

**Dynamic Investment Fund Protection:  
caratteristiche e confronti**

Tesi di  
**Bruno Bui**

Matricola  
**955239**

Relatore Prof.

**Massimo De Felice**

Correlatore Prof.

**Gilbero Castellani**

Sapienza Università di Roma  
Facoltà di Scienze statistiche  
Corso di laurea in Scienze attuariali e finanziarie

A/A 2006/2007



*Alla mia famiglia,  
perchè se c'è del merito,  
è il loro.*



# Sommario

In questa tesi si affronta il problema della costruzione e del pricing di una garanzia finanziaria dinamica per un portafoglio azionario, o indicizzato azionario, che coniughi assieme: la sicurezza di un livello minimo, istantaneamente garantito, per il valore del capitale esigibile a scadenza; la possibilità di guadagno in un mercato rialzista; un costo relativamente contenuto; l'automaticità della copertura.

Si consideri un investimento in un fondo azionario (detto *naked fund*, o *primary fund*) garantito da una "dynamic fund protection option" che assicuri che il valore complessivo dell'investimento (detto *protected fund*, o *upgraded fund*) non si deprezzi mai al di sotto di un prefissato livello (il *floor*) in nessun istante della durata contrattuale: in pratica ogni qualvolta il valore del portafoglio scende al livello del minimo garantito, il capitale del fondo viene istantaneamente incrementato di modo che non sia mai varcata la soglia minima. L'*upgraded fund* viene perciò ad essere costituito dalle quote del *primary fund* inizialmente acquistate a carico dell'assicurato, più le eventuali quote addizionali accreditate dalla compagnia al cliente nel rispetto della garanzia ceduta. In questo modo si estende il concetto di put option fornendo una garanzia di minimo nel tempo continuo. La copertura interviene automaticamente, senza che l'investitore si debba preoccupare della strategia di esercizio e senza che venga penalizzato nel caso di un mercato fortemente volatile: infatti, le perdite al di sotto del livello garantito sono immediatamente compensate dall'intervento della compagnia e l'assicurato può godere in ogni istante di un'eventuale fase rialzista del mercato, nella quale realizza un'intensità istantanea di rendimento del tutto analoga a quella del *naked fund*, almeno fintanto che non sia eventualmente raggiunto il livello del *floor*.

Il principale problema è quello di prezzare questo tipo di opzione e di determinare una strategia operativa per la sua implementazione. L'ambito metodologico di riferimento è rappresentato dai lavori di [Gerber e Pafumi (2000)], [Imai e Boyle (2001)], [Gerber e Shiu (2003a)], [Gerber e Shiu (2003b)], [Castellani, De Felice, Moriconi (2004a)] e [Castellani, De Felice, Moriconi (2004b)].

La tesi sviluppa in particolare tre possibili varianti di dynamic investment fund protection europea: il caso standard, in cui il livello di garanzia è costante lungo l'intera durata contrattuale; la dynamic fund protection con livello di garanzia esponenziale, in cui il *floor* cresce a partire da un livello minimo iniziale secondo una legge di capitalizzazione esponenziale con intensità istantanea di rendimento deterministica e costante; la dynamic fund protection con livello di garanzia stocastico, in cui il minimo garantito è dato dal valore di un'azione o di un indice azionario di riferimento.

La tesi si sviluppa in sette capitoli:

Nel **primo capitolo** si introducono le caratteristiche generali della garanzia, contestualizzandola all'interno del panorama delle opzioni finanziarie ed evidenziandone i principali punti di forza e di criticità secondo un'ottica "commerciale".

Nel **secondo capitolo** si focalizza l'attenzione sulla dynamic fund protection standard. Nella sezione 2.1 si ricava un'interessante espressione esplicita per il payoff a scadenza dell'investimento garantito. Nella sezione 2.2 si descrive il problema di pricing della garanzia in un modello di valutazione di tipo Black e Scholes in assenza di dividendi. Si determina una formula chiusa di pricing seguendo tre differenti criteri operativi: secondo l'approccio di Gerber e Pafumi si valuta direttamente il valore atteso del payoff a scadenza attraverso la risoluzione di una serie di integrali. Secondo l'approccio di Huang e Shiu ci si avvale di argomentazioni di tipo probabilistico fondate sul principio di riflessione del moto Browniano in assenza di deriva e sulla trasformata di Esscher. Secondo l'approccio di Imai e Boyle si effettua un cambio di numerario e si adopera la distribuzione del minimo di un moto Browniano per giungere a una formula chiusa di valutazione che generalizza le espressioni ottenute in precedenza, offrendo interessanti spunti di sviluppo per il pricing di garanzie dina-

miche con monitoraggio nel tempo discreto e per l'analisi di dynamic fund protection di tipo americano. Nella sottosezione 2.2.4 si ricava una formula chiusa di valutazione per una dynamic fund protection standard perpetua, lavorando prima per via analitica e poi per via probabilistica. Nella sottosezione 2.2.5 si evidenzia empiricamente che il prezzo della garanzia standard è una funzione (per assegnati valori "tipici" dei parametri di valutazione) crescente e concava verso il basso rispetto alla maturity, crescente e concava verso l'alto rispetto al coefficiente di volatilità, decrescente rispetto alla forza di interesse risk-free, decrescente rispetto al valore iniziale del *naked fund*. Nella sezione 2.3 si determina la composizione del portafoglio replicante il payoff a scadenza dell'*upgraded fund*, fornendo così gli strumenti necessari per la costruzione concreta della garanzia. Nella sezione 2.4 si dimostra che non è mai conveniente l'esercizio anticipato di una dynamic fund protection americana scritta su di un titolo che non stacca dividendi. Nella sezione 2.5 si considera una dynamic fund protection standard in cui il valore del *protected portfolio* venga monitorato solo ad intervalli di tempo prefissato. In conseguenza della discretizzazione non è più possibile determinare una formula esatta di valutazione, tuttavia si può ottenere una buona approssimazione partendo dall'espressione in forma chiusa ricavata per il caso continuo ed applicando delle opportune correzioni. Infine, si rileva che la discretizzazione della garanzia riduce il suo prezzo in maniera sostanziale.

Nel **terzo capitolo** si espongono le principali problematiche legate alla valutazione di una dynamic fund protection standard con metodo Monte Carlo, nonché alcune soluzioni proposte in letteratura per porvi rimedio. L'analisi viene presentata prima nell'ambito di un modello di valutazione di tipo Black e Scholes, quindi è estesa alla classe di modelli di non arbitraggio di tipo Constant Elasticity of Variance (CEV). In conclusione, si evidenzia l'elevata sensitività del prezzo della garanzia dinamica rispetto a variazioni del parametro di elasticità e si ribadisce la necessità di definire in maniera appropriata il modello valutativo da adottare.

Nel **quarto capitolo** si caratterizza la dynamic fund protection con livello di garanzia esponenziale. Nella sezione 4.2 si evidenzia come il problema di pricing, in un modello di tipo Black e Scholes, possa essere ricondotto al caso di una dynamic fund

protection standard adottando un opportuno cambio di numerario. Nella sezione 4.3 si presenta un potente strumento di valutazione introdotto da [Gerber e Shiu (2003a)], che risulta molto utile ai fini del pricing di opzioni esotiche e di garanzie dinamiche: l'espressione in forma chiusa per la valutazione della funzione  $B(u,T)$ , definita come la trasformata di Laplace-Stieltjes del valore atteso dell'eccesso del massimo di un moto Browniano rispetto a un prefissato livello costante  $u$  ( $u > 0$ ) entro un orizzonte temporale finito  $[0,T]$ . Servendosi di tale strumento, si ricava una formula chiusa di valutazione per la dynamic fund protection con livello di garanzia esponenziale in un contesto più generale in cui sia ammessa sia la possibilità di titoli azionari che pagano dividendi, sia un'intensità istantanea di partecipazione ai rendimenti del fondo sottostante non unitaria. La stessa formula è ottenuta prima stimando il payoff a scadenza dell'investimento garantito, poi valutando il flusso di cassa necessario a finanziare l'acquisto delle quote aggiuntive di *primary fund*.

Nel **quinto capitolo** l'analisi è estesa al caso di una dynamic fund protection con livello di garanzia stocastico. Se ne presentano le caratteristiche generali e le possibili finalità operative. Si affronta il problema di valutazione in un modello di tipo Black e Scholes bivariato; ci si riconduce al caso univariato attraverso un opportuno cambio di misura di probabilità e si ricava una formula chiusa di pricing ricorrendo all'espressione per la valutazione della funzione  $B(u,T)$ .

Nel **sesto capitolo** si prospettano una serie di confronti fra dynamic fund protection ed altre forme di garanzia. Nella sezione 6.1 si paragona la protezione dinamica standard con la classica put option europea, dimostrando che il prezzo della prima tende ad essere il doppio di quello della seconda al decrescere dell'orizzonte contrattuale. Si evidenziano le differenze sostanziali fra i due tipi di opzioni, rilevando il carattere dinamico e path dependant della dynamic fund protection standard, a fronte della staticità della garanzia offerta dalla put option europea. Si estende quindi il confronto ad una put di tipo americano. Nella sezione 6.2 si presentano i principali tipi di opzioni lookback, evidenziandone caratteristiche e funzioni di payoff. Si fa uso dell'espressione di valutazione della funzione  $B(u,T)$  per ricavare le rispettive formule chiuse di pricing in un modello di tipo Black e Scholes. Si rilevano le profonde analo-

gie fra dynamic fund protection e opzioni lookback: in particolare si evidenzia come la garanzia dinamica abbia un'espressione formale analoga ad una lookback option di tipo call, con la quale condivide la capacità di partecipare agli extra rendimenti derivanti da un mercato rialzista; ma al contempo incorpori pure le caratteristiche sostanziali di una lookback option di tipo put, perchè protegge il valore dell'investimento dal *downside risk*. In fine, si propone un raffronto fra i prezzi delle differenti opzioni lookback e della dynamic fund protection standard. Nella sezione 6.3 si delinea un confronto fra tre diverse garanzie finanziarie di possibile interesse in ambito assicurativo: la garanzia di minimo a scadenza, la garanzia di rendimento minimo annuo e la dynamic fund protection. Si mostra che il valore della maturity guarantee è sempre inferiore a quello delle altre due, mentre il segno della relazione fra i prezzi della dynamic fund protection e della garanzia di rendimento minimo annuo non è univoco, bensì varia in funzione della durata contrattuale. Si motivano tali relazioni attraverso esemplificazioni stilizzate per l'andamento del fondo azionario sottostante.

Nel **settimo capitolo** si forniscono le linee guida per la costruzione di un investimento garantito con dynamic fund protection. Si propone una strategia a inseguimento di tipo delta hedging per la replicazione del payoff a scadenza del fondo garantito. Nell'ambito di un modello stock-bond, si evidenziano le operazioni di compra-vendita di titoli necessarie per la costruzione e la gestione di un prodotto di questo tipo in un mercato ideale. Si delineano i limiti concettuali ed operativi della strategia replicante presentata, descrivendo i principali problemi che si incontrano nel "tradurla" in un mercato reale.

In **appendice** si riportano i codici delle funzioni Visual Basic appositamente costruite per il calcolo del prezzo della put option europea, della garanzia cliquet, delle differenti lookback options e delle diverse dynamic fund protections, in un modello di valutazione di tipo Black e Scholes.



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>La Dynamic Fund Protection Standard</b>	<b>5</b>
2.1	Descrizione . . . . .	5
2.2	Formula chiusa di pricing in un mondo alla Black-Scholes . . . . .	8
2.2.1	L'approccio di Gerber e Pafumi per la formula di pricing . . . . .	11
2.2.2	L'approccio di Huang e Shiu per la formula di pricing . . . . .	14
2.2.3	L'approccio di Imai e Boyle per la formula di pricing . . . . .	20
2.2.4	Formula chiusa di pricing di una Dynamic Fund Protection Standard perpetua . . . . .	22
2.2.5	Risultanze numeriche per la formula chiusa di pricing di una Dynamic Fund Protection Standard . . . . .	24
2.3	Costruzione del portafoglio replicante . . . . .	33
2.4	Non convenienza dell'esercizio anticipato di una Dynamic Fund Protection Americana . . . . .	35
2.5	La Dynamic Fund Protection Standard con monitoraggio nel tempo discreto: una formula approssimata di pricing . . . . .	37
<b>3</b>	<b>Metodo Monte Carlo per il pricing di una Dynamic Fund Protection Standard</b>	<b>45</b>
3.1	Metodo Monte Carlo in un modello di valutazione di tipo Black-Scholes	46
3.2	Metodo Monte Carlo in un modello di valutazione di tipo Constant Elasticity of Variance (CEV) . . . . .	52

<b>4</b>	<b>La Dynamic Fund Protection Europea con livello di garanzia esponenziale</b>	<b>59</b>
4.1	Descrizione . . . . .	59
4.2	Formula chiusa di pricing in un mondo alla Black-Scholes . . . . .	60
4.3	Formula chiusa di pricing in un mondo alla Black-Scholes con dividendi e intensità istantanea di partecipazione non unitaria . . . . .	62
4.3.1	Un importante strumento di pricing: la formula chiusa di valutazione della funzione $B(u,T)$ . . . . .	64
4.3.2	La valutazione delle aspettative $C(u; \mu, \sigma)$ e $P(u; \mu, \sigma)$ . . . . .	66
4.3.3	Formula chiusa di pricing ottenuta attraverso la valutazione del valore atteso del payoff a scadenza dell'investimento garantito . . . . .	70
4.3.4	Formula chiusa di pricing ottenuta attraverso la valutazione del valore atteso delle quote aggiuntive di primary fund . . . . .	72
<b>5</b>	<b>La Dynamic Fund Protection Europea con livello di garanzia stocastico</b>	<b>77</b>
5.1	Descrizione . . . . .	77
5.2	Formula chiusa di pricing in un mondo alla Black-Scholes bivariato . . . . .	78
<b>6</b>	<b>Confronti fra Dynamic Fund Protection Europee e altre forme di garanzia</b>	<b>83</b>
6.1	Put Option e Dynamic Fund Protection Standard . . . . .	83
6.2	Lookback Option Europee e Dynamic Fund Protection Standard . . . . .	88
6.2.1	Lookback Option Europea di tipo Call con Fixed Strike . . . . .	88
6.2.2	Lookback Option Europea di tipo Put con Floating Strike . . . . .	91
6.2.3	Lookback Option Europea di tipo Put con Fixed Strike . . . . .	92
6.2.4	Lookback Option Europea di tipo Call con Floating Strike . . . . .	94
6.2.5	High-Low Option . . . . .	95
6.2.6	La Dynamic Fund Protection Standard e le Lookback Option Europee di tipo Put e Call . . . . .	95
6.3	Confronti tra garanzie finanziarie tipiche in ambito assicurativo . . . . .	101

<b>7</b>	<b>Delta Hedging di un investimento garantito con Dynamic Fund Protection Standard in un modello Stock-Bond</b>	<b>109</b>
<b>A</b>	<b>Funzioni Visual Basic per il pricing di alcuni tipi di opzione in un modello di valutazione di tipo Black e Scholes</b>	<b>121</b>
A.1	Funzione per il calcolo del prezzo di una Put Option Europea avente strike price che cresce con legge esponenziale . . . . .	121
A.2	Funzione per il calcolo del prezzo di una Garanzia di Rendimento Minimo Annuo (Cliquet Guarantee), in un modello di tipo Black e Scholes che non preveda dividendi . . . . .	123
A.3	Funzione per il calcolo del prezzo di una Lookback Option Europea di tipo Call con Fixed Strike (L.O. Call on Maximum) . . . . .	124
A.4	Funzione per il calcolo del prezzo di una Lookback Option Europea di tipo Put con Floating Strike (L.O. Put Standard) . . . . .	127
A.5	Funzione per il calcolo del prezzo di una Lookback Option Europea di tipo Put con Fixed Strike (L.O. Put on Minimum) . . . . .	129
A.6	Funzione per il calcolo del prezzo di una Lookback Option Europea di tipo Call con Floating Strike (L.O. Call Standard o L.O. Call on Minimum) . . . . .	132
A.7	Funzione per il calcolo del prezzo di una High-Low Option Europea . . . . .	134
A.8	Funzione per il calcolo del prezzo di una Dynamic Investment Fund Protection Europea con livello di garanzia esponenziale e participation rate non unitario . . . . .	134
A.9	Funzione per il calcolo del prezzo di una Dynamic Investment Fund Protection Standard . . . . .	136
A.10	Funzione per il calcolo del prezzo di una Dynamic Investment Fund Protection Standard perpetua . . . . .	136
A.11	Funzione per il calcolo del prezzo di una Dynamic Investment Fund Protection Europea con livello di garanzia esponenziale . . . . .	137

A.12 Funzione per il calcolo del prezzo di una Dynamic Investment Fund Protection con livello di garanzia stocastico in un modello di tipo Black e Scholes bivariato . . . . .	137
--	-----

# Elenco delle tabelle

2.1	Evoluzione del prezzo di una Dynamic Fund Protection Standard al variare della maturity (T) e dello strike price (K) per una fissata forza di interesse risk-free $r = 0.04$ e una volatilità $\sigma = 0.2$ . . . . .	26
2.2	Evoluzione del prezzo di una Dynamic Fund Protection Standard al variare della maturity (T) e dello strike price (K) per una fissata forza di interesse risk-free $r = 0.01$ e una volatilità $\sigma = 0.2$ . . . . .	27
2.3	Evoluzione del prezzo di una Dynamic Fund Protection Standard al variare della maturity (T) e dello strike price (K) per una fissata forza di interesse risk-free $r = 0.04$ e una volatilità $\sigma = 0.25$ . . . . .	29
2.4	Evoluzione del prezzo di una Dynamic fund protection standard al variare della maturity (T) e del prezzo iniziale del naked fund (s) per un fissato floor $K = 80$ , una forza di interesse risk-free $r = 0.04$ e una volatilità $\sigma = 0.2$ . . . . .	32
2.5	Prezzi di alcune Dynamic Fund Protections Standard con differenti frequenze di monitoraggio, valutati in un modello di tipo Black e Scholes con metodo Monte Carlo e con formula approssimata (2.86) . . . . .	42
2.6	Prezzi di alcune Dynamic Fund Protections Standard con differenti frequenze di monitoraggio, valutati con metodo Monte Carlo in modelli di tipo Constant Elasticity of Variance (CEV) . . . . .	44
3.1	Stima del prezzo di una Dynamic Fund Protection Standard con metodo Monte Carlo standard . . . . .	50

3.2	Stima del prezzo di una Dynamic Fund Protection Standard con metodo Monte Carlo e correzione di <i>Andersen e Brotherton-Ratcliffe</i> (ABR)	51
3.3	Stima del prezzo di una Dynamic Fund Protection Standard con metodo Monte Carlo e correzione ABR in un modello valutativo CEV . .	54
3.4	Stima del prezzo di una Dynamic Fund Protection Standard con metodo Monte Carlo, correzione ABR e <i>control variate</i> in un modello valutativo CEV . . . . .	55
3.5	Sensitività del prezzo di una Dynamic Fund Protection Standard alle variazioni del parametro di elasticità ( $\alpha$ ) in un modello valutativo CEV	56
6.1	Confronto fra i prezzi di una Dynamic Fund Protection Standard, di una Put Option Europea e di una Put Option Americana al variare dello strike price (K) . . . . .	85
6.2	Rapporto fra i prezzi di una Dynamic Fund Protection Standard e di una Put Option Europea al variare della maturity (T) e dello strike price (K) . . . . .	87
6.3	Confronto fra i prezzi di differenti Lookback Options Europee e di una Dynamic Fund Protection Standard, al variare della maturity (T) e dello strike price (K). . . . .	97
6.4	Confronto fra i prezzi di differenti Lookback Options Europee e di una Dynamic Fund Protection Standard, al variare della maturity (T) e dello strike price (K), in relazione ad un mercato maggiormente volatile.	99
6.5	Confronto fra i prezzi di una Garanzia a Scadenza, di una Garanzia Annuale e di una Dynamic Fund Protection al variare della maturity (T)	105
7.1	Confronto fra il capitale investito per l'acquisto di una quota di fondo assicurato con dynamic fund protection standard (A(s, T)) ed il relativo capitale garantito (K) . . . . .	112

# Elenco delle figure

2.1	Evoluzione del valore dell'upgraded fund $\tilde{F}(t)$ in funzione dell'andamento del naked fund $S(t)$ e del livello di garanzia $K$ . . . . .	6
2.2	Prezzo di una Dynamic Fund Protection Standard in funzione del Floor ( $K$ ) e della Maturity ( $T$ ), per un fissato set di parametri $r = 0.04$ , $\sigma = 0.20$ , $s = 100$ . . . . .	25
2.3	Decremento del prezzo di una Dynamic Fund Protection Standard al crescere della forza di interesse risk-free ( $r$ ), per un fissato set di parametri $\sigma = 0.20$ , $s = 100$ , $T = 5$ . . . . .	28
2.4	Incremento del prezzo di una Dynamic Fund Protection Standard al crescere del coefficiente di volatilità ( $\sigma$ ), per un fissato set di parametri $r = 0.04$ , $s = 100$ , $T = 5$ . . . . .	30
2.5	Decremento del prezzo della Dynamic Fund Protection Standard al crescere del valore iniziale del naked fund ( $s$ ), per un fissato set di parametri $r = 0.04$ , $\sigma = 0.02$ , $K = 80$ . . . . .	31
6.1	Confronto fra i prezzi di alcune lookback options e della dynamic fund protection standard, al variare della maturity ( $T$ ), per un fissato set di parametri $r = 0.04$ , $\sigma = 0.10$ , $s = 100$ , $K = 100$ , $\zeta = 0$ . . . . .	98
6.2	Confronto fra i prezzi di alcune lookback options e della dynamic fund protection standard, al variare della maturity ( $T$ ), per un fissato set di parametri $r = 0.04$ , $\sigma = 0.25$ , $s = 100$ , $K = 100$ , $\zeta = 0$ . . . . .	100

6.3 Confronto fra i prezzi di una Maturity Guarantee, di una Cliquet Guarantee e di una Dynamic Fund Protection, al variare della maturity (T), per un fissato set di parametri  $r = 0.04$ ,  $\sigma = 0.2$ ,  $\gamma = 0.03$ ,  $s = 100$ ,  $K = 100$ ,  $\zeta = 0$  . . . . . 107

# Keywords and Phrases:

- Black e Scholes, modello di valutazione di tipo
- Coefficiente di deriva
- Coefficiente di volatilità
- Constant Elasticity of Variance (CEV), classe di modelli di valutazione
- Delta hedging
- Dynamic fund protection
- Floor
- Formula chiusa di pricing
- Fondo Azionario
- Garanzia Cliquet
- Lookback option
- Martingala
- Monte Carlo, metodo di valutazione di tipo
- Moto Browniano geometrico
- Naked fund
- Primary fund

- Protected fund
- Put option
- Risk neutral, misura di probabilità
- Stock-Bond, modello
- Trasformata di Laplace-Stieltjes del valore atteso dell'eccesso del massimo di un moto Browniano
- Upgraded fund

# Capitolo 1

## Introduzione

Nell'attività di *asset-management* diviene sempre più importante il concetto di garanzia finanziaria: a partire dai piccoli risparmiatori, fino ad arrivare ai grandi investitori istituzionali come le compagnie di assicurazione o i fondi di investimento, vi è una sempre maggiore richiesta di protezione contro il cosiddetto *downside risk*. In particolare questa tesi focalizza il problema in un contesto assicurativo.

Con l'espansione dei prodotti equity-linked, caratterizzati dall'opportunità di forti guadagni, ma anche dal rischio di forti perdite in conto capitale, si è parallelamente sviluppata una grande varietà di garanzie finanziarie che, previo pagamento di un prefissato corrispettivo, limitano o annullano il rischio di prezzo preservando tuttavia l'opportunità di guadagno.

Un esempio significativo può essere quello delle rendite equity-indexed con garanzia di minimo<sup>1</sup>: polizze assicurative di rendita differita dove il valore della rata (attraverso il montante) dipende dalle performance di un qualche portafoglio o indice azionario di riferimento, come ad esempio l'indice Standard and Poor's (S&P) 500. Nella loro forma più semplice questi contratti si accompagnano ad una garanzia di

---

<sup>1</sup>Per approfondimenti sulle garanzie finanziarie connesse a rendite equity-indexed si vedano [American Academy of Actuaries (AAA) (1997)], [Lee (2002)], [Mitchell e Slater (1996)], [Streiff e Di Biase (1999)], [Tiong (2000a)] e [Tiong (2000b)]. In particolare in [Lee (2002)], [Tiong (2000a)] e [Tiong (2000b)] è trattato il pricing di alcuni tipi di garanzie in un modello di valutazione di tipo Black-Scholes.

rendimento minimo a scadenza e corrispondono ad un investimento in un portafoglio composto da un paniere di titoli azionari (il sottostante) e da una put option europea sul paniere stesso (la garanzia).

In questo modo, al termine del periodo di differimento, l'assicurato vedrà in ogni caso preservato il valore minimo del montante da convertire in rendita, godrà degli eventuali extra rendimenti derivanti dal surplus del valore del paniere rispetto al prefissato strike price dell'opzione, ma non potrà in alcun modo approfittare delle buone performance realizzate dal sottostante nel corso del contratto giacché la garanzia acquistata è di tipo statico: riguarda cioè il solo istante di esercitabilità dell'opzione. Per sopperire a questo inconveniente alla classiche opzioni plain vanilla sono state via via sostituite una vasta gamma di garanzie finanziarie sempre più complesse ed "invitanti" per il cliente. È il caso ad esempio delle "lookback option standard" di tipo call o put: opzioni in cui lo strike price è fissato solo nell'istante di esercizio ed è dato dal prezzo del sottostante più vantaggioso per il sottoscrittore lungo l'intero orizzonte contrattuale: nel caso di una call è quindi il valore più basso raggiunto, nel caso di una put il più alto. Questo tipo di garanzia comporta una grande opportunità per l'assicurato e, simmetricamente, un forte rischio per l'impresa. Per questo è richiesto un premio molto elevato che, nella maggior parte dei casi, ne scoraggia l'acquisto. Alternative più economiche sono offerte dalle cosiddette "fractional lookback option" in cui lo strike price è fissato in un'aliquota del valore minimo (nel caso call) o massimo (nel caso put) raggiunto dal prezzo del sottostante nel corso del contratto.

Tutt'altro genere di garanzie sono invece quelle ottenute con delle "reset option"<sup>2</sup>: opzioni in cui è richiesto all'assicurato di compiere delle scelte sulla strategia di esercizio, investendolo così del problema di determinazione della strategia ottimale. Questo tipo di prodotti, nati sotto la spinta del mercato, hanno creato grossi problemi di valutazione alle compagnie di assicurazione: emblematica in tal senso è stata l'esperienza canadese in cui con appositi studi si è evidenziato che i premi richiesti dalle imprese erano del tutto inadeguati rispetto ai rischi assunti. Per questo il "Canadian Insti-

---

<sup>2</sup>Per approfondimenti sulle reset option si vedano [Boyle e Hardy (1996)], [Boyle e Hardy (1998)], [Falloon (1999)], [Hardy (1999a)] e [Hardy (1999b)].

tute of Actuaries” ha sviluppato delle apposite linee guida<sup>3</sup> per il loro pricing e la riservazione.

Anche dal lato del cliente poi la bontà è spesso solo illusoria: infatti, data la complessità delle scelte da compiere, la determinazione della strategia ottimale è al di fuori della portata dell’assicurato medio.

Appare dunque evidente la necessità di sviluppare una forma di garanzia che coniughi assieme:

1. La sicurezza di un livello minimo garantito per il valore dell’investimento.
2. L’opportunità di godere delle buone performance realizzate dal sottostante lungo l’intero orizzonte contrattuale.
3. La non eccessiva onerosità.
4. L’automaticità della garanzia, senza si pongano scelte sofisticate a carico del cliente.

Per rispondere a queste esigenze è stato introdotto il concetto di ”dynamic fund protection”<sup>4</sup> (o ”dynamic fund guarantee”).

Si consideri un investimento in un fondo azionario (detto *naked fund*, o *primary fund*) garantito da una ”dynamic fund protection option” che assicuri che il valore complessivo dell’investimento (detto *protected fund*, o *upgraded fund*, o *guaranteed fund*) non si deprezzi mai al di sotto di un prefissato livello (il *floor*) in nessun istante della durata contrattuale: in pratica ogni qualvolta il valore del portafoglio scende al livello del minimo garantito, il capitale del fondo viene istantaneamente incrementato di modo che non sia mai varcata la soglia minima. L’*upgraded fund* viene perciò ad essere costituito dalle quote del *primary fund* inizialmente acquistate a carico dell’assicurato, più le eventuali quote addizionali accreditate dalla compagnia al cliente nel rispetto della garanzia ceduta. In questo modo si estende il concetto di put option fornendo una garanzia di minimo nel tempo continuo.

---

<sup>3</sup>Si veda [Task force report (2000)].

<sup>4</sup>Si vedano [Gerber e Pafumi (2000a)], [Gerber e Shiu (1998)] e [Gerber e Shiu (1999)].

La copertura interviene automaticamente, senza che l'investitore si debba preoccupare della strategia di esercizio e senza che venga penalizzato nel caso di un mercato fortemente volatile: infatti, le perdite al di sotto del livello garantito sono immediatamente compensate dall'intervento della compagnia e l'assicurato può godere in ogni istante di un'eventuale fase rialzista del mercato, nella quale realizzerà un'intensità istantanea di rendimento del tutto analoga a quella del *naked fund*, almeno fintanto che non sia eventualmente raggiunto il livello del *floor*.

Un'indesiderabile conseguenza è che il valore finale del *protected portfolio* è fortemente path dependent: cioè dipende dall'andamento del sottostante lungo l'intera durata contrattuale. In particolare si hanno risultati molto diversi a seconda che il mercato realizzi prima i ribassi e poi i rialzi, piuttosto che prima i rialzi e poi i ribassi: nel primo caso infatti la garanzia compensa le perdite iniziali e permette di partecipare ai susseguenti guadagni, nel secondo invece i profitti sono erosi dalle successive perdite, seppur resti sempre garantito il livello minimo del *floor*. D'altra parte questa accentuata sensitività è un male necessario per contenere il costo complessivo dell'opzione rendendola così concretamente appetibile.

Un'analisi più approfondita richiede l'introduzione di una serie di notazioni formali per le quali si rimanda ai successivi capitoli. In questa introduzione restano solo da segnalare alcune definizioni di carattere tecnico. A seconda che l'esercizio dell'opzione sia consentito nella sola data di scadenza (*maturity date*) oppure anche in un qualunque istante intermedio si parla rispettivamente di "dynamic fund protection" europea o americana. La durata del contratto può essere limitata o illimitata; in questo secondo caso si parla di *dynamic fund protection* perpetua. Il livello garantito può essere un valore costante; ma anche una funzione esponenziale, deterministica e crescente rispetto al tempo; oppure un importo stocastico dipendente dall'andamento di un secondo indice azionario (o titolo) di riferimento.

## Capitolo 2

# La Dynamic Fund Protection Standard

### 2.1 Descrizione

Si consideri un investitore che al tempo  $t = 0$  acquista una quota di un fondo di investimento (*naked fund*) il cui valore sia garantito da una dynamic fund protection option di tipo europeo con scadenza in  $T > 0$  (maturity) e livello di garanzia costante  $K > 0$  (*floor*). Questa forma di garanzia è nota in letteratura come dynamic fund protection standard.

Si indichi con  $S(t)$  il valore della quota del fondo al tempo  $t$ . L'idea è quella di sostituire al valore originario  $S(t)$  un valore eventualmente maggiorato  $\tilde{F}(t)$  che non possa mai scendere al di sotto del livello garantito  $K$  (con  $0 < K \leq S(0)$ ) in nessun istante  $t$  ricompreso entro la durata contrattuale  $[0, T]$ . Il processo stocastico che rappresenta l'evoluzione del valore del *protected fund*  $\{\tilde{F}(t), 0 \leq t \leq T\}$  pertanto è tale che:

- $\tilde{F}(0) = S(0)$
- L'intensità istantanea di rendimento di  $\tilde{F}(t)$  è identica a quella di  $S(t)$  in ogni intervallo temporale in cui sia  $\tilde{F}(t) > K$ .
- Ogni volta che il valore di  $\tilde{F}(t)$  dovesse scendere al di sotto del livello del *floor*  $K$ ,

verrebbe istantaneamente incrementato di un importo sufficiente a riportarlo esattamente al livello  $K$ , di modo che tale soglia minima non possa mai essere varcata nel corso del contratto.

Si veda il grafico 2.1 in cui si propone un parallelo fra una possibile realizzazione del *naked fund* e la corrispondente traiettoria dell'*upgraded fund*.

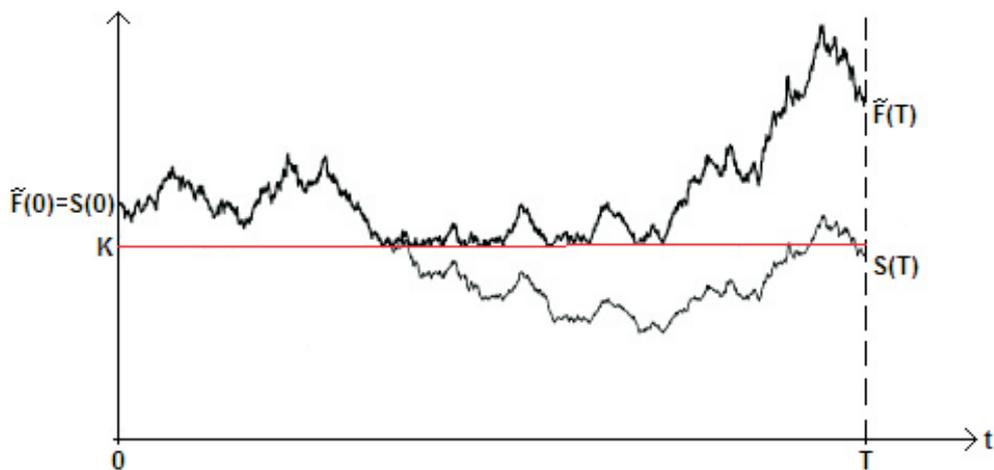


Figura 2.1: Evoluzione del valore dell'*upgraded fund*  $\tilde{F}(t)$  in funzione dell'andamento del *naked fund*  $S(t)$  e del livello di garanzia  $K$ .

Per capire il funzionamento operativo di questa garanzia si definisca il processo  $\{n(t), 0 \leq t \leq T\}$  che descrive l'evoluzione del numero delle quote di *primary fund* accreditate sul conto dell'assicurato.

Il valore del *protected fund* è dato dal prodotto fra il numero di quote riconosciute moltiplicato per il valore di ciascuna di esse, cioè

$$(2.1) \quad \tilde{F}(t) = S(t) n(t).$$

All'inizio l'investitore dispone di un'unica quota:

$$(2.2) \quad n(0) = 1.$$

Nel corso del contratto la compagnia deve eventualmente accreditare delle unità addizionali sul conto dell'assicurato in modo da garantire che il controvalore complessivo dell'*upgraded fund* sia sempre non inferiore al *floor*. Queste unità, una volta riconosciute, non possono in alcun modo essere revocate, perciò

(2.3)  $n(t)$  è una funzione non decrescente di  $t$ .

Dovendo essere rispettata la garanzia di minimo  $\tilde{F}(t) \geq K$ , per la (2.1) si ha che

(2.4)  $S(t)n(t) \geq K$  per ogni  $0 \leq t \leq T$ .

Da queste condizioni si può ricavare un'interessante espressione formale per il payoff a scadenza dell'investimento garantito con dynamic fund protection standard: dalla (2.3) e (2.4) segue infatti che

$$n(T) \geq n(u) \geq \frac{K}{S(u)} \quad \text{per } 0 \leq u \leq T,$$

perciò

$$n(T) \geq \max_{0 \leq u \leq T} \frac{K}{S(u)}.$$

Tenuto conto della (2.2), si ha

$$(2.5) \quad n(T) \geq \max \left\{ 1, \max_{0 \leq u \leq T} \frac{K}{S(u)} \right\}.$$

Esiste un numero infinito di funzioni  $n(T)$  che soddisfa la condizione (2.5). Fra queste la scelta ottimale è data da quella che comporta il minor onere a carico della compagnia; vale a dire la funzione che richiede di accreditare il minor numero di quote possibile al cliente, sotto il vincolo imposto dalla (2.5); perciò

$$(2.6) \quad n(T) = \max \left\{ 1, \max_{0 \leq u \leq T} \frac{K}{S(u)} \right\}.$$

Ricordando la (2.1) si ottiene infine che il payoff a scadenza dell'investimento garantito con dynamic fund protection standard è dato dall'equazione

$$(2.7) \quad \tilde{F}(T) = S(T) \max \left\{ 1, \max_{0 \leq u \leq T} \frac{K}{S(u)} \right\}.$$

Il principale problema di cui ci si occuperà nelle seguenti sezioni è quello di prezzare questo tipo di opzione e di delineare una strategia di gestione concreta per implementarla.

Qui resta solo da evidenziare la relazione probabilistica esistente fra i processi stocastici che descrivono l'evoluzione del valore dell'*upgraded fund*  $\{\tilde{F}(t)\}$  e del suo sottostante  $\{S(t)\}$ . Si considerino i processi trasformati:

$$\left\{ U(t) = \ln \left( \frac{S(t)}{K} \right) \right\}, \quad \left\{ Y(t) = \ln \left( \frac{\tilde{F}(t)}{K} \right) \right\}.$$

Come suggerito in [Gerber e Pafumi (2000a)], sezione 1; oppure in [Imai e Boyle (2001)], sezione 2; il processo  $\{Y(t)\}$  può essere ottenuto dal processo  $\{U(t)\}$  introducendo una barriera riflettente in zero.

## 2.2 Formula chiusa di pricing in un mondo alla Black-Scholes

Si consideri un investimento in una quota di un fondo, il cui valore sia garantito da una dynamic fund protection standard con maturity in  $T$  e *floor*  $K$ . Alla scadenza si ha che:

$$(2.8) \quad \tilde{F}(T) = S(T) + Z(T)$$

dove  $\tilde{F}(T)$  è il payoff a scadenza dell'investimento coperto dalla garanzia dinamica (*protected fund*);  $Z(T)$  è il payoff a scadenza della sola garanzia (dynamic fund protection option) e  $S(T)$  è il valore in  $T$  di una quota del fondo non garantito sottostante (*naked fund*). L'istante di valutazione sia posto in  $t = 0$ . Si indichi con  $A(s,T)$  il valore in zero del payoff a scadenza dell'investimento garantito  $\tilde{F}(T)$  e con  $V(s,T)$  il prezzo della sola garanzia dinamica  $Z(T)$ . Si ha dunque che al tempo zero vale la relazione:

$$(2.9) \quad A(s,T) = s + V(s,T)$$

con  $s = S(0)$ . Il prezzo (in zero) della dynamic fund protection è pertanto banalmente ottenibile come:

$$(2.10) \quad V(s,T) = A(s,T) - s.$$

Si ipotizzi un modello di valutazione di tipo Black e Scholes caratterizzato dalle seguenti ipotesi:

1. Il mercato è aperto con continuità.
2. Il mercato è perfetto, cioè:
  - sono assenti costi di transazione e gravami fiscali,
  - i titoli sono infinitamente divisibili,
  - sono consentite vendite allo scoperto,
  - gli agenti sono massimizzatori di profitto e price taker.
3. Sono esclusi arbitraggi non rischiosi.
4. La struttura a termine dei tassi di interesse (non rischiosi) è deterministica e piatta a un livello di intensità istantanea di interesse  $r$ .
5. Dato lo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  e la sua filtrazione  $\{\mathcal{F}_t; t \in [0, T]\}$ , il valore del *naked fund*  $S(t)$  evolve secondo un moto Browniano geometrico<sup>1</sup>

$$(2.11) \quad S(t) = S(0) e^{X(t)}$$

con

$$(2.12) \quad X(t) = \mu t + \sigma W(t)$$

---

<sup>1</sup>Questa schematizzazione è adeguata per rappresentare un fondo di riferimento di tipo azionario. Per considerare anche altre componenti di investimento come obbligazioni in valuta, obbligazioni emesse da imprese, azioni quotate sui mercati esteri, derivati di vario genere; è necessario aumentare la complessità del modello, effettuandone opportune estensioni ed aumentando il numero delle fonti di incertezza.

dove  $\{W(t)\}$  è un processo di Wiener standard e le costanti  $\mu$  e  $\sigma$  sono rispettivamente il coefficiente di deriva e di diffusione del moto Browniano  $X(t)$  rispetto alla misura di probabilità naturale  $P^2$ .

In base al classico criterio del *net present value* (o del *discounted cash flow*) il prezzo  $A(s,T)$  è valutabile come<sup>3</sup>:

$$(2.13) \quad A(s,T) = e^{-\delta T} E_0 [\tilde{F}(T)]$$

in cui  $\tilde{F}(T)$  è dato dalla (2.7) e  $\delta$  è un'assegnata forza di interesse (ipotizzata deterministica e costante) risultante dalla somma dell'intensità istantanea di rendimento risk-free  $r$  e di un opportuno premio per il rischio. Per valutare  $A(s,T)$  si dovrebbero quindi stimare i parametri  $\mu$  e  $\sigma$  su una serie storica di dati, usando poi la forza di interesse  $\delta$  per scontare il payoff atteso. Tuttavia il premio per il rischio richiesto dall'investitore dipende dalla sua avversione al rischio: benchè questa sia ben definibile a livello teorico, a livello pratico è difficile se non impossibile da valutare.

L'intuizione sviluppata nel fondamentale articolo di [Black e Scholes (1973)] è che ai fini del pricing non serve stimare separatamente questo premio: attraverso un'opportuna modifica della misura di probabilità utilizzata, la rischiosità può essere considerata implicitamente nell'evoluzione della fonte di incertezza che guida il valore del titolo. Sfruttando l'argomentazione di *hedging* e il principio di non arbitraggio è dunque possibile determinare una misura di probabilità risk-neutral rispetto alla quale il payoff atteso del contratto è valutabile alla stregua di un titolo privo di rischio e va perciò scontato utilizzando la forza di interesse risk-free  $r$ . Dal punto di vista dell'utilizzazione pratica, questo criterio (quando applicabile) fornisce garanzie di maggiore oggettività essendo per sua natura costruito sulla logica del pricing a valori di mercato.

---

<sup>2</sup>L'evoluzione del sottostante  $S(t)$  e del moto Browniano  $X(t)$  possono essere equivalentemente espresse in termini di equazioni differenziali stocastiche come  $dS(t) = (\mu + \frac{\sigma^2}{2})S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$  e  $dX(t) = \mu dt + \sigma dW(t)$ .

<sup>3</sup>Quando ciò non dia origine ad ambiguità, si userà la notazione semplificata  $E_t[X]$  per indicare la media della variabile aleatoria  $X$  condizionata alla conoscenza di tutta l'informazione rilevante al tempo  $t$ ; quindi per l'ipotesi di markovianità  $E_t[X] = E[X | \mathcal{F}_t]$ .

Si ha quindi che il prezzo  $A(s,T)$  è valutabile come:

$$(2.14) \quad A(s,T) = e^{-rT} E_0^Q [\tilde{F}(T)]$$

dove  $Q$  denota la misura di probabilità risk-neutral ottenuta sostituendo al coefficiente di deriva originario  $\mu$  della (2.12), il coefficiente di deriva corretto per il rischio  $\mu^*$ .

Ipotizzando che il *primary fund* non paghi dividendi, o equivalentemente che tutti gli eventuali dividendi siano istantaneamente reinvestiti nel fondo stesso, si deve porre:

$$(2.15) \quad \mu^* = r - \frac{1}{2}\sigma^2.$$

Si osservi che nella nuova misura di probabilità  $Q$  il processo di prezzo scontato  $\{e^{-rt}S(t)\}$  è una martingala<sup>4</sup> e che, in base alla (2.15), ai fini del pricing non è richiesta la specificazione dello *yield-to-maturity* istantaneo atteso  $\mu^5$ .

## 2.2.1 L'approccio di Gerber e Pafumi per la formula di pricing

Si definisca

$$(2.16) \quad \kappa = \ln \left( \frac{S}{K} \right)$$

il valore iniziale comune ad entrambi i processi  $\left\{ \ln \left( \frac{S(t)}{K} \right) \right\}$  e  $\left\{ \ln \left( \frac{\tilde{F}(t)}{K} \right) \right\}$ . Si consideri la variabile aleatoria  $X = \ln \left( \frac{\tilde{F}(T)}{K} \right)$ . Sia

$$p(x; \kappa, T) = \Pr \{ X \in [x, x + dx] \} \quad \text{per } x > 0$$

la sua distribuzione di probabilità. Seguendo l'approccio adottato da Gerber e Pafumi<sup>6</sup> si può calcolare direttamente l'aspettativa (2.14) sfruttando il fatto che la densità

<sup>4</sup>La misura di probabilità risk-neutral  $Q$  è anche nota come misura di martingala equivalente. Per approfondimenti si vedano [Harrison e Kreps (1979)] e [Harrison e Pliska (1981)].

<sup>5</sup>Date le definizioni (2.11) e (2.12) si ha che  $\mu = E_t \left[ \frac{d \log S(t)}{dt} \right]$  assume il significato di *yield-to-maturity* istantaneo atteso di  $S(t)$  e non quello di intensità istantanea di rendimento atteso che, sulla base del lemma di Ito, è invece uguale ad  $E_t \left[ \frac{dS(t)}{S(t)dt} \right] = \mu + \frac{\sigma^2}{2}$ .

<sup>6</sup>Si veda [Gerber e Pafumi (2000a)].

di probabilità  $p(x; \kappa, T)$  è una funzione nota: infatti, in base alla formula (91), Sezione 5.7 in [Cox e Miller (1965)] si ha che:

$$(2.17) \quad p(x; \kappa, T) = n(x; \kappa + \mu^*T, \sigma^2T) + \left(\frac{K}{S}\right)^{R-1} n(x; -\kappa + \mu^*T, \sigma^2T) - (R-1)e^{(R-1)x} \left[1 - \Phi\left(\frac{x + \kappa + \mu^*T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right]$$

dove

$$(2.18) \quad n(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

è la distribuzione di probabilità di una variabile normale con media  $\mu$  e varianza  $\sigma^2$ ,

$$(2.19) \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

è la funzione di ripartizione di una normale standard, ed

$$(2.20) \quad R = \frac{2r}{\sigma^2}$$

è una definizione di comodo che semplifica notevolmente la notazione formale.

Si consideri il payoff aleatorio del *protected fund* a scadenza  $\tilde{F}(T)$  come trasformata della variabile casuale  $X$ . Si ha che:

$$\tilde{F}(T) = K e^X$$

Si può dunque esprimere la (2.14) in forma integrale come:

$$(2.21) \quad A(s, T) = e^{-rT} E_0^Q[\tilde{F}(T)] = K e^{-rT} \int_0^\infty e^x p(x; \kappa, T) dx$$

Sostituendo la (2.17) nella (2.21) si ottiene che il prezzo  $A(s, T)$  è dato dalla somma di tre addendi:

$$(2.22) \quad A(s, T) = I + II + III$$

con

$$(2.23) \quad I = K e^{-rT} \int_0^\infty e^x n(x; \kappa + \mu^*T, \sigma^2T) dx,$$

$$(2.24) \quad II = K e^{-rT} \left(\frac{K}{S}\right)^{R-1} \int_0^\infty e^x n(x; -\kappa + \mu^*T, \sigma^2T) dx,$$

$$(2.25) \quad \text{III} = -K(R-1) e^{-rT} \int_0^\infty e^{Rx} \left[ 1 - \Phi\left(\frac{x + \kappa + \mu^*T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \right] dx.$$

Per la risoluzione di questi tre integrali si può ricorrere alle note relazioni riguardanti variabili aleatorie con distribuzione normale:

$$(2.26) \quad \int_0^\infty e^{cx} n(x; \mu, \sigma^2) dx = e^{\mu c + \frac{1}{2}\sigma^2 c^2} \Phi\left(\frac{\mu + c\sigma^2}{\sigma}\right) \quad \text{per } c \in \mathbb{R}$$

e

$$(2.27) \quad \int_0^\infty e^{cx} \left[ 1 - \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \right] dx = -\frac{1}{c} \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) + \frac{1}{c} e^{\mu c + \frac{1}{2}\sigma^2 c^2} \times \\ \Phi\left(\frac{\mu + c\sigma^2}{\sigma}\right) \quad \text{per } c \neq 0$$

la cui dimostrazione<sup>7</sup> deriva direttamente dalla definizione delle funzioni (2.18) e (2.19) e dalle relazioni

$$\int_0^\infty n(x; \mu, \sigma^2) dx = \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)$$

e

$$e^{cx} n(x; \mu, \sigma^2) = e^{\mu c + \frac{1}{2}\sigma^2 c^2} n(x; \mu + c\sigma^2, \sigma^2).$$

Ponendo  $c = 1$  nella (2.26) ed applicando alla (2.23) si ottiene:

$$\text{I} = K e^{-rT} e^{\kappa + \mu^*T + \frac{1}{2}\sigma^2 T} \Phi\left(\frac{\kappa + \mu^*T + \sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right).$$

Sostituendo le rispettive definizioni (2.15) e (2.16) a  $\mu^*$  e  $\kappa$  si può semplificare ottenendo:

$$\text{I} = s \Phi\left(\frac{\kappa + rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right).$$

In maniera analoga, dalla (2.24) si ottiene

$$\text{II} = K \left(\frac{K}{s}\right)^R \Phi\left(\frac{-\kappa + rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right).$$

---

<sup>7</sup>Per una dimostrazione esplicita si veda la determinazione delle formule A.1 ed A.2 nell'appendice in [Gerber e Pafumi (2000a)]. Una dimostrazione alternativa è data anche dalla successiva formula (2.45) in cui si pongano  $k=0$  e  $t=1$ .

Tenendo conto delle definizioni (2.15) e (2.16) per  $\mu^*$  e  $\kappa$ , si ponga  $c = R$  nella (2.27) e si applichi alla (2.25) ottenendo:

$$\text{III} = K e^{-rT} \left(1 - \frac{1}{R}\right) \Phi\left(\frac{-\kappa - rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - K \left(1 - \frac{1}{R}\right) \left(\frac{K}{s}\right)^R \times \\ \Phi\left(\frac{-\kappa + rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right).$$

Sommando questi tre termini si ricava l'espressione esplicita per il prezzo (al tempo zero) dell'investimento garantito con dynamic fund protection:

$$(2.28) \quad A(s,T) = K e^{-rT} \left(1 - \frac{1}{R}\right) \Phi\left(\frac{-\kappa - rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right) + \\ \frac{K}{R} \left(\frac{K}{s}\right)^R \Phi\left(\frac{-\kappa + rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right) + s \Phi\left(\frac{\kappa + rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right).$$

Ricordando che la funzione di ripartizione di una normale standard è tale che  $\Phi(x) - 1 = -\Phi(-x)$ , si sostituisca la (2.28) nella (2.10) ottenendo che il prezzo (in zero) della sola garanzia è:

$$(2.29) \quad V(s,T) = K e^{-rT} \left(1 - \frac{1}{R}\right) \Phi\left(\frac{-\kappa - rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right) + \\ \frac{K}{R} \left(\frac{K}{s}\right)^R \Phi\left(\frac{-\kappa + rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - s \Phi\left(\frac{-\kappa - rT - \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

dove

$$s = S(0), \quad \kappa = \ln\left(\frac{s}{K}\right) \quad \text{e} \quad R = \frac{2r}{\sigma^2}.$$

## 2.2.2 L'approccio di Huang e Shiu per la formula di pricing

Un interessante approccio alternativo per il problema di pricing di una dynamic fund protection standard è quello proposto da Huang e Shiu<sup>8</sup>. Questo conduce allo stesso risultato già ottenuto in (2.29) utilizzando tuttavia argomentazioni di tipo probabilistico che permettono di evitare la risoluzione di una lunga serie di integrali. I principali strumenti adottati sono il principio di riflessione del moto Browniano in assenza di deriva<sup>9</sup> e la trasformata di Esscher<sup>10</sup>.

<sup>8</sup>Si veda la disamina in [Gerber e Pafumi (2000b)] sull'articolo di [Gerber e Pafumi (2000a)].

<sup>9</sup>Si veda [Orsingher (1997)], sezione 5.

<sup>10</sup>Si vedano [Bingham e Kiesel (1998)], [Gerber e Shiu (1994a)], [Gerber e Shiu (1994b)], [Gerber e Shiu (1996)], [Panjer (1998)], [Shiryayev (1999)].

Ricordando la definizione (2.12) per il processo di Wiener  $\{X(s)\}$ , si consideri la variabile aleatoria

$$(2.30) \quad M(t) = \max_{0 \leq s \leq t} X(s)$$

definita come il massimo livello raggiunto fino al tempo  $t$  da un moto Browniano con deriva generica  $\mu$ . Si indichi con  $\{X_0(s)\}$  un moto Browniano privo di deriva ( $\mu = 0$ ) e con  $M_0(t)$  il relativo massimo fino al tempo  $t$ . Il principio di riflessione afferma che un processo di Wiener con deriva  $\mu = 0$  è tale che per ogni traiettoria che oltrepassa il livello  $m$  prima del tempo  $t$  e al tempo  $t$  si trova in un punto  $x$  inferiore ad  $m$ , esiste una realizzazione equiprobabile che percorre lo stesso cammino fino al raggiungimento del livello  $m$ , ma da quell'istante in poi si comporta in maniera perfettamente simmetrica alla prima traiettoria rispetto all'asse  $m$ . Al tempo  $t$  si trova dunque nel punto  $m + (m - x) = 2m - x$ .

Siano

$$t > 0, \quad m \geq 0, \quad x \leq m.$$

Dal principio di riflessione segue che:

$$\Pr\{M_0(t) > m, X_0(t) \leq x\} = \Pr\{X_0(t) \leq x - 2m\}$$

perciò

$$(2.31) \quad \Pr\{M_0(t) > m, x < X_0(t) \leq x + dx\} = \Pr\{x < X_0(t) + 2m \leq x + dx\}.$$

Si ricordi che per il generico moto Browniano  $\{X(s)\}$  con deriva  $\mu$  e varianza istantanea  $\sigma^2$ , ricorrendo alla trasformata di Esscher di parametro  $h$ , si ottiene un processo che nella nuova misura di probabilità ha coefficiente di deriva  $\mu + h\sigma^2$ . Si consideri dunque il processo di Wiener privo di deriva  $\{X_0(s)\}$ . Nella misura di Esscher di parametro  $h = \frac{\mu}{\sigma^2}$  esso coincide con il processo  $\{X(s)\}$  definito in (2.12).

Pertanto

$$(2.32) \quad \Pr\{M(t) > m, X(t) \leq x\} = E_0 \left[ I(M(t) > m, X(t) \leq x) \right] = E_0 \left[ I(M_0(t) > m, X_0(t) \leq x); h \right]$$

dove  $h = \frac{\mu}{\sigma^2}$  ed  $I(\cdot)$  è la funzione indicatrice dell'evento tra parentesi. Dalla (2.32) con una serie di passaggi elementari<sup>11</sup> che sfruttano la trasformata di Esscher e l'identità (2.31) valida per un moto Browniano privo di deriva, si ottiene che:

$$(2.33) \Pr\{M(t) > m, X(t) \leq x\} = e^{2hm} E_0 \left[ I(X(t) \leq x - 2m) \right]$$

con  $h = \frac{\mu}{\sigma^2}$ . Essendo

$$\Pr\{M(t) \leq m, X(t) \leq x\} = \Pr\{X(t) \leq x\} - \Pr\{M(t) > m, X(t) \leq x\},$$

dalla (2.33) segue che

$$(2.34) \Pr\{M(t) \leq m, X(t) \leq x\} = \Pr\{X(t) \leq x\} - e^{\frac{2\mu m}{\sigma^2}} \times \Pr\{X(t) \leq x - 2m\} \quad \text{per } m \geq 0, x \leq m.$$

La funzione di ripartizione della variabile casuale  $M(t)$  è ottenibile come limite per  $X(t) \rightarrow m$  della (2.34). Si ha quindi:

$$(2.35) \Pr\{M(t) \leq m\} = \Pr\{X(t) \leq m\} - e^{\frac{2\mu m}{\sigma^2}} \times \Pr\{-X(t) \geq m\} \quad \text{per } m \geq 0.$$

Il membro di destra dell'equazione è completamente noto giacché la variabile aleatoria  $X(t)$  definita in (2.12) ha distribuzione normale con media  $\mu t$  e varianza  $\sigma^2 t$ .

Si può dunque sfruttare la (2.35) per calcolare l'aspettativa

$$(2.36) E_0 \left[ \max(e^k, e^{M(t)}) \right] \quad \text{con } k > 0.$$

Si consideri infatti che

$$(2.37) \max(e^k, e^{M(t)}) = e^{M(t)} I(M(t) \geq k) + e^k I(M(t) < k).$$

Il valore atteso del secondo addendo non presenta alcuna difficoltà di valutazione essendo  $e^k$  una costante. Un discorso a parte lo merita invece l'aspettativa del primo addendo. Si consideri il caso più generale

$$E_0 \left[ e^{cM(t)} I(M(t) > k) \right] \quad \text{con } k > 0, c = \text{cost.}$$

---

<sup>11</sup>Si vedano le formule D9 e D10 in [Gerber e Shiu (1994b)].

Esplicitando in forma integrale si ha

$$(2.38) \quad E_0 \left[ e^{cM(t)} I(M(t) > k) \right] = \int_k^\infty e^{cm} \frac{d}{dm} \Pr\{M(t) \leq m\} dm.$$

Utilizzando la (2.35) e l'identità

$$\Pr\{-X(t) \geq m\} = 1 - \Pr\{-X(t) < m\}$$

si ricava un'espressione esplicita per la densità di probabilità della variabile aleatoria  $M(t)$  definita come il massimo di un moto Browniano:

$$(2.39) \quad \frac{d}{dm} \Pr\{M(t) \leq m\} = \frac{d}{dm} \Pr\{X(t) \leq m\} + e^{\xi m} \left\{ \frac{d}{dm} \Pr\{-X(t) < m\} - \xi \Pr\{-X(t) \geq m\} \right\}.$$

Sostituendo la (2.39) nel membro di destra della (2.38) ed integrando per parti si ottiene che:

$$(2.40) \quad E_0 \left[ e^{cM(t)} I(M(t) > k) \right] = E_0 \left[ e^{cX(t)} I(X(t) > k) \right] + \frac{c}{c+\xi} E_0 \left[ e^{(c+\xi)(-X(t))} I(-X(t) > k) \right] + \frac{\xi}{c+\xi} e^{(c+\xi)k} \Pr\{-X(t) \geq k\}$$

in cui si è posto  $\xi = \frac{2\mu}{\sigma^2}$  e  $c + \xi \neq 0$ . Si consideri dunque il caso specifico per  $c = 1$  e si sostituisca nell'equazione (2.40) per ottenere il risultato cercato.

Si può dunque calcolare il valore atteso (2.36) che per  $\xi \neq -1$  e  $k > 0$  risulta uguale a:

$$(2.41) \quad E_0 \left[ \max(e^k, e^{M(t)}) \right] = E_0 \left[ e^{X(t)} I(X(t) > k) \right] + \frac{1}{1+\xi} E_0 \left[ e^{(1+\xi)(-X(t))} I(-X(t) > k) \right] + e^k \Pr\{X(t) < k\} - \frac{1}{1+\xi} e^{(1+\xi)k} \Pr\{-X(t) > k\}.$$

I primi due addendi della (2.41) sono riconducibili ad un solo termine: infatti, per la generica funzione  $g(\cdot)$  vale la relazione

$$(2.42) \quad E_0 \left[ e^{-\xi X(t)} g(-X(t)) \right] = E_0 \left[ g(-X(t)); \xi \right] = E_0 \left[ g(X(t)) \right]$$

in cui si è moltiplicato e diviso per  $E_0[e^{-\xi X(t)}]$  e si è osservato che per  $\xi = \frac{2\mu}{\sigma^2}$  si ha che

$$E_0 \left[ e^{-\xi X(t)} \right] = 1 \quad \text{e} \quad -\mu + \xi \sigma^2 = \mu.$$

Nel caso particolare in cui sia  $g(X(t)) = e^{X(t)} I(X(t) > k)$  si ottiene:

$$(2.43) \quad E_0 \left[ e^{(1+\xi)(-X(t))} I(-X(t) > k) \right] = E_0 \left[ e^{X(t)} I(X(t) > k) \right].$$

Applicando la (2.43) alla (2.41) si possono accorpere i primi due addendi ricavando:

$$(2.44) \quad E_0 \left[ \max \left( e^k, e^{M(t)} \right) \right] = \left( 1 + \frac{1}{1+\xi} \right) E_0 \left[ e^{X(t)} I(X(t) > k) \right] + e^k \Pr \{ X(t) < k \} - \frac{1}{1+\xi} e^{(1+\xi)k} \Pr \{ -X(t) > k \}.$$

Il valore atteso nel membro di destra della (2.44) richiede ancora qualche laborioso passaggio. Si consideri il caso più generale

$$E_0 \left[ e^{cX(t)} I(cX(t) > k) \right] \quad \text{con} \quad c = \text{cost.}$$

Si moltiplichino e divida per  $E_0[e^{cX(t)}]$  e si ricorra alla misura di Esscher di parametro  $c$ , nella quale la variabile aleatoria  $X(t)$  ha distribuzione normale di media  $(\mu + c\sigma^2)t$  e varianza  $\sigma^2 t$ , per ottenere:

$$(2.45) \quad E_0 \left[ e^{cX(t)} I(cX(t) > k) \right] = e^{c\mu t + \frac{c^2 \sigma^2 t}{2}} \Phi \left( \frac{-k + (\mu + c\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}} \right) \quad \text{con} \quad c = \text{cost.}$$

Si osservi che la (2.45) si riduce alla (2.26) ponendo  $k = 0$  e  $t = 1$ .

Nella (2.45) si fissi  $c = 1$  e si sostituisca nella (2.44). Esplicitando si ricava il risultato finale:

$$(2.46) \quad E_0 \left[ \max \left( e^k, e^{M(t)} \right) \right] = \left( 1 + \frac{1}{1+\xi} \right) e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t}{2}} \Phi \left( \frac{-k + (\mu + \sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}} \right) + e^k \Phi \left( \frac{k - \mu t}{\sigma\sqrt{t}} \right) - \frac{1}{1+\xi} e^{(1+\xi)k} \Phi \left( \frac{-k - \mu t}{\sigma\sqrt{t}} \right).$$

Calcolato il valore atteso  $E_0[\max(e^k, e^{M(t)})]$  resta ora da evidenziare come il prezzo  $A(s, T)$  sia esprimibile come sua funzione.

Si definisca il processo  $\{Y(t)\}$  come

$$Y(t) = -X(t)$$

in cui  $X(t)$  è dato dalla (2.12). Vista la (2.7), la (2.11) e la (2.16) il payoff a scadenza della dynamic fund protection standard è esprimibile come:

$$\tilde{F}(T) = K e^{-Y(T)} \max \left\{ e^\kappa, e^{\tilde{M}(T)} \right\}$$

con  $\tilde{M}(T) = \max_{0 \leq s \leq T} Y(s)$ . Tenendo conto della (2.14) si ha che

$$A(s, T) = K e^{-rT} E_0^{Q'} \left[ e^{-Y(T)} \max \left\{ e^\kappa, e^{\tilde{M}(T)} \right\} \right]$$

dove il coefficiente di deriva del moto Browniano sottostante  $\{Y(t)\}$ , nella misura di probabilità risk-neutral  $Q'$ , è uguale a  $-r + \frac{\sigma^2}{2}$ . Utilizzando il metodo della trasformata di Esscher con parametro  $h = -1$  si ottiene

$$(2.47) \quad \begin{aligned} A(s, T) &= K e^{-rT} E_0^{Q'} \left[ e^{-Y(T)} \right] E_0^{Q'} \left[ \max \left\{ e^\kappa, e^{\tilde{M}(T)} \right\} ; -1 \right] = \\ &= K E_0^{Q'} \left[ \max \left\{ e^\kappa, e^{\tilde{M}(T)} \right\} ; -1 \right]. \end{aligned}$$

Per valutare la (2.47) si applichi la (2.46) con

$$\begin{aligned} t &= T, & M(t) &= \tilde{M}(T), & k &= \kappa = \ln \left( \frac{s}{K} \right), \\ \xi &= -\frac{2r}{\sigma^2} - 1 = -R - 1, & \mu &= \mu^{**}; \end{aligned}$$

dove

$$\mu^{**} = -r + \frac{\sigma^2}{2} - \sigma^2 = -r - \frac{\sigma^2}{2}$$

è il coefficiente di deriva del processo  $\{Y(t)\}$  nella misura di Esscher di parametro  $h = -1$  ed  $R$  è definito come in (2.20). Si ha pertanto

(2.48)

$$\begin{aligned} A(s, T) &= K \left[ e^{-rT} \left( 1 + \frac{1}{(-R)} \right) \Phi \left( \frac{-\kappa - rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \right) + \frac{s}{K} \Phi \left( \frac{\kappa + rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(-R)} \left( \frac{s}{K} \right)^{-R} \Phi \left( \frac{-\kappa + rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \right] \end{aligned}$$

in cui si è tenuto anche conto che  $(1 + \xi)\sigma^2 = -2r$ .

È facile verificare che il prezzo dell'investimento garantito con dynamic fund protection, espresso dalla (2.48), è lo stesso già ricavato nella (2.28) seguendo l'approccio di Gerber e Pafumi. Tenuto conto della (2.10) si ottiene infine che il valore della sola opzione è dato nuovamente dalla (2.29).

### 2.2.3 L'approccio di Imai e Boyle per la formula di pricing

Un elegante approccio alternativo al problema di pricing di una dynamic fund protection standard è quello proposto da Imai e Boyle<sup>12</sup> i cui risultati generalizzano la formula (2.29) fornendo interessanti spunti di sviluppo per il pricing di dynamic fund protection con monitoraggio nel tempo discreto<sup>13</sup> e per l'analisi di dynamic fund protection di tipo americano. I principali strumenti utilizzati sono il cambio di numerario e la distribuzione del minimo di un moto Browniano.

Si consideri l'equazione (2.7). Al generico istante  $t$  di valutazione ( $0 \leq t \leq T$ ) il payoff a scadenza del *protected fund* con garanzia dinamica standard può essere espresso come:

$$(2.49) \quad \tilde{F}(T) = S(T) \max \left\{ O(t), \frac{K}{\min_{t \leq u \leq T} S(u)} \right\}$$

dove  $O(t)$  è una variabile aleatoria  $\mathcal{F}_t$ -misurabile definita come:

$$(2.50) \quad O(t) = \max \left\{ 1, \frac{K}{\min_{0 \leq u \leq t} S(u)} \right\}$$

e rappresentante il numero di azioni accreditate sul conto del cliente fino al tempo  $t$ . Ricordando che la funzione massimo è tale che

$$\max\{a, b\} = a + \max\{b - a, 0\}$$

e che per la (2.8) si ha  $Z(T) = \tilde{F}(T) - S(T)$ ; a partire dalla (2.49) si ottiene che il

---

<sup>12</sup>Si veda [Imai e Boyle (2001)].

<sup>13</sup>La dynamic fund protection con monitoraggio nel discreto è esplicitamente trattata nel capitolo 2.5.

payoff a scadenza della garanzia dinamica è esprimibile al tempo  $t$  come:

$$(2.51) \quad Z(T) = S(T)\{O(t) - 1\} + S(T) \max \left\{ 0, \frac{K}{\min_{t \leq u \leq T} S(u)} - O(t) \right\}.$$

Si definisca  $V(\tilde{F}(t), T-t)$  il suo prezzo in  $t$ . Si adotti il *naked fund* come nuovo numerario e si definisca la misura di martingala equivalente  $Q_S$ . Per il teorema di Girsanov nella misura di probabilità  $Q_S$  il prezzo del sottostante evolve secondo un moto Browniano geometrico descritto dall'equazione differenziale stocastica:

$$(2.52) \quad dS(t) = (r + \sigma^2) S(t) dt + \sigma S(t) dW^{Q_S}(t).$$

Con evidente significato di simboli il prezzo al tempo  $t$  della garanzia è ottenibile come:

$$(2.53) \quad \begin{aligned} V(\tilde{F}(t), T-t) = & S(t) E_t^{Q_S} \left[ \frac{Z(T)}{S(T)} \right] = S(t) \left\{ O(t) - 1 \right\} + \\ & S(t) E_t^{Q_S} \left[ \max \left\{ 0, \frac{K}{\min_{t \leq u \leq T} S(u)} - O(t) \right\} \right] \end{aligned}$$

in cui si è tenuto conto della  $\mathcal{F}_t$ -misurabilità di  $O(t)$ .

Si definisca

$$(2.54) \quad m(\tau) = \ln \left( \frac{\min_{t \leq u \leq T} S(u)}{S(t)} \right) \quad \text{con } \tau = T - t.$$

Ricordando che il processo  $\{S(t)\}$  evolve secondo il moto Browniano geometrico descritto dalla (2.52), si osservi che la variabile aleatoria  $m(\tau)$  così definita rappresenta il minimo di un moto Browniano sull'orizzonte  $[t, T]$ . Per la proprietà di omogeneità temporale questa variabile è identica in distribuzione al minimo di un moto Browniano sull'orizzonte  $[0, \tau]$  con  $\tau = T - t$ . Ricordando che per il generico processo di Wiener  $\{W^\mu(t)\}$  con deriva  $\mu$  vale la relazione

$$(2.55) \quad \min_{0 \leq u \leq \tau} W^\mu(u) = - \max_{0 \leq u \leq \tau} (-W^\mu(u))$$

e che la distribuzione del massimo di un moto Browniano è una funzione nota<sup>14</sup>, si ha che la distribuzione della variabile casuale  $m(\tau)$  è nota anch'essa e può dunque essere

<sup>14</sup>Si veda [Orsingher (2006)], sezione 7.6; o [Gerber e Pafumi (2000b)], formula D35; oppure si consideri l'equazione (2.39) alla quale si applichi l'identità (2.42).

impiegata per ricavare il valore atteso in (2.53). Risolvendo si ottiene che il prezzo al tempo  $t$  della dynamic fund protection standard è dato dall'equazione:

$$(2.56) \quad V(\tilde{F}(t), T-t) = S(t) \left\{ O(t) \Phi(d_1) - 1 \right\} + \frac{K}{R} \left( \frac{K'(t)}{S(t)} \right)^R \Phi(d_2) \\ + \left( 1 - \frac{1}{R} \right) K e^{-r\tau} \Phi(d_3)$$

in cui si è posto

$$(2.57) \quad d_1 = \frac{\kappa'(t) + r\tau + \frac{1}{2}\sigma^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}, \\ d_2 = \frac{-\kappa'(t) + r\tau + \frac{1}{2}\sigma^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}, \\ d_3 = \frac{-\kappa'(t) - r\tau + \frac{1}{2}\sigma^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}},$$

con

$$(2.58) \quad \tau = T - t, \quad R = \frac{2r}{\sigma^2}, \quad K'(t) = \frac{K}{O(t)}, \quad \kappa'(t) = \ln \frac{S(t)}{K'(t)}.$$

Nel caso particolare in cui l'istante di valutazione sia posto in  $t = 0$  si ottiene:

$$d_1 = \frac{\kappa + rT + \frac{1}{2}\sigma^2T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = \frac{-\kappa + rT + \frac{1}{2}\sigma^2T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_3 = \frac{-\kappa - rT + \frac{1}{2}\sigma^2T}{\sigma\sqrt{T}}, \\ \tau = T, \quad O(0) = \max \left\{ 1; \frac{K}{S} \right\} = 1, \quad K'(0) = K, \quad \kappa'(0) = \ln \frac{S}{K} = \kappa.$$

Sostituendo nella (2.56) si ricava nuovamente la nota equazione di pricing al tempo zero di una dynamic fund protection standard, espressa dalla (2.29).

## 2.2.4 Formula chiusa di pricing di una Dynamic Fund Protection Standard perpetua

Un interessante caso teorico si ottiene ipotizzando che la dynamic fund protection standard abbia un orizzonte temporale illimitato, cioè che sia  $T \rightarrow \infty$ .

Si indichi con  $V(s)$  il suo prezzo al tempo zero. Si ha che:

$$(2.59) \quad V(s) = \lim_{T \rightarrow \infty} V(s, T)$$

dove  $V(s,T)$  è dato dalla (2.29).

Ricordando che si è ipotizzato che  $0 < K \leq s$ , si risolva il limite (2.59) ottenendo che il prezzo di una dynamic fund protection standard perpetua è dato dalla semplice relazione:

$$(2.60) \quad V(s) = \frac{K}{R} \left( \frac{K}{s} \right)^R \quad \text{per } s \geq K.$$

Lo stesso risultato è ricavabile per via probabilistica a partire dalla formula ottenuta da Gerber e Shiu<sup>15</sup> per il caso particolare di una dynamic fund protection standard perpetua con  $s = K$ , cioè

$$(2.61) \quad V(K) = \frac{K}{R} \quad \text{se } s = K.$$

Si consideri infatti il processo stocastico  $\{e^{-rt} S(t)^{-R}\}$ . Questo è una martingala rispetto alla misura di probabilità risk-neutral  $Q$  definita in (2.15). Si definisca la variabile aleatoria "tempo di primo passaggio per il livello  $K$ "

$$(2.62) \quad T_K = \inf \{t \mid S(t) = K\}.$$

Dal teorema di arresto opzionale segue che:

$$(2.63) \quad E_0^Q \left[ e^{-rT_K} S(T_K)^{-R} \right] = s^{-R}.$$

Dalla definizione (2.62) segue che  $S(T_K) = K$ , perciò

$$(2.64) \quad E_0^Q \left[ e^{-rT_K} S(T_K)^{-R} \right] = K^{-R} E_0^Q \left[ e^{-rT_K} \right].$$

Sottraendo la (2.63) alla (2.64) ed esplicitando si ottiene:

$$(2.65) \quad E_0^Q \left[ e^{-rT_K} \right] = \left( \frac{K}{s} \right)^R.$$

Si osservi che  $V(s)$  può essere espresso come

$$(2.66) \quad V(s) = E_0^Q \left[ e^{-rT_K} V(K) \right] = V(K) E_0^Q \left[ e^{-rT_K} \right].$$

Sostituendo le equazioni (2.61) e (2.65) nella (2.66) si ottiene nuovamente la (2.60).

---

<sup>15</sup>Si veda [Gerber e Shiu (1998)], ultimo paragrafo della sezione 6.

## 2.2.5 Risultanze numeriche per la formula chiusa di pricing di una Dynamic Fund Protection Standard

Si consideri una dynamic fund protection standard con maturity  $T$ , livello di garanzia  $K$ , investimento iniziale  $S(0)$ , *primary fund* che non paghi dividendi ed il cui valore evolva secondo il modello di Black e Scholes descritto dalle equazioni (2.11) e (2.12). Nelle precedenti sezioni 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3 e 2.2.4 si è dimostrato che il prezzo al tempo  $t = 0$  di tale garanzia è dato dalla formula (2.29)<sup>16</sup> che si riporta di seguito:

$$(2.29) \quad V(s,T) = Ke^{-rT} \left(1 - \frac{1}{R}\right) \Phi\left(\frac{-\kappa - rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right) + \frac{K}{R} \left(\frac{K}{s}\right)^R \Phi\left(\frac{-\kappa + rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - s \Phi\left(\frac{-\kappa - rT - \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

in cui

$$s = S(0), \quad \kappa = \ln\left(\frac{s}{K}\right), \quad e \quad R = \frac{2r}{\sigma^2}.$$

Si è poi visto che per  $T \rightarrow \infty$  questa diventa uguale alla (2.60).

Si vuole ora studiare l'andamento del prezzo della garanzia dinamica standard al variare dei parametri di valutazione adottati. A tal fine si sono effettuate una serie di analisi numeriche assegnando differenti valori al set di parametri. Per brevità espositiva si riportano solamente alcuni risultati esemplari. Si assumano

$$s = 100, \quad \sigma = 0.2, \quad r = 0.04$$

e si calcoli il valore della dynamic fund protection per differenti combinazioni di  $K$  e di  $T$ .

Dalla tabella 2.1 e dal grafico 2.2 si osserva che il prezzo cresce al crescere del livello minimo garantito  $K$  e cresce pure al crescere della maturity  $T$ . In particolare è interessante osservare come la funzione  $V(s,T)$  risulta (empiricamente) crescente e concava verso il basso rispetto alla durata contrattuale.

Il risultato è confermato anche da un'analogha analisi effettuata nella tabella 2.2 in cui si è assunto  $r = 0.01$  tenendo fermi i valori di  $\sigma$  e di  $s$ .

<sup>16</sup>Oppure equivalentemente dalla formula (2.56) in cui si ponga  $t = 0$ .

Confrontando le due serie di dati ottenuti per  $r = 0.01$  e per  $r = 0.04$  si evidenzia che il prezzo della dynamic fund protection standard decresce al crescere dell'intensità istantanea di rendimento risk-free  $r$ . Si vedano la tabella 2.2 ed il grafico 2.3.

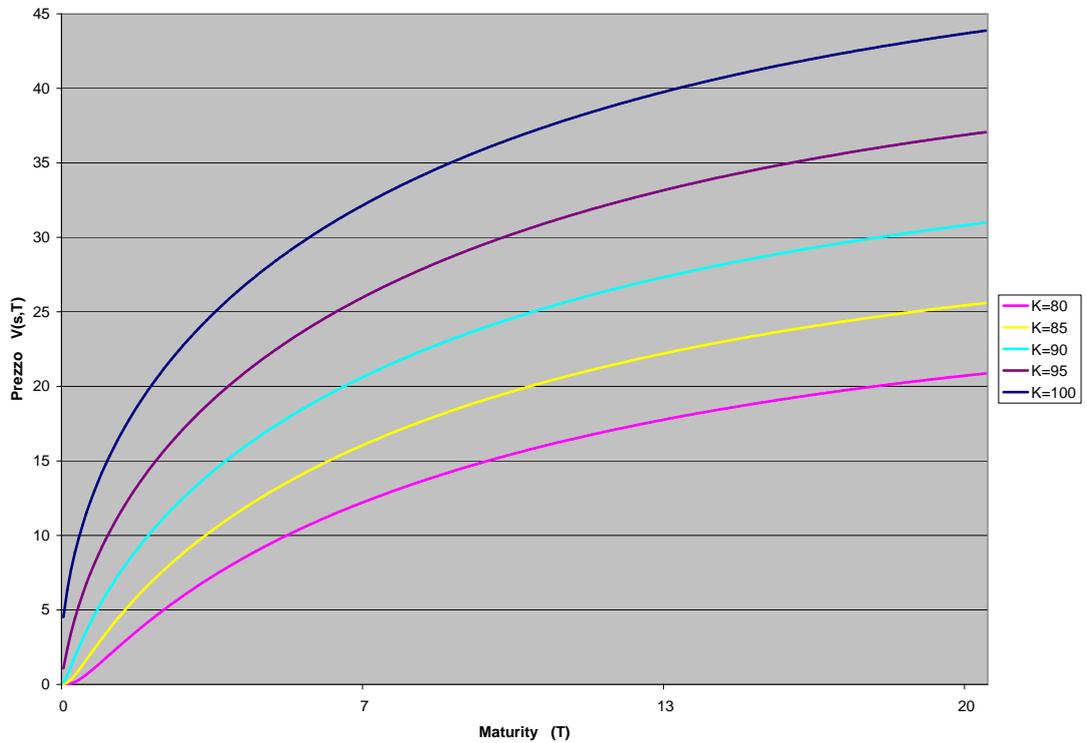


Figura 2.2: Prezzo di una Dynamic Fund Protection Standard in funzione del Floor ( $K$ ) e della Maturity ( $T$ ), per un fissato set di parametri  $r = 0.04$ ,  $\sigma = 0.20$ ,  $s = 100$

Paragonando i valori della tabella 2.1 con quelli della tabella 2.3 in cui si è ipotizzato un incremento di volatilità del 25% ceteris paribus, si osserva che il prezzo

Maturity (T)	Floor (K)				
	80	85	90	95	100
1/12	0.0001	0.0065	0.1304	1.0797	4.5189
2/12	0.0109	0.1093	0.6338	2.3761	6.3359
3/12	0.0623	0.3341	1.2463	3.4770	7.7069
4/12	0.1626	0.6313	1.8676	4.4370	8.8463
5/12	0.3035	0.9659	2.4706	5.2943	9.8376
6/12	0.4746	1.3180	3.0481	6.0732	10.7233
1	1.7709	3.4239	6.0120	9.7476	14.7931
2	4.4061	6.9230	10.3118	14.6840	20.1295
5	10.1373	13.7030	18.0257	23.1640	29.1716
10	15.6391	19.8688	24.7909	30.4504	36.8905
15	18.8362	23.3815	28.5947	34.5168	41.1882
20	20.8713	25.5995	30.9834	37.0626	43.8762
$\infty$	25.6000	30.7063	36.4500	42.8688	50.0000

Nota: Prezzi di una dynamic fund protection standard in un modello di valutazione di tipo Black e Scholes ottenuti utilizzando la formula chiusa di valutazione (2.29) (oppure la (2.60) nel caso dell'opzione perpetua) al variare della maturity T e dello strike price K, per un fissato set di parametri  $\sigma = 0.2$ ,  $r = 0.04$  ed  $s = 100$ . I valori sono ottenuti utilizzando gli appositi algoritmi di calcolo in Visual Basic riportati in appendice. Il prezzo cresce all'aumentare del livello minimo garantito K e cresce pure rispetto alla maturity T.

Tabella 2.1: Evoluzione del prezzo di una Dynamic Fund Protection Standard al variare della maturity (T) e dello strike price (K) per una fissata forza di interesse risk-free  $r = 0.04$  e una volatilità  $\sigma = 0.2$

Maturity (T)	Floor (K)				
	80	85	90	95	100
	$\Delta_{r=0.04}$	$\Delta_{r=0.04}$	$\Delta_{r=0.04}$	$\Delta_{r=0.04}$	$\Delta_{r=0.04}$
<b>1/12</b>	0.0001 (19.67%)	0.0074 (14.60%)	0.1437 (10.14%)	1.1469 (6.23%)	4.6471 (2.84%)
<b>2/12</b>	0.0132 (20.86%)	0.1266 (15.85%)	0.7062 (11.42%)	2.5548 (7.52%)	6.5948 (4.09%)
<b>3/12</b>	0.0760 (21.91%)	0.3905 (16.91%)	1.4019 (12.49%)	3.7747 (8.56%)	8.0979 (5.07%)
<b>4/12</b>	0.1998 (22.87%)	0.7440 (17.86%)	2.1182 (13.42%)	4.8570 (9.46%)	9.3706 (5.93%)
<b>5/12</b>	0.3757 (23.76%)	1.1468 (18.74%)	2.8231 (14.27%)	5.8385 (10.28%)	10.4961 (6.69%)
<b>6/12</b>	0.5913 (24.60%)	1.5758 (19.55%)	3.5071 (15.06%)	6.7430 (11.03%)	11.5167 (7.40%)
<b>1</b>	2.2836 (28.96%)	4.2363 (23.73%)	7.1562 (19.03%)	11.1887 (14.78%)	16.4088 (10.92%)
<b>2</b>	5.9916 (35.99%)	9.0244 (30.35%)	12.9165 (25.26%)	17.7125 (20.62%)	23.4267 (16.38%)
<b>5</b>	15.4719 (52.62%)	19.9862 (45.85%)	25.1821 (39.70%)	31.0586 (34.08%)	37.6072 (28.92%)
<b>10</b>	27.4617 (75.60%)	33.1947 (67.07%)	39.5000 (59.33%)	46.3676 (52.27%)	53.7858 (45.80%)
<b>15</b>	36.9588 (96.21%)	43.4877 (85.99%)	50.5394 (76.74%)	58.1026 (68.33%)	66.1652 (60.64%)
<b>20</b>	44.9721 (115.47%)	52.1171 (103.59%)	59.7563 (92.87%)	67.8779 (83.14%)	76.4701 (74.29%)
$\infty$	143.1084 (459.02%)	156.7323 (410.42%)	170.7630 (368.49%)	185.1891 (331.99%)	200.0000 (300.00%)

Nota: Prezzi di una dynamic fund protection standard in un modello di valutazione di tipo Black e Scholes ottenuti utilizzando la formula chiusa di valutazione (2.29) (oppure la (2.60) nel caso di un'opzione perpetua) al variare della maturity T e dello strike price K, per un fissato set di parametri  $\sigma = 0.2$ ,  $r = 0.01$  ed  $s = 100$ . I valori sono ottenuti utilizzando gli appositi algoritmi di calcolo in Visual Basic riportati in appendice. È pure evidenziata la variazione percentuale rispetto all'analogo prezzo ottenuto con  $r=0.04$ . Si confronti con la tabella 2.1. Il valore della Dynamic fund protection decresce all'aumentare dell'intensità istantanea di rendimento risk-free  $r$ .

Tabella 2.2: Evoluzione del prezzo di una Dynamic Fund Protection Standard al variare della maturity (T) e dello strike price (K) per una fissata forza di interesse risk-free  $r = 0.01$  e una volatilità  $\sigma = 0.2$

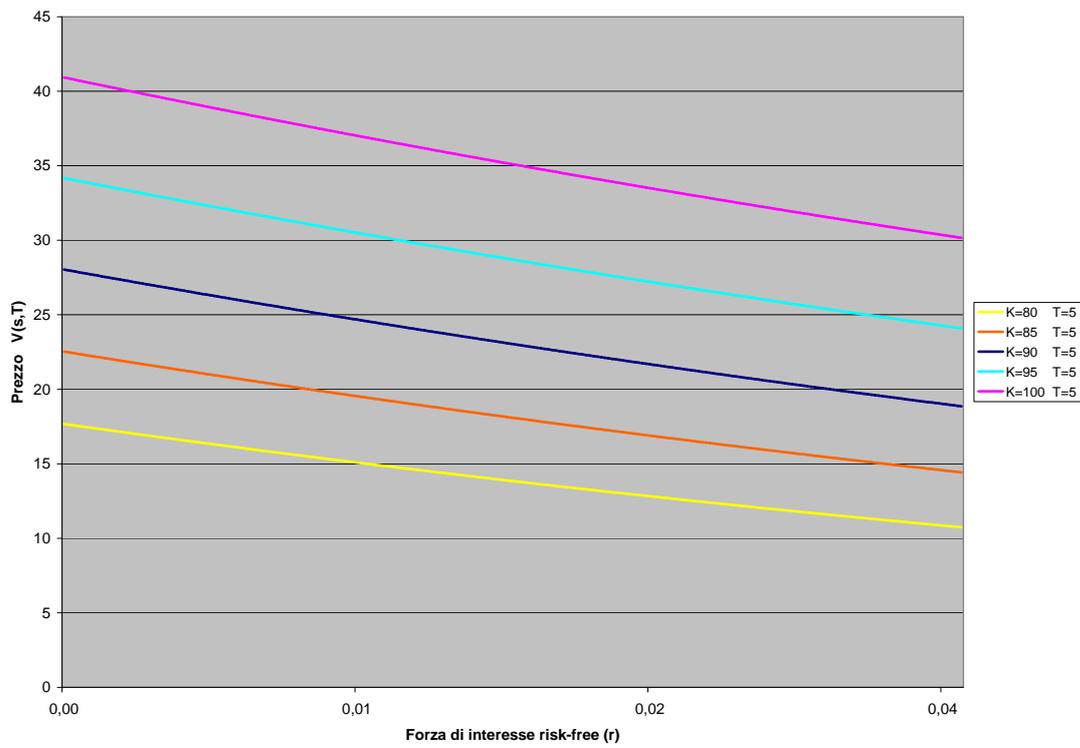


Figura 2.3: Decremento del prezzo di una Dynamic Fund Protection Standard al crescere della forza di interesse risk-free ( $r$ ), per un fissato set di parametri  $\sigma = 0.20$ ,  $s = 100$ ,  $T = 5$

Maturity (T)	Floor (K)				
	80 $\Delta_{\sigma=0.02}$	85 $\Delta_{\sigma=0.02}$	90 $\Delta_{\sigma=0.02}$	95 $\Delta_{\sigma=0.02}$	100 $\Delta_{\sigma=0.02}$
1/12	0.0031 (2807.64%)	0.0502 (675.32%)	0.4081 (212.89%)	1.8969 (75.69%)	5.7156 (26.48%)
2/12	0.0796 (629.15%)	0.3972 (263.42%)	1.4025 (121.29%)	3.7515 (57.88%)	8.0529 (27.10%)
3/12	0.2833 (354.31%)	0.9321 (179.01%)	2.4342 (95.32%)	5.2737 (51.67%)	9.8321 (27.58%)
4/12	0.5799 (256.61%)	1.5357 (143.27%)	3.4150 (82.86%)	6.5871 (48.46%)	11.3214 (27.98%)
5/12	0.9332 (207.45%)	2.1586 (123.49%)	4.3352 (75.47%)	7.7560 (46.50%)	12.6249 (28.33%)
6/12	1.3193 (178.00%)	2.7798 (110.90%)	5.1992 (70.57%)	8.8172 (45.18%)	13.7961 (28.66%)
1	3.7884 (113.93%)	6.2018 (81.13%)	9.5204 (58.36%)	13.8500 (42.09%)	19.2594 (30.19%)
2	8.2032 (86.18%)	11.5755 (67.20%)	15.7448 (52.69%)	20.7574 (41.36%)	26.6450 (32.37%)
5	17.4414 (72.05%)	22.0275 (60.75%)	27.2805 (51.34%)	33.2189 (43.41%)	39.8576 (36.63%)
10	26.6273 (70.26%)	32.0779 (61.45%)	38.1298 (53.81%)	44.7949 (47.11%)	52.0840 (41.19%)
15	32.3133 (71.55%)	38.2256 (63.49%)	44.7144 (56.37%)	51.7901 (50.04%)	59.4620 (44.37%)
20	36.1550 (73.23%)	42.3595 (65.47%)	49.1282 (58.56%)	56.4707 (52.37%)	64.3962 (46.77%)
$\infty$	46.9716 (83.48%)	53.9343 (75.65%)	61.4417 (68.56%)	69.5024 (62.13%)	78.1250 (56.25%)

Nota: Prezzi di una dynamic fund protection standard in un modello di valutazione di tipo Black e Scholes ottenuti utilizzando la formula chiusa di valutazione (2.29) (oppure la (2.60) nel caso di un'opzione perpetua) al variare della maturity T e dello strike price K, per un fissato set di parametri  $\sigma = 0.25$ ,  $r = 0.04$  ed  $s = 100$ . I valori sono ottenuti utilizzando gli appositi algoritmi di calcolo in Visual Basic riportati in appendice. È pure evidenziata la variazione percentuale rispetto all'analogo prezzo ottenuto con  $\sigma = 0.2$ . Si confronti con la tabella 2.1. Il valore della Dynamic fund protection cresce molto velocemente all'aumentare della volatilità del sottostante  $\sigma$ .

Tabella 2.3: Evoluzione del prezzo di una Dynamic Fund Protection Standard al variare della maturity (T) e dello strike price (K) per una fissata forza di interesse risk-free  $r = 0.04$  e una volatilità  $\sigma = 0.25$

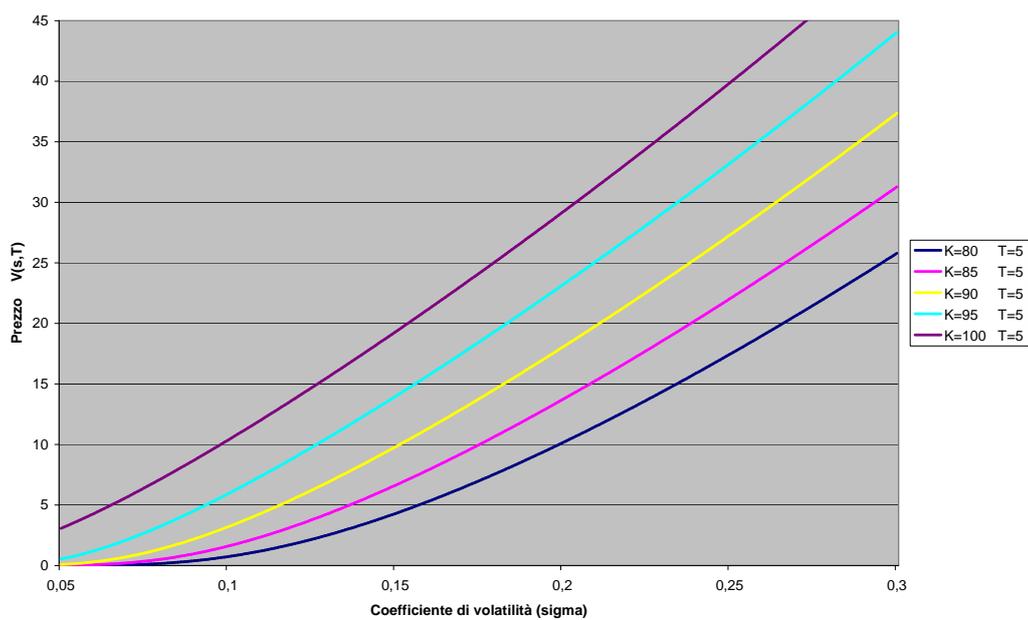


Figura 2.4: Incremento del prezzo di una Dynamic Fund Protection Standard al crescere del coefficiente di volatilità ( $\sigma$ ), per un fissato set di parametri  $r = 0.04$ ,  $s = 100$ ,  $T = 5$

della garanzia dinamica è una funzione crescente e concava verso l'alto rispetto alla volatilità del sottostante. Si veda il grafico 2.4.

Dall'analisi della tabella 2.4 e del grafico 2.5 risulta infine che la funzione  $V(s,T)$  è decrescente ed ha una poco marcata concavità verso l'alto rispetto ad incrementi del valore iniziale del *naked fund*  $s = S(0)$ .

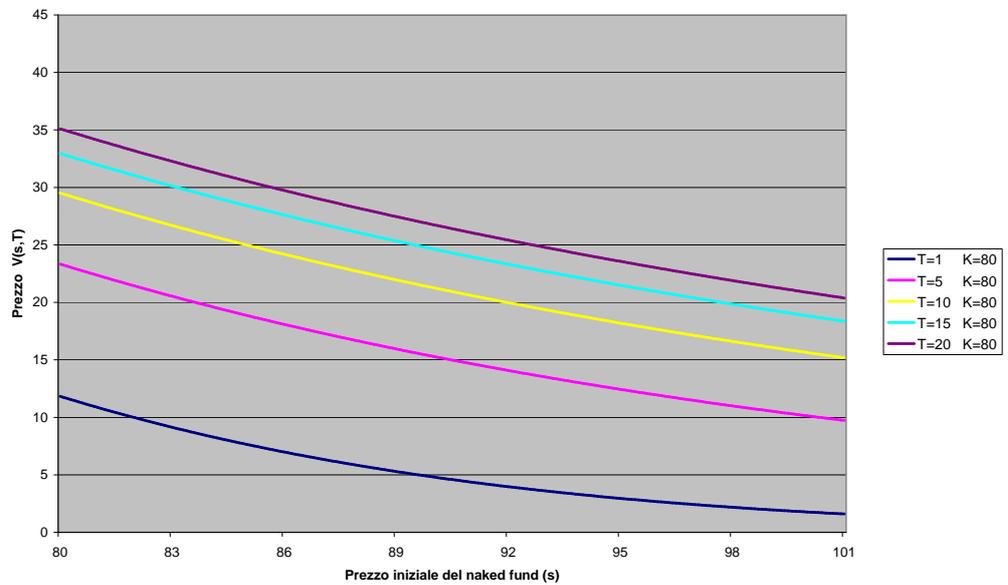


Figura 2.5: Decremento del prezzo della Dynamic Fund Protection Standard al crescere del valore iniziale del naked fund ( $s$ ), per un fissato set di parametri  $r = 0.04$ ,  $\sigma = 0.02$ ,  $K = 80$

Prezzo in 0 del Naked Fund (s)	Maturity (T)				
	1	5	10	15	20
	$\Delta_{S=100}$	$\Delta_{S=100}$	$\Delta_{S=100}$	$\Delta_{S=100}$	$\Delta_{S=100}$
<b>80</b>	11.83 (568.29%)	23.34 (130.21%)	29.51 (88.71%)	32.95 (74.93%)	35.10 (68.18%)
<b>82</b>	9.97 (463.09%)	21.43 (111.36%)	27.59 (76.43%)	31.03 (64.72%)	33.18 (58.95%)
<b>84</b>	8.36 (372.31%)	19.68 (94.15%)	25.82 (65.10%)	29.25 (55.27%)	31.39 (50.40%)
<b>86</b>	6.98 (294.43%)	18.09 (78.42%)	24.18 (54.64%)	27.60 (46.50%)	29.73 (42.46%)
<b>88</b>	5.81 (227.99%)	16.63 (64.05%)	22.67 (44.97%)	26.06 (38.37%)	28.19 (35.07%)
<b>90</b>	4.81 (171.62%)	15.30 (50.90%)	21.27 (36.01%)	24.64 (30.81%)	26.76 (28.19%)
<b>92</b>	3.97 (124.05%)	14.08 (38.86%)	19.97 (27.71%)	23.31 (23.76%)	25.42 (21.77%)
<b>94</b>	3.26 (84.11%)	12.96 (27.84%)	18.77 (20.01%)	22.08 (17.20%)	24.16 (15.78%)
<b>96</b>	2.67 (50.73%)	11.94 (17.74%)	17.65 (12.85%)	20.92 (11.08%)	22.99 (10.17%)
<b>98</b>	2.18 (22.98%)	11.00 (8.49%)	16.61 (6.20%)	19.84 (5.35%)	21.90 (4.92%)
<b>100</b>	1.77 -	10.14 -	15.64 -	18.84 -	20.87 -

Nota: Prezzi di una dynamic fund protection standard in un modello di valutazione di tipo Black e Scholes ottenuti utilizzando la formula chiusa di valutazione (2.29) al variare della maturity T e del prezzo iniziale del naked fund s, per un fissato set di parametri  $\sigma = 0.2$ ,  $r = 0.04$  e  $K = 80$ . I valori sono ottenuti utilizzando gli appositi algoritmi di calcolo in Visual Basic riportati in appendice. È pure evidenziata la variazione percentuale rispetto all'analogo prezzo ottenuto con  $s = 100$ . Il prezzo della Dynamic fund protection decresce all'aumentare del valore iniziale del naked fund.

Tabella 2.4: Evoluzione del prezzo di una Dynamic fund protection standard al variare della maturity (T) e del prezzo iniziale del naked fund (s) per un fissato floor  $K = 80$ , una forza di interesse risk-free  $r = 0.04$  e una volatilità  $\sigma = 0.2$

## 2.3 Costruzione del portafoglio replicante

Si consideri un investimento in quote di un fondo azionario (rischioso), il cui valore sia garantito da una dynamic fund protection standard e la cui data di realizzo sia fissata in  $T$ . Sia  $\tilde{F}(T)$  il suo payoff a scadenza descritto dall'equazione (2.7). Si vuole costruire un portafoglio auto-finanziante che sia in grado di replicarne il valore al tempo  $T$ .

Il capitale inizialmente disponibile è:

$$a = A(s, T)$$

dove  $A(s, T)$  è dato dalla formula (2.28) ottenuta, si ricorda, nell'ambito di un modello di valutazione di tipo Black e Scholes. Questo capitale deve essere opportunamente investito ripartendolo fra il titolo privo di rischio e le quote del fondo azionario. Il portafoglio così composto è solo istantaneamente replicante, perciò nel corso del contratto bisogna procedere ad una sua continua ricalibratura di modo che al tempo  $T$  il suo valore complessivo sia effettivamente uguale ad  $\tilde{F}(T)$ .

Si consideri il generico istante  $t$  ( $0 \leq t \leq T$ ) di intervento. Il capitale disponibile  $A(\tilde{F}(t), T-t)$  è dato dalla somma di due componenti:

$$(2.67) \quad A(\tilde{F}(t), T-t) = \tilde{F}(t) + V(\tilde{F}(t), T-t)$$

dove  $\tilde{F}(t)$  è il valore al tempo  $t$  dell'*upgraded fund* e  $V(\tilde{F}(t), T-t)$  è il valore della dynamic fund protection residua con *naked fund* di importo  $s = \tilde{F}(t)$  ed orizzonte contrattuale  $T-t$ . Ricordando un ben noto risultato della teoria dell'option pricing<sup>17</sup>, l'ammontare di risorse da investire in quote del fondo azionario è dato da

$$(2.68) \quad \tilde{F}(t) \frac{d}{ds} A(\tilde{F}(t), T-t)$$

mentre il rimanente importo

$$(2.69) \quad A(\tilde{F}(t), T-t) - \tilde{F}(t) \frac{d}{ds} A(\tilde{F}(t), T-t)$$

---

<sup>17</sup>Si veda ad esempio [Baxter e Rennie (1996)], pagina 95; [Dothan (1990)], sezione 9.3; o ancora [Panjer (1998)] formula 10.6.6.

è da investire nel titolo risk-free.

Per semplicità di notazione ci si ponga nell'istante  $t = 0$ , nel quale  $\tilde{F}(0) = s$ . Ricordando la (2.28) e la (2.16) si calcoli la derivata  $\frac{d}{ds}A(s, T)$  e si sostituisca nella (2.68) ottenendo così che l'importo da investire inizialmente nel fondo azionario è uguale a:

$$(2.70) \quad s \Phi\left(\frac{\kappa + rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - s \left(\frac{K}{s}\right)^{R+1} \Phi\left(\frac{-\kappa + rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

In base alla (2.69) l'importo da destinare all'investimento risk-free in zero è dato dalla differenza fra la (2.28) e la (2.70) ed è uguale a:

$$(2.71) \quad Ke^{-rT} \left(1 - \frac{1}{R}\right) \Phi\left(\frac{-\kappa - rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right) + K \left(1 + \frac{1}{R}\right) \left(\frac{K}{s}\right)^R \times \\ \Phi\left(\frac{-\kappa + rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right).$$

Per ottenere gli analoghi valori valutati nel generico istante  $t$  ( $0 \leq t \leq T$ ) di ricalibratura, si effettuino le sostituzioni

$$(2.72) \quad \begin{aligned} T &\rightarrow T - t \\ s &\rightarrow \tilde{F}(t) \\ \kappa &\rightarrow \ln \frac{\tilde{F}(t)}{K} \end{aligned}$$

all'interno delle formule (2.70) e (2.71).

Si osservi come la (2.67) e le (2.70) e (2.71) forniscano due scomposizioni alternative per il valore complessivo delle risorse disponibili al generico tempo  $t$ : la prima in termini di *upgraded fund* e di garanzia residua, le seconde in ragione della componente investita nel fondo rischioso e di quella destinata al titolo risk-free.

Dalla (2.71) si ricava che l'importo da investire nel fondo azionario è sempre inferiore rispetto al valore dell'*upgraded fund*  $\tilde{F}(t)$ . In altre parole, una parte delle risorse va sottratta dall'investimento azionario e va impiegata nel titolo risk-free per riuscire a replicare l'effetto della garanzia residua.

Nel caso in cui si ipotizzi una maturity  $T \rightarrow \infty$  le formule viste si semplificano notevolmente: infatti si ottiene che l'importo al tempo  $t$  da destinare al fondo rischioso

è uguale a:

$$(2.73) \quad \tilde{F}(t) \left\{ 1 - \left( \frac{K}{\tilde{F}(t)} \right)^{R+1} \right\}$$

mentre nel titolo non rischioso bisogna investire l'importo:

$$(2.74) \quad \tilde{F}(t) \left( 1 + \frac{1}{R} \right) \left( \frac{K}{\tilde{F}(t)} \right)^{R+1} .$$

La somma di queste due componenti restituisce l'ammontare complessivo delle risorse al tempo  $t$ :

$$(2.75) \quad \tilde{F}(t) \left\{ 1 + \frac{1}{R} \left( \frac{K}{\tilde{F}(t)} \right)^{R+1} \right\} .$$

Dividendo i valori (2.73) e (2.74) per l'ammontare complessivo (2.75) è possibile determinare la frazione di capitale da destinare a ciascuno dei due tipi di investimento.

## 2.4 Non convenienza dell'esercizio anticipato di una Dynamic Fund Protection Americana

Si consideri un investimento in un fondo azionario che non stacca dividendi, caratterizzato dal processo di prezzo  $\{S(t)\}$  e garantito da una dynamic fund protection di tipo americano, con livello di garanzia costante  $K$  e facoltà di esercizio in ogni epoca antecedente la maturity  $T$  (compresa).

La scomposizione del valore complessivo dell'investimento al generico tempo  $t \in [0, T]$  in termini di *upgraded fund* e di garanzia residua, espressa dall'equazione (2.67), suggerisce che non è mai conveniente l'esercizio anticipato della dynamic fund protection americana giacché nessun investitore razionale decide di rinunciare al godimento di un diritto con valore non negativo. In caso di esercizio all'epoca  $t$  infatti, si incassa l'importo  $\tilde{F}(t)$  del *protected fund* già maturato rinunciando così alla garanzia dinamica residua che, vista la natura dell'opzione, ha valore  $V(\tilde{F}(t), T-t)$  sicuramente non negativo.

Questa intuizione logica può essere dimostrata a livello analitico provando che, in ogni istante  $t \in [0, T]$ , il prezzo di una dynamic fund protection europea è maggiore o uguale al valore di esercizio della corrispondente garanzia americana.

Il valore di esercizio anticipato in  $t$  della dynamic fund protection americana è

$$(2.76) \quad Z(t) = \tilde{F}(t) - S(t) = S(t) \max \left\{ 1, \frac{K}{\min_{0 \leq u \leq t} S(u)} \right\} - S(t).$$

Ricordando la (2.50) si può riscrivere

$$(2.77) \quad Z(t) = S(t) \{O(t) - 1\}.$$

Per quanto detto nella sezione 2.2.3, il valore in  $t$  della dynamic fund protection europea con maturity  $T$  è

$$(2.53) \quad V(\tilde{F}(t), T-t) = S(t) E_t^{Q_s} \left[ \frac{Z(T)}{S(T)} \right] = S(t) \{O(t) - 1\} + S(t) E_t^{Q_s} \left[ \max \left\{ 0, \frac{K}{\min_{t \leq u \leq T} S(u)} - O(t) \right\} \right].$$

Confrontando la (2.53) con la (2.77) si osserva che

$$(2.78) \quad V(\tilde{F}(t), T-t) = Z(t) + S(t) E_t^{Q_s} \left[ \max \left\{ 0, \frac{K}{\min_{t \leq u \leq T} S(u)} - O(t) \right\} \right]$$

quindi

$$(2.79) \quad V(\tilde{F}(t), T-t) \geq Z(t).$$

È dunque provata la non convenienza dell'esercizio anticipato di una dynamic fund protection americana.

La dimostrazione non richiede necessariamente che il prezzo del sottostante evolva secondo un moto Browniano geometrico, ma è sufficiente che segua un processo stocastico più generale che però faccia sì che il valore del *naked fund* non possa mai diventare negativo e per il quale sia possibile determinare una misura di martingala equivalente.

Un'ipotesi fondamentale per la validità del risultato è pure quella di assenza di dividendi: infatti, se il fondo azionario sottostante ne paga, può accadere che la strategia di esercizio ottimale preveda l'incasso anticipato dell'*upgraded fund*<sup>18</sup>.

<sup>18</sup>Si veda la sezione 6 di [Gerber e Shiu (2003c)] in cui è trattata la strategia di esercizio ottimale di una dynamic fund protection americana perpetua scritta su di un titolo che paga dividendi.

## 2.5 La Dynamic Fund Protection Standard con monitoraggio nel tempo discreto: una formula approssimata di pricing

Le formule di pricing finora considerate fanno riferimento ad una dynamic fund protection standard monitorata nel continuo, in cui cioè il valore dell'*upgraded fund*  $\tilde{F}(t)$  sia istantaneamente incrementato qualora scenda al di sotto del *floor*  $K$  così che tale soglia minima non possa mai essere varcata in nessun istante della durata contrattuale  $[0, T]$ . Nell'ulteriore ipotesi che il valore del fondo sottostante  $S(t)$  evolva secondo il modello di Black e Scholes si è potuta ottenere una formula chiusa di pricing al tempo zero<sup>19</sup> e al generico tempo  $t \in [0, T]$ <sup>20</sup>.

Malgrado l'importanza teorica del risultato, da un punto di vista operativo una garanzia di questo tipo è irrealizzabile perchè le imperfezioni che caratterizzano i mercati reali rendono di fatto impraticabile un intervento nel continuo sul valore del *protected fund*: si pensi ad esempio ai costi di transazione che, contrariamente a quanto ipotizzato dal modello teorico, non sono affatto nulli.

Si vuole dunque considerare il caso di una dynamic fund protection standard in cui il valore del *protected portfolio* sia monitorato solo ad intervalli di tempo prefissato nei quali vengano effettuati i necessari riallineamenti per garantire che il valore dell'investimento sia almeno eguale a quello del *floor*. Si parla in tal caso di dynamic fund protection standard monitorata nel discreto. Non è più possibile determinare una formula chiusa di pricing che fornisca il valore esatto della garanzia<sup>21</sup>; tuttavia si può ottenere una buona approssimazione partendo dall'equazione ottenuta per il caso continuo ed applicando delle opportune correzioni per tener conto degli effetti della discretizzazione.

Formalizziamo i termini del problema. Si indichi con  $\tilde{F}_n(T)$  il payoff a scadenza di un investimento garantito da una dynamic fund protection standard monitorata nel

---

<sup>19</sup>Si veda la (2.29).

<sup>20</sup>Si veda la (2.56).

<sup>21</sup>Per "valore esatto" deve chiaramente intendersi "valore esatto sotto le ipotesi del modello di valutazione adottato".

discreto con maturity in  $T$ , *floor*  $K$ , fondo di investimento sottostante  $S(t)$  ed  $n+1$  istanti di monitoraggio individuati dallo scadenziario:

$$\{u_0, u_1, \dots, u_n\} \quad \text{con} \quad u_0 = 0, \quad u_n = T.$$

Per quanto visto in (2.7) si ha che:

$$(2.80) \quad \tilde{F}_n(T) = S(T) \max \left\{ 1, \max_{0 \leq j \leq n} \left\{ \frac{K}{S(u_j)} \right\} \right\}.$$

Ricordando la (2.8), il payoff a scadenza della garanzia è uguale a:

$$(2.81) \quad Z_n(T) = S(T) \max \left\{ 1, \frac{K}{\min_{0 \leq j \leq n} S(u_j)} \right\} - S(T).$$

Questo presenta caratteristiche del tutto analoghe a quelle di una lookback option standard<sup>22</sup> con monitoraggio nel discreto. In particolare ricorda il payoff di una lookback option di tipo *call on minimum*, il cui valore a scadenza dipende dal minimo valore raggiunto dal sottostante lungo lo scadenziario discreto di riferimento e dal suo prezzo nell'istante di esercizio.

Tenendo conto di quest'analogia, Imai e Boyle<sup>23</sup> hanno ripreso e sviluppato un precedente risultato di [Broadie, Glasserman e Kou (1999)] in merito al problema di pricing di lookback option monitorate nel discreto, proponendo a loro volta una correzione per la formula chiusa di valutazione di una dynamic fund protection standard monitorata nel continuo<sup>24</sup> in modo da adattarla (in maniera approssimata) al caso discreto.

La correzione si basa sul seguente "lemma 4" di [Broadie, Glasserman e Kou (1999)].

**Lemma 4 di [Broadie, Glasserman e Kou (1999)]**

Sia  $X(t)$  un moto Browniano con coefficiente di deriva  $\mu$  e coefficiente di volatilità  $\sigma$ . Sia  $M(T)$  la variabile casuale "massimo del moto Browniano

<sup>22</sup>Le caratteristiche generali delle lookback option sono presentate nella sezione 6.2.

<sup>23</sup>Si veda [Imai e Boyle (2001)] sezione 2.3.

<sup>24</sup>Formula chiusa di pricing (2.56), ottenuta in un modello di valutazione di tipo Black e Scholes.

fino al tempo  $T$ , definita come in (2.30). Si consideri uno scadenziario di riferimento discreto, composto da  $n+1$  istanti di osservazione separati da  $n$  periodi di ampiezza prefissata e costante  $\Delta t = \frac{T}{n}$ . Si definisca  $M_n(T)$  la variabile casuale "massimo del moto Browniano  $X(t)$  rispetto allo scadenziario discreto di riferimento", cioè:

$$M_n(T) = \max_{0 \leq k \leq n} X(k\Delta t).$$

Si dimostra che per qualunque valore  $x > 1$  si ha:

$$(2.82) \quad \mathbb{E} \left[ \max \left\{ 0; e^{M_n(T)} - x \right\} \right] = e^{-\beta_1 \sigma \sqrt{\Delta t}} \mathbb{E} \left[ \max \left\{ 0; e^{M(T)} - e^{\beta_1 \sigma \sqrt{\Delta t}} x \right\} \right] + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

dove  $\beta_1$  è una costante indipendente dalle caratteristiche del moto Browniano  $X(t)$  e tale che:

$$(2.83) \quad \beta_1 = -\frac{\zeta\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}} \approx 0,5826$$

in cui  $\zeta(\cdot)$  è la funzione zeta di Riemann.

Si definisca  $V_n(\tilde{F}(t), T-t)$  il prezzo al tempo  $t$  ( $0 \leq t \leq T$ ) di una dynamic fund protection standard monitorata nel discreto. Partendo dalla (2.81) si lavori in maniera analoga a quanto fatto per la (2.53) ottenendo che:

$$(2.84) \quad V_n(\tilde{F}(t), T-t) = S(t) \left\{ O_n(t) - 1 \right\} + K E_t^{Q_s} \left[ \max \left\{ 0; e^{-m_n(\tau)} - x \right\} \right]$$

dove  $x = \frac{O(t)S(t)}{K}$ ,  $\tau = T - t$  e  $m_n(\tau)$  è la variabile aleatoria "minimo di un moto Browniano  $\{X^{Q_s}(t)\}$  rispetto al residuo scadenziario discreto di monitoraggio".

Ricordando la relazione (2.55) esistente fra il minimo e il massimo di un processo di Wiener osservato nel continuo, si ha che:

$$(2.85) \quad -m(\tau) = M(\tau)$$

con

$$m(\tau) = \min_{0 \leq u \leq \tau} X^{Q_s}(u)$$

e

$$M(\tau) = \max_{0 \leq u \leq \tau} -X^{Q_S}(u) = \max_{0 \leq u \leq \tau} X^{Q'_S}(u).$$

Per quanto detto nella sezione 2.2.3 il processo  $\{X^{Q_S}(t)\}$ , rispetto alla misura di probabilità  $Q_S$ , evolve secondo l'equazione differenziale stocastica:

$$dX^{Q_S}(t) = \nu dt + \sigma dW^{Q_S}(t) \quad \text{con} \quad \nu = r + \frac{\sigma^2}{2}.$$

Conseguentemente il processo  $\{X^{Q'_S}(t)\}$ , nella misura  $Q'_S$ , è tale che

$$dX^{Q'_S}(t) = -\nu dt + \sigma dW^{Q'_S}(t) \quad \text{con} \quad \nu = r + \frac{\sigma^2}{2}.$$

Traslando l'identità (2.85) al caso di monitoraggio nel tempo discreto si ha

$$E_t^{Q_S} \left[ \max \left\{ 0 ; e^{-m_n(\tau)} - x \right\} \right] = E_t^{Q'_S} \left[ \max \left\{ 0 ; e^{M_n(\tau)} - x \right\} \right].$$

Per la proposizione (2.82) si ha

$$E_t^{Q'_S} \left[ \max \left\{ 0 ; e^{M_n(\tau)} - x \right\} \right] = e^{-\beta_1 \sigma \sqrt{\Delta t}} E_t^{Q'_S} \left[ \max \left\{ 0 ; e^{M(\tau)} - e^{\beta_1 \sigma \sqrt{\Delta t}} x \right\} \right] + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Applicando la (2.85) per tornare alla misura di probabilità  $Q_S$  e sostituendo nell'equazione (2.84) si ottiene:

$$V_n(\tilde{F}(t), T-t) = S(t) \left\{ O_n(t) - 1 \right\} + K e^{-\beta_1 \sigma \sqrt{\Delta t}} \times \\ E_t^{Q_S} \left[ \max \left\{ 0 ; e^{-m(\tau)} - e^{\beta_1 \sigma \sqrt{\Delta t}} x \right\} \right] + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Sfruttando la nota distribuzione di probabilità del minimo di un moto Browniano<sup>25</sup> si può determinare il valore atteso nel membro di destra dell'equazione ricavando così la formula approssimata di pricing al tempo t di una dynamic fund protection standard monitorata nel discreto:

$$(2.86) \quad V_n(\tilde{F}(t), T-t) = S(t) \left\{ O_n(t) - 1 \right\} + K' \left\{ x' \Phi(d'_1) + \frac{1}{R} x'^{-R} \Phi(d'_2) + \left( 1 - \frac{1}{R} \right) e^{-r\tau} \Phi(d'_3) - x' \right\} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

<sup>25</sup>Si veda la sezione 2.2.3 ed in particolare la nota 14.

in cui si siano posti

$$d'_1 = \frac{\kappa' + r\tau + \frac{1}{2}\sigma^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}, \quad d'_2 = \frac{-\kappa' + r\tau + \frac{1}{2}\sigma^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}, \quad d'_3 = \frac{-\kappa' - r\tau + \frac{1}{2}\sigma^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}},$$

$$K' = K e^{-\beta_1\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad x' = x e^{\beta_1\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad x = \frac{S(t)O(t)}{K},$$

$$\kappa' = \ln(x'), \quad \tau = T - t, \quad R = \frac{2r}{\sigma^2}.$$

La bontà dell'approssimazione fornita dalla formula (2.86) è stata testata da Imai e Boyle<sup>26</sup> attraverso un confronto con i corrispondenti prezzi ottenuti con tecniche di simulazione numerica di tipo Monte Carlo<sup>27</sup>, in relazione a una serie di dynamic fund protections standard monitorate nel discreto ad intervalli giornalieri, settimanali e mensili; con orizzonti contrattuali annuali (T=1), triennali (T=3) e quinquennali (T=5) e con livelli di garanzia differenti (K=80, 90, 100).

In ciascun caso per la valutazione Monte Carlo si è impiegato lo stesso campione di traiettorie per il valore del *naked fund* al fine di "standardizzare" l'effetto della tecnica simulativa sui prezzi. Per la costruzione del campione è stato assunto un modello evolutivo di tipo Black e Scholes<sup>28</sup> e si è proceduto ad una simulazione composta da 1092 passi per ciascun anno, così da ridurre al minimo l'errore sistematico di discretizzazione.

Gli esiti del confronto, riportati nella tabella 2.5, avvalorano la validità della formula (2.86) mostrando che nella quasi totalità dei casi fornisce dei valori molto prossimi a quelli ottenuti con la tecnica Monte Carlo: differenze apprezzabili sono emerse solo per il contratto con durata annuale e cadenza di monitoraggio mensile, vale a dire per il caso con il minor numero di osservazioni.

Confrontando poi i "prezzi Monte Carlo" delle dynamic fund protections standard monitorate nel discreto con il corrispondente prezzo della dynamic fund protection monitorata nel continuo, si evidenzia che la discretizzazione della garanzia riduce

<sup>26</sup>Si veda [Imai e Boyle (2001)], sezione 4.6.

<sup>27</sup>Per il pricing di una dynamic fund protection standard con tecniche di simulazione numerica di tipo Monte Carlo si veda la sezione 3.1.

<sup>28</sup>Si ricordi che la formula (2.86) è ottenuta anch'essa sotto l'ipotesi che il *naked fund* evolva secondo un moto Browniano geometrico.

Floor (K)	Metodo di calcolo del prezzo della garanzia	Frequenza di Monitoraggio adottata dalla garanzia dinamica			
		continua	giornaliera	settimanale	mensile
		<b>Maturity (T) = 1</b>			
<b>100</b>	Simulazione Monte Carlo	14.793	14.119	13.053	11.375
	Formula approssimata (2.86)	-	14.098	12.977	11.096
<b>90</b>	Simulazione Monte Carlo	6.012	5.695	5.196	4.461
	Formula approssimata (2.86)	-	5.671	5.121	4.197
<b>80</b>	Simulazione Monte Carlo	1.771	1.666	1.494	1.254
	Formula approssimata (2.86)	-	1.648	1.451	1.119
		<b>Maturity (T) = 3</b>			
<b>100</b>	Simulazione Monte Carlo	23.874	23.177	21.993	20.060
	Formula approssimata (2.86)	-	23.124	21.915	19.890
<b>90</b>	Simulazione Monte Carlo	13.465	13.056	12.338	11.194
	Formula approssimata (2.86)	-	13.000	12.253	10.999
<b>80</b>	Simulazione Monte Carlo	6.644	6.443	6.054	5.357
	Formula approssimata (2.86)	-	6.390	5.981	5.295
		<b>Maturity (T) = 5</b>			
<b>100</b>	Simulazione Monte Carlo	29.172	28.395	27.097	25.097
	Formula approssimata (2.86)	-	28.389	27.130	25.021
<b>90</b>	Simulazione Monte Carlo	18.026	17.517	16.709	15.395
	Formula approssimata (2.86)	-	17.511	16.682	15.294
<b>80</b>	Simulazione Monte Carlo	10.137	9.824	9.340	8.559
	Formula approssimata (2.86)	-	9.826	9.326	8.487

Nota: Prezzi di alcune Dynamic Fund Protections Standard con frequenza di monitoraggio continua, giornaliera, settimanale e mensile; valutati in un modello di tipo Black e Scholes con metodo Monte Carlo e con formula approssimata (2.86). I parametri di base adottati sono  $S(0)=100$ ,  $K=100, 90, 80$ ,  $r=0.04$ ,  $\sigma=0.2$  e  $T=1, 3, 5$ . Per i prezzi Monte Carlo si è anche utilizzata la tecnica di *control variate*. La formula approssimata (2.86) fornisce valori molto prossimi a quelli ottenuti con la simulazione numerica. Il prezzo della dynamic fund protection decresce al diradarsi della frequenza di monitoraggio. Fonte:[Imai e Boyle (2001)], tab.10.

Tabella 2.5: Prezzi di alcune Dynamic Fund Protections Standard con differenti frequenze di monitoraggio, valutati in un modello di tipo Black e Scholes con metodo Monte Carlo e con formula approssimata (2.86)

sensibilmente il suo costo. In particolare, il prezzo risulta essere una funzione crescente della frequenza di intervento. Tale relazione è empiricamente verificata sia nell'ipotesi che il *naked fund* evolva secondo un moto Browniano geometrico (si veda la tabella 2.5), sia nel caso in cui segua un processo di tipo "Constant Elasticity of Variance (CEV)"<sup>29</sup> (si veda la tabella 2.6), indipendentemente da quale che sia il valore adottato per il parametro di elasticità  $\alpha \in [0, 2]$ .

---

<sup>29</sup>Per il pricing di dynamic fund protections nell'ipotesi che il sottostante segua un processo di tipo CEV si veda la sezione 3.2.

Floor (K)	Frequenza di Monitoraggio adottata dalla garanzia dinamica			
	continua ( <i>dev std</i> )	giornaliera ( <i>dev std</i> )	settimanale ( <i>dev std</i> )	mensile ( <i>dev std</i> )
<b>Fattore di Elasticità (<math>\alpha</math>) = 2</b>				
<b>100</b>	14.793 -	14.119 (0.015)	13.053 (0.015)	11.375 (0.015)
<b>90</b>	6.012 -	5.696 (0.016)	5.197 (0.016)	4.461 (0.016)
<b>80</b>	1.771 -	1.667 (0.018)	1.495 (0.018)	1.255 (0.018)
<b>Fattore di Elasticità (<math>\alpha</math>) = 1</b>				
<b>100</b>	15.336 (0.002)	1.603 (0.014)	13.452 (0.014)	11.653 (0.014)
<b>90</b>	6.566 (0.002)	6.208 (0.015)	5.647 (0.015)	4.824 (0.016)
<b>80</b>	2.231 (0.002)	2.094 (0.017)	1.876 (0.018)	1.570 (0.018)
<b>Fattore di Elasticità (<math>\alpha</math>) = 0</b>				
<b>100</b>	16.040 (0.003)	15.232 (0.014)	13.971 (0.014)	12.014 (0.013)
<b>90</b>	7.264 (0.003)	6.848 (0.014)	6.203 (0.014)	5.260 (0.015)
<b>80</b>	2.830 (0.003)	2.647 (0.016)	2.361 (0.017)	1.963 (0.017)

Nota: Prezzi di alcune Dynamic Fund Protections Standard con frequenza di monitoraggio continua, giornaliera, settimanale e mensile; valutati con metodo Monte Carlo in modelli di tipo Constant Elasticity of Variance (CEV) al variare del fattore di elasticità  $\alpha = 0, 1, 2$ . I parametri di base adottati sono  $S(0) = 100$ ,  $K = 100, 90, 80$ ,  $r = 0.04$ ,  $\sigma_{BS} = 0.2$  e  $T = 1$ . Si è anche utilizzata la tecnica di *control variate*. Fra parentesi si riportando i valori della deviazione standard delle stime Monte Carlo. Il prezzo della dynamic fund protection decresce al diradarsi della frequenza di monitoraggio.  
Fonte:[Imai e Boyle (2001)], tab.11.

Tabella 2.6: Prezzi di alcune Dynamic Fund Protections Standard con differenti frequenze di monitoraggio, valutati con metodo Monte Carlo in modelli di tipo Constant Elasticity of Variance (CEV)

## Capitolo 3

# Metodo Monte Carlo per il pricing di una Dynamic Fund Protection Standard

Finora il problema di pricing di una dynamic fund protection standard è stato affrontato nell'ambito di un modello di valutazione di tipo Black e Scholes, in cui si ipotizza che il prezzo del fondo azionario sottostante evolva secondo un moto Browniano geometrico. Tuttavia esiste un'ampia letteratura che dimostra che l'ipotesi di lognormalità per i futuri corsi azionari non è del tutto accettabile. Se si utilizza un modello di questo tipo per il pricing di opzioni, i risultati sono affetti da errori sistematici come quelli derivanti dalla ben nota *volatility smile*<sup>1</sup>: la volatilità implicita, calcolata in base ai prezzi di mercato di opzioni con stesso sottostante ma differenti strike price, non è costante, bensì varia in funzione del prezzo di esercizio del derivato. L'ipotesi di lognormalità con volatilità costante non è però in grado di catturare questo effetto. Molti autori hanno mostrato che l'adozione di differenti modelli evolutivi per i corsi azionari produce risultati profondamente diversi rispetto a quelli ottenuti nelle ipotesi di Black e Scholes<sup>2</sup>; pertanto è interessante valutare il

---

<sup>1</sup>Si veda [Davydov e Linetsky (2001)].

<sup>2</sup>Si vedano [Bakshi, Cao e Chen (1997)], [Bakshi, Cao e Chen (2000)], [Boyle e Tian (1999)], [Davydov e Linetsky (2001)], [Hardy (1999a)] e [Hardy (1999b)].

prezzo della dynamic fund protection nell'ambito di un modello più generale.

Assumendo processi stocastici più complessi del semplice moto Browniano non si dispone in genere di una formula chiusa di valutazione. Bisogna quindi ricorrere a metodi di simulazione numerica per determinare il prezzo dell'opzione. In questo capitolo si espongono le principali problematiche legate alla valutazione di una dynamic fund protection standard con metodo Monte Carlo, nonché alcune soluzioni proposte in letteratura per porvi rimedio. L'analisi viene presentata prima nell'ambito di un modello di valutazione di tipo Black e Scholes, quindi è estesa alla classe di modelli di non arbitraggio di tipo Constant Elasticity of Variance (CEV).

### 3.1 Metodo Monte Carlo in un modello di valutazione di tipo Black-Scholes

Si ipotizzi un modello di valutazione alla Black-Scholes del tipo descritto nella sezione 2.2. In particolare, si assuma che il prezzo del fondo azionario sottostante ad una dynamic fund protection standard evolva secondo un moto Browniano geometrico descritto dalle equazioni (2.11) e (2.12). Si è visto che il prezzo della garanzia dinamica è valutabile come

$$(3.1) \quad V(s,T) = e^{-rT} E_0^Q [\tilde{F}(T) - S(T)],$$

dove  $\tilde{F}(T)$  è dato dalla (2.7) e l'apice  $Q$  denota la misura di probabilità risk-neutral, ottenuta sostituendo al coefficiente di deriva originario  $\mu$  della (2.12) il coefficiente di deriva corretto per il rischio  $\mu^* = r - \frac{1}{2}\sigma^2$ .

L'espressione (3.1)<sup>3</sup> ha grande rilevanza pratica, poichè permette di impostare delle procedure di pricing tramite tecniche di simulazione numerica. Nello specifico è possibile valutare la dynamic fund protection standard con metodo Monte Carlo lavorando come segue:

1. Si simuli una passeggiata aleatoria "neutrale al rischio" per il prezzo del fondo azionario  $\{S(t), 0 \leq t \leq T\}$ :

---

<sup>3</sup>La (3.1) è anche nota come rappresentazione *in forma integrale* (o *di aspettativa*) della soluzione dell'equazione di valutazione della dynamic fund protection.

- (a) Si consideri l'orizzonte contrattuale  $[0, T]$ .
- (b) Si suddivida in un numero finito di  $N$  sotto-intervalli di ampiezza  $\Delta t = \frac{T}{N}$ .
- (c) Si parta dal valore (noto) in zero del fondo azionario  $s = S(0)$ .
- (d) Si utilizzi un opportuno algoritmo di discretizzazione temporale per aggiornare il prezzo (aleatorio) del fondo ad ogni intervallo  $t + j\Delta t$ , con  $t = 0$  e  $j = 0, 1, \dots, N$ .

Nell'ipotesi di lognormalità assunta nel modello di Black e Scholes si può costruire un algoritmo semplice ed esatto basato sulla formula ricorsiva:

$$S(t+\Delta t) = S(t) e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\phi}$$

dove  $\phi$  è un numero pseudo-casuale estratto da una distribuzione normale standard. In generale bisogna invece ricorrere a metodi approssimati come quello di Eulero, o quello di Milstein<sup>4</sup> che comportano rispettivamente un errore dell'ordine di  $o(\delta t)$  e di  $o(\delta t^2)$ .

- (e) La traiettoria così ottenuta rappresenta una possibile realizzazione del cammino del prezzo del sottostante in un mondo risk-neutral.
2. Si calcoli il payoff della dynamic fund protection in base alla realizzazione ottenuta.
  3. Si ripetano i punti uno e due un numero sufficientemente elevato di volte, in modo da costruire un campione significativo di realizzazioni del payoff.
  4. Si calcoli il valore medio di tutte le realizzazioni, ricavando una stima del payoff atteso  $E_0^Q[\tilde{F}(T) - S(T)]$ .
  5. Si attualizzi finanziariamente l'importo ottenuto moltiplicandolo per il fattore di sconto risk-free  $e^{-rT}$ .

Il risultato dell'algoritmo rappresenta una stima Monte Carlo del prezzo della dynamic fund protection standard.

---

<sup>4</sup>Si veda [Wilmott (2001)], capitolo 26.

Nell'ambito del modello di Black e Scholes si è visto che è possibile determinare una formula chiusa di valutazione per la garanzia dinamica. Tale formula, espressa dalla (2.29), fornisce una valutazione esatta<sup>5</sup> del prezzo e può dunque essere adottata come parametro di riferimento per misurare la bontà della stima Monte Carlo. In particolare è interessante indagare come la precisione della valutazione dipenda dal numero di simulazioni effettuate (M) e dal numero di passi di discretizzazione (N). Il risultato di quest'analisi risulterà utile anche quando si considereranno altri tipi di processi stocastici sottostanti nei quali non si disporrà più di una formula chiusa di pricing.

Ci sono due fonti di errore che intervengono nella valutazione Monte Carlo. La prima è l'errore sistematico dovuto alla discretizzazione del processo di prezzo azionario: la simulazione numerica riproduce l'evoluzione dei corsi azionari ad intervalli di tempo prefissato; così facendo si perde tutta l'informazione sulle variazioni che intercorrono fra una rilevazione e la successiva. Sebbene la discretizzazione non crei grossi problemi per il pricing di garanzie statiche come le opzioni plain vanilla, essa incide sensibilmente nella valutazione di opzioni path dependent con monitoraggio nel continuo come la dynamic fund protection. Per ridurre l'errore sistematico bisogna aumentare il numero dei passi (N) utilizzati in ogni singola traiettoria.

La seconda fonte di imprecisione è l'errore statistico (o errore casuale): la tecnica Monte Carlo si fonda sulla costruzione di un campione finito di realizzazioni attraverso l'impiego di numeri casuali. Il valore dell'opzione, calcolato come media campionaria, varierà ogni volta che viene effettuata la simulazione. In termini generici, l'errore tra la stima Monte Carlo e il prezzo dell'opzione è dell'ordine dell'inverso della radice quadrata del numero di simulazioni ( $\frac{1}{\sqrt{M}}$ ). Più precisamente, sia  $\epsilon$  la deviazione standard del valore dell'opzione ottenuta mediante una singola simulazione; dopo M simulazioni la deviazione standard è  $\frac{\epsilon}{\sqrt{M}}$ . Per migliorare l'accuratezza di un fattore 10 si devono quindi effettuare un numero di simulazioni  $10^2 = 100$  volte maggiori.

Si può empiricamente osservare<sup>6</sup> che al crescere del numero dei passi di discretiz-

---

<sup>5</sup>Per "valutazione esatta" è chiaramente da intendersi "valutazione esatta nell'ambito delle ipotesi adottate nel modello".

<sup>6</sup>Si veda la tabella 3.1.

zazione  $N$  l'errore sistematico si riduce e la stima Monte Carlo tende ad avvicinarsi al valore esatto della dynamic fund protection standard espresso dalla formula (2.29); tuttavia l'errore statistico, misurato attraverso la deviazione standard, resta pressochè inalterato. Al contrario, aumentando il numero delle simulazioni  $M$  l'errore sistematico non subisce sostanziali riduzioni, mentre l'errore casuale decresce secondo il già citato fattore di convergenza  $\frac{1}{\sqrt{M}}$ . Per ottenere dei buoni risultati bisogna quindi calibrare adeguatamente la scelta di  $M$  ed  $N$  in modo da tener conto di entrambe le fonti di imprecisione. [Andersen e Boyle (1999)] hanno studiato la relazione fra errore sistematico ed errore casuale stabilendo che un buon bilanciamento fra i due si ottiene per un valore di  $M$  che sia dell'ordine di  $N^2$ : se ad esempio si sceglie di compiere  $N=1,000$  passi per ogni singola traiettoria, bisognerà effettuare  $M=1,000^2=1,000,000$  di simulazioni per ottenere una stima che sia al contempo non troppo distorta e non troppo volatile.

Se si utilizza la classica tecnica Monte Carlo per il pricing di una dynamic fund protection si osserva però che, mentre la deviazione standard si riduce in maniera soddisfacente, la correttezza della stima non è altrettanto buona. Si veda la tabella 3.1 nella quale si riportano i risultati ottenuti da [Imai e Boyle (2001)]. Nel caso di  $N=1,000$  passi ed  $M=1,000,000$  di simulazioni, per il fissato set di parametri  $s=100$ ,  $K = 100$ ,  $r = 0.04$ ,  $\sigma = 0.2$ , e  $T = 1$ , si ottiene una valutazione Monte Carlo di 14.370 con una deviazione standard di 0.015 contro un prezzo effettivo della garanzia di 14.7931. A fronte di una volatilità molto bassa si ha dunque una distorsione che è più di 28 volte l'errore standard. In altre parole, anche se si utilizzano ben mille passi per un singolo anno, permane un consistente errore sistematico che è ancor più insidioso perchè associato ad un falso livello di confidenza.

Ricorrendo all'analogia fra opzioni lookback e dynamic fund protection<sup>7</sup>, [Imai e Boyle (2001)] hanno suggerito di adottare la stessa correzione precedentemente proposta da [Andersen e Brotherton-Ratcliffe (1996)] per il pricing di lookback options con tecniche Monte Carlo: infatti in entrambi i casi, trattandosi di garanzie path dependent che agiscono nel continuo, si deve modificare l'approccio simulativo standard

---

<sup>7</sup>Si veda la successiva sezione 6.2.

NUMERO DI PASSI (N)	NUMERO DI SIMULAZIONI (M)			
	10,000 (dev std)	100,000 (dev std)	500,000 (dev std)	1,000,000 (dev std)
1	5.977 (0.146)	6.008 (0.046)	6.012 (0.020)	6.015 (0.014)
10	11.089 (0.146)	11.124 (0.047)	11.102 (0.021)	11.096 (0.015)
250	13.985 (0.150)	13.992 (0.048)	13.970 (0.021)	13.978 (0.015)
1,000	14.499 (0.152)	14.396 (0.048)	14.372 (0.022)	14.370 (0.015)

Nota: Prezzi di una Dynamic Fund Protection Standard stimati con tecnica Monte Carlo standard nell'ipotesi di un modello di valutazione di tipo Black e Scholes con parametri  $s = 100$ ,  $K = 100$ ,  $r = 0.04$ ,  $\sigma = 0.2$  e  $T = 1$ . È pure riportato il valore della deviazione standard delle stime. Si sono effettuate una serie di valutazioni variando il numero dei passi di discretizzazione N ed il numero delle simulazioni M. Il prezzo esatto della garanzia, fornito dalla formula chiusa (2.29), è 14.7931. L'errore sistematico è significativo anche per elevati valori di M ed N. Fonte: [Imai e Boyle (2001)], tabella 2.

Tabella 3.1: Stima del prezzo di una Dynamic Fund Protection Standard con metodo Monte Carlo standard

per riuscire a catturare l'effettivo valore minimo<sup>8</sup> del prezzo del sottostante all'interno di ogni sottointervallo di discretizzazione. Come mostrato nella tabella 3.2, l'evidenza empirica conferma la validità della proposta. Confrontando con la tabella 3.1 si osserva una sostanziale riduzione della distorsione. Il metodo Monte Carlo con correzione

NUMERO DI PASSI (N)	NUMERO DI SIMULAZIONI (M)			
	10,000 (dev std)	100,000 (dev std)	500,000 (dev std)	1,000,000 (dev std)
1	14.767 (0.154)	14.795 (0.048)	14.793 (0.022)	14.792 (0.015)
10	14.814 (0.151)	14.830 (0.048)	14.813 (0.022)	14.811 (0.015)
250	14.809 (0.151)	14.817 (0.048)	14.796 (0.022)	14.803 (0.015)
1,000	14.918 (0.153)	14.814 (0.048)	14.789 (0.022)	14.787 (0.015)

Nota: Prezzi di una Dynamic Fund Protection Standard stimati con tecnica Monte Carlo e correzione di *Andersen e Brotherton-Ratcliffe* nell'ipotesi di un modello di valutazione di tipo Black e Scholes con parametri  $s = 100$ ,  $K = 100$ ,  $r = 0.04$ ,  $\sigma = 0.2$  e  $T = 1$ . È pure riportato il valore della deviazione standard delle stime. Si sono effettuate una serie di valutazioni variando il numero dei passi di discretizzazione N ed il numero delle simulazioni M. Il prezzo esatto della garanzia, fornito dalla formula chiusa (2.29), è 14.7931. Si confronti con la tabella 3.1: l'errore sistematico si è fortemente ridotto. Fonte: [Imai e Boyle (2001)], tabella 3.

Tabella 3.2: Stima del prezzo di una Dynamic Fund Protection Standard con metodo Monte Carlo e correzione di *Andersen e Brotherton-Ratcliffe* (ABR)

di [Andersen e Brotherton-Ratcliffe (1996)] (ABR) può dunque essere utilizzato per il pricing di una dynamic fund protection in ogni tipo di ipotesi evolutiva per il prezzo del sottostante.

<sup>8</sup>Oppure "l'effettivo valore massimo" in alcuni tipi di opzioni lookback. Si veda la sezione 6.2.

### 3.2 Metodo Monte Carlo in un modello di valutazione di tipo Constant Elasticity of Variance (CEV)

Una possibile generalizzazione dell'ipotesi di moto Browniano geometrico si ha assumendo che il prezzo del sottostante evolva secondo un processo diffusivo di tipo Constant Elasticity of Variance (CEV), ovvero che nella misura di probabilità risk-neutral  $Q$  la variazione infinitesima del prezzo del titolo (o fondo) azionario sia descritta dall'equazione differenziale stocastica

$$(3.2) \quad dS(t) = rS(t) dt + \sigma S(t)^{\frac{\alpha}{2}} dW^Q(t).$$

dove  $dW^Q(t)$  è un moto Browniano standard e le costanti  $r$  ( $r > 0$ ),  $\alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ) e  $\sigma$  ( $\sigma > 0$ ) rappresentano rispettivamente la forza di interesse risk-free, il fattore di elasticità ed il parametro di scala.

Questa classe di processi, originariamente introdotta in letteratura finanziaria da [Cox (1975)], ricomprende al suo interno il moto Browniano geometrico ( $\alpha = 2$ ) utilizzato nel modello di [Black e Scholes (1973)] e di [Merton (1973)] ed il processo stocastico assunto nel modello "assoluto" ( $\alpha = 0$ ) e nel modello "a radice quadrata" ( $\alpha = 1$ ) di [Cox e Ross (1976)].

In base alla (3.2), la varianza istantanea del prezzo del titolo è uguale a

$$\frac{\text{VAR}[S(t)]}{dt} = \sigma^2 S(t)^\alpha,$$

da cui

$$\frac{\frac{d \text{VAR}[S(t)]}{\text{VAR}[S(t)]}}{\frac{dS(t)}{S(t)}} = \alpha.$$

La costante  $\alpha$  può dunque essere interpretata come l'elasticità della varianza istantanea del prezzo dell'azione.

Il modello originario di [Cox (1975)] restringeva il range del parametro ad  $0 \leq \alpha \leq 2$ , successivamente ampliato ad ogni  $\alpha \leq 2$ . [Emanuel e MacBeth (1982)] hanno esteso ulteriormente il modello considerando il caso di  $\alpha > 2$ . [Reiner (1994)] e [Jackwerth e Rubinstein (1998)] hanno stimato l'elasticità del modello CEV implicita nei prezzi

delle opzioni scritte su titoli azionari dell'indice S&P 500, trovando che i suoi valori sono tipicamente molto minori di due: si arriva fino ad  $\alpha = -6$ .

Nella classe di processi CEV la volatilità istantanea, definita come la radice quadrata della varianza del tasso istantaneo di rendimento del titolo, è uguale a

$$(3.3) \quad \sigma(S(t)) = \sqrt{\text{VAR} \left[ \frac{dS(t)}{S(t)dt} \right]} = \sigma S(t)^{\frac{\alpha}{2}-1}.$$

La costante  $\sigma$  rappresenta il parametro di scala del modello, nel senso che determina la volatilità istantanea iniziale in  $t = 0$ .

Per  $\alpha > 2$  ( $\alpha < 2$ ) la funzione  $\sigma(S(t))$  è monotona crescente (decescente) rispetto ad  $S(t)$ ; pertanto in un processo di tipo CEV con  $\alpha \neq 2$  la volatilità dell'azione è connessa al suo prezzo. Questo è coerente con quanto si osserva empiricamente sui mercati reali dove la volatilità tende a variare a seconda che i corsi azionari salgano o scendano.

Come osservato da [Cox (1996)], l'origine della *volatility smile* sta nella correlazione negativa che esiste fra le variazioni dei prezzi delle azioni e le variazioni della volatilità. A differenza del modello di Black e Scholes ( $\alpha = 2$ ), il modello CEV con parametro di elasticità  $\alpha < 2$  è in grado di incorporare tale correlazione negativa e quindi ben rappresenta il fenomeno in questione.

[Boyle e Tian (1999)] e [Davydov e Linetsky (2001)] hanno dimostrato che i prezzi delle opzioni esotiche sono molto sensibili alle variazioni del parametro di elasticità. In particolare si ottengono risultati molto diversi a seconda che si ipotizzino corsi azionari che seguano un processo di tipo CEV con  $\alpha \neq 2$  piuttosto che un moto Browniano geometrico ( $\alpha = 2$ ). Partendo da questi presupposti [Imai e Boyle (2001)] hanno esteso l'applicazione del modello CEV con  $0 \leq \alpha \leq 2$  al pricing di una dynamic fund protection standard.

Per fare in modo che i prezzi valutati in base a differenti valori di  $\alpha$  siano fra loro comparabili bisogna standardizzare la volatilità istantanea iniziale facendo sì che sia la stessa in ciascun modello. Seguendo [Macbeth e Merville (1980)], si ponga

$$(3.4) \quad \sigma = \sigma_{BS} S(0)^{1-\frac{\alpha}{2}}$$

dove  $\sigma_{BS}$  è la volatilità istantanea del modello di Black e Scholes ( $\alpha = 2$ ).

Per valutare il prezzo della dynamic fund protection standard nell'ambito del modello CEV ipotizzato si utilizzi il metodo Monte Carlo con correzione di [Andersen e Brotherton-Ratcliffe (1996)], in modo da ridurre l'errore sistematico derivante dalla discretizzazione del prezzo azionario sottostante<sup>9</sup>.

Al variare del numero dei passi  $N$  e delle simulazioni  $M$ , per un fissato set di parametri  $\alpha = 1$ ,  $S(0) = 100$ ,  $K = 100$ ,  $r = 0.04$ ,  $\sigma_{BS} = 0.2$  e  $T = 1$ , simulando si ottengono i prezzi riportati nella tabella 3.3.

NUMERO DI PASSI (N)	NUMERO DI SIMULAZIONI (M)			
	10,000 (dev std)	100,000 (dev std)	500,000 (dev std)	1,000,000 (dev std)
1	15.279 (0.144)	15.275 (0.046)	15.255 (0.021)	15.253 (0.015)
250	15.363 (0.143)	15.356 (0.045)	15.334 (0.020)	15.341 (0.014)
1,000	15.431 (0.144)	15.352 (0.046)	15.332 (0.020)	15.329 (0.014)

Nota: Prezzi di una Dynamic Fund Protection Standard stimati con tecnica Monte Carlo e correzione di Andersen e Brotherton-Ratcliffe nell'ipotesi di un modello di valutazione di tipo CEV con fattore di elasticità  $\alpha = 1$  e parametri  $s = 100$ ,  $K = 100$ ,  $r = 0.04$ ,  $\sigma_{BS} = 0.2$  e  $T = 1$ . É pure riportato il valore della deviazione standard delle stime. Si sono effettuate una serie di valutazioni variando il numero dei passi di discretizzazione  $N$  ed il numero delle simulazioni  $M$ .  
Fonte: [Imai e Boyle (2001)], tabella 4.

Tabella 3.3: Stima del prezzo di una Dynamic Fund Protection Standard con metodo Monte Carlo e correzione ABR in un modello valutativo CEV

La stima può essere ulteriormente migliorata adottando la tecnica di controllo variato (*control variate*) proposta da [Boyle, Broadie e Glasserman (1997)]: siano  $V(s,T)$  e  $V(s,T, \alpha)$  i prezzi esatti di una dynamic fund protection standard nel modello di Black e Scholes ( $\alpha = 2$ ) e nel modello CEV con generico parametro di elasticità  $\alpha$ . Siano  $\widehat{V}(s,T)$  e  $\widehat{V}(s,T, \alpha)$  le rispettive stime ottenute con metodo Monte Carlo e correzione ABR. Nel caso di  $\alpha = 2$  si dispone della formula chiusa (2.29) per valutare

<sup>9</sup>Si veda la sezione 3.1.

$V(s,T)$ . Ipotizzando che l'errore contenuto nella stima  $\widehat{V}(s,T)$  sia eguale a quello della stima  $\widehat{V}(s,T,\alpha)$ , si ha che una miglior valutazione del prezzo  $V(s,T,\alpha)$  è data da

$$\widehat{V}(s,T,\alpha) - [\widehat{V}(s,T) - V(s,T)].$$

NUMERO DI PASSI (N)	NUMERO DI SIMULAZIONI (M)			
	10,000 (dev std)	100,000 (dev std)	500,000 (dev std)	1,000,000 (dev std)
1	15.258 (0.015)	15.238 (0.005)	15.236 (0.002)	15.236 (0.002)
250	15.348 (0.016)	15.331 (0.005)	15.331 (0.002)	15.331 (0.002)
1,000	15.306 (0.017)	15.331 (0.005)	15.336 (0.002)	15.335 (0.002)

Nota: Prezzi di una Dynamic Fund Protection Standard stimati con tecnica Monte Carlo, correzione ABR e *control variate* nell'ipotesi di un modello di valutazione di tipo CEV con fattore di elasticità  $\alpha = 1$  e parametri  $s = 100$ ,  $K = 100$ ,  $r = 0.04$ ,  $\sigma_{BS} = 0.2$  e  $T = 1$ . È pure riportato il valore della deviazione standard delle stime. Si sono effettuate una serie valutazioni variando il numero dei passi di discretizzazione N ed il numero delle simulazioni M. La tecnica di controllo variato è costruita in base al prezzo esatto della garanzia ottenuto con la formula chiusa (??) per il caso di  $\alpha = 2$ . Si confronti con la tabella 3.3: l'adozione della tecnica *control variate* riduce sensibilmente la deviazione standard. Fonte: [Imai e Boyle (2001)], tabella 5.

Tabella 3.4: Stima del prezzo di una Dynamic Fund Protection Standard con metodo Monte Carlo, correzione ABR e *control variate* in un modello valutativo CEV

Si confrontino i prezzi della dynamic fund protection standard calcolati nella tabella 3.4 con tecnica Monte Carlo, correzione ABR e *control variate* con quelli ottenuti in precedenza nella tabella 3.3 senza l'utilizzo della variazione controllata. Si osserva una riduzione della deviazione standard di 7-10 volte. Il metodo Monte Carlo con correzione ABR e variazione controllata fornisce dunque delle ottime stime per il prezzo della garanzia.

Si può infine indagare su come il coefficiente di elasticità incida sul prezzo. Stimando

FLOOR (K)	COEFFICIENTE DI ELASTICITÀ ( $\alpha$ )				
	0 $\Delta_{BS}$	0.5 $\Delta_{BS}$	1.0 $\Delta_{BS}$	1.5 $\Delta_{BS}$	2 $\Delta_{BS}$
100	16.041 (8.44%)	15.661 (5.87%)	15.335 (3.66%)	15.049 (1.73%)	14.793 (-)
90	7.267 (20.87%)	6.893 (14.65%)	6.567 (9.23%)	6.276 (4.39%)	6.012 (-)
80	2.833 (59.97%)	2.510 (41.73%)	2.233 (26.09%)	1.988 (12.25%)	1.771 (-)

Nota: Prezzi di una Dynamic Fund Protection Standard stimati con tecnica Monte Carlo, correzione ABR e *control variate* (tranne che per  $\alpha = 2$ ) nell'ipotesi di un modello di valutazione di tipo CEV con parametri  $s = 100$ ,  $r = 0.04$ ,  $\sigma_{BS} = 0.2$ ,  $T = 1$  ed al variare del coefficiente di elasticità  $\alpha = 0.0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$  e del floor  $K = 100, 90, 80$ . É pure riportata la variazione percentuale del prezzo rispetto alla stima nel modello di Black e Scholes ( $\alpha = 2$ ). Si sono impiegati  $N=1,000$  passi di discretizzazione ed  $M=1,000,000$  di simulazioni. La tecnica di controllo variato è costruita in base al prezzo esatto della garanzia ottenuto con la formula chiusa (2.29) per il caso di  $\alpha = 2$ . Al decrescere del coefficiente di elasticità  $\alpha$  il prezzo della garanzia aumenta e lo fa in maniera molto sensibile. Fonte: [Imai e Boyle (2001)], tabella 9.

Tabella 3.5: Sensitività del prezzo di una Dynamic Fund Protection Standard alle variazioni del parametro di elasticità ( $\alpha$ ) in un modello valutativo CEV

il valore della dynamic fund protection standard per diversi livelli di protezione  $K$  ( $K = 80, 90, 100$ ) e per differenti scelte di  $\alpha$  ( $\alpha = 2.0, 1.5, 1.0, 0.5, 0$ ), dalla tabella 3.5 si evince che il prezzo della garanzia dinamica ha una sensitività piuttosto elevata alle variazioni del parametro di elasticità: infatti decresce velocemente al crescere di  $\alpha$ . Questo non è affatto sorprendente data l'affinità con le opzioni lookback<sup>10</sup> per le quali si evidenzia un andamento del tutto analogo.

In particolare, si presti attenzione al fatto che si ottengono risultati molto diversi a seconda che si adotti l'ipotesi di lognormalità del sottostante ( $\alpha = 2$ ) piuttosto che un'evoluzione di tipo CEV con parametro di elasticità  $\alpha < 2$ ; è quindi evidente l'importanza di definire in maniera appropriata il modello di valutazione, soffermandosi accuratamente sulla scelta del valore da assegnare ad  $\alpha$ .

---

<sup>10</sup>Si veda la sezione 6.2.



## Capitolo 4

# La Dynamic Fund Protection Europea con livello di garanzia esponenziale

### 4.1 Descrizione

In questa sezione si considera una variante più complessa di dynamic fund protection europea in cui il livello minimo garantito per il valore del *protected fund*  $\tilde{F}(t)$  non è più costante lungo l'intero orizzonte contrattuale, bensì è una funzione deterministica, esponenziale, non decrescente di tipo

$$(4.1) \quad K(t) = K e^{\gamma t} \quad \text{con } \gamma > 0 \quad 0 \leq t \leq T$$

dove  $T$  è la maturity dell'opzione e  $K$  è il livello minimo garantito iniziale che cresce nel tempo con legge di capitalizzazione esponenziale ad un'intensità istantanea di rendimento garantito (costante)  $\gamma$ . Nello specifico si può porre:

$$K = k S(0) \quad \text{con } 0 < k \leq 1$$

in cui  $S(0)$  è l'importo inizialmente investito per l'acquisto di una quota di *primary fund* e  $k$  è una prefissata aliquota non superiore ad uno.

Anche in questo "nuovo" tipo di garanzia il *protected fund*  $\{\tilde{F}(t), 0 \leq t \leq T\}$  è contraddistinto dalle stesse caratteristiche generali già descritte per la dynamic fund protection standard, cioè:

- $\tilde{F}(0) = S(0)$ .
- L'intensità istantanea di rendimento di  $\tilde{F}(t)$  è identica a quella di  $S(t)$  in ogni intervallo temporale in cui sia  $\tilde{F}(t) > K e^{\gamma t}$ .
- Ogni volta che il valore di  $\tilde{F}(t)$  dovesse scendere al di sotto della barriera esponenziale  $K e^{\gamma t}$  verrebbe istantaneamente incrementato di un importo tale da riportarlo esattamente al livello garantito  $K e^{\gamma t}$  di modo che tale soglia minima non possa mai essere varcata nel corso del contratto.

Si ha pertanto che il payoff a scadenza dell'investimento garantito da una dynamic fund protection europea con livello di garanzia esponenziale è ottenibile in maniera analoga a quanto visto nella sezione 2.1 ed è tale che:

$$(4.2) \quad \tilde{F}(T) = S(T) \max \left\{ 1, \max_{0 \leq u \leq T} \frac{K e^{\gamma u}}{S(u)} \right\}.$$

Confrontando la (4.2) con la (2.7) si vede subito che la dynamic fund protection standard non è altro che un caso particolare di dynamic fund protection con livello di garanzia esponenziale in cui si ponga  $\gamma = 0$ .

## 4.2 Formula chiusa di pricing in un mondo alla Black-Scholes

Il pricing di una dynamic fund protection europea con livello di garanzia esponenziale in un modello di valutazione di tipo Black e Scholes come quello descritto nella sezione 2.2 può essere ricondotto al pricing di una dynamic fund protection standard adottando un opportuno cambio di numerario.

Si definisca una nuova unità di misura indicizzata per gli importi monetari, tale che nel generico istante  $t$  faccia corrispondere  $e^{-\gamma t}$  unità valutarie ad ogni singolo euro. Si denotino con  $\tilde{F}_i(t)$  e con  $S_i(t)$  i valori del *protected fund* e del *naked fund*

espressi in termini della nuova unità di conto. Si ha che al tempo  $t$  valgono i rapporti di cambio:

$$(4.3) \quad \tilde{F}_i(t) = e^{-\gamma t} \tilde{F}(t).$$

$$(4.4) \quad S_i(t) = e^{-\gamma t} S(t).$$

Si consideri il payoff a scadenza dell'investimento garantito descritto dalla (4.2). Tenendo conto della (4.3) e della (4.4), questo può essere espresso nella nuova unità valutaria moltiplicando ambo i membri dell'equazione per  $e^{-\gamma t}$  ed osservando che

$$\frac{K e^{\gamma u}}{S(u)} = \frac{K}{S(u) e^{-\gamma u}} = \frac{K}{S_i(u)}.$$

Si ha pertanto che:

$$(4.5) \quad \tilde{F}_i(T) = S_i(T) \max \left\{ 1, \max_{0 \leq u \leq T} \frac{K}{S_i(u)} \right\}.$$

Confrontando la (2.7) con la (4.5) si nota che quest'ultima rappresenta il payoff a scadenza di un investimento coperto da una garanzia dinamica standard con *floor* costante  $K$ . Per il pricing del *protected fund* di una dynamic fund protection con livello di garanzia esponenziale si può pertanto ricorrere alla nota formula (2.28) nella quale si effettui la sostituzione

$$(4.6) \quad r \rightarrow (r - \gamma)$$

per tener conto del necessario cambio di numerario: infatti dalla (2.11) e dalla (4.4) si ricava che il prezzo del *naked fund* della dynamic fund protection standard (4.5) evolve secondo un moto Browniano geometrico descritto dall'equazione<sup>1</sup>:

$$S_i(t) = S(0) e^{(\mu - \gamma)t + \sigma W(t)}.$$

Confrontando con la (2.11) si osserva che le due equazioni coincidono a meno di un termine correttivo  $\gamma$  sottratto al coefficiente di deriva. Si può dunque ripercorrere l'argomentazione di pricing già esposta nella sezione 2.2.1 tenendo pure conto di

---

<sup>1</sup>Si fa qui riferimento all'evoluzione rispetto alla misura di probabilità naturale  $P$ .

questa correzione ed ottenendo infine una formula del tutto analoga alla (2.28) a meno della sostituzione (4.6).

Per determinare il prezzo della sola garanzia dinamica si ricordi la relazione (2.10) e si sottragga il valore in zero del *primary fund*  $S_i(0) = S(0)$  dal prezzo del *protected fund*.

### 4.3 Formula chiusa di pricing in un mondo alla Black-Scholes con dividendi e intensità istantanea di partecipazione non unitaria

Nelle precedenti sezioni si è lavorato sotto la fondamentale ipotesi che il fondo di investimento sottostante la dynamic fund protection non paghi dividendi o, nel caso in cui ne paghi, questi vengano istantaneamente reinvestiti nel fondo stesso. Altra ipotesi forte finora implicitamente adottata è che il *primary fund* retroceda la totalità dei rendimenti realizzati. Sebbene queste assunzioni semplifichino fortemente il problema di pricing, di fatto sono ben poco realistiche. In questa sezione ci si propone pertanto di generalizzare il modello di valutazione ammettendo sia la possibilità che vi siano dividendi non reinvestiti, sia che vi possa essere un'intensità istantanea di partecipazione non unitaria.

Formalizziamo i termini del problema. Sia  $I(t)$  il valore al tempo  $t$  di un indice che non tenga conto dei reinvestimenti dei dividendi staccati dai titoli azionari sottostanti<sup>2</sup>. Si supponga che tali dividendi siano pagati con continuità secondo un *dividend-yield rate*  $\zeta$  ( $\zeta \geq 0$ ) deterministico e costante, ovvero che nell'intervallo di tempo infinitesimo  $[t, t+dt]$  sia staccato un ammontare  $\zeta I(t)dt$  di dividendi. Si assuma che il valore dell'indice evolva secondo un moto Browniano geometrico

$$(4.7) \quad I(t) = I(0) e^{Y(t)}, \quad t \geq 0$$

dove  $\{Y(t)\}$  è un processo di Wiener con coefficiente di diffusione  $\sigma$ .

---

<sup>2</sup>È il caso per esempio dello Standard & Poor's 500.

Si indichi con  $F(t)$  il valore al tempo  $t$  di una quota di un fondo di investimento che preveda un'intensità istantanea di partecipazione  $p$  rispetto all'indice di riferimento  $I(t)$  secondo la relazione<sup>3</sup>:

$$(4.8) \quad F(t) = f e^{pY(t)}, \quad t \geq 0$$

con  $f = F(0)$ . Si ipotizzi che il fondo sia garantito da una dynamic fund protection europea con livello di garanzia esponenziale di importo  $fK(t)$  tale che:

$$(4.9) \quad K(t) = k e^{\gamma t}, \quad 0 < k \leq 1 \quad 0 \leq t \leq T$$

in cui  $T$  è la maturity del contratto. Per quanto detto nelle sezioni 2.1 e 4.1, il numero di quote del fondo che devono essere accreditate sul conto del cliente al generico tempo  $t$  in ragione della garanzia dinamica è

$$(4.10) \quad n(t) = \max \left\{ 1, \max_{0 \leq s \leq t} \frac{fK(s)}{F(s)} \right\} \quad 0 \leq t \leq T.$$

Queste divengono esigibili solo alla scadenza  $T$  in cui hanno un controvalore complessivo

$$\tilde{F}(T) = n(T) F(T).$$

Il pricing di una garanzia di questo tipo è un problema piuttosto complesso. Tuttavia può essere notevolmente semplificato ricorrendo ad un potente strumento introdotto da [Gerber e Shiu (2003a)]: la formula chiusa di valutazione della funzione  $B(u, T)$ , definita come la trasformata di Laplace-Stieltjes del valore atteso dell'eccesso del massimo di un moto Browniano rispetto a un prefissato livello costante  $u$  ( $u > 0$ ) entro un orizzonte temporale finito  $[0, T]$ . Questo risulterà molto utile anche per il pricing di opzioni esotiche<sup>4</sup> e di altri tipi di dynamic fund protection<sup>5</sup>

---

<sup>3</sup>Una modalità alternativa per definire il ruolo di  $p$  è data dalla relazione  $F(t) = f(1 + p[e^{Y(t)} - 1])$ . Seguendo l'approccio proposto da [Gerber e Shiu (2003a)] in seguito si adotterà la definizione (4.8).

<sup>4</sup>Si veda la sezione 6.2.

<sup>5</sup>Si veda la sezione 5.2.

### 4.3.1 Un importante strumento di pricing: la formula chiusa di valutazione della funzione $B(u, T)$

Si consideri un processo di Wiener  $\{X(s), s \geq 0\}$  del tipo descritto in (2.12) e tale che  $X(0) = 0$ . Si definisca come in (2.30) la variabile casuale  $M(t)$  rappresentante il massimo del moto Browniano  $\{X(s)\}$  fino al tempo  $t$ . Per un fissato livello costante  $u > 0$ , sia  $D(t)$  l'eccesso di  $M(t)$  rispetto ad  $u$ :

$$(4.11) \quad D(t) = \max\{0, M(t) - u\}.$$

Si definisca la funzione  $B(u, T)$  come la trasformata di Laplace-Stieltjes del valore atteso dell'eccesso del massimo del moto Browniano rispetto al livello  $u$  entro l'orizzonte temporale finito  $[0, T]$ :

$$(4.12) \quad B(u, T) = E \left[ \int_0^T e^{-\delta t} dD(t) \right]$$

con  $\delta$  costante.

Una formula chiusa di valutazione per la funzione (4.12) è proposta in [Gerber e Shiu (2003a)], sezione 2, equazione 13: :

$$(4.13) \quad B(u, T) = -\frac{\mu}{\delta} e^{-\delta T} \Phi \left( \frac{-u + \mu T}{\sigma \sqrt{T}} \right) - \frac{\sigma^2 \xi_1}{2\delta} e^{-\xi_2 u} \Phi \left( \frac{-u}{\sigma \sqrt{T}} + \frac{(\xi_2 - \xi_1) \sigma \sqrt{T}}{2} \right) - \frac{\sigma^2 \xi_2}{2\delta} e^{-\xi_1 u} \Phi \left( \frac{-u}{\sigma \sqrt{T}} + \frac{(\xi_1 - \xi_2) \sigma \sqrt{T}}{2} \right), \quad \text{per } \delta \neq 0$$

dove  $\xi_1$  e  $\xi_2$  sono le radici (non necessariamente reali) dell'equazione di secondo grado<sup>6</sup>

$$(4.14) \quad \frac{\sigma^2}{2} \xi^2 + \mu \xi - \delta = 0.$$

I passaggi chiave per giungere a questo risultato partono dall'osservazione che la variabile casuale  $D(t)$  è una funzione non decrescente di  $t$  lungo ogni possibile traiettoria percorsa dal processo di Wiener sottostante  $\{X(s)\}$ , pertanto l'integrale nella (4.12) può essere interpretato come un integrale di Stieltjes e può essere trattato senza dover

---

<sup>6</sup>L'equazione (4.14) è anche nota in ambito attuariale come "equazione di Lundberg" in onore dell'attuario svedese F.Lundberg che ha evidenziato come un'equazione di questo tipo sia alla base dell'intera teoria del rischio collettiva.

ricorrere ai complessi strumenti del calcolo differenziale stocastico. Si ricorra invece a una nota proprietà probabilistica della media di variabili aleatorie non negative per la quale si ha che:

$$(4.15) \quad \begin{aligned} \mathbb{E}[D(t)] = & \mathbb{E}\left[\left(M(t) - u\right)_+\right] = \int_0^\infty \Pr\left\{\left(M(t) - u\right)_+ \geq y\right\} dy = \\ & \int_u^\infty \Pr\{M(t) \geq x\} dx. \end{aligned}$$

Si consideri la variabile aleatoria  $T_x$  definita come il tempo di primo passaggio del moto Browniano  $\{X(s)\}$  per il livello  $x$ :

$$T_x = \inf \left\{ s > 0 \mid X(s) = x \right\}, \quad x > 0.$$

La sua funzione di distribuzione è quella di una normale inversa con parametro di *shape*  $\frac{\mu x}{\sigma^2}$  e parametro di *scale*  $\frac{\mu^2}{\sigma^2}$ <sup>7</sup>:

$$(4.16) \quad \Pr\{T_x \leq t\} = G_x(t) = \Phi\left(\frac{-x + \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) + e^{\frac{2\mu x}{\sigma^2}} \Phi\left(\frac{-x - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right), \quad t \geq 0.$$

Per ogni  $x > 0$  e  $t > 0$  gli eventi  $\{M(t) \geq x\}$  e  $\{T_x \leq t\}$  sono equivalenti, infatti

$$(4.17) \quad \{M(t) \geq x\} \subseteq \{T_x \leq t\};$$

pertanto si può sfruttare la distribuzione (4.16) per calcolare il valore atteso (4.15) e quindi la sua derivata  $\frac{d}{dt}\mathbb{E}[D(t)]$  che risulta<sup>8</sup>:

$$(4.18) \quad \frac{d}{dt}\mathbb{E}[D(t)] = \mu \Phi\left(\frac{-u + \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) + \frac{\sigma}{\sqrt{t}} \phi\left(\frac{-u + \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right), \quad t \geq 0$$

dove  $\Phi$  è la funzione di distribuzione di una normale standard e  $\phi = \Phi'$  la sua densità di probabilità.

Osservando che la (4.12) può essere riscritta come

$$(4.19) \quad B(u, T) = \int_0^T e^{-\delta t} \frac{d}{dt} \mathbb{E}[D(t)] dt,$$

<sup>7</sup>Si vedano [Chhikara e Folks (1989)], [Seshadri (1993)] o l'appendice in [Gerber e Shiu (2003a)].

<sup>8</sup>Si veda [Gerber e Shiu (2003a)] equazione 12 oppure la disamina di Carisa K.W.Yu in [Gerber e Shiu (2003a)] nella quale si ricava lo stesso risultato per  $\frac{d}{dt}\mathbb{E}[D(t)]$  invertendo l'ordine di integrazione e derivazione e sfruttando la distribuzione di probabilità  $\frac{d}{dt}G_x(t)$ .

si sostituisca la (4.18) nella (4.19) e si risolva, ricavando infine, per  $\delta \neq 0$ , la formula (4.13)<sup>9</sup>.

Si noti che tale equazione di valutazione resta valida anche nel caso in cui la costante  $\delta$  sia negativa ed in particolare anche nel caso in cui le radici dell'equazione (4.14) assumano valori nel campo complesso. In questo senso la (4.13) rappresenta una generalizzazione del Teorema 1 in [Gerber e Pafumi (1998)].

Un'interessante interpretazione della funzione  $B(u, T)$  si ottiene nel caso in cui sia  $\delta > 0$ : si consideri la variabile aleatoria  $D(t)$  come l'ammontare complessivo dei dividendi pagati da una compagnia di assicurazione fino al tempo  $t$ . Si consideri  $\{X(s)\}$  come il processo dei guadagni netti della compagnia. Sia  $\{X(s) - D(s)\}$  il processo dei guadagni netti modificati, nel senso che rappresenti i guadagni netti  $X(s)$  ridotti dell'ammontare complessivo dei dividendi pagati precedentemente  $D(s)$ . La politica della compagnia sia tale che ogni qual volta il processo  $\{X(s) - D(s)\}$  raggiunga un prefissato livello  $u > 0$ , tutti gli eventuali guadagni eccedenti siano istantaneamente pagati sotto forma di dividendo. Si interpreti  $\delta > 0$  come una forza di interesse (rischiosa). Si ha quindi che la (4.12) può essere vista come il valore atteso dei dividendi opportunamente scontati, pagati dalla compagnia di assicurazione nel periodo  $[0, T]$ .

### 4.3.2 La valutazione delle aspettative $C(u; \mu, \sigma)$ e $P(u; \mu, \sigma)$

Si definiscano i valori attesi:

$$(4.20) \quad C(u; \mu, \sigma) = E \left[ \max \left\{ 0, e^{M(T)} - e^u \right\} \right]$$

$$(4.21) \quad P(u; \mu, \sigma) = E \left[ \max \left\{ 0, e^{-u} - e^{-M(T)} \right\} \right]$$

in cui  $u$  sia una costante positiva ed  $M(T)$  sia la variabile casuale "massimo di un moto Browniano con deriva  $\mu$  e volatilità  $\sigma$  nel periodo  $[0, T]$ ", definita come in (2.12) e (2.30) a meno della posizione  $t = T$ .

---

<sup>9</sup>Nel caso in cui sia  $\delta = 0$  si ha che  $B(u, T) = E[D(t)]$ . Per la sua valutazione si vedano [Gerber e Shiu (2003a)] sezione 2, equazione 7 ed equazione 8.

In questa sezione ci si propone di ricavare una formula chiusa per la loro valutazione, da utilizzare successivamente per il pricing di opzioni esotiche e di dynamic fund protections<sup>10</sup>.

Seguendo un procedimento alquanto complesso e laborioso si potrebbero valutare direttamente gli integrali coinvolti nella (4.20) e nella (4.21) ricorrendo alla nota distribuzione del massimo di un moto Browniano<sup>11</sup>.

In maniera molto più immediata si può invece ricorrere all'analogia con la funzione  $B(u, T)$  definita dall'equazione (4.12) della sezione 4.3.1. A tal fine si ponga

$$(4.22) \quad B(u; \mu, \sigma; \delta) = B(u, T)$$

in modo da evidenziare la dipendenza funzionale della (4.12) dai parametri  $u$  e  $\delta$  e dai coefficienti di deriva  $\mu$  e di volatilità  $\sigma$  del moto Browniano sottostante, omettendo invece la dipendenza funzionale dal parametro temporale  $T$  che si ipotizza essere prefissato e costante.

Dalla (4.15), (4.16) e (4.17) segue che per  $u > 0$  si ha

$$(4.23) \quad \frac{d}{dt} E[D(t)] = \frac{d}{dt} \int_u^\infty G_x(t) dx = \int_u^\infty g_x(t; \mu) dx,$$

in cui si è invertito l'ordine di integrazione e derivazione e si è posto

$$(4.24) \quad g_x(t; \mu) = \frac{d}{dt} G_x(t) = \frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma} t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(\mu t - x)^2}{t\sigma^2}}.$$

Si sostituisca la (4.23) nella (4.19), si inverta l'ordine di integrazione e si sfrutti la posizione (4.22), ottenendo infine

$$(4.25) \quad B(u; \mu, \sigma; \delta) = \int_u^\infty \int_0^T e^{-\delta t} g_x(t; \mu) dt dx.$$

Si consideri il valore atteso  $C(u; \mu, \sigma)$ . In base ad una nota proprietà probabilistica della media di variabili aleatorie non negative si ha che

$$(4.26) \quad C(u; \mu, \sigma) = \int_0^\infty \Pr \left[ \left( e^{M(T)} - e^u \right)_+ \geq y \right] dy = \int_0^\infty \Pr \left[ e^{M(T)} - e^u \geq y \right] dy.$$

<sup>10</sup>Si vedano le seguenti sezioni 4.3.3 e 6.2.

<sup>11</sup>Si veda l'equazione (2.35).

Si effettui il cambio di variabile  $x = \ln(y + e^u)$ . Tenendo pure conto della (4.16) e della (4.17) si ricava

$$(4.27) \quad C(u; \mu, \sigma) = \int_0^\infty \Pr [M(T) \geq x] e^x dx = \int_0^\infty G_x(T) e^x dx.$$

Ricordando la definizione (4.24) si può porre

$$(4.28) \quad G_x(T) = \int_0^T g_x(t; \mu) dt.$$

Si applichi una nota proprietà della funzione di densità di una variabile aleatoria con distribuzione normale inversa, per la quale si ha che

$$(4.29) \quad e^{\beta x} g_x(t; \mu) = e^{(\beta\mu + \frac{\beta^2\sigma^2}{2})t} g_x(t; \mu + \beta\sigma^2).$$

Dalla (4.27), (4.28) e (4.29) con  $\beta = 1$ , si ricava che:

$$(4.30) \quad C(u; \mu, \sigma) = \int_u^\infty \int_0^T e^{(\mu + \frac{\sigma^2}{2})t} g_x(t; \mu + \sigma^2) dt dx.$$

Si confronti la (4.30) con la (4.25). Si ha che

$$(4.31) \quad C(u; \mu, \sigma) = B\left(u; \mu + \sigma^2, \sigma; -\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right),$$

ovvero

$$(4.32) \quad C(u; \mu, \sigma) = B\left(\bar{u}; -\bar{\delta} + \frac{\bar{\sigma}^2}{2}, \bar{\sigma}; \bar{\delta}\right)$$

in cui si siano posti

$$(4.33) \quad \bar{u} = u, \quad \bar{\sigma} = \sigma \quad e \quad \bar{\delta} = -\mu - \frac{\sigma^2}{2}.$$

É quindi possibile valutare il valore atteso  $C(u; \mu, \sigma)$  con la formula di valutazione della funzione  $B(\bar{u}; \bar{\mu}, \bar{\sigma}; \bar{\delta})$  espressa dalla (4.13), nella quale si ponga  $\bar{\mu} = -\bar{\delta} + \frac{\bar{\sigma}^2}{2}$ .

Esplicitando si ottiene<sup>12</sup>:

$$(4.34) \quad B\left(\bar{u}; -\bar{\delta} + \frac{\bar{\sigma}^2}{2}, \bar{\sigma}; \bar{\delta}\right) = e^{-\bar{\delta}T} \Phi\left(d_1(\bar{u}, \bar{\sigma}, \bar{\delta})\right) - e^{\bar{u}} \Phi\left(d_2(\bar{u}, \bar{\sigma}, \bar{\delta})\right) - \frac{\bar{\sigma}^2}{2\bar{\delta}} \left[ e^{-\bar{\delta}T} \Phi\left(d_1(\bar{u}, \bar{\sigma}, \bar{\delta})\right) - e^{-\frac{2\bar{\delta}\bar{u}}{\bar{\sigma}^2}} \Phi\left(d_3(\bar{u}, \bar{\sigma}, \bar{\delta})\right) \right]$$

<sup>12</sup>Per  $\bar{\mu} = -\bar{\delta} + \frac{\bar{\sigma}^2}{2}$  dalla (4.14) si ricava che  $\xi_1 = \frac{2\bar{\delta}}{\bar{\sigma}^2}$  e  $\xi_2 = -1$ . Sostituendo nella (4.13) e semplificando si ottiene la (4.34).

in cui si siano posti

$$(4.35) \quad d_1(\bar{u}, \bar{\sigma}, \bar{\delta}) = \frac{-\bar{u} + \left(-\bar{\delta} + \frac{\bar{\sigma}^2}{2}\right)T}{\bar{\sigma}\sqrt{T}},$$

$$(4.36) \quad d_2(\bar{u}, \bar{\sigma}, \bar{\delta}) = \frac{-\bar{u}}{\bar{\sigma}\sqrt{T}} + \frac{\left(-1 - \frac{2\bar{\delta}}{\bar{\sigma}^2}\right)\bar{\sigma}\sqrt{T}}{2} = d_1(\bar{u}, \bar{\sigma}, \bar{\delta}) - \bar{\sigma}\sqrt{T},$$

$$(4.37) \quad d_3(\bar{u}, \bar{\sigma}, \bar{\delta}) = \frac{-\bar{u}}{\bar{\sigma}\sqrt{T}} + \frac{\left(\frac{2\bar{\delta}}{\bar{\sigma}^2} + 1\right)\bar{\sigma}\sqrt{T}}{2} = d_1(\bar{u}, \bar{\sigma}, \bar{\delta}) + \frac{2\bar{\delta}\sqrt{T}}{\bar{\sigma}},$$

con  $\bar{u}$ ,  $\bar{\sigma}$  e  $\bar{\delta}$  definiti come in (4.33).

Lavorando in maniera analoga, per  $P(u; \mu, \sigma)$  si ottiene che

$$(4.38) \quad P(u; \mu, \sigma) = \int_u^\infty \int_0^T e^{-x} g_x(t; \mu) dt dx = \int_u^\infty \int_0^T e^{(-\mu + \frac{\sigma^2}{2})t} g_x(t; \mu - \sigma^2) dt dx$$

in cui si è applicata l'identità (4.29) con  $\beta = -1$ . Si confronti la (4.38) con la (4.25).

Si ha che

$$(4.39) \quad P(u; \mu, \sigma) = B\left(u; \mu - \sigma^2, \sigma; \mu - \frac{\sigma^2}{2}\right),$$

ovvero

$$(4.40) \quad P(u; \mu, \sigma) = B\left(\bar{u}; \bar{\delta} - \frac{\bar{\sigma}^2}{2}, \bar{\sigma}; \bar{\delta}\right)$$

in cui si siano posti

$$(4.41) \quad \bar{u} = u, \quad \bar{\sigma} = \sigma \quad e \quad \bar{\delta} = \mu - \frac{\sigma^2}{2}.$$

É quindi possibile valutare il valore atteso  $P(u; \mu, \sigma)$  con la formula (4.13) nella quale si ponga  $\bar{\mu} = \bar{\delta} - \frac{\bar{\sigma}^2}{2}$ . Esplicitando si ottiene<sup>13</sup>:

$$(4.42) \quad \begin{aligned} B\left(\bar{u}; \bar{\delta} - \frac{\bar{\sigma}^2}{2}, \bar{\sigma}; \bar{\delta}\right) &= -e^{-\bar{\delta}T} \Phi\left(-d_1(-\bar{u}, \bar{\sigma}, \bar{\delta})\right) + e^{-\bar{u}} \Phi\left(-d_2(-\bar{u}, \bar{\sigma}, \bar{\delta})\right) \\ &\quad - \frac{\bar{\sigma}^2}{2\bar{\delta}} \left[ -e^{-\bar{\delta}T} \Phi\left(-d_1(-\bar{u}, \bar{\sigma}, \bar{\delta})\right) \right. \\ &\quad \left. + e^{\frac{2\bar{\delta}\bar{u}}{\bar{\sigma}^2}} \Phi\left(-d_3(-\bar{u}, \bar{\sigma}, \bar{\delta})\right) \right] \end{aligned}$$

in cui le funzioni  $d_1(\cdot)$ ,  $d_2(\cdot)$  e  $d_3(\cdot)$  sono date rispettivamente dalla (4.35), (4.36) e (4.37) mentre i valori di  $\bar{u}$ ,  $\bar{\sigma}$ , e  $\bar{\delta}$  sono definiti come in (4.41).

<sup>13</sup>Per  $\bar{\mu} = \bar{\delta} - \frac{\bar{\sigma}^2}{2}$  dalla (4.14) si ricava che  $\xi_1 = -\frac{2\bar{\delta}}{\bar{\sigma}^2}$  e  $\xi_2 = 1$ . Sostituendo nella (4.13) e semplificando si ottiene la (4.42).

### 4.3.3 Formula chiusa di pricing ottenuta attraverso la valutazione del valore atteso del payoff a scadenza dell'investimento garantito

Il payoff a scadenza di un investimento in un fondo, garantito da una dynamic fund protection europea con livello di garanzia esponenziale del tipo descritto nella sezione 4.3 è uguale a

$$(4.43) \quad \tilde{F}(T) = n(T) F(T),$$

dove  $F(T)$  è dato dalla (4.8) ed  $n(T)$  dalla (4.10) con  $t = T$ . Il suo prezzo al tempo zero, in base a quanto detto nella sezione 2.2, può essere ottenuto come

$$(4.44) \quad A(f, \zeta, p; T) = e^{-rT} E_0^Q [n(T) F(T)] = f e^{-rT} E_0^Q [n(T) e^{pY(T)}]$$

dove l'apice  $Q$  evidenzia che l'aspettativa è valutata rispetto alla misura di probabilità risk-neutral, ottenuta sostituendo al coefficiente di deriva originario del processo di Wiener  $\{Y(t)\}$  il coefficiente di deriva corretto per il rischio

$$(4.45) \quad \mu^* = r - \zeta - \frac{\sigma^2}{2}.$$

Per valutare il valore atteso in (4.44) si può ricorrere al metodo della trasformata di Esscher<sup>14</sup> di parametro  $p$  in base al quale:

$$(4.46) \quad E_0^Q [n(T) e^{pY(T)}] = E_0^Q [e^{pY(T)}] E_0^Q [n(T); p] = e^{(p\mu^* + \frac{1}{2}p^2\sigma^2)T} E_0^Q [n(T); p].$$

Il valore di  $n(T)$  può essere convenientemente esplicitato come segue: si definisca il processo  $\{X(s)\}$  a partire dal moto Browniano  $\{Y(s)\}$  secondo la trasformazione

$$(4.47) \quad X(s) = \gamma s - p Y(s), \quad \text{per } s \geq 0.$$

Questo nuovo processo di Wiener, nella misura di Esscher di parametro  $p$  è caratterizzato dal coefficiente di deriva

$$(4.48) \quad m = \gamma - p [\mu^* + p \sigma^2]$$

---

<sup>14</sup>Si veda la nota 10 del capitolo 2. In particolare il riferimento a [Gerber e Shiu (1994a)], equazione (R.13) e [Gerber e Shiu (1996)], equazione (9.22).

e dal coefficiente di volatilità

$$(4.49) \quad \nu = p \sigma.$$

Ricordando la (4.8), la (4.9) e la (4.10), tenendo pure conto della (4.47), si ha che

$$(4.50) \quad n(T) = \max \left\{ 1, \max_{0 \leq s \leq T} k e^{X(s)} \right\}.$$

Si definisca  $M(T)$  come il "massimo del moto Browniano  $\{X(s)\}$  fino al tempo  $T$ ", cioè

$$(4.51) \quad M(T) = \max_{0 \leq s \leq T} X(s).$$

Si sostituisca la (4.51) nella (4.50) dopo aver opportunamente semplificato, ottenendo infine

$$(4.52) \quad n(T) = 1 + k \max \left\{ 0, e^{M(T)} - e^u \right\},$$

dove si è posto  $u = -\ln k$ .

Tenendo conto della (4.46) e della (4.52), la formula di pricing (4.44) può essere espressa come:

$$(4.53) \quad A(f, \zeta, p; T) = f e^{-rT} e^{(p\mu^* + \frac{1}{2}p^2\sigma^2)T} \left( 1 + k E_0^Q \left[ \max \left\{ 0, e^{M(T)} - e^u \right\}; p \right] \right)$$

dove  $u = -\ln k$ ,  $\mu^*$  è definito dalla (4.45) ed il moto Browniano sottostante la variabile casuale  $M(T)$  ha coefficiente di volatilità  $m$  e coefficiente di deriva  $\nu$  definiti rispettivamente dalla (4.48) e dalla (4.49).

Il valore atteso che compare nel membro di destra dell'equazione (4.53) è esattamente la funzione  $C(u; \mu, \sigma)$  definita in (4.20) in cui si pongano  $u = -\ln k$ ,  $\mu = m$  e  $\sigma = \nu$ . Ricordando la (2.10), si ha che in presenza di un *dividend-yield rate* deterministico e costante  $\zeta$  e di un tasso istantaneo di partecipazione ai rendimenti  $p$ , il prezzo in zero della dynamic fund protection europea con livello di garanzia esponenziale è uguale a

$$(4.54) \quad V(f, \zeta, p; T) = f k e^{(-r+p\mu^* + \frac{1}{2}(p\sigma)^2)T} C\left(-\ln k; \gamma - p\mu^* - (p\sigma)^2, p\sigma\right).$$

Per la (4.31) si ha quindi

$$(4.55) \quad V(f, \zeta, p; T) = f k e^{(-r + p\mu^* + \frac{1}{2}(p\sigma)^2)T} \times \\ B\left(-\ln k; \gamma - p\mu^*, p\sigma; -(\gamma - p\mu^*) + \frac{(p\sigma)^2}{2}\right)$$

in cui la funzione  $B(\cdot)$  può essere valutata con la formula (4.34) in cui si pongano  $\bar{u} = -\ln k$ ,  $\bar{\sigma} = p\sigma$  e  $\bar{\delta} = -(\gamma - p\mu^*) + \frac{(p\sigma)^2}{2}$ .

#### 4.3.4 Formula chiusa di pricing ottenuta attraverso la valutazione del valore atteso delle quote aggiuntive di primary fund

Si consideri un investimento in un fondo, garantito da una dynamic fund protection europea con livello di garanzia esponenziale del tipo descritto nella sezione 4.3.

Come mostrato nella (4.10), per ogni quota iniziale di fondo garantito, al generico tempo  $t \in [0, T]$  devono essere accreditate

$$n(t) = \max\left\{1, \max_{0 \leq s \leq t} \frac{f K(s)}{F(s)}\right\}, \quad 0 \leq t \leq T$$

unità di *primary fund* sul conto del cliente. Il differenziale  $dn(t)$  può dunque essere interpretato come il numero di unità aggiuntive di *naked fund* che vengono riconosciute al cliente nell'intervallo di tempo infinitesimo  $[t, t + dt]$ . Trattandosi di una garanzia di tipo europeo le quote divengono esigibili solo alla scadenza  $T$ , in cui hanno un valore  $F(T) dn(t)$ .

Il prezzo in zero della dynamic fund protection può quindi essere determinato in funzione del flusso di importi incrementali dell'*upgraded fund* come

$$(4.56) \quad V(f, \zeta, p; T) = E_0^Q \left[ \int_0^T e^{-rT} F(T) dn(t) \right]$$

dove l'apice  $Q$  evidenzia che l'aspettativa è valutata rispetto alla misura di probabilità risk-neutral, ottenuta sostituendo al coefficiente di deriva originario del processo di Wiener  $\{Y(t)\}$ <sup>15</sup> il coefficiente di deriva corretto per il rischio  $\mu^*$  definito in (4.45).

Per valutare il valore atteso in (4.56) si determini la costante  $\alpha$  per la quale il processo stocastico  $\{e^{-\alpha t} F(t)\}$  è una martingala rispetto alla misura di probabilità

<sup>15</sup>Si ricordi l'evoluzione del valore del *naked fund* descritta dall'equazione (4.8).

risk-neutral  $Q$ . Affinchè ciò si verifichi deve aversi che

$$E_0^Q [e^{-\alpha} F(1)] = e^{-0} F(0).$$

Ricordando la (4.8) si ottiene che  $\alpha$  deve essere posta uguale a

$$(4.57) \quad \alpha = \ln E_0^Q [e^{pY(1)}] = p\mu^* + \frac{p^2 \sigma^2}{2}.$$

Si consideri la (4.56). Si moltiplichi e divida il membro di destra per un fattore  $e^{-\alpha T}$  ottenendo

$$V(f, \zeta, p; T) = e^{(\alpha-r)T} E_0^Q \left[ \int_0^T e^{-\alpha t} F(t) dn(t) \right].$$

Si sfrutti una nota proprietà della media condizionata da una coppia di  $\sigma$ -algebre  $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_t$  tali che  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_t$  (con  $0 < t \leq T$ )<sup>16</sup> e si tenga pure conto della martingalità del processo  $\{e^{-\alpha t} F(t)\}$  per ricavare:

$$(4.58) \quad V(f, \zeta, p; T) = e^{(\alpha-r)T} E_0^Q \left[ \int_0^T e^{-\alpha t} F(t) dn(t) \right] = e^{(\alpha-r)T} E_0^Q \left[ \int_0^T e^{-\alpha t} F(t) dn(t) \right].$$

Si ricordi la (4.10) e si definisca la funzione  $D(t)$  come:

$$(4.59) \quad D(t) = \ln n(t) = \max \left\{ 0, \max_{0 \leq s \leq t} \ln \frac{fK(s)}{F(s)} \right\}.$$

In base alla (4.59) sussiste l'identità

$$(4.60) \quad dn(t) = n(t) dD(t).$$

In ogni epoca  $t$  nella quale  $dn(t) \neq 0$ , si ha che<sup>17</sup>

$$(4.61) \quad n(t) = \frac{fK(t)}{F(t)}.$$

Dalla (4.60) e dalla (4.61) segue l'equivalenza

$$(4.62) \quad F(t) dn(t) = fK(t) dD(t).$$

<sup>16</sup>Si veda [Orsingher (1997)], teorema 1.4.

<sup>17</sup>Una dimostrazione intuitiva è data dal fatto che se  $dn(t) \neq 0$ , si ha che il numero delle quote di *naked fund* accreditate sul conto del cliente è in corso di incremento nell'istante  $t$ , pertanto  $n(t) = \max \left\{ 1, \max_{0 \leq s \leq t} \frac{fK(s)}{F(s)} \right\} = \frac{fK(t)}{F(t)}$ .

Sostituendo la (4.62) nel membro di destra della (4.58) ed esplicitando il valore di  $K(t)$  definito dalla (4.9) si ricava

$$(4.63) \quad V(f, \zeta, p; T) = f k e^{(\alpha-r)T} E_0^Q \left[ \int_0^T e^{-(\alpha-\gamma)t} dD(t) \right].$$

Si consideri la funzione  $D(t)$  definita dalla (4.59) e si osservi che in base alla (4.8) ed alla (4.9) si ha che

$$(4.64) \quad D(t) = \max \left\{ 0, \max_{0 \leq s \leq t} \ln \frac{f K(s)}{F(s)} \right\} = \max \left\{ 0, \max_{0 \leq s \leq t} (\gamma s - p Y(s) + \ln k) \right\}.$$

Si definisca il processo  $\{X(s)\}$  a partire dal moto Browniano  $\{Y(s)\}$  secondo la trasformazione (4.47), ottenendo così un nuovo processo di Wiener che nella misura di probabilità risk-neutral  $Q$  è caratterizzato dal coefficiente di deriva

$$(4.65) \quad m = \gamma - p \mu^*$$

e dal coefficiente di volatilità

$$(4.66) \quad \nu = p \sigma.$$

La (4.64) può essere riscritta in base alla (4.47) come

$$(4.67) \quad D(t) = \max \left\{ 0, \max_{0 \leq s \leq t} X(s) - u \right\}$$

in cui si è posto  $u = -\ln k$ .

Si confronti la (4.67) con la (4.11) e la (4.63) con la (4.12). Tenendo anche conto della (4.22) si ha che

$$(4.68) \quad V(f, \zeta, p; T) = f k e^{(\alpha-r)T} B\left(-\ln k; m, \nu; \alpha - \gamma\right)$$

dove  $m$  è dato dalla (4.65),  $\nu$  è dato dalla (4.66) ed  $\alpha$  è dato dalla (4.57). Sostituendo nella (4.68) il valore esplicito di questi tre parametri, si ottiene che in presenza di un *dividend-yield rate* deterministico e costante  $\zeta$  e di un *participation rate*  $p$ , il prezzo di una dynamic fund protection europea con livello di garanzia esponenziale è

$$(4.69) \quad V(f, \zeta, p; T) = f k e^{\left(-r+p\mu^*+\frac{p^2\sigma^2}{2}\right)T} B\left(-\ln k; \gamma-p\mu^*, p\sigma; -\gamma+p\mu^*+\frac{p^2\sigma^2}{2}\right)$$

in cui la funzione  $B(\cdot)$  può essere valutata con la formula chiusa (4.34) in cui si pongano  $\bar{u} = -\ln k$ ,  $\bar{\sigma} = p\sigma$  e  $\bar{\delta} = -(\gamma - p\mu^*) + \frac{(p\sigma)^2}{2}$ .

L'equazione di pricing (4.69) coincide con la (4.55) determinata nella sezione 4.3.3 seguendo una differente linea argomentativa. Queste costituiscono una generalizzazione della formula (2.29) di pricing di una dynamic fund protection standard in assenza di dividendi e con intensità di partecipazione ai rendimenti unitaria. Si pongano  $p = 1$ ,  $\zeta = 0$  e  $\gamma = 0$  nella (4.69) (o nella (4.55)) per riottenere il caso particolare.



## Capitolo 5

# La Dynamic Fund Protection Europea con livello di garanzia stocastico

### 5.1 Descrizione

Nelle sezioni precedenti si è discusso il caso di una dynamic fund protection europea con livello di garanzia deterministico; fosse esso costante (come nel capitolo 2) o variabile secondo una funzione esponenziale predeterminata (come nel capitolo 4). Tuttavia l'analisi può essere estesa anche al caso di un *floor* stocastico, rappresentato ad esempio dal valore di un'azione o di un indice azionario. Per semplicità espositiva si presenta il problema in termini di azioni, senza voler con questo intendere alcuna perdita di generalità.

Siano  $S_1(t)$  e  $S_2(t)$  i prezzi al tempo  $t$  ( $t \geq 0$ ) di due titoli azionari tali che in zero valgono  $0 < S_1(0) < S_2(0)$ . Si consideri una dynamic fund protection europea con maturity in  $T$  che abbia come fondo di investimento sottostante il titolo 2 e come livello minimo garantito il prezzo del titolo 1. Si indichi con  $\{\tilde{F}(t), 0 \leq t \leq T\}$  l'evoluzione del valore del *protected fund* nel corso della durata contrattuale. Questa è contraddistinta dalle stesse caratteristiche generali già evidenziate per i casi di

dynamic fund protection con *floor* deterministici, cioè

- $\tilde{F}(0) = S_2(0)$ .
- L'intensità istantanea di rendimento di  $\tilde{F}(t)$  è identica a quella di  $S_2(t)$  in ogni intervallo temporale in cui sia  $\tilde{F}(t) > S_1(t)$ .
- Ogni volta che il valore di  $\tilde{F}(t)$  dovesse scendere al di sotto del prezzo (stocastico) del titolo 1 verrebbe istantaneamente incrementato di un importo tale da riportarlo esattamente al livello garantito  $S_1(t)$ , di modo che tale soglia minima non possa mai essere varcata nel corso del contratto.

Si ha pertanto che il payoff a scadenza dell'investimento garantito da una dynamic fund protection europea con livello di garanzia stocastico è ottenibile in maniera analoga a quanto visto nella sezione 2.1 ed è tale che

$$(5.1) \quad \tilde{F}(T) = S_2(T) \max \left\{ 1, \max_{0 \leq u \leq T} \frac{S_1(u)}{S_2(u)} \right\}.$$

Una garanzia di questo tipo può essere interpretata sia in chiave di *asset management*, considerando un operatore che intenda investire nel titolo 2, ma che in ogni istante voglia essere in grado di acquistare almeno un'azione del titolo 1; sia in chiave di *asset and liability management*, considerando  $S_2(t)$  e  $S_1(t)$  come i valori al tempo  $t$  di attività e passività che devono garantire istantaneamente la solvibilità del portafoglio.

## 5.2 Formula chiusa di pricing in un mondo alla Black-Scholes bivariato

Si consideri una dynamic fund protection europea con livello di garanzia stocastico del tipo descritto nella sezione 5.1. Si ipotizzi che le azioni 1 e 2 paghino un flusso continuo di dividendi secondo un *dividend-yield rate* deterministico  $\zeta_j > 0$ ,  $j=1,2$ ; cioè che nell'intervallo di tempo infinitesimo  $[t, t+dt]$  ciascun titolo paghi un ammontare di dividendi pari a  $\zeta_j S_j(t) dt$ ,  $j=1,2$ . Si assuma che i prezzi azionari evolvano secondo

un modello di Black e Scholes bivariato, ed in particolare che siano

$$(5.2) \quad S_1(t) = S_1(0) e^{X_1(t)},$$

$$(5.3) \quad S_2(t) = S_2(0) e^{X_2(t)},$$

dove il generico moto Browniano  $\{X_j(t)\}$ , nella misura di probabilità risk-neutral  $Q$ , abbia coefficiente di volatilità  $\sigma_j$  e coefficiente di deriva

$$(5.4) \quad \mu_j^* = r - \zeta_j - \frac{\sigma_j^2}{2}, \quad j = 1, 2$$

con  $r > 0$  rappresentante la forza di interesse risk-free (costante). Sia inoltre  $\rho$  ( $0 \leq \rho \leq 1$ ) il coefficiente di correlazione istantanea fra le componenti  $X_1(t)$  e  $X_2(t)$  del processo di Wiener bivariato  $\{X_1(t), X_2(t)\}$ .

Si indichi con

$$(5.5) \quad n(t) = \max \left\{ 1, \max_{0 \leq u \leq t} \frac{S_1(u)}{S_2(u)} \right\}$$

il numero di azioni del titolo 2 accreditate sul conto del cliente al tempo  $t$  ( $0 \leq t \leq T$ ). Per quanto visto nella sezione 4.3.4, il prezzo in zero della dynamic fund protection in questione è dato da

$$(5.6) \quad V(s_1, s_2; T) = E_0^Q \left[ \int_0^T e^{-rT} S_2(T) dn(t) \right].$$

con  $s_1 = S_1(0)$  e  $s_2 = S_2(0)$ . Si moltiplichino e divida il membro di destra per la costante  $e^{-\zeta_2 T}$  ottenendo

$$(5.7) \quad V(s_1, s_2; T) = e^{-\zeta_2 T} E_0^Q \left[ \int_0^T e^{-(r-\zeta_2)T} S_2(T) dn(t) \right].$$

Nella misura di probabilità risk-neutral  $Q$  definita dalla (5.4) il processo  $\{e^{-(r-\zeta_2)t} S_2(t)\}$  è una martingala. Applicando una nota proprietà della media condizionata da una coppia di  $\sigma$ -algebre  $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_t$  tali che  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_t$  (con  $0 < t \leq T$ )<sup>1</sup> e tenendo pure conto della martingalità, dalla (5.7) si ricava

$$(5.8) \quad V(s_1, s_2; T) = e^{-\zeta_2 T} E_0^Q \left[ \int_0^T e^{-(r-\zeta_2)t} S_2(t) dn(t) \right].$$

<sup>1</sup>Si veda [Orsingher (1997)], teorema 1.4.

Ricordando la (5.5), si definisca la funzione  $D(t)$  come

$$(5.9) \quad D(t) = \ln n(t) = \max \left\{ 0, \max_{0 \leq s \leq t} \ln \frac{S_1(s)}{S_2(s)} \right\} = \\ \max \left\{ 0, \max_{0 \leq s \leq t} \left( X_1(s) - X_2(s) - \ln \frac{s_2}{s_1} \right) \right\}.$$

Si ponga

$$(5.10) \quad u = \ln \frac{s_2}{s_1}$$

e si definisca il processo  $\{X(t)\}$  secondo l'equazione

$$(5.11) \quad X(t) = X_1(t) - X_2(t).$$

La (5.9) può essere riscritta come

$$(5.12) \quad D(t) = \max \left\{ 0, \max_{0 \leq s \leq t} X(s) - u \right\},$$

dove il moto Browniano  $\{X(t)\}$  ha coefficiente di deriva

$$(5.13) \quad m = \mu_1^* - \mu_2^*$$

e coefficiente di volatilità

$$(5.14) \quad \nu = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}$$

rispetto alla misura di probabilità risk-neutral  $Q$ .

Partendo dalla definizione (5.9) si lavori in maniera analoga a quanto visto nella sezione 4.3.4 per l'equazione (4.62), ottenendo in questo caso l'identità:

$$(5.15) \quad S_2(t) dn(t) = S_1(t) dD(t).$$

Si sostituisca la (5.15) nella (5.8). Ricordando pure la (5.2) si ricava

$$(5.16) \quad V(s_1, s_2; T) = s_1 e^{-\zeta_2 T} E_0^Q \left[ \int_0^T e^{-(r-\zeta_2)t} e^{X_1(t)} dD(t) \right].$$

Si consideri la variabile aleatoria

$$\frac{e^{X_1(t)}}{E_0^Q [e^{X_1(t)}]} = e^{X_1(t)} e^{-(r-\zeta_1)t}.$$

Si introduca la misura di probabilità  $R$  definendola per mezzo della sua derivata di Radon-Nikodym rispetto a  $Q$ :

$$\left. \frac{dR}{dQ} \right|_{\mathcal{F}_t} = e^{X_1(t)} e^{-(r-\zeta_1)t}, \quad t < \infty$$

Con evidente significato di simboli, si ha che

$$(5.17) \quad \mathbb{E}_0^Q \left[ e^{X_1(t)} dD(t) \right] = \mathbb{E}_0^Q \left[ e^{X_1(t)} \right] \mathbb{E}_0^R \left[ dD(t) \right] = e^{(r-\zeta_1)t} \mathbb{E}_0^R \left[ dD(t) \right].$$

In base alla (5.17), la (5.16) può essere espressa come

$$(5.18) \quad V(s_1, s_2; T) = s_1 e^{-\zeta_2 T} \mathbb{E}_0^R \left[ \int_0^T e^{-(\zeta_1 - \zeta_2)t} dD(t) \right].$$

Nella nuova misura di probabilità  $R$ , il processo  $\{X(t)\}$  sottostante la variabile casuale  $D(t)$  è ancora un moto Browniano con coefficiente di volatilità  $\nu$ . Il coefficiente di deriva invece diventa<sup>2</sup>

$$(5.19) \quad m^* = (\mu_1^* + \sigma_1^2) - (\mu_2^* + \rho \sigma_1 \sigma_2) = \zeta_2 - \zeta_1 + \frac{\nu^2}{2}.$$

Si confronti la (5.12) con la (4.11) e la (5.18) con la (4.12). Tenendo anche conto della (4.22), si ha che

$$(5.20) \quad V(s_1, s_2; T) = s_1 e^{-\zeta_2 T} \mathbb{B} \left( u; m^*, \nu; \zeta_1 - \zeta_2 \right)$$

dove  $u$  è dato dalla (5.10),  $\nu$  è dato dalla (5.14), ed  $m^*$  è dato dalla (5.19). Sostituendo il valore esplicito di questi tre parametri nella (5.20), si ottiene che in presenza di dividendi il prezzo di una dynamic fund protection europea con livello di garanzia stocastico è uguale a

$$(5.21) \quad V(s_1, s_2; T) = s_1 e^{-\zeta_2 T} \mathbb{B} \left( \ln \frac{s_2}{s_1}; \zeta_2 - \zeta_1 + \frac{\nu^2}{2}, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}; \zeta_1 - \zeta_2 \right)$$

in cui la funzione  $\mathbb{B}(\cdot)$  può essere valutata con la formula chiusa (4.34) in cui si pongano  $\bar{u} = \ln \frac{s_2}{s_1}$ ,  $\bar{\sigma} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}$  e  $\bar{\delta} = \zeta_1 - \zeta_2$ .

Esplicitando si ha

$$(5.22) \quad V(s_1, s_2; T) = W + \frac{s_1}{H} \left[ e^{-\zeta_2 T} \left( \frac{s_1}{s_2} \right)^H \Phi(d_3) - e^{-\zeta_1 T} \Phi(d_1) \right]$$

<sup>2</sup>Si veda la nota 10 del capitolo 2. In particolare [Gerber e Shiu (1994a)] e [Gerber e Shiu (1996)].

in cui si è posto

$$(5.23) \quad W = s_1 e^{-\zeta_1 T} \Phi(d_1) - s_2 e^{-\zeta_2 T} \Phi(d_2)$$

ed anche

$$d_1 = \frac{\ln \frac{s_1}{s_2} + m^* T}{\nu \sqrt{T}},$$

$$d_2 = d_1 - \nu \sqrt{T},$$

$$d_3 = d_1 + \frac{2(\zeta_1 - \zeta_2) \sqrt{T}}{\nu}$$

e

$$H = \frac{2(\zeta_1 - \zeta_2)}{\nu^2}.$$

Si osservi che l'equazione (5.23) è la formula di pricing al tempo zero di un'opzione europea con maturity in  $T$  e payoff a scadenza  $\max \{S_1(T) - S_2(T), 0\}$ , ottenuta per la prima volta da [Margrabe (1978)] nell'ipotesi di assenza di dividendi ( $\zeta_1 = \zeta_2 = 0$ ) e successivamente generalizzata al caso di *dividend-yield rate* deterministici<sup>3</sup>.

---

<sup>3</sup>Si veda [Gerber e Shiu (1996)], equazione 10.18; oppure [Panjer (1998)], equazione 10.8.8.

## Capitolo 6

# Confronti fra Dynamic Fund Protection Europee e altre forme di garanzia

### 6.1 Put Option e Dynamic Fund Protection Standard

Si consideri una dynamic fund protection standard del tipo descritto nella sezione 2.1. Si è visto che in un modello di valutazione alla Black e Scholes che non preveda il pagamento di dividendi, il prezzo al tempo zero della garanzia è dato dalla formula chiusa (2.29)<sup>1</sup>:

$$(2.29) \quad V(s,T) = Ke^{-rT} \left(1 - \frac{1}{R}\right) \Phi\left(\frac{-\kappa - rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right) + \frac{K}{R} \left(\frac{K}{s}\right)^R \times \\ \Phi\left(\frac{-\kappa + rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - s \Phi\left(\frac{-\kappa - rT - \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

dove

$$s = S(0), \quad \kappa = \ln\left(\frac{s}{K}\right) \quad \text{e} \quad R = \frac{2r}{\sigma^2}.$$

---

<sup>1</sup>Oppure equivalentemente dalla formula (2.56) in cui si ponga  $t = 0$ .

Si confronti con il prezzo della corrispondente opzione put europea:

$$(6.1) \quad P(s, T) = Ke^{-rT} \Phi\left(\frac{-\kappa - rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - s \Phi\left(\frac{-\kappa - rT - \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

che segue immediatamente dalla formula di Black e Scholes per il pricing di un'opzione call<sup>2</sup> e dalla relazione di parità put-call<sup>3</sup>.

La dynamic fund protection fornisce una garanzia superiore rispetto ad una put plain vanilla<sup>4</sup>, pertanto il suo prezzo deve necessariamente essere maggiore. Sottraendo membro a membro la (6.1) dalla (2.29) si ottiene:

$$(6.2) \quad V(s, T) - P(s, T) = \frac{K}{R} \left(\frac{K}{s}\right)^R \Phi\left(\frac{-\kappa + rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \frac{K}{R} e^{-rT} \times \Phi\left(\frac{-\kappa - rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right).$$

Da un punto di vista algebrico non è evidente il segno della differenza; tuttavia calcolando la (6.2) rispetto a differenti set di parametri, risulta empiricamente verificata la sua positività: si veda la tabella 6.1.

Valutando invece il rapporto fra i prezzi, è possibile evidenziare un'interessante nesso al tendere a zero della durata contrattuale  $T$ , cioè

$$(6.3) \quad \lim_{T \rightarrow 0} \frac{V(s, T)}{P(s, T)} = 2.$$

Si veda la tabella 6.2. Questo risultato è stato osservato empiricamente e successivamente dimostrato in [Gerber e Pafumi (2000a)], sezione 3: infatti nel caso in cui sia  $s = K$ , sfruttando lo sviluppo in serie di Taylor della funzione  $\Phi(x)$ , si può provare che

$$P(K, T) \sim \frac{K\sigma\sqrt{T}}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{per } T \rightarrow 0$$

e

$$V(K, T) \sim \frac{2K\sigma\sqrt{T}}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{per } T \rightarrow 0$$

---

<sup>2</sup> $C(s, T) = s \Phi\left(\frac{\kappa + rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - Ke^{-rT} \Phi\left(\frac{\kappa + rT - \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$ . Si veda [Black e Scholes (1973)].

<sup>3</sup> $C(s, T) - P(s, T) = s - Ke^{-rT}$ . Si veda [Castellani, De Felice, Moriconi (2006)].

<sup>4</sup>Si veda quanto detto nel capitolo 1.

Tipo di Garanzia	Floor (K)				
	80	85	90	95	100
<b>Dynamic Fund Protection Std. (D.F.P.)</b>	1.77	3.42	6.01	9.75	14.79
<b>Put Option Europea (P.E.)</b>	0.77	1.47	2.53	4.03	6.00
<b>Put Option Americana (P.A.)</b>	0.83	1.57	2.70	4.30	6.41
<b>Differenza D.F.P. - P.E.</b>	1.00	1.96	3.48	5.72	8.79
<b>Differenza D.F.P. - P.A.</b>	0.94	1.85	3.31	5.45	8.38
<b>Differenza P.A. - P.E.</b>	0.06	0.10	0.17	0.27	0.41

Nota: Confronto fra i prezzi di una dynamic fund protection standard, di una put option europea e di una put option americana ottenuti in un modello di valutazione di tipo Black e Scholes al variare dello strike price K, per un fissato set di parametri  $\sigma = 0.2$ ,  $r = 0.04$ ,  $T = 1$  ed  $s = 100$ . I prezzi delle prime due garanzie sono valutati utilizzando gli appositi algoritmi di calcolo in Visual Basic riportati in appendice; quelli della put option americana sono ripresi da [Gerber e Pafumi (2000a)], "Autohors' Reply". É pure evidenziata la differenza fra i prezzi. La dynamic fund protection è più costosa della put option americana, che a sua volta è più costosa della put option europea.

Tabella 6.1: Confronto fra i prezzi di una Dynamic Fund Protection Standard, di una Put Option Europea e di una Put Option Americana al variare dello strike price (K)

dove il simbolo "  $\sim$  " sta a significare che il rapporto fra i due membri, al limite, tende ad uno. Nel caso in cui sia  $s > K$ , utilizzando la nota formula asintotica<sup>5</sup>

$$1 - \Phi(x) \sim \phi(x) \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) \quad \text{per } x \rightarrow \infty,$$

si dimostra invece che

$$P(s,T) \sim \alpha T^{\frac{3}{2}} \quad \text{per } T \rightarrow 0$$

e

$$V(s,T) \sim 2\alpha T^{\frac{3}{2}} \quad \text{per } T \rightarrow 0$$

con

$$\alpha = \frac{\sigma^3 K}{\kappa^2 \sqrt{2\pi}} e^{\frac{\kappa(1-R)}{2} - \frac{\kappa^2}{2\sigma^2 T}}.$$

Resta quindi verificato che per ogni  $K \leq s$ , in relazione a durate contrattuali tendenti a zero, il prezzo di una dynamic fund protection standard tende ad essere due volte il prezzo della corrispondente put option europea.

Il raffronto fra queste due opzioni sorge spontaneo dall'evidente analogia formale fra le rispettive formule di pricing. L'analisi porta poi ad ottenere curiosi risvolti numerici. Bisogna però evidenziare le profonde differenze sostanziali che le separano: anzitutto perchè la put europea offre una garanzia statica a scadenza, mentre la dynamic fund protection assicura una protezione dinamica per la quale il valore dell'*upgraded fund* non può mai scendere al di sotto del *floor* in nessun istante della durata contrattuale. In secondo luogo perchè il payoff della dynamic fund protection è path dependent, mentre quello della put europea non lo è.

Un indice di paragone più adeguato per la garanzia dinamica è quindi rappresentato dalla corrispondente put di tipo americano. Si può empiricamente verificare che il prezzo di quest'opzione si colloca a metà strada fra quello della put europea e quello della dynamic fund protection standard: si veda la tabella 6.1. In particolare, per  $T \rightarrow 0$  il rapporto fra i prezzi di una put americana e di una put europea tende ad uno. Si ha quindi che anche per la put americana resta valida la relazione asintotica (6.3).

---

<sup>5</sup>Si veda [Abramowitz e Stegun (1972)].

Maturity (T)	Floor (K)				
	80	85	90	95	100
1/12	2,04	2,05	2,06	2,08	2,12
2/12	2,07	2,09	2,11	2,13	2,17
3/12	2,10	2,12	2,14	2,17	2,21
4/12	2,13	2,15	2,18	2,21	2,24
5/12	2,15	2,18	2,20	2,24	2,28
6/12	2,18	2,20	2,23	2,27	2,31
1	2,30	2,34	2,37	2,42	2,46
2	2,52	2,56	2,61	2,66	2,72
5	3,09	3,16	3,24	3,32	3,40
10	4,07	4,19	4,32	4,45	4,58
15	5,22	5,40	5,58	5,77	5,97
20	6,61	6,87	7,13	7,40	7,67

Nota: Rapporto fra i prezzi di una dynamic fund protection standard e di una put option europea in un modello di valutazione di tipo Black e Scholes al variare della maturity T e dello strike price K, per un fissato set di parametri  $\sigma = 0.2$ ,  $r = 0.04$  ed  $s = 100$ . I valori sono ottenuti utilizzando gli appositi algoritmi di calcolo in Visual Basic riportati in appendice. Al tendere a zero della durata contrattuale il rapporto in esame tende a due.

Tabella 6.2: Rapporto fra i prezzi di una Dynamic Fund Protection Standard e di una Put Option Europea al variare della maturity (T) e dello strike price (K)

## 6.2 Lookback Option Europee e Dynamic Fund Protection Standard

Il payoff a scadenza di una dynamic fund protection standard presenta caratteristiche del tutto simili a quelle di una lookback option europea. Nei capitoli precedenti si è fatto più volte fatto riferimento a tale affinità<sup>6</sup>, ma per indagare più approfonditamente il tema bisogna specificare quali siano i principali tipi di opzioni lookback, evidenziandone caratteristiche, payoff e formule di pricing.

Tali formule si ricavano con estrema facilità a partire dai risultati della sezione 4.3.2 e costituiscono uno strumento di grande rilevanza applicativa considerato il frequente utilizzo che se ne fa in molti prodotti equity-indexed.

Il modello di valutazione adottato è quello di Black e Scholes con *dividend-yield rate* deterministico  $\zeta > 0$ , in cui si ipotizzi che il valore del titolo azionario sottostante<sup>7</sup> evolva secondo un moto Browniano geometrico descritto dall'equazione (2.11) in cui si ponga, rispetto alla misura di probabilità risk-neutral  $Q$ ,

$$(6.4) \quad X(t) = \mu^* t + \sigma W^Q(t)$$

con

$$(6.5) \quad \mu^* = r - \zeta - \frac{\sigma^2}{2}.$$

### 6.2.1 Lookback Option Europea di tipo Call con Fixed Strike

Una lookback option europea di tipo call, con maturity in  $T$ , scritta su di un titolo azionario con processo di prezzo  $\{S(t)\}$ , che ha strike price  $K$  fissato fin dalla stipula<sup>8</sup> (fixed strike); è uno strumento derivato caratterizzato dal payoff a scadenza

$$(6.6) \quad W(T) = \max \left\{ 0; \max \left( L; \max_{0 \leq t \leq T} S(t) \right) - K \right\}.$$

---

<sup>6</sup>Si vedano in particolare le sezioni 1, 2.5 e 5.2.

<sup>7</sup>L'analisi può essere equivalentemente sviluppata in termini di "singola azione" o di "indice azionario". Per brevità espositiva si segue la prima modalità.

<sup>8</sup>Anche nota come lookback option *call on maximum*.

La costante  $L$  (  $L \geq s$  con  $s = S(0)$  ) può essere interpretata come il massimo livello raggiunto dal prezzo dell'azione sottostante in un periodo precedente l'emissione dell'opzione ( $t < 0$ ), per questo è anche nota come *past maximum*.

Il payoff della garanzia assume caratteristiche differenti a seconda che si fissi uno strike price minore o maggiore-uguale al *past maximum*.

Nel caso in cui sia  $K \geq L$  si ha

$$(6.7) \quad W(T) = \max \left\{ 0; \max_{0 \leq t \leq T} S(t) - K \right\}.$$

Ricordando le ipotesi (2.11) e (6.4) per il processo di prezzo  $\{S(t)\}$ , si sfrutti la definizione (4.51) della variabile aleatoria "massimo di un moto Browniano fino al tempo  $T$ ". La (6.7) può essere riscritta come

$$W(T) = s \max \left\{ 0; e^{M(T)} - e^u \right\}$$

in cui si è posto  $u = \ln \frac{K}{s}$ .

Il prezzo in zero dell'opzione è dato da

$$(6.8) \quad C_{\text{fixed}}^{\text{l.o.}} = e^{-rT} E_0^Q [W(T)] = s e^{-rT} E_0^Q \left[ \max \left\{ 0; e^{M(T)} - e^u \right\} \right].$$

Il valore atteso nel membro di destra coincide con l'aspettativa  $C(u; \mu, \sigma)$  definita dalla (4.20) nella quale si pongano  $u = \ln \frac{K}{s}$ ,  $\mu = \mu^*$  e  $\sigma = \sigma$ . Ricordando anche la (4.31) si ha

$$(6.9) \quad C_{\text{fixed}}^{\text{l.o.}} = s e^{-rT} C \left( \ln \frac{K}{s}; \mu^*, \sigma \right) = s e^{-rT} B \left( \ln \frac{K}{s}; r - \zeta + \frac{\sigma^2}{2}, \sigma; -r + \zeta \right)$$

dove la funzione  $B(\cdot)$  può essere valutata con la formula chiusa (4.34) nella quale si pongano  $\bar{u} = \ln \frac{K}{s}$ ,  $\bar{\delta} = -r + \zeta$  e  $\bar{\sigma} = \sigma$ . Esplicitando si ottiene

$$(6.10) \quad C_{\text{fixed}}^{\text{l.o.}} = s e^{-\zeta T} \Phi(d_{1,K}) - K e^{-rT} \Phi(d_{2,K}) + \frac{s \sigma^2}{2(r - \zeta)} \left\{ e^{-\zeta T} \Phi(d_{1,K}) - \left( \frac{K}{s} \right)^{\frac{2(r-\zeta)}{\sigma^2}} e^{-rT} \Phi(d_{3,K}) \right\}$$

con

$$d_{j,K} = d_j \left( \ln \frac{K}{s}, \sigma, -r + \zeta \right) \quad j = 1, 2, 3$$

in cui le funzioni  $d_j(\cdot)$ ,  $j= 1, 2, 3$  sono definite come in (4.35), (4.36) e (4.37). I primi due termini della (6.10) coincidono con la formula di Black e Scholes per il pricing di un'opzione call europea scritta su di un'azione con *dividend-yield rate* deterministico<sup>9</sup>. Pertanto si ha che

$$C_{\text{fixed}}^{\text{l.o.}} - C^{\text{eur}} = \frac{s\sigma^2}{2(r-\zeta)} \left\{ e^{-\zeta T} \Phi(d_{1,K}) - \left(\frac{K}{s}\right)^{\frac{2(r-\zeta)}{\sigma^2}} e^{-rT} \Phi(d_{3,K}) \right\}$$

è il costo del diritto ad esercitare l'opzione al prezzo massimo raggiunto dal sottostante, anzichè al prezzo a scadenza.

Nel caso in cui sia  $K < L$ , il payoff della lookback option europea di tipo call con fixed strike diventa

$$(6.11) \quad W(T) = \max\left(L; \max_{0 \leq t \leq T} S(t)\right) - K.$$

Si lavori in maniera analoga a quanto visto per il caso  $K \geq L$ . Sfruttando le proprietà della funzione massimo si ottiene

$$W(T) = L - K + s \max\left(0; e^{M(T)} - e^u\right)$$

con  $u = \ln \frac{L}{s}$ .

Ricordando la (4.20) e la (4.31), il prezzo dell'opzione è dato da

$$(6.12) \quad \tilde{C}_{\text{fixed}}^{\text{l.o.}} = e^{-rT} E_0^Q [W(T)] = e^{-rT} \left[ L - K + s B\left(\ln \frac{L}{s}; r - \zeta + \frac{\sigma^2}{2}, \sigma; -r + \zeta\right) \right]$$

dove la funzione  $B(\cdot)$  può essere valutata con la formula chiusa (4.34) nella quale si pongano  $\bar{u} = \ln \frac{L}{s}$ ,  $\bar{\delta} = -r + \zeta$  e  $\bar{\sigma} = \sigma$ . Esplicitando si ottiene

$$(6.13) \quad \tilde{C}_{\text{fixed}}^{\text{l.o.}} = s e^{-\zeta T} \Phi(d_{1,L}) + L e^{-rT} \Phi(-d_{2,L}) - K e^{-rT} + \frac{s\sigma^2}{2(r-\zeta)} \left\{ e^{-\zeta T} \Phi(d_{1,L}) - \left(\frac{L}{s}\right)^{\frac{2(r-\zeta)}{\sigma^2}} e^{-rT} \Phi(d_{3,L}) \right\}$$

con

$$d_{j,L} = d_j\left(\ln \frac{L}{s}, \sigma, -r + \zeta\right) \quad j = 1, 2, 3$$

---

<sup>9</sup>  $C^{\text{eur}} = s e^{-\zeta T} \Phi\left(\frac{\kappa+(r-\zeta)T+\frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - K e^{-rT} \Phi\left(\frac{\kappa+(r-\zeta)T-\frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$ . Si veda [Castellani, De Felice, Moriconi (2006)].

in cui le funzioni  $d_j(\cdot)$ ,  $j= 1, 2, 3$  sono definite come in (4.35), (4.36) e (4.37).

Si consideri una dynamic fund protection europea con livello di garanzia stocastico, del tipo descritto nel capitolo 5. Si pongano  $S_1(t) = S(t)$  e  $S_2(t) = L$ . Ricordando la (5.1) si ottiene che il payoff a scadenza della garanzia dinamica è

$$\tilde{F}(T) = \max \left\{ L, \max_{0 \leq u \leq T} S(u) \right\}.$$

Si confronti con la (6.11). Una lookback option europea di tipo call con fixed strike  $K = 0$  e past maximum  $L > 0$  può essere considerata come un caso particolare di dynamic fund protection con livello di garanzia stocastico. La formula di pricing (5.22) può dunque essere utilizzata per verificare la (6.13).

## 6.2.2 Lookback Option Europea di tipo Put con Floating Strike

Una lookback option europea di tipo put, con maturity in  $T$ , scritta su di un titolo azionario con processo di prezzo  $\{S(t)\}$ , che ha strike price aleatorio alla stipula<sup>10</sup> (floating strike); è uno strumento derivato caratterizzato dal payoff a scadenza

$$(6.14) \quad W(T) = \max \left( L; \max_{0 \leq t \leq T} S(t) \right) - S(T)$$

dove la costante  $L$  ( $L \geq s$  con  $s = S(0)$ ) può essere interpretata come il *past maximum* del sottostante.

Si confronti la (6.14) con la (6.11). I due payoff coincidono a meno del termine  $K$  (deterministico), sostituito dal valore  $S(T)$  (stocastico).

La formula di pricing di una lookback option europea di tipo put con floating strike si può dunque ottenere a partire da quella di una lookback option europea di tipo call con fixed strike e  $K < L$ : all'interno dell'equazione (6.13) si sostituisca il termine  $K e^{-rT}$ , rappresentante il valore al tempo zero dell'importo  $K$  esigibile in  $T$ , con il termine  $s e^{-\zeta T}$ , che esprime il prezzo in zero del payoff  $S(T)$  pagabile in  $T$ . Esplicitando si ha

$$(6.15) \quad \tilde{P}_{\text{float}}^{\text{l.o.}} = L e^{-rT} \Phi(-d_{2,L}) - s e^{-\zeta T} \Phi(-d_{1,L}) + \frac{s \sigma^2}{2(r - \zeta)} \left\{ e^{-\zeta T} \Phi(d_{1,L}) - \left( \frac{L}{s} \right)^{\frac{2(r-\zeta)}{\sigma^2}} e^{-rT} \Phi(d_{3,L}) \right\}$$

<sup>10</sup>Anche nota come lookback option *put on maximum* o *put standard*.

in cui le funzioni  $d_{j,L} = d_j \left( \ln \frac{L}{s}, \sigma, -r + \zeta \right)$ ,  $j = 1, 2, 3$  sono definite come in (4.35), (4.36) e (4.37). I primi due addendi della (6.15) coincidono con la formula di Black e Scholes per il pricing di un'opzione put europea scritta su di un'azione con *dividend-yield rate* deterministico e con strike price  $L$ .

### 6.2.3 Lookback Option Europea di tipo Put con Fixed Strike

Una lookback option europea di tipo put, con maturity in  $T$ , scritta su di un titolo azionario con processo di prezzo  $\{S(t)\}$ , che ha strike price  $K$  fissato fin dalla stipula<sup>11</sup> (fixed strike); è uno strumento derivato caratterizzato dal payoff a scadenza

$$(6.16) \quad W(T) = \max \left\{ 0; K - \min \left( \tilde{L}; \min_{0 \leq t \leq T} S(t) \right) \right\}.$$

La costante  $\tilde{L}$  ( $0 \leq \tilde{L} \leq s$  con  $s = S(0)$ ) può essere interpretata come il minimo livello raggiunto dal prezzo dell'azione sottostante in un periodo precedente l'emissione dell'opzione ( $t < 0$ ), per questo è anche nota come *past minimum*.

Per la valutazione della garanzia si distinguono i due casi in cui lo strike price sia maggiore o minore-uguale del past minimum.

Per  $K \leq \tilde{L}$  si ha

$$(6.17) \quad W(T) = \max \left\{ 0; K - \min_{0 \leq t \leq T} S(t) \right\}.$$

Ricordando la (6.4), si consideri il processo di Wiener  $\{-X(t)\}$  con coefficiente di deriva  $-\mu^*$  e coefficiente di volatilità  $\sigma$  rispetto alla misura di probabilità risk-neutral  $Q$ . Si definisca la variabile casuale "massimo del moto Browniano  $\{-X(t)\}$  nel periodo  $[0, T]$ ":

$$(6.18) \quad \tilde{M}(T) = \max_{0 \leq t \leq T} -X(t).$$

Tenendo presente la (2.11), la (2.55) e la (6.18) si ha

$$(6.19) \quad \min_{0 \leq t \leq T} S(t) = s e^{-\tilde{M}(T)}.$$

Il prezzo dell'opzione si può dunque ottenere come

$$P_{\text{fixed}}^{\text{lo.}} = e^{-rT} E_0^Q [W(T)] = s e^{-rT} E_0^Q \left[ \max \left\{ 0; e^{-u} - e^{-\tilde{M}(T)} \right\} \right]$$

<sup>11</sup>Anche nota come lookback option *put on minimum*.

con  $u = \ln \frac{s}{K}$ . Il valore atteso nel membro di destra coincide con l'aspettativa  $P(u; \mu, \sigma)$  definita dalla (4.21) nella quale si pongano  $u = \ln \frac{s}{K}$ ,  $\mu = -\mu^*$  e  $\sigma = \sigma$ . Ricordando anche la (4.39) si ha

$$(6.20) \quad P_{\text{fixed}}^{\text{l.o.}} = s e^{-rT} P\left(\ln \frac{s}{K}; -r + \zeta + \frac{\sigma^2}{2}, \sigma\right) = s e^{-rT} B\left(\ln \frac{s}{K}; -r + \zeta - \frac{\sigma^2}{2}, \sigma; -r + \zeta\right)$$

in cui la funzione  $B(\cdot)$  può essere valutata con la formula chiusa (4.42) nella quale si pongano  $\bar{u} = \ln \frac{s}{K}$ ,  $\bar{\delta} = -r + \zeta$  e  $\bar{\sigma} = \sigma$ . Esplicitando si ricava

$$(6.21) \quad P_{\text{fixed}}^{\text{l.o.}} = K e^{-rT} \Phi(-d_{2,K}) - s e^{-\zeta T} \Phi(-d_{1,K}) + \frac{s \sigma^2}{2(r - \zeta)} \left\{ \left(\frac{K}{s}\right)^{\frac{2(r-\zeta)}{\sigma^2}} e^{-rT} \Phi(-d_{3,K}) - e^{-\zeta T} \Phi(-d_{1,K}) \right\}$$

dove le funzioni  $d_{j,K} = d_j(\ln \frac{K}{s}, \sigma, -r + \zeta)$ ,  $j = 1, 2, 3$  sono definite come in (4.35), (4.36) e (4.37). I primi due termini della (6.21) coincidono con la formula di Black e Scholes per il pricing di un'opzione put europea scritta su di un'azione con *dividend yield rate* deterministico. Il terzo addendo esprime il costo del diritto all'esercizio dell'opzione al prezzo massimo raggiunto dal sottostante, anzichè al prezzo a scadenza.

Nel caso in cui sia  $K > \tilde{L}$ , il payoff della lookback option europea di tipo put con fixed strike diventa

$$(6.22) \quad W(T) = K - \min\left(\tilde{L}; \min_{0 \leq t \leq T} S(t)\right).$$

Si ricorra alla (6.19) ed alle proprietà della funzione minimo per ottenere

$$W(T) = K - \tilde{L} + s \max\left\{0; e^{-u} - e^{-\tilde{M}(T)}\right\}$$

con  $u = \ln \frac{s}{\tilde{L}}$ .

Ricordando la (4.21) e la (4.39), il prezzo dell'opzione è dato da

$$(6.23) \quad \tilde{P}_{\text{fixed}}^{\text{l.o.}} = e^{-rT} \left[ K - \tilde{L} + s B\left(\ln \frac{s}{\tilde{L}}; -r + \zeta - \frac{\sigma^2}{2}, \sigma; -r + \zeta\right) \right]$$

in cui la funzione  $B(\cdot)$  può essere valutata con la formula chiusa (4.42) nella quale si

pongano  $\bar{u} = \ln \frac{s}{\tilde{L}}$ ,  $\bar{\delta} = -r + \zeta$  e  $\bar{\sigma} = \sigma$ . Esplicitando si ottiene

$$(6.24) \quad \begin{aligned} \hat{P}_{\text{fixed}}^{\text{l.o.}} = & K e^{-rT} - \tilde{L} e^{-rT} \Phi(d_{2,\tilde{L}}) - s e^{-\zeta T} \Phi(-d_{1,\tilde{L}}) + \\ & \frac{s \sigma^2}{2(r - \zeta)} \left\{ \left( \frac{\tilde{L}}{s} \right)^{\frac{2(r-\zeta)}{\sigma^2}} e^{-rT} \Phi(-d_{3,\tilde{L}}) - e^{-\zeta T} \Phi(-d_{1,\tilde{L}}) \right\}. \end{aligned}$$

dove le funzioni  $d_{j,\tilde{L}} = d_j \left( \ln \frac{\tilde{L}}{s}, \sigma, -r + \zeta \right)$ ,  $j= 1, 2, 3$  sono definite come in (4.35), (4.36) e (4.37).

#### 6.2.4 Lookback Option Europea di tipo Call con Floating Strike

Una lookback option europea di tipo call, con maturity in  $T$ , scritta su di un titolo azionario con processo di prezzo  $\{S(t)\}$ , che ha strike price aleatorio alla stipula<sup>12</sup> (floating strike); è uno strumento derivato caratterizzato dal payoff a scadenza

$$(6.25) \quad W(T) = S(T) - \min \left( \tilde{L}; \min_{0 \leq t \leq T} S(t) \right)$$

dove la costante  $\tilde{L}$  ( $0 \leq \tilde{L} \leq s$  con  $s = S(0)$ ) può essere interpretata come il *past minimum* del sottostante.

Si confronti la (6.25) con la (6.22). I due payoff coincidono a meno del termine  $K$  (deterministico), sostituito dal valore  $S(T)$  (stocastico).

La formula di pricing di una lookback option europea di tipo call con floating strike si può dunque ottenere a partire da quella di una lookback option europea di tipo put con fixed strike e  $K > L$ : all'interno dell'equazione (6.24) si sostituisca il termine  $K e^{-rT}$ , rappresentante il valore al tempo zero dell'importo  $K$  esigibile in  $T$ , con il termine  $s e^{-\zeta T}$ , che esprime il prezzo in zero del payoff  $S(T)$  pagabile in  $T$ . Esplicitando si ha

$$(6.26) \quad \begin{aligned} C_{\text{float}}^{\text{l.o.}} = & s e^{-\zeta T} \Phi(d_{1,\tilde{L}}) - \tilde{L} e^{-rT} \Phi(d_{2,\tilde{L}}) + \\ & \frac{s \sigma^2}{2(r - \zeta)} \left\{ \left( \frac{\tilde{L}}{s} \right)^{\frac{2(r-\zeta)}{\sigma^2}} e^{-rT} \Phi(-d_{3,\tilde{L}}) - e^{-\zeta T} \Phi(-d_{1,\tilde{L}}) \right\} \end{aligned}$$

dove le funzioni  $d_{j,\tilde{L}} = d_j \left( \ln \frac{\tilde{L}}{s}, \sigma, -r + \zeta \right)$ ,  $j= 1, 2, 3$  sono definite come in (4.35), (4.36) e (4.37).

<sup>12</sup>Anche nota come lookback option *call on minimum* o *call standard*.

### 6.2.5 High-Low Option

Una high-low option scritta su di un titolo azionario con processo di prezzo  $\{S(t)\}$ , è uno strumento derivato caratterizzato dal payoff a scadenza

$$(6.27) \max \left\{ L, \max_{0 \leq t \leq T} S(t) \right\} - \min \left\{ \tilde{L}, \min_{0 \leq t \leq T} S(t) \right\}$$

dove  $L$  ed  $\tilde{L}$  ( $0 \leq \tilde{L} \leq s \leq L$ ) rappresentano rispettivamente il *past maximum* ed il *past minimum* del sottostante.

Si confronti la (6.27) con la (6.14) e la (6.25). Il payoff di una high-low option è dato dalla composizione fra il payoff di una lookback option europea di tipo put con floating strike e quello dell'analogo opzione di tipo call con floating strike. La sua formula di pricing si ottiene dunque come dalla somma fra la (6.15) e la (6.26).

In maniera analoga, confrontando la (6.27) con la (6.11) e la (6.22), si ottiene che l'equazione di valutazione della high-low option è ricavabile come somma della (6.13) con la (6.24).

### 6.2.6 La Dynamic Fund Protection Standard e le Lookback Option Europee di tipo Put e Call

Si esamini il payoff di un investimento garantito da una dynamic fund protection standard:

$$(2.7) \tilde{F}(T) = S(T) \max \left\{ 1, \max_{0 \leq u \leq T} \frac{K}{S(u)} \right\}.$$

Questo dipende anzitutto dal prezzo a scadenza del *naked fund*  $S(T)$ . La presenza di iniezioni addizionali di valore<sup>13</sup> eventualmente necessarie a mantenere l'*upgraded fund*  $\tilde{F}(t)$  al di sopra del *floor*  $K$  in ogni istante  $t \in [0, T]$ , comporta poi che il payoff dipenda pure dal "cammino" seguito dal *naked fund* nel corso del contratto. La dynamic fund protection è pertanto, in maniera del tutto analoga alle opzioni lookback, una garanzia di tipo path dependent.

---

<sup>13</sup>Iniezioni di valore attuate sottoforma di quote addizionali di *primary fund* accreditate sul conto del cliente.

In particolare, si consideri la funzione che esprime il numero di quote addizionali di *primary fund* accreditate sul conto del cliente nel corso dell'intera durata contrattuale<sup>14</sup>:

$$(6.28) \quad n(T) - n(0) = \max \left\{ 0, \max_{0 \leq u \leq T} \frac{K}{S(u)} - 1 \right\}.$$

Si confronti con la (6.7). La (6.28) coincide con il payoff di una lookback option call con fixed strike che abbia prezzo di esercizio uguale ad uno, past maximum  $L \leq 1$  e per sottostante il valore stocastico  $\frac{K}{S(t)}$ , del quale si prende il massimo nell'orizzonte  $[0, T]$ . Si faccia però attenzione al fatto che il rapporto  $\frac{K}{S(t)}$  raggiunge il suo massimo solo quando il prezzo del *naked fund*  $S(t)$  è minimo. Si ha dunque che la dynamic fund protection ha un'espressione formale analoga ad una lookback option di tipo call, con la quale condivide la capacità di partecipare agli extra rendimenti derivanti da un mercato rialzista; ma al contempo incorpora pure le caratteristiche sostanziali di una lookback option di tipo put, perchè protegge il valore dell'investimento dal *downside risk*.

Si confrontino i prezzi di una dynamic fund protection standard e delle corrispondenti opzioni lookback. Come mostrato dalla tabella 6.3 e dal grafico 6.1 il valore della garanzia dinamica è significativamente inferiore rispetto a quello delle lookback options di tipo call; mentre è molto prossimo, se non addirittura coincidente, con quello delle lookback options di tipo put: si evidenzia solamente un contenuto sovrapprezzo, motivabile con la miglior capacità della garanzia dinamica di profittare delle oscillazioni del *naked fund*.

L'efficienza della dynamic fund protection in condizioni di mercato molto volatile si desume pure dal confronto fra i prezzi della tabella 6.3 con quelli della tabella 6.4 in cui si è ipotizzato, a parità degli altri parametri, un coefficiente di volatilità due volte e mezza superiore. In tali circostanze il prezzo della garanzia dinamica registra un incremento percentuale fortemente più marcato di quello delle lookback options, che pure sono notevolmente influenzate dalla variazione del parametro di volatilità. Si veda il grafico 6.2.

---

<sup>14</sup>Si ricordi la (2.6).

	Maturity (T)								
	0,5	1	2	3	4	5	10	15	20
<b>Strike (K)</b>	<b>Lookback Option Call con Fixed Strike</b>								
<b>100</b>	6.78	10.24	15.75	20.42	24.62	28.49	44.64	57.25	67.39
<b>105</b>	2.92	6.07	11.49	16.22	20.53	24.52	41.32	54.52	65.15
<b>Strike (K)</b>	<b>Lookback Option Call con Floating Strike</b>								
<b>100</b>	6.53	9.75	14.79	19.01	22.77	26.22	40.51	51.61	60.51
<b>95</b>	8.16	11.03	15.81	19.90	23.58	26.97	41.08	52.06	60.87
<b>Floor (K)</b>	<b>Dynamic Fund Protection Standard</b>								
<b>100</b>	4.79	6.32	8.06	9.11	9.83	10.36	11.67	12.13	12.33
<b>95</b>	1.33	2.46	3.91	4.82	5.46	5.93	7.11	7.54	7.72
<b>Strike (K)</b>	<b>Lookback Option Put con Fixed Strike</b>								
<b>100</b>	4.55	5.83	7.10	7.70	7.99	8.09	7.55	6.49	5.44
<b>95</b>	1.28	2.31	3.50	4.16	4.54	4.75	4.76	4.20	3.56
<b>Strike (K)</b>	<b>Lookback Option Put con Floating Strike</b>								
<b>100</b>	4.79	6.32	8.06	9.11	9.83	10.36	11.67	12.13	12.33
<b>105</b>	5.84	6.96	8.41	9.35	10.00	10.48	11.71	12.15	12.33

Nota: Confronto fra i prezzi di differenti lookback options europee e di una dynamic fund protection standard ottenuti nell'ambito di un modello di valutazione di tipo Black e Scholes utilizzando le formule di valutazione (6.10), (6.26), (2.29), (6.21) e (6.15) al variare della maturity del contratto (T), e dello strike price (K), per un fissato set di parametri  $\sigma = 0.1$ ,  $r = 0.04$ ,  $\zeta = 0$  ed  $s = 100$ . Il past maximum (minimum) è posto uguale allo strike price dell'opzione  $L = K$  ( $\bar{L} = K$ ). I valori sono ottenuti con gli appositi algoritmi di calcolo in Visual Basic riportati in appendice. Il prezzo della dynamic fund protection standard è sempre sensibilmente inferiore a quello delle corrispondenti lookback options di tipo call, mentre è molto prossimo, se non addirittura coincidente, con il prezzo delle analoghe lookback options di tipo put.

Tabella 6.3: Confronto fra i prezzi di differenti Lookback Options Europee e di una Dynamic Fund Protection Standard, al variare della maturity (T) e dello strike price (K).

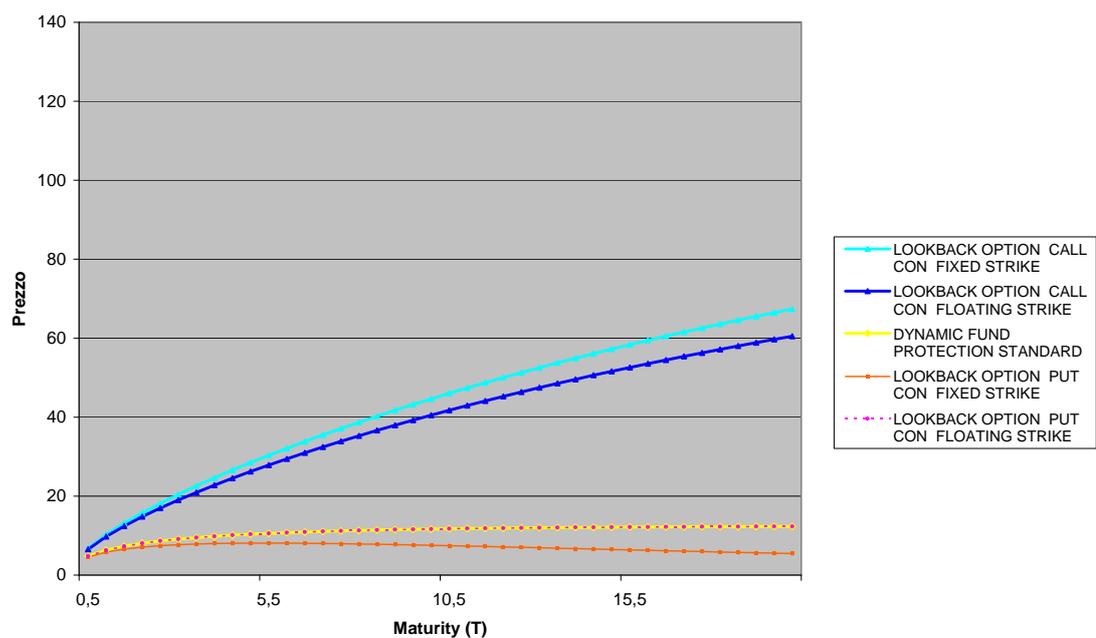


Figura 6.1: Confronto fra i prezzi di alcune lookback options e della dynamic fund protection standard, al variare della maturity (T), per un fissato set di parametri  $r = 0.04$ ,  $\sigma = 0.10$ ,  $s = 100$ ,  $K = 100$ ,  $\zeta = 0$

	Maturity (T)								
	0,5	1	2	3	4	5	10	15	20
<b>Strike (K)</b>	<b>Lookback Option Call con Fixed Strike</b>								
<b>100</b>	15.78	23.18	34.33	43.31	51.06	57.98	85.05	104.58	119.46
<b>105</b>	11.40	18.74	29.96	39.06	46.96	54.02	81.77	101.88	117.25
<b>Strike (K)</b>	<b>Lookback Option Call con Floating Strike</b>								
<b>100</b>	14.23	20.12	28.33	34.47	39.51	43.82	59.30	69.33	76.44
<b>95</b>	14.80	20.52	28.61	34.69	39.70	43.99	59.39	69.40	76.49
<b>Floor (K)</b>	<b>Dynamic Fund Protection Standard</b>								
<b>100</b>	13.80	19.26	26.64	32.00	36.28	39.86	52.08	59.46	64.40
<b>95</b>	8.82	13.85	20.76	25.80	29.84	33.22	44.79	51.79	56.47
<b>Strike (K)</b>	<b>Lookback Option Put con Fixed Strike</b>								
<b>100</b>	12.25	16.20	20.64	23.16	24.73	25.70	26.33	24.21	21.37
<b>95</b>	7.92	11.80	16.30	18.95	20.65	21.77	23.07	21.54	19.18
<b>Strike (K)</b>	<b>Lookback Option Put con Floating Strike</b>								
<b>100</b>	13.80	19.26	26.64	32.00	36.28	39.86	52.08	59.46	64.40
<b>105</b>	14.32	19.62	26.89	32.19	36.43	39.99	52.16	59.51	64.43

Nota: Confronto fra i prezzi di differenti lookback options europee e di una dynamic fund protection standard ottenuti nell'ambito di un modello di valutazione di tipo Black e Scholes utilizzando le formule di valutazione (6.10), (6.26), (2.29), (6.21) e (6.15) al variare della maturity del contratto (T), e dello strike price (K), per un fissato set di parametri  $\sigma = 0.25$ ,  $r = 0.04$ ,  $\zeta = 0$  ed  $s = 100$ . Il past maximum (minimum) è posto uguale allo strike price dell'opzione  $L = K$  ( $\tilde{L} = K$ ). I valori sono ottenuti con gli appositi algoritmi di calcolo in Visual Basic riportati in appendice. Si confronti con la tabella 6.3. Il prezzo della dynamic fund protection standard è quello che subisce l'incremento percentuale più accentuato al crescere del parametro di volatilità.

Tabella 6.4: Confronto fra i prezzi di differenti Lookback Options Europee e di una Dynamic Fund Protection Standard, al variare della maturity (T) e dello strike price (K), in relazione ad un mercato maggiormente volatile.

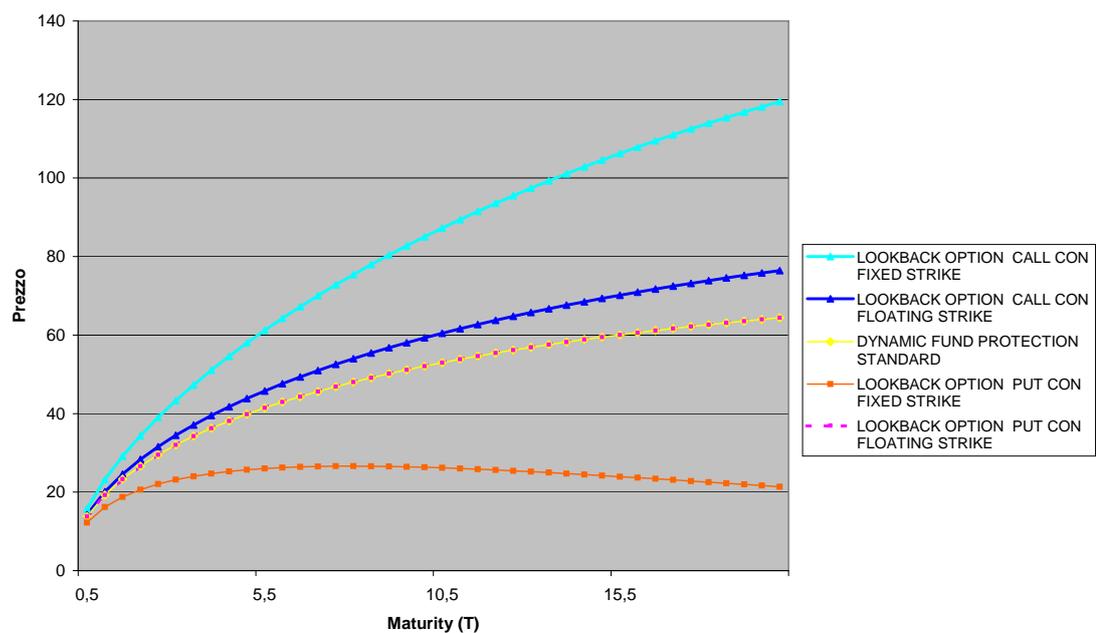


Figura 6.2: Confronto fra i prezzi di alcune lookback options e della dynamic fund protection standard, al variare della maturity (T), per un fissato set di parametri  $r = 0.04$ ,  $\sigma = 0.25$ ,  $s = 100$ ,  $K = 100$ ,  $\zeta = 0$

## 6.3 Confronti tra garanzie finanziarie tipiche in ambito assicurativo

In questa sezione si propone un confronto fra i valori di tre differenti garanzie che hanno trovato ampia diffusione nel mercato assicurativo vita dei paesi più "evoluti" da un punto di vista finanziario:

1. La garanzia di rendimento minimo a scadenza (maturity guarantee)
2. La garanzia di rendimento minimo annuo ("cliquet" guarantee o "ratchet" guarantee)
3. La dynamic investment fund protection

L'analisi è svolta da un punto di vista esclusivamente finanziario, senza tener conto di importanti problematiche di tipo assicurativo quali la modalità di acquisto del prodotto, la mortalità o il diritto di riscatto.

Al tempo  $t = 0$  si consideri un investimento di importo  $s = S(0)$  per l'acquisto di una quota di un fondo azionario caratterizzato dal processo di prezzo  $\{S(t)\}$ , a cui si aggiunga un ulteriore esborso (da quantificare meglio in seguito) per l'acquisto di una qualche garanzia finanziaria. Si ipotizzi che il fondo non paghi dividendi. Si adotti un modello di valutazione di tipo Black e Scholes come quello descritto nella sezione 2.2. Si assuma un orizzonte temporale di investimento di  $T$  anni interi.

### Maturity Guarantee

Si consideri una garanzia che assicuri un valore minimo a scadenza di importo  $K_T = Ke^{\gamma T}$ , in cui  $K$  è un livello di garanzia iniziale che cresce nel tempo con legge di capitalizzazione esponenziale secondo un'intensità istantanea di rendimento (costante)  $\gamma$ . In particolare si può porre

$$K = ks \quad \text{con} \quad 0 < k \leq 1$$

in cui  $s = S(0)$  è il valore originario dell'investimento e  $k$  è una prefissata aliquota.

La garanzia è di tipo statico, cioè offre una protezione nel solo istante di esercitabilità. Il payoff a scadenza dell'investimento complessivo è

$$(6.29) \quad Y(T) = \max \left\{ S(T); K_T \right\}$$

e può essere scomposto come

$$(6.30) \quad Y(T) = S(T) + \max \left\{ 0; K_T - S(T) \right\}$$

in cui il primo addendo rappresenta il valore in  $T$  della componente base dell'investimento ed il secondo termine è il payoff della maturity guarantee.

Si esamini la (6.30). La garanzia a scadenza equivale ad un'opzione put europea scritta sul fondo azionario  $S(t)$  e con strike price  $K_T$  (deterministico). Il suo prezzo è valutabile con la nota formula di Black e Scholes espressa dalla (6.1) in cui si ponga  $K = K e^{\gamma T}$ , cioè

$$(6.31) \quad \begin{aligned} P(s,T) = & K e^{-(r-\gamma)T} \Phi \left( \frac{-\kappa - (r-\gamma)T + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \\ & - s \Phi \left( \frac{-\kappa - (r-\gamma)T - \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \end{aligned}$$

con  $\kappa = \ln \frac{s}{K}$

### ”Cliquet” (o ”Ratchet”) Guarantee

Si consideri una garanzia che assicuri un rendimento minimo annuo  $i = e^\gamma - 1$ . Il payoff a scadenza dell'investimento complessivo è

$$(6.32) \quad W(T) = s \prod_{t=1}^T \max \left\{ \frac{S(t)}{S(t-1)}; e^\gamma \right\}$$

in cui  $\gamma$  è l'intensità di rendimento minimo (costante), garantita su base annua. Il prezzo al tempo zero è dato dalla nota formula di pricing<sup>15</sup>

$$e^{-rT} E_0^Q [W(T)] = s \left[ \Phi \left( \frac{(r-\gamma) + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma} \right) + e^{-(r-\gamma)T} \Phi \left( \frac{-(r-\gamma) + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma} \right) \right]^T.$$

<sup>15</sup>Si veda [De Felice e Moriconi (2005)], sezione 4.

Il prezzo della sola opzione *cliquet* si ottiene come differenza fra il valore dell'investimento garantito e quello della componente base  $e^{-rT}E_0^Q[S(T)] = s$ , perciò

$$(6.33) \quad R(s, \gamma) = s \left[ \Phi \left( \frac{(r - \gamma) + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma} \right) + e^{-(r-\gamma)T} \Phi \left( \frac{-(r - \gamma) + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma} \right) \right]^T - s.$$

### Dynamic Investment Fund Protection

Si consideri una dynamic fund protection europea con livello di garanzia esponenziale  $K(t) = K e^{\gamma t}$  (con  $K = k S(0)$  e  $0 < k \leq 1$ ) del tipo descritto nella sezione 4.1.

Il payoff a scadenza dell'investimento complessivo è

$$(6.34) \quad \tilde{F}(T) = S(T) \max \left\{ 1, \max_{0 \leq u \leq T} \frac{K e^{\gamma u}}{S(u)} \right\}$$

Il prezzo al tempo zero della sola garanzia è<sup>16</sup>

$$(6.35) \quad \begin{aligned} V(s, T) = & K e^{-(r-\gamma)T} \left( 1 - \frac{1}{R} \right) \Phi \left( \frac{-\kappa - (r - \gamma)T + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma \sqrt{T}} \right) + \\ & \frac{K}{R} \left( \frac{K}{s} \right)^R \Phi \left( \frac{-\kappa + (r - \gamma)T + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma \sqrt{T}} \right) - \\ & s \Phi \left( \frac{-\kappa - (r - \gamma)T - \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma \sqrt{T}} \right) \end{aligned}$$

dove

$$s = S(0), \quad \kappa = \ln \frac{s}{K} \quad e \quad R = \frac{2(r - \gamma)}{\sigma^2}.$$

### Confronti

Per semplificare i termini del confronto si ipotizzi  $k = 1$  di modo che risulti  $K e^{\gamma t} = \kappa s e^{\gamma t} = s e^{\gamma t}$  sia nella prima che nella terza garanzia.

Si consideri il payoff a scadenza dell'investimento con maturity guarantee, espresso dalla (6.29). Questo può essere equivalentemente riformulato nella forma

$$Y(T) = s \max \left\{ \frac{S(T)}{s}; e^{\gamma T} \right\} = s \max \left\{ \prod_{t=1}^T \frac{S(t)}{S(t-1)}; \prod_{t=1}^T e^{\gamma} \right\}.$$

<sup>16</sup>Si veda quanto detto nella sezione 4.2.

Si confronti con il payoff dell'investimento con garanzia di rendimento minimo annuo, espresso dalla (6.32). I due coincidono nel caso di un orizzonte contrattuale mono-annuale ( $T = 1$ ), mentre per  $T > 1$  vale la disuguaglianza stretta

$$\prod_{t=1}^T \max \left\{ \frac{S(t)}{S(t-1)}; e^{\gamma} \right\} > \max \left\{ \prod_{t=1}^T \frac{S(t)}{S(t-1)}; \prod_{t=1}^T e^{\gamma} \right\}.$$

Dal punto di vista della compagnia, la garanzia cliquet è sempre più onerosa rispetto alla maturity guarantee; il premio richiesto è quindi sempre maggiore (in relazione a durate contrattuali  $T > 1$ ).

Questo risultato non è affatto sorprendente a livello concettuale: infatti con l'opzione cliquet i rendimenti non si mediano nel corso del contratto, come invece avviene con la put plain vanilla. Si ipotizzi ad esempio un fondo azionario il cui prezzo abbia dei consistenti rialzi nei primi anni, seguiti poi da altrettanto rilevanti perdite. Nel caso di una garanzia di tipo cliquet, gli alti rendimenti iniziali si consolidano di anno in anno andando ad incrementare il valore complessivo delle risorse; nella successiva fase di ribasso poi viene comunque garantito un rendimento minimo annuo calcolato sullo stock di capitale "maggiorato". Nel caso di una garanzia a scadenza invece l'investitore non può in alcun modo profittare della fase rialzista del mercato in quanto questa si compensa con la successiva fase di ribasso.

Analogamente si ha che la maturity guarantee è meno onerosa anche rispetto alla dynamic fund protection. Si ipotizzi ad esempio un fondo azionario il cui prezzo segua un andamento simmetrico rispetto a quello descritto in precedenza. Nel caso di una dynamic fund protection, nella fase di ribasso iniziale il numero delle quote di *primary fund* accreditate sul conto del cliente è istantaneamente incrementato per garantire il mantenimento del livello minimo  $se^{\gamma t}$  per il valore dell'*upgraded fund*; nella successiva fase di rialzo si dispone così di un portafoglio "maggiorato" che produce dei rendimenti complessivamente più elevati rispetto al portafoglio originario. Il payoff dell'investimento è quindi superiore a quello che si realizzerebbe nel caso di una maturity guarantee per la quale le oscillazioni del titolo si compenserebbero. Si vedano in tal senso i risultati ottenuti nella sezione 6.1 che possono essere facilmente estesi anche al caso di un livello di garanzia di tipo esponenziale anziché costante.

Non è invece univoco il segno della relazione esistente fra garanzia di rendimento annuo e dynamic fund protection. Si vedano le risultanze della tabella 6.5 e del grafico 6.3 nei quali si riportano i prezzi delle tre tipologie di prodotto in relazione ad orizzonti contrattuali differenti  $T$ , per un fissato set di parametri di valutazione  $\sigma = 0.2$ ,  $r = 0.04$ ,  $\gamma = 0.03$ ,  $\kappa = 1$  ed  $s = 100$ <sup>17</sup>.

PREZZO	MATURITY (T)					
	1	2	5	10	15	20
<b>Garanzia a Scadenza</b>	7.44	10.17	14.93	19.16	21.58	23.06
<b>Garanzia Annuo</b>	7.44	15.43	43.15	104.92	193.35	319.94
<b>Dynamic Fund Protection</b>	16.41	23.43	37.61	53.79	66.17	76.47

Nota: Prezzi di una garanzia di rendimento a scadenza, di una garanzia di rendimento minimo annuo e di una dynamic fund protection con livello di garanzia esponenziale, ottenuti nell'ambito di un modello di valutazione di tipo Black e Scholes utilizzando le formule di valutazione (6.31), (6.33) e (6.35) al variare della maturity del contratto ( $T$ ), per un fissato set di parametri  $\sigma = 0.2$ ,  $r = 0.04$ ,  $\gamma = 0.03$ ,  $\kappa = 1$  ed  $s = 100$ . I valori sono calcolati con gli appositi algoritmi in Visual Basic riportati in appendice.

Tabella 6.5: Confronto fra i prezzi di una Garanzia a Scadenza, di una Garanzia Annuo e di una Dynamic Fund Protection al variare della maturity ( $T$ )

Per orizzonti di investimento di medio e di lungo termine (non inferiori a cinque anni nell'esempio) la garanzia cliquet è più costosa della dynamic fund protection: infatti la prima assicura un rendimento minimo su base annua, mentre la seconda non fornisce alcuna garanzia di minimo in relazione a singoli sottointervalli temporali. Si ipotizzi ad esempio un fondo azionario il cui prezzo abbia una breve ed intensa fase di rialzo iniziale, seguita poi da un lento e prolungato periodo di ridiscesa. Nel caso di una dynamic fund protection il *naked fund* viene a trovarsi immediatamente molto al di sopra del livello del *floor*, inficiando così l'efficacia della garanzia. L'alto rendimento nel primo anno è dunque seguito da una lunga serie di rendimenti negativi negli anni

<sup>17</sup>La normalizzazione  $s = 100$  permette di interpretare i prezzi delle garanzie come ricarichi percentuali sul costo dell'investimento non garantito.

successivi<sup>18</sup>. Nel caso di una garanzia cliquet invece il rendimento minimo è comunque garantito in ogni singola annualità.

Per orizzonti di investimento di breve termine il segno della relazione si inverte: la dynamic fund protection, intervenendo istantaneamente in risposta alle variazioni del prezzo del sottostante, è in grado di profittare meglio delle sue oscillazioni di breve periodo rispetto a quanto faccia la garanzia di rendimento annuo, nella quale avviene una compensazione per le fluttuazioni all'interno dell'anno. Dato che nel breve termine la volatilità del prezzo azionario ha un peso maggiore rispetto al suo trend di crescita di lungo termine<sup>19</sup>, il valore della garanzia dinamica è superiore a quello della garanzia cliquet.

Si analizzi il grafico 6.3. Il prezzo della garanzia di rendimento minimo annuo cresce esponenzialmente all'aumentare della maturity divenendo ben presto proibitivo da un punto di vista commerciale: infatti ben difficilmente il cliente accetta di effettuare un elevato esborso iniziale certo, nella speranza di un futuro guadagno aleatorio. Da qui l'esigenza di prodotti come la dynamic fund protection, il cui prezzo cresce in maniera molto più contenuta all'aumentare della durata contrattuale.

Infine, è interessante osservare come il valore della garanzia dinamica sia una funzione concava rispetto alla maturity, mentre il prezzo della garanzia cliquet è una funzione convessa: si vedano i grafici 2.2 e 6.3.

---

<sup>18</sup>Resta però sempre preservato il rendimento minimo complessivo dell'operazione, garantito dal valore del *floor*.

<sup>19</sup>Nell'ipotesi implicita di un coefficiente di deriva positivo per il processo di prezzo  $S(t)$ .

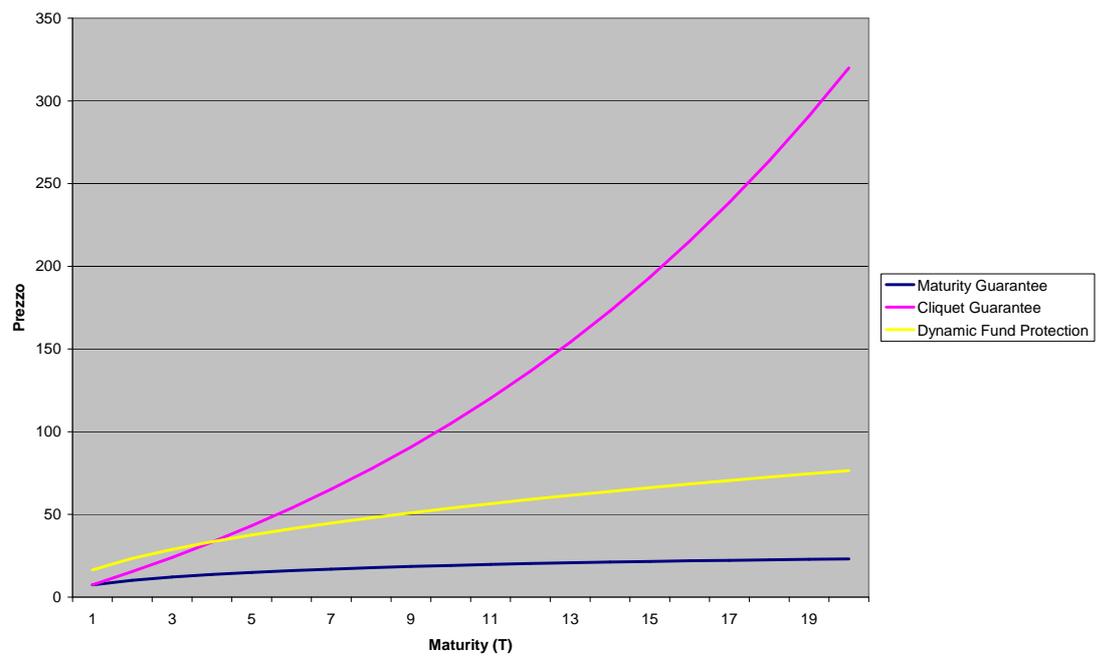


Figura 6.3: Confronto fra i prezzi di una Maturity Guarantee, di una Cliquet Guarantee e di una Dynamic Fund Protection, al variare della maturity (T), per un fissato set di parametri  $r = 0.04$ ,  $\sigma = 0.2$ ,  $\gamma = 0.03$ ,  $s = 100$ ,  $K = 100$ ,  $\zeta = 0$



## Capitolo 7

# Delta Hedging di un investimento garantito con Dynamic Fund Protection Standard in un modello Stock-Bond

La costruzione di un investimento garantito da una dynamic fund protection può essere proficuamente contestualizzata nell'ambito del classico modello stock-bond<sup>1</sup> per evidenziare i passi che concretamente la compagnia di assicurazione deve mettere in pratica per la creazione e la gestione di un prodotto di questo tipo.

Si ipotizzi un mercato privo di costi di transazione e gravami fiscali; aperto con continuità; in cui siano consentite vendite allo scoperto, i titoli siano infinitamente divisibili e non siano possibili arbitraggi non rischiosi. Si assuma una struttura a termine dei tassi di interesse (risk-free) deterministica e piatta a un livello di intensità istantanea di interesse  $r$ . Si ipotizzi che gli agenti siano massimizzatori di profitto e price taker. Si consideri un fondo di investimento azionario, o indicizzato azionario,

---

<sup>1</sup>Si veda [Castellani, De Felice, Moriconi (2004)].

garantito da una dynamic fund protection standard del tipo descritto nel capitolo 2. Per comodità espositiva lo si identifichi con il nome di *Fondo Verde*. Sia  $T$  la sua maturity. Sia  $K$  il livello costante<sup>2</sup> del floor garantito in ogni istante  $t \in [0, T]$ . Si ipotizzi che il *primary fund* sia costituito da un'azione del *Titolo Blu* e che  $S(t)$  sia il suo prezzo al generico tempo  $t$ . Il payoff a scadenza del *protected fund* è dato da:

$$(2.7) \quad \tilde{F}(T) = S(T) \max \left\{ 1, \max_{0 \leq u \leq T} \frac{K}{S(u)} \right\}.$$

Il suo valore può essere scomposto nella somma di due componenti:

$$(2.8) \quad \tilde{F}(T) = S(T) + Z(T)$$

dove  $Z(T)$  è il payoff a scadenza della sola dynamic fund protection option standard ed  $S(T)$  è il valore in  $T$  del *naked fund*.

Si fissi in  $t = 0$  l'istante iniziale. Si ha che

$$(2.9) \quad A(s, T) = s + V(s, T)$$

in cui  $A(s, T)$  è il prezzo in zero dell'investimento garantito,  $s = S(0)$  è il valore in zero del *naked fund* e  $V(s, T)$  è il prezzo della dynamic fund protection standard.

Un assicurato che versi inizialmente un capitale  $C$  diviene dunque titolare di

$$(7.1) \quad N_0^F = \frac{C}{A(s, T)}$$

quote di *Fondo Verde*, composte da  $N_0^F$  *Azioni Blu* ed altrettante dynamic fund protection option standard scritte su *Azioni Blu* e con livello di garanzia  $K$ .

Essendo il prezzo dell'opzione  $V(s, T) > 0$ , il numero di *Azioni Blu* di cui l'assicurato diviene virtualmente titolare investendo in quote del *Fondo Verde* è sicuramente inferiore al numero di azioni

$$(7.2) \quad N_0^I = \frac{C}{S(0)} > N_0^F$$

---

<sup>2</sup>In base a quanto detto nella sezione 4.2 l'analisi che segue può essere facilmente estesa al caso di una dynamic fund protection europea con livello di garanzia esponenziale  $Ke^{\gamma t}$  applicando la sostituzione (4.6).

che avrebbe potuto acquistare direttamente, al netto di qualsiasi protezione: infatti parte del capitale va a finanziare l'acquisto dell'opzione.

In una garanzia di questo tipo, in cui si richiede che il valore dell'*upgraded fund*  $\tilde{F}(t)$  sia in ogni istante non inferiore del *floor*  $K$ , il livello garantito  $K$  deve necessariamente essere minore del capitale investito iniziale: infatti (ragionando in termini di una singola quota) per costruzione deve aversi che

$$K \leq S(0) = \tilde{F}(0)$$

ed essendo

$$V(s,T) = e^{-rT} E_0^Q [Z(T)] = e^{-rT} E_0^Q \left[ S(T) \max \left\{ 0, \frac{K}{\min_{0 \leq u \leq T} S(u)} - 1 \right\} \right] > 0,$$

per la (2.9) si ha che

$$K \leq S(0) < A(s,T).$$

Perciò, a fronte di un capitale  $A(s,t)$  inizialmente impiegato per l'acquisto di una quota di fondo garantito, l'assicurato ha la certezza che a scadenza gli è reso un importo  $K$  inferiore a quello da lui versato; tuttavia, a prezzo di tale limitazione, gode del diritto di partecipare agli eventuali rendimenti derivanti da un valore di  $\tilde{F}(T) > A(s,T)$ .

Si veda la tabella 7.1 in cui si riporta un confronto fra l'importo investito per l'acquisto di una quota di fondo garantito  $A(s,T)$  ed il relativo capitale assicurato  $K$  in funzione di diverse maturità  $T = 1, 5, 10$  e per un fissato set di parametri  $r = 0.04$ ,  $\sigma = 0.2$  e  $s = 100$ .

La dynamic fund protection è dunque uno strumento adatto ad investitori "aggressivi" che, pur desiderando una garanzia di minimo, siano disposti a rischiare una parte del capitale per profittare delle opportunità di rendimento offerte dal sottostante azionario.

	<b>Importo</b>					
	<b>Maturity (T) = 1</b>					
<b>Capitale Investito (A(s, T))</b>	75.81	81.77	88.42	96.01	104.75	114.79
<b>Capitale Garantito (K)</b>	75	80	85	90	95	100
<b>Capitale Non Garantito</b>	0.81	1.77	3.42	6.01	9.75	14.79
	<b>Maturity (T) = 5</b>					
<b>Capitale Investito (A(s, T))</b>	82.26	90.14	98.70	108.03	118.16	129.17
<b>Capitale Garantito (K)</b>	75	80	85	90	95	100
<b>Capitale Non Garantito</b>	7.26	10.14	13.70	18.03	23.16	29.17
	<b>Maturity (T) = 10</b>					
<b>Capitale Investito (A(s, T))</b>	89.92	98.84	108.38	118.59	129.52	141.19
<b>Capitale Garantito (K)</b>	75	80	85	90	95	100
<b>Capitale Non Garantito</b>	14.92	18.84	23.38	28.59	34.52	41.19

Nota: Confronto fra il capitale investito per l'acquisto di una quota di fondo assicurato con dynamic fund protection standard  $A(s, T) = S(0) + V(s, T)$  ed il relativo capitale garantito  $K$  in relazione a un fissato set di parametri  $r = 0.04$ ,  $\sigma = 0.20$ ,  $s = 100$  e  $T = 1, 5, 10$  in un modello di valutazione di tipo Black e Scholes. I prezzi della garanzia dinamica sono valutati con gli appositi algoritmi di calcolo in visual basic riportati in appendice. Il capitale inizialmente investito è sempre maggiore del floor.

Tabella 7.1: Confronto fra il capitale investito per l'acquisto di una quota di fondo assicurato con dynamic fund protection standard ( $A(s, T)$ ) ed il relativo capitale garantito ( $K$ )

In generale non esiste un mercato sul quale la compagnia di assicurazione possa acquistare una dynamic fund protection option per coprire la garanzia venduta con il *Fondo Verde*; pertanto dovrà ricorrere ad un portafoglio replicante che sia autofinanziante e che, se ricalibrato istantaneamente, sia in grado di riprodurre il payoff  $\tilde{F}(T)$  alla scadenza. Per far questo deve applicare le tecniche di delta hedging tipiche dell'option pricing<sup>3</sup>.

Sia  $R_t$  il prezzo in  $t$  di un'unità di zero coupon bond risk-free con maturity in  $T$ . Si indichino rispettivamente con  $N_t^S$  e con  $N_t^R$  il numero di azioni ed il numero di bond da acquistare al tempo  $t$ . Si ha che

$$(7.3) \quad E_t = N_t^S S(t)$$

è il valore complessivo delle azioni acquistate (in  $t$ ), anche detto "esposizione" (*exposure*).

$$(7.4) \quad D_t = N_t^R R(t)$$

è il valore dei bond comprati alla stessa epoca, noto pure come "fondo riserva" (*reserve asset*) o "fondo dedicato" (*dedicated fund*). Affinchè la strategia sia autofinanziante deve essere istantaneamente soddisfatto il vincolo di bilancio

$$(7.5) \quad A(\tilde{F}(t), T-t) = E_t + D_t = N_t^S S(t) + N_t^R R(t)$$

dove  $A(\tilde{F}(t), T-t)$  è il valore al tempo  $t$  dell'investimento garantito.

Il piano di gestione del portafoglio replicante può essere descritto attraverso l'evoluzione della coppia di valori  $(N_t^S, N_t^R)$  in funzione di  $t \in [0, T]$ <sup>4</sup>. Dato che

$$(7.6) \quad N_t^S = \frac{E_t}{S(t)}$$

e

$$(7.7) \quad N_t^R = \frac{A(\tilde{F}(t), T-t) - E_t}{R(t)},$$

<sup>3</sup>Si veda [Castellani, De Felice, Moriconi (2006)].

<sup>4</sup>Oppure equivalentemente con la coppia  $(\alpha_t^S, 1-\alpha_t^S)$ , dove  $\alpha_t^S = \frac{E_t}{A(\tilde{F}(t), T-t)}$  è l'aliquota di capitale complessivo da destinare all'acquisto di azioni in  $t$ .

supponendo nota la situazione di mercato, la strategia può essere impostata definendo le sole regole di calcolo dell'esposizione  $E_t$ .

Per le ipotesi fatte sulla struttura dei tassi di interesse, il valore al tempo  $t$  dello zero coupon bond con maturity in  $T$  è

$$(7.8) \quad R(t) = v(t, T) = e^{-r(T-t)}.$$

Per il valore del *naked fund* si ipotizzi invece un'evoluzione stocastica secondo il moto Browniano geometrico descritto dalle equazioni (2.11) e (2.12)

Al tempo  $t = 0$  si consideri un investimento iniziale di importo  $C = A(s, T)$  per l'acquisto di una quota di *Fondo Verde*. Data la situazione di mercato (cioè i livelli di  $s$ ,  $r$  e  $\sigma$ ), per quanto detto nella sezione 2.3, si ha che l'esposizione iniziale è

$$(7.9) \quad E_0 = s \frac{d}{ds} A(s, T).$$

Si ricordi la formula chiusa (2.28) per la valutazione del prezzo  $A(s, T)$  del *protected fund* al tempo zero. Derivando si ottiene la (2.70), perciò:

$$(7.10) \quad E_0 = s \Phi\left(\frac{\kappa + rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - s \left(\frac{K}{s}\right)^{R+1} \Phi\left(\frac{-\kappa + rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

in cui

$$s = S(0), \quad \kappa = \ln \frac{s}{K} \quad \text{e} \quad R = \frac{2r}{\sigma^2}.$$

Sottraendo il valore dell'esposizione in zero dal capitale complessivo  $A(s, T)$  si ha che la componente di riserva iniziale è data dalla (2.71), cioè:

$$(7.11) \quad D_0 = K e^{-rT} \left(1 - \frac{1}{R}\right) \Phi\left(\frac{-\kappa - rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right) + K \left(1 + \frac{1}{R}\right) \left(\frac{K}{s}\right)^R \times \Phi\left(\frac{-\kappa + rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right).$$

Per costruire il portafoglio replicante il payoff dell'investimento garantito quindi la compagnia di assicurazione deve acquistare in zero

$$(7.12) \quad N_0^S = \Phi\left(\frac{\kappa + rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \left(\frac{K}{s}\right)^{R+1} \Phi\left(\frac{-\kappa + rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

azioni del *Titolo Blu* e

$$(7.13) \quad N_0^R = \frac{Ke^{-rT} \left(1 - \frac{1}{R}\right) \Phi\left(\frac{-\kappa - rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right) + K \left(1 + \frac{1}{R}\right) \left(\frac{K}{s}\right)^R \Phi\left(\frac{-\kappa + rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right)}{R(0)}$$

unità del bond risk-free.

Si osservi che essendo  $s \geq K > 0$  (per costruzione) e  $0 \leq \Phi(x) \leq 1$  (perchè  $\Phi$  è la distribuzione cumulata di una variabile aleatoria normale standardizzata), si ha che

$$N_0^S < 1.$$

Si definisca  $O(t)$  il numero di azioni formalmente accreditate sul conto del cliente fino al tempo  $t$ , ma che di fatto non sono esigibili fino alla maturity  $T$ . Per quanto detto nelle sezioni 2.1 e 2.2.3 si ha che

$$(7.14) \quad O(t) = \max \left\{ 1, \max_{0 \leq u \leq t} \frac{K}{S(u)} \right\}.$$

A fronte di  $O(0) = 1$  azioni del *Titolo Blu* virtualmente accreditate al cliente al tempo zero, la compagnia di assicurazione deve procurarsi  $N_0^S < 1$  azioni del titolo stesso, destinando il capitale residuo  $D(0)$  all'acquisto di  $N_0^R$  unità del bond risk-free con maturity in  $T$  per tener conto della garanzia.

Successivamente, in un qualunque istante  $t \in [0, T]$ , si ha che l'ammontare complessivo di risorse disponibili per la strategia replicante autofinanziante è dato dal valore in  $t$  dell'investimento garantito  $A(\tilde{F}(t), T-t)$ . Questo è a sua volta scomponibile nella somma di due componenti:

$$(2.67) \quad A(\tilde{F}(t), T-t) = \tilde{F}(t) + V(\tilde{F}(t), T-t)$$

in cui  $\tilde{F}(t)$  è il valore dell'*upgraded fund* già maturato in  $t$  e  $V(\tilde{F}(t), T-t)$  è il valore della dynamic fund protection residua con *naked fund* di importo  $s = \tilde{F}(t)$  ed orizzonte contrattuale  $T - t$ . Si ricordi che

$$(7.15) \quad \tilde{F}(t) = S(t) \max \left\{ 1, \max_{0 \leq u \leq t} \frac{K}{S(u)} \right\} = S(t) O(t)$$

e che

$$(2.56) \quad V(\tilde{F}(t), T-t) = S(t) \left\{ O(t) \Phi(d_1) - 1 \right\} + \frac{K}{R} \left( \frac{K'(t)}{S(t)} \right)^R \Phi(d_2) + \left( 1 - \frac{1}{R} \right) K e^{-r\tau} \Phi(d_3)$$

con

$$(2.57) \quad \begin{aligned} d_1 &= \frac{\kappa'(t) + r\tau + \frac{1}{2}\sigma^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}, \\ d_2 &= \frac{-\kappa'(t) + r\tau + \frac{1}{2}\sigma^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}, \\ d_3 &= \frac{-\kappa'(t) - r\tau + \frac{1}{2}\sigma^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}, \end{aligned}$$

e

$$(2.58) \quad \tau = T - t, \quad R = \frac{2r}{\sigma^2}, \quad K'(t) = \frac{K}{O(t)}, \quad \kappa'(t) = \ln \frac{\tilde{F}(t)}{K} = \ln \frac{S(t)}{K'(t)}.$$

L'esposizione azionaria al tempo  $t$  è data da

$$(2.68) \quad E_t = \tilde{F}(t) \frac{d}{ds} A(\tilde{F}(t), T-t).$$

Ricorrendo alla (2.70) in cui si effettuino le sostituzioni (2.72), (2.57), (2.58) e (7.15) si può esplicitare

$$(7.16) \quad E_t = S(t) O(t) \left[ \Phi(d_1) - \left( \frac{K'(t)}{S(t)} \right)^{R+1} \Phi(d_2) \right].$$

Il valore in  $t$  della componente di riserva, ottenibile per differenza fra  $A(\tilde{F}(t), T-t)$  ed  $E_t$ , è dunque uguale a

$$(7.17) \quad D_t = K e^{-r\tau} \left( 1 - \frac{1}{R} \right) \Phi(d_3) + K \left( 1 + \frac{1}{R} \right) \left( \frac{K'(t)}{S(t)} \right)^R \Phi(d_2).$$

La (7.16) e la (7.17) sono entrambe funzioni del tempo  $t$ , pertanto la strategia di hedging si qualifica come una strategia dinamica che richiede una continua ricalibratura delle posizioni. In ciascun istante  $t \in [0, T]$  il portafoglio istantaneamente replicante il payoff a scadenza del *Fondo Verde* deve essere composto acquistando

$$(7.18) \quad N_t^S = O(t) \left[ \Phi(d_1) - \left( \frac{K'(t)}{S(t)} \right)^{R+1} \Phi(d_2) \right]$$

azioni del *Titolo Blu* e

$$(7.19) \quad N_t^R = \frac{K e^{-r\tau} \left( 1 - \frac{1}{R} \right) \Phi(d_3) + K \left( 1 + \frac{1}{R} \right) \left( \frac{K'(t)}{S(t)} \right)^R \Phi(d_2)}{R(t)}$$

unità del bond risk-free con maturity in  $T$ . Si osservi che

$$N_t^S \leq O(t) \quad \forall t \in [0, T];$$

in altre parole, la compagnia per tener conto della garanzia residua nel periodo  $[t, T]$  acquista in  $t$  un numero di azioni che è sempre non superiore a quello figurativamente accreditato sul conto del cliente in base all'*upgraded fund*  $\tilde{F}(t) = O(t)S(t)$  già maturato (ma non esigibile fino alla scadenza  $T$ ). Le risorse eccedenti vengono impegnate per l'acquisto di unità dello zero coupon bond risk-free in modo che in  $T$  si possa effettivamente garantire l'importo  $\tilde{F}(T) = S(T) \max \left\{ 1, \max_{0 \leq u \leq T} \frac{K}{S(u)} \right\}$ .

Nel caso in cui sia  $\tau \rightarrow \infty$ , si ha

$$(7.20) \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} N_t^S = O(t) \left[ 1 - \left( \frac{K'(t)}{S(t)} \right)^{R+1} \right].$$

Moltiplicando la (7.20) per il prezzo dell'azione  $S(t)$  si ottiene l'esposizione azionaria al tempo  $t$  del portafoglio replicante una dynamic fund protection standard perpetua, espressa dalla (2.73).

Nel caso in cui  $\tau \rightarrow 0$ , si ha

$$(7.21) \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} N_t^S = O(t).$$

Avvicinandosi alla maturity dell'investimento, il numero di azioni effettivamente acquistate nel portafoglio replicante tende al numero di azioni virtualmente accreditate sul conto del cliente.

Si consideri l'equazione (7.18). Si calcoli la sua derivata rispetto ad  $S(t)$  facendo ben attenzione al fatto che anche i valori di  $d_1$  e  $d_2$  sono implicitamente funzioni di  $S(t)$ . Si ottiene che

$$(7.22) \quad \frac{d}{dS(t)} N_t^S \geq 0.$$

Il numero di quote azionarie è una funzione non decrescente di  $S(t)$ , quindi un rialzo del prezzo  $S(t)$  richiede l'acquisto di azioni mentre un ribasso di  $S(t)$  ne richiede la vendita. La strategia replicante descritta è dunque una strategia a inseguimento, nel senso che "asseconda" l'andamento del prezzo azionario prescrivendo di comprare

unità del sottostante quando il suo prezzo sale e di venderne quando il prezzo scende. Questa caratteristica, tipica delle tecniche di delta hedging, in linea di principio può causare gravi scompensi di mercato qualora sia diffusamente attuata dagli operatori giacché può portare ad eccessi di domanda nei periodi di rialzo ed eccessi di offerta nei periodi di ribasso; eccessi che si auto-alimentano, aggravando ulteriormente lo squilibrio.

La strategia prescritta rappresenta, evidentemente, uno schema idealizzato. Per poterla trasformare in una procedura operativa, è necessario definirne una versione approssimata. Nelle applicazioni pratiche ciascuna delle ipotesi semplificatrici del modello adottato può dare origine a difficoltà di realizzazione. Si devono dunque precisare una serie di dettagli operativi che incidono fortemente sull'efficacia della procedura. Primo fra tutti è il problema di discretizzazione temporale, che è reso ancor più spinoso dalla peculiarità path dependent della garanzia. In generale, a causa della discretizzazione, non è più garantito che il portafoglio replicante sia autofinanziante: infatti può accadere che

$$A(\tilde{F}(t + \Delta t), T - (t + \Delta t)) \gtrless N_t^S S(t + \Delta t) + N_t^R R(t + \Delta t),$$

nel qual caso si rendono necessari ulteriori versamenti ( $>$ ) o prelievi ( $<$ ) di risorse nel/dal portafoglio.

Per stimare la consistenza dell'errore di replicazione si possono adottare tecniche di tipo Monte Carlo con correzione ABR<sup>5</sup> che, attraverso la simulazione di un campione di traiettorie di  $S(t)$ , permettono di dare una valutazione probabilistica in merito allo scostamento tra il valore a scadenza del portafoglio replicante discretizzato e l'effettivo payoff dell'*upgraded fund*. A tal fine non è più sufficiente la conoscenza della sola probabilità risk-neutral  $Q$ , ma si deve specificare la distribuzione di probabilità naturale  $P$ . Nel modello di Black e Scholes adottato questo si traduce nella necessità di stimare il coefficiente di deriva  $\mu$  del moto Browniano (2.12), ovvero dello *yield-to-maturity* istantaneo atteso del titolo azionario.

---

<sup>5</sup>Si veda quanto detto nella sezione 3.1 in merito alla simulazione Monte Carlo di un'opzione path dependent che agisce nel continuo.

Si tenga poi conto che nei mercati reali i costi di transazione non sono nulli. Ogni ricalibratura implica delle spese di acquisto e di vendita. Si deve quindi realizzare un compromesso tra i costi e i benefici derivanti dalla frequenza degli aggiustamenti.

Altre ipotesi forti difficilmente riscontrabili nella realtà sono quelle sulla costanza della volatilità  $\sigma$  e sulla struttura a termine dei tassi di interesse, supposta piatta e deterministica. Per ovviare a queste imperfezioni bisogna aumentare la complessità del modello, assumendo processi stocastici diversi dal semplice moto Browniano Geometrico<sup>6</sup> ed ampliando il numero delle fonti di incertezza per incorporare anche il rischio di tasso.

---

<sup>6</sup>Si veda quanto detto nel capitolo 3 in merito alla volatility smile e alla classe di processi CEV.



## Appendice A

# Funzioni Visual Basic per il pricing di alcuni tipi di opzione in un modello di valutazione di tipo Black e Scholes

### A.1 Funzione per il calcolo del prezzo di una Put Option Europea avente strike price che cresce con legge esponenziale

```
Public Function Prezzo_put_divid_strike_esp(Risk_free_force_r#, %  
2     Volatility_sigma#, Price0_s#, Livello0_K#, Intensità_gamma#,%  
     Maturity_T#, Dividend_yield_Zeta#) As Double  
  
Dim s, Gamma, Zeta, r, T, K, Sigma As Double  
r = Risk_free_force_r  
7 Sigma = Volatility_sigma  
s = Price0_s  
K = Livello0_K
```

```

Gamma = Intensità_gamma
T = Maturity_T
Zeta = Dividend_yield_Zeta

14 Dim Sconto1, Sconto2, d_m_1, d_m_2, Phi_dm1, Phi_dm2, %
    kappa As Double
Dim Addendo1, Addendo2 As Double

Sconto1 = Exp(-(r - Gamma) * T)
19 Sconto2 = Exp(-Zeta * T)
kappa = Log(s / K)

d_m_2 = (-kappa - ((r - Gamma - Zeta) * T) + ((1 / 2) * %
    Sigma ^ 2 * T)) / (Sigma * Sqr(T))
24 d_m_1 = (-kappa - ((r - Gamma - Zeta) * T) - ((1 / 2) * %
    Sigma ^ 2 * T)) / (Sigma * Sqr(T))
Phi_dm2 = Application.NormDist(d_m_2, 0, 1, 1)
Phi_dm1 = Application.NormDist(d_m_1, 0, 1, 1)

29 Addendo1 = K * Sconto1 * Phi_dm2
Addendo2 = s * Sconto2 * Phi_dm1
Prezzo_put_divid_strike_esp = Addendo1 - Addendo2
End Function

```

## A.2 Funzione per il calcolo del prezzo di una Garanzia di Rendimento Minimo Annuo (Cliquet Guarantee), in un modello di tipo Black e Scholes che non preveda dividendi

```
Public Function Prezzo_Cliquet_NoDividend(Risk_free_force_r#, %  
2   Volatility_sigma#, Price0_s#, Livello0_K#, Intensità_gamma#, %  
   Maturity_T#) As Double  
  
Dim s, Gamma, r, T, K, Sigma As Double  
r = Risk_free_force_r  
7 Sigma = Volatility_sigma  
s = Price0_s  
K = Livello0_K  
Gamma = Intensità_gamma  
T = Maturity_T  
  
12 Dim Sconto1, Sconto2, d1, d2, Phi_d1, Phi_d2 As Double  
Dim Quadra As Double  
  
d1 = ((r - Gamma) + ((Sigma ^ 2) / 2)) / Sigma  
17 d2 = ((-r - Gamma) + ((Sigma ^ 2) / 2)) / Sigma  
Phi_d1 = Application.NormDist(d1, 0, 1, 1)  
Phi_d2 = Application.NormDist(d2, 0, 1, 1)  
Sconto1 = Exp(-(r - Gamma))  
  
22 Quadra = Phi_d1 + Sconto1 * Phi_d2  
Prezzo_Cliquet_NoDividend = s * Quadra ^ T - s  
End Function
```

### A.3 Funzione per il calcolo del prezzo di una Lookback Option Europea di tipo Call con Fixed Strike (L.O. Call on Maximum)

```

Public Function Prezzo_lo_call_fixed(r#, Sigma#, s#, K#, L_max#, %
2   T#, Zeta#) As Double
Dim Sconto1#, Sconto2#, d_1_k#, d_2_k#, d_3_k#, Phi_d1K#, %
   Phi_d2K#, Phi_d3K#, Addendo1#, Addendo2#, Addendo3#, Addendo4#
Dim Molt_1#, Molt_2#
Dim U_bar, Sigma_bar, Delta_bar As Double
7   Dim Graffa1, Graffa2 As Double
Dim d_1_L_max#, d_2_L_max#, d_3_L_max#, Phi_d1L_max#, %
   Phi_m_d2L_max#, Phi_d3L_max#

Sconto1 = Exp(-Zeta * T)
12  Sconto2 = Exp(-r * T)
Molt_1 = (s * (Sigma ^ 2)) / (2 * (r - Zeta))

If K < L_max Then
Molt_2 = (L_max / s) ^ ((2 * (r - Zeta)) / Sigma ^ 2)
17  If L_max = 0 Then
U_bar = 1
Else
U_bar = Log(L_max / s)
End If
22
Sigma_bar = Sigma
Delta_bar = -r + Zeta

d_1_L_max = (-U_bar + (-Delta_bar + ((Sigma_bar ^ 2) / 2)) * T) %
27  / (Sigma_bar * Sqr(T))
d_2_L_max = d_1_L_max - (Sigma_bar * Sqr(T))
d_3_L_max = d_1_L_max + ((2 * Delta_bar * Sqr(T)) / Sigma_bar)

```

```

Phi_d1L_max = Application.NormDist(d_1_L_max, 0, 1, 1)
Phi_m_d2L_max = Application.NormDist(-d_2_L_max, 0, 1, 1)
Phi_d3L_max = Application.NormDist(d_3_L_max, 0, 1, 1)

34 If (Phi_d1L_max > 1) Or (Phi_m_d2L_max > 1) Or (Phi_d3L_max > 1) %
    Or (Phi_d1L_max < 0) Or (Phi_m_d2L_max < 0) Or %
    (Phi_d3L_max < 0) Then
Prezzo_lo_call_fixed = "ERRORE SULLA FUNZIONE DI RIPARTIZIONE"
Else
39 Addendo1 = s * Sconto1 * Phi_d1L_max
Addendo2 = L_max * Sconto2 * Phi_m_d2L_max
Addendo3 = K * Sconto2

Graffa1 = Sconto1 * Phi_d1L_max
44 Graffa2 = Molt_2 * Sconto2 * Phi_d3L_max
Addendo4 = Molt_1 * (Graffa1 - Graffa2)

Prezzo_lo_call_fixed = Addendo1 + Addendo2 - Addendo3 + Addendo4
End If

49 Else
Molt_2 = (K / s) ^ ((2 * (r - Zeta)) / Sigma ^ 2)

If K = 0 Then
54 U_bar = 1
Else
U_bar = Log(K / s)
End If

59 Sigma_bar = Sigma
Delta_bar = -r + Zeta

```

```

d_1_k = (-U_bar + (-Delta_bar + ((Sigma_bar ^ 2) / 2)) * T) / %
      (Sigma_bar * Sqr(T))
d_2_k = d_1_k - (Sigma_bar * Sqr(T))
d_3_k = d_1_k + ((2 * Delta_bar * Sqr(T)) / Sigma_bar)
65
Phi_d1K = Application.NormDist(d_1_k, 0, 1, 1)
Phi_d2K = Application.NormDist(d_2_k, 0, 1, 1)
Phi_d3K = Application.NormDist(d_3_k, 0, 1, 1)

70 If (Phi_d1K > 1) Or (Phi_d2K > 1) Or (Phi_d3K > 1) Or %
      (Phi_d1K < 0) Or (Phi_d2K < 0) Or (Phi_d3K < 0) Then

Prezzo_lo_call_fixed = "ERRORE SULLA FUNZIONE DI RIPARTIZIONE"
Else
75
Addendo1 = s * Sconto1 * Phi_d1K
Addendo2 = K * Sconto2 * Phi_d2K

Graffa1 = Sconto1 * Phi_d1K
80 Graffa2 = Molt_2 * Sconto2 * Phi_d3K
Addendo3 = Molt_1 * (Graffa1 - Graffa2)

Prezzo_lo_call_fixed = Addendo1 - Addendo2 + Addendo3
End If
85 End If

End Function

```

#### A.4 Funzione per il calcolo del prezzo di una Lookback Option Europea di tipo Put con Floating Strike (L.O. Put Standard)

```

Public Function Prezzo_lo_put_floating(r#, Sigma#, s#, K#, T#, %
2   Zeta#) As Double
Dim L_max#
Dim Sconto1#, Sconto2#, Addendo1#, Addendo2#, Addendo3#
Dim Molt_1#, Molt_2#
Dim U_bar, Sigma_bar, Delta_bar As Double
7 Dim Graffa1, Graffa2 As Double
Dim d_1_L_max#, d_2_L_max#, d_3_L_max#, Phi_m_d1L_max#, %
    Phi_m_d2L_max#, Phi_d3L_max#, Phi_d1L_max#

L_max = K
12 Sconto1 = Exp(-Zeta * T)
Sconto2 = Exp(-r * T)
Molt_1 = (s * (Sigma ^ 2)) / (2 * (r - Zeta))
Molt_2 = (L_max / s) ^ ((2 * (r - Zeta)) / Sigma ^ 2)

17 If L_max = 0 Then
U_bar = 1
Else
U_bar = Log(L_max / s)
End If

22 Sigma_bar = Sigma
Delta_bar = -r + Zeta

d_1_L_max = (-U_bar + (-Delta_bar + ((Sigma_bar ^ 2) / 2)) * T) / %
27 (Sigma_bar * Sqr(T))
d_2_L_max = d_1_L_max - (Sigma_bar * Sqr(T))
d_3_L_max = d_1_L_max + ((2 * Delta_bar * Sqr(T)) / Sigma_bar)

```

```

Phi_m_d2L_max = Application.NormDist(-d_2_L_max, 0, 1, 1)
Phi_m_d1L_max = Application.NormDist(-d_1_L_max, 0, 1, 1)
Phi_d3L_max = Application.NormDist(d_3_L_max, 0, 1, 1)
Phi_d1L_max = Application.NormDist(d_1_L_max, 0, 1, 1)
34 If (Phi_d1L_max > 1) Or (Phi_m_d2L_max > 1) Or (Phi_d3L_max > 1) %
    Or (Phi_d1L_max < 0) Or (Phi_m_d2L_max < 0) Or %
    (Phi_d3L_max < 0) Or (Phi_m_d1L_max < 0) Or %
    (Phi_m_d1L_max > 1) Then

39     Prezzo_lo_put_floating = "ERRORE SULLA FUNZIONE %
    DI RIPARTIZIONE"
Else

    Addendo2 = s * Sconto1 * Phi_m_d1L_max
44     Addendo1 = L_max * Sconto2 * Phi_m_d2L_max

    Graffa1 = Sconto1 * Phi_d1L_max
    Graffa2 = Molt_2 * Sconto2 * Phi_d3L_max
    Addendo3 = Molt_1 * (Graffa1 - Graffa2)

49     Prezzo_lo_put_floating = Addendo1 - Addendo2 + Addendo3
End If

End Function

```

## A.5 Funzione per il calcolo del prezzo di una Lookback Option Europea di tipo Put con Fixed Strike (L.O. Put on Minimum)

```

Public Function Prezzo_lo_put_fixed(r#, Sigma#, s#, K#, L_min#, %
2   T#, Zeta#)
Dim Sconto1#, Sconto2#, d_1_k#, d_2_k#, d_3_k#, Phi_m_d1K#, %
   Phi_m_d2K#, Phi_m_d3K#, Addendo1#, Addendo2#, Addendo3#, %
   Addendo4#
Dim Molt_1#, Molt_2#
7 Dim U_bar, Sigma_bar, Delta_bar As Double
Dim Graffa1, Graffa2 As Double
Dim d_1_L_min#, d_2_L_min#, d_3_L_min#, Phi_m_d1L_min#, %
   Phi_d2L_min#, Phi_m_d3L_min#

12 Sconto1 = Exp(-Zeta * T)
Sconto2 = Exp(-r * T)
Molt_1 = (s * (Sigma ^ 2)) / (2 * (r - Zeta))

If K > L_min Then
17 Molt_2 = (L_min / s) ^ ((2 * (r - Zeta)) / Sigma ^ 2)

If L_min = 0 Then
U_bar = 1
Else
22 U_bar = Log(L_min / s)
End If
Sigma_bar = Sigma
Delta_bar = -r + Zeta

```

```

d_1_L_min = (-U_bar + (-Delta_bar + ((Sigma_bar ^ 2) / 2)) * T) / %
    (Sigma_bar * Sqr(T))
d_2_L_min = d_1_L_min - (Sigma_bar * Sqr(T))
d_3_L_min = d_1_L_min + ((2 * Delta_bar * Sqr(T)) / Sigma_bar)
30
Phi_m_d1L_min = Application.NormDist(-d_1_L_min, 0, 1, 1)
Phi_d2L_min = Application.NormDist(d_2_L_min, 0, 1, 1)
Phi_m_d3L_min = Application.NormDist(-d_3_L_min, 0, 1, 1)

35 If (Phi_m_d1L_min > 1) Or (Phi_d2L_min > 1) Or (Phi_m_d3L_min > 1)%
    Or (Phi_m_d1L_min < 0) Or (Phi_d2L_min < 0) Or %
    (Phi_m_d3L_min < 0) Then
Prezzo_lo_put_fixed = "ERRORE SULLA FUNZIONE DI RIPARTIZIONE"
Else
40
Addendo3 = s * Sconto1 * Phi_m_d1L_min
Addendo2 = L_min * Sconto2 * Phi_d2L_min
Addendo1 = K * Sconto2

45 Graffa2 = Sconto1 * Phi_m_d1L_min
Graffa1 = Molt_2 * Sconto2 * Phi_m_d3L_min
Addendo4 = Molt_1 * (Graffa1 - Graffa2)

Prezzo_lo_put_fixed = Addendo1 - Addendo2 - Addendo3 + Addendo4
50 End If

Else
Molt_2 = (K / s) ^ ((2 * (r - Zeta)) / Sigma ^ 2)

55 U_bar = Log(K / s)
Sigma_bar = Sigma
Delta_bar = -r + Zeta

```

```

d_1_k = (-U_bar + (-Delta_bar + ((Sigma_bar ^ 2) / 2)) * T) / %
      (Sigma_bar * Sqr(T))
d_2_k = d_1_k - (Sigma_bar * Sqr(T))
d_3_k = d_1_k + ((2 * Delta_bar * Sqr(T)) / Sigma_bar)
62
Phi_m_d1K = Application.NormDist(-d_1_k, 0, 1, 1)
Phi_m_d2K = Application.NormDist(-d_2_k, 0, 1, 1)
Phi_m_d3K = Application.NormDist(-d_3_k, 0, 1, 1)
67 If (Phi_m_d1K > 1) Or (Phi_m_d2K > 1) Or (Phi_m_d3K > 1) Or %
      (Phi_m_d1K < 0) Or (Phi_m_d2K < 0) Or (Phi_m_d3K < 0) Then

Prezzo_lo_put_fixed = "ERRORE SULLA FUNZIONE DI RIPARTIZIONE"
Else
72 Addendo2 = s * Sconto1 * Phi_m_d1K
Addendo1 = K * Sconto2 * Phi_m_d2K

Graffa2 = Sconto1 * Phi_m_d1K
Graffa1 = Molt_2 * Sconto2 * Phi_m_d3K
77 Addendo3 = Molt_1 * (Graffa1 - Graffa2)

Prezzo_lo_put_fixed = Addendo1 - Addendo2 + Addendo3
End If
End If
82
End Function

```

## A.6 Funzione per il calcolo del prezzo di una Lookback Option Europea di tipo Call con Floating Strike (L.O. Call Standard o L.O. Call on Minimum)

```

Public Function Prezzo_lo_call_floating(r#, Sigma#, s#, K#, %
2   T#, Zeta#) As Double
Dim L_min#
Dim Sconto1#, Sconto2#, Addendo1#, Addendo2#, Addendo3#
Dim Molt_1#, Molt_2#
Dim U_bar, Sigma_bar, Delta_bar As Double
7   Dim Graffa1, Graffa2 As Double
Dim d_1_L_min#, d_2_L_min#, d_3_L_min#, Phi_m_d1L_min#, %
    Phi_m_d3L_min#, Phi_d1L_min#, Phi_d2L_min#

L_min = K

12  Sconto1 = Exp(-Zeta * T)
    Sconto2 = Exp(-r * T)
    Molt_1 = (s * (Sigma ^ 2)) / (2 * (r - Zeta))
    Molt_2 = (L_min / s) ^ ((2 * (r - Zeta)) / Sigma ^ 2)

17  If L_min = 0 Then
        U_bar = 1
    Else
        U_bar = Log(L_min / s)
22  End If

Sigma_bar = Sigma
Delta_bar = -r + Zeta

```

```

d_1_L_min = (-U_bar + (-Delta_bar + ((Sigma_bar ^ 2) / 2)) * T) / %
    (Sigma_bar * Sqr(T))
d_2_L_min = d_1_L_min - (Sigma_bar * Sqr(T))
d_3_L_min = d_1_L_min + ((2 * Delta_bar * Sqr(T)) / Sigma_bar)
30
Phi_m_d1L_min = Application.NormDist(-d_1_L_min, 0, 1, 1)
Phi_d1L_min = Application.NormDist(d_1_L_min, 0, 1, 1)
Phi_d2L_min = Application.NormDist(d_2_L_min, 0, 1, 1)
Phi_m_d3L_min = Application.NormDist(-d_3_L_min, 0, 1, 1)
35
If (Phi_d1L_min < 0) Or (Phi_d1L_min > 1) Or (Phi_m_d1L_min > 1) %
    Or (Phi_d2L_min > 1) Or (Phi_m_d3L_min > 1) Or %
    (Phi_m_d1L_min < 0) Or (Phi_d2L_min < 0) Or %
    (Phi_m_d3L_min < 0) Then
40
Prezzo_lo_call_floating = "ERRORE SULLA FUNZIONE DI RIPARTIZIONE"
Else

Addendo1 = s * Sconto1 * Phi_d1L_min
45 Addendo2 = L_min * Sconto2 * Phi_d2L_min

Graffa2 = Sconto1 * Phi_m_d1L_min
Graffa1 = Molt_2 * Sconto2 * Phi_m_d3L_min
Addendo3 = Molt_1 * (Graffa1 - Graffa2)
50
Prezzo_lo_call_floating = Addendo1 - Addendo2 + Addendo3
End If

End Function

```

## A.7 Funzione per il calcolo del prezzo di una High-Low Option Europea

```
Public Function Prezzo_high_low(r#, Sigma#, s#, L_max#, L_min#, %  
2   T#, Zeta#) As Double  
Dim Addendo1#, Addendo2#  
  
Addendo1 = Prezzo_lo_put_floating(r, Sigma, s, L_max, T, Zeta)  
Addendo2 = Prezzo_lo_call_floating(r, Sigma, s, L_min, T, Zeta)  
7 Prezzo_high_low = Addendo1 + Addendo2  
  
End Function
```

## A.8 Funzione per il calcolo del prezzo di una Dynamic Investment Fund Protection Europea con livello di garanzia esponenziale e participation rate non unitario

```
Public Function dfp_espon_divid_partec(r#, Sigma#, Gamma#, s#, %  
2   Aliquota_k#, T#, Zeta#, p_rate#) As Double  
Dim Ni, m, Alpha, Sconto1, Mu_star, K As Double  
Dim U_bar, Sigma_bar, Delta_bar As Double  
Dim d_1_k, d_2_k, d_3_k, Phi_d1K, Phi_d2K, Phi_d3K As Double  
Dim Molt1, Sconto2, Sconto3, Sconto4 As Double  
7 Dim Addendo1, Addendo2, Quadra1, Quadra2, Addendo3, B_u_T As Double  
  
Mu_star = r - Zeta - ((Sigma ^ 2) / 2)  
K = Aliquota_k  
m = Gamma - (p_rate * Mu_star)  
12 Ni = p_rate * Sigma  
Alpha = p_rate * Mu_star + (((Ni) ^ 2) / 2)
```

```

Sconto1 = Exp((Alpha - r) * T)

U_bar = -Log(K)
Sigma_bar = Ni
18 Delta_bar = Alpha - Gamma

d_1_k = (-U_bar + (-Delta_bar + ((Sigma_bar ^ 2) / 2)) * T) / %
      (Sigma_bar * Sqr(T))
d_2_k = d_1_k - (Sigma_bar * Sqr(T))
23 d_3_k = d_1_k + ((2 * Delta_bar * Sqr(T)) / Sigma_bar)

Phi_d1K = Application.NormDist(d_1_k, 0, 1, 1)
Phi_d2K = Application.NormDist(d_2_k, 0, 1, 1)
Phi_d3K = Application.NormDist(d_3_k, 0, 1, 1)
28

Sconto2 = Exp(-Delta_bar * T)
Sconto3 = Exp(U_bar)
Sconto4 = Exp(-((2 * Delta_bar * U_bar) / (Sigma_bar ^ 2)))
Molt1 = (Sigma_bar ^ 2) / (2 * Delta_bar)
33

Addendo1 = Sconto2 * Phi_d1K
Addendo2 = Sconto3 * Phi_d2K

Quadra1 = Sconto2 * Phi_d1K
38 Quadra2 = Sconto4 * Phi_d3K
Addendo3 = Molt1 * (Quadra1 - Quadra2)

B_u_T = Addendo1 - Addendo2 - Addendo3

43 dfp_espon_divid_partec = s * K * Sconto1 * B_u_T

End Function

```

## A.9 Funzione per il calcolo del prezzo di una Dynamic Investment Fund Protection Standard

```
Public Function Prezzo_dfp_std_dividendi(r#, Sigma#, s#, %  
2   Livello_K#, T#, Zeta#) As Double  
  
Dim Aliquota_k#  
Dim p_rate#  
Dim Gamma#  
7 Aliquota_k = Livello_K / s  
p_rate = 1  
Gamma = 0  
  
Prezzo_dfp_std_dividendi = dfp_espon_divid_partec(r, Sigma, %  
12   Gamma, s, Aliquota_k, T, Zeta#, p_rate#)  
End Function
```

## A.10 Funzione per il calcolo del prezzo di una Dynamic Investment Fund Protection Standard perpetua

```
Public Function Prezzo_dfp_std_perpetua(r#, Sigma#, s#, %  
2   Livello_K#) As Double  
Dim R_grande#  
Dim Fattore1, Fattore2 As Double  
  
R_grande = 2 * r / (Sigma ^ 2)  
7 Fattore1 = Livello_K / R_grande  
Fattore2 = (Livello_K / s) ^ R_grande  
Prezzo_dfp_std_perpetua = Fattore1 * Fattore2  
End Function
```

### A.11 Funzione per il calcolo del prezzo di una Dynamic Investment Fund Protection Europea con livello di garanzia esponenziale

```
Public Function Prezzo_dfp_esp_dividendi(r#, Sigma#, Gamma#, s#, %  
2 Livello_K#, T#, Zeta#) As Double  
Dim Aliquota_k#  
Dim p_rate#  
  
Aliquota_k = Livello_K / s  
7 p_rate = 1  
  
Prezzo_dfp_esp_dividendi = dfp_espon_divid_partec(r, Sigma, %  
Gamma, s, Aliquota_k, T, Zeta#, p_rate#)  
End Function
```

### A.12 Funzione per il calcolo del prezzo di una Dynamic Investment Fund Protection con livello di garanzia stocastico in un modello di tipo Black e Scholes bivariato

```
Function Prezzo_dfp_stocastica(r#, Sigma_indice#, Sigma_garanzia#,%  
2 s_indice#, s_garanzia#, Zeta_indice#, Zeta_garanzia#, T#,%  
Corr_titoli#)  
  
Dim s1, s2, Zeta1, Zeta2, Sigma1, Sigma2, Ro As Double  
Dim Mu1_star, Mu2_star, Ni, m As Double
```

```

Dim U_bar, Sigma_bar, Delta_bar As Double
Dim d_1_k, d_2_k, d_3_k, Phi_d1K, Phi_d2K, Phi_d3K As Double
Dim Molt1, Sconto1, Sconto2, Sconto3, Sconto4 As Double
Dim Addendo1, Addendo2, Quadra1, Quadra2, Addendo3, %
11   B_u_T As Double
Dim Ni_quadro#

s1 = s_garanzia
s2 = s_indice
16  Zeta1 = Zeta_garanzia
Zeta2 = Zeta_indice
Sigma1 = Sigma_garanzia
Sigma2 = Sigma_indice
Ro = Corr_titoli
21

Mu1_star = r - Zeta1 - ((Sigma1 ^ 2) / 2)
Mu2_star = r - Zeta2 - ((Sigma2 ^ 2) / 2)

m = Mu1_star - Mu2_star
26  Ni_quadro = ((Sigma1 ^ 2) + (Sigma2 ^ 2) - (2 * Ro * Sigma1 * %
      Sigma2))

If Ni_quadro = 0 Then
Prezzo_dfp_stocastica = "ERRORE!!! diviso zero"
31 Else
Ni = Sqr((Sigma1 ^ 2) + (Sigma2 ^ 2) - (2 * Ro * Sigma1 * Sigma2))

Sconto1 = Exp(-Zeta2 * T)

36  U_bar = Log(s2 / s1)

Sigma_bar = Ni
Delta_bar = Zeta1 - Zeta2

```

```

d_1_k = (-U_bar + (-Delta_bar + ((Sigma_bar ^ 2) / 2)) * T) / %
    (Sigma_bar * Sqr(T))
d_2_k = d_1_k - (Sigma_bar * Sqr(T))
d_3_k = d_1_k + ((2 * Delta_bar * Sqr(T)) / Sigma_bar)
44
Phi_d1K = Application.NormDist(d_1_k, 0, 1, 1)
Phi_d2K = Application.NormDist(d_2_k, 0, 1, 1)
Phi_d3K = Application.NormDist(d_3_k, 0, 1, 1)

49 Sconto2 = Exp(-Delta_bar * T)
Sconto3 = Exp(U_bar)
Sconto4 = Exp(-((2 * Delta_bar * U_bar) / (Sigma_bar ^ 2)))

Molt1 = (Sigma_bar ^ 2) / (2 * Delta_bar)
54
Addendo1 = Sconto2 * Phi_d1K
Addendo2 = Sconto3 * Phi_d2K

Quadra1 = Sconto2 * Phi_d1K
59 Quadra2 = Sconto4 * Phi_d3K
Addendo3 = Molt1 * (Quadra1 - Quadra2)

B_u_T = Addendo1 - Addendo2 - Addendo3

64 Prezzo_dfp_stocastica = s1 * Sconto1 * B_u_T
End If

End Function

```



# Bibliografia

- [Abramowitz e Stegun (1972)] ABRAMOWITZ, M.— STEGUN, I. 1972. "Handbook of Mathematical Functions". New York: Dover Publications.
- [American Academy of Actuaries (AAA) (1997)] AMERICAN ACADEMY OF ACTUARIES (AAA). 1997. "Final Report of the Equity Indexed Products Task Force", American Academy of Actuaries, Washington, DC.
- [Andersen e Brotherton-Ratcliffe (1996)] ANDERSEN, L.— BROTHERTON-RATCLIFFE, R. 1996. "Exact Exotics". Risk 9 (10): 85-9.
- [Andersen e Boyle (1999)] ANDERSEN, L.— BOYLE, P. P. 1999. "Monte Carlo Methods for the Valuation of Interest Rate Securities". Contenuto in Advanced Fixed Income Tools, ed. Jegadeesh, N. e Tuckerman, B. New York: John Wiley and Sons.
- [Bakshi, Cao e Chen (1997)] BAKSHI, G.— CAO, C.— CHEN, Z. 1997. "Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models". Journal of Finance 52: 2003-49.
- [Bakshi, Cao e Chen (2000)] BAKSHI, G.— CAO, C.— CHEN, Z. 2000. "Pricing and Hedging Long Term Options". Journal of Econometrics 94: 277-318.
- [Baxter e Rennie (1996)] BAXTER, M.— RENNIE, A. 1996. "Financial Calculus: An Introduction to Derivative Pricing". Cambridge: Cambridge University Press.

- [Bingham e Kiesel (1998)] BINGHAM, N. H.— KIESEL, R. 1998. "Risk-Neutral Valuation: Pricing and Hedging Financial Derivatives". London: Springer.
- [Black e Scholes (1973)] BLACK, F.— SCHOLES, M. 1973. "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *Journal of Political Economy* 81: 637-54.
- [Boyle, Broadie e Glasserman (1997)] BOYLE, P. P.— BROADIE, M.— GLASSERMAN, P. 1997. "Monte Carlo Methods for Security Pricing". *Journal of Economics Dynamics and Control* 21: 1267-1321.
- [Boyle e Hardy (1996)] BOYLE, P. P.— HARDY, M. R. 1996. "Reserving for Maturity Guarantees". Working Paper, University of Waterloo.
- [Boyle e Hardy (1998)] BOYLE, P. P.— HARDY, M. R. 1998. "Reserving for Maturity Guarantees: Two Approaches". *Insurance: Mathematics and Economics* 21: 113-27.
- [Boyle e Tian (1999)] BOYLE, P. P.— TIAN, Y. S. 1999. "Pricing Lookback and Barrier Options under the CEV Process". *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 34 (2): 241-65.
- [Broadie, Glasserman e Kou (1999)] BROADIE, M.— GLASSERMAN, P.— KOU, S. 1999. "Connecting Discrete and Continuous Path-Dependent Options". *Finance and Stochastics* 3: 55-82.
- [Castellani, De Felice, Moriconi (2004)] CASTELLANI, G.— DE FELICE, M.— MORICONI, F. 2004. "Strategie CPPI e Polizze sulla Vita". Corsi di formazione dell'Associazione Amici della Scuola Normale Superiore - Pisa: Milano, 18 febbraio 2004.
- [Castellani, De Felice, Moriconi (2006)] CASTELLANI, G.— DE FELICE, M.— MORICONI, F. 2006. "Manuale di Finanza III. Modelli Stocastici e Contratti Derivati". Il Mulino.

- [Chhikara e Folks (1989)] CHHIKARA, R. S.— FOLKS, J. L. 1989. "The Inverse Gaussian Distribution: Theory, Methodology, and Applications". New York: Marcel Dekker.
- [Cox (1975)] COX, J. C. 1975. "Notes on Option Pricing I: Constant Elasticity of Variance Diffusions". Working Paper, Graduate School of Business, Stanford University. Ristampato in *Journal of Portfolio Management*, 1996, 22: 15-17.
- [Cox (1996)] COX, J. C. 1996. "The Constant Elasticity of Variance Option Pricing Model". *Journal of Portfolio Management* (special issue in honor of Fischer Black) 22: 15-17.
- [Cox e Ross (1976)] COX, J.— ROSS, S. 1976. "The valuation of options for alternative stochastic processes". *Journal of Financial Economics* 3: 145-166.
- [Cox e Miller (1965)] COX, D.R.— MILLER, H. 1965. "The Theory of Stochastic Processes". London: Chapman & Hall.
- [Davydov e Linetsky (2001)] DAVYDOV, D.— LINETSKY, V. 2001. "Pricing and Hedging Path Dependent Options under the CEV Process". Department of Industrial Engineering and Management Sciences, Northwestern University.
- [De Felice e Moriconi (2005)] DE FELICE, M.— MORICONI, F. 2005. "Modelli stocastici nel bilancio dell'assicurazione sulla vita". Corsi di formazione dell'Associazione Amici della Scuola Normale Superiore - Pisa: Milano, 28 settembre 2005.
- [Dothan (1990)] DOTHAN, M. 1990. "Prices in Financial Markets". Oxford: Oxford University Press.
- [Emanuel e MacBeth (1982)] EMANUEL, D. C.— MACBETH, J. D. 1982. "Further Results on the Constant Elasticity of Variance Call Option Pricing Models". *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 17: 533-54.
- [Falloon (1999)] FALLOON, W. 1999. "Canada's Option Nightmare". *Risk* (August): 6.

- [Gerber e Pafumi (1998)] GERBER, H. U.— PAFUMI, G. 1998. "Stop-loss a Tempo Continuo e Protezione Dinamica di un Fondo d'Investimento", *Rivista di Matematica per le Scienze Economiche e Sociali* 21: 125-46.
- [Gerber e Pafumi (2000a)] GERBER, H. U.— PAFUMI, G. 2000. "Pricing Dynamic Investment Fund Protection". *North American Actuarial Journal* 4 (2): 28-41.
- [Gerber e Pafumi (2000b)] GERBER, H. U.— PAFUMI, G. 2000. "Pricing Dynamic Investment Fund Protection". *North American Actuarial Journal* 5 (1): Discussion 153-157.
- [Gerber e Shiu (1994a)] GERBER, H. U.— SHIU, E. S.W. 1994. "Option Pricing by Esscher Transforms". *Transactions of the Society of Actuaries* 36: 99-140; Discussions 141-91. Ristampato in *Investment Section Monograph*, Society of Actuaries, 1999: 69-88.
- [Gerber e Shiu (1994b)] GERBER, H. U.— SHIU, E. S.W. 1994. "Martingale Approach to Pricing Perpetual American Options". *ASTIN Bulletin* 24: 195-220.
- [Gerber e Shiu (1996)] GERBER, H. U.— SHIU, E. S.W. 1996. "Actuarial Bridges to Dynamic Hedging and Option Pricing". *Insurance: Mathematics & Economics* 18: 183-218.
- [Gerber e Shiu (1998)] GERBER, H. U.— SHIU, E. S.W. 1998. "Pricing Perpetual Options for Jump Processes". *North American Actuarial Journal* 2 (3): 101-12.
- [Gerber e Shiu (1999)] GERBER, H. U.— SHIU, E. S.W. 1999. "From Ruin Theory to Pricing Reset Guarantees and Perpetual Put Options". *Insurance: Mathematics and Economics* 24 (1-2): 3-14.
- [Gerber e Shiu (2003a)] GERBER, H. U.— SHIU, E. S.W. 2003. "Pricing Lookback Options and Dynamic Guarantees". *North American Actuarial Journal* 7 (1): 48-67.

- [Gerber e Shiu (2003b)] GERBER, H. U.— SHIU, E. S.W. 2003. "Pricing Lookback Options and Dynamic Guarantees". North American Actuarial Journal 7 (3): Discussion 124-127.
- [Gerber e Shiu (2003c)] GERBER, H. U.— SHIU, E. S.W. 2003. "Pricing Perpetual Fund Protection with Withdrawal Option". North American Actuarial Journal 7 (2): 60-92.
- [Hardy (1999a)] HARDY, M. R. 1999. "Stock Return Models for Segregated Fund Guarantees". Working Paper, University of Waterloo.
- [Hardy (1999b)] HARDY, M. R. 1999. "Maturity Guarantees for Segregated Fund Guarantees: Hedging and Reserving". Lavoro presentato al convegno "Risks in Investment Accumulation Products, New York", promosso da "The Actuarial Research Foundation and Nationwide Financial Services".
- [Harrison e Kreps (1979)] HARRISON, J. M.— KREPS, D. M. 1979. "Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets". Journal of Economic Theory 20: 381-408.
- [Harrison e Pliska (1981)] HARRISON, J. M.— PLISKA, S. R. 1981. "Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading". Stochastic Processes and Their Applications 11: 215-60.
- [Imai e Boyle (2001)] IMAI, J.— BOYLE, P. P. 2001. "Dynamic Fund Protection". North American Actuarial Journal 5 (3): 31-49. Discussion 49-51.
- [Jackwerth e Rubinstein (1998)] JACKWERTH, J.C. — RUBINSTEIN, M. 1998. "Recovering stochastic processes from option prices". Working paper, University of California, Berkeley, CA.
- [Lee (2002)] LEE, H. 2002. "Pricing Exotic Options with Applications to Equity-Indexed Annuities". Ph. D. thesis, University of Iowa, Iowa City.

- [Macbeth e Merville (1980)] MACBETH, J. D.— MERVILLE, J. L. 1980. "Tests of the Black-Scholes and Cox Call Option Valuation Models". *Journal of Finance* 35: 285-301.
- [Margrabe (1978)] MARGRABE, W. 1978. "The Value of an Option to Exchange One Asset for Another". *Journal of Finance* 33: 177-86.
- [Merton (1973)] MERTON, R.C. 1973. "Theory of Rational Option Pricing". *Bell Journal of Economics and Management Science* 4: 141-83.
- [Mitchell e Slater (1996)] MITCHELL, G. T.— SLATER, J. JR. 1996. "Equity-Indexed Annuities: New Territory on the Efficient Frontier". *Society of Actuaries Study Note 441-99-96*. Schaumburg, IL: Society of Actuaries.
- [Orsingher (1997)] ORSINGHER, E. 1997. "Elementi per il corso di Calcolo delle Probabilità II". *Centro d'Informazione e Stampa Universitaria*
- [Orsingher (2006)] ORSINGHER, E. 2006. "Dispense per il corso proredito di Calcolo delle Probabilità". *Stamperia Università La Sapienza di Roma*, lavoro non pubblicato.
- [Panjer (1998)] PANJER, H. H.— ET AL. Eds. 1998. "Financial Economics: With Applications to Investments, Insurance, and Pensions". Schaumburg, IL: The Actuarial Foundation.
- [Reiner (1994)] REINER, E. 1994. "In search of parsimony: Valuing standard and path dependent options for alternative stochastic processes". *Derivatives conference, Toronto, Canada*.
- [Seshadri (1993)] SESHADRI, V. 1993. "The Inverse Gaussian Distribution: A Case Study in Exponential Family". Oxford: Oxford University Press.
- [Shiryayev (1999)] SHIRYAYEV, A. N. 1999. "Essentials of Stochastic Finance: Facts, Models, Theory". Singapore: World Scientific.

- [Streiff e Di Biase (1999)] STREIFF, T. F.— DI BIASE, C. A. 1999. "Equity Indexed Annuities". Chicago: Dearborn Financial.
- [Task force report (2000)] TASK FORCE REPORT. 2000. "Report of the Canadian Institute of Actuaries Task Force on Segregated Fund Investment Guarantees". Online al sito <http://www.actuaries.ca>.
- [Tiong (2000a)] TIONG, S. 2000. "Equity Indexed Annuities in the Black-Scholes Environment". Ph. D. thesis, University of Iowa, Iowa City.
- [Tiong (2000b)] TIONG, S. 2000. "Valuing Equity-Indexed Annuities", North American Actuarial Journal 4 (4): 149-63; Discussions, 4 (4): 163-70 e 5 (3): 128-36.
- [Wilmott (2001)] WILMOTT, P. 2001. "Paul Wilmott Introduces Quantitative Finance". Wiley & Sons, Ltd.