UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE

FACOLTÀ DI ECONOMIA

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED ATTUARIALI

TESI DI LAUREA IN TEORIA DEL RISCHIO

TITOLO DELLA TESI

Il criterio della probabilità di rovina come strumento di gestione del rischio: modelli classici e nuove tecniche finanziarie.

Relatore: Chiar.mo Prof.
Marcello Galeotti

Tesi di laurea di:
Chiara Parrini

INDICE

INTRODUZIONE

Lo scopo del lavoro è quello di analizzare la possibilità che una compagnia di assicurazione ha di durare nel tempo e di ottenere buoni risultati. In altre parole vengono ricercati dei criteri di stabilità. Adottando un linguaggio formale, consideriamo un processo stocastico la cui variabile aleatoria è quella delle riserve tecniche, C_t. C_t è individuata dal capitale iniziale, u, dall'ammontare dei premi incassati fino alla data t, π_t, e dall'ammontare dei risarcimenti pagati fino a quella data, S_t. Quindi:

$$C_t = u + \pi_t - S_t.$$

Tale variabile aleatoria dipende, inoltre, da alcune scelte che la compagnia effettua a priori: in particolare, il tasso di caricamento sui premi, α, il capitale iniziale, u, ed il livello assoluto di riassicurazione, C, dette variabili decisionali. Se definiamo un insieme di realizzazioni del processo A come non ammissibile, l'obiettivo è quello di trovare valori delle variabili decisionali che rendono la probabilità di A inferiore ad una certa soglia, p_0, tollerata dalla compagnia e detta probabilità di rovina [9].

Ovvero:

$$P(C_t \in A) \leq p_0.$$

Chiaramente, la probabilità che si verifichino realizzazioni non ammissibili è funzione delle variabili decisionali. In particolare, se il capitale iniziale o il tasso di caricamento sui premi aumenta, anche il valore delle riserve cresce; cosa, invece, che non è possibile affermare con certezza se aumenta il livello assoluto di riassicurazione. Infatti quest'ultimo evento comporta, da una parte, il trattenimento di un maggior volume di premi, ma dall'altra l'obbligo di risarcire una maggior quantità di danni. Il più comune tipo di insieme di realizzazioni considerato come non ammissibile è quello per cui il valore delle riserve in qualche determinato istante divenga negativo. Denotando un tale insieme come rovina, possiamo, ulteriormente, distinguerne 4 tipi, a seconda

che siano effettuate valutazioni su orizzonti limitati o illimitati e mediante osservazioni discrete o continue. Ecco allora che è possibile individuare una probabilità minima di rovina, quella con orizzonti limitati ed osservazioni discrete ed una massima, quella con orizzonti illimitati ed osservazioni continue, detta anche probabilità di rovina asintotica.
Per cominciare tratteremo il problema analizzando il modello classico o di Lundberg-Cramer.
In questo caso:

$$C_t = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i,$$

dove u è il capitale iniziale, c è il premio annuo, N_t è un processo di Poisson di parametro λ che rappresenta il numero di sinistri nell'intervallo di tempo $(0,t]$, indipendente dall'ammontare dei singoli risarcimenti, Y_i, variabili aleatorie positive ed i.i.d.
L'ideale sarebbe riuscire a determinare una formula esplicita per la probabilità di rovina, $\Psi(u)$. Questo è possibile nel caso in cui i risarcimenti abbiano una distribuzione esponenziale di parametro α.
In tal caso:

$$\Psi(u) = \frac{\lambda}{\alpha c} e^{-\left(\alpha - \frac{\lambda}{c}\right)u}.$$

Qualora, però, non vi sia la possibilità di ottenere un'espressione precisa per la probabilità in questione, si ricorre a metodi ausiliari.
Ad esempio, la trasformazione di Laplace della $\Psi(u)$ è più facilmente calcolabile, e, mediante la sua espressione, è possibile risalire a quella della probabilità di rovina ricercata. Un'alternativa può essere quella di utilizzare equazioni integro-differenziali. L'idea consiste nell'esprimere $\Psi(u)$ come soluzione di tali equazioni e trovare, poi, la soluzione mediante metodi numerici.

I principali risultati ottenuti nel primo capitolo sono:

- la disuguaglianza di Lundberg:

$$\Psi(u) < e^{-Ru}, \qquad (1)$$

dove R è il cosiddetto esponente di Lundberg dato dalla soluzione dell'equazione

$$\lambda(M_Y(r) - 1) - cr = 0;$$

- l'approssimazione di Lundberg-Cramer:

$$\Psi(u) \sim Ce^{-Ru}, \qquad (2)$$

dove $C = \dfrac{c - \lambda\mu}{\lambda M'_Y(R) - c}$.

Tale approssimazione è importante non solo per la sua semplicità, ma anche per il fatto che risulta essere abbastanza precisa non solo per valori grandi di u, ma, spesso, per ogni $u \geq 0$.

La disuguaglianza (1), invece, rispetto all'approssimazione (2), ha il vantaggio di non coinvolgere approssimazioni, individuando una limitazione superiore per la probabilità di rovina. Vengono fornite altre approssimazioni per la Ψ: quella di De Vylder, quella di Beekman-Bowers e quella di propagazione. Queste ultime, però, risultano meno importanti, anche perché meno precise di quella di Lundberg-Cramer. Infine, viene analizzata la rovina in presenza della riassicurazione. Il risultato importante consiste nel fatto che è possibile determinare la parte di rischio da cedere per ottenere livelli di $\Psi(u)$ tollerati.

Il secondo capitolo affronta le stesse problematiche mediante la teoria del rinnovamento. Dopo avere introdotto alcune grandezze fondamentali ed avere enunciato i risultati basilari di tale teoria, dimostriamo che, ipotizzando un modello di rinnovamento, la disuguaglianza di Lundberg continua a valere, mentre per l'approssimazione di Lundberg-Cramer si hanno delle leggere modifiche.

Anche in questo caso, inoltre, viene fornita l'approssimazione di propagazione oltre ad alcuni esempi relativi al calcolo di R nel caso di particolari distribuzioni adottate per l'ammontare dei risarcimenti.

Il capitolo 3 è dedicato all'analisi dei dati. È importante, infatti, osservare come i dati si presentano nella realtà per rispondere ad alcune domandi fondamentali, del tipo:

- Qual è la probabilità che il massimo danno del prossimo anno non ecceda un certo livello x?
- Qual è la probabilità che il massimo danno del prossimo anno ecceda tutti i livelli raggiunti negli anni precedenti?

Ciò è indispensabile per poter calcolare un premio sufficiente a fare fronte alle perdite previste, e, se necessario, decidere di stipulare una qualche forma di riassicurazione. Occorre, dunque, essere in grado di individuare il modello che meglio rappresenta i dati a disposizione.

Per prima cosa è necessario capire se i valori sono generati da una distribuzione heavy-tail o light-tail, cosa che è possibile fare, ad esempio, analizzando la quantità

$$E[Y_i - M / Y_i > M],$$

detta vita media residua, dove M è un valore opportunamente prefissato.

Può anche essere utile, come analisi preliminare, disegnare un'istogramma, in modo da avere un'idea sull'andamento dei dati. Una volta scelta la distribuzione ritenuta più opportuna, occorre individuarne i parametri più appropriati e, per questo, sono stati presentati alcuni possibili metodi.

Per concludere, è necessario verificare la bontà del modello prescelto. Ciò può essere effettuato mediante l'utilizzo dei cosiddetti grafici Q-Q-Plots. Questi presentano un andamento lineare qualora il modello adottato sia coerente con la realtà, ed inoltre sono in grado di ben evidenziare eventuali valori erratici, distanti, cioè, dall'andamento generale; oppure errori di forma, come, ad esempio, una maggiore o minore asimmetria o l'appartenenza ad una classe di distribuzioni con una coda più o meno pesante.

Tutti questi aspetti sono analizzati nel terzo capitolo dove vengono riportati due esempi di dati reali di assicurazioni in Svezia e Danimarca.

Nel quarto capitolo sono analizzati i processi markoviani, considerando la possibilità di diverse intensità di frequenza dei sinistri in un determinato intervallo di tempo. Dopo avere presentato alcuni aspetti fondamentali ed una possibile classificazione dei rischi, sono trattate le stesse problematiche esaminate in precedenza, ipotizzando un processo di rischio markoviano. Ancora una volta è possibile ottenere una disuguaglianza di Lundberg ed una approssimazione di Lundberg-Cramer, anche se con risultati leggermente diversi.

Dal capitolo 5 al capitolo 9 l'attenzione è invece rivolta alle modalità con cui gli assicuratori possono agire, in pratica, per tutelarsi dai rischi assunti.

Il capitolo 5 introduce la possibilità di investire parte delle riserve in prodotti finanziari, considerando, in particolare, il caso di rischi proporzionali alle riserve libere. Dimostriamo che è possibile giungere ad un risultato esplicito solo nel caso particolare in cui i risarcimenti abbiano una distribuzione esponenziale. Vengono poi presi in esame gli investimenti ottimali che un assicuratore può attuare. Per analizzare tale aspetto si fa riferimento all'equazione di Bellman, un'equazione integro-differenziale non lineare del secondo ordine. Anche in questo caso sono presentati dei risultati ottenuti con particolari condizioni.

Il capitolo 6 introduce due prodotti finanziari offerti dal mercato per fronteggiare i rischi catastrofici, quelli, cioè, che possono generare danni elevati. Oltre a descrivere le loro caratteristiche, sono illustrate le loro differenze ed i vantaggi che entrambi offrono. Infine, viene fatto un confronto fra questi prodotti e la riassicurazione, altro strumento destinato a tutelarsi dai rischi.

Il capitolo 7 illustra alcuni metodi di valutazione dei prodotti finanziari precedentemente introdotti. Tali metodi si differenziano per le ipotesi adottate e per gli strumenti utilizzati nei calcoli.

La prima procedura di valutazione è importante perché consente di ottenere un'approssimazione che risulta essere abbastanza buona e permette di semplificare l'espressione che rappresenta il prezzo del prodotto finanziario.
La seconda procedura, che si basa sulla trasformata di Esscher, permette di tenere di conto delle difficoltà di calcolo riscontrate qualora si utilizzino distribuzioni heavy-tail, maggiormente aderenti alla realtà.
Infine, la terza procedura si basa su metodi di calcolo utilizzati per le opzioni asiatiche, poiché queste ultime risultano simili, per certi aspetti, ai prodotti esaminati.
Il capitolo 8 è dedicato alla presentazione di alcuni contratti specifici ad uso assicurativo. Di questi è riportata la valutazione effettuata mediante l'uso dei metodi proposti nel capitolo 7.
Per concludere, il capitolo 9 analizza la riassicurazione. Qui, viene introdotto un metodo utilizzato dall'assicuratore per valutare la necessità o meno di ricorrere ad un tale strumento e ne sono presentate le principali forme presenti sul mercato.
Successivamente si cerca di individuare i livelli ottimali di riassicurazione.
A questo scopo vengono definite due grandezze che consentono di capire in che misura i singoli risarcimenti contribuiscono all'ammontare complessivo. Infatti, talvolta, eventi rari possono apportare contributi talmente notevoli al risarcimento complessivo da non potere essere trascurati. È quindi necessario potere avere un'idea del comportamento dei valori estremi, come le due grandezze introdotte consentono di fare.

CAPITOLO 1

IL MODELLO DI LUNDBERG – CRAMER

1.1 Descrizione del modello ed aderenza alla realtà

Per cominciare consideriamo, in dettaglio, il modello di Lundberg – Cramer o di rischio classico [21],[41]. Lundberg ipotizzò un modello in cui i singoli risarcimenti fossero distribuiti come una Poisson composta ed indipendenti. Da un'importante proprietà di tale distribuzione si ricava che anche il risarcimento complessivo, somma dei singoli risarcimenti, ha la stessa distribuzione ed è, inoltre, possibile calcolare l'esatto valore del premio, perché conosciamo valore atteso e varianza, insieme ai principi più comunemente adottati, di un tale tipo di distribuzione, che descrive il risarcimento cumulato. Lundberg suppose, inoltre, che il premio fosse pagato in modo continuo nel corso dell'anno e che fosse proporzionale all'intervallo di tempo considerato, come risulta essere, ad esempio, adottando principi di calcolo del valore medio o della varianza. Con queste ipotesi, le riserve sono pari a:

$$C_t = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$$

dove u è il capitale iniziale, c è il premio annuo, N_t è un processo di Poisson di parametro λ che rappresenta il numero di sinistri nell'intervallo di tempo $(0,t]$, indipendente dall'ammontare dei singoli risarcimenti Y_i, variabili aleatorie positive ed i.i.d. Sia G la funzione di distribuzione della variabile aleatoria Y, risarcimento per un singolo danno, $\mu_n = E[Y^n]$, $M_Y(r) = E[\exp(rY)]$, la funzione generatrice dei momenti, e supponiamo che $\mu = \mu_1$ sia minore di infinito e che $G(x) = 0$ per $x \le 0$ (cioè che non vi siano danni negativi).

Il tempo di rovina, τ , è definito come:

$$\tau = Inf\{t > 0 : C_t < 0\},$$

mentre la probabilità di rovina nell'intervallo $(0,t]$ con capitale iniziale u è data da:

$$\Psi(u,t) = P[\tau \le t / C_0 = u] = P[Inf \ \ C_s < 0 \quad \text{per} \quad 0 < s \le t].$$

Estendendo l'ampiezza dell'intervallo all'infinito abbiamo:

$$\Psi(u) = \lim_{t \to +\infty} \Psi(u,t) = P[\underset{t>0}{Inf}\, C_t < 0].$$

Chiaramente $\Psi(u,t)$ decresce al crescere di u e cresce al crescere di t. Considerando gli istanti in cui si verificano i vari sinistri, $T_1, T_2, T_3, \ldots.,$ con la convenzione $T_0 = 0,$ e definendo $X_i = c(T_i - T_{i-1}) - Y_i,$ è possibile esprimere il processo delle riserve come una passeggiata aleatoria del tipo :

$$C_{T_n} = u + \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

dove $\sum_{i=1}^{n} X_i$ indica l'ammontare degli utili fino all'istante dell'ennesimo sinistro.

Ora:

$$\Psi(u) = P[Inf \ \ C_{T_n} < 0 \quad n \in N]$$

e si può dimostrare che $\Psi(u) = 1$ se $E(X_i) \le 0.$ Assumeremo pertanto $E(X_i) > 0,$ il che implica $c / \lambda - \mu > 0,$ cioè $c > \lambda\mu,$ cioè $E[C_t - u] > 0.$

Ricordando che:

$$E[\sum_{i=1}^{N_t} Y_i] = t\lambda\mu,$$

la condizione precedente comporta che ciò che entra sia maggiore, in media, di ciò che esce, ed è detta condizione di utile netto. Se tale condizione è soddisfatta, $E[C_{T_n}]$ tende all'infinito per n che tende all'infinito.

Poiché $Inf[C_t - u : t > 0] = Inf[C_{T_n} - u : n \geq 1]$, si dimostra che il limite di $\Psi(u)$ è 0 per u che tende all'infinito. Una possibile approssimazione per $\Psi(u)$, infatti, è:

$$\Psi(u) \approx \frac{1 - H(\infty)}{\alpha\beta} e^{-\alpha u},$$

dove

$$H(\infty) = \frac{\mu}{c} \int_0^{+\infty} (1 - G(y)) dy = \frac{\mu}{c} E(X),$$

che, dalla condizione di utile netto, assumerà un valore minore di 1.
α è invece quel valore che permette di verificare la seguente uguaglianza:

$$\int_0^{+\infty} e^{\alpha y} dH(y) = 1.$$

Mentre β è la derivata dell'espressione precedente, ossia:

$$\beta = \int_0^{+\infty} y e^{\alpha y} dH(y).$$

Sarebbe inoltre possibile verificare, semplicemente svolgendo i calcoli, che α non è altro che l'esponente di Lundberg, R. Poiché:

$$\lim_{u \to +\infty} \frac{1 - H(\infty)}{\alpha\beta} e^{-\alpha u} = 0,$$

e, sempre nel caso in cui u tenda all'infinito, il limite del rapporto tra $\Psi(u)$ e la suddetta approssimazione è 1, segue che:

$$\lim_{u \to \infty} \Psi(u) = 0,$$

come volevasi dimostrare.
Tale modello, però, non rispecchia pienamente la realtà. Ad esempio, la distribuzione del numero di sinistri in intervalli della stessa ampiezza non è sempre la stessa nel corso del tempo. Per tenerne conto potremmo assumere che N_t sia un processo di Poisson, anziché di parametro λ, di parametro $\lambda(t)$, dipendente dal tempo. Inoltre, anche il numero di contratti nel portafoglio, $a(t)$, varia nel tempo. Possiamo supporre che N_t sia un processo di Poisson disomogeneo di parametro $a(t)\lambda(t)$ [43].

Sia

$$\Delta(t) = \int_0^t a(s)\lambda(s)ds.$$

Denotata con $\Delta^{-1}(t)$ l'inversa di tale funzione, è definito un nuovo processo stocastico $M_t = N_{\Delta^{-1}(t)}$ [55]. Si può pensare che anche il premio vari nel tempo, cioè $c_t = ca(t)\lambda(t)$, in base, ad esempio, al diverso numero di contratti presenti nel portafoglio. Allora il premio richiesto in $(0,t]$ sarà pari a $c\Delta(t)$. Se definiamo $\widetilde{C}_t = C_{\Delta^{-1}(t)}$, si ottiene:

$$\widetilde{C}_t = u + c\Delta(\Delta^{-1}(t)) - \sum_{i=1}^{N_{\Delta^{-1}(t)}} Y_i = u + ct - \sum_{i=1}^{M_t} Y_i.$$

Anche questo è un processo di Lundberg- Cramer, dove, al posto del tempo di "calendario", si è utilizzato il cosiddetto tempo operativo, ovvero una funzione non decrescente del tempo che in 0 vale 0, all'infinito vale infinito e che è uguale al valore atteso del numero di sinistri che avvengono fino ad un certo istante. In pratica, poi, la rovina non dovrebbe mai verificarsi. Infatti, qualora una compagnia di assicurazione si accorga che il valore delle sue riserve decresce, provvederà ad innalzare il livello dei premi. Inoltre, disponendo di più portafogli, anche se vi fosse rovina in uno di questi, ciò non implicherebbe il fallimento. In realtà, quindi, la rovina non serve ad indicare la bancarotta, ma è utile ad individuare i livelli ottimali di premio o di riassicurazione ed è quindi strumento per ottenere una gestione ottimale. Anche il termine riserva non è molto appropriato. Infatti, qualora una compagnia detenga più del dovuto, destinerà tale parte a chi possiede delle sue quote mediante l'assegnazione dei dividendi. Per individuare il modo ottimale di distribuire tali dividendi, si suppone che il premio dipenda dalle riserve, ma, nonostante ciò, ottenere buoni risultati è molto difficile.

1.2 Espressione della probabilità di rovina.

Osserviamo che, se non vi è stata rovina nell'intervallo $[0, h]$, in h inizia un nuovo processo di Lundberg-Cramer con capitale iniziale pari a C_h. Consideriamo adesso la probabilità di non rovina $\delta(u) = 1 - \Psi(u)$, cominciando dal caso di osservazioni discrete ed orizzonti limitati. Dato un intervallo $[0, n]$, avremo non rovina qualora i danni che si verificano in questo periodo siano tutti inferiori al capitale iniziale più i premi incassati nei vari anni, cioè:

$$A_n^c = \{S_1 \le u + \pi_1, S_2 \le u + \pi_2, \ldots\ldots, S_n \le u + \pi_n\}.$$

Questo evento, che rappresenta la non rovina, può anche essere espresso come:

$$A_n^c = \{S_1 \le u + \pi_1, S_2 - S_1 \le u + \pi_2 - S_1, \ldots\ldots, S_n - S_{n-1} \le u + \pi_n - S_{n-1}\}.$$

Poichè il processo S_t è stato ipotizzato Poisson - Composto, si ha che gli incrementi sono indipendenti e quindi, detta $F(x) = P[S_k - S_{k-1} \le x]$, è possibile esprimere la probabilità di non rovina mediante la "convoluzione incompleta"

$$P(A_n^c) = \int_{X_1=-\infty}^{u+\pi_1} \int_{X_2=-\infty}^{u+\pi_2 - X_1} \ldots\ldots \int_{X_{n-1}=-\infty}^{u+\pi_{n-1}-(X_1+X_2\ldots+X_{n-2})} F[u + \pi_n - (X_1 + \ldots + X_{n-1})]$$
$$dF(X_{n-1})\ldots dF(X_1).$$

La formula precedente sarebbe, infatti, quella di una convoluzione del tipo $F^{*n}(u + \pi_n)$, qualora gli estremi superiori degli integrali fossero uguali a $+\infty$, mentre invece ci fermiamo prima proprio per non rovinarci. Chiaramente la probabilità di rovina è:

$$P(A_n) = 1 - P(A_n^c).$$

Questa formula, che individua il metodo di calcolo della probabilità di rovina, ha, però, l'inconveniente di risultare di difficile valutazione. Di tale probabilità è stata fornita una stima teorica, che risulta tutt'oggi importante per avere introdotto il cosiddetto esponente o costante di Lundberg. Tale stima ha la forma:

$$P(A_n) \le e^{-Ru}$$

dove $R > 0$ è appunto la costante di Lundberg. Come si vede la probabilità di rovina "stimata" decresce al crescere delle riserve iniziali, come è facilmente intuibile. Le ipotesi che rendono valida tale stima sono:

1) Il premio è proporzionale al tempo
2) Esiste un valore $r > 0$ per cui la funzione generatrice dei momenti è convergente, cioè:

$$M_Y(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ur) dG(x) < \infty$$

3) Per un r per cui vale la seconda ipotesi vale la disuguaglianza:

$$1 + \frac{c}{\lambda} r - M_Y(r) \ge 0$$

Si dimostra che, data la condizione 1 e per un r che soddisfa 2 e 3

$$P(A_n) \le e^{-ru}.$$

L'esponente di Lundberg è definito da:

R=Sup{ r tali che soddisfano 2 e 3 }.

Questo è, infatti, il valore che dà la stima migliore, perché permette di ottenere l'approssimazione per eccesso più piccola. Infatti:

$$P(A_n) \le e^{-Ru} \le e^{-ru}.$$

Interpretiamo adesso le ipotesi. La seconda esprime il fatto che la distribuzione dei singoli risarcimenti non sia di tipo heavy-tail. Infatti la funzione generatrice dei momenti è finita per almeno un valore, mentre le distribuzioni heavy-tail hanno funzioni generatrici dei momenti pari ad infinito per ogni valore $r > 0$.

La terza ipotesi equivale ad affermare l'esistenza di un caricamento positivo. Se consideriamo, infatti, la funzione

$$\theta(r) = 1 + \frac{c}{\lambda} r - M_Y(r)$$

e supponiamo risarcimenti finiti, cioè:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x dG(x) < \infty,$$

ciò, insieme alla seconda ipotesi, implica che $M_Y(x)$ esista finito in $[0,r]$ e che $M'_Y(0) = E(Y) = \mu < +\infty.$

Ora $\theta(0) = 0$ e $\theta'(0) = c/\lambda - M'_Y(0) = (c/\lambda) - \mu.$ Se tale derivata fosse non positiva, la funzione $\theta(r),$ partendo da 0 ed essendo strettamente concava, decrescerebbe e in $r > 0$ sarebbe inferiore a 0 contraddicendo l'ipotesi: $\theta(r) = 1 + (c/\lambda)r - M_Y(r) \geq 0.$

Dunque $\theta'(0) = (c/\lambda) - \mu > 0,$ cioè $c > \lambda\mu,$ implica che il premio annuo c sia maggiore del premio equo pagato in quell'anno e quindi vi sia la presenza di un caricamento positivo. Questa condizione, che precedentemente avevamo chiamato utile netto, deriva dall'aver assunto una probabilità positiva di non rovina. Da quanto visto, inoltre, deriva che R è soluzione di $\theta(r) = 0.$

Consideriamo adesso il caso continuo. Esprimiamo la probabilità di non rovina in un intervallo $[0,h]$ basandoci sulla possibilità che vi siano o meno sinistri in tale periodo:

$$\delta(u) = (1 - \lambda h + o(h))\delta(u + ch) + (\lambda h + o(h))(E[\delta((u - Y_1)^+)] + o(1) + o(h) =$$
$$= (1 - \lambda h)\delta(u + ch) + \lambda h \int_0^u \delta((u - y)^+) dG(y) + o(h),$$

dove $E[\delta(u - Y_1)^+]$ esiste perché $\delta(u)$ è crescente. Si nota che :

$$\int_0^u \delta[(u - y)^+] dG(y) = \int_0^u \delta(u - y) dG(y).$$

Riordinando i termini otteniamo:

$$c\frac{\delta(u + ch) - \delta(u)}{ch} = \lambda[\delta(u + ch) - \int_0^u \delta(u - y) dG(y)] + o(1).$$

Se facciamo tendere h a 0 notiamo che $\delta(u)$ è differenziabile. Dunque $\delta(u)$ non è solo continua, ma anche differenziabile in ogni punto dove $G(u)$ è continua.

La derivata è:

$$c\delta'(u) = \lambda[\delta(u) - \int_0^u \delta(u-y)dG(y)]. \qquad (1.1)$$

La (1.1) è un'equazione integro-differenziale che consente, almeno teoricamente, di ricavare $\delta(u)$.

D'altra parte, considerando la non rovina al primo sinistro, possiamo scrivere $\delta(u)$ come:

$$\delta(u) = \int_0^{u+ct}\int_0^{+\infty} \delta(u+ct-x)\lambda t \exp(-\lambda t)dG(x),$$

dove il processo di conta di sinistri ha una distribuzione di Poisson di parametro λ ed il primo sinistro, accorso all'istante t, è di ammontare x. Confrontando tale integrale con la precedente equazione differenziale, si ricava:

$$\delta(u) = \delta(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \delta(u-y)(1-G(y))dy.$$

Notiamo che:

$$\int_0^{+\infty}(1-G(y))dy = E(Y) = \mu.$$

Se facendo tendere u all'infinito assumiamo che $\delta(u)$ tenda ad 1, abbiamo:

$$(1-\delta(0))c = \lambda\int_0^{+\infty}(1-G(y))dy = \lambda\mu \text{ cioè } \delta(0) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c}.$$

Mediante questi valori e la formula che esprime $\delta(u)$, otteniamo per la probabilità di rovina $\Psi(u)$ la formula:

$$\Psi(u) = 1 - \delta(u) = \frac{\lambda\mu}{c} - \frac{\lambda}{c}\int_0^u (1-\Psi(u-y))(1-G(y))dy,$$

ovvero [22]

$$\begin{aligned} c\Psi(u) &= \lambda[\mu - \int_0^u (1-\Psi(u-y))(1-G(y))]dy = \\ &= \lambda(\int_u^{+\infty}(1-G(y))dy + \int_0^u \Psi(u-y)(1-G(y))dy \end{aligned} \qquad (1.2)$$

che, in pratica, esprime $\Psi(u)$ mediante la distribuzione dei cosiddetti "salti record". Dall'espressione trovata notiamo che la non rovina assume valore positivo qualora $\delta(0) = 1 - \dfrac{\lambda\mu}{c} > 0$, che implica $c > \lambda\mu$; e cioè qualora si abbia un caricamento positivo, un premio cioè superiore a quello equo, che ancora equivale alla condizione di utile netto.

Ipotizzando, a questo punto, che i risarcimenti abbiano una distribuzione esponenziale di parametro α, l'equazione (1.1) diviene:

$$c\delta'(u) = \lambda[\delta(u) - \exp(-\alpha u)\int_0^u \delta(y)\alpha\exp(\alpha y)dy].$$

Differenziando di nuovo otteniamo:

$$c\delta''(u) = \lambda[\delta'(u) + \alpha\exp(-\alpha u)\int_0^u \delta(y)\alpha\exp(\alpha y)dy - \alpha\delta(u)] =$$

$$= \lambda\delta'(u) - \alpha c\delta'(u).$$

La soluzione di quest'ultima equazione differenziale è data da:

$$\delta(u) = A + Be^{-\left(\alpha - \frac{\lambda}{c}\right)u}.$$

Poiché abbiamo imposto che $\delta(u)$ tenda a 1 per u tendente all'infinito, segue $A = 1$. Dunque, nel caso particolare in cui i danni siano distribuiti esponenzialmente, $(\mu = 1/\alpha)$, si ha:

$$\delta(0) = 1 - \frac{\lambda}{\alpha c}, \qquad \delta(u) = 1 - \frac{\lambda}{\alpha c}e^{-\left(\alpha - \frac{\lambda}{c}\right)u} \qquad \text{e} \qquad \Psi(u) = \frac{\lambda}{\alpha c}e^{-\left(\alpha - \frac{\lambda}{c}\right)u}.$$

1.3 Esponente di Lundberg e sue limitazioni

Adesso cerchiamo, come nel caso discreto, una stima della probabilità di rovina [36]. Consideriamo la funzione:

$$\theta(r) = \lambda(M_Y(r) - 1) - cr \qquad (1.3)$$

dove $M_Y(r)$ è la funzione generatrice dei momenti, se esiste finita.

Come già sappiamo, da questa espressione possiamo ricavare l'esponente di Lundberg. Cerchiamo, cioè, quel valore di r per cui $\theta(r) = 0$.

Un'ovvia soluzione è $r = 0$. Derivando $\theta(r)$ abbiamo:

$$\theta'(r) = \lambda M_Y'(r) - c; \quad \theta''(r) = \lambda M_Y''(r) = \lambda E[Y^2 e^{ry}] > 0$$

il che implica che $\theta(r)$ è strettamente convessa.

Inoltre per $r=0,\ \theta'(r)=\lambda M_Y'(0)-c=\lambda\mu-c,$ che risulta essere minore di 0 per la condizione di utile netto. Allora tale equazione ha al più un'ulteriore soluzione $R>0,$ che è l'esponente di Lundberg. Nel caso che i risarcimenti abbiano una distribuzione esponenziale di parametro α, la soluzione è data da:

$$\lambda\left(\frac{\alpha}{\alpha-r}-1\right)-cr=\frac{\lambda r}{\alpha-r}-cr=0$$

e si trova $R=\alpha-\dfrac{\lambda}{c}.$

Ricordando, poi, che

$$\Psi(u)=\frac{\lambda}{\alpha c}e^{-\left(\alpha-\frac{\lambda}{c}\right)u},$$

si ottiene

$$\Psi(u)=\frac{\lambda}{\alpha c}e^{-Ru}.$$

In genere, però, è difficile calcolare l'esponente di Lundberg. Ecco allora che si cercano dei limiti inferiori e superiori. Osserviamo che:

1) $\theta''(r)=\lambda E[Y^2e^{rY}]>\lambda E[Y^2]=\lambda\mu_2,$

2) $\theta'(r)=\theta'(0)+\int_0^r\theta''(s)ds>-(c-\lambda\mu)+\lambda\mu_2 r$

3) $\theta(r)=\theta(0)+\int_0^r\theta'(s)ds>\lambda\mu_2\dfrac{r^2}{2}-(c-\lambda\mu)r$

Dall'ultima disuguaglianza, ponendo $r=R,$ otteniamo:

$$0=\theta(R)>R\left(\lambda\mu_2\frac{R}{2}-(c-\lambda\mu)\right),$$

da cui ricaviamo il seguente limite superiore per R

$$R<\frac{2(c-\lambda\mu)}{\lambda\mu_2}.$$

Risulta impossibile, invece, trovare una limitazione inferiore, se non in casi particolari, come in quello, ad esempio, dei risarcimenti limitati.
Sia $Y \leq M$ e consideriamo la funzione:

$$f(x) = \frac{x}{M}(e^{RM} - 1) - (e^{Rx} - 1).$$

Quindi $f(0) = f(M) = 0$ e $f''(x) = -R^2 e^{Rx} < 0,$ il che implica che $f(x)$ è concava. Segue che $f(x) > 0$ per $0 < x < M$.

Inoltre la funzione $h(x) = xe^x - e^x + 1$ ha derivata strettamente positiva per $x > 0$ e dunque $h(x) > h(0) = 0$ per $x > 0$.
In particolare, ponendo $x = RM$, otteniamo:

$$\frac{1}{RM}(e^{RM} - 1) < e^{RM}.$$

Calcoliamo ora:

$$M_Y(R) - 1 = \int_0^M (e^{Rx} - 1) dG(x) \leq \int_0^M \frac{x}{M}(e^{RM} - 1) dG(x) = \frac{\mu}{M}(e^{RM} - 1).$$

Pertanto R soddisfa:

$$0 = \lambda(M_Y(R) - 1) - cR \leq \lambda \frac{\mu}{M}(e^{RM} - 1) - cR < \lambda\mu \mathrm{Re}^{RM} - cR,$$

da cui si ricava

$$R > \frac{1}{M} \log \frac{c}{\lambda\mu}.$$

1.4 Disuguaglianza di Lundberg

Abbiamo già visto come l'esponente di Lundberg sia cruciale nell'ottenere una stima della probabilità di rovina. Qualora R esista, risulta

$$\Psi(u) < e^{-Ru} \qquad [52].$$

Se così non fosse, infatti, consideriamo

$$u_0 = Inf[u \geq 0 : \Psi(u) \geq e^{-Ru}].$$

Per la continuità di $\Psi(u)$, $\Psi(u_0)=e^{-Ru_0}$ e, poiché $\Psi(0)<1$, $u_0>0$.

Dalle espressioni precedenti segue:

$$c\Psi(u_0)=\lambda[\int_{u_0}^{+\infty}(1-G(x))dx+\int_0^{u_0}\Psi(u_0-x)(1-G(x))dx]<$$

$$<\lambda[\int_{u_0}^{+\infty}(1-G(x))dx+\int_0^{u_0}e^{-R(u_0-x)}(1-G(x))dx]\leq\lambda\int_0^{\infty}e^{-R(u_0-x)}(1-G(x))dx=$$

$$=\lambda e^{-Ru_0}\int_0^{\infty}\int_x^{\infty}e^{Rx}dG(y)dx=\lambda e^{-Ru_0}\int_0^{\infty}\int_0^{y}e^{Rx}dxdG(y)=$$

$$=\lambda e^{-Ru_0}\int_0^{\infty}\frac{1}{R}(e^{Ry}-1)dG(y)=\frac{\lambda}{R}e^{-Ru_0}(M_y(R)-1)=ce^{-Ru_0}.$$

Si ottiene così una disuguaglianza che contraddice l'ipotesi $\Psi(u_0)=e^{-Ru_0}$.

Dunque la limitazione $\Psi(u)<e^{-Ru}$ vale per ogni $u\geq 0$.

1.5 Approssimazione di Lundberg- Cramer

Ci domandiamo, ora, se R sia l'esponente migliore possibile per fornire una limitazione superiore alla rovina [22]. Si può dimostrare che:

$$\lim_{u\to+\infty}\Psi(u)e^{Ru}=\frac{c-\lambda\mu}{\lambda M'_Y(R)-c},$$

da cui

$$\Psi(u)\approx\frac{c-\lambda\mu}{\lambda M'_Y(R)-c}e^{-Ru}$$

detta approssimazione di Lundberg-Cramer della probabilità di rovina qualora il capitale iniziale u assuma valori elevati. Chiaramente $\Psi(u)$ decresce al crescere di u. Questo risultato mostra che per $\Psi(u)$ non è possibile ottenere un limite superiore mediante un esponenziale con un esponente maggiore di R [58]. Tornando all'esempio in cui i risarcimenti abbiano una distribuzione esponenziale, si ha

$$M'_Y(R)=\frac{\alpha}{(\alpha-R)^2}\qquad\text{e}\qquad\mu=\frac{1}{\alpha}.$$

Allora

$$\lim_{u\to\infty} \Psi(u)e^{Ru} = \frac{c-\frac{\lambda}{\alpha}}{\frac{\lambda\alpha}{(\alpha-R)^2}-c}$$

e ricordando che, in questo caso, $R = \alpha - \frac{\lambda}{c}$, otteniamo

$$\frac{c-\frac{\lambda}{\alpha}}{\frac{\lambda\alpha}{\left(\frac{\lambda}{c}\right)^2}-c} = \frac{\lambda}{\alpha c}\frac{\alpha c-\lambda}{\alpha c-\lambda} = \frac{\lambda}{\alpha c}.$$

Quindi l'approssimazione di Lundberg- Cramer diviene:

$$\Psi(u) \approx \frac{\lambda}{\alpha c} e^{-\left(\alpha-\frac{\lambda}{c}\right)u}.$$

Volendo dare un esempio numerico, possiamo assumere $c = \lambda = 1$; $G(x) = 1 - \frac{1}{3}(e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x})$; da cui il risarcimento medio viene pari a $\mu = 0.611111$ e quindi la condizione di utile netto è soddisfatta, cioè $c - \lambda\mu > 0$. Abbiamo poi:

$$\Psi(u) = 0.550790e^{-0.485131u} + 0.0436979e^{-1.72235u} + 0.0166231e^{-2.79252u}.$$

Mentre l'approssimazione di Lundberg-Cramer è:

$$app(u) = 0.550790e^{-0.485131u}.$$

Vengono qui di sotto riportate la probabilità di rovina, l'approssimazione di Lundberg-Cramer e l'errore relativo, $(app(u) - \Psi(u))/\Psi(u)$, moltiplicato per 100, per vari valori del capitale iniziale u.

u	0	0.25	0.5	0.75	1
$\Psi(u)$	0.6111	0.5246	0.4547	0.3969	0.3479
$app(u)$	0.5508	0.4879	0.4322	0.3828	0.3391
Er	-9.87	-6.99	-4.97	-3.54	-2.54

u	1.25	1.5	1.75	2	2.25
$\Psi(u)$	0.3059	0.2696	0.2379	0.2102	0.1858
$app(u)$	0.3003	0.2660	0.2357	0.2087	0.1849
Er	-1.82	-1.32	-0.95	-0.69	-0.50

Tabella 1.1: Approssimazione di Lundberg-Cramer per la probabilità di rovina.

Come si può notare l'errore relativo è sotto l' 1% solo per $u \geq 1.71358 = 2.8\mu$, quindi quando il capitale iniziale è oltre due volte e mezzo il risarcimento medio.

1.6 Riassicurazione e probabilità di rovina

Se viene considerata anche la riassicurazione, si può cercare la ritenzione ottimale che massimizzi R e minimizzi, quindi, la probabilità di rovina [70]. Cominciamo dalla riassicurazione proporzionale. Ricordiamo che l'assicuratore diretto copre per ogni rischio una quantità pari a $Y_i^I = \alpha Y_i$, per cui il riassicuratore dovrà far fronte a $Y_i^R = (1-\alpha)Y_i$. Se indichiamo con c^I il premio richiesto dall'assicuratore diretto, ne deriva che l'esponente di Lundberg è soluzione dell'equazione:

$$\lambda(M_{\alpha Y}(r)-1)-c^I r=0$$

dove, oltre al premio, anche la funzione generatrice dei momenti è cambiata, perché non viene più coperto l'intero rischio ma solo una parte. Cioè,

$$M_{\alpha Y}(r)=E[e^{r\alpha Y_i}]=M_Y(\alpha r).$$

Se si assume, poi, che sia l'assicuratore diretto che il riassicuratore utilizzino lo stesso principio di calcolo del premio, ad esempio quello del valor medio, ed uno stesso caricamento di sicurezza, allora $c^I = \alpha c$ e l'equazione diventa:

$$\lambda(M_Y(\alpha r)-1)-c\alpha r=0.$$

Segue che $R = \alpha R^I$, dove R^I è l'esponente di Lundberg qualora vi sia riassicurazione, e visto che α, coefficiente di ritenzione, è compreso tra [0,1], R^I è un valore più piccolo di R, come era intuibile, dal momento che il rischio che la compagnia deve coprire dopo la riassicurazione è più piccolo.

Abbiamo individuato R^I nel caso in cui i caricamenti di sicurezza per assicuratore e riassicuratore siano gli stessi. Vediamo cosa accade se ciò non avviene. Supponiamo che: $Y_i \sim Exp(\beta)$, il premio complessivo annuo sia pari a $(1+\xi)\lambda E(Y) = (1+\xi)\dfrac{\lambda}{\beta}$, e la riassicurazione sia proporzionale con livello di ritenzione α. Il riassicuratore chiede un premio pari a $(1+\vartheta)(1-\alpha)\dfrac{\lambda}{\beta}$, dove chiaramente $\vartheta \geq \xi$, altrimenti l'assicuratore diretto potrebbe cedere l'intero rischio, $(\alpha = 0)$, ed ottenere profitto senza rischiosità. Cerchiamo ora il valore di α che massimizza R nel caso $\vartheta > \xi$. Dalla condizione di utile netto deriva:

$$c^I = (1+\xi)\frac{\lambda}{\beta} - (1+\vartheta)(1-\alpha)\frac{\lambda}{\beta} = (\alpha(1+\vartheta) - (\vartheta - \xi))\frac{\lambda}{\beta} > \alpha\frac{\lambda}{\beta},$$

da cui:

$$\alpha > \frac{\vartheta - \xi}{\vartheta} = 1 - \frac{\xi}{\vartheta} \qquad (1.4)$$

La funzione generatrice dei momenti è data da:

$$M_{\alpha Y}(r) = M_Y(\alpha r) = \frac{\beta}{\beta - \alpha r} = \frac{\frac{\beta}{\alpha}}{\frac{\beta}{\alpha} - r}.$$

I risarcimenti a seguito della riassicurazione hanno distribuzione del tipo $Exp(\beta / \alpha)$ e l'esponente di Lundberg è soluzione di:

$$\lambda(M_Y(\alpha r) - 1) - c^I r = 0$$

Attraverso semplici calcoli si ricava:

$$R^I(\alpha) = \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\lambda}{(\alpha(1+\vartheta)-(\vartheta-\xi))\frac{\lambda}{\beta}} = \beta\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha(1+\vartheta)-(\vartheta-\xi)}\right).$$

Derivando rispetto ad α e ponendo la derivata uguale a 0, otteniamo

$$\alpha^2 = \frac{(\alpha(1+\vartheta)-(\vartheta-\xi))^2}{1+\vartheta}$$

Le soluzioni di questa equazione sono:

$$\alpha = \frac{1}{\vartheta}\left(\vartheta-\xi \pm \sqrt{(\vartheta-\xi)^2 - \frac{\vartheta}{1+\vartheta}(\vartheta-\xi)^2}\right) = \left(1-\frac{\xi}{\vartheta}\right)\left(1 \pm \sqrt{1-\frac{\vartheta}{1+\vartheta}}\right) =$$

$$= \left(1-\frac{\xi}{\vartheta}\right)\left(1+\sqrt{\frac{1}{1+\vartheta}}\right).$$

Nel caso che una soluzione sia maggiore di 1, la poniamo pari ad 1. Per cui: [17]

$$\alpha_{\max} = \min\left\{\left(1-\frac{\xi}{\vartheta}\right)\left(1+\sqrt{\frac{1}{1+\vartheta}}\right), 1\right\}.$$

Questa è la ritenzione ottimale, cioè quella che permette di massimizzare R^I. Vediamo adesso come è possibile legare il livello assoluto di riassicurazione C all'esponente di Lundberg e quindi alla probabilità di rovina. In questo modo, poiché C è una delle variabili decisionali, cioè una scelta che la compagnia effettua a priori, si può vedere in che modo scegliere tale livello in base al criterio di stabilità adottato. Ricordiamo che il criterio della probabilità di rovina consiste nel porre $\Psi(u) \le p_0$, dove p_0 rappresenta la soglia tollerata dalla compagnia. In generale si pone $p_0 = e^{-Ru}$, per cui $\Psi(u) \le e^{-Ru} = p_0$. Da tale posizione si ricava:

$$R = \frac{|\log p_0|}{u}.$$

Ora vogliamo esprimere R in funzione del livello assoluto di riassicurazione C. In seguito alla riassicurazione proporzionale, alla compagnia diretta rimane a carico una frazione del rischio, determinata da un'aliquota di ritenzione del danno pari ad α_i. La funzione caratteristica con capitale iniziale u e livello assoluto di riassicurazione C è data da:

$$\chi_i(u/c) = \int_0^\infty e^{iux} dG_i\left(\frac{x}{\alpha_i}\right) = \int_0^\infty e^{iu\alpha_i y} dG_i(y) = \chi_i(\alpha_i, u).$$

Se consideriamo lo sviluppo in Taylor

$$e^{Ru} = 1 + Ru + \frac{R^2u^2}{2!} + \dots..,$$

otteniamo che:

$$R = 2\frac{c - \sum_i \lambda_i E[g(X_i)]}{C\sum_i \lambda_i \gamma_i E[g(X_i)]}.$$

Indichiamo con $1/\rho$ il rapporto tra la somma dei caricamenti dei premi applicati dalla compagnia diretta e la somma di quelli che applicherebbe la compagnia di riassicurazione se assicurasse la stessa porzione dei rischi cioè:

$$\frac{\sum_i \lambda_i \delta_i E[g(X_i)]}{\sum_i \lambda_i \gamma_i E[g(X_i)]} = \frac{1}{\rho}.$$

Segue che

$$R = \frac{2}{C\rho}.$$

Ricordando

$$R = \frac{|\log p_0|}{u},$$

si ottiene

$$\frac{2}{C\rho} = \frac{|\log p_0|}{u}, \qquad \text{cioè} \qquad C = \frac{2u}{\rho|\log p_0|}.$$

Quindi, più alto scelgo è C, minore diventa il $|\log p_0|$ e quindi p_0, la probabilità di rovina, aumenta [16].

Passiamo a trattare il caso della riassicurazione excess of loss con un livello di ritenzione M. Ciò che resta a carico dell'assicuratore è, per ogni sinistro,

$Y_i^I = \min\{Y_i, M_i\}$, mentre l'esponente di Lundberg è la soluzione dell'equazione:

$$\lambda\left(\int_0^M e^{rx} dG(x) + e^{rM}(1 - G(M)) - 1\right) - c^I r = 0.$$

Questa riassicurazione è utile se si ha a che fare con distribuzioni heavy-tail che possono generare anche danni infiniti. In questo modo, infatti, il rischio che l'assicuratore copre è al massimo M e le ipotesi di Lundberg-Cramer sono soddisfatte. In effetti si può mostrare che, per un assicuratore, tale tipo di riassicurazione è ottimale. Supponiamo che sia l'assicuratore che il riassicuratore utilizzino il principio del valor medio per il calcolo del premio. Allora, fra tutti i tipi di riassicurazione possibili, una volta stabilito il certo premio richiesto dall'assicuratore, c^I, e quello richiesto dal riassicuratore, c, l'excess of loss è quella che massimizza l'esponente di Lundberg per l'assicuratore diretto [37].

Sia $h(x)$ una funzione crescente tale che $0 \le h(x) \le x$ per $x \ge 0$. L'assicuratore copre $Y_i^I = h_i(Y_i)$. Poniamo $h^*(x) = \min\{x, u\}$. Dunque $h^*(x)$ corrisponde alla riassicurazione excess of loss. Poiché c^I è fissato, possiamo ricavare U da:

$$\int_0^U y dG(y) + U(1 - G(U)) = E[h^*(Y_i)] = E[h(Y_i)] = \int_0^\infty h(y) dG(y).$$

Dalla disuguaglianza $e^z \ge 1 + z$ si ottiene $e^{r(h(y) - h^*(y))} \ge 1 + r(h(y) - h^*(y))$, da cui $e^{rh(y)} \ge e^{rh^*(y)}(1 + r(h(y) - h^*(y)))$.

Inoltre

$$M_{h(Y)}(r) = \int_0^\infty e^{rh(y)} dG(y) \ge \int_0^\infty e^{rh^*(y)}(1 + r(h(y) - h^*(y))) dG(y) =$$

$$= M_{h^*(Y)}(r) + r\int_0^\infty (h(y) - h^*(y)) e^{rh^*(y)} dG(y).$$

Se $Y \le U$ abbiamo che $h(y) \le y = h^*(y)$ e per $r > 0$:

$$\int_0^\infty (h(y)-h^*(y))e^{rh^*(y)}dG(y)=$$
$$=\int_0^U (h(y)-h^*(y))e^{rh^*(y)}dG(y)+\int_U^\infty (h(y)-h^*(y))e^{rh^*(y)}dG(y)\geq$$
$$\geq\int_0^U (h(y)-h^*(y))e^{rU}dG(y)+\int_U^\infty (h(y)-h^*(y))e^{rU}dG(y)=$$
$$=e^{ru}\int_0^\infty (h(y)-h^*(y))dG(y)=$$
$$=e^{rU}(E[h(Y)]-E[h^*(Y)])=0.$$

Pertanto $M_{h(Y)}(r)\geq M_{h^*(Y)}(r)$ per $r>0$ e quindi :

$$0=\theta(R^I)=\lambda[M_{h(Y)}(R^I)-1]-c^I R^I\geq\lambda[M_{h^*(Y)}(R^I)-1]-c^I R^I=\theta^*(R^I)$$

e dalla convessità di $\theta^*(r)$ segue che R^I in excess of loss è il più alto possibile.Vediamo ora la composizione del portafoglio dal punto di vista del riassicuratore. Poiché l'ammontare dei sinistri è indipendente dal numero e dal momento in cui questi avvengono, possiamo eliminare dal processo di conta di sinistri di Poisson alcuni eventi con probabilità $G(M)$ e lasciarne altri con probabilità $1-G(M).$ Poiché l'ammontare dei sinistri sono anche i.i.d. la loro distribuzione è data da:

$$\Gamma(x)=P(Y_i-M\leq x/Y_i>M)=\frac{G(M+x)-G(M)}{1-G(M)}$$

1.7 La severità della rovina

Supponiamo che si abbia rovina ed esprimiamo la variabile aleatoria $-C_\tau$, detta severità della rovina [38]. Una compagnia di assicurazione, infatti, può tollerare valori bassi di $-C_\tau$, mentre valori elevati possono causare perdite incolmabili. Consideriamo la distribuzione di $-C_\tau$ quando vi è rovina [63]. Poniamo

$$\Psi_x(u)=P(\tau<\infty,C_\tau<-x).$$

Dato un intervallo di ampiezza h piccola, esprimiamo tale probabilità considerando le alternative che vi siano o meno sinistri.

$$\Psi_x(u) = (1-\lambda h)\Psi_x(u+ch) + \lambda h[\int_0^u \Psi_x(u-y)dG(y) + \int_{u+x}^\infty dG(y)] + o(h).$$

Riordinando i termini, seguendo lo stesso procedimento utilizzato per il calcolo di $\delta(u)$, si ricava:

$$c\frac{\Psi_x(u+ch)-\Psi_x(u)}{ch} = \lambda[\Psi_x(u+ch) - \int_0^u \Psi_x(u-y)dG(y) - \int_{u+x}^\infty dG(y)] + o(1).$$

Facendo tendere h a 0 otteniamo:

$$c\Psi_x'(u) = \lambda[\Psi_x(u) - \int_0^u \Psi_x(u-y)dG(y) - (1-G(u+x))].$$

Si tratta pertanto di un'equazione integro-differenziale di cui vogliamo ricavare la soluzione $\Psi_x(u)$.

Integrando si ottiene

$$\frac{c}{\lambda}(\Psi_x(u)-\Psi_x(0)) = \int_0^u \Psi_x(u-y)(1-G(y))dy - \int_0^u (1-G(y+x))dy =$$

$$= \int_0^u \Psi_x(u-y)(1-G(y))dy - \int_x^{x+u}(1-G(y))dy.$$

Poiché $\Psi_x(u) \le \Psi(u)$ e per u che tende all'infinito $\Psi(u)$ tende a 0, segue che anche $\Psi_x(u)$ tende a 0, e quindi

$$-\frac{c}{\lambda}\Psi_x(0) = -\int_x^\infty (1-G(y))dy,$$

che è in pratica la distribuzione del salto record.

Inoltre (vedi [30]):

$$P[C_\tau < -x / \tau < \infty, C_0 = 0] = \frac{\frac{\lambda}{c}\int_x^\infty (1-G(y))dy}{\frac{\lambda\mu}{c}} = \frac{1}{\mu}\int_x^\infty (1-G(y))dy. \quad (1.5)$$

Indichiamo con τ_1 l'istante in cui le riserve assumono un valore inferiore al capitale iniziale. Da tale istante inizia un nuovo processo di Lundberg-Cramer. Gli scenari che si possono presentare sono 3:

1) Il processo non andrà mai sotto il capitale iniziale, cioè $\tau_1 = \infty$.

2) $\tau_1 < \infty$ ma $C_{\tau_1} \ge 0$.

3) In τ_1 si ha rovina.

Ora è possibile ricavare la probabilità di rovina considerando questi tre scenari ed utilizzando la teoria del rinnovamento [29].
Il risultato finale è:

$$\Psi(u) = (1 - \frac{\lambda\mu}{c})0 + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \Psi(u-y)(1-G(y)dy + \frac{\lambda}{c}\int_u^\infty 1(1-G(y))dy.$$

1.8 La trasformazione di Laplace

Trovate le varie espressioni con cui è possibile esprimere Ψ e δ vediamo adesso un modo in cui Ψ può essere trasformata. Intanto, se f è una funzione reale in $[0,\infty]$, la trasformazione

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx,$$

con s numero reale è detta di Laplace.
Vogliamo utilizzare tale tipo di trasformazione per la Ψ [22]. Chiaramente, se X è una variabile assolutamente continua, positiva e con densità f, $F(s)$ corrisponde alla funzione generatrice dei momenti calcolata in $-s$. Vediamo di seguito le sue proprietà:

1) Se $f(x) \geq 0$, allora $F(s_1) \leq F(s_2) \Leftrightarrow s_1 \geq s_2$.

2) $|F(s_1)| < \infty \Rightarrow |F(s)| < \infty$ per ogni $s_1 \geq s_2$.

3) $F'(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f'(x)dx = sF(x) - f(0)$

ammesso che $f'(x)$ esista e $|F(s)| < \infty$.

4) $\lim_{s\to+\infty} sF(s) = \lim_{x\to+\infty} f(x)$ ammesso che $f'(x)$ e il limite per x che tende a 0 di $f(x)$ esistano e che $|F(s)| < \infty$ per un s abbastanza grande.

5) $\lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{x\to+\infty} f(x)$ ammesso che $f'(x)$ e il limite per x che tende a 0 di $f(x)$ esistano e che $|F(s)| < \infty$ per ogni $s > 0$.

6) $F(s) = G(s)$ su $(s_0, s_1) \Rightarrow f(x) = g(x)$ quasi ovunque in $[0,\infty]$.

Vogliamo trovare la trasformazione di Laplace della probabilità di non rovina $\delta(u)$, che indicheremo con Δ. Ricordando l'espressione (1.1), moltiplicando per e^{-su} ed integrando rispetto ad u, otteniamo:

$$c\int_0^\infty \delta'(u)e^{-su}du = \lambda\int_0^\infty \delta(u)e^{-su}du - \int_0^\infty \int_0^u \delta(u-y)dG(y)e^{-su}du.$$

Calcoliamo l'ultimo di tali integrali

$$\int_0^\infty \int_0^u \delta(u-y)dG(y)e^{-su}du = \int_0^\infty \int_y^\infty \delta(u-y)e^{-su}dudG(y) =$$
$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \delta(u)e^{-s(u+y)}dudG(y) = \Delta(s)M_Y(-s).$$

Per le proprietà della trasformazione di Laplace, segue:

$$c\int_0^\infty \delta'(u)e^{-su}du = c\Delta'(s) = c[s\Delta(s) - \delta(0)] =$$
$$= \lambda\Delta(s) - \lambda\Delta(s)M_Y(-s) = \lambda\Delta(s)(1 - M_Y(-s)),$$

ed in particolare

$$c[s\Delta(s) - \delta(0)] = \lambda\Delta(s)(1 - M_Y(-s)),$$

la cui soluzione è data da

$$\Delta(s) = \frac{c\delta(0)}{cs - \lambda[1 - M_Y(-s)]}.$$

Ricordando che

$$\delta(0) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c},$$

otteniamo

$$\Delta(s) = \frac{c - \lambda\mu}{cs - \lambda[1 - M_Y(-s)]}.$$

Chiaramente la trasformazione di Laplace per la probabilità di rovina, che indicheremo con $\overline{\Psi}$, è data da:

$$\overline{\Psi}(s) = \int_0^\infty (1 - \delta(u))e^{-su}du = \frac{1}{s} - \Delta(s).$$

Nel caso, ad esempio, in cui i sinistri abbiano una distribuzione esponenziale di parametro α, per cui $\mu = \frac{1}{\alpha}$ e $M_Y(-s) = \frac{\alpha}{\alpha + s}$, le trasformazioni di Laplace per le probabilità di non rovina e rovina divengono rispettivamente:

$$\Delta(s) = \frac{c - \frac{\lambda}{\alpha}}{cs - \lambda\left(1 - \frac{\alpha}{\alpha + s}\right)} = \frac{c - \frac{\lambda}{\alpha}}{s\left(c - \frac{\lambda}{\alpha + s}\right)} = \frac{\left(c - \frac{\lambda}{\alpha}\right)(\alpha + s)}{s(c(\alpha + s) - \lambda)}$$

e

$$\overline{\Psi}(s) = \frac{1}{s} - \frac{\left(c - \frac{\lambda}{\alpha}\right)(\alpha + s)}{s(c(\alpha + s) - \lambda)} = \frac{c(\alpha + s) - \lambda - \left(c - \frac{\lambda}{\alpha}\right)(\alpha + s)}{s(c(\alpha + s) - \lambda)} =$$

$$= \frac{\lambda}{\alpha} \frac{1}{c(\alpha + s) - \lambda} = \frac{\lambda}{\alpha c} \frac{1}{\alpha - \frac{\lambda}{c} + s}.$$

1.9 APPROSSIMAZIONI PER Ψ

Per quanto riguarda le approssimazioni della Ψ, cominciamo col considerare quella di De Vylder [28]. Poiché nel caso in cui i risarcimenti siano distribuiti esponenzialmente è possibile calcolare esplicitamente la probabilità di rovina, l'approssimazione di De Vylder si basa sulla sostituzione di C_t con una nuova variabile, $\widetilde{C}_t$, in cui l'ammontare dei danni ha distribuzione esponenziale. Per quanto riguarda i primi tre momenti, vale

$$E[(C_t - u)^k] = E[(\widetilde{C}_t - u)^k] \quad (\text{per } k = 1,2,3)$$

Di conseguenza, poiché nel caso di danni esponenziali $\mu = 1/\alpha$,

$$E[C_t - u] = (c - \lambda\mu)t = \left(\widetilde{c} - \frac{\widetilde{\lambda}}{\widetilde{\alpha}}\right)t;$$

$$Var[C_t] = Var[u + ct - C_t] = \lambda\mu_2 t = \frac{2\widetilde{\lambda}}{\widetilde{\alpha}^2}t;$$

$$E[(C_t - E[C_t])^3] = -E[(u + ct - C_t - E[u + ct - C_t])^3] = -\lambda\mu_3 t = -\frac{6\widetilde{\lambda}}{\widetilde{\alpha}^3}t.$$

Da queste espressioni è possibile ricavare i parametri necessari per l'approssimazione, cioè:

$$\tilde{\alpha} = \frac{3\mu_2}{\mu_3}, \quad \tilde{\lambda} = \frac{\lambda\mu_2\tilde{\alpha}^2}{2} = \frac{9}{2}\frac{\mu_2^3}{\mu_3^2}\lambda, \quad \tilde{c} = c - \lambda\mu + \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\alpha}} = c - \lambda\mu + \frac{3\mu_2^2}{2\mu_3}\lambda.$$

Ricordando che nel caso di danni esponenziali:

$$\Psi(u) = \frac{\lambda}{\alpha c} e^{-\left(\alpha - \frac{\lambda}{c}\right)u},$$

si ricava l'approssimazione [7]

$$\Psi(u) \approx \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\alpha}\tilde{c}} e^{-\left(\tilde{\alpha} - \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{c}}\right)u}.$$

Vediamo attraverso un esempio come il precedente metodo possa dare dei buoni risultati. Poniamo $c = \lambda = 1$; $G(x) = 1 - \frac{1}{3}(e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x})$, da cui è possibile ricavare che $c - \lambda\mu = 7/18$, perché $\mu = 0.611111$. Inoltre, $\lambda\mu_2 = 49/54$ e $\mu_3 = 251/108$. I parametri dell'approssimazione risultano: $\tilde{\alpha} = 1.17131$; $\tilde{\lambda} = 0.622472$; $\tilde{c} = 0.920319$.

Quindi

$$\Psi(u) \approx 0.577441 e^{-0.494949u}.$$

La tabella seguente mostra il valore esatto della probabilità di rovina, $\Psi(u)$, l'approssimazione di De Vylder, (DV), e l'errore relativo (Er), dato da $(DV - \Psi(u))/\Psi(u)$ moltiplicato per 100.

u	0	0.25	0.5	0.75	1
$\Psi(u)$	0.6111	0.5246	0.4547	0.3969	0.3479
DV	0.5774	0.5102	0.4509	0.3984	0.3520
Er	-5.51	-2.73	-0.86	0.38	1.18

u	1.25	1.5	1.75	2	2.25
$\Psi(u)$	0.3059	0.2696	0.2379	0.2102	0.1858
DV	0.3110	0.2748	0.2429	0.2146	0.1896
Er	1.67	1.95	2.07	209	2.03

Tabella 1.2: L'approssimazione di De Vylder per la probabilità di rovina.

Come si vede l'approssimazione è abbastanza buona: rispecchia, cioè, abbastanza bene il vero valore $\Psi(u)$.

Un'altra approssimazione per la Ψ, che può essere utilizzata, è quella di Beekman-Bowers [15]. Questa approssimazione si basa sulla funzione

$$F(u) = 1 - \frac{c}{\lambda\mu}\Psi(u).$$

Si può dimostrare che il primo momento risulta essere

$$\int_0^\infty z dF(z) = \frac{c\mu_2}{2\mu(c-\lambda\mu)}$$

ed il secondo

$$\int_0^\infty z^2 dF(z) = \frac{c}{\mu}\left(\frac{\mu_3}{3(c-\lambda\mu)} + \frac{\lambda\mu_2^2}{2(c-\lambda\mu)^2}\right).$$

L'idea è di approssimare la distribuzione $F(u)$ con un'altra, $G(u)$, che sia una Gamma, (γ,α), con i primi due momenti uguali.

Ciò che si deve verificare è

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{c\mu_2}{2\mu(c-\lambda\mu)} \quad \text{e} \quad \frac{\gamma(\gamma+1)}{\alpha^2} = \frac{c}{\mu}\left(\frac{\mu_3}{3(c-\lambda\mu)} + \frac{\lambda\mu_2^2}{2(c-\lambda\mu)^2}\right).$$

L'approssimazione di Beekman-Bowers risulta:

$$\Psi(u) = \frac{\lambda\mu}{c}(1-F(u)) \approx \frac{\lambda\mu}{c}(1-G(u)).$$

Un fatto importante è che qualora 2γ appartenga ai numeri naturali, allora la variabile aleatoria $2\alpha Z$ ha distribuzione chi-quadro con parametro 2γ.

Ricordiamo l'esempio proposto precedentemente.

I valori mancanti sono γ e α, che si ricavano dalle equazioni

$$\frac{\gamma}{\alpha} = 1.90909, \quad \frac{\gamma(\gamma+1)}{\alpha^2} = 7.71429.$$

Il risultato è $\gamma = 0.895561$, $\alpha = 0.469104$.

Ora possiamo approssimare:

$$\Psi(u) \approx \frac{\lambda\mu}{c}(1 - G(u)),$$

dove $G(u)$ è una Gamma di parametri $(0.895561, 0.469104)$.

Notiamo, inoltre, che $2\gamma = 1.79112$ non è un intero. Tuttavia possiamo ottenere $G(u)$ come interpolazione di una distribuzione χ_1^2 ed un χ_2^2 nel seguente modo

$$0.20888\chi_1^2(2\alpha u) + 0.79112\chi_2^2(2\alpha u),$$

ed approssimare di nuovo:

$$\Psi(u) \approx \frac{\lambda\mu}{c}(1 - G(u)).$$

Nella tabella seguente sono riportati: i valori esatti della probabilità di rovina, $\Psi(u)$; l'approssimazione di Beekman-Bowers, dove $G(u)$ è una Gamma con i parametri (γ, α) trovati sopra, indicata con $(BB1)$; e la stessa approssimazione dove, però, $G(u)$ è l'interpolazione dei due χ^2 sopra citata, indicata con $(BB2)$.

Inoltre, sono espressi i rispettivi errori relativi, (Er), dati, come al solito, da $((BB1) - \Psi(u)) / \Psi(u)$ e $((BB2) - \Psi(u)) / \Psi(u)$ moltiplicati per 100.

u	0	0.25	0.5	0.75	1
$\Psi(u)$	0.6111	0.5246	0.4547	0.3969	0.3479
$BB1$	0.6111	0.5227	0.4553	0.3985	0.3498
Er	0.00	-0.35	0.12	0.42	0.54
$BB2$	0.6111	0.5105	0.4456	0.3914	0.3450
Er	0.00	-2.68	-2.02	-1.38	-0.83

u	1.25	1.5	1.75	2	2.25
$\Psi(u)$	0.3059	0.2696	0.2379	0.2102	0.1858
$BB1$	0.3076	0.2709	0.2387	0.2106	0.1859
Er	0.54	0.47	0.34	0.19	0.04
$BB2$	0.3046	0.2693	0.2383	0.2110	0.1869
Er	-0.42	-0.11	0.18	0.40	0.59

Tabella 1.3: L'approssimazione di Beekman-Bowers per la probabilità di rovina.

Anche in questo caso le approssimazioni che, in entrambi i modi, si ottengono sono abbastanza buone e con errori relativi piuttosto bassi, soprattutto nel caso di BB1, dove assumono valori inferiori all' 1%.

Per concludere, consideriamo la cosiddetta approssimazione di propagazione [49].

Siano $C_t^{(n)}$ una successione di processi di Lundberg-Cramer con capitale iniziale pari ad u, intensità del numero di sinistri $\lambda^{(n)} = \lambda n,$ ammontare dei danni con distribuzione

$$G^{(n)}(x) = G(x\sqrt{n}),$$

e premio annuo del tipo

$$c^{(n)} = \left(1 + \frac{c - \lambda\mu}{\lambda\mu\sqrt{n}}\right)\lambda^{(n)}\mu^{(n)} = c + (\sqrt{n} - 1)\lambda\mu.$$

Posto

$$\mu = \int_0^\infty y dG(y),$$

ed assumendo

$$\int_0^\infty y^2 dG(y) < \infty,$$

la successione $C_t^{(n)}$ converge in distribuzione:

$$C_t^{(n)} \to (u + W_t),$$

dove W_t è un moto Browniano $(c-\lambda\mu,\lambda\mu_2)$, cioè un processo stocastico W_t tale che:

1) $W_0 = 0$
2) W_t è ad incrementi indipendenti
3) $W_t \sim N(mt,\eta^2 t)$.

Si può dimostrare che W_t è anche ad incrementi stazionari.

Intuitivamente, facendo tendere il numero dei sinistri all'infinito in un intervallo unitario di tempo, ed a 0 l'ammontare medio dei risarcimenti, si cerca di rendere l'ammontare dei danni talmente piccolo da far sì che la distribuzione di $C_1^{(n)} - u$ tenda ad una Normale di media $c-\lambda\mu$ [40]. Se $\tau^{(n)}$ è il tempo di rovina di $C_t^{(n)}$ e $\tau = Inf\{t \geq 0 : u + W_t < 0\}$ rappresenta la rovina del moto Browniano, si ha che:

$$\lim_{n\to+\infty} P(\tau^{(n)} \leq t) = P(\tau < t) \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty} P(\tau^{(n)} < \infty) = P(\tau < \infty).$$

Si può dimostrare, quindi, che ciò che accade in un orizzonte illimitato è paragonabile a quello che accade in uno limitato [61].

L'idea dell'approssimazione di propagazione è pertanto quella di approssimare $P(\tau^{(1)} \leq t)$ con $P(\tau \leq t)$ e $P(\tau^{(1)} < \infty)$ con $P(\tau < \infty)$. Per i calcoli è sufficiente conoscere la probabilità di rovina del moto Browniano. Se W_t è un moto Browniano (m,η^2) e $\tau = Inf\{t \geq 0 : u + W_t < 0\}$, $P(\tau < \infty)$ è pari a

$$e^{-2um/\eta^2}$$

con cui approssimiamo $P(\tau^{(1)} < \infty)$, mentre

$$P(\tau \leq t) = 1 - \Phi\left(\frac{mt+u}{\eta\sqrt{t}}\right) + e^{-2mu/\eta^2}\Phi\left(\frac{mt-u}{\eta\sqrt{t}}\right),$$

con cui approssimiamo $P(\tau^{(1)} \leq t)$ [7].

Occorre sottolineare che tale tipo di approssimazione dà buoni risultati solo se $c/(\lambda\mu)$ è vicino ad 1 cioè se il premio è vicino a quello equo.

Riprendendo ancora l'esempio già visto, poiché W_t è un moto Browniano $(c-\lambda\mu, \lambda\mu_2) = (7/18, 49/54)$ e ricordando che:

$$\Psi(u) \approx e^{-2mu/\eta^2},$$

dove $m = c - \lambda\mu$ e $\eta^2 = \lambda\mu_2$, l'approssimazione che ne deriva è

$$\Psi(u) \approx e^{-\frac{6}{7}u}.$$

Nella tabella seguente sono nuovamente riportati i valori esatti della probabilità di rovina, $\Psi(u)$, quelli dell'approssimazione, (DA), e quelli dell'errore relativo, $(DA - \Psi(u))/\Psi(u)$, moltiplicato per 100.

u	0	0.25	0.5	0.75	1
$\Psi(u)$	0.6111	0.5246	0.4547	0.3969	0.3479
DA	1.0000	0.8071	0.6514	0.5258	0.4244
Er	63.64	53.87	43.26	32.49	21.98

u	1.25	1.5	1.75	2	2.25
$\Psi(u)$	0.3059	0.2696	0.2379	0.2102	0.1858
DA	0.3425	0.2765	0.2231	0.1801	0.1454
Er	11.96	2.54	-6.22	-14.32	-21.78

Tabella 1.4: L'approssimazione di propagazione per la probabilità di rovina.

Come si vede, in questo caso l'approssimazione non è molto buona ed in particolare gli errori relativi sono elevati. Questo deriva dal fatto che $c/(\lambda\mu) = 1.63636$ non è molto vicino ad 1.

1.10 Il tempo di rovina

Proviamo ora ad analizzare in maniera dettagliata il tempo di rovina [60]. Consideriamo la funzione:

$$f_\alpha(u) = E[e^{-\alpha\tau} 1_{\{\tau<\infty\}} / C_0 = u].$$

Tale funzione è definita per $\alpha \geq 0$ e rappresenta la funzione generatrice dei momenti del tempo di rovina.

Per h piccolo scriviamo $f_\alpha(u)$ considerando la possibilità o meno che in $[0,h]$ vi siano sinistri:

$$\begin{aligned} f_\alpha(u) &= (1-\lambda h + o(h))e^{-\alpha h} f_\alpha(u+ch) + \\ &+ (\lambda h + o(h))[\int_0^u f_\alpha(u-y)dG(y) + 1 - G(u) + o(1)] + o(h). \end{aligned}$$

Riordinando i termini:

$$\begin{aligned} & c\frac{f_\alpha(u+ch) - f_\alpha(u)}{ch} - \frac{1-e^{-\alpha h}}{h} f_\alpha(u+ch) + \\ & + \lambda[\int_0^u f_\alpha(u-y)dG(y) + 1 - G(u) - e^{-\alpha h} f_\alpha(u+ch)] + o(1) = 0. \end{aligned}$$

Facendo tendere h a 0 vediamo che $f_\alpha(u)$ è differenziabile, e dà luogo all'equazione differenziale:

$$cf_\alpha'(u) + \lambda[\int_0^u f_\alpha(u-y)dG(y) + 1 - G(u) - f_\alpha(u)] - \alpha f_\alpha(u) = 0. \qquad (1.6)$$

Tale equazione è difficile da risolvere. Possiamo allora introdurre la trasformazione di Laplace con riferimento al capitale iniziale:

$$F_\alpha(s) = \int_o^\infty e^{-su} f_\alpha(u)du.$$

Assumendo $s > 0$ e ricordando le proprietà della trasformazione di Laplace, otteniamo:

1) $F_\alpha'(s) = \int_0^\infty f_\alpha'(u)e^{-su}du = sF_\alpha(s) - f_\alpha(0)$

2) $\int_0^\infty \int_0^u f_\alpha(u-y)dG(y)e^{-su}du = F_\alpha(s)M_Y(-s)$

3) $\int_0^\infty \int_u^\infty dG(y)e^{-su}du = \int_0^\infty \int_0^y e^{-su}du dG(y) = \dfrac{1-M_Y(-s)}{s}$

Moltiplicando la (1.6) per e^{-su} ed integrando, otteniamo:

$$c(sF_\alpha(s)-f_\alpha(0))+\lambda[F_\alpha(s)M_Y(-s)+\frac{1-M_Y(-s)}{s}-F_\alpha(s)]-\alpha F_\alpha(s)=0,$$

e risolvendo rispetto a $F_\alpha(s)$ [14],[22]

$$F_\alpha(s)=\frac{cf_\alpha(0)-\lambda s^{-1}(1-M_Y(-s))}{cs-\lambda(1-M_Y(-s))-\alpha}. \qquad (1.7)$$

Sappiamo che $F_\alpha(s)$ esiste per $\alpha>0$ e $s>0$ ed assume un valore positivo. Il denominatore del secondo membro di (1.7),

$$cs-\lambda(1-M_Y(-s))-\alpha,$$

è una funzione continua che vale $-\alpha<0$ in 0, e tende all'infinito per s che tende all'infinito. Quindi ammette una radice positiva $s(\alpha)$. Poiché $F_\alpha(s)$ esiste per $s=s(\alpha)$, $s(\alpha)$ deve essere una radice anche del numeratore:

$$cf_\alpha(0)=\lambda s(\alpha)^{-1}(1-M_Y(-s(\alpha))).$$

Inoltre, essendo $s(\alpha)$ differenziabile e $s(0)=0$, si ha:

$$\lim_{\alpha\to 0}s(\alpha)=0.$$

Considerando il solito esempio di sinistri distribuiti $Exp(\beta)$, poiché $M_Y(-s)=\frac{\beta}{\beta+s}$, dobbiamo risolvere l'equazione:

$$cs-\frac{\lambda s}{\beta+s}-\alpha=0.$$

Le soluzioni sono

$$s_\pm(\alpha)=\frac{-(\beta c-\lambda-\alpha)\pm\sqrt{(\beta c-\lambda-\alpha)^2+4\alpha\beta c}}{2c}$$

dove $s_-(\alpha)<0\le s_+(\alpha)$.

Allora

$$F_\alpha(s)=\frac{\dfrac{\lambda}{\beta+s_+(\alpha)}-\dfrac{\lambda}{\beta+s}}{cs-\dfrac{\lambda s}{\beta+s}-\alpha}=\frac{\lambda}{c(\beta+s_+(\alpha))(s-s_-(\alpha))}$$

e [37]

$$f_\alpha(u)=\frac{\lambda}{c(\beta+s_+(\alpha))}e^{s_-(\alpha)u}.$$

Notiamo che

$$E[\tau 1_{\{\tau<\infty\}}]=\lim_{\alpha\to 0}E[\tau e^{-\alpha\tau}1_{\{\tau<\infty\}}]=\lim_{\alpha\to 0}-\frac{d}{d\alpha}E[e^{-\alpha\tau}1_{\{\tau<\infty\}}]$$

e

$$\int_0^\infty E[\tau 1_{\{\tau<\infty\}}/C_0=u]e^{-su}du=\lim_{\alpha\to 0}-\frac{d}{d\alpha}\int_0^\infty f_\alpha(u)e^{-su}du=\lim_{\alpha\to 0}-\frac{d}{d\alpha}F_\alpha(s).$$

Assumendo $\mu_2<\infty$, si ha che il valore atteso del tempo di rovina, qualora questo non sia infinito è dato da:

$$E[\tau 1_{\{\tau<\infty\}}]=\frac{1}{c-\lambda\mu}\left[\frac{\lambda\mu_2}{2(c-\lambda\mu)}\delta(u)-\int_0^u\Psi(u-y)\delta(y)dy\right]. \qquad (1.8)$$

Infatti:

$$-\frac{d}{d\alpha}F_\alpha(s)=\frac{\lambda s'(\alpha)}{cs-\lambda(1-M_Y(-s))-\alpha}\frac{1-M_Y(-s(\alpha))-M_Y'(-s(\alpha))s(\alpha)}{s(\alpha)^2}-$$

$$-\frac{\lambda((1-M_Y(-s(\alpha)))s(\alpha)^{-1}-(1-M_Y(-s))s^{-1})}{(cs-\lambda(1-M_Y(-s))-\alpha)^2}.$$

Ricordando che:

1) $s'(0)=\dfrac{1}{c-\lambda\mu}$

2) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{1-M_Y(-s(\alpha))}{s(\alpha)}=\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{1-M_Y(-s)}{s}=\lim\limits_{s\to 0}M_Y'(-s)=\mu$

3) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{(1-M_Y(-s(\alpha)))-M_Y'(-s(\alpha))s(\alpha)}{s(\alpha)^2}=\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{(1-M_Y(-s))-M_Y'(-s)s}{s^2}=$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{sM_Y''(-s)}{2s}=\frac{\mu_2}{2},$$

e passando al limite per α che tende a 0,

$$\int_0^\infty E[\tau 1_{\{\tau<\infty\}} / C_0 = u] e^{-su} du = \lim_{\alpha \to 0} -\frac{d}{d\alpha} F_\alpha(s) =$$

$$= \frac{\lambda \mu_2}{2(c-\lambda\mu)^2} \frac{c-\lambda\mu}{cs - \lambda(1 - M_Y(-s))} -$$

$$- \frac{1}{c-\lambda\mu} \frac{c-\lambda\mu}{cs-\lambda(1-M_Y(-s))} \left(\frac{1}{s} - \frac{c-\lambda\mu}{cs-\lambda(1-M_Y(-s))} \right) =$$

$$= \frac{1}{c-\lambda\mu} [\frac{\lambda\mu_2}{2(c-\lambda\mu)} \Delta(s) - \Delta(s) \overline{\Psi}(s)].$$

Quest'ultima è la trasformazione di Laplace di $E[\tau 1_{\{\tau<\infty\}}]$ nel caso in cui valga la (1.8) [61].

Da ciò segue:

$$P(t < \tau < \infty) < \frac{\lambda\mu_2}{2(c-\lambda\mu)^2 t}.$$

Infatti, poiché $\Psi(u)$ e $\delta(u)$ assumono valori in $[0,1]$, dall'espressione precedente si ottiene:

$$E[\tau 1_{\{\tau<\infty\}}] < \frac{\lambda\mu_2}{2(c-\lambda\mu)^2}.$$

D'altra parte

$$P(t < \tau < \infty) = P(\tau 1_{\{\tau<\infty\}} > t),$$

mentre la disuguaglianza di Markov implica $P(Y \geq cE(Y)) \leq \frac{1}{c}$ [54].

Segue

$$P(\tau 1_{\{\tau<\infty\}} > t) < \frac{1}{t} E[\tau 1_{\{\tau<\infty\}}] < \frac{\lambda\mu_2}{2(c-\lambda\mu)^2 t}.$$

Inoltre è possibile ottenere una formula esplicita nel caso di u=0.

$$E[\tau 1_{\{\tau<\infty\}} / C_0 = 0] = \frac{\lambda\mu_2}{2(c-\lambda\mu)^2} \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) = \frac{\lambda\mu_2}{2c(c-\lambda\mu)}$$

e

$$E[\tau / \tau < \infty, C_0 = 0] = \frac{\mu_2}{2\mu(c - \lambda\mu)},$$

che è la speranza matematica del tempo di rovina, τ, condizionata al fatto che τ sia minore di infinito con capitale iniziale pari a 0, ed è quindi ottenuta dividendo $E[\tau 1_{\{\tau<\infty\}} / C_0 = 0]$ per la probabilità di rovina con capitale iniziale pari a 0 [64].

Proponendo, di nuovo, l'esempio di sinistri esponenziali di parametro β, si ha $R = \beta - \frac{\lambda}{c}$, $\mu = \frac{1}{\beta}$ e $\mu_2 = \frac{2}{\beta^2}$. Dunque

$$E[\tau 1_{\{\tau<\infty\}}] = \frac{\beta}{c\beta - \lambda}\left[\frac{2\lambda}{2\beta(c\beta - \lambda)}\left(1 - \frac{\lambda}{\beta c}e^{-Ru}\right) - \int_0^u \frac{\lambda}{\beta c}e^{-R(u-y)}\left(1 - \frac{\lambda}{\beta c}e^{-Ry}\right)dy\right] =$$

$$= \frac{\beta}{c\beta - \lambda}\left[\frac{\lambda}{\beta(c\beta - \lambda)}\left(1 - \frac{\lambda}{\beta c}e^{-Ru}\right) - \frac{\lambda}{\beta c}e^{-Ru}\left(\frac{c}{\beta c - \lambda}(e^{Ru} - 1) - \frac{\lambda}{\beta c}u\right)\right] =$$

$$= \frac{\lambda}{\beta c^2(c\beta - \lambda)}e^{-Ru}(\lambda u + c) = \frac{1}{c(c\beta - \lambda)}\Psi(u)(\lambda u + c),$$

mentre la media condizionata del tempo di rovina è lineare in u

$$E[\tau / \tau < \infty] = \frac{\lambda u + c}{c(\beta c - \lambda)}.$$