramètres à estimer pour chaque triangle, avec 66 observations disponibles.

Nous rappelons de plus que nous avons volontairement limité le champ de notre étude aux risques courts afin de pallier partiellement cette faiblesse d'historique. L'étude de risques longs tels que les risques RC Générale, RC Corporelle ou Construction, pour lesquels notre profondeur d'historique n'aurait pas été suffisante, et ce d'autant plus que notre travail s'est effectué sur les montants de règlements et non de charge, aurait été entachée de biais importants liés à ce problème ou aux hypothèses que nous aurions dû formuler quant aux facteurs de queue de liquidation.

Outre l'hypothèse d'indépendance des (C_{ij}) que nous avons faite dans le cadre de notre modélisation GLM et qui, comme nous le disions, était souvent difficilement admissible, nous avons aussi eu des problèmes de vérification des hypothèses concernant le caractère iid selon une loi normale des résidus, notamment dans le cadre de la loi Gamma.

Nous avons par ailleurs constaté par la suite que cela avait une importance considérable dans la méthode Bootstrap pour laquelle les résultats obtenus avec la loi Gamma n'étaient pas satisfaisants.

Enfin, notre dernière limite commune aux trois méthodes est l'hypothèse concernant la dépendance au sein du triangle. Effectivement, nous avons supposé que chaque cellule du triangle présentait la même structure de dépendance.

Dans le cadre du Bootstrap, nous avons utilisé une matrice de corrélation de rang unique appliquée à chaque cellule, dans le cadre du modèle à choc commun, nous avons utilisé un coefficient de corrélation linéaire unique, appliqué à chaque cellule lui aussi (pour déterminer la covariance de chaque cellule) et enfin dans le cadre de la théorie des copules, nous avons supposé que la même copule (avec les mêmes paramètres) était associée à chaque cellule du triangle.

Nous avons de plus ajouté à cette hypothèse déjà très restrictive, l'hypothèse que ce coefficient de corrélation (de rang pour le Bootstrap ou linéaire pour le modèle à choc commun) était non pas une variable aléatoire mais un paramètre réel connu.

Pour lever l'hypothèse du caractère commun de la copule à chaque cellule du triangle, on pourra se reporter au mémoire réalisé par A. Gillet et B. Serra.

La méthode qui nous semble la plus restrictive en terme de paramétrage semble être le modèle à choc commun. En effet, ce modèle impose d'avoir des marginales de même loi, ce que n'impose ni le Bootstrap (pour lequel la loi sous-jacente n'a pas forcément besoin d'être connue) ni la théorie des copules.

Toutefois, nous avons vu lors de notre étude du modèle avec copule que retenir des lois marginales différentes n'améliorait pas les résultats (dans notre cas).

Néanmoins, le modèle à choc commun impose aussi la connaissance du coefficient de corrélation, ce qui n'est pas indispensable dans le cadre de la théorie des copules, et qui ne l'aurait pas été non plus dans le Bootstrap si on avait retenu la 1^{ère} approche de prise en compte de la corrélation.

Enfin, on peut rappeler la limite concernant la prise en compte de la dispersion dans le cas de la loi de Poisson ou du paramètre d'échelle dans le cas de la loi Gamma (qui s'applique de la même manière sur la composante commune et sur la composante propre au risque).

Le Bootstrap quant à lui n'a pas semblé bien fonctionner avec les lois Gamma et, en tout état de cause, comme nous l'avons constaté, ne donne pas de bons résultats sur les quantiles extrêmes.

Il implique de plus, dans la configuration que nous avons utilisée (à savoir une modélisation GLM à chaque itération), une certaine difficulté de mise en oeuvre (temps de traitement élevé). En revanche, le fait de procéder en deux étapes (en supposant la matrice de corrélation de rangs connue) permet de diminuer l'espace mémoire nécessaire et le temps de calcul.

Nous avons toutefois vu que le critère de Value-at-Risk à 75%, qui nous situe donc hors des quantiles extrêmes, permet de contourner ce problème de fiabilité dans les quantiles élevés. Si de plus on retient l'hypothèse de marginales suivant une loi de Poisson sur-dispersée, qui donne les mêmes résultats que la méthode Chain-Ladder, on peut alors faire l'économie de la génération d'un modèle GLM à chaque itération ce qui permet de gagner en facilité de mise en oeuvre et en temps de traitement.

Il existe de plus sur le marché un certain nombre de logiciels intégrant le Bootstrap dans leurs fonctionnalités, qui permettent donc de le mettre en oeuvre de manière très aisée, ce qui explique que cette technique est très utilisée dans les entreprises à l'heure actuelle pour le provisionnement stochastique.

Enfin, on peut noter que l'extension au cas multivarié dans le cadre du Bootstrap est très aisée dans la configuration que nous avons retenue (utilisation d'une matrice de corrélation de rangs) et qu'elle est elle aussi intégrée dans les logiciels que nous venons de citer.

En ce qui concerne le modèle avec copules, on peut noter que dans trois cas d'agrégation sur les quatre considérés, la Value-at-Risk à 75% obtenue est minimale dans le cas d'un modèle avec copule et lois marginales Gamma. Il est toutefois à noter que dans le dernier cas (agrégation Dommages Automobile + DAB Particuliers) le résultat obtenu dans le cas Copule et marginales Gamma (VaR à 75% = 44 805) n'était pas très éloigné du meilleur résultat obtenu, celui du cas Bootstrap et marginales Poisson sur-dispersée (VaR à 75% = 44 262).

Le problème majeur dans notre cas pour l'utilisation du modèle avec copule est l'identification de la copule à retenir. Effectivement, il existe bien des méthodes d'identification de copules, basés sur les données empiriques, mais le faible nombre d'observations dont nous disposons nous permettait difficilement de les mettre en pratique ou tout du moins de les interpréter.

Pour plus d'informations sur ces méthodes d'identification et sur un exemple d'application, on pourra notamment se référer à l'ouvrage de D. CADOUX et J.M. LOIZEAU ainsi qu'à celui de O. BELGUISE. Enfin, on peut aussi noter que si la simulation d'un certain nombre de copules ne pose pas de problème majeur, il en va autrement pour d'autres comme la copule de Gumbel qui en nécessitant une résolution numérique engendre des temps de traitement plus élevés ainsi qu'un risque de biais lié à cette approximation numérique (un choix est notamment à faire entre précision désirée et temps de traitement).

C'est toutefois cette méthode qui aurait notre préférence entre les trois méthodes mises en oeuvre, car c'est la plus souple en terme de contraintes et qu'elle permet de rendre compte de nombreuses formes de dépendance, ce qui explique son essor actuel.

Enfin, pour préciser toutes les limites de ce mémoire, nous nous sommes cantonnés dans ce mémoire au cas bivarié. Cette étude serait à effectuer aussi dans un cas multivarié, afin de comparer les trois méthodes étudiées non seulement sur leurs résultats, mais aussi sur la base de leur facilité de mise en oeuvre. Pour un exemple de modèles avec copules dans un cadre trivarié, on pourra à nouveau se référer à l'ouvrage de D. CADOUX et J.M. LOIZEAU.

Pour finir, nous nous sommes aussi limités au calcul de la Value-at-Risk concernant les provisions techniques à constituer, or nous rappelons que la directive Solvency II impose des conditions à la fois sur le niveau des provisions (par l'intégration de la marge de risque) mais aussi sur le Capital de Solvabilité Requis, afin d'avoir une probabilité de ruine de 0,5% i.e une Value-at-Risk des fonds propres de 99,5%.

Nous avons vu que l'exigence de la VaR à 75% pour les provisions techniques permettait d'intégrer la méthode du Bootstrap.

Un modèle complet de besoin en fonds propres intégrant la prise en compte de tous les risques : risques d'assurance - risque de sous-provisionnement et risque de sous-tarifcation - , risques d'actifs - risques de marché (ou d'investissement), risque de crédit et risque de liquidité - , et risque opérationnel, à ce quantile très élevé de 99,5%, invaliderait peut-être la méthode du Bootstrap.

Il faut donc considérer que notre étude ne constitue qu'une première étape et qu'une analyse comparée de nos trois méthodes et de leurs résultats sur le besoin en fonds propres nécessiterait d'être menée.

ANNEXES

ANNEXE 1 : Tableau des règlements

Règlements ventilés par catégorie ministérielle, par années de survenances et par années de règlement

CATEGORIE MINISTERIELLE= 21 / DOMMAGES CORPORELS

	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	Total
1994	2 469	1 969	535	378	448	162	89	136	22	12	1	6 219
1995		1 785	1 394	450	268	123	86	79	1	10	11	4 208
1996			1 376	1 428	322	91	11	94	182		3	3 559
1997				1 406	1 346	548	248	43	37	18	37	3 683
1998					1 437	2 074	487	122	117	83	14	4 333
1999						1 449	1 351	544	149	58	47	3 598
2000							1 169	1 289	294	142	229	3 123
2001								825	1 095	491	236	2 647
2002									659	1 558	356	2 573
2003										848	1 150	1 998
2004											405	405
Total	2 469	3 754	3 304	3 662	3 820	4 447	3 441	3 131	2 557	3 223	2 538	36 346

CATEGORIE MINISTERIELLE= 22C / RC CORPORELLE AUTOMOBILE

	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	Total
1994	7 943	19 306	11 741	6 154	5 912	5 432	1 389	2 402	950	716	2 375	64 321
1995		8 019	19 618	12 233	4 839	5 294	1 990	3 765	6 364	3 678	359	66 162
1996			8 379	15 514	9 653	6 102	6 024	5 274	4 160	4 946	2 655	62 707
1997				9 086	13 522	8 806	7 961	5 524	4 451	4 619	1 599	55 567
1998					9 227	12 823	10 810	8 112	7 130	7 720	1 573	57 395
1999						8 132	14 068	15 253	12 668	11 469	4 808	66 398
2000							5 950	17 449	16 687	14 558	5 663	60 306
2001								3 865	13 028	13 429	10 340	40 661
2002									2 291	11 681	7 985	21 956
2003										2 407	8 935	11 343
2004											1 626	1 626
Total	7 943	27 325	39 738	42 987	43 152	46 589	48 193	61 643	67 729	75 221	47 919	508 441

CATEGORIE MINISTERIELLE= 22M / RC MATERIELLE AUTOMOBILE

	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	Total
1994	40 186	19 583	1 629	664	328	119	21	282	27	19	879	63 736
1995		41 599	19 090	1 907	639	289	112	54	34	34	12	63 770
1996			37 694	20 923	1 979	609	237	197	56	76	6	61 777
1997				38 589	21 579	2 245	976	419	208	200	111	64 328
1998					39 721	27 930	2 235	1 033	559	322	124	71 925
1999						45 195	26 568	4 012	1 799	679	198	78 452
2000							44 399	31 563	5 334	1 608	788	83 692
2001								51 475	30 483	4 522	873	87 353
2002									44 797	24 690	2 255	71 743
2003										37 592	16 380	53 973
2004											25 279	25 279
Total	40 186	61 183	58 413	62 083	64 246	76 387	74 548	89 036	83 297	69 742	46 907	726 028

CATEGORIE MINISTERIELLE= 23 / DOMMAGES AUTOMOBILE

	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	Total
1994	100 763	30 935	1 567	511	87	130	184	40	10	16	14	134 256
1995		93 848	29 614	1 008	353	70	136	83	142	20	6	125 282
1996			89 894	27 055	915	368	147	149	113	90	29	118 761
1997				92 430	26 828	1 063	934	329	218	254	47	122 103
1998					101 802	30 796	1 938	757	542	358	46	136 239
1999						102 018	39 758	2 414	726	628	280	145 823
2000							104 973	45 736	2 770	944	299	154 724
2001								118 255	44 440	3 172	739	166 606
2002									109 579	34 702	1 628	145 909
2003										95 895	21 448	117 343
2004											66 336	66 336
Total	100 763	124 783	121 075	121 003	129 985	134 445	148 070	167 764	158 541	136 079	90 872	1 433 381

CATEGORIE MINISTERIELLE= 24 / DAB PARTICULIERS

	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	Total
1994	18 208	11 849	1 484	528	272	353	226	105	79	26	11	33 141
1995		16 817	10 971	1 473	665	438	279	117	108	203	14	31 085
1996			18 998	12 112	2 031	465	307	335	102	692	53	35 096
1997				21 862	19 284	2 688	1 307	292	388	144	132	46 097
1998					18 716	13 553	2 386	855	601	540	224	36 876
1999						20 026	18 591	3 066	1 464	760	283	44 191
2000							11 312	13 438	3 429	1 324	186	29 689
2001								11 328	14 946	3 150	1 037	30 461
2002									11 323	11 193	1 322	23 838
2003										9 306	6 299	15 605
2004											4 810	4 810
Total	18 208	28 666	31 453	35 975	40 968	37 524	34 408	29 536	32 441	27 339	14 373	330 890

CATEGORIE MINISTERIELLE= 25 / DAB PROFESSIONNELS

	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	Total
1994	17 897	21 784	2 889	1 777	517	169	351	132	154	93	0	45 764
1995		17 783	20 349	2 573	847	282	60	211	577	53	599	43 335
1996			31 254	30 187	3 297	924	439	382	201	197	46	66 927
1997				19 382	15 740	2 049	742	701	631	353	152	39 748
1998					22 209	17 810	6 169	1 516	1 263	360	86	49 414
1999						20 487	23 050	5 581	1 689	832	474	52 113
2000							19 898	22 017	3 797	1 890	234	47 835
2001								17 465	25 180	4 616	1 139	48 400
2002									15 210	15 515	1 829	32 554
2003										11 340	7 210	18 550
2004											7 509	7 509
Total	17 897	39 568	54 492	53 919	42 610	41 720	50 708	48 004	48 701	35 249	19 277	452 148

CATEGORIE MINISTERIELLE= 26 / DAB AGRICOLES

	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	Total
1994	2 601	810	94	19	8	1	0	0	0	0	0	3 533
1995		1 736	541	90	26	7	1	3	9	4	0	2 417
1996			2 009	687	344	93	54	1	0	6	0	3 195
1997				3 661	1 209	157	19	13	68	8	2	5 136
1998					2 743	1 054	214	22	7	13	1	4 055
1999						3 210	1 632	376	94	29	3	5 344
2000							3 518	1 785	250	63	27	5 643
2001								2 125	912	145	11	3 194
2002									1 712	1 461	100	3 273
2003										2 145	523	2 668
2004											2 581	2 581
Total	2 601	2 546	2 644	4 457	4 330	4 522	5 438	4 327	3 052	3 874	3 248	41 040

CATEGORIE MINISTERIELLE= 27 / CATASTROPHES NATURELLES

	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	Total
1994	1 545	2 418	365	194	328	137	184	119	287	108	41	5 725
1995		5 054	1 878	739	771	371	381	207	138	65	52	9 658
1996			965	3 023	1 795	1 238	1 013	2 509	395	284	292	11 514
1997				305	1 402	1 041	1 289	613	472	505	523	6 150
1998					447	1 483	1 458	1 002	839	401	382	6 013
1999						814	4 489	790	81	236	38	6 448
2000							1 010	2 730	792	278	167	4 977
2001								1 821	2 504	479	38	4 842
2002									3 667	5 241	513	9 420
2003										842	4 048	4 890
2004											69	69
Total	1 545	7 472	3 208	4 260	4 744	5 084	9 824	9 792	9 175	8 440	6 164	69 708

CATEGORIE MINISTERIELLE= 28 / RC GENERALE

	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	Total
1994	1 474	3 182	2 376	2 059	2 158	2 355	1 859	1 246	1 571	1 086	643	20 009
1995		1 235	2 646	2 230	1 913	1 538	915	1 893	868	1 297	626	15 161
1996			1 665	3 712	2 308	1 730	2 360	2 584	4 956	1 403	917	21 634
1997				1 818	4 736	2 328	2 133	2 591	1 681	2 714	977	18 978
1998					2 281	4 092	2 192	3 061	2 103	2 320	1 143	17 192
1999						1 924	4 857	3 229	2 203	1 966	1 686	15 865
2000							1 912	6 077	3 662	4 475	1 131	17 258
2001								2 688	5 882	3 300	1 380	13 251
2002									1 938	5 269	1 584	8 791
2003										1 470	2 065	3 535
2004											847	847
Total	1 474	4 417	6 687	9 819	13 395	13 967	16 228	23 369	24 865	25 301	12 999	152 520

CATEGORIE MINISTERIELLE= 29 / PROTECTION JURIDIQUE

	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	Total
1994	494	1 219	264	344	53	68	54	2	7	4	0	2 508
1995		331	841	281	65	46	2	20	2	0	0	1 590
1996			447	1 130	189	61	56	45	84	14	4	2 032
1997				473	991	226	18	14	8	82	7	1 820
1998					330	893	232	46	116	16	45	1 678
1999						744	692	27	33	87	12	1 595
2000							617	808	146	88	76	1 735
2001								270	341	207	68	886
2002									157	448	59	663
2003										420	421	841
2004											263	263
Total	494	1 550	1 552	2 229	1 629	2 039	1 672	1 233	894	1 365	954	15 611

CATEGORIE MINISTERIELLE= 30 / ASSISTANCE

	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	Total
1994	67	3	27	0	9	0	0	0	0	0	0	107
1995		701	165	45	0	2	0	0	0	0	0	913
1996			737	159	1	4	0	0	0	0	0	901
1997				716	164	4	1	50	0	0	0	936
1998					860	355	4	1	0	1	0	1 220
1999						1 958	330	0	2	0	0	2 290
2000							0	0	0	0	0	1
2001								0	0	0	0	0
2002									0	0	0	0
2003										0	0	0
2004											12	12
Total	67	704	929	920	1 033	2 324	335	52	2	1	13	6 380

CATEGORIE MINISTERIELLE= 34 / TRANSPORT

	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	Total
1994	6 903	14 898	7 044	3 369	1 541	1 780	1 677	1 048	429	186	307	39 182
1995		5 946	16 449	6 339	2 109	1 131	128	39	14	13	0	32 168
1996			6 443	14 522	6 531	1 846	439	88	18	4	35	29 926
1997				5 750	16 784	4 879	844	81	12	12	3	28 366
1998					7 213	19 376	2 063	258	16	20	30	28 977
1999						2 534	2 189	303	52	137	19	5 234
2000							793	1 174	283	57	11	2 317
2001								1 039	922	348	50	2 359
2002									961	845	43	1 849
2003										311	491	802
2004											246	246
Total	6 903	20 844	29 936	29 979	34 179	31 546	8 134	4 030	2 707	1 932	1 235	171 426

CATEGORIE MINISTERIELLE= 35 / DOMMAGES-OUVRAGE

	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	Total
1994	1 676	3 051	1 606	395	176	162	490	622	354	433	31	8 996
1995		1 060	2 453	837	705	132	176	256	231	338	7	6 196
1996			1 449	3 317	970	238	407	411	225	1 685	80	8 781
1997				1 903	2 775	799	1 023	429	253	138	124	7 444
1998					2 513	3 840	1 342	416	777	215	243	9 346
1999						1 822	4 404	1 335	1 220	242	79	9 101
2000							2 541	3 930	1 874	677	247	9 269
2001								3 323	3 538	874	293	8 028
2002									3 264	3 843	476	7 583
2003										2 171	1 037	3 208
2004											971	971
Total	1 676	4 111	5 507	6 452	7 139	6 993	10 382	10 722	11 734	10 616	3 590	78 923

CATEGORIE MINISTERIELLE= 36 / RC DECENNALE

	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	Total
1994	419	835	530	582	496	120	253	324	328	271	99	4 258
1995		382	1 022	809	332	248	352	958	147	373	292	4 916
1996			581	1 320	685	459	200	130	161	103	146	3 785
1997				712	1 233	746	408	382	261	321	148	4 211
1998					1 021	1 255	559	521	582	188	489	4 616
1999						548	1 447	1 122	624	734	926	5 401
2000							409	1 308	705	456	341	3 219
2001								725	1 784	1 298	638	4 444
2002									960	1 496	1 234	3 690
2003										804	1 964	2 768
2004											736	736
Total	419	1 217	2 133	3 423	3 768	3 377	3 629	5 469	5 553	6 044	7 014	42 044

CATEGORIE MINISTERIELLE= 38 / CAUTION

	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	Total
1994	2	14	21	21	25	6	108	2	1	4	1	206
1995		8	343	148	11	16	11	2	2	18	11	568
1996			0	63	18	89	38	105	131	5	1	450
1997				3	50	33	13	1	6	6	4	115
1998					66	23	138	60	61	20	3	371
1999						60	0	1	12	2	2	77
2000							27	258	1	21	1	308
2001									39	0	0	39
2002									4	1	102	107
Total	2	22	364	235	169	228	336	428	256	76	125	2 242

CATEGORIE MINISTERIELLE= 79 / AUTRES

	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	Total
1994		33	0	0				33
1996	1	0	0	0				1
1998		12	0	0				12
1999			0	320	0			320
2000				600	0			600
2001					2	0		2
2002						1	0	1
Total	1	45	0	920	3	1	0	970

ANNEXE 2 : Résultats des modélisations GLM retenues

➤ RC Matérielle

Poisson sur-dispersée

Analysis Of Parameter Estimates			
Paramètre		Estimation	Erreur type
Intercept		17,4369	0,055
surv	2004	-0,3914	0,1006
surv	2003	-0,082	0,0787
surv	2002	0,1605	0,0732
surv	2001	0,3428	0,07
surv	2000	0,2932	0,0707
surv	1999	0,2256	0,0717
surv	1998	0,1373	0,0731
surv	1997	0,0237	0,0751
surv	1996	-0,0171	0,0758
surv	1995	0,0144	0,0752
surv	1994	0	0

Analysis Of Parameter Estimates			
Paramètre		Estimation	Erreur type
dvpt2	1	-3,7506	0,4548
dvpt2	2	-7,8022	2,4119
dvpt2	3	-7,4155	1,6297
dvpt2	4	-5,701	0,5977
dvpt2	5	-6,0507	0,6277
dvpt2	6	-5,335	0,3942
dvpt2	7	-4,4773	0,2342
dvpt2	8	-3,7332	0,1494
dvpt2	9	-2,6953	0,0855
dvpt2	10	-0,5676	0,0343
dvpt2	11	0	0
Scale		423,1808	0

Observation Statistics							
Obs	reglt	surv	dvpt2	Pred	Xbeta	Std	Prob
1	40 186	1994	1	37 389	17,437	0,055	0,905
2	19 583	1994	2	21 194	16,869	0,058	0,086
3	1 629	1994	3	2 525	14,742	0,097	0,000
4	664	1994	4	894	13,704	0,156	0,028
5	328	1994	5	425	12,960	0,238	0,138
6	119	1994	6	180	12,102	0,396	0,150
7	21	1994	7	88	11,386	0,629	0,011
8	282	1994	8	125	11,736	0,599	0,913
9	27	1994	9	23	10,021	1,630	0,545
10	19	1994	10	15	9,635	2,412	0,533
11	879	1994	11	879	13,686	0,451	0,500
12	41 599	1995	1	37 931	17,451	0,055	0,954
13	19 090	1995	2	21 502	16,884	0,058	0,019
14	1 907	1995	3	2 561	14,756	0,097	0,001
15	639	1995	4	907	13,718	0,156	0,012
16	289	1995	5	431	12,974	0,238	0,046
17	112	1995	6	183	12,116	0,396	0,107
18	54	1995	7	89	11,401	0,629	0,209
19	34	1995	8	127	11,750	0,599	0,013
20	34	1995	9	23	10,036	1,630	0,598
21	12	1995	10	16	9,649	2,412	0,459
22	37 694	1996	1	36 755	17,420	0,055	0,675
23	20 923	1996	2	20 835	16,852	0,058	0,529
24	1 979	1996	3	2 482	14,725	0,097	0,010
25	609	1996	4	879	13,687	0,156	0,009
26	237	1996	5	418	12,942	0,238	0,009
27	197	1996	6	177	12,085	0,396	0,606
28	56	1996	7	87	11,369	0,629	0,248
29	76	1996	8	123	11,719	0,599	0,209
30	6	1996	9	22	10,004	1,630	0,217
31	38 589	1997	1	38 286	17,461	0,054	0,558
32	21 579	1997	2	21 703	16,893	0,057	0,460
33	2 245	1997	3	2 585	14,765	0,097	0,072
34	976	1997	4	916	13,727	0,156	0,660

Observation Statistics							
Obs	reglt	surv	dvpt2	Pred	Xbeta	Std	Prob
33	2 245	1997	3	2 585	14,765	0,097	0,072
34	976	1997	4	916	13,727	0,156	0,660
35	419	1997	5	435	12,983	0,238	0,436
36	208	1997	6	185	12,126	0,396	0,621
37	200	1997	7	90	11,410	0,629	0,898
38	111	1997	8	128	11,760	0,599	0,406
39	39 721	1998	1	42 893	17,574	0,052	0,068
40	27 930	1998	2	24 314	17,007	0,055	0,994
41	2 235	1998	3	2 896	14,879	0,095	0,003
42	1 033	1998	4	1 026	13,841	0,155	0,517
43	559	1998	5	487	13,097	0,238	0,717
44	322	1998	6	207	12,239	0,396	0,869
45	124	1998	7	101	11,523	0,629	0,627
46	45 195	1999	1	46 851	17,662	0,050	0,234
47	26 568	1999	2	26 558	17,095	0,053	0,503
48	4 012	1999	3	3 164	14,967	0,094	0,994
49	1 799	1999	4	1 120	13,929	0,154	0,999
50	679	1999	5	532	13,185	0,237	0,847
51	198	1999	6	226	12,327	0,396	0,371
52	44 399	2000	1	50 125	17,730	0,048	0,006
53	31 563	2000	2	28 414	17,162	0,051	0,980
54	5 334	2000	3	3 385	15,035	0,093	1,000
55	1 608	2000	4	1 199	13,997	0,154	0,972
56	788	2000	5	570	13,253	0,237	0,915
57	51 475	2001	1	52 676	17,780	0,047	0,312
58	30 483	2001	2	29 860	17,212	0,050	0,659
59	4 522	2001	3	3 557	15,084	0,093	0,995
60	873	2001	4	1 260	14,046	0,154	0,008
61	44 797	2002	1	43 896	17,597	0,052	0,653
62	24 690	2002	2	24 883	17,030	0,055	0,443
63	2 255	2002	3	2 964	14,902	0,095	0,002
64	37 592	2003	1	34 446	17,355	0,059	0,931
65	16 380	2003	2	19 526	16,787	0,062	0,002
66	25 279	2004	1	25 279	17,046	0,084	0,500

Gamma

Analysis Of Parameter Estimates			
Paramètre		Estimation	Erreur type
Intercept		17,3963	0,1532
surv	2004	-0,3508	0,3615
surv	2003	-0,0624	0,2681
surv	2002	0,1604	0,2288
surv	2001	0,4303	0,2064
surv	2000	0,642	0,1913
surv	1999	0,4893	0,1803
surv	1998	0,3421	0,1732
surv	1997	0,2434	0,1655
surv	1996	-0,2293	0,1575
surv	1995	-0,1889	0,151
surv	1994	0	0

Analysis Of Parameter Estimates			
Paramètre		Estimation	Erreur type
dvpt2	1	-3,7101	0,3615
dvpt2	2	-7,676	0,266
dvpt2	3	-7,2543	0,227
dvpt2	4	-5,6501	0,2059
dvpt2	5	-6,102	0,1894
dvpt2	6	-5,3566	0,1759
dvpt2	7	-4,5982	0,1676
dvpt2	8	-3,8329	0,1604
dvpt2	9	-2,7874	0,1538
dvpt2	10	-0,6007	0,1467
dvpt2	11	0	0
Scale		9,3248	1,5951

Observation Statistics							
Obs	reglt	surv	dvpt2	Pred	Xbeta	Std	Prob
1	40 186	1994	1	35 903	17,396	0,153	0,769
2	19 583	1994	2	19 690	16,796	0,154	0,486
3	1 629	1994	3	2 211	14,609	0,160	0,028
4	664	1994	4	777	13,563	0,161	0,164
5	328	1994	5	362	12,798	0,166	0,277
6	119	1994	6	169	12,040	0,174	0,023
7	21	1994	7	80	11,294	0,192	0,000
8	282	1994	8	126	11,746	0,174	1,000
9	27	1994	9	25	10,142	0,210	0,618
10	19	1994	10	17	9,720	0,241	0,686
11	879	1994	11	879	13,686	0,327	0,500
12	41 599	1995	1	29 723	17,207	0,148	0,989
13	19 090	1995	2	16 301	16,607	0,149	0,855
14	1 907	1995	3	1 830	14,420	0,154	0,606
15	639	1995	4	643	13,374	0,157	0,481
16	289	1995	5	299	12,609	0,162	0,413
17	112	1995	6	140	11,851	0,171	0,092
18	54	1995	7	67	11,105	0,183	0,120
19	34	1995	8	105	11,557	0,202	0,000
20	34	1995	9	21	9,953	0,199	0,993
21	12	1995	10	14	9,531	0,247	0,296
22	37 694	1996	1	28 547	17,167	0,149	0,969
23	20 923	1996	2	15 656	16,566	0,148	0,975
24	1 979	1996	3	1 758	14,380	0,153	0,781
25	609	1996	4	618	13,334	0,157	0,463
26	237	1996	5	287	12,569	0,164	0,119
27	197	1996	6	135	11,810	0,163	0,990
28	56	1996	7	64	11,065	0,181	0,247
29	76	1996	8	100	11,517	0,198	0,077
30	6	1996	9	20	9,913	0,226	0,000
31	38 589	1997	1	45 796	17,640	0,160	0,142
32	21 579	1997	2	25 116	17,039	0,159	0,169
33	2 245	1997	3	2 820	14,852	0,163	0,080

Observation Statistics							
Obs	reglt	surv	dvpt2	Pred	Xbeta	Std	Prob
34	976	1997	4	991	13,807	0,163	0,463
35	419	1997	5	461	13,042	0,168	0,283
36	208	1997	6	216	12,283	0,173	0,419
37	200	1997	7	103	11,538	0,168	1,000
38	111	1997	8	161	11,990	0,203	0,034
39	39 721	1998	1	50 549	17,738	0,164	0,071
40	27 930	1998	2	27 722	17,138	0,161	0,518
41	2 235	1998	3	3 113	14,951	0,167	0,024
42	1 033	1998	4	1 094	13,906	0,167	0,365
43	559	1998	5	509	13,140	0,169	0,709
44	322	1998	6	238	12,382	0,171	0,961
45	124	1998	7	113	11,636	0,184	0,690
46	45 195	1999	1	58 563	17,886	0,170	0,064
47	26 568	1999	2	32 118	17,285	0,169	0,131
48	4 012	1999	3	3 606	15,098	0,168	0,738
49	1 799	1999	4	1 268	14,053	0,166	0,983
50	679	1999	5	590	13,287	0,173	0,792
51	198	1999	6	276	12,529	0,187	0,038
52	44 399	2000	1	68 226	18,038	0,181	0,009
53	31 563	2000	2	37 417	17,438	0,178	0,170
54	5 334	2000	3	4 201	15,251	0,174	0,915
55	1 608	2000	4	1 477	14,205	0,179	0,683
56	788	2000	5	687	13,440	0,182	0,775
57	51 475	2001	1	55 207	17,827	0,189	0,356
58	30 483	2001	2	30 277	17,226	0,188	0,514
59	4 522	2001	3	3 400	15,039	0,184	0,939
60	873	2001	4	1 195	13,994	0,197	0,056
61	44 797	2002	1	42 148	17,557	0,207	0,616
62	24 690	2002	2	23 115	16,956	0,206	0,625
63	2 255	2002	3	2 595	14,769	0,212	0,254
64	37 592	2003	1	33 730	17,334	0,240	0,674
65	16 380	2003	2	18 499	16,733	0,246	0,310
66	25 279	2004	1	25 279	17,046	0,327	0,500

➤ *Dommages Auto**Poisson sur-dispersée*

Analysis Of Parameter Estimates			
Paramètre		Estimation	Erreur type
Intercept		18,4073	0,0431
surv	2004	-0,397	0,0741
surv	2003	-0,1105	0,0621
surv	2002	0,094	0,0587
surv	2001	0,2218	0,057
surv	2000	0,1456	0,0579
surv	1999	0,0847	0,0587
surv	1998	0,0156	0,0597
surv	1997	-0,0945	0,0614
surv	1996	-0,1224	0,0618
surv	1995	-0,0691	0,061
surv	1994	0	0

Analysis Of Parameter Estimates			
Paramètre		Estimation	Erreur type
dvpt2	1	-8,8329	4,0924
dvpt2	2	-9,0307	3,2492
dvpt2	3	-8,4649	2,0281
dvpt2	4	-7,048	0,8685
dvpt2	5	-6,5356	0,5961
dvpt2	6	-6,1153	0,4359
dvpt2	7	-5,7931	0,3391
dvpt2	8	-5,0265	0,2132
dvpt2	9	-4,0237	0,122
dvpt2	10	-1,1141	0,0311
dvpt2	11	0	0
Scale		490,8946	0

Observation Statistics							
Obs	reglt	surv	dvpt2	Pred	Xbeta	Std	Prob
1	100 763	1994	1	98 666	18,407	0,043	0,687
2	30 935	1994	2	32 383	17,293	0,048	0,173
3	1 567	1994	3	1 765	14,384	0,127	0,175
4	511	1994	4	647	13,381	0,216	0,136
5	87	1994	5	301	12,614	0,341	0,000
6	130	1994	6	218	12,292	0,437	0,118
7	184	1994	7	143	11,872	0,597	0,661
8	40	1994	8	86	11,359	0,869	0,188
9	10	1994	9	21	9,942	2,028	0,356
10	16	1994	10	12	9,377	3,249	0,540
11	14	1994	11	14	9,574	4,092	0,500
12	93 848	1995	1	92 080	18,338	0,045	0,665
13	29 614	1995	2	30 222	17,224	0,050	0,342
14	1 008	1995	3	1 647	14,314	0,128	0,000
15	353	1995	4	604	13,312	0,217	0,007
16	70	1995	5	281	12,545	0,341	0,000
17	136	1995	6	203	12,223	0,437	0,177
18	83	1995	7	134	11,803	0,597	0,213
19	142	1995	8	80	11,290	0,869	0,746
20	20	1995	9	19	9,873	2,028	0,504
21	6	1995	10	11	9,307	3,249	0,434
22	89 894	1996	1	87 296	18,285	0,046	0,739
23	27 055	1996	2	28 651	17,171	0,051	0,130
24	915	1996	3	1 561	14,261	0,128	0,000
25	368	1996	4	573	13,258	0,217	0,021
26	147	1996	5	266	12,492	0,341	0,042
27	149	1996	6	193	12,169	0,437	0,280
28	113	1996	7	127	11,749	0,597	0,424
29	90	1996	8	76	11,237	0,869	0,579
30	29	1996	9	18	9,820	2,028	0,589
31	92 430	1997	1	89 766	18,313	0,045	0,741
32	26 828	1997	2	29 462	17,199	0,050	0,031
33	1 063	1997	3	1 606	14,289	0,128	0,001

Observation Statistics							
Obs	reglt	surv	dvpt2	Pred	Xbeta	Std	Prob
34	934	1997	4	589	13,286	0,217	0,983
35	329	1997	5	274	12,520	0,341	0,706
36	218	1997	6	198	12,197	0,437	0,587
37	254	1997	7	130	11,777	0,597	0,868
38	47	1997	8	78	11,265	0,869	0,283
39	101 802	1998	1	100 222	18,423	0,043	0,643
40	30 796	1998	2	32 894	17,309	0,048	0,086
41	1 938	1998	3	1 793	14,399	0,127	0,730
42	757	1998	4	658	13,396	0,216	0,743
43	542	1998	5	306	12,630	0,341	0,954
44	358	1998	6	221	12,308	0,437	0,864
45	46	1998	7	145	11,887	0,597	0,026
46	102 018	1999	1	107 388	18,492	0,041	0,108
47	39 758	1999	2	35 246	17,378	0,047	0,995
48	2 414	1999	3	1 921	14,468	0,127	0,964
49	726	1999	4	705	13,465	0,216	0,556
50	628	1999	5	327	12,699	0,341	0,972
51	280	1999	6	237	12,377	0,437	0,647
52	104 973	2000	1	114 128	18,553	0,040	0,019
53	45 736	2000	2	37 458	17,439	0,046	1,000
54	2 770	2000	3	2 041	14,529	0,126	0,992
55	944	2000	4	749	13,526	0,216	0,859
56	299	2000	5	348	12,760	0,341	0,328
57	118 255	2001	1	123 169	18,629	0,039	0,147
58	44 440	2001	2	40 425	17,515	0,045	0,983
59	3 172	2001	3	2 203	14,605	0,126	0,998
60	739	2001	4	808	13,603	0,215	0,338
61	109 579	2002	1	108 394	18,501	0,041	0,604
62	34 702	2002	2	35 576	17,387	0,047	0,298
63	1 628	2002	3	1 939	14,478	0,127	0,084
64	95 895	2003	1	88 347	18,297	0,046	0,963
65	21 448	2003	2	28 996	17,183	0,051	0,000
66	66 336	2004	1	66 336	18,010	0,060	0,500

Gamma

Analysis Of Parameter Estimates			
Paramètre		Estimation	Erreur type
Intercept		18,1681	0,1578
surv	2004	-0,1579	0,3816
surv	2003	0,05	0,2817
surv	2002	0,3133	0,2387
surv	2001	0,6153	0,2144
surv	2000	0,5757	0,1991
surv	1999	0,6272	0,1893
surv	1998	0,4514	0,1805
surv	1997	0,2975	0,1705
surv	1996	-0,0113	0,1663
surv	1995	-0,0923	0,16
surv	1994	0	0

Analysis Of Parameter Estimates			
Paramètre		Estimation	Erreur type
dvpt2	1	-8,5938	0,3816
dvpt2	2	-8,7988	0,2826
dvpt2	3	-8,2508	0,2401
dvpt2	4	-6,8712	0,2164
dvpt2	5	-6,4622	0,1992
dvpt2	6	-6,1757	0,1867
dvpt2	7	-5,9582	0,1806
dvpt2	8	-5,1064	0,1702
dvpt2	9	-4,1186	0,1635
dvpt2	10	-1,1456	0,1557
dvpt2	11	0	0
Scale		8,2836	1,4139

Observation Statistics							
Obs	reglt	surv	dvpt2	Pred	Xbeta	Std	Prob
1	100 763	1994	1	77 682	18,168	0,158	0,950
2	30 935	1994	2	24 705	17,023	0,157	0,923
3	1 567	1994	3	1 264	14,050	0,162	0,908
4	511	1994	4	471	13,062	0,166	0,689
5	87	1994	5	201	12,210	0,182	0,000
6	130	1994	6	162	11,992	0,181	0,114
7	184	1994	7	121	11,706	0,181	0,989
8	40	1994	8	81	11,297	0,211	0,000
9	10	1994	9	20	9,917	0,234	0,001
10	16	1994	10	12	9,369	0,250	0,911
11	14	1994	11	14	9,574	0,347	0,500
12	93 848	1995	1	70 830	18,076	0,158	0,963
13	29 614	1995	2	22 526	16,930	0,157	0,959
14	1 008	1995	3	1 152	13,957	0,165	0,210
15	353	1995	4	429	12,969	0,169	0,125
16	70	1995	5	183	12,118	0,182	0,000
17	136	1995	6	147	11,900	0,180	0,323
18	83	1995	7	111	11,614	0,192	0,067
19	142	1995	8	73	11,205	0,187	1,000
20	20	1995	9	18	9,825	0,221	0,620
21	6	1995	10	11	9,277	0,270	0,029
22	89 894	1996	1	76 811	18,157	0,162	0,835
23	27 055	1996	2	24 428	17,011	0,162	0,736
24	915	1996	3	1 249	14,038	0,170	0,033
25	368	1996	4	465	13,050	0,172	0,086
26	147	1996	5	199	12,199	0,181	0,050
27	149	1996	6	160	11,981	0,182	0,357
28	113	1996	7	120	11,695	0,191	0,378
29	90	1996	8	80	11,286	0,201	0,730
30	29	1996	9	20	9,906	0,214	0,958
31	92 430	1997	1	104 601	18,466	0,168	0,231
32	26 828	1997	2	33 266	17,320	0,168	0,100
33	1 063	1997	3	1 702	14,347	0,173	0,003

Observation Statistics							
Obs	reglt	surv	dvpt2	Pred	Xbeta	Std	Prob
34	934	1997	4	634	13,359	0,166	0,990
35	329	1997	5	270	12,508	0,176	0,868
36	218	1997	6	218	12,290	0,183	0,508
37	254	1997	7	163	12,003	0,184	0,992
38	47	1997	8	108	11,594	0,218	0,000
39	101 802	1998	1	121 998	18,620	0,174	0,150
40	30 796	1998	2	38 799	17,474	0,174	0,092
41	1 938	1998	3	1 985	14,501	0,175	0,446
42	757	1998	4	739	13,513	0,176	0,555
43	542	1998	5	315	12,661	0,172	0,999
44	358	1998	6	254	12,444	0,181	0,972
45	46	1998	7	190	12,157	0,212	0,000
46	102 018	1999	1	145 454	18,795	0,183	0,026
47	39 758	1999	2	46 258	17,650	0,180	0,200
48	2 414	1999	3	2 366	14,677	0,180	0,544
49	726	1999	4	881	13,689	0,185	0,149
50	628	1999	5	376	12,837	0,177	0,998
51	280	1999	6	302	12,620	0,194	0,344
52	104 973	2000	1	138 142	18,744	0,190	0,074
53	45 736	2000	2	43 933	17,598	0,185	0,586
54	2 770	2000	3	2 247	14,625	0,185	0,871
55	944	2000	4	837	13,637	0,189	0,739
56	299	2000	5	357	12,786	0,200	0,187
57	118 255	2001	1	143 726	18,783	0,203	0,168
58	44 440	2001	2	45 709	17,638	0,200	0,444
59	3 172	2001	3	2 338	14,665	0,195	0,941
60	739	2001	4	871	13,677	0,207	0,214
61	109 579	2002	1	106 260	18,481	0,220	0,556
62	34 702	2002	2	33 794	17,336	0,220	0,548
63	1 628	2002	3	1 729	14,363	0,223	0,394
64	95 895	2003	1	81 668	18,218	0,254	0,736
65	21 448	2003	2	25 973	17,073	0,262	0,233
66	66 336	2004	1	66 336	18,010	0,347	0,500

➤ *DAB Particuliers**Poisson sur-dispersée*

Analysis Of Parameter Estimates			
Paramètre		Estimation	Erreur type
Intercept		16,5691	0,083
surv	2004	-1,1828	0,2223
surv	2003	-0,6144	0,1393
surv	2002	-0,2645	0,1217
surv	2001	-0,0471	0,1137
surv	2000	-0,0842	0,1145
surv	1999	0,3038	0,1041
surv	1998	0,1183	0,1084
surv	1997	0,3343	0,1031
surv	1996	0,0583	0,1096
surv	1995	-0,0637	0,113
surv	1994	0	0

Analysis Of Parameter Estimates			
Paramètre		Estimation	Erreur type
dvpt2	1	-7,245	4,274
dvpt2	2	-6,6454	2,2751
dvpt2	3	-4,9454	0,7833
dvpt2	4	-4,1974	0,4465
dvpt2	5	-4,6682	0,5032
dvpt2	6	-3,9031	0,3091
dvpt2	7	-3,7572	0,2704
dvpt2	8	-2,8882	0,1678
dvpt2	9	-1,9607	0,1052
dvpt2	10	-0,1774	0,0533
dvpt2	11	0	0
Scale		452,3313	0

Observation Statistics							
Obs	reglt	surv	dvpt2	Pred	Xbeta	Std	Prob
1	18 208	1994	1	15 699	16,569	0,083	0,963
2	11 849	1994	2	13 148	16,392	0,084	0,109
3	1 484	1994	3	2 210	14,608	0,124	0,001
4	528	1994	4	874	13,681	0,180	0,002
5	272	1994	5	367	12,812	0,277	0,142
6	353	1994	6	317	12,666	0,315	0,633
7	226	1994	7	147	11,901	0,506	0,801
8	105	1994	8	236	12,372	0,449	0,035
9	79	1994	9	112	11,624	0,784	0,328
10	26	1994	10	20	9,924	2,275	0,543
11	11	1994	11	11	9,324	4,273	0,500
12	16 817	1995	1	14 730	16,505	0,085	0,940
13	10 971	1995	2	12 336	16,328	0,087	0,088
14	1 473	1995	3	2 073	14,545	0,125	0,003
15	665	1995	4	820	13,617	0,181	0,124
16	438	1995	5	344	12,748	0,278	0,808
17	279	1995	6	297	12,602	0,316	0,419
18	117	1995	7	138	11,837	0,507	0,372
19	108	1995	8	221	12,308	0,450	0,055
20	203	1995	9	105	11,560	0,784	0,800
21	14	1995	10	19	9,860	2,275	0,439
22	18 998	1996	1	16 641	16,627	0,081	0,949
23	12 112	1996	2	13 937	16,450	0,082	0,044
24	2 031	1996	3	2 342	14,667	0,122	0,121
25	465	1996	4	926	13,739	0,179	0,000
26	307	1996	5	389	12,870	0,277	0,198
27	335	1996	6	336	12,724	0,314	0,499
28	102	1996	7	156	11,959	0,506	0,199
29	692	1996	8	250	12,430	0,449	0,988
30	53	1996	9	118	11,682	0,784	0,153
31	21 862	1997	1	21 931	16,903	0,072	0,482
32	19 284	1997	2	18 367	16,726	0,073	0,747
33	2 688	1997	3	3 087	14,943	0,116	0,117

Observation Statistics							
Obs	reglt	surv	dvpt2	Pred	Xbeta	Std	Prob
34	1 307	1997	4	1 221	14,015	0,175	0,652
35	292	1997	5	512	13,146	0,274	0,020
36	388	1997	6	443	13,000	0,312	0,338
37	144	1997	7	206	12,235	0,505	0,241
38	132	1997	8	330	12,706	0,447	0,021
39	18 716	1998	1	17 671	16,687	0,079	0,767
40	13 553	1998	2	14 799	16,510	0,081	0,137
41	2 386	1998	3	2 487	14,727	0,121	0,366
42	855	1998	4	984	13,799	0,178	0,216
43	601	1998	5	413	12,930	0,276	0,914
44	540	1998	6	357	12,784	0,314	0,907
45	224	1998	7	166	12,019	0,506	0,724
46	20 026	1999	1	21 272	16,873	0,073	0,204
47	18 591	1999	2	17 815	16,696	0,075	0,716
48	3 066	1999	3	2 994	14,912	0,117	0,580
49	1 464	1999	4	1 184	13,985	0,175	0,887
50	760	1999	5	497	13,116	0,275	0,940
51	283	1999	6	429	12,970	0,312	0,092
52	11 312	2000	1	14 431	16,485	0,087	0,003
53	13 438	2000	2	12 086	16,308	0,088	0,885
54	3 429	2000	3	2 031	14,524	0,126	1,000
55	1 324	2000	4	803	13,597	0,181	0,997
56	186	2000	5	337	12,728	0,279	0,017
57	11 328	2001	1	14 976	16,522	0,086	0,001
58	14 946	2001	2	12 542	16,345	0,087	0,978
59	3 150	2001	3	2 108	14,561	0,126	0,999
60	1 037	2001	4	834	13,634	0,181	0,886
61	11 323	2002	1	12 050	16,305	0,096	0,259
62	11 193	2002	2	10 092	16,127	0,097	0,856
63	1 322	2002	3	1 696	14,344	0,133	0,030
64	9 306	2003	1	8 492	15,955	0,117	0,783
65	6 299	2003	2	7 112	15,777	0,118	0,152
66	4 810	2004	1	4 810	15,386	0,206	0,500

Gamma

Analysis Of Parameter Estimates			
Paramètre		Estimation	Erreur type
Intercept		16,4567	0,1551
surv	2004	-1,0704	0,3749
surv	2003	-0,5025	0,2774
surv	2002	-0,1927	0,2365
surv	2001	0,2535	0,214
surv	2000	0,2059	0,1986
surv	1999	0,5091	0,1851
surv	1998	0,3821	0,1735
surv	1997	0,249	0,1676
surv	1996	0,1511	0,1675
surv	1995	0,001	0,1558
surv	1994	0	0

Analysis Of Parameter Estimates			
Paramètre		Estimation	Erreur type
dvpt2	1	-7,1326	0,3749
dvpt2	2	-6,5647	0,2774
dvpt2	3	-4,8567	0,2375
dvpt2	4	-4,1207	0,2173
dvpt2	5	-4,6124	0,194
dvpt2	6	-3,8672	0,1818
dvpt2	7	-3,7893	0,1738
dvpt2	8	-2,9358	0,1676
dvpt2	9	-1,9989	0,1608
dvpt2	10	-0,1972	0,1531
dvpt2	11	0	0
Scale		8,5858	1,4665

Observation Statistics							
Obs	reglt	surv	dvpt2	Pred	Xbeta	Std	Prob
1	18 208	1994	1	14 030	16,457	0,155	0,954
2	11 849	1994	2	11 520	16,260	0,158	0,571
3	1 484	1994	3	1 901	14,458	0,164	0,066
4	528	1994	4	745	13,521	0,169	0,021
5	272	1994	5	317	12,667	0,170	0,184
6	353	1994	6	293	12,590	0,172	0,857
7	226	1994	7	139	11,844	0,176	0,997
8	105	1994	8	228	12,336	0,214	0,000
9	79	1994	9	109	11,600	0,225	0,075
10	26	1994	10	20	9,892	0,247	0,868
11	11	1994	11	11	9,324	0,341	0,500
12	16 817	1995	1	14 044	16,458	0,156	0,876
13	10 971	1995	2	11 531	16,261	0,159	0,377
14	1 473	1995	3	1 903	14,459	0,164	0,060
15	665	1995	4	746	13,522	0,167	0,248
16	438	1995	5	318	12,668	0,165	0,975
17	279	1995	6	294	12,591	0,175	0,382
18	117	1995	7	139	11,845	0,186	0,176
19	108	1995	8	228	12,337	0,214	0,000
20	203	1995	9	109	11,601	0,204	0,999
21	14	1995	10	20	9,893	0,262	0,073
22	18 998	1996	1	16 318	16,608	0,162	0,826
23	12 112	1996	2	13 398	16,411	0,165	0,271
24	2 031	1996	3	2 211	14,609	0,168	0,307
25	465	1996	4	866	13,672	0,176	0,000
26	307	1996	5	369	12,818	0,176	0,149
27	335	1996	6	341	12,741	0,180	0,461
28	102	1996	7	162	11,995	0,195	0,009
29	692	1996	8	265	12,487	0,177	1,000
30	53	1996	9	127	11,751	0,236	0,000
31	21 862	1997	1	17 997	16,706	0,159	0,889
32	19 284	1997	2	14 777	16,509	0,158	0,954
33	2 688	1997	3	2 438	14,707	0,163	0,725

Observation Statistics							
Obs	reglt	surv	dvpt2	Pred	Xbeta	Std	Prob
34	1 307	1997	4	955	13,770	0,164	0,972
35	292	1997	5	407	12,916	0,176	0,029
36	388	1997	6	376	12,839	0,178	0,570
37	144	1997	7	179	12,093	0,192	0,134
38	132	1997	8	292	12,585	0,218	0,000
39	18 716	1998	1	20 559	16,839	0,169	0,289
40	13 553	1998	2	16 880	16,642	0,170	0,099
41	2 386	1998	3	2 786	14,840	0,173	0,185
42	855	1998	4	1 091	13,903	0,177	0,084
43	601	1998	5	465	13,049	0,174	0,931
44	540	1998	6	430	12,972	0,179	0,898
45	224	1998	7	204	12,226	0,190	0,688
46	20 026	1999	1	23 344	16,966	0,176	0,192
47	18 591	1999	2	19 167	16,769	0,175	0,431
48	3 066	1999	3	3 163	14,967	0,177	0,430
49	1 464	1999	4	1 239	14,030	0,177	0,827
50	760	1999	5	528	13,177	0,177	0,980
51	283	1999	6	488	13,099	0,197	0,003
52	11 312	2000	1	17 237	16,663	0,189	0,013
53	13 438	2000	2	14 153	16,465	0,185	0,389
54	3 429	2000	3	2 335	14,664	0,179	0,984
55	1 324	2000	4	915	13,727	0,181	0,979
56	186	2000	5	390	12,873	0,203	0,000
57	11 328	2001	1	18 079	16,710	0,203	0,011
58	14 946	2001	2	14 844	16,513	0,197	0,514
59	3 150	2001	3	2 449	14,711	0,193	0,904
60	1 037	2001	4	960	13,774	0,199	0,651
61	11 323	2002	1	11 571	16,264	0,217	0,460
62	11 193	2002	2	9 501	16,067	0,213	0,779
63	1 322	2002	3	1 568	14,265	0,221	0,221
64	9 306	2003	1	8 489	15,954	0,251	0,643
65	6 299	2003	2	6 970	15,757	0,256	0,346
66	4 810	2004	1	4 810	15,386	0,341	0,500

➤ *DAB Professionnels**Poisson sur-dispersée*

Analysis Of Parameter Estimates			
Paramètre		Estimation	Erreur type
Intercept		16,7791	0,0852
surv	2004	-0,9475	0,2144
surv	2003	-0,7515	0,1489
surv	2002	-0,2733	0,1239
surv	2001	0,0955	0,1114
surv	2000	0,0712	0,1117
surv	1999	0,1497	0,1094
surv	1998	0,0916	0,1108
surv	1997	-0,1315	0,117
surv	1996	0,3879	0,1035
surv	1995	-0,0545	0,1143
surv	1994	0	0

Analysis Of Parameter Estimates			
Paramètre		Estimation	Erreur type
dvpt2	1	-16,7791	539,1205
dvpt2	2	-3,9976	0,6512
dvpt2	3	-5,5666	1,0724
dvpt2	4	-4,3662	0,5266
dvpt2	5	-4,464	0,4936
dvpt2	6	-4,1134	0,3767
dvpt2	7	-3,5445	0,2642
dvpt2	8	-2,7767	0,171
dvpt2	9	-1,7234	0,102
dvpt2	10	0,0302	0,0545
dvpt2	11	0	0
Scale		539,1205	0

Observation Statistics							
Obs	reglt	surv	dvpt2	Pred	Xbeta	Std	Prob
1	17 897	1994	1	19 367	16,779	0,085	0,177
2	21 784	1994	2	19 961	16,809	0,085	0,848
3	2 889	1994	3	3 456	15,056	0,121	0,069
4	1 777	1994	4	1 206	14,002	0,182	0,983
5	517	1994	5	559	13,235	0,271	0,387
6	169	1994	6	317	12,666	0,381	0,051
7	351	1994	7	223	12,315	0,497	0,819
8	132	1994	8	246	12,413	0,529	0,119
9	154	1994	9	74	11,213	1,073	0,753
10	93	1994	10	356	12,781	0,650	0,020
11	0	1994	11	0	0,000	539,120	0,500
12	17 783	1995	1	18 339	16,725	0,087	0,362
13	20 349	1995	2	18 901	16,755	0,087	0,802
14	2 573	1995	3	3 273	15,001	0,122	0,025
15	847	1995	4	1 142	13,948	0,183	0,052
16	282	1995	5	530	13,180	0,272	0,010
17	60	1995	6	300	12,611	0,382	0,000
18	211	1995	7	211	12,261	0,497	0,500
19	577	1995	8	233	12,358	0,529	0,957
20	53	1995	9	70	11,158	1,073	0,396
21	599	1995	10	337	12,727	0,651	0,812
22	31 254	1996	1	28 544	17,167	0,072	0,895
23	30 187	1996	2	29 420	17,197	0,072	0,640
24	3 297	1996	3	5 094	15,444	0,112	0,000
25	924	1996	4	1 777	14,390	0,177	0,000
26	439	1996	5	824	13,623	0,268	0,009
27	382	1996	6	467	13,054	0,379	0,297
28	201	1996	7	329	12,703	0,495	0,161
29	197	1996	8	363	12,801	0,527	0,123
30	46	1996	9	109	11,600	1,072	0,211
31	19 382	1997	1	16 980	16,648	0,091	0,928
32	15 740	1997	2	17 501	16,678	0,090	0,120
33	2 049	1997	3	3 030	14,924	0,125	0,001

Observation Statistics							
Obs	reglt	surv	dvpt2	Pred	Xbeta	Std	Prob
34	742	1997	4	1 057	13,871	0,185	0,028
35	701	1997	5	490	13,103	0,273	0,905
36	631	1997	6	278	12,534	0,383	0,984
37	353	1997	7	196	12,184	0,498	0,883
38	152	1997	8	216	12,281	0,530	0,253
39	22 209	1998	1	21 225	16,871	0,082	0,709
40	17 810	1998	2	21 876	16,901	0,082	0,006
41	6 169	1998	3	3 788	15,147	0,119	1,000
42	1 516	1998	4	1 321	14,094	0,181	0,776
43	1 263	1998	5	613	13,326	0,270	0,996
44	360	1998	6	347	12,757	0,381	0,539
45	86	1998	7	244	12,407	0,496	0,018
46	20 487	1999	1	22 495	16,929	0,080	0,122
47	23 050	1999	2	23 185	16,959	0,080	0,471
48	5 581	1999	3	4 015	15,205	0,117	0,998
49	1 689	1999	4	1 400	14,152	0,180	0,851
50	832	1999	5	650	13,384	0,270	0,820
51	474	1999	6	368	12,815	0,380	0,748
52	19 898	2000	1	20 795	16,850	0,083	0,298
53	22 017	2000	2	21 433	16,880	0,083	0,627
54	3 797	2000	3	3 711	15,127	0,119	0,576
55	1 890	2000	4	1 294	14,074	0,182	0,981
56	234	2000	5	601	13,306	0,271	0,000
57	17 465	2001	1	21 309	16,875	0,083	0,008
58	25 180	2001	2	21 962	16,905	0,083	0,951
59	4 616	2001	3	3 803	15,151	0,119	0,948
60	1 139	2001	4	1 326	14,098	0,181	0,200
61	15 210	2002	1	14 736	16,506	0,099	0,626
62	15 515	2002	2	15 188	16,536	0,099	0,586
63	1 829	2002	3	2 630	14,782	0,131	0,003
64	11 340	2003	1	9 135	16,028	0,128	0,954
65	7 210	2003	2	9 415	16,058	0,128	0,019
66	7 509	2004	1	7 509	15,832	0,197	0,500

Gamma

Analysis Of Parameter Estimates			
Paramètre		Estimation	Erreur type
Intercept		16,796	0,1964
surv	2004	-0,9644	0,4632
surv	2003	-0,7551	0,343
surv	2002	-0,3517	0,2911
surv	2001	0,1237	0,2604
surv	2000	0,063	0,2408
surv	1999	0,3467	0,2272
surv	1998	0,2681	0,2172
surv	1997	0,064	0,2082
surv	1996	0,0144	0,1974
surv	1995	-0,0525	0,2014
surv	1994	0	0

Analysis Of Parameter Estimates			
Paramètre		Estimation	Erreur type
dvpt2	1	-16,796	0,4632
dvpt2	2	-3,9957	0,3533
dvpt2	3	-5,4436	0,2936
dvpt2	4	-4,2936	0,2664
dvpt2	5	-4,4335	0,242
dvpt2	6	-4,1784	0,2286
dvpt2	7	-3,624	0,2168
dvpt2	8	-2,8181	0,2065
dvpt2	9	-1,7872	0,1979
dvpt2	10	0,0052	0,1883
dvpt2	11	0	0
Scale		5,6829	0,9616

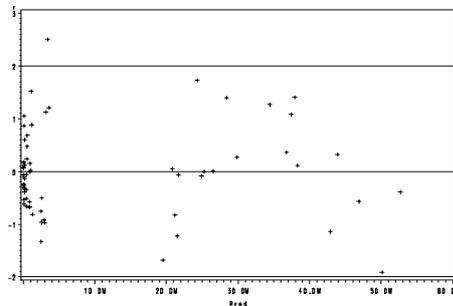
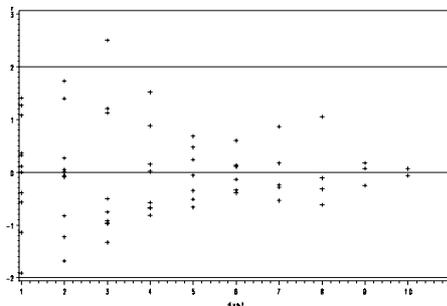
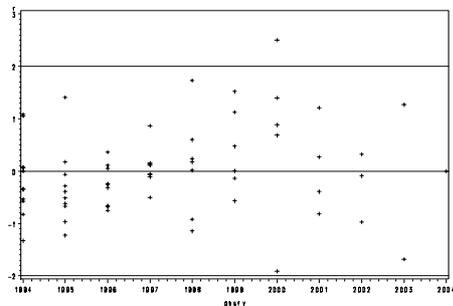
Observation Statistics							
Obs	reglt	surv	dvpt2	Pred	Xbeta	Std	Prob
1	17 897	1994	1	19 697	16,796	0,196	0,313
2	21 784	1994	2	19 799	16,801	0,193	0,690
3	2 889	1994	3	3 298	15,009	0,199	0,254
4	1 777	1994	4	1 176	13,978	0,196	0,982
5	517	1994	5	525	13,172	0,209	0,471
6	169	1994	6	302	12,618	0,226	0,005
7	351	1994	7	234	12,362	0,219	0,968
8	132	1994	8	269	12,502	0,258	0,003
9	154	1994	9	85	11,352	0,251	0,991
10	93	1994	10	362	12,800	0,345	0,000
11	0	1994	11	0	0,000	0,419	0,500
12	17 783	1995	1	18 688	16,743	0,204	0,404
13	20 349	1995	2	18 786	16,749	0,201	0,654
14	2 573	1995	3	3 129	14,956	0,209	0,175
15	847	1995	4	1 116	13,925	0,214	0,098
16	282	1995	5	499	13,119	0,223	0,005
17	60	1995	6	286	12,565	0,239	0,000
18	211	1995	7	222	12,310	0,233	0,417
19	577	1995	8	255	12,450	0,223	1,000
20	53	1995	9	81	11,300	0,282	0,066
21	599	1995	10	344	12,748	0,298	0,969
22	31 254	1996	1	19 983	16,810	0,188	0,991
23	30 187	1996	2	20 087	16,816	0,188	0,985
24	3 297	1996	3	3 346	15,023	0,197	0,470
25	924	1996	4	1 193	13,992	0,205	0,105
26	439	1996	5	533	13,186	0,211	0,180
27	382	1996	6	306	12,632	0,215	0,847
28	201	1996	7	237	12,377	0,231	0,237
29	197	1996	8	273	12,517	0,256	0,101
30	46	1996	9	86	11,367	0,283	0,014
31	19 382	1997	1	20 998	16,860	0,205	0,348
32	15 740	1997	2	21 108	16,865	0,206	0,077
33	2 049	1997	3	3 516	15,073	0,211	0,005

Observation Statistics							
Obs	reglt	surv	dvpt2	Pred	Xbeta	Std	Prob
34	742	1997	4	1 254	14,042	0,216	0,007
35	701	1997	5	560	13,236	0,211	0,856
36	631	1997	6	322	12,682	0,206	0,999
37	353	1997	7	249	12,426	0,225	0,939
38	152	1997	8	287	12,566	0,266	0,008
39	22 209	1998	1	25 752	17,064	0,210	0,240
40	17 810	1998	2	25 886	17,069	0,211	0,038
41	6 169	1998	3	4 312	15,277	0,203	0,961
42	1 516	1998	4	1 538	14,246	0,214	0,473
43	1 263	1998	5	687	13,440	0,205	0,999
44	360	1998	6	395	12,886	0,230	0,346
45	86	1998	7	306	12,631	0,254	0,000
46	20 487	1999	1	27 859	17,143	0,219	0,080
47	23 050	1999	2	28 004	17,148	0,217	0,185
48	5 581	1999	3	4 664	15,355	0,213	0,800
49	1 689	1999	4	1 664	14,325	0,221	0,528
50	832	1999	5	743	13,519	0,223	0,693
51	474	1999	6	427	12,964	0,232	0,674
52	19 898	2000	1	20 976	16,859	0,227	0,408
53	22 017	2000	2	21 085	16,864	0,225	0,576
54	3 797	2000	3	3 512	15,072	0,226	0,635
55	1 890	2000	4	1 253	14,041	0,221	0,968
56	234	2000	5	560	13,235	0,250	0,000
57	17 465	2001	1	22 289	16,920	0,246	0,161
58	25 180	2001	2	22 405	16,925	0,239	0,688
59	4 616	2001	3	3 732	15,132	0,238	0,814
60	1 139	2001	4	1 331	14,102	0,250	0,266
61	15 210	2002	1	13 856	16,444	0,264	0,638
62	15 515	2002	2	13 928	16,449	0,263	0,659
63	1 829	2002	3	2 320	14,657	0,274	0,192
64	11 340	2003	1	9 256	16,041	0,305	0,747
65	7 210	2003	2	9 304	16,046	0,318	0,211
66	7 509	2004	1	7 509	15,832	0,419	0,500

ANNEXE 3 : Résultats des tests sur résidus

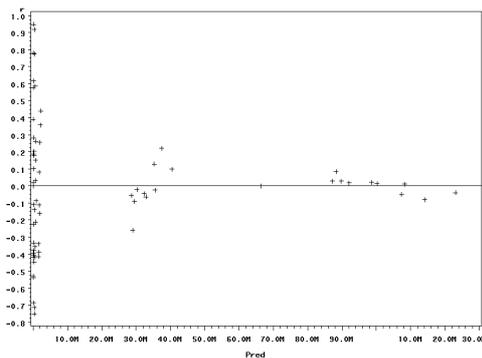
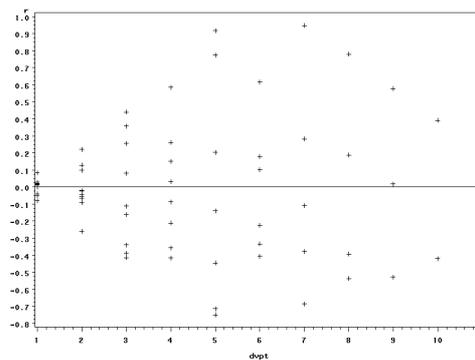
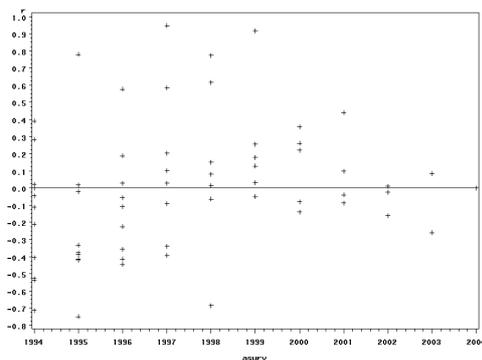
➤ RC Matérielle

Poisson sur-dispersée



Paramètres pour distribution Normale		
Paramètre	Symbole	Estimation
Moyenne	Mu	-0.01377
Ecart type	Sigma	0.831935
Test Mu = 0		
Test	Statistique	p-Value
Student	-0.13447	0.8934
Signe	-2	0.7122

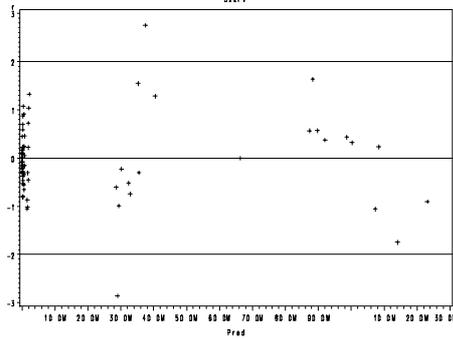
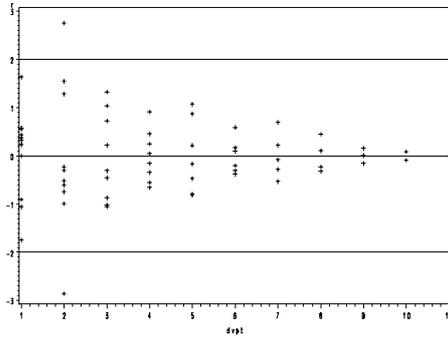
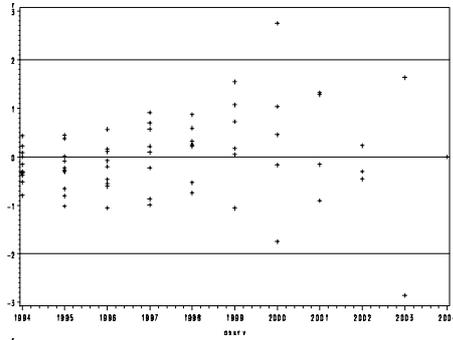
Gamma



Paramètres pour distribution Normale		
Paramètre	Symbole	Estimation
Moyenne	Mu	1.694E-9
Ecart type	Sigma	0.321089
Test Mu = 0		
Test	Statistique	p-Value
Student	4.286E-8	1.0000
Signe	-4	0.3891

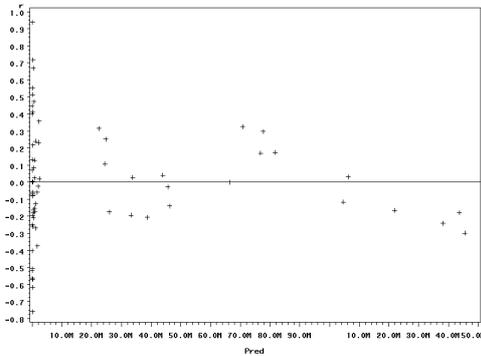
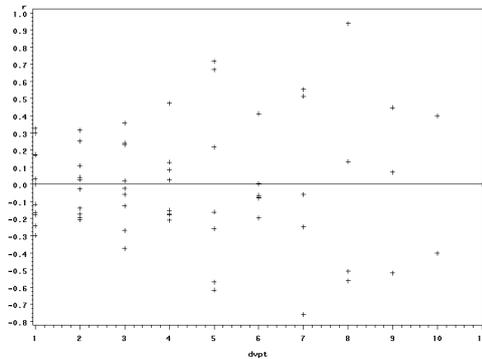
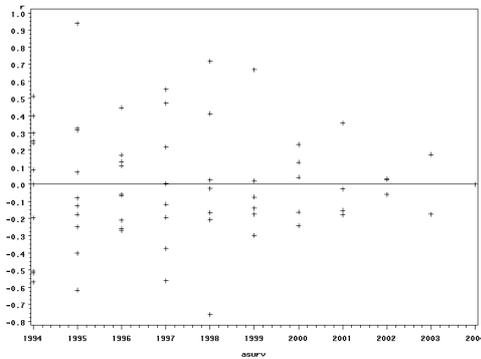
➤ *Dommages Auto*

Poisson sur-dispersée



Paramètres pour distribution Normale		
Paramètre	Symbole	Estimation
Moyenne	Mu	-0.01077
Ecart type	Sigma	0.83198
Test Mu = 0		
Test	Statistique	p-Value
Student	-0.10513	0.9166
Signe	0	1.0000

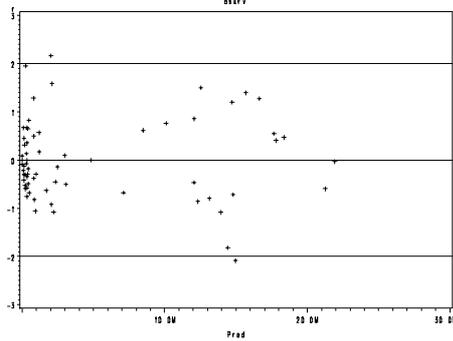
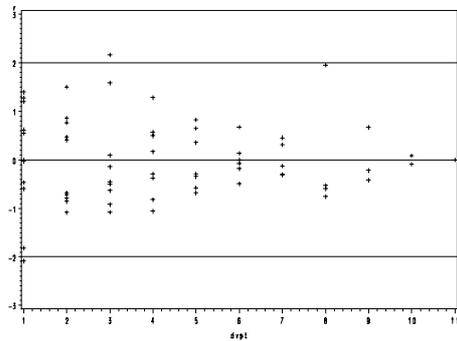
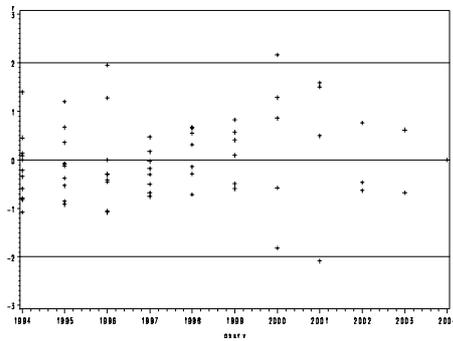
Gamma



Paramètres pour distribution Normale		
Paramètre	Symbole	Estimation
Moyenne	Mu	1.008E-9
Ecart type	Sigma	0.331429
Test Mu = 0		
Test	Statistique	p-Value
Student	2.47E-8	1.0000
Signe	-1	0.9022

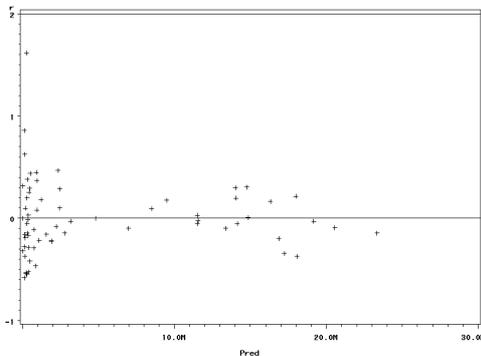
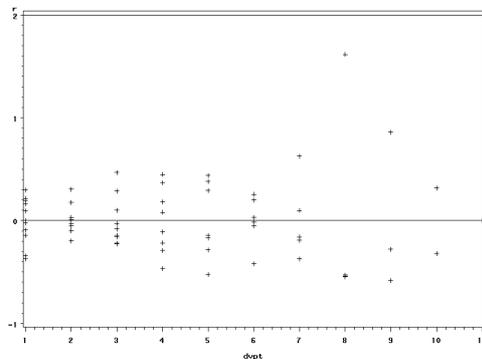
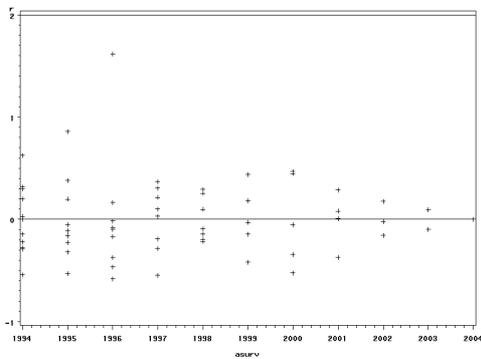
➤ *DAB Particuliers*

Poisson sur-dispersée



Paramètres pour distribution Normale		
Paramètre	Symbole	Estimation
Moyenne	Mu	0.002708
Ecart type	Sigma	0.832046
Test Mu = 0		
Test	Statistique	p-Value
Student	0.026445	0.9790
Signe	-4	0.3891

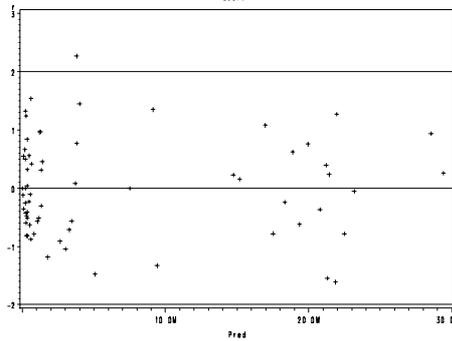
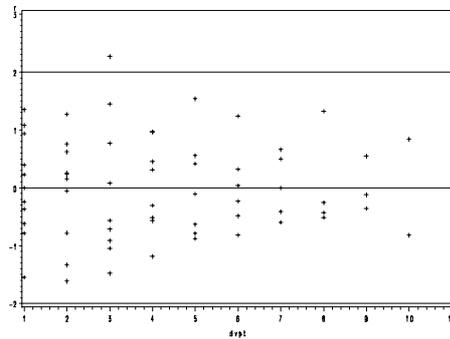
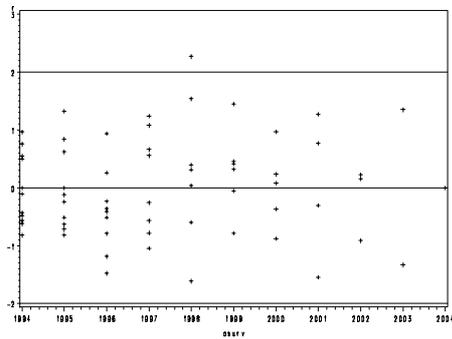
Gamma



Paramètres pour distribution Normale		
Paramètre	Symbole	Estimation
Moyenne	Mu	2.224E-9
Ecart type	Sigma	0.3599
Test Mu = 0		
Test	Statistique	p-Value
Student	5.02E-8	1.0000
Signe	-4	0.3891

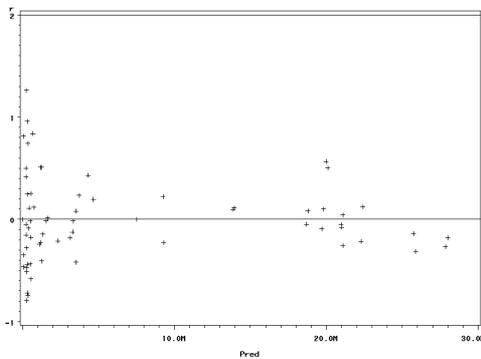
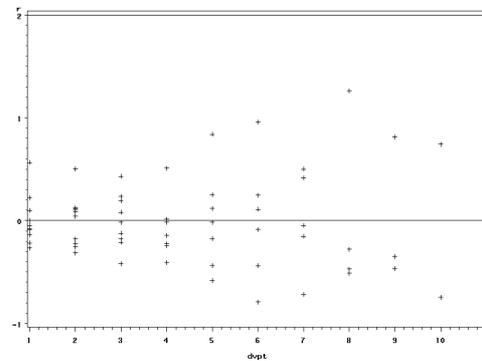
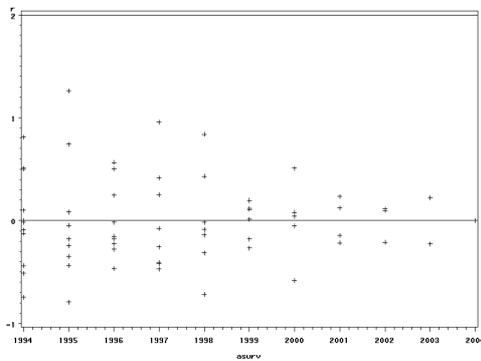
➤ *DAB Professionnels*

Poisson sur-dispersée



Paramètres pour distribution Normale		
Paramètre	Symbole	Estimation
Moyenne	Mu	0.008026
Ecart type	Sigma	0.832011
Test Mu = 0		
Test	Statistique	p-Value
Student	0.078372	0.9378
Signe	-1.5	0.8043

Gamma



Paramètres pour distribution Normale		
Paramètre	Symbole	Estimation
Moyenne	Mu	2.406E-8
Ecart type	Sigma	0.408085
Test Mu = 0		
Test	Statistique	p-Value
Student	4.79E-7	
Signe	-4.5	

<i>Tests d'ajustement pour distribution Normale – RC Matérielle – Loi de Poisson sur-disp.</i>				
Test	Statistique		Seuil de significativité	
Kolmogorov-Smirnov	D	0.12092602	$Pr > D$	0.018
Cramer-von Mises	W-Sq	0.13203870	$Pr > W-Sq$	0.042
Anderson-Darling	A-Sq	0.69754734	$Pr > A-Sq$	0.069

<i>Tests d'ajustement pour distribution Normale – RC Matérielle – Loi Gamma.</i>				
Test	Statistique		Seuil de significativité	
Kolmogorov-Smirnov	D	0.13694255	$Pr > D$	<0.010
Cramer-von Mises	W-Sq	0.24489088	$Pr > W-Sq$	<0.005
Anderson-Darling	A-Sq	1.53408313	$Pr > A-Sq$	<0.005

<i>Tests d'ajustement pour distribution Normale – Dommages Auto – Loi de Poisson sur-disp.</i>				
Test	Statistique		Seuil de significativité	
Kolmogorov-Smirnov	D	0.08913074	$Pr > D$	>0.150
Cramer-von Mises	W-Sq	0.09967622	$Pr > W-Sq$	0.114
Anderson-Darling	A-Sq	0.66905699	$Pr > A-Sq$	0.081

<i>Tests d'ajustement pour distribution Normale – Dommages Auto – Loi Gamma</i>				
Test	Statistique		Seuil de significativité	
Kolmogorov-Smirnov	D	0.08708536	$Pr > D$	>0.150
Cramer-von Mises	W-Sq	0.08230663	$Pr > W-Sq$	0.197
Anderson-Darling	A-Sq	0.44016265	$Pr > A-Sq$	>0.250

<i>Tests d'ajustement pour distribution Normale – DAB Particuliers – Loi de Poisson sur-disp.</i>				
Test	Statistique		Seuil de significativité	
Kolmogorov-Smirnov	D	0.09220771	$Pr > D$	>0.150
Cramer-von Mises	W-Sq	0.09586527	$Pr > W-Sq$	0.128
Anderson-Darling	A-Sq	0.59705587	$Pr > A-Sq$	0.119

<i>Tests d'ajustement pour distribution Normale – DAB Particuliers – Loi Gamma.</i>				
Test	Statistique		Seuil de significativité	
Kolmogorov-Smirnov	D	0.10117027	$Pr > D$	0.092
Cramer-von Mises	W-Sq	0.12208875	$Pr > W-Sq$	0.057
Anderson-Darling	A-Sq	0.84966568	$Pr > A-Sq$	0.028

<i>Tests d'ajustement pour distribution Normale – DAB Professionnels – Loi de Poisson sur-disp.</i>				
Test	Statistique		Seuil de significativité	
Kolmogorov-Smirnov	D	0.06778483	$Pr > D$	>0.150
Cramer-von Mises	W-Sq	0.04349774	$Pr > W-Sq$	>0.250
Anderson-Darling	A-Sq	0.27027093	$Pr > A-Sq$	>0.250

<i>Tests d'ajustement pour distribution Normale – DAB Professionnels – Loi Gamma</i>				
Test	Statistique		Seuil de significativité	
Kolmogorov-Smirnov	D	0.12318963	$Pr > D$	0.014
Cramer-von Mises	W-Sq	0.14256904	$Pr > W-Sq$	0.030
Anderson-Darling	A-Sq	0.80249162	$Pr > A-Sq$	0.038

ANNEXE 4 : Résultats par catégorie ministérielle des différentes méthodes

➤ RC Matérielle

Loi de Poisson sur-dispersée

	Bootstrap		Choc commun		Copule	
	Moyenne	Ecart-type	Moyenne	Ecart-type	Moyenne	Ecart-type
1994	0	0	0	0	0	0
1995	873	317	887	399	889	405
1996	863	308	877	396	882	399
1997	925	321	945	410	938	408
1998	1 173	364	1 195	471	1 193	462
1999	1 392	402	1 413	503	1 414	509
2000	1 717	437	1 759	562	1 749	561
2001	2 387	474	2 436	662	2 446	662
2002	3 016	427	3 086	741	3 093	747
2003	4 687	427	4 735	916	4 742	914
2004	17 763	1 352	17 769	1 777	17 795	1 780
TOTAL	34 797	3 739	35 103	2 522	35 141	2 513

Loi Gamma

	Bootstrap		Choc commun		Copule	
	Moyenne	Ecart-type	Moyenne	Ecart-type	Moyenne	Ecart-type
1994	0	0	0	0	0	0
1995	721	188	729	86	727	87
1996	704	183	710	83	712	84
1997	1 158	294	1 173	135	1 174	134
1998	1 455	339	1 476	152	1 473	149
1999	1 809	404	1 840	176	1 838	178
2000	2 419	502	2 460	208	2 462	210
2001	2 507	468	2 552	177	2 551	178
2002	2 834	506	2 856	156	2 861	157
2003	4 304	809	4 367	226	4 364	227
2004	17 001	4 476	17 163	1 639	17 121	1 642
TOTAL	34 911	5 341	35 326	1 707	35 283	1 712

➤ *Dommages Auto****Loi de Poisson sur-dispersée***

	<i>Bootstrap</i>		<i>Choc commun</i>		<i>Copule</i>	
	<i>Moyenne</i>	<i>Ecart-type</i>	<i>Moyenne</i>	<i>Ecart-type</i>	<i>Moyenne</i>	<i>Ecart-type</i>
1994	0	0	0	0	0	0
1995	17	14	13	57	14	57
1996	29	21	23	75	23	75
1997	53	32	43	102	43	100
1998	151	59	134	183	134	180
1999	322	91	305	267	301	271
2000	594	124	572	369	575	368
2001	1 011	160	988	492	998	496
2002	1 586	187	1 577	621	1 598	610
2003	2 846	228	2 866	827	2 868	840
2004	23 863	1 305	23 923	2 389	23 917	2 375
TOTAL	30 472	1 596	30 444	2 711	30 471	2 694

Loi Gamma

	<i>Bootstrap</i>		<i>Choc commun</i>		<i>Copule</i>	
	<i>Moyenne</i>	<i>Ecart-type</i>	<i>Moyenne</i>	<i>Ecart-type</i>	<i>Moyenne</i>	<i>Ecart-type</i>
1994	0	0	0	0	0	0
1995	13	4	13	2	13	2
1996	25	5	26	2	26	2
1997	61	9	62	4	62	4
1998	198	27	199	11	199	11
1999	453	60	465	22	465	22
2000	714	99	729	31	729	31
2001	1 106	160	1 129	45	1 130	46
2002	1 448	240	1 479	66	1 481	66
2003	2 425	447	2 465	143	2 465	146
2004	22 646	6 011	23 114	2 821	23 099	2 765
TOTAL	29 088	6 046	29 681	2 827	29 669	2 773

➤ *DAB Particuliers**Loi de Poisson sur-dispersée*

	<i>Bootstrap</i>		<i>Choc commun</i>		<i>Copule</i>	
	<i>Moyenne</i>	<i>Ecart-type</i>	<i>Moyenne</i>	<i>Ecart-type</i>	<i>Moyenne</i>	<i>Ecart-type</i>
1994	0	0	0	0	0	0
1995	13	11	10	46	25	31
1996	40	25	34	83	65	56
1997	208	75	202	201	214	218
1998	417	99	425	299	415	324
1999	696	142	720	378	702	409
2000	747	129	775	397	704	462
2001	1 108	161	1 151	489	1 087	542
2002	1 558	189	1 594	574	1 582	590
2003	2 294	264	2 319	686	2 342	692
2004	5 335	943	5 340	1 036	5 368	1 052
TOTAL	12 415	1 291	12 570	1 611	12 504	1 660

Loi Gamma

	<i>Bootstrap</i>		<i>Choc commun</i>		<i>Copule</i>	
	<i>Moyenne</i>	<i>Ecart-type</i>	<i>Moyenne</i>	<i>Ecart-type</i>	<i>Moyenne</i>	<i>Ecart-type</i>
1994	0	0	0	0	0	0
1995	11	4	11	1	11	1
1996	35	7	36	3	36	3
1997	175	31	180	12	180	12
1998	523	82	539	30	539	30
1999	819	128	844	38	844	39
2000	959	147	984	40	984	40
2001	1 399	231	1 440	55	1 441	55
2002	1 495	281	1 536	63	1 538	63
2003	2 213	511	2 277	122	2 277	123
2004	5 104	1 652	5 242	517	5 238	508
TOTAL	12 732	1 851	13 089	542	13 087	535

➤ *DAB Professionnels****Loi de Poisson sur-dispersée***

	<i>Bootstrap</i>		<i>Choc commun</i>		<i>Copule</i>	
	<i>Moyenne</i>	<i>Ecart-type</i>	<i>Moyenne</i>	<i>Ecart-type</i>	<i>Moyenne</i>	<i>Ecart-type</i>
1994	0	0	0	0	0	0
1995	0	0	0	0	0	0
1996	515	183	523	389	533	387
1997	378	119	377	329	377	330
1998	737	178	743	468	740	463
1999	1 037	216	1 032	551	1 048	556
2000	1 289	232	1 309	622	1 301	616
2001	1 933	287	1 944	755	1 954	752
2002	2 245	282	2 269	810	2 271	828
2003	3 027	368	3 039	936	3 029	931
2004	10 235	1 717	10 218	1 719	10 221	1 721
TOTAL	21 395	2 289	21 455	2 485	21 473	2 520

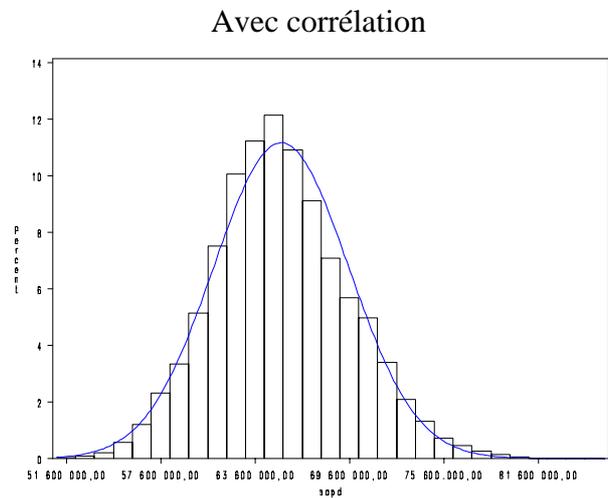
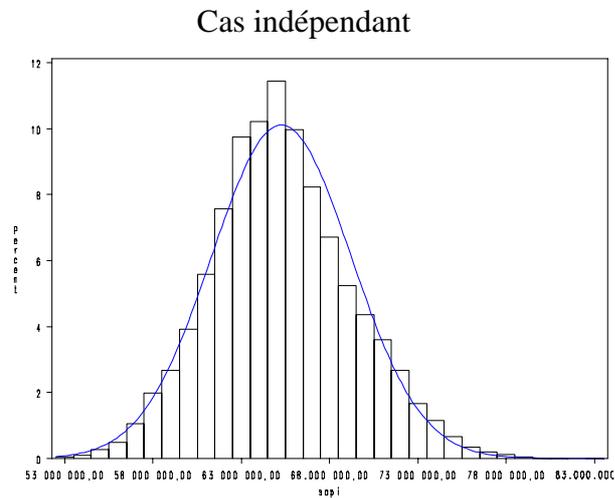
Loi Gamma

	<i>Bootstrap</i>		<i>Choc commun</i>		<i>Copule</i>	
	<i>Moyenne</i>	<i>Ecart-type</i>	<i>Moyenne</i>	<i>Ecart-type</i>	<i>Moyenne</i>	<i>Ecart-type</i>
1994	0	0	0	0	0	0
1995	0	0	0	0	0	0
1996	374	76	367	42	368	42
1997	474	85	477	45	477	45
1998	930	142	937	65	937	65
1999	1 330	203	1 345	78	1 344	78
2000	1 342	201	1 334	67	1 333	66
2001	1 982	321	2 012	90	2 012	90
2002	2 041	365	2 078	101	2 078	101
2003	2 866	630	2 937	190	2 937	191
2004	9 688	3 055	9 941	1 162	9 936	1 171
TOTAL	21 027	3 278	21 427	1 193	21 421	1 205

ANNEXE 5 : Résultats détaillés de la méthode Bootstrap

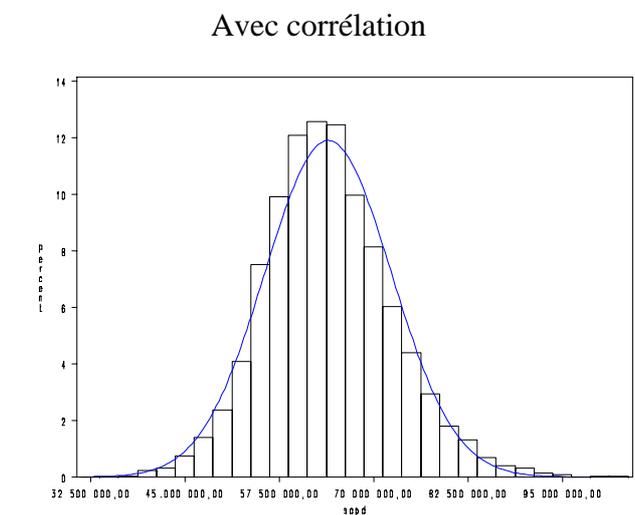
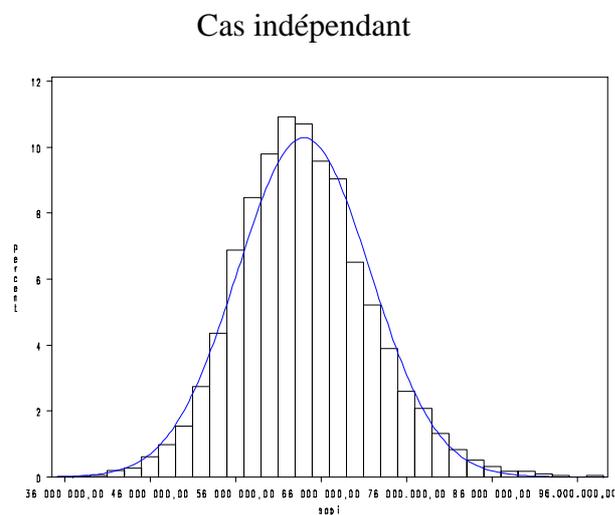
➤ RC matérielle et Dommages Auto

Loi de Poisson sur-dispersée



	<i>Bootstrap indépendant</i>		<i>Bootstrap corrélé</i>		<i>Chain-Ladder stochastique</i>	
	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>
1994	0	0	0	0	0	0
1995	889	317	889	322	905	6
1996	892	309	892	313	902	11
1997	978	322	978	327	981	24
1998	1 324	366	1 324	374	1 330	149
1999	1 715	406	1 715	420	1 716	207
2000	2 311	443	2 311	463	2 327	252
2001	3 398	485	3 398	515	3 436	408
2002	4 602	446	4 602	487	4 671	603
2003	7 533	461	7 533	534	7 619	1 282
2004	41 626	1 822	41 626	2 283	41 743	6 246
TOTAL	65 269	3 949	65 269	4 288	65 630	6 482

Loi Gamma

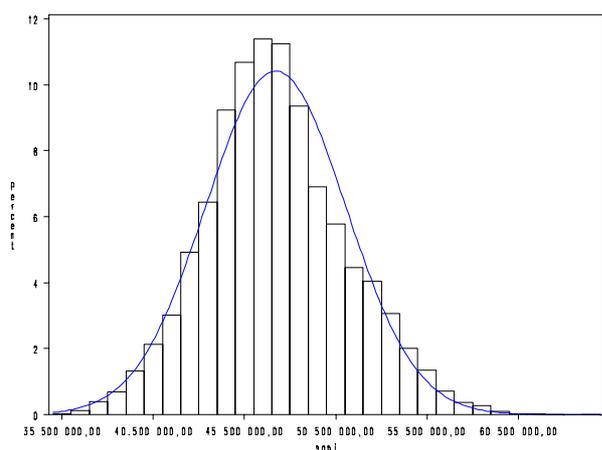


	<i>Bootstrap indépendant</i>		<i>Bootstrap corrélé</i>		<i>Chain-Ladder stochastique</i>	
	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>
1994	0	0	0	0	0	0
1995	733	188	733	189	905	6
1996	729	183	729	184	902	11
1997	1 218	294	1 218	295	981	24
1998	1 653	339	1 653	342	1 330	149
1999	2 262	407	2 262	413	1 716	207
2000	3 134	506	3 134	517	2 327	252
2001	3 612	478	3 612	498	3 436	408
2002	4 282	523	4 282	559	4 671	603
2003	6 729	858	6 729	930	7 619	1 282
2004	39 646	7 158	39 646	7 810	41 743	6 246
TOTAL	63 999	7 757	63 999	8 381	65 630	6 482

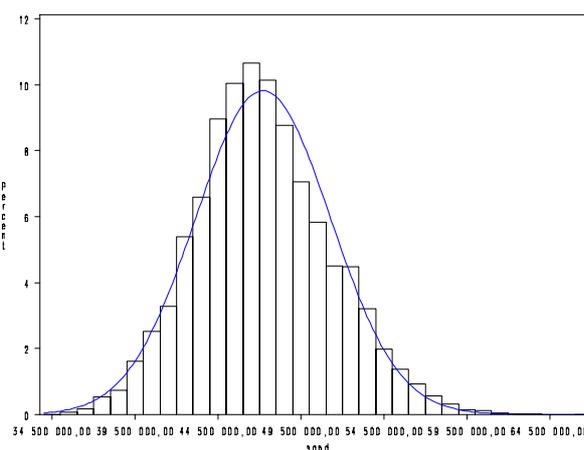
➤ *RC matérielle et DAB Particuliers*

Loi de Poisson sur-dispersée

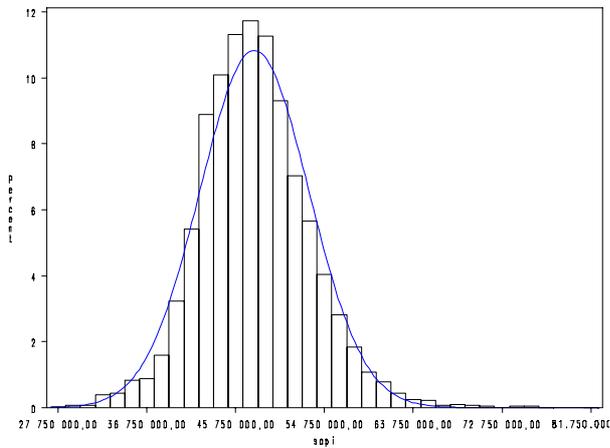
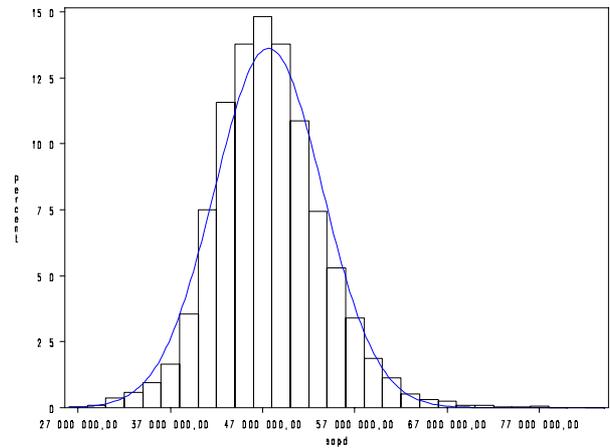
Cas indépendant



Avec corrélation

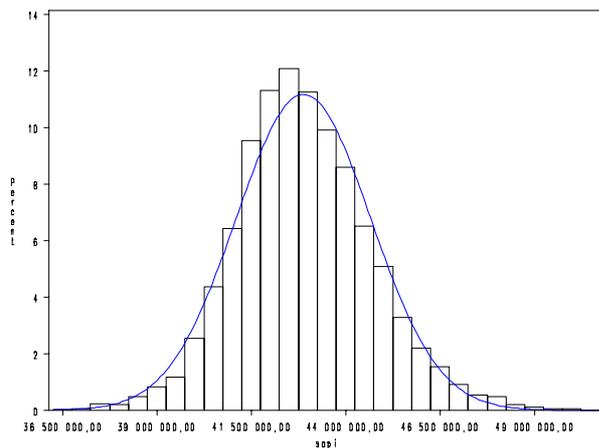
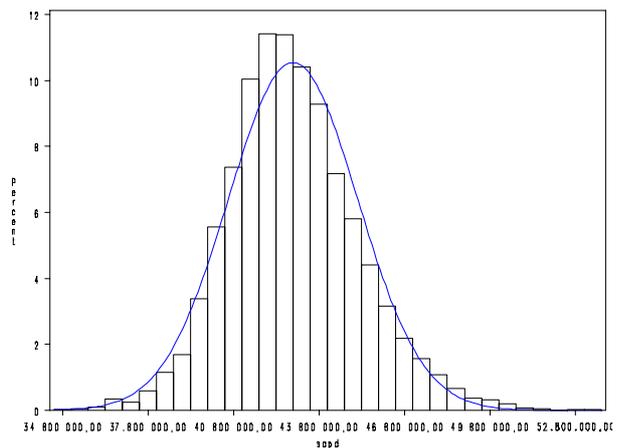


	<i>Bootstrap indépendant</i>		<i>Bootstrap corrélé</i>		<i>Chain-Ladder stochastique</i>	
	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>
1994	0	0	0	0	0	0
1995	886	317	886	320	902	3
1996	903	309	903	313	912	12
1997	1 133	327	1 133	334	1 139	128
1998	1 591	373	1 591	383	1 622	386
1999	2 088	416	2 088	434	2 129	445
2000	2 463	447	2 463	465	2 531	394
2001	3 494	490	3 494	516	3 598	480
2002	4 574	448	4 574	483	4 686	672
2003	6 981	464	6 981	526	7 071	1 338
2004	23 098	1 544	23 098	1 838	23 159	4 148
TOTAL	47 212	3 831	47 212	4 064	47 750	4 629

Loi Gamma**Cas indépendant****Avec corrélation**

	<i>Bootstrap indépendant</i>		<i>Bootstrap corrélé</i>		<i>Chain-Ladder stochastique</i>	
	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>
1994	0	0	0	0	0	0
1995	732	188	732	189	902	3
1996	739	183	739	184	912	12
1997	1 333	295	1 333	298	1 139	128
1998	1 978	345	1 978	353	1 622	386
1999	2 628	414	2 628	428	2 129	445
2000	3 379	510	3 379	529	2 531	394
2001	3 905	486	3 905	523	3 598	480
2002	4 329	528	4 329	579	4 686	672
2003	6 516	867	6 516	967	7 071	1 338
2004	22 105	4 668	22 105	5 015	23 159	4 148
TOTAL	47 643	5 524	47 643	5 861	47 750	4 629

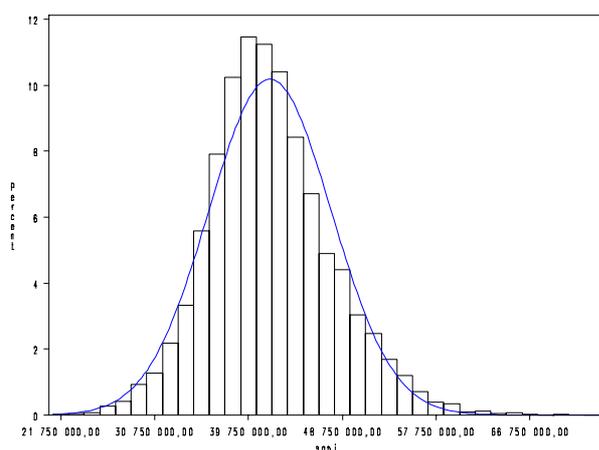
➤ *Dommages Auto et DAB Particuliers*

Loi de Poisson sur-dispersée**Cas indépendant****Avec corrélation**

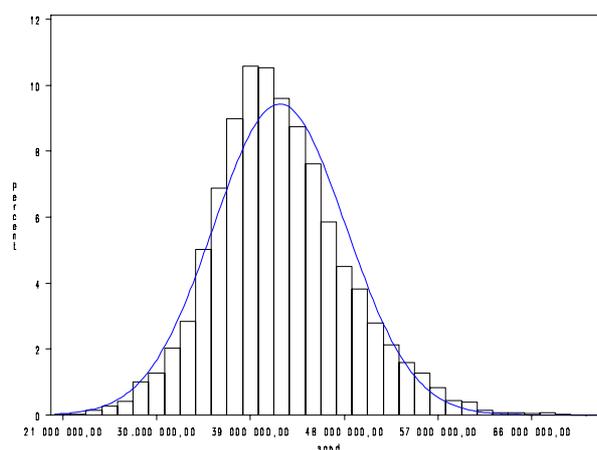
	<i>Bootstrap indépendant</i>		<i>Bootstrap corrélé</i>		<i>Chain-Ladder stochastique</i>	
	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>
1994	0	0	0	0	0	0
1995	30	18	30	20	24	5
1996	69	30	69	36	57	14
1997	261	78	261	87	243	128
1998	569	106	569	122	562	366
1999	1 018	153	1 018	178	1 014	429
2000	1 341	151	1 341	186	1 347	377
2001	2 119	192	2 119	240	2 146	495
2002	3 144	227	3 144	290	3 184	598
2003	5 139	315	5 139	411	5 194	1 044
2004	29 198	1 535	29 198	1 930	29 272	5 708
TOTAL	42 887	1 786	42 887	2 271	43 043	5 983

Loi Gamma

Cas indépendant



Avec corrélation

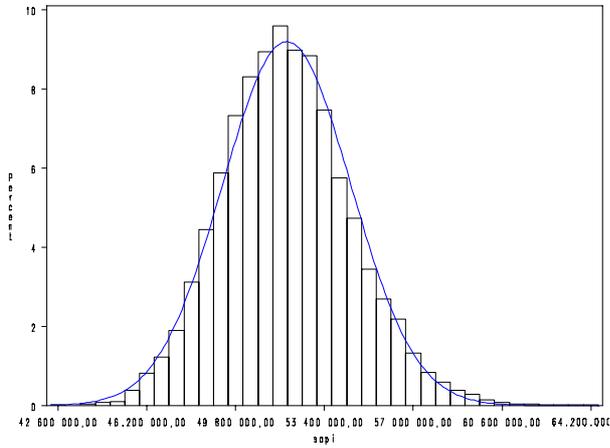


	<i>Bootstrap indépendant</i>		<i>Bootstrap corrélé</i>		<i>Chain-Ladder stochastique</i>	
	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>
1994	0	0	0	0	0	0
1995	24	5	24	6	24	5
1996	60	9	60	10	57	14
1997	235	32	235	34	243	128
1998	721	85	721	91	562	366
1999	1 272	136	1 272	150	1 014	429
2000	1 674	161	1 674	183	1 347	377
2001	2 504	250	2 504	287	2 146	495
2002	2 943	312	2 943	366	3 184	598
2003	4 637	586	4 637	685	5 194	1 044
2004	27 750	5 801	27 750	6 252	29 272	5 708
TOTAL	41 820	5 877	41 820	6 347	43 043	5 983

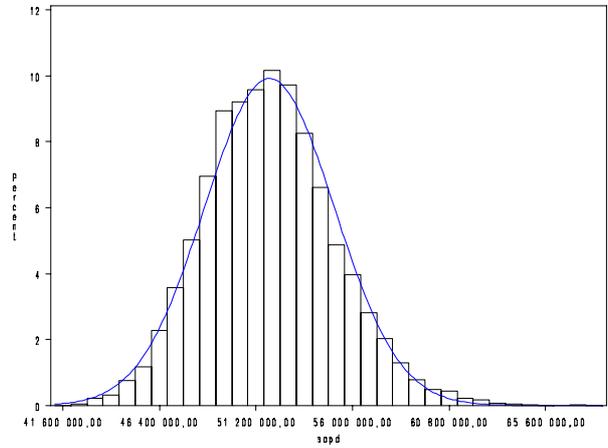
➤ *Dommages Auto et DAB Professionnels*

Loi de Poisson sur-dispersée

Cas indépendant



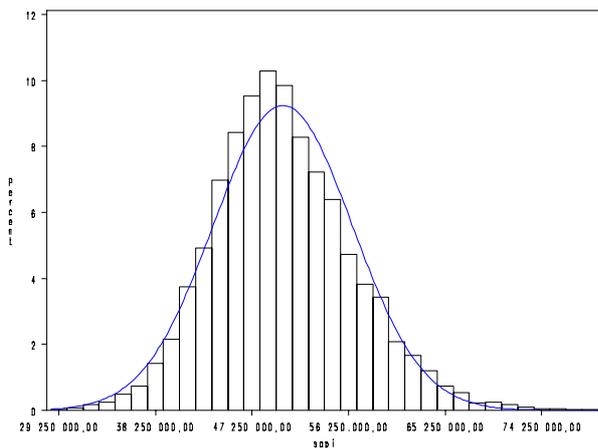
Avec corrélation



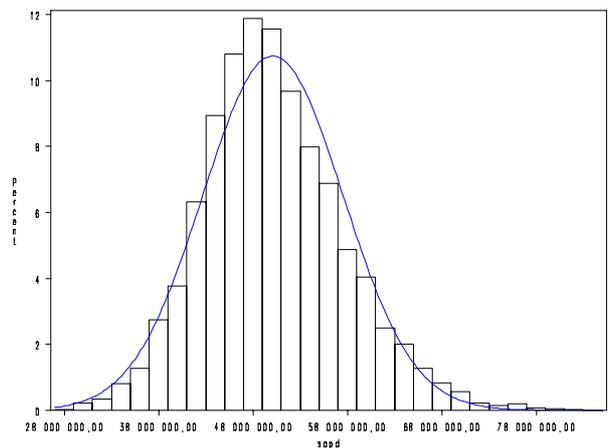
	<i>Bootstrap indépendant</i>		<i>Bootstrap corrélé</i>		<i>Chain-Ladder stochastique</i>	
	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>
1994	0	0	0	0	0	0
1995	17	14	17	14	13	94
1996	544	184	544	189	547	625
1997	430	121	430	129	419	443
1998	889	181	889	197	875	588
1999	1 359	223	1 359	250	1 344	643
2000	1 883	245	1 883	286	1 876	669
2001	2 944	306	2 944	363	2 945	837
2002	3 831	310	3 831	384	3 852	852
2003	5 873	405	5 873	521	5 907	1 406
2004	34 098	2 107	34 098	2 667	34 162	6 157
TOTAL	51 868	2 604	51 868	3 221	51 941	7 012

Loi Gamma

Cas indépendant



Avec corrélation

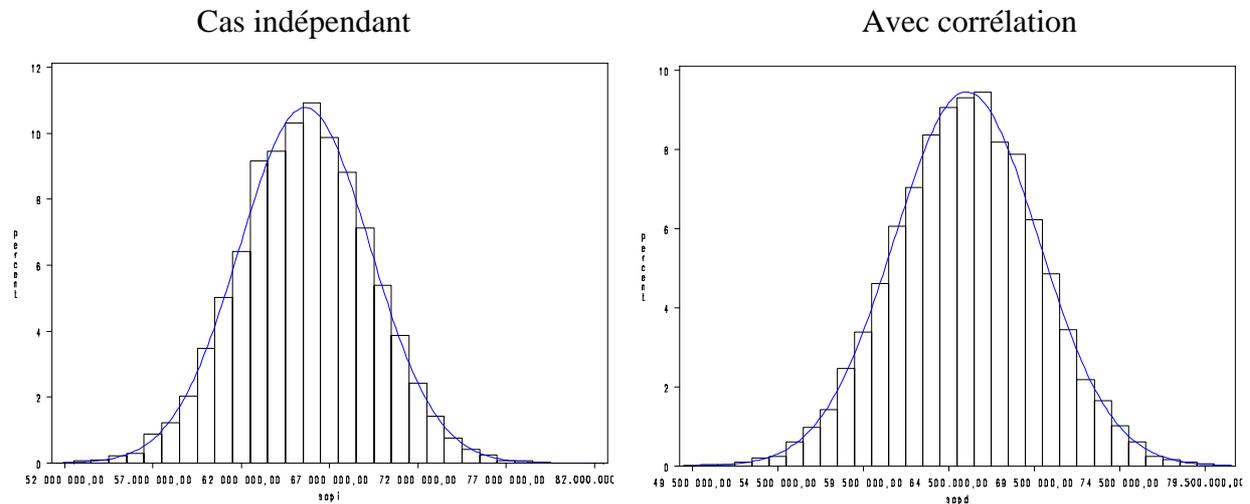


	<i>Bootstrap indépendant</i>		<i>Bootstrap corrélé</i>		<i>Chain-Ladder stochastique</i>	
	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>
1994	0	0	0	0	0	0
1995	13	4	13	4	13	94
1996	399	76	399	77	547	625
1997	535	86	535	88	419	443
1998	1 128	144	1 128	152	875	588
1999	1 783	208	1 783	226	1 344	643
2000	2 056	212	2 056	241	1 876	669
2001	3 088	335	3 088	385	2 945	837
2002	3 489	389	3 489	461	3 852	852
2003	5 291	690	5 291	823	5 907	1 406
2004	32 334	6 357	32 334	7 292	34 162	6 157
TOTAL	50 115	6 475	50 115	7 428	51 941	7 012

ANNEXE 6 : Résultats détaillés du modèle à choc commun

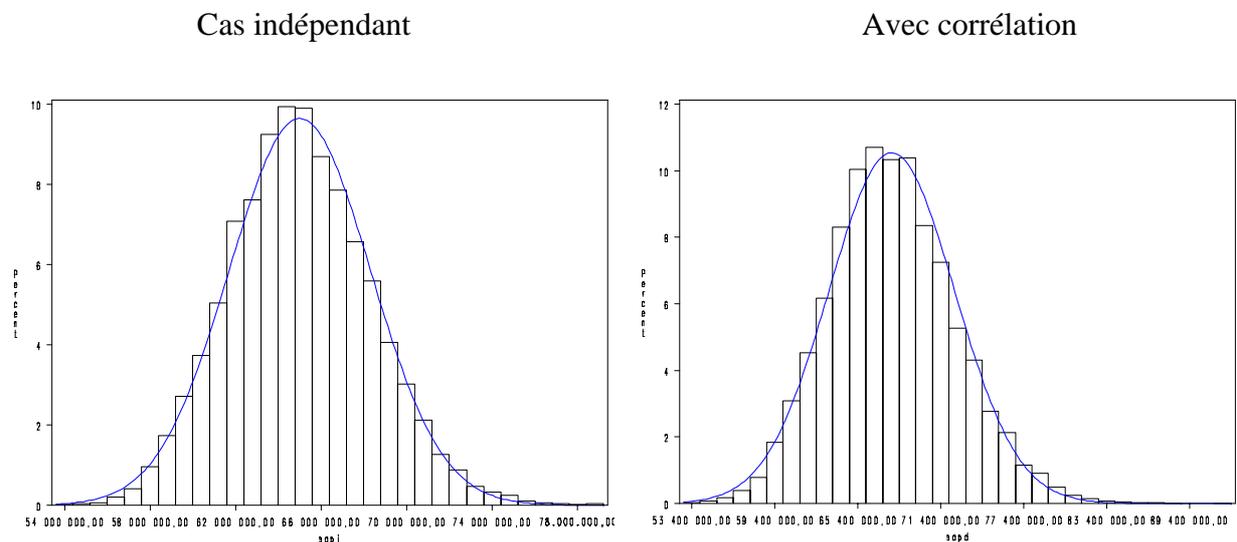
➤ RC matérielle et Dommages Auto

Loi de Poisson sur-dispersée



	<i>Cas indépendant</i>		<i>Choc commun</i>		<i>Chain-Ladder stochastique</i>	
	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>
1994	0	0	0	0	0	0
1995	899	403	899	404	905	6
1996	901	401	900	405	902	11
1997	978	417	987	430	981	24
1998	1 334	499	1 331	525	1 330	149
1999	1 719	574	1 710	598	1 716	207
2000	2 317	667	2 329	720	2 327	252
2001	3 440	829	3 416	888	3 436	408
2002	4 663	972	4 669	1 036	4 671	603
2003	7 611	1 239	7 607	1 309	7 619	1 282
2004	41 743	2 970	41 691	3 544	41 743	6 246
TOTAL	65 607	3 701	65 538	4 220	65 630	6 482

Loi Gamma

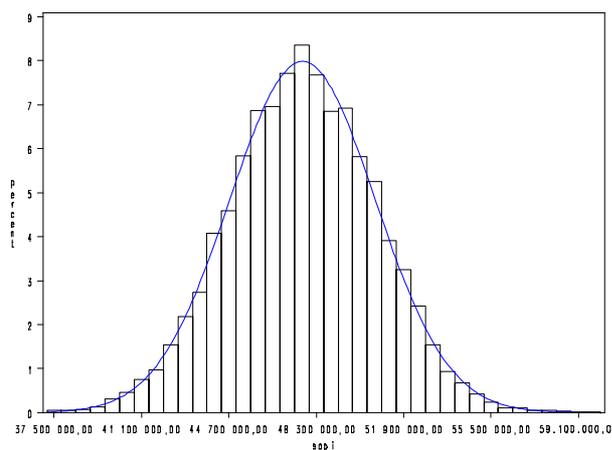


	<i>Cas indépendant</i>		<i>Choc commun</i>		<i>Chain-Ladder stochastique</i>	
	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>
1994	0	0	0	0	0	0
1995	742	87	744	88	905	6
1996	737	82	739	85	902	11
1997	1 237	134	1 241	138	981	24
1998	1 674	152	1 694	156	1 330	149
1999	2 303	177	2 349	183	1 716	207
2000	3 191	212	3 255	218	2 327	252
2001	3 680	183	3 790	197	3 436	408
2002	4 340	171	4 474	200	4 671	603
2003	6 831	266	7 067	359	7 619	1 282
2004	40 274	3 264	42 508	4 507	41 743	6 246
TOTAL	65 008	3 310	67 860	4 544	65 630	6 482

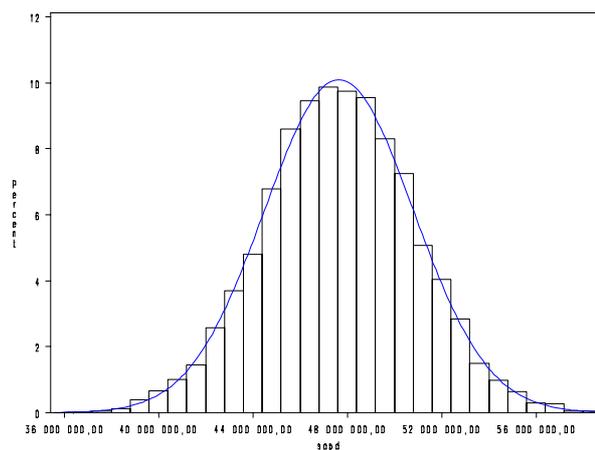
➤ *RC matérielle et DAB Particuliers*

Loi de Poisson sur-dispersée

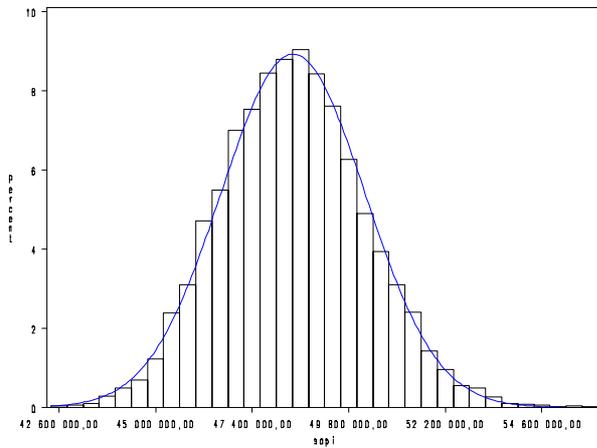
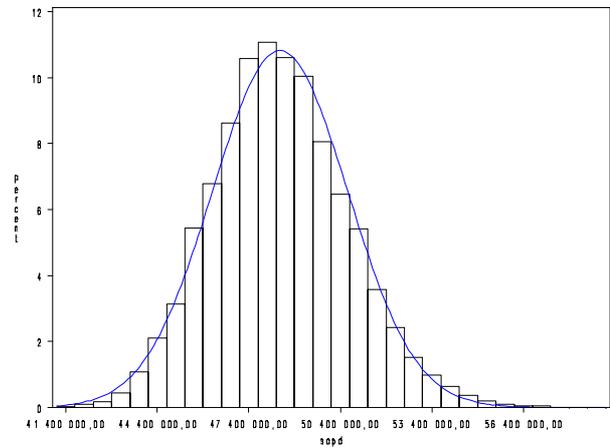
Cas indépendant



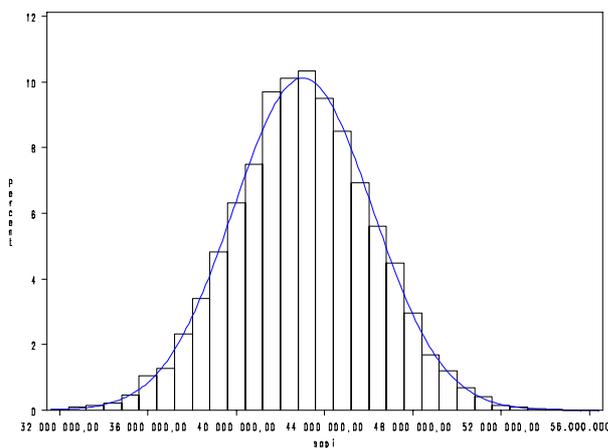
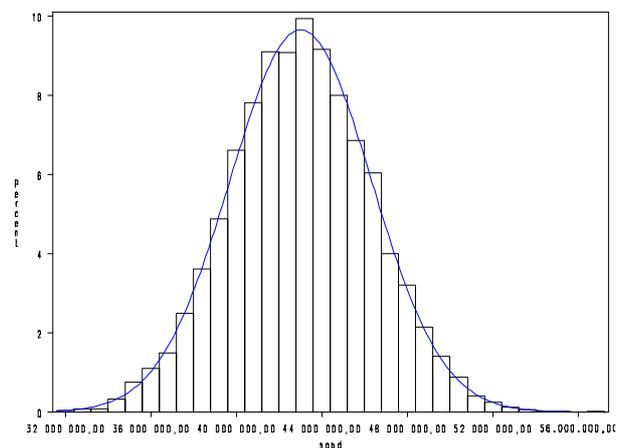
Avec corrélation



	<i>Cas indépendant</i>		<i>Choc commun</i>		<i>Chain-Ladder stochastique</i>	
	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>
1994	0	0	0	0	0	0
1995	897	401	896	402	902	3
1996	912	403	911	409	912	12
1997	1 137	449	1 143	471	1 139	128
1998	1 626	551	1 626	579	1 622	386
1999	2 135	632	2 124	663	2 129	445
2000	2 520	683	2 535	723	2 531	394
2001	3 603	828	3 592	872	3 598	480
2002	4 680	944	4 668	987	4 686	672
2003	7 063	1 149	7 072	1 204	7 071	1 338
2004	23 161	2 057	23 084	2 198	23 159	4 148
TOTAL	47 733	2 999	47 652	3 163	47 750	4 629

Loi Gamma**Cas indépendant****Avec corrélation**

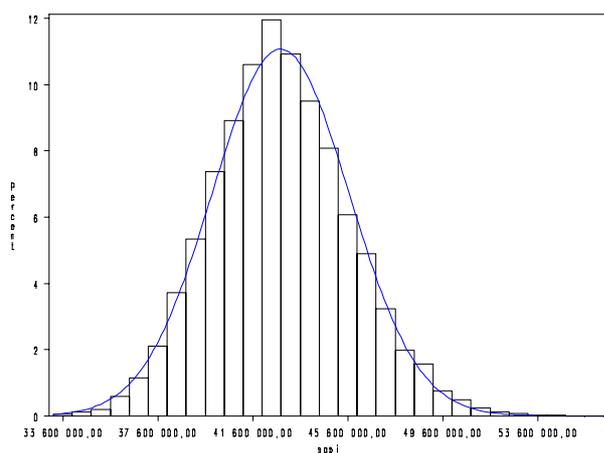
	<i>Cas indépendant</i>		<i>Choc commun</i>		<i>Chain-Ladder stochastique</i>	
	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>
1994	0	0	0	0	0	0
1995	740	87	741	87	902	3
1996	747	82	746	84	912	12
1997	1 354	135	1 353	138	1 139	128
1998	2 013	155	2 015	158	1 622	386
1999	2 683	179	2 684	188	2 129	445
2000	3 446	213	3 443	220	2 531	394
2001	3 991	186	3 992	199	3 598	480
2002	4 397	169	4 391	197	4 686	672
2003	6 643	256	6 643	331	7 071	1 338
2004	22 402	1 714	22 413	2 138	23 159	4 148
TOTAL	48 415	1 788	48 421	2 213	47 750	4 629

➤ *Dommages Auto et DAB Particuliers***Loi de Poisson sur-dispersée****Cas indépendant****Avec corrélation**

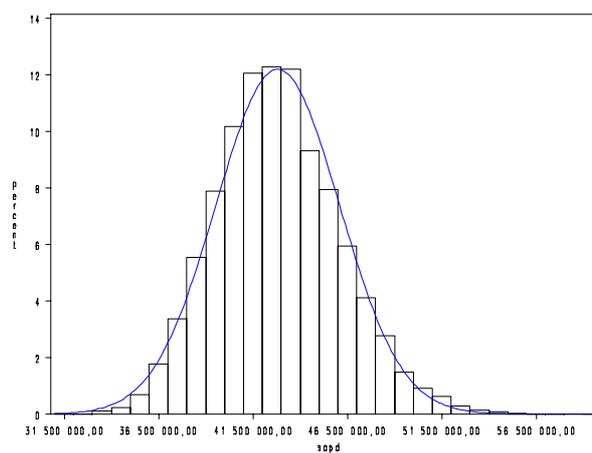
	<i>Cas indépendant</i>		<i>Choc commun</i>		<i>Chain-Ladder stochastique</i>	
	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>
1994	0	0	0	0	0	0
1995	23	73	24	97	24	5
1996	57	111	55	140	57	14
1997	243	226	242	249	243	128
1998	567	348	563	392	562	366
1999	1 017	466	1 009	517	1 014	429
2000	1 342	545	1 351	596	1 347	377
2001	2 148	692	2 138	755	2 146	495
2002	3 175	847	3 178	894	3 184	598
2003	5 184	1 077	5 192	1 133	5 194	1 044
2004	29 270	2 601	29 259	2 709	29 272	5 708
TOTAL	43 024	3 155	43 010	3 306	43 043	5 983

Loi Gamma

Cas indépendant



Avec corrélation

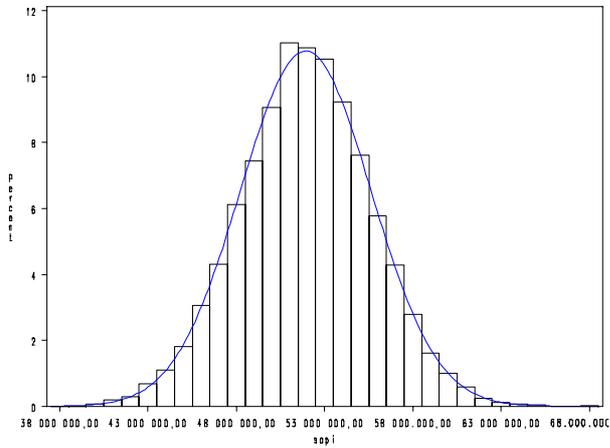


	<i>Cas indépendant</i>		<i>Choc commun</i>		<i>Chain-Ladder stochastique</i>	
	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>
1994	0	0	0	0	0	0
1995	24	2	24	3	24	5
1996	62	4	62	5	57	14
1997	242	13	242	15	243	128
1998	738	32	739	39	562	366
1999	1 309	45	1 309	58	1 014	429
2000	1 713	51	1 713	67	1 347	377
2001	2 569	70	2 569	96	2 146	495
2002	3 015	92	3 013	124	3 184	598
2003	4 743	187	4 742	255	5 194	1 044
2004	28 361	2 871	28 399	3 255	29 272	5 708
TOTAL	42 777	2 885	42 811	3 273	43 043	5 983

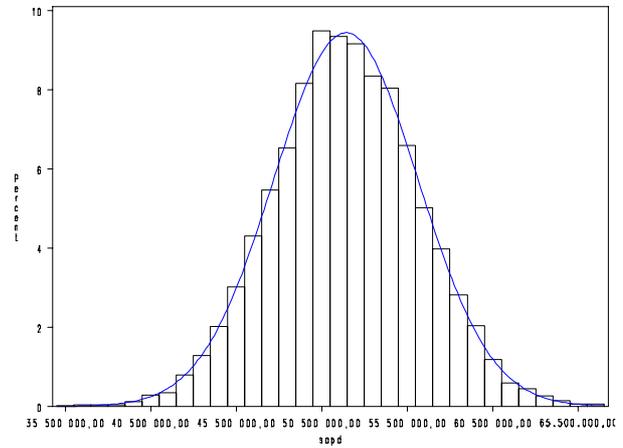
➤ *Dommages Auto et DAB Professionnels*

Loi de Poisson sur-dispersée

Cas indépendant



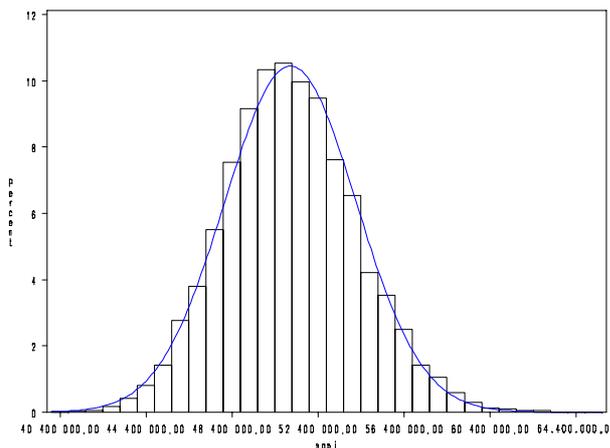
Avec corrélation



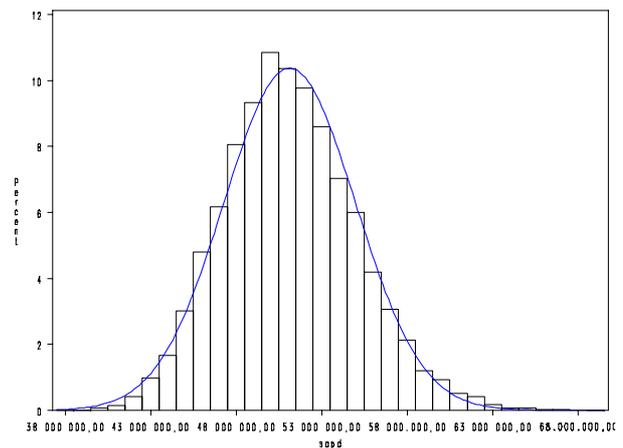
	<i>Cas indépendant</i>		<i>Choc commun</i>		<i>Chain-Ladder stochastique</i>	
	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>
1994	0	0	0	0	0	0
1995	13	57	13	57	13	94
1996	550	396	547	401	547	625
1997	415	347	418	354	419	443
1998	886	500	880	523	875	588
1999	1 346	616	1 330	652	1 344	643
2000	1 870	722	1 876	774	1 876	669
2001	2 947	898	2 932	965	2 945	837
2002	3 844	1 027	3 853	1 086	3 852	852
2003	5 897	1 255	5 909	1 307	5 907	1 406
2004	34 164	2 937	34 152	3 556	34 162	6 157
TOTAL	51 931	3 704	51 910	4 227	51 941	7 012

Loi Gamma

Cas indépendant



Avec corrélation



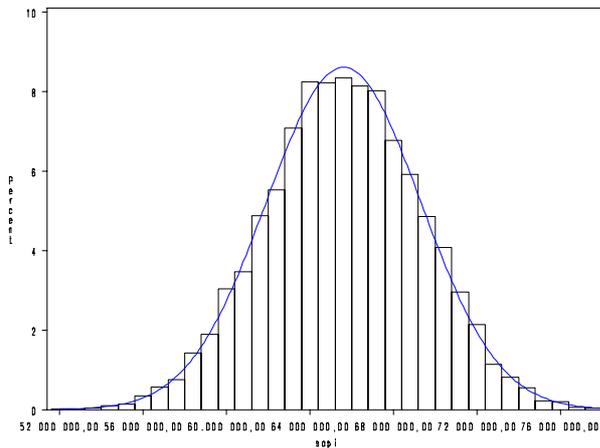
	<i>Cas indépendant</i>		<i>Choc commun</i>		<i>Chain-Ladder stochastique</i>	
	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>
1994	0	0	0	0	0	0
1995	13	2	13	2	13	94
1996	393	41	393	43	547	625
1997	540	45	540	47	419	443
1998	1 136	66	1 136	71	875	588
1999	1 808	81	1 810	92	1 344	643
2000	2 062	74	2 063	89	1 876	669
2001	3 141	101	3 141	124	2 945	837
2002	3 558	121	3 555	157	3 852	852
2003	5 404	234	5 402	314	5 907	1 406
2004	33 061	3 034	33 072	3 829	34 162	6 157
TOTAL	51 117	3 055	51 125	3 847	51 941	7 012

ANNEXE 7 : Résultats détaillés du modèle avec copules

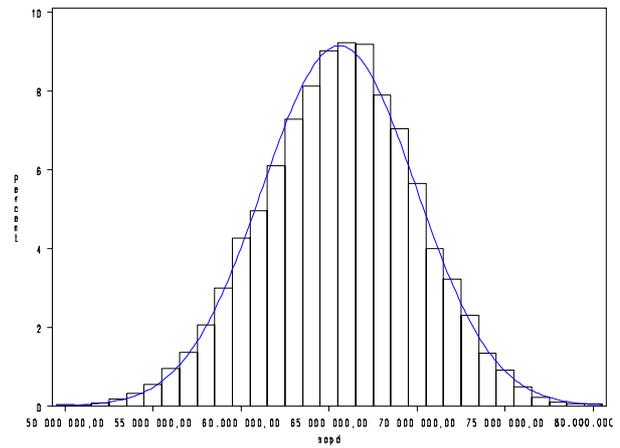
➤ RC matérielle et Dommages Auto

Loi de Poisson sur-dispersée

Cas indépendant



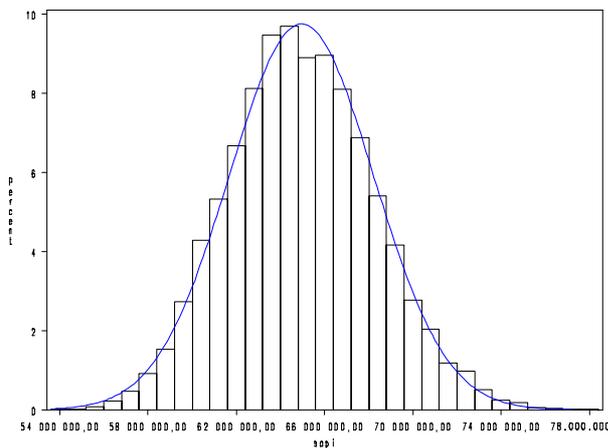
Avec corrélation



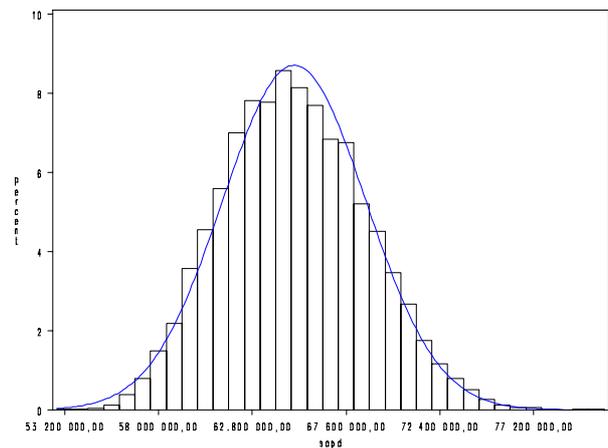
	Cas indépendant – Marg. Poisson		Copule Ali – Marginales Poisson		Chain-Ladder stochastique	
	Moy empirique	écart-type emp.	Moy empirique	écart-type emp.	Moy empirique	écart-type emp.
1994	0	0	0	0	0	0
1995	903	410	903	433	905	6
1996	905	406	905	432	902	11
1997	981	419	979	449	981	24
1998	1 328	496	1 329	544	1 330	149
1999	1 715	577	1 712	639	1 716	207
2000	2 324	672	2 313	757	2 327	252
2001	3 444	825	3 440	938	3 436	408
2002	4 691	961	4 678	1 139	4 671	603
2003	7 611	1 244	7 607	1 459	7 619	1 282
2004	41 711	2 981	41 717	3 571	41 743	6 246
TOTAL	65 612	3 707	65 582	4 361	65 630	6 482

Loi Gamma

Cas indépendant



Avec corrélation

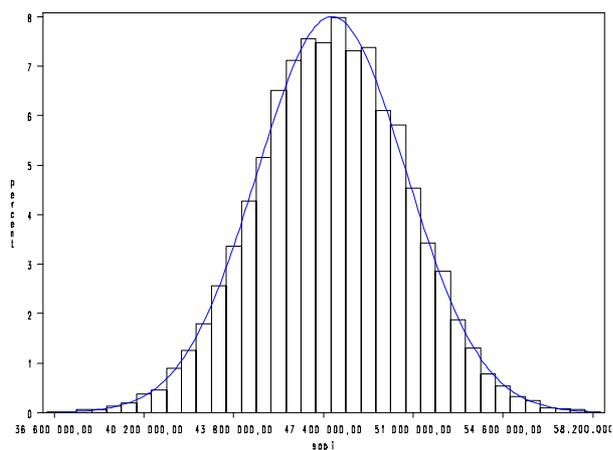


	<i>Cas indépendant – Marg. Gamma</i>		<i>Copule Frank – Marginales Gamma</i>		<i>Chain-Ladder stochastique</i>	
	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>
1994	0	0	0	0	0	0
1995	740	87	740	88	905	6
1996	738	84	738	84	902	11
1997	1 236	134	1 236	135	981	24
1998	1 672	149	1 672	150	1 330	149
1999	2 303	179	2 303	181	1 716	207
2000	3 191	213	3 190	215	2 327	252
2001	3 681	184	3 681	187	3 436	408
2002	4 341	169	4 340	179	4 671	603
2003	6 829	271	6 828	296	7 619	1 282
2004	40 220	3 229	40 223	3 628	41 743	6 246
TOTAL	64 952	3 274	64 951	3 666	65 630	6 482

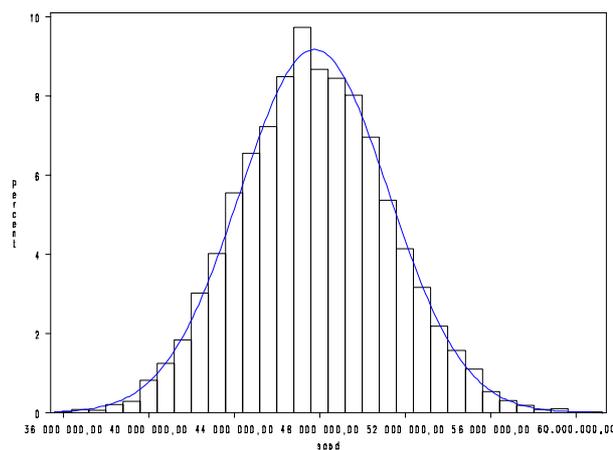
➤ *RC matérielle et DAB Particuliers*

Loi de Poisson sur-dispersée

Cas indépendant



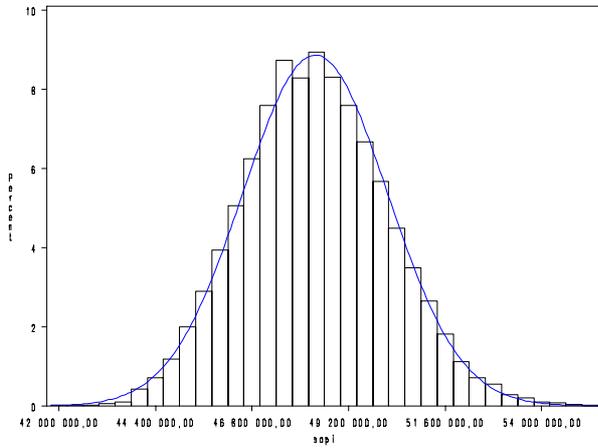
Avec corrélation



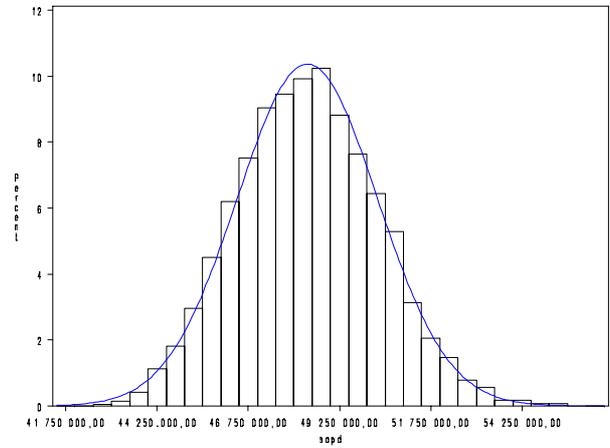
	<i>Cas indépendant – Marg. Poisson</i>		<i>Copule Gumbel – Marginales Poisson</i>		<i>Chain-Ladder stochastique</i>	
	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>
1994	0	0	0	0	0	0
1995	922	394	922	407	902	3
1996	954	387	955	401	912	12
1997	1 175	455	1 177	477	1 139	128
1998	1 627	566	1 634	611	1 622	386
1999	2 101	655	2 101	726	2 129	445
2000	2 450	734	2 448	810	2 531	394
2001	3 532	853	3 534	955	3 598	480
2002	4 647	949	4 646	1 098	4 686	672
2003	7 105	1 150	7 092	1 337	7 071	1 338
2004	23 224	2 082	23 244	2 425	23 159	4 148
TOTAL	47 737	2 993	47 752	3 479	47 750	4 629

Loi Gamma

Cas indépendant



Avec corrélation

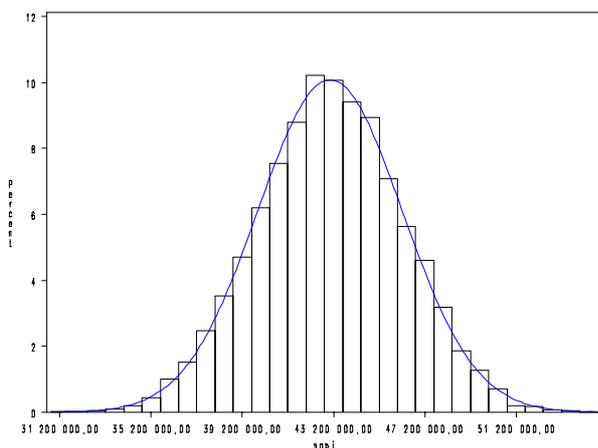


	Cas indépendant – Marg. Gamma		Copule Ali – Marginales Gamma		Chain-Ladder stochastique	
	Moy empirique	écart-type emp.	Moy empirique	écart-type emp.	Moy empirique	écart-type emp.
1994	0	0	0	0	0	0
1995	738	87	738	87	902	3
1996	748	84	748	84	912	12
1997	1 354	135	1 354	135	1 139	128
1998	2 012	152	2 012	153	1 622	386
1999	2 682	182	2 682	184	2 129	445
2000	3 446	214	3 445	216	2 531	394
2001	3 992	186	3 991	189	3 598	480
2002	4 399	168	4 397	178	4 686	672
2003	6 641	260	6 640	282	7 071	1 338
2004	22 359	1 723	22 361	1 851	23 159	4 148
TOTAL	48 370	1 801	48 368	1 925	47 750	4 629

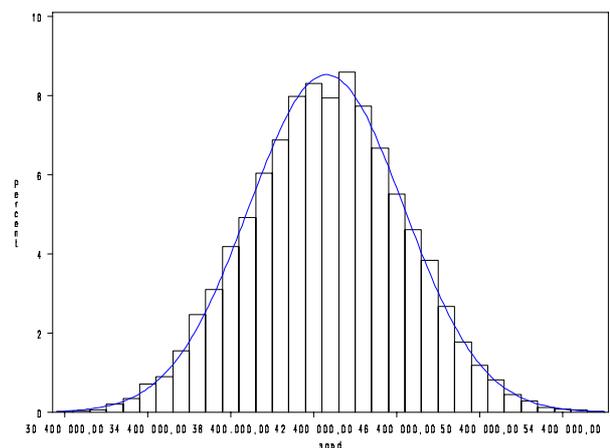
➤ *Dommages Auto et DAB Particuliers*

Loi de Poisson sur-dispersée

Cas indépendant



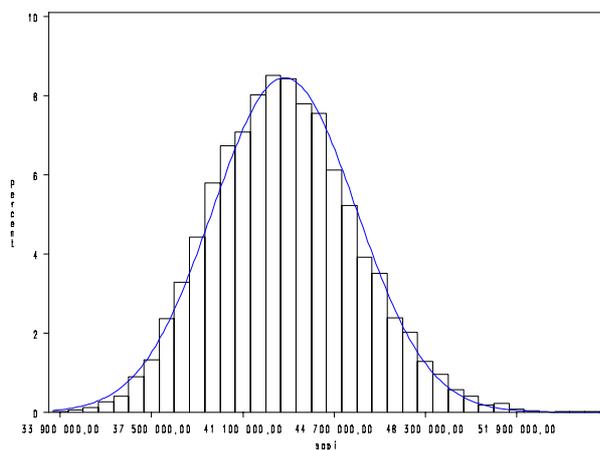
Avec corrélation



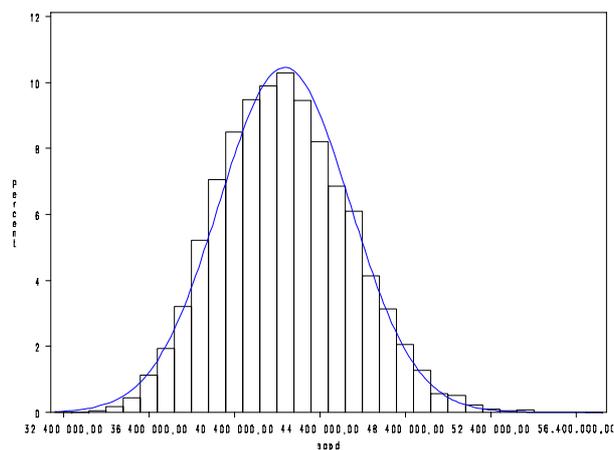
	<i>Cas indépendant – Marg. Poisson</i>		<i>Copule Frank – Marginales Poisson</i>		<i>Chain-Ladder stochastique</i>	
	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>
1994	0	0	0	0	0	0
1995	24	74	24	89	24	5
1996	58	113	59	135	57	14
1997	245	224	244	262	243	128
1998	563	351	564	417	562	366
1999	1 015	469	1 012	564	1 014	429
2000	1 347	546	1 336	655	1 347	377
2001	2 153	695	2 148	833	2 146	495
2002	3 201	842	3 189	1 029	3 184	598
2003	5 187	1 084	5 184	1 297	5 194	1 044
2004	29 251	2 601	29 257	3 061	29 272	5 708
TOTAL	43 044	3 168	43 016	3 744	43 043	5 983

Loi Gamma

Cas indépendant



Avec corrélation

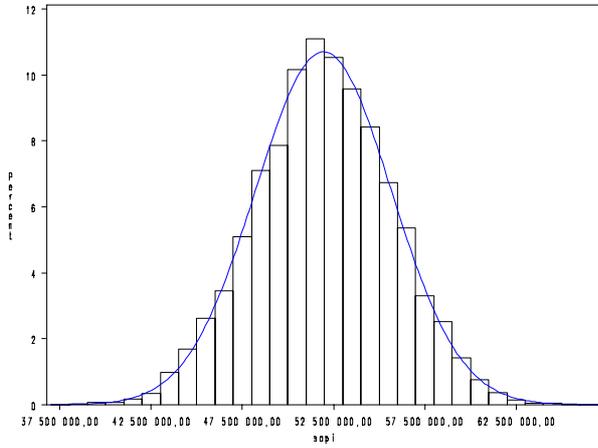


	<i>Cas indépendant – Marg. Gamma</i>		<i>Copule Frank – Marginales Gamma</i>		<i>Chain-Ladder stochastique</i>	
	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>
1994	0	0	0	0	0	0
1995	24	2	24	3	24	5
1996	62	4	62	4	57	14
1997	242	13	242	14	243	128
1998	739	32	739	35	562	366
1999	1 309	45	1 308	51	1 014	429
2000	1 713	51	1 712	58	1 347	377
2001	2 571	72	2 570	81	2 146	495
2002	3 017	92	3 015	106	3 184	598
2003	4 741	191	4 740	216	5 194	1 044
2004	28 334	2 817	28 336	3 039	29 272	5 708
TOTAL	42 751	2 831	42 748	3 053	43 043	5 983

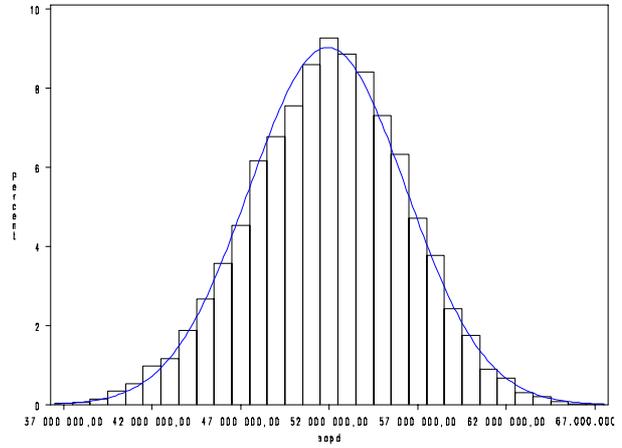
➤ *Dommages Auto et DAB Professionnels*

Loi de Poisson sur-dispersée

Cas indépendant



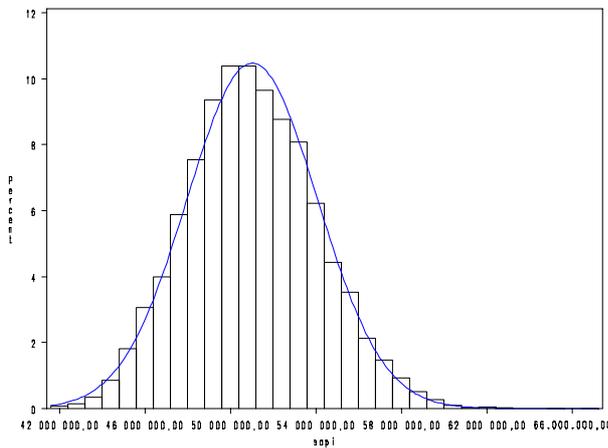
Avec corrélation



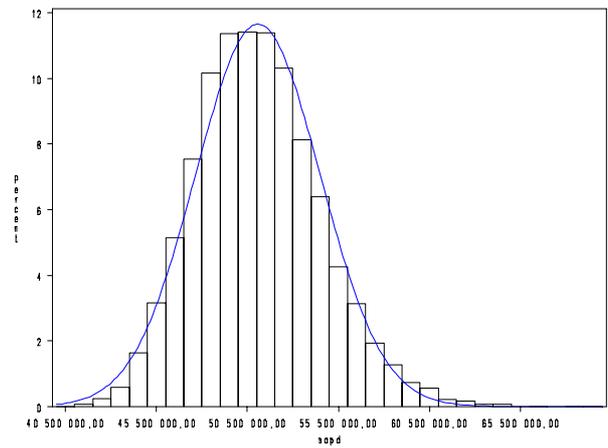
	<i>Cas indépendant – Marg. Poisson</i>		<i>Copule Ali – Marginales Poisson</i>		<i>Chain-Ladder stochastique</i>	
	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>
1994	0	0	0	0	0	0
1995	14	57	14	57	13	94
1996	556	396	556	415	547	625
1997	421	344	419	374	419	443
1998	875	500	876	559	875	588
1999	1 348	614	1 345	707	1 344	643
2000	1 875	722	1 864	835	1 876	669
2001	2 952	902	2 948	1 051	2 945	837
2002	3 869	1 030	3 855	1 233	3 852	852
2003	5 897	1 255	5 893	1 492	5 907	1 406
2004	34 137	2 944	34 143	3 548	34 162	6 157
TOTAL	51 944	3 730	51 914	4 421	51 941	7 012

Loi Gamma

Cas indépendant



Avec corrélation



	<i>Cas indépendant – Marg. Gamma</i>		<i>Copule Gumbel – Marginales Gamma</i>		<i>Chain-Ladder stochastique</i>	
	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>	<i>Moy empirique</i>	<i>écart-type emp.</i>
1994	0	0	0	0	0	0
1995	13	2	13	2	13	94
1996	394	42	394	42	547	625
1997	539	45	539	46	419	443
1998	1 136	66	1 137	69	875	588
1999	1 808	81	1 808	86	1 344	643
2000	2 061	73	2 061	79	1 876	669
2001	3 141	101	3 141	112	2 945	837
2002	3 557	120	3 557	138	3 852	852
2003	5 402	239	5 400	276	5 907	1 406
2004	32 969	3 031	33 022	3 402	34 162	6 157
TOTAL	51 022	3 048	51 073	3 425	51 941	7 012

BIBLIOGRAPHIE

BELGUISE O. , *Tempêtes : Etude des dépendances entre les branches Auto et Incendie avec la théorie des copulas*, 2001, Mémoire de Magistère d' Actuariat de Strasbourg

BESSON J.L, PARTRAT C., *Assurance Non-Vie : Modélisation, Simulation*, Collection Assurance Audit Actuariat, Economica, 2005

BREHM P., *Correlation and the aggregation of paid loss distributions*, Reserves discussion papers, CAS Forum, 2002

CADOUX D., LOIZEAU J.M., *Dépendances au sein d'un portefeuille d'assurance Non vie : cas pratique d'application de la théorie des copules à la détermination du besoin en fonds propres*, 2004, Mémoire d' Actuariat CEA

COMMISSION EUROPEENNE, *Amended Framework for Consultation on Solvency II*, note MARKT/2515/06, Avril 2006

DENUIT M., CHARPENTIER A., *Mathématiques de l'assurance non-vie*, Collection Economie et Statistiques Avancées, Economica, 2004

EFRON B., TIBSHIRANI R.J., *An introduction to the Bootstrap*, Chapman & Hall, 1993

ENGLAND P., VERRALL R., *Analytic and Bootstrap estimates of prediction errors in claims reserving*, Insurance: Mathematics & Economics, **25**, p. 281-293, 1999

ENGLAND P., VERRALL R., *Stochastic claims reserving in general insurance*, British Actuarial Journal, 2002

FAIVRE F., *Copula : a new vision for economic capital and application to a four line of business company*, Astin Conference, 2003

GENEST C., MACKAY J., *The joy of copulas : Bivariate distributions with uniform marginals*, American Statistician, **40**, p. 280-283, 1986

GENEST C., RIVEST L., *Statistical inference procedures for bivariate Archimedean copulas*, Journal of the American Statistical Association, **88**, p. 1034 -1043, 1993

GILLET A., SERRA B., *Effet de la dépendance entre différentes branches pour le calcul des provisions*, 2002, Mémoire d' Actuariat ENSAE

KIRSCHNER G., KERLEY C., ISAACS B., *Two approaches to calculating correlated reserve indications across multiple lines of business*, Reserves discussion papers, CAS Forum, 2002

LEBART L., MORINEAU A., PIRON M., *Statistique exploratoire multidimensionnelle*, Dunod, 2000

Mc CULLAGH P., NELDER J.A, *Generalized Linear Models*, , Chapman & Hall, 1989

PARTRAT C., *Corrélations entre risques*, Séminaire Caritat, 2005

PARTRAT C., *Méthodes Stochastiques*, Séminaire Caritat, 2006

PETAUTON P., *Théorie de l'assurance dommages*, Dunod, 2000

PINHEIRO P., SILVA J., CENTENO M., *Bootstrap Methodology in Claim Reserving*, PCAS, 2000

RONCALLI T., *Gestion des Risques Multiples : copules et aspects multidimensionnels du risque*, Cours ENSAI de 3^{ème} année, 2002

SAPORTA G., *Probabilités, Analyse des données et Statistiques*, Technip, 1990

VENTER G., *Tails of copulas*, Astin Conference, 2001