Unit-linked life insurance in Lévy-process financial markets

Modeling, Hedging and Statistics

Zusammenfassung der Dissertation

Martin Riesner

Im Mittelpunkt dieser Arbeit steht die Entwicklung von lokal risikominimalen Hedgingstrategien für fondsgebundene Lebensversicherungsverträge, wobei der Fonds in einem allgemeinen Lévy-Prozess Finanzmarktmodell modelliert wird. Dadurch soll die in den letzten Jahren entwickelte und ziemlich weit vorangeschrittene Theorie der Lévy-Prozess Finanzmärkte mit der Theorie für fondsgebundene Lebensversicherungen verbunden und außerdem ein Rahmen bereitgestellt werden, der quadratisches Hedgen von Zahlungsströmen ermöglicht, die einem Investitionsrisiko und einem Versicherungsrisiko ausgesetzt sind. Unserem Wissen zur Folge, wurde lokal risikominimales Hedgen von fondsgebundenen Lebensversicherungsverträgen in allgemeinen Lévy-Prozess Finanzmärkten bisher noch nicht analysiert. Diese Arbeit liefert daher einen Beitrag zur laufenden Forschung an der Schnittstelle zwischen Finanz- und Versicherungsmathematik und verallgemeinert die früheren Arbeiten von Møller (1998, 2001a), indem der vollständige Black-Scholes Finanzmarkt durch einen unvollständigen Finanzmarkt, am Beispiel eines allgemeineren geometrischen Lévy-Prozess Modells, ersetzt wird.

Wie Møller (1998, 2001a) nehmen wir stochastische Unabhängigkeit zwischen dem Finanzmarkt und dem Versicherungsmodell an und betrachten beide zusammengefasst in einem gemeinsamen Produktwahrscheinlichkeitsraum. Dies greift die Idee auf, die Unsicherheit des Finanzmarktes und die der versicherten Leben gleichzeitig zu modellieren und nicht die Sterblichkeit durch ihren erwarteten Verlauf zu ersetzen. Zudem liefert die Verwendung des Markovkettenmodells von Hoem (1969) zur Beschreibung der Lebensversicherungen sehr flexible Resultate, die an die verschiedensten vorstellbaren Lebensversicherungsarten angepasst werden können. In Beispielen liegt jedoch unser Schwerpunkt auf den sicherlich wichtigsten Varianten wie die Erlebensfallversicherung, die Todesfallversicherung und die Leibrentenversicherung.

Wir beginnen mit der Herleitung von lokal risikominimalen Hedgingstrategien und dem damit verbundenen Hedgingrisiko für ein Portfolio von fondsgebundenen Erlebensfallversicherungen und für ein Portfolio von fondsgebundenen Todesfallversicherungen, wobei wir zunächst annehmen, dass diese gegen eine Einmalprämie zum Ausstellungsdatum verkauft und dass ihre Versicherungsleistungen bis zum Ende des betrachteten Zeithorizonts verzinslich aufgeschoben und erst dann ausbezahlt werden. Mit dieser vereinfachenden Annahme passen die entsprechenden Zahlungsansprüche in die lokal risikominimale Hedgingtheorie von Schweizer (1991). Die risikominimale Hedgingtheorie von Föllmer und Sondermann (1986) für Zahlungsansprüche mit festem Auszahlungszeitpunkt wurde von Møller (2001) für allgemeine Zahlungsströme erweitert. Beide Theorien gelten jedoch in Martingalfinanzmärkten, in denen das Hedgingrisiko unter dem jeweils betrachteten Martingalmaß interpretiert werden kann. Schweizer (1991) verallgemeinerte die Theorie von Föllmer und Sondermann (1986) für Semimartingalfinanzmärkte, indem er lokal risikominimales Hedgen und das risikoneutrale Föllmer-Schweizer Maß eingeführt hat. Eine unter diesem Maß risikominimale Hedgingstrategie ist lokal risikominimal bezüglich dem ursprünglichen Maß und kann somit nicht nur unter einem möglicherweise beliebigen, risikoneutralen Martingalmaß hinsichtlich ihres Risikos interpretiert werden. Aus diesem Grund zeigen wir, dass sich lokal risikominimales Hedgen auch auf allgemeine Zahlungsströme anwenden lässt. Diese Erweiterung auf Zahlungsströme ist neu und wurde zuvor noch nicht betrachtet. Schließlich leiten wir in einem allgemeinen Lévy-Prozess Finanzmarkt lokal risikominimale Hedgingstrategien für allgemeine fondsgebundene Lebensversicherungsverträge her, welche innerhalb ihrer Laufzeit Versicherungsleistungen und Prämienzahlungen zulassen.

Da wir von Anfang an einen unvollständigen Finanzmarkt benutzen, erhalten wir zwei Bestandteile des Hedgingrisikos.Wir bezeichnen sie als das reine Finanz- und das reine Versicherungsrisiko. Das gesamte Hedgingrisiko eines fondsgebundenen Lebensversicherungsanspruchs teilt sich genau in diese beiden Größen auf, wobei das reine Versicherungsrisiko durch eine Erhöhung der Anzahl der versicherten Personen innerhalb des Portfolios diversifizierbar ist. Dies gilt jedoch nicht für das reine Finanzrisiko, was man ohnehin in der Realität nicht erwarten würde. Der Unterschied zu Møller (1998, 2001) ist, dass wir in Übereinstimmung zur Realität zusätzlich das reine Finanzrisiko modellieren. Da das Black-Scholes Modell einen vollständigen Finanzmarkt beschreibt, stimmt das gesamte Hedgingrisiko von Møller (1998, 2001) mit dem reinen Versicherungsrisiko in unserem Fall überein. Im Folgenden geben wir eine detaillierte Inhaltsübersicht der Dissertation.

Grundlegende Konzepte

In Kapitel 2 werden die in dieser Arbeit benötigten wesentlichen technischen Grundlagen besprochen. Nach der Definition eines Lévy-Prozesses diskutieren wir das Lévy-Maß, die berühmte Lévy-Itô-Zerlegung und die Verteilungseigenschaften von Lévy Prozessen, zu denen die Lévy-Khinchin Formel und die unendliche Teilbarkeit gehören. Zusätzlich klassifizieren wir das Pfadverhalten von Lévy-Prozessen. Im Anschluss daran führen wir das Lévy-Prozess Finanzmarktmodell von Chan (1999) ein und behandeln das für lokal risikominimales Hedgen benötigte Föllmer-Schweizer Maß. Wir erklären ausführlich die Auswirkungen des damit zusammenhängenden Maßwechsels auf den Lévy-Prozess des Modells, welcher zu einem additiven Prozess wird. Außerdem diskutieren wir den Aktienpreisprozess vor und nach diesem Maßwechsel und zeigen in beiden Fällen seine quadratische Integrierbarkeit, indem wir das Resultat aus dem Anhang dieser Arbeit verwenden. Dieses Resultat ermöglicht es uns, die von Chan (1999) vorausgesetzte Existenz exponentieller Momente des Lévy-Maßes wesentlich abzuschwächen, indem wir nur noch die Existenz des dritten Moments benötigen. Im darauffolgenden Abschnitt 2.4 fassen wir das auf einer zeitstetigen Markovkette basierende Lebensversicherungsmodell von Hoem (1969) zusammen. Es lässt die Modellierung von sehr allgemeinen Lebensversicherungsverträgen zu. Zusätzlich besprechen wir Sterblichkeitsgesetze, um Beispiele für die Hasardrate des Versicherungsmodells zu geben. Anschließend verwenden wir den zentralen Grenzwertsatz, um im Unterabschnitt 2.2.4 ein weit verbreitetes Diversifikationsmodell für das Versicherungsrisiko am Beispiel der gewöhnlichen Lebensversicherung zu besprechen. Weiterhin zeigt eine Anwendung des starken Gesetzes der großen Zahlen im Unterabschnitt 2.4.5 die Risikoneutralität eines Versicherungsunternehmens in Bezug auf die Sterblichkeit. Schließlich ist Abschnitt 2.5 der Konstruktion eines gemeinsamen Produktwahrscheinlichkeitsraums gewidmet, welcher das Lévy-Prozess Finanzmarktmodell mit dem Versicherungsmodell unter der begründeten Annahme von stochastischer Unabhängigkeit zusammenfasst. Zudem wiederholen wir im risikoneutralen Gegenstück dieses Raumes die risikominimale Hedgingtheorie von Föllmer und Sondermann (1986), einschließlich der für sie grundlegenden Galtchouk-Kunita-Watanabe Zerlegung und einer Diskussion ihres Zusammenhangs zum lokal risikominimalen Hedgen von Schweizer (1991).

Arbitrage-freier Preisprozess

In Kapitel 3 diskutieren wir den arbitragefreien Preisprozess eines quadratisch integrierbaren Zahlungsanspruchs. Im zu Grunde liegenden risikoneutralen Finanzmarkt wird die Aktie durch einen additiven Prozess, das heißt, einem càdlàg, stochastisch stetigen Prozess mit unabhängigen Zuwächsen, modelliert. Der Schwerpunkt dieses Kapitels ist die in Theorem 3.3.4 hergeleitete Galtchouk-Kunita-Watanabe Zerlegung des arbitragefreien Preisprozesses. Sie hat dieselbe Struktur, wie wenn sie für einen Lévy-Prozess ausgearbeitet worden wäre und ist sicherlich der wichtigste Teil der lokal risikominimalen Hedgingtheorie. Darüber hinaus ist sie die Grundlage der Galtchouk-Kunita-Watanabe Zerlegung des inneren Werts der fondsgebundenen Lebensversicherungen in den folgenden Kapiteln. Grob umschrieben ist diese Zerlegung ein Projektionsresultat im Hilbertraum der quadratisch integrierbaren Zufallsvariablen. Wir beweisen Theorem 3.3.4, indem wir die Orthogonalität der beteiligten stetigen und rein unstetigen Martingale direkt verwenden. Diese Herangehensweise haben wir zuvor noch nicht beobachtet. Darüber hinaus scheint die Formulierung des Theorems für additive Prozesse neu zu sein. Um unseren Beitrag von bereits existierenden Resultaten abzugrenzen, stellen wir am Ende des Kapitels einen Überblick über damit zusammenhängende Literatur zur Verfügung. In Theorem 3.2.4 betrachten wir die Feynman-Kac partielle Differential- und Integralgleichung, welche vom arbitragefreien Preisprozess notwendigerweise erfüllt und zum Beweis der Galtchouk-Kunita-Watanabe Zerlegung benötigt wird. Die angewendete Zerlegungsmethode ist am Anfang sehr ähnlich zur der für Black-Scholes Finanzmärkte bekannten Herangehensweise. Allerdings erhält man in diesem Fall durch die entsprechende Feynman-Kac Darstellung bereits die richtige Galtchouk-Kunita-Watanabe Zerlegung. In unserem Fall sind dagegen weitere Schritte erforderlich, welche in den Lemmata 3.3.2 und 3.3.3 genauer ausgeführt werden.

Hedging von fondsgebundener Erlebens- und Todesfallversicherung

Kapitel 4 basiert auf Riesner (2006) und ist der Entwicklung von lokal risikominimalen Hedgingstrategien für ein Portfolio von entweder fondsgebundenen Erlebens- oder Todesfallversicherungsverträgen gewidmet. Wie bereits erwähnt, schränken wir uns dabei zunächst auf den Fall von Zahlungen nur zu Beginn und zum Ende des betrachteten Zeitintervalls ein. Diese Einschränkung ermöglicht es uns, die für Zahlungsansprüche mit festem Auszahlungszeitpunkt entwickelte lokal risikominimale Hedgingtheorie von Schweizer (1991) anzuwenden. Das Kapitel dient als Zwischenschritt bevor wir Prämienzahlungen und Versicherungsleistungen auch innerhalb der Versicherungsperiode betrachten und verallgemeinert darüber hinaus Møller (1998), indem der vollständige Black-Scholes Finanzmarkt durch einen allgemeineren und unvollständigen Lévy-Prozess Finanzmarkt ersetzt wird. Wir beginnen das Kapitel mit einer allgemeinen mathematischen Diskussion fondsgebundener Lebensversicherungsverträge und bestimmen die Barwerte des gesamten Portfolios der oben erwähnten Versicherungsarten. Verschiedene weitere Umformungen führen uns dann jeweils in den Korollaren 4.3.1 und 4.3.6 zur gewünschten Galtchouk-Kunita-Watanabe Zerlegung der zu diesen Barwerten gehörenden inneren Werte der betrachteten Versicherungsportfolios. Diese Umformungen beinhalten unter anderem die Anwendung von Itôs partieller Integrationsformel für allgemeine Semimartingale und, zusätzlich bei der Todesfallversicherung, von Fubinis Theorem für stochastische Integrale. Die lokal risikominimalen Hedgingstrategien werden anschließend jeweils in den Korollaren 4.3.2 und 4.3.7 wiedergegeben. Alle erwähnten Korollare sind für einen allgemeinen Lévy-Prozess Finanzmarkt neue Resultate, welche wir ausführlich diskutieren und mit denen von Møller (1998) vergleichen. In unserem allgemeineren Fall ist der risikominimale Investmentanteil der risikobehafteten Anlage eine gewichtete Summe des Black-Scholes Delta und einem weiteren, aus den Sprüngen des Preisprozesses resultierenden Term. Anschließend betrachten wir das Hedgingrisiko und leiten seine zwei Bestandteile, das reine Finanz- und das reine Versicherungsrisiko, her. Am Ende des Kapitels begründen wir, warum lokale Risikominimierung speziell für Versicherungszahlungsansprüche verwendet werden sollte.

Hedging von allgemeinen Zahlungsströmen für Semimartingale

In Kapitel 5 wird lokal risikominimales Hedgen von Zahlungsströmen in einem allgemeinen Semimartingalfinanzmarkt untersucht. Für Martingalfinanzmärkte existiert die risikominimale Hedgingtheorie für Zahlungsströme von Møller (2001). Diese liefert eine Interpretation des Hedgingrisikos unter dem jeweils betrachteten Martingalmaß. Ist das subjektive Maß jedoch kein Martingalmaß, stellt sich die Frage wie man das Hedgingrisiko auch unter diesem Maß und nicht nur unter einem, möglicherweise beliebig gewählten, risikoneutralen Martingalmaß interpretieren kann. Schweizer (1991) hat die lokal risikominimale Hedgingtheorie für Zahlungsansprüche mit festem Auszahlungszeitpunkt für Semimartingalfinanzmärkte entwickelt. Diese ermöglicht eine lokale Interpretation des Hedgingrisikos unter dem subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaß, vorausgesetzt das Föllmer-Schweizer Maß wird als risikoneutrales Maß verwendet. Wir benützen nun Schweizer (1991), um in diesem Kapitel zu zeigen, dass das risikominimale Hedgen von Zahlungsströmen im selben Sinne eine lokale Version besitzt wie das Hedgen von Zahlungsansprüchen mit festem Auszahlungszeitpunkt. Man benutzt die Theorie von Møller (2001) und leitet unter dem Föllmer-Schweizer Maß eine risikominimale Hedgingstrategie her. Diese ist dann lokal risikominimal in Bezug auf das subjektive Wahrscheinlichkeitsmaß. Nach einigen technischen Details, fassen wir dieses Hauptresultat in Theorem 5.4.2 zusammen. Es basiert letztendlich auf derselben Optimalitätsgleichung wie im klassischen Fall, welche wir in Theorem 5.4.2 formulieren. In Proposition 5.2.3 vergleichen wir außerdem den Begriff von erreichbaren Zahlungsströmen mit dem klassischen Begriff von erreichbaren Zahlungsansprüchen. Die Erweiterung von lokal risikominimalem Hedgen auf Zahlungsströme ist ein neues Resultat. Ein Teil von Riesner (2007) ist diesem Kapitel entnommen.

Hedging von allgemeinen fondsgebunden Lebensversicherungsverträgen

Das Thema von Kapitel 6 ist die Herleitung von lokal risikominimalen Hedgingstrategien für allgemeine fondsgebundene Lebensversicherungsverträge, welche innerhalb ihrer Laufzeit sowohl Prämien- als auch Leistungszahlungen zulassen. Zur Modellierung der Lebensversicherungsverträge verwenden wir das zeitstetige Markovkettenmodell von Hoem (1969). Es ermöglicht sowohl zustandsabhängige als auch durch einen Zustandsübergang ausgelöste Zahlungen, welche wir als Differenz von Prämien- und Versicherungsleistungen interpretieren. Das Kapitel trägt zu Riesner (2007) bei und verallgemeinert Møller (2001a), indem der vollständige Black-Scholes Finanzmarkt durch einen allgemeineren und unvollständigen Lévy-Prozess Finanzmarkt ersetzt wird. Die Galtchouk-Kunita-Watanabe Zerlegung des inneren Werts dieser allgemeinen Versicherungen ist als Hauptresultat in Theorem 6.3.1 wiedergegeben und wird mit aus Kapitel 4 bereits bekannten Techniken bewiesen. Die daraus anschließend abgeleitete lokal risikominimale Hedgingstrategie sowie das damit zusammenhängende Hedgingrisiko sind in Korollar 6.3.2 enthalten. Für einen allgemeinen Lévy-Prozess Finanzmarkt sind diese Resultate neu. Am Ende des Kapitels wenden wir das allgemeine Modell auf die fondsgebundene Leibrenten- und die fondsgebundene Todesfallversicherung an, wobei wir zunächst jeweils einen einzelnen Vertrag und im Anschluss daran ein Portfolio dieser Verträge betrachten.

Modellierung der Aktie durch eine Sprungdiffusion

In Kapitel 7 schlagen wir das asymmetrisch doppelt exponentiale Sprungdiffusionsmodell von Kou (2002) als einen möglichen, konkreten Lévy-Prozess Finanzmarkt vor. Als risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß verwendet Kou (2002) ein spezielles, auf Nutzenüberlegungen basierendes Maß und zeigt, dass man mit dem entsprechenden Maßwechsel, unter gewissen Annahmen an die Marktparameter wie Zins- und Driftrate, innerhalb der Klasse der asymmetrisch doppelt exponentialen Sprungdiffusionen bleibt. Da wir lokal risikominimales Hedgen betrachten, sind wir an den Auswirkungen des Föllmer-Schweizer Maßes auf das Modell interessiert. Wir zeigen in Lemma 7.4.5, dass im Allgemeinen die Sprunghöhen unter diesem Maß keiner asymmetrisch doppelten Exponentialverteilung mehr folgen und leiten daraus entsprechende Bedingungen an die Marktparameter ab, unter denen man auch nach diesem Maßwechsel innerhalb der gewünschten Verteilungsklasse bleibt. Diese Bedingungen vergleichen wir anschließend mit denen von Kou (2002). Abschnitt 7.5 beendet das Kapitel mit den Formeln für den arbitragefreien Preisprozess einer fondsgebundenen Erlebensfallversicherung und einer fondsgebundenen Todesfallversicherung, wobei beide eine Mindestzahlung garantieren. Sowohl der Preisprozess als auch seine Ableitung sind Bestandteile der in dieser Arbeit aufgestellten Hedgingstrategien. Das Sprungdiffusionsmodell von Kou (2002) wurde bisher noch nicht im Zusammenhang mit fondsgebundenen Lebensversicherungen und dem Föllmer-Schweizer Maßwechsel betrachtet. Außerdem sind die Bedingungen neu, unter denen dieser Maßwechsel nicht aus der Klasse der asymmetrisch doppelt exponentialen Sprungdiffusionen herausführt.

Statistik für Sprungdiffusionen

Während dem Studium der asymmetrisch doppelt exponentialen Sprungdiffusion fiel uns auf, dass es keine zufriedenstellenden Parameterschätzmethoden für Sprungdiffusionen gibt. Aus diesem Grund behandeln wir dieses Thema in Kapitel 8. Obwohl wir den genannten Prozess dabei beispielhaft verwenden, ist unsere Betrachtung im Wesentlichen auch für andere Sprungdiffusionen gültig. Da die Wahrscheinlichkeitsdichte dieser Prozesse keine geschlossene Form besitzt, ihre charakteristische Funktion aber explizit bekannt ist, basieren wir die Schätzung auf die kumulantenerzeugende Funktion. Diese vergleichen wir mit dem komplexen Logarithmus der empirischen charakteristischen Funktion im Hinblick auf ihren quadratischen Abstand und erhalten somit ein System aus zwei nichtlinearen Regressionsmodellen. Diese können dann mit Hilfe von Standardverfahren zur Lösung von Kleinstquadratproblemen gelöst werden und sind sogar in einigen Spezialfällen linear. Abschnitt 8.4 enthält das „Glivenko-Cantelli Theorem“ für die charakteristische Funktion von Csörgő und Totik (1983), welches wir motivieren und aus welchem wir starke Konsistenz erhalten. Danach wenden wir das Invarianzprinzip von Csörgő (1981) auf die empirische charakteristische Funktion an und bekommen einen komplexwertigen Gaußschen Prozess als Grenzwert in Verteilung. Dieses Resultat führt uns dann asymptotisch in Theorem 8.4.7 zu den endlichdimensionalen Verteilungen der komplexwertigen Residuen unseres Regressionsproblems einschließlich ihrer Kovarianzstruktur.

Literatur

Riesner, M. (2006). Hedging life insurance contracts in a Lévy process financial market. *Insurance: Mathematics and Economics* 38(3), 599–608.

Riesner, M. (2007). Locally risk-minimizing hedging of insurance payment streams. *Astin Bulletin*, 37(1), 67–92 .