EFFETTO DELLA RIASSICURAZIONE TRADIZIONALE E FINANZIARIA SUL LIVELLO DI SOLVIBILITA' DI UNA COMPAGNIA D'ASSICURAZIONE DANNI.

INDICE

RINGRAZIAMENTI

INTRODUZIONE

La riassicurazione è il contratto con il quale l'assicuratore trasferisce una parte del rischio, o dei rischi assunti in portafoglio, ad un altro assicuratore (riassicuratore), riducendo pertanto la propria esposizione aleatoria .

Il presente lavoro risulta suddiviso in quattro parti.

Nella prima parte, previa spiegazione di alcuni concetti base e delle motivazioni che possono spingere l'assicuratore a comprare una copertura riassicurativa, vengono analizzati i trattati di riassicurazione tradizionale (*quota globale, per eccedente di somma , excess of loss, stop loss, umbrella XL*).

Per ciascuno di essi, si esamina la modalità di cessione dei rischi, la determinazione del premio da corrispondere al riassicuratore, l'impegno aleatorio conservato dalla cedente e, a livello teorico, i benefici e gli scapiti, sia per la cedente che per il riassicuratore, derivanti dal loro utilizzo.

In merito , si presta particolare attenzione al loro grado di semplicità operativa, all' impatto sulla variabilità del portafoglio, nonchè ai margini di profitto potenzialmente conseguibili dalle parti .

Nella seconda e terza parte si fa riferimento alla teoria del rischio classica, come strumento di analisi per il management di una generica compagnia assicurativa , nel nostro caso ramo danni.

Sulla base di tale strumento , nella seconda parte, sono state studiate le variabili aleatorie $\tilde{N}$, $\tilde{Z}$, $\tilde{X}$, rispettivamente numero totale dei sinistri in portafoglio, costo del singolo sinistro , costo sinistri aggregato, al fine di poter analizzare e stimare , nella parte successiva, l'andamento, nel breve e nel lungo periodo, della riserva di rischio, $\tilde{u}_t$, della compagnia, nonché il profilo della sua solvibilità.

In particolare, nella seconda parte, univocamente dal punto di vista della cedente, è stata focalizzata l'attenzione sulle relazioni intercorrenti tra il limite di conservazione del singolo sinistro* e i momenti principali della variabile aleatoria $\tilde{Z}$, e, quindi,nella parte successiva, viene analizzato l'impatto che tale limite di conservazione ha sul processo di rischio $\tilde{u}_t$, ovvero sulla probabilità di rovina della compagnia stessa.

Si è voluto approfondire lo studio del suddetto impatto mediante il supporto informatico del linguaggio di programmazione Matlab, che ci ha consentito di ottenere delle simulazioni di $\tilde{u}_t$, variando gli scenari di rischio. In particolare , ipotizzando un portafoglio statico negli anni, una politica riassicurativa di tipo "quota globale" e attribuendo opportune distribuzioni di probabilità alle variabili aleatorie presenti nel modello, $\tilde{N}, \tilde{Z}, \tilde{X}$, è stato possibile analizzare i risultati e i momenti principali della riserva di rischio al variare della quota di conservazione e delle commissioni di riassicurazione ; ciò ha consentito, quindi, di poter conoscere la strategia migliore tra tre ipotetiche strategie proposte cioè quella che massimizza il valore atteso degli utili, ma che, al contempo, rende minima la variabilità del portafoglio considerato.

Nella quarta parte, previa spiegazione dei motivi che possono indurre l'assicuratore a ricorrere ad una copertura riassicurativa non tradizionale, riconducibili per lo più al bisogno di ridurre le forti fluttuazioni finanziarie e di reddito tipiche dei bilanci assicurativi, vengono analizzati i trattati di riassicurazione finanziaria (*financial proportional cover,*

---

*Il limite di conservazione può riferirsi anche al singolo rischio o alla globalità dei rischi - o sinistri - generati dal portafoglio.

spread loss,loss portfolio transfer) e i derivati assicurativi.

Per ciascun trattato si è cercato di esaminare, come nel caso della riassicurazione tradizionale, le modalità di cessione dei rischi , del calcolo del premio e l'impegno aleatorio conservato dalla cedente.

Al fine di studiare l'impatto che tali trattati inducono sui risultati di bilancio, sono stati riportati opportuni esempi numerici, in cui si è focalizzata l'attenzione sulla variazione di alcuni ratios (premi/surplus , expense ratio, loss ratio, combined ratio**)** , a seguito dell'applicazione dei suddetti trattati.

Infine, per meglio comprendere la funzione e la funzionalità dei derivati assicurativi, si è ritenuto necessario confrontarli con i trattati di riassicurazione tradizionale.

Nell'ambito della realtà gestionale assicurativa, le politiche di riassicurazione sono da esaminarsi, quindi, come potenziali strategie atte ad aumentare la solvibilità di una compagnia; tale obiettivo sarà il filo conduttore di tutta la trattazione.

Capitolo 1

Aspetti generali della riassicurazione tradizionale .

Premessa : la riassicurazione è il contratto con il quale l'assicuratore (riassicurato) trasferisce una parte del rischio o dei rischi assunti ad un altro assicuratore . La riassicurazione , come la coassicurazione , è uno degli strumenti tipici , previsti dal codice civile , per la ripartizione del rischio tra più assicuratori . Mentre nella coassicurazione il rischio viene assunto *pro quota* dai coassicuratori al momento della stipula del contratto di assicurazione , nella riassicurazione il rischio è assunto dall'assicuratore , che provvede alla sua ripartizione mediante la stipulazione di un successivo contratto con un altro assicuratore . Ne consegue che , a differenza della coassicurazione , la riassicurazione è un contratto al quale l'assicurato rimane estraneo e che , pertanto , non crea rapporti tra quest'ultimo e il riassicuratore (1) .

Giuridicamente ciò che rileva , ai fini della distinzione tra le due fattispecie , è la posizione dell'assicurato. esaminato

Riassicurazione è anche la cosiddetta retrocessione , termine con il quale si designa il contratto con il quale il riassicuratore riassicura , a sua volta, i rischi riassicurati presso un secondo (o un terzo o un quarto e così via) riassicuratore .

Cerchiamo ora di spiegare le ragioni che inducono l'assicuratore a ricercare a sua volta una copertura (o assicurazione di seconda fase) ripartendo , in sostanza , il rischio o i rischi del suo portafoglio con altri soggetti operanti sul mercato .

(1) art. 1929 codice civile .

Un qualsiasi soggetto (individuo , famiglia , impresa , ecc…) presso il quale siano “localizzati” certi rischi , può trasferire ad altri soggetti (almeno parzialmente) , alcuni dei rischi .Tale trasferimento sarà attuato quando il complesso di rischi che il soggetto dovrebbe sopportare, supera un livello da lui ritenuto accettabile . La capacità di “conservazione” dei rischi , dipende da vari fattori , tra i quali , ha un evidente ruolo , l’ammontare dei mezzi finanziari (e , in particolare , di capitale proprio) che possono essere utilizzati per coprire la possibili conseguenze dei rischi stessi . Il trasferimento dei rischi avviene tipicamente mediante la stipulazione di opportuni contratti di assicurazione , il soggetto che si accolla i rischi è dunque un assicuratore . Come già detto , anche una compagnia di assicurazione può trovarsi nelle condizioni di ritenere conveniente operare una riduzione della propria esposizione aleatoria , cedendo parte dei propri rischi assunti , cioè “riassicurandosi”. Per effetto di tale scelta , l’assicuratore dovrà pagare un prezzo per il servizio di trasferimento del rischio , “il premio di riassicurazione” , pertanto, mentre vedrà diminuire la variabilità e quindi il rischio del proprio portafoglio , dovrà ripartire con il riassicuratore gli utili attesi in misura dipendente dalle condizioni del trattato . A volte , però , il sacrificio degli utili potrebbe essere considerato eccessivo dal management della compagnia , in particolare può accadere che , nonostante la variabilità della riserva di rischio (in altre parole il patrimonio netto della compagnia) si riduca ad un livello adeguato per la compagnia stessa , il valore atteso della stessa riserva di rischio si riduca in una misura così elevata da causare un aumento della probabilità di rovina della compagnia , anziché una diminuzione , pertanto , al fine di ridurre la propria esposizione aleatoria la compagnia potrebbe adottare altre strategie .

I rapporti di riassicurazione possono essere variamente regolamentati. Generalmente il rapporto riassicurativo può svolgersi dal punto di vista della cedente , e rispettivamente del cessionario , su base :

1) facoltativa / facoltativa (riassicurazione facoltativa) ;
2) obbligatoria / obbligatoria (riassicurazione obbligatoria) ;
3) facoltativa / obbligatoria (riassicurazione facob) .

Nel caso (1) la cessione ha luogo contratto per contratto , secondo le esigenze della compagnia cedente , la quale fornisce tutte le informazioni relative al singolo rischio ; il riassicuratore può non accettare la cessione . Questo tipo di cessione è assai complicato e laborioso : la produzione della documentazione necessaria , la ricerca dei riassicuratori disponibili , i tempi di valutazione del rischio etc…rendono la procedura lunga e costosa . Per semplificar lo svolgimento dell' attività riassicurativa , esiste il trattato di riassicurazione . Nel seguito mi propongo di trattare il tema della riassicurazione considerando solo i trattati di riassicurazione e precisamente il caso (2). Nei casi (2) e (3) appunto , il rapporto riassicurativo è regolamentato da un "contratto" di riassicurazione , stipulato tra cedente e cessionario , chiamato trattato. Il trattato di tipo (2) obbliga la cedente a trasferire assegnate quote di rischi e il riassicuratore ad accettarle . Il trattato di riassicurazione permette quindi di riassicurare i rischi a priori , ovvero permette alla cedente di sottoscrivere un rischio e di averlo automaticamente riassicurato da parte di quei riassicuratori che abbiano stipulato il trattato. Un trattato di tipo (3) , invece , impegna solamente il riassicuratore ad accettare , entro prefissati limiti e opportune clausole d'accordo , le quote di contratti che la cedente decide di riassicurare. Sulla scorta di quanto detto , un rapporto di tipo obbligatorio / facoltativo sarebbe privo di significato concreto .Si noti che la stipulazione di un trattato assicurativo di tipo (2) o (3) dà all'assicuratore che intende cedere parte dei propri rischi la certezza di poterlo fare (almeno parzialmente , cioè entro certi limiti di accettazione del trattato).La presenza di un trattato è dunque necessaria affinché l'assicuratore possa accettare contratti di capitale molto elevato. D'altra parte , se l'assicuratore dovesse sottoscrivere rischi fino al limite massimo della sua capacità , potrebbe sottoscrivere rischi di entità limitata . Il poter disporre della forza economica dei suoi riassicuratori si traduce in una crescita della capacità di sottoscrizione che consente , quindi , all'assicuratore di sottoscrivere parte dei rischi in misura superiore a quanto potrebbe fare contando solo sulle sue disponibilità economiche e finanziarie . Inoltre , ogni assicuratore , per l'equilibrio della sua gestione , deve far si che la probabilità teorica del verificarsi di un dato evento dannoso (sinistro), si avvicini il più possibile alla sua probabilità statistica . Al fine di conseguire tale risultato , deve aumentare il numero dei casi in gestione al punto da ridurre al minimo tale differenza . Dato che per la legge dei grandi numeri è meglio per la compagnia avere in portafoglio un grande numero di " piccoli " rischi , piuttosto che un piccolo numero di " grandi " rischi, è interesse dell'assicuratore mantenere il portafoglio quanto più omogeneo possibile , riducendo quindi l'esposizione dei rischi grandi e ricorrendo , pertanto , ad appropriate strategie , tra cui la riassicurazione . Infine , un altro aspetto fondamentale della riassicurazione è quello di dare stabilità ai risultati economici e finanziari della cedente , proteggendo il suo surplus da shock derivanti da un numero rilevante di sinistri o da un sinistro catastrofale . Attutire le fluttuazioni di tali risultati si traduce pertanto nel fatto di aumentare la solvibilità della cedente , diminuendone , quindi , la probabilità di rovina .

Un modo di classificare le forme di riassicurazione riguarda la modalità di cessione dei rischi e la determinazione dei premi da corrispondere al riassicuratore . Si parla di riassicurazione *proporzionale* quando il riassicuratore si impegna a rimborsare alla cedente la quota parte di risarcimento da questa effettuata per un sinistro , che è pari alla quota parte di premio ricevuta in cessione . Quando invece non esiste un rapporto diretto tra premio ricevuti in cessione e rimborsi alla cedente , si parla di riassicurazione *non proporzionale* . Mentre nella versione proporzionale , l'intervento del riassicuratore in caso di sinistro è certo , rimanendo aleatoria , alla stipula del contratto , la sua entità , nell'altro caso l'intervento , come vedremo , è eventuale . Pertanto , nel primo caso si ha una ripartizione dei rischi , nel secondo una ripartizione dei danni . Si distinguono ulteriormente le forme "individuali" , cioè riferite al rischio singolo , da quelle "globali" che riguardano l'intero portafoglio . Così , per la riassicurazione non proporzionale cosiddetta di "eccesso" , nelle forme più tradizionali , si distingue il caso di *eccesso sinistro singolo* (o con termine anglosassone , internazionalmente usato , "excess of loss" spesso abbreviato nella sigla XL) da quelli di *eccesso di perdita* ("stop loss"), *eccesso di danni aggregato* ("aggregate XL")che si differenzia dal precedente per il fatto che l'ammontare riassicurato viene indicato con un limite monetario , anziché percentuale , mentre per la riassicurazione proporzionale si parla di riassicurazione *in quota* ("quota share") nel caso globale , rispettivamente *per eccedente di somma* ("surplus") in quello individuale. Nella pratica , poi , come vedremo nel seguito della trattazione , un portafoglio può venire riassicurato in forme miste di vario tipo .

1.1 Natura giuridica e disciplina

La disciplina codicistica della riassicurazione si riassume in pochissime norme (artt 1928-1931) .

L'art. 1928 regola il regime della prova del contratto . Il trattato di riassicurazione deve essere provato per iscritto , mentre la prova scritta non è richiesta per la riassicurazione singola o per il singolo rapporto posto in essere in esecuzione del trattato .

L'art. 1929 , come si è già accennato , esclude qualsiasi rapporto tra assicurato e riassicuratore , « salvo le disposizioni speciali sul privilegio della massa degli assicurati », vale a dire il privilegio speciale , previsto dall'art. 85 t.u. a favore della massa degli assicurati , sulle somme dovute dal riassicuratore in caso di liquidazione coatta amministrativa dell'assicuratore-riassicurato .

Gli art. 1930-1931 regolano i reciproci rapporti delle parti in caso di liquidazione coatta amministrativa .

La prima norma risolve una questione molto dibattuta , vigente il codice di commercio , e cioè se , in caso di liquidazione coatta amministrativa dell'assicuratore-riassicurato , il riassicuratore fosse tenuto a pagare al primo integralmente gli indennizzi dovuti , indipendente dall'effettiva entità delle somme pagate dalla liquidazione a questo titolo agli assicurati . L'art. 1930 dispone espressamente che il riassicuratore deve pagare integralmente l'indennità dovuta , ma fa salva la compensazione con i premi e gli altri crediti verso il riassicurato . L'art. 1931 prevede , sia per il caso di liquidazione coatta del riassicuratore che per il caso di liquidazione del riassicurato , la compensazione di diritto tra crediti e debiti reciproci che , alla fine della liquidazione , risultano dalla chiusura dei conti relativi a più contratti di riassicurazione .

La scarna normativa del codice non risolve il problema della disciplina applicabile al rapporto . Di qui il dibattito sulla natura giuridica della riassicurazione . La collocazione degli articoli 1928-31 all'interno della disciplina del contratto di assicurazione suggerisce la qualificazione assicurativa del contratto . E in effetti la riassicurazione viene di regola considerata un'assicurazione dell'assicuratore . Si discute se si tratta di un' assicurazione contro i danni , o viceversa di un'assicurazione che segue la natura dell'assicurazione di base (ass. danni o ass. vita) , o ancora se si tratta di una sottospecie delle assicurazioni contro i danni (assicurazione del patrimonio o di resp. civ.) o di un sottotipo particolare di contratto di assicurazione diverso dall'assicurazione danni e dall'assicurazione vita . Va però rilevato che gli artt 1928 ss. non contengono alcun rinvio alle norme sull'assicurazione . Il dibattito ha un rilievo più teorico che pratico .

La riassicurazione è regolata essenzialmente dagli usi e , segnatamente da usi di carattere internazionale . Si tratta di regole costantemente applicate , dalle quali emerge un contratto originale , che non può essere assimilato *tout court* al contratto di assicurazione e , a maggior ragione , non può essere inquadrato in uno dei sottotipi o dei rami disciplinati dal codice (ass. danni , ass r.c. , ass danni o ass. vita a seconda del rischio assicurato).

1.2 Riassicurazione proporzionale .

Premessa E' utile ribadire che si parla di riassicurazione proporzionale quando il riassicuratore si impegna a rimborsare alla cedente la quota parte di risarcimento da questa effettuata per un sinistro , che è pari alla quota parte di premio ricevuta in cessione . Focalizziamo il discorso con la seguente descrizione formale : siano $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \ldots, \tilde{X}_n$ gli impegni aleatori relativi agli n contratti che figurano nel portafoglio della cedente e sia

$$\tilde{X}_i = \sum_{h=0}^{\tilde{N}_i} \tilde{Z}_h^{(i)} \qquad i=1,2,\ldots,n \qquad \textbf{(1)}$$

l'impegno aleatorio dell'assicuratore all'atto dell'assunzione del rischio (contratto) i-esimo , dove $\tilde{N}_i$ è il numero aleatorio di sinistri che possono colpire nel corso dell'anno il rischio i-esimo e $\tilde{Z}_h$ è il risarcimento aleatorio del sinistro h-esimo . Consideriamo $\tilde{\Gamma}_i$ l'impegno aleatorio conservato dalla cedente sul totale impegno $\tilde{X}_i$. Conseguentemente , l'impegno accettato dal riassicuratore per quel rischio è $\tilde{X}_i - \tilde{\Gamma}_i$. Indicheremo con $\tilde{\Gamma}$ l'impegno conservato dall'assicuratore sull'intero portafoglio . Nel caso di riassicurazioni proporzionali , avremo :

1) riassicurazione globale in quota ("quota share")

$$\tilde{\Gamma} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\Gamma}_i = a \sum_{i=1}^{n} \tilde{X}_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{h=0}^{\tilde{N}_i} a\, \tilde{Z}_h^{(i)} \qquad 0 \le a \le 1 \qquad \textbf{(1.1)}$$

2) riassicurazione per eccedente di somma (surplus)

$$\tilde{\Gamma} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\Gamma}_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \tilde{X}_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{h=0}^{\tilde{N}_i} a_i\, \tilde{Z}_h^{(i)} \qquad 0 \le a_i \le 1\ , \quad (i=1,2,\ldots n) \qquad \textbf{(1.2)}$$

Sia M_i il valore assicurato o il massimale garantito per ogni rischio i-esimo , i seguenti importi certi , rispettivamente nel caso 1) e 2) :

$$a M_i = a \cdot \max\,(\ \tilde{Z}_h^{(i)};\ M_i) \qquad \textbf{(1.3)}$$

$$a_i M_i = a_i \cdot \max\,(\ \tilde{Z}_h^{(i)};\ M_i) \qquad \textbf{(1.4)}$$

sono detti pieni di conservazione . Pertanto appare chiaro che l'impegno del riassicuratore , per ogni sinistro che colpisca l' i-esimo rischio , è pari a *(1-a)* $\tilde{Z}_h^{(i)}$, nel primo caso e pari a *(1-a$_i$)* $\tilde{Z}_h^{(i)}$, nel secondo . Una volta fissati i pieni , la cedente trasferirà al riassicuratore il rischio o i rischi da lei non coperti , cedendo altresì parti proporzionali dei premi introitati .Come già detto , il riassicuratore accettato quanto trasferitogli dalla cedente , potrà a sua volta retrocedere parte dei rischi presso altri riassicuratori , detti appunto retrocessionari . Il riassicuratore dovrà , inoltre , corrispondere adeguate provvigioni alla cedente, vale a dire una commissione , in percentuale dei premi riassicurati , a copertura dei costi di acquisizione e della gestione dei rischi e dei sinistri . Questa percentuale può essere determinata a priori (commissione fissa) , o a posteriori (commissione a scalare). Ovviamente , la modalità di calcolo della commissione a posteriori deve essere prevista a priori nel contratto e , in questo caso , è necessario stabilire una commissione "provvisoria" al cui aggiustamento si procederà a fine esercizio , una volta conosciuti i dati previsti dalla formula per la determinazione della percentuale definitiva .Generalmente , quest'ultima è definita entro un range di variazione , inversamente proporzionale al loss ratio (rapporto sinistri a premi di competenza dell'esercizio) . Questo consente alla cedente di ottenere profitti maggiori di quelli attesi , mentre tutela il riassicuratore da una sinistrosità particolarmente avversa .

Esempio 1- "commissione a scalare" . Supponiamo che la formula per il calcolo delle commissioni sia data da(2) :

$$RCR = PRCR - SF \cdot \left\{ \frac{RL}{RP} - (1 - PRCR - RM) \right\} \qquad \textbf{1.A}$$

sub $\min RCR \leq RCR \leq \max RCR$, dove :

RCR = (reinsurance ceding commission rate) commissioni di riassicurazione in percentuale dei premi .

PRCR = (provisional reinsurance commission rate) commissioni di riassicurazione provvisorie = 33%

---

(2) Formula tratta da : Savelli N. (2002): *Risk analysis of a non-life insurer and traditional reinsurance effects on the solvency profile*, presented at 6th International Congress on Insurance , Mathematics and Economics, Lisbon.

SF = slide factor = 50%

$\frac{RL}{RP}$ = (reinsurance loss / reinsurance premium) = rapporto sinistri a premi a carico del riassicuratore .

RM = (reinsurer's margin) = margine di profitto del riassicuratore = 5%

min RCR = valore minimo di RCR = 25%

max RCR = valore massimo di RCR = 35% .

Se ipotizziamo che il rapporto $\frac{RL}{RP}$ sia una variabile aleatoria di tipo Gamma , calcolandone media e varianza , è possibile risalire alla sua distribuzione di probabilità . Posti i limiti di RCR , in accordo con la formula 1.A. , al variare di $\frac{RL}{RP}$, varieranno , in modo inversamente proporzionale , le commissioni .

Può verificarsi , inoltre , che il riassicuratore non accetti che parte di quanto richiesto dalla cedente , pertanto quest'ultima provvederà a piazzare , con riassicurazione facoltativa o con altro trattato , la parte non ancora accettata . Generalmente , nel caso delle riassicurazioni proporzionali , appunto , i livelli massimi di accettazione del riassicuratore sono misurati in multipli interi dei pieni . Per fissare le idee e con riferimento ad un certo rischio , sia V il valore assicurato (o il massimale) e C il pieno conservato dall'assicuratore . Se $C< V$ sarà $V = nC + S$, con n intero e $S < C$ e l'assicuratore chiederà la copertura dell'importo $(n-1)C + S$. Un primo trattato con un riassicuratore potrà garantire la copertura di m pieni ($m < n$) . Nel caso siano coperti $m< n-1$ pieni , rimane scoperto l'importo $(n-m-1)C + S$ che sarà riassicurato con un "trattato di secondo eccedente" (o , a seconda del caso , con più trattati di secondo , terzo eccedente) .

Analizziamo ora i casi 1) e 2) separatamente .

1.2.1 Il trattato quota globale ("quota share").

Il trattato quota è un accordo nel quale la compagnia cedente si obbliga a cedere ed il riassicuratore si obbliga ad accettare una proporzione prefissata di ogni rischio originariamente sottoscritto dalla cedente . Il riassicuratore condivide ("Obbligo di seguire il destino") proporzionalmente tutti i sinistri e riceve la stessa proporzione dei premi meno le commissioni .

A titolo di esemplificazione numerica , supponiamo , ad esempio , che una compagnia decida di stipulare un trattato quota che copra tutte le sue sottoscrizioni nel ramo incendio , conservando il 20% di ogni rischio e che il limite monetario per singolo rischio , (massimale garantito o somma assicurata), previsto dal trattato, sia di 800 milioni .

Secondo la 1.3 avremo che il pieno di conservazione è pari a :

$a\ M_i = a \cdot \max(\tilde{Z}_h^{(i)}; M_i) = 0.2 \cdot 800$ (milioni)

pertanto l'impegno del riassicuratore sarà pari a :

$(1\text{-}a)\ \tilde{Z}_h^{(i)} = 0.8 \cdot \tilde{Z}_h^{(i)} = 80\% \cdot \tilde{Z}_h^{(i)}$. dove $\tilde{Z}_h^{(i)} \leq M_i$

Quest'ultimo riceverà pertanto l'80% dei premi (meno le commissioni) e , in base alla 1.1 , dovrà pagare

$$1\text{-}\tilde{\Gamma} = 1\text{-}\sum_{i=1}^{n}\tilde{\Gamma}_i = 1\text{-}a \sum_{i=1}^{n}\tilde{X}_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{h=0}^{\tilde{N}_i}(1-a)\,\tilde{Z}_h^{(i)} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{h=0}^{\tilde{N}_i}0.8\,\tilde{Z}_h^{(i)}$$

cioè l'80% di tutti i sinistri che colpiranno i rischi ceduti al trattato .

Supponiamo inoltre che il riassicuratore corrisponda alla cedente una commissione pari al 25% dei premi ceduti .

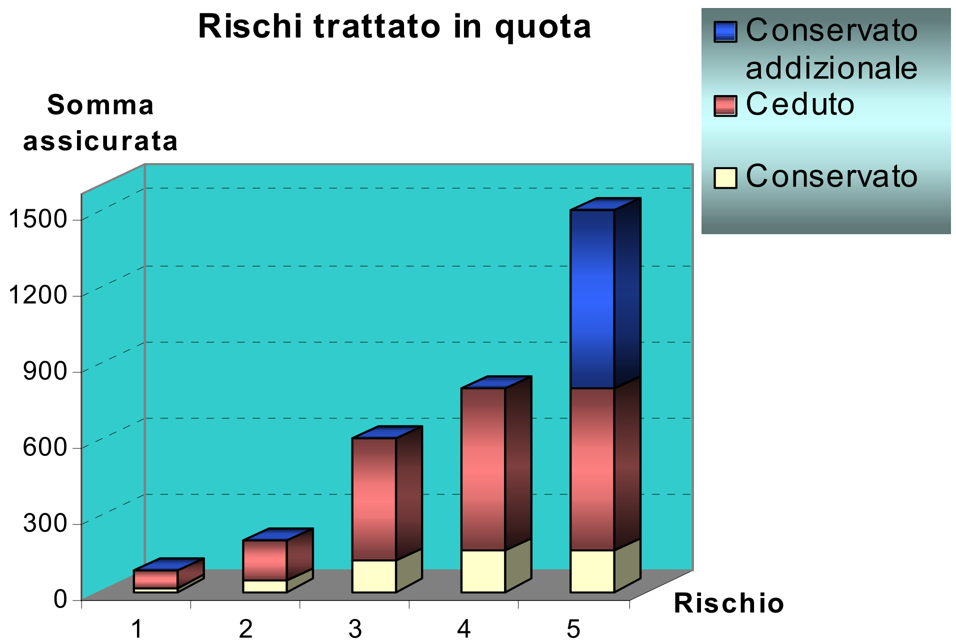
Illustriamo quanto detto , nelle seguenti tabelle :

tabella 1.A

Ramo	incendio
Limite monetario per rischio	800 milioni
Conservato cedente	20%
Ceduto ai riassicuratori	80%
Commissione riconosciuta alla cedente	25%

tabella 1.B

Rischio	**Somma assicurata**	**Conservato**	**Ceduto**	**Conservato addizionale**
1	80	16	64	0
2	200	40	160	0
3	600	120	480	0
4	800	160	640	0
5	1500	160	640	700

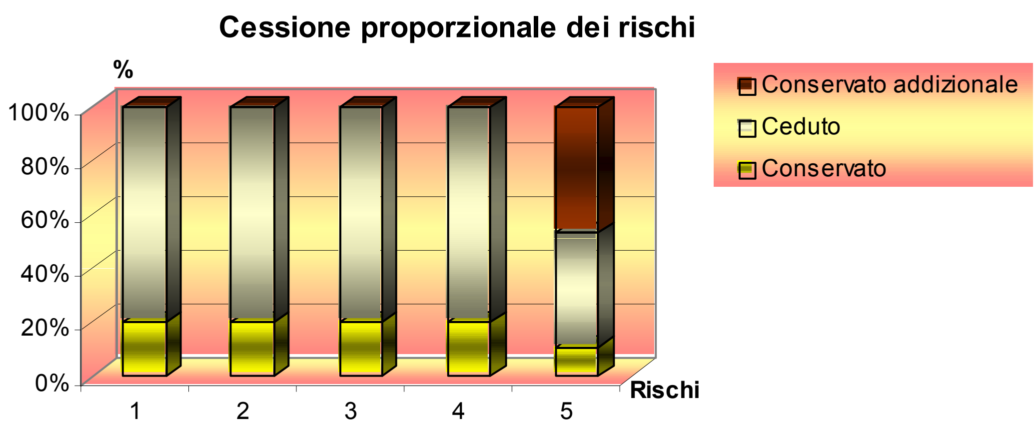


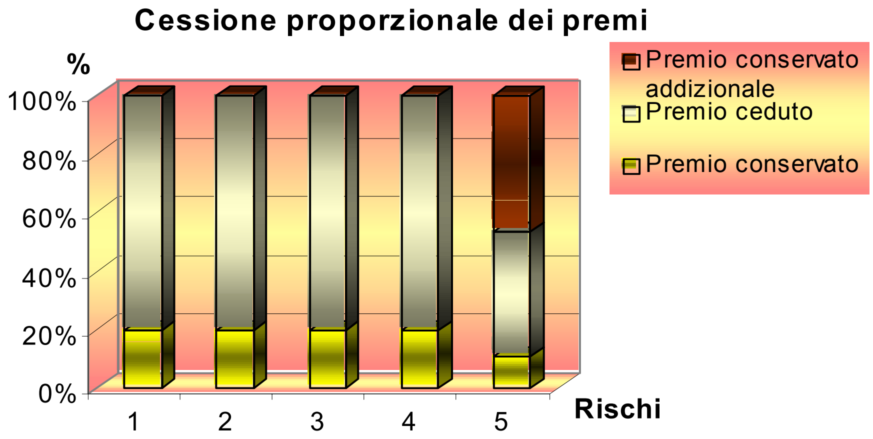
Risulta evidente che il rischio numero 5 supera il limite massimo previsto dal contratto . Pertanto , la parte di questo rischio eccedente di

700 , non appartiene al trattato in quota e , perciò , dovrà allora essere riassicurata con un altro contratto o ceduta ad un altro riassicuratore in via facoltativa , o , infine , essere conservata dalla cedente in aggiunta alla sua normale conservazione (conservazione addizionale).
Osserviamo ora cosa succede ai premi relativi ai rischi prima indicati :
tabella 1.C

Rischio	Premio originale	Premio conservato	Premio Ceduto	Premio Conservato addizionale	Commissioni sul ceduto
1	8	1,6	6,4	0	1,6
2	17	3,4	13,6	0	3,4
3	54	10,8	43,2	0	10,8
4	65	13,0	52,0	0	13,0
5	150	16,0	64,0	70	16,0

Per la regola di cessione proporzionale , anche i premi e quindi le commissioni verranno ripartiti proporzionalmente come i limiti assicurati . Ad esempio , nel rischio numero 5 , il premio conservato è dato da 160/1500 moltiplicato per 150 pct . E’ evidente che le commissioni vanno detratte dai premi lordi , che diventano così premi ceduti netti .
Graficamente:





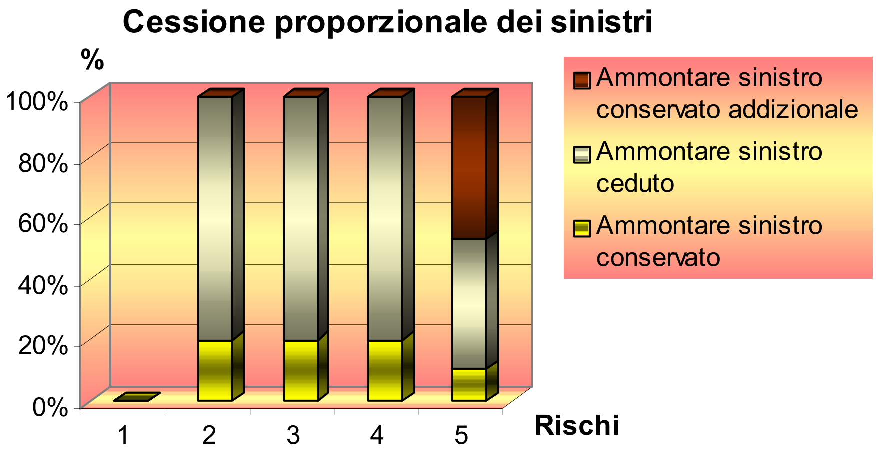
Facciamo ora un esempio relativo ai sinistri che colpiscono i rischi analizzati .

Tabella 1.D

Rischio	Ammontare sinistro	Ammontare sinistro conservato	Ammontare sinistro ceduto	Ammontare sinistro conservato addizionale
1	0	0	0	0
2	5	1	4	0
3	10	2	8	0
4	100	20	80	0
5	1200	128	512	560

Sul rischio numero 5 , la parte del sinistro a carico del riassicuratore è la risultante dal rapporto tra l'importo del sinistro (1200) e la percentuale assunta dal riassicuratore (640/1500) .

Graficamente :



Analizziamo , ora , i vantaggi e gli svantaggi dell'uso del trattato della riassicurazione in quota :

vantaggi per la compagnia cedente :

- semplicità operativa . Con poco lavoro amministrativo il trattato quota permette alla cedente di sottoscrivere e riassicurare automaticamente tutti i rischi fino ad un limite prefissato , (nel nostro caso 800 milioni), e , contemporaneamente , di sopportare una esposizione massima inferiore a tale limite , nel nostro caso pari a 160 milioni per rischio ;
- con il trattato quota la cedente raggiunge lo scopo di aumentare la propria capacità di sottoscrizione ;
- dato che questo trattato offre ai riassicuratori uno "spread" migliore degli affari , senza antiselezione , e che di solito produce più utili degli altri trattati proporzionali , la cedente , otterrà commissioni più alte che con altri tipi di trattato .

svantaggi per la compagnia cedente :

- la cedente non può variare la sua conservazione per un rischio particolare e , quindi , cede , indistintamente , premi su rischi piccoli che potrebbe , tranquillamente , conservare per intero ;

- la dimensione dei rischi conservati non è omogenea , in quanto la cedente conserva una percentuale fissa di tutti i rischi sottoscritti , che sappiamo essere di varie dimensioni . Quindi la cedente non ha migliorato l'equilibrio del suo portafoglio .

vantaggi per il riassicuratore :

- il riassicuratore partecipa , senza antiselezione , agli affari sottoscritti dalla compagnia cedente , in misura maggiore rispetto agli altri tipi di trattato , ricevendo appunto , indistintamente , una stessa quota di ogni singolo rischio ;
- Il riassicuratore ottiene una quota potenziale di utili maggiore rispetto agli altri tipi di trattato .

svantaggi per il riassicuratore :

- commissioni generalmente più alte che in altri tipi di trattato .

Il trattato in quota è lo strumento riassicurativo che meglio si presta alle nuove compagnie cedenti o a quelle che inizino ad operare in un nuovo ramo assicurativo .Tale trattato , inoltre , essendo quello con il maggior volume di premi ceduti , garantisce alla cedente un incremento del suo tasso di solvibilità(3) , maggiore rispetto agli altri tipi di trattato .

Nel seguito approfondiremo tale argomento .

3)Uno degli indici usati per controllare la solidità di una compagnia di assicurazione è la misurazione della sua solvibilità . Essa viene calcolata dalla percentuale data dal capitale più riserve libere rispetto ai premi netti (premi netti =premi lordi – premi ceduti in riassicurazione)

1.2.2. Il trattato per eccedente di somma ("surplus") .

Come abbiamo già constatato , uno degli svantaggi del trattato quota è che non migliora l'equilibrio del portafoglio conservato , in quanto essa conserva una percentuale fissa di tutti i rischi che possono essere di varie dimensioni .Nel caso di un trattato per eccedente di somma , invece , la cedente fissa un pieno di conservazione , cioè l'importo massimo che vuole conservare per ogni singolo rischio . Generalmente , in questo tipo di trattato , come è già stato accennato , i livelli massimi di accettazione (capacità) del riassicuratore sono misurati in multipli interi dei pieni di conservazione . Per fissare le idee , con riferimento agli n rischi in portafoglio , e secondo la 1.4, sia $a_i M_i = M$ (con a=1 e M_i=M per i=1,2,…,n) il pieno conservato dall'assicuratore per ciascun rischio e V il valore assicurato (o il massimale) . Se M< V sarà V = nM + S , con n intero e S < M e l'assicuratore chiederà la copertura dell'importo (n-1)M + S . Un primo trattato con un riassicuratore potrà garantire la copertura di m pieni (m<n) . Nel caso siano coperti m< n-1 pieni , rimane scoperto l'importo (n-m-1)C + S che sarà riassicurato con un "trattato di secondo eccedente" (o , a seconda del caso , con più trattati di secondo , terzo eccedente) o in via facoltativa .

Sulla scorta di quanto detto , avremo che i rischi , di importo inferiore o uguale a M , sono interamente conservati , mentre quelli di importo superiore , per la parte di rischio che eccede il limite di conservazione , nel nostro caso V-M , verranno ceduti in riassicurazione . Per la regola di cessione proporzionale , i premi ceduti sono in proporzione del rischio ceduto (V-M) .

A titolo di esemplificazione numerica , supponiamo che la compagnia cedente stabilisca un pieno di conservazione pari a 200 milioni e che la capacità del riassicuratore sia pari a 800 milioni , cioè 4 volte il pieno di conservazione .Pertanto per quei rischi inferiori o uguali a 200 milioni , il riassicuratore non riceverà alcunché , né , a maggior ragione risponderà , in alcun modo , dei sinistri che colpiranno tali rischi .

Per la regola di cessione proporzionale avremo che :

a) per i rischi fino a 500 milioni , il riassicuratore riceverà il 60% dei premi (meno le commissioni) e dovrà rispondere , per la medesima proporzione (60%) , al pagamento di eventuali sinistri relativi a tali rischi ;

b) per i rischi fino a 1 miliardo , il riassicuratore riceverà l'80% dei premi (meno le commissioni) e dovrà rispondere , per la medesima proporzione , al pagamento di eventuali sinistri relativi a tali rischi ;

c) per i rischi fino a 2 miliardi il riassicuratore riceverà il 40% dei premi (meno le commissioni) e dovrà rispondere , per la medesima proporzione , (40%), al pagamento di eventuali sinistri relativi a tali rischi .

Come nel trattato in quota , quel che supera la capacità del trattato , o viene conservato (conservato addizionale), o è riassicurato con un "trattato di secondo eccedente" (o , a seconda del caso , con più trattati di secondo , terzo eccedente) , o in via facoltativa .

Analizziamo , ora , i vantaggi e gli svantaggi dell'uso del trattato per eccedente di somma :

<u>vantaggi per la compagnia cedente</u> :

- la cedente conserva un massimale fisso di ogni singolo rischio , anziché una quota fissa come nel trattato in quota , pertanto il portafoglio che conserva è omogeneo ed equilibrato ;
- conservando in ammontare maggiore di rischi piccoli , (generalmente i migliori), ed un ammontare minore di rischi grandi , (generalmente

i peggiori), la cedente conserva una potenzialità di profitto maggiore di quanto ne ceda al riassicuratore .

svantaggi per la compagnia cedente :

- il contratto in eccedente è più complesso da amministrare , dato che bisogna effettuare un calcolo specifico per ogni rischio da riassicurare e per ogni sinistro da recuperare ;
- la commissione è generalmente più bassa rispetto a quella del trattato in quota .

vantaggi per il riassicuratore :

- l'unico vantaggio per il riassicuratore è rappresentato dal fatto che l'ammontare delle commissioni riconosciute alla cedente sono inferiori a quelle del trattato in quota .

svantaggi per il riassicuratore :

- il riassicuratore riceve un ammontare di rischi grandi (generalmente i peggiori) , riassicurando pertanto un ammontare maggiore di rischi con punta molto elevata (rischi di punta) , dato che la cedente conserva in maggior parte o interamente i rischi più piccoli ;
- l'ammontare dei premi totali che il riassicuratore riceve nel trattato eccedente è molto inferiore rispetto all'ammontare che riceve nel trattato in quota e, solitamente , anche inferiore al limite assicurato .

I motivi principali che possono spingere la cedente a riassicurarsi con questo tipo di trattato sono rappresentati dal fatto di poter aumentare la propria capacità di sottoscrizione , e , grazie alle provvigioni , di poter ottenere una stabilizzazione dei risultati finanziari . Tale trattato , inoltre , è utilizzato , per lo più , nelle coperture di proprietà di beni , raramente negli altri tipi di assicurazione .

1.3 Riassicurazione non proporzionale .

Premessa. Ricordando che la riassicurazione non proporzionale prevede una ripartizione del danno , (e non del rischio), e che non esiste un rapporto diretto tra premi ricevuti in cessione e rimborsi alla cedente , introduciamo il discorso , riprendendo in considerazione la formula (1). Consideriamo pertanto l'impegno aleatorio dell'assicuratore all'atto dell'assunzione del rischio (contratto) i-esimo :

$$\tilde{X}_i = \sum_{h=0}^{\tilde{N}_i} \tilde{Z}_h^{(i)} \qquad i=1,2,\ldots,n$$

dove gli $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \ldots, \tilde{X}_n$, ricordiamo , sono gli impegni aleatori relativi agli n contratti che figurano nel portafoglio della cedente , $\tilde{N}_i$ è il numero aleatorio di sinistri che possono colpire nel corso dell'anno il rischio i-esimo e $\tilde{Z}_h$ è il risarcimento aleatorio del sinistro h-esimo . Consideriamo $\tilde{\Gamma}_i$ l'impegno aleatorio conservato dalla cedente sul totale impegno $\tilde{X}_i$, e $\tilde{X}_i - \tilde{\Gamma}_i$ l'impegno accettato dal riassicuratore per quel rischio . Come nel caso della riassicurazione proporzionale , indicheremo con $\tilde{\Gamma}$ l'impegno conservato dall'assicuratore sull'intero portafoglio . Nel caso di riassicurazioni non proporzionali avremo :

1) riassicurazione per eccesso di sinistro ("excess of loss" XL)

$$\tilde{\Gamma} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\Gamma}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{h=0}^{\tilde{N}_i} \min(\tilde{Z}_h^{(i)}; L_i) \right) \qquad \textbf{(1.5)}$$

dove L_i è un importo certo detto *priorità* ;

2) riassicurazione per eccesso di perdita ("stop loss")

$$\tilde{\Gamma} = \min\left(\sum_{i=1}^{n} \tilde{X}_i , L \right) \qquad \textbf{(1.6)};$$

dove L ha lo stesso significato di L_i

3) riassicurazione per eccesso di danni aggregato ("aggregate XL") che

si differenzia dal precedente per il fatto che l'ammontare riassicurato viene indicato con un limite monetario , anziché percentuale , in accordo al loss ratio . Per tale motivo , sceglierò di trattare solo uno dei due casi , e cioè il caso 2) ;

4) riassicurazione eccesso danni globale (umbrella XL)

$$\tilde{\Gamma} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\Gamma}_i = \min\left[\left(\sum_{j=1}^{K} \min\left(\sum_{i=1}^{n} \tilde{X}_i^{(j)}, L^{(j)}\right)\right); L''\right] \qquad \textbf{(1.7)};$$

dove L'' è la priorità del suddetto trattato eccesso danni globale e $L^{(j)}$ è la priorità relativa al j-esimo ramo .

Quest'ultima forma riassicurativa rappresenta una sofisticata variazione delle ultime due precedenti e copre il sinistro conservato netto globale , causato dallo stesso evento che colpisce più rami .

Gli importi certi L_i , L e L'', chiamati "priorità", hanno il significato dei pieni di conservazione "M" , incontrati nel caso della riassicurazione proporzionale , pertanto rappresentano il limite oltre il quale entra in vigore il trattato . Oltre alle forme fondamentali citate , possono , come già si è detto , venir praticate forme di assicurazioni "miste". Uno stesso portafoglio può , ad esempio , venire riassicurato in quota individuale e altresì , quando il riassicuratore non si accontenti di ricevere quanto di sua competenza secondo tale modalità , in quota globale . Viene dunque ceduta al riassicuratore una determinata quota di tutti i rischi e , sulla parte residua , l'assicuratore trattiene i propri "pieni", riassicurando i relativi eccedenti . Vedremo nel seguito alcuni esempi .

La determinazione razionale delle priorità , così come quella dei pieni di conservazione (nel caso delle riassicurazioni proporzionali), costituisce, naturalmente, l'aspetto più delicato , dal punto di vista tecnico attuariale, dell'operazione di riassicurazione , al quale dedicheremo ampio spazio nei prossimi paragrafi .

Una volta fissate le priorità, la cedente trasferirà al riassicuratore il rischio o i rischi da lei non coperti , corrispondendo , diversamente dal caso proporzionale , premi appositamente calcolati dal riassicuratore. Anche in questo caso il riassicuratore potrebbe non accettare interamente quanto richiesto dalla cedente , pertanto quest'ultima , provvederà a piazzare con riassicurazione facoltativa o con altro trattato la parte non ancora accettata . Pensiamo , ad esempio , ad un trattato XL , dove è fissata una *c.d. portata* in accordo alla massima esposizione del riassicuratore nei confronti del singolo sinistro . Se il massimo risarcimento per sinistro previsto nel contratto di assicurazione è M e la priorità concordata con il riassicuratore è L , la portata è usualmente pari a L-M , ma potrebbe essere inferiore e pari a L'-L , con L' < M , nel qual caso l'assicuratore chiederebbe altrove l'ulteriore copertura in eccesso sinistro , con priorità L' (e portata M- L') . Nel caso , infine , di garanzia illimitata o per M molto elevato , la stessa cedente fraziona la copertura in eccesso alla (prima) priorità L in più fasce (layers) operanti in successione e interessanti gli interventi di più assicuratori .
Prima di analizzare separatamente i casi sopra citati , è opportuno fornire una spiegazione sulla modalità di calcolo del premio di riassicurazione non proporzionale , non essendo questo logicamente deducibile come nel caso proporzionale .

1.3.1 Modalità di calcolo del premio riassicurativo .

Metodo del "burning cost" .

Nella pratica dei mercati assicurativi il calcolo del premio del riassicuratore di eccesso sinistro è frequentemente ricondotto alla valutazione del cosiddetto *burning cost* .Con tale nome viene indicato l'importo rimasto a carico del riassicuratore , per la copertura dei sinistri relativa ad un anno di trattato .

Siano allora $C_1, C_2, \ldots C_k$ gli esborsi del riassicuratore nei K anni precedenti l'esercizio attuale e $P_1^T, P_2^T, \ldots, P_K^T$ i premi di tariffa incassati dalla cedente in quegli anni (usualmente K è pari a 3 o a 5) . Nell'ipotesi che non sia cambiato il tipo di rischi (e di copertura prevista dal trattato in essere) , il tasso di burning cost del riassicuratore per il prossimo anno è valutato dalla media :

$$\tau = \frac{\sum_{i=1}^{K} C_i}{\sum_{i=1}^{K} P_i^T} \qquad \text{o , in alternativa dalla} \qquad \tau^* = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{K} \frac{C_i}{P_i^T} \qquad \textbf{(1.8)}$$

Il tasso τ così calcolato , che stima un tasso di premio , viene poi gravato da un caricamento (per spese e di sicurezza) fornendo un tasso $\underline{\tau} = \tau(1+\eta)$ che , applicato ad una stima del monte premi dell'esercizio attuale , t , della cedente , EPI_t, (expected premium income) , fornisce il premio del riassicuratore per la copertura dichiarata in trattato. L'ordine di grandezza del coefficiente η è usualmente pari al 45% . In sintesi, il premio trasferito al riassicuratore , sarà :

$$P_t^R = EPI_t \cdot \tau(1+\eta) \;, \qquad \textbf{(1.9)}$$

oppure la cedente corrisponderà un premio minimo , P_t^{MIN}, generalmente pari a $0.8 \cdot P_t^R$ e , alla fine dell'anno t , noti ormai i premi incassati P_t , la stessa provvederà ad una sorta di conguaglio , calcolando la differenza tra l'importo dei premi effettivamente incassati (nell'esercizio di riferimento) moltiplicato per il tasso $\underline{\tau}$ e il premio minimo , cioè :

$$\Delta P_t^R = P_t \cdot \underline{\tau} - P_t^{MIN} \qquad \textbf{(1.10)}$$

Se ΔP_t^R è positivo , l'assicuratore dovrà rimborsare la differenza al riassicuratore , viceversa nel caso contrario , a meno che non sia disposto diversamente dalle clausole del trattato . Osserviamo che τ sarebbe propriamente un tasso di premio equo , se i premi della cedente fossero premi equi .
Anche per il calcolo del premio di riassicurazione stop-loss (analogamente aggregate XL) e umbrella XL , possono adottarsi metodi del tipo indicato per la riassicurazione nella forma excess of loss . In tutte queste forme non proporzionali , sono previste poi limitazioni superiori all'intervento del riassicuratore . In pratica , una copertura stop-loss può prevedere , ad esempio , che il riassicuratore copra l'ammontare dei danni che superi il 90% del totale dei premi dell'anno , sino ad un limite , però , del 120% e con un esposizione massima di S unità monetarie .
La forma di riassicurazione stop-loss (e analogamente aggregate XL) è , evidentemente , la più appetita dall'assicuratore che vedrebbe coperti dal riassicuratore lo scostamento per eccesso dalla sua previsione del rapporto sinistri a premi e , con quella copertura , manterrebbe globalmente l'equilibrio desiderato . La forma non è , però , altrettanto gradita dal riassicuratore per la già segnalata difficoltà di determinare in modo adeguato il premio (attesa la grande variabilità della sua stima campionaria) e anche perché l'assicuratore , pur di introitare i premi , potrebbe non curare oculatamente le assunzioni dei singoli rischi . Da qui la preferenza per una forma di stop-loss modificato come quella che affronteremo nel paragrafo 1.3.3 .
Nelle forme di riassicurazione non proporzionale , occorre poi tener conto delle conseguenze dei fenomeni legati all'inflazione , per colpa dei

quali l'ammontare del singolo sinistro o del globale cumulo dei sinistri può superare , al momento della liquidazione , la priorità fissata alla stipula del trattato . Tale evenienza si manifesta se la liquidazione è notevolmente differita nel tempo , è chiamata allora in causa la c.d. clausola di stabilità in forza della quale l'assicuratore è tenuto ad indicizzare il livello della sua ritenzione (priorità) adeguandolo nel tempo al potere d'acquisto della moneta . Non è inusuale , inoltre , che la compagnia cedente ricorra ai servizi di un intermediario di riassicurazione per collocare sul mercato riassicurativi i suoi trattati . La remunerazione di questo servizio viene chiamata "brokerage" ed è pagata dai riassicuratori come una percentuale fissa dei premi ceduti al trattato . Consideriamo ora , un altro importante metodo di calcolo del premio , probabilistico anziché statistico .

Metodo di Pareto .

Tale metodo si basa sull'assunzione che la distribuzione del singolo sinistro sia (almeno in corrispondenza alla "coda") una distribuzione di Pareto (pertanto può essere utilizzato solo in presenza di una copertura riassicurativa XL).In particolare , alla chiusura del periodo contrattuale , i sinistri di maggiore entità , generalmente riferiti ai 3/5 anni precedenti , opportunamente rivalutati secondo il tasso inflazionistico, sono registrati dall'assicuratore e classificati in ordine decrescente dell'ammontare di risarcimento . Nell'ipotesi Il numero di sinistri da registrare è fissato all'inizio del periodo .Focalizziamo il discorso con la seguente descrizione formale : siano F e f rispettivamente la portata e la priorità del trattato , X_i i risarcimenti relativi agli n sinistri registrati e sia X_o il sinistro più piccolo rilevato , allora sia

$$P\{\tilde{X} \le f\} = 1 - \left(\frac{X_0}{f}\right)^{\alpha} \qquad \text{con} \qquad \alpha = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \log\left(\frac{X_i}{X_0}\right)} \qquad \textbf{(1.11)}$$

la probabilità di avere un sinistro inferiore o uguale alla priorità .

Per stimare il costo dei sinistri a carico del riassicuratore (C), occorrerà dapprima calcolare il numero dei sinistri maggiori della priorità ($n_{(>f)}$) e moltiplicarli per l'importo dei sinistri che superano la priorità ($S_{(>f)}$), fino al raggiungimento della portata , formulisticamente si avrà :

$$C = n_{(>f)} \cdot S_{(>f)} \qquad \text{dove :} \qquad \textbf{(1.12)}$$

$n_{(>f)} = n_{(\ge X_0)} \cdot \Pr\{\tilde{X} \ge f\} = n_{(\ge X_0)} \cdot \left(\frac{X_0}{f}\right)^{\alpha}$, cioè il numero dei sinistri maggiori della priorità è uguale al numero di sinistri maggiori di X_0 moltiplicato per la probabilità di avere un sinistro maggiore della priorità;

$$S_{(>f)} = F \cdot \varphi\left(\frac{F+f}{f}\right) = F \cdot \varphi\ (z) = F \cdot \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha - 1} \cdot \dfrac{1-(z)^{1-\alpha}}{z-1} & \text{se } \alpha \neq 1 \\ \\ \dfrac{1}{z-1} \cdot \ln z & \text{se } \alpha = 1 \end{cases} \qquad \textbf{(1.13)}$$

dove , per semplicità di scrittura , $\dfrac{F+f}{f} = z$.

Non ci soffermeremo sulla spiegazione di queste formule , in quanto , per i nostri scopi , non presenta particolare importanza . Vedremo , nel seguito , alcune applicazioni delle suddette formule .

Tornando alla modalità del calcolo del premio , come nel metodo del "burning cost" , si procede con il calcolare il tasso di premio , secondo la formula 1.8 , considerando pertanto , anche in questo caso , i premi di tariffa incassati dalla cedente in quegli anni , adeguatamente rivalutati. Il tasso trovato , al fine di calcolare il premio del riassicuratore per la copertura dichiarata in trattato , dovrà quindi essere applicato ad una stima del monte premi dell'esercizio attuale , t , della cedente , EPI_t. Valgono le stesse considerazioni del metodo del "burning cost".

1.3.2 Riassicurazione per eccesso di singolo sinistro ("excess of loss" XL) .

Il trattato per eccesso di singolo sinistro è un accordo tra il riassicurato (cedente) e riassicuratore nel quale , ricordiamo , (in accordo con la formula (1)) , il riassicuratore interviene nei riguardi del rischio i-esimo solo se il risarcimento del generico h-esimo sinistro, $(h=1,2,\dots N_i)$, supera l'importo L_i . Generalmente tale intervento è limitato , in quanto viene fissata una *c.d. portata* in accordo alla massima esposizione del riassicuratore nei confronti del singolo sinistro . Essendo l'attenzione focalizzata sul singolo sinistro , il suddetto trattato è una forma di riassicurazione individuale .

A titolo di esemplificazione numerica supponiamo che il riassicurato ponga l'ammontare L_i , (priorità), pari a 100 , il massimo risarcimento per sinistro , M , previsto nel contratto di assicurazione pari a 300 e la portata pari a 200 (M- L_i) . Pertanto, in accordo con la simbologia già adottata nei paragrafi precedenti ,secondo (la 1.5) , avremo che l'impegno aleatorio del riassicurato sarà

$$\tilde{\Gamma} = \sum_{i=1}^{n}\tilde{\Gamma}_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{h=0}^{\tilde{N}_i}\min(\tilde{Z}_h^{(i)};L_i)\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{h=0}^{\tilde{N}_i}\min(\tilde{Z}_h^{(i)};100(\text{milioni}))\right)$$

Può accadere , come già accennato , che la portata sia inferiore a M- L_i , 200 nel nostro caso , e pari a L_i'-L_i , con $L_i' < M$. In questo caso l'assicuratore dovrà chiedere altrove l'ulteriore copertura in eccesso sinistro , con priorità L_i' (e portata M- L_i') . Nel caso, infine , di garanzia illimitata o per M molto elevato , la stessa cedente fraziona la copertura in eccesso alla (prima) priorità L_i in più fasce (layers) operanti in successione e interessanti gli interventi di più assicuratori .

Le coperture operative possono essere su base "per rischio" o per "evento" . Nel primo caso l'intervento del riassicuratore è condizionato dall'entità di un sinistro che colpisce un singolo rischio . Questo tipo di trattato viene utilizzato principalmente per le coperture di tipo "property", di rado per quelle di tipo "casualty" . Viceversa nel secondo caso , dove l'intervento del riassicuratore è condizionato dall'entità di uno o più sinistri , generati da un evento singolo . Si pensi , ad esempio , nel ramo incendio , alla copertura di un grattacielo : i proprietari , quindi gli assicurati , e con essi i rischi , possono essere più di uno . Se il grattacielo dovesse bruciare , causerà , "n" , numero di sinistri per "n" numero di rischi . Uno dei motivi che potrebbe spingere l'assicuratore a ricorrere a questo trattato , oltre a voler limitare la sua esposizione aleatoria , è rappresentato dal fatto di voler ridurre il cumulo del costo sinistri a suo carico .

Come per ogni trattato , esaminiamo quelli che possono essere i vantaggi e gli svantaggi per la compagnia cedente e per il riassicuratore .

Vantaggi per la compagnia cedente :

- la cedente conserva , per ogni singolo sinistro , un ammontare adeguato per il suo equilibrio del portafoglio , riducendone quindi la variabilità ;

- la cedente attutisce le fluttuazioni dei suoi risultati economici e finanziari , rendendo meno probabile la sua insolvibilità .

Svantaggi per la compagnia cedente :

- tale trattato , come nel caso di quello per eccedente , è laborioso da gestire perché occorre prendere in considerazione ogni singolo sinistro;
- all'aumentare della priorità aumenta il premio richiesto dal riassicuratore , con la conseguenza di un sacrificio , sempre maggiore, degli utili attesi .

Vantaggi per il riassicuratore :

- il riassicuratore chiederà un caricamento di sicurezza tanto maggiore , quanto più lunga sarà la coda della distribuzione della variabile aleatoria "costo singolo sinistro" a suo carico , pertanto , potenzialmente , avrà un utile atteso elevato .

Svantaggi per il riassicuratore :

- il riassicuratore ha , a suo carico , la coda della distribuzione della variabile aleatoria "costo singolo sinistro" a suo carico , pertanto tale trattato risulta essere più rischioso , dal punto di vista della solvibilità, di quella visto nel caso della riassicurazione proporzionale .

1.3.3 Riassicurazione per eccesso di perdita ("stop loss").

La copertura stop-loss , anche conosciuta come eccesso del rapporto sinistri a premi , copre il riassicurato contro l'eventualità che la globalità dei suoi sinistri rispetto ai premi , in una determinata classe di affari , superi una percentuale prefissata . Il riassicuratore , pertanto , non è chiamato a pagare alcun sinistro , fino a che i sinistri globali dell'anno non eccedano una percentuale prefissata dei premi , cioè la priorità L .

Essendo l'attenzione focalizzata sulla globalità dei sinistri dell'anno (in rapporto ai premi) , il suddetto trattato è una forma di riassicurazione globale . La portata della copertura riassicurativi è anch'essa espressa in rapporto sinistri a premi . Le coperture stop-loss sono di sovente usate per proteggere il rischio grandine . E' difficile , in questa classe di affari, stabilire quale sia un rischio singolo , inoltre gli eventi assicurati sono normalmente di natura catastrofica irregolare , pertanto è ivi problematico usare altri tipi di riassicurazione non proporzionale .Una copertura stop-loss potrebbe essere espressa come segue : "il riassicuratore paga un ammontare in eccesso all'80% del rapporto sinistri/premi fino al 120% di tale rapporto" . Il riassicuratore solitamente fissa un limite monetario , oltre il quale la copertura riassicurativa non opera . Questo previene il riassicurato dall'aumentare troppo il suo montepremi , aumentando , di conseguenza , anche l'esposizione del riassicuratore .

Pertanto, in accordo con la simbologia della (1) e della (1.6) ed essendo P la portata del trattato , avremo che l'impegno aleatorio del riassicurato sarà

$$\tilde{\Gamma} = \min\left(\sum_{i=1}^{n}\tilde{X}_i, L\right) + \max\left(0; \sum_{i=1}^{n}\tilde{X}_i - L\right) = \min\left(\sum_{i=1}^{n}\tilde{X}_i, 0.8\cdot\frac{\text{sinistri}}{\text{premi}}\right) +$$

$$\max\left(0; \sum_{i=1}^{n}\tilde{X}_i - P\right)$$, dove anche $\sum_{i=1}^{n}\tilde{X}_i$ è espresso in percentuale .

Come abbiamo precedentemente accennato , potrebbero essere preferite della forme di riassicurazione miste , a seconda della esigenze del riassicurato e del riassicuratore . Una forma mista particolarmente interessante è quella detta di "stop loss modificato". Sia $\tilde{X}$ l'impegno aleatorio globale del portafoglio dell' assicuratore . Vengono concordate una soglia "L" , pari ad un valore del loss ratio , e una percentuale "a" e , per effetto della riassicurazione , l'impegno conservato , $\tilde{\Gamma}$, è definito dalla seguente forma :

$$\tilde{\Gamma} = \begin{cases} \tilde{X} & \text{se } \tilde{X} \leq L \\ \\ L + a\,(\tilde{X} - L) & \text{se } \tilde{X} > L\,, \qquad 0 < a < 1 \end{cases} \qquad \textbf{(1.14)}$$

La forma è , dunque , una combinazione di quella stop-loss (a=0 , L≠0) e di quella di quota globale (L=0, a≠0) .

Per il riassicuratore questa forma mista è preferita a quella di stop-loss perché coinvolge l'impegno dell'assicuratore anche quando è superata la soglia L ed è preferita altresì alla forma globale perché evita gli interventi sui singoli sinistri .

Ritornando alla forma tradizionale del trattato stop-loss , esaminiamone i vantaggi e gli svantaggi dei due interlocutori coinvolti nel trattato .

Vantaggi per la compagnia cedente :

- la forma di riassicurazione stop-loss , come già accennato , è , evidentemente , la più appetita dall'assicuratore che vedrebbe coperti dal riassicuratore lo scostamento per eccesso dalla sua previsione del rapporto sinistri a premi ;
- con questa copertura , la cedente manterrebbe globalmente l'equilibrio desiderato , rendendo ancora meno probabile del caso precedente (excess of loss) la sua insolvibilità .
- tale trattato è meno laborioso da gestire , rispetto al precedente, perché , trattandosi di una forma di riassicurazione globale , non necessita di considerare ogni singolo sinistro;

Svantaggi per la compagnia cedente :

- come nel caso precedente , all'aumentare della priorità aumenta il premio richiesto dal riassicuratore , con la conseguenza di un sacrificio , sempre maggiore, degli utili attesi .

Vantaggi per il riassicuratore :

- il riassicuratore chiederà un caricamento di sicurezza tanto maggiore , quanto più elevata sarà la priorità del trattato , pertanto , potenzialmente , avrà un rilevante utile atteso .

Svantaggi per il riassicuratore :

- difficoltà di determinare in modo adeguato il premio , attesa la grande variabilità della sua stima campionaria , anche perché l'assicuratore , pur di introitare i premi , potrebbe non curare oculatamente le assunzioni dei singoli rischi .

1.3.4 Riassicurazione per eccesso di danni globale ("Umbrella XL").

Un assicuratore , in conseguenza di un evento di natura catastrofale (specialmente un sinistro che abbia ripercussione simultaneamente in vari rami assicurativi , pensiamo ad in terremoto) , può doversi confrontare con uno di questi fenomeni , o con una combinazione di questi :

a) il sinistro netto finale conservato eccede i limiti delle protezioni non proporzionali in corso , comprese quelle sulla ritenzione (conservato addizionale globale) ;
b) l'accumulo dei pieni di conservazione o delle priorità a carico del riassicurato eccede i limiti finanziari del riassicurato stesso .

Questi due fenomeni , separatamente o insieme , possono portare ad in aumento disatteso del sinistro netto a carico dell'assicuratore , non recuperabile nel programma di riassicurazione normale e per il quale l'assicuratore deve attingere dalle sue risorse finanziare . Lo scopo dell’eccesso danno globale è ,quindi , di proteggere il riassicurato contro il verificarsi di questa possibilità .

Per meglio chiarire il concetto , aiutiamoci con il seguente esempio[3] , semplificato dal fatto riguarderà soltanto l’ammontare netto conservato dal riassicurato nelle sue protezioni non proporzionali .

Esempio di una potenziale catastrofe naturale che coinvolga vari rami assicurativi (cifre in 000). In accordo con la simbologia adottata dalla (1) e dalla (1.7) , poniamo L" pari 10000000 e il limite-portata , P, a carico dei riassicuratori dell’eccesso danni globale pari a 55500000 .

Allora l’impegno aleatorio per il riassicurato sarà

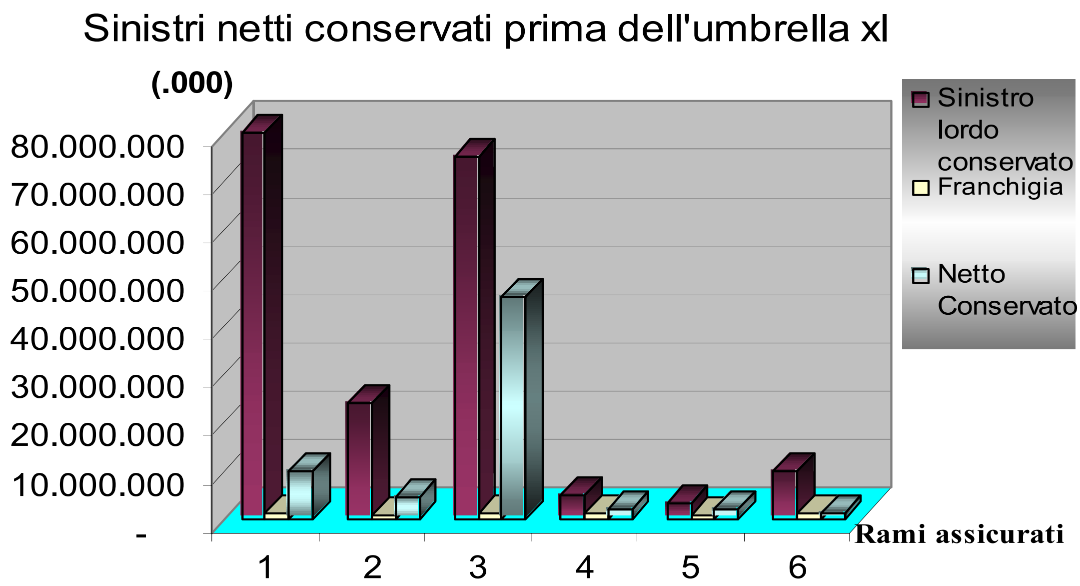
$$\tilde{\Gamma}=\sum_{i=1}^{n}\tilde{\Gamma}_i=\min\left[\left(\sum_{j=1}^{K}\min\left(\sum_{i=1}^{n}\tilde{X}_i^{(j)},L^{(j)}\right)\right);L''\right]+\max\left[0;\left(\sum_{j=1}^{K}\min\left(\sum_{i=1}^{n}\tilde{X}_i^{(j)},L^{(j)}\right)-P\right)\right]=$$

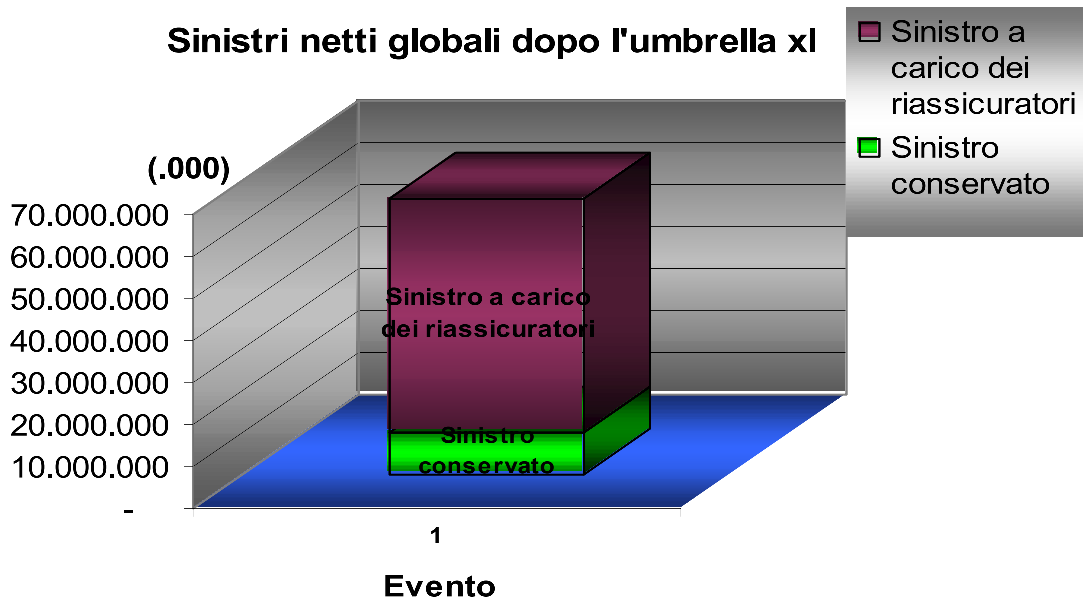
$$\min\left[\left(\sum_{j=1}^{K}\min\left(\sum_{i=1}^{n}\tilde{X}_i^{(j)},L^{(j)}\right)\right);10000000\right]+\max\left[0;\left(\sum_{j=1}^{K}\min\left(\sum_{i=1}^{n}\tilde{X}_i^{(j)},L^{(j)}\right)-55500000\right)\right]$$

dove $L^{(j)}$ varia a seconda del ramo j-esimo .

Visualizziamo i dati per mezzo della seguente tabella :

Ramo assicurativo	Sinistro lordo conservato	Protezione Aggregate XL (portata)	Specifica priorità	Sinistro netto conservato
1 incendio	80.000.000	70.000.000	1.000.000	10.000.000
2 tecnologici	24.000.000	19.500.000	500.000	4.500.000
3 elettronici	75.000.000	29.000.000	1.000.000	46.000.000
4 corpi	5.000.000	3.000.000	1.000.000	2.000.000
5 merci	3.000.000	1.000.000	500.000	2.000.000
6 infortuni	10.000.000	19.000.000	1.000.000	1.000.000
Totale	197.000.000		5.000.000	65.500.000
L"				10.000.000
A carico dei riassicuratori dell’eccesso danni globale				55.500.000
Sinistro netto conservato finale				10.000.000





4) Esempio tratto da : Giulio di Gropello (1996) ”Principi di tecnica riassicurativa” , Edizione LINT Trieste .

Per quanto riguarda i vantaggi e gli svantaggi di questa forma assicurativa , si possono fare le stesse considerazioni del precedente trattato stop-loss , con la sola differenza che in questo caso (umbrella XL) si ha un ulteriore miglioramento dell'equilibrio della cedente .

1.4 La riserva sinistri .

Premessa. La stima di questa riserva richiede l'impiego di molte risorse, in particolare l'elaborazione dell'informazione portata dall'esperienza del passato e , fondamentalmente , la capacità di formulare previsioni su grandezze economiche evolventisi dinamicamente in condizioni di incertezza (aleatorietà dell'inflazione, del reddito da investimenti, mutamenti nella legislazione,….).

Per contro, è manifesta l'importanza dell'accuratezza della stima . Una sottostima all'epoca di bilancio degli impegni futuri di risarcimento agli assicurati può mettere in crisi le gestioni future (comportando, tra l'altro, una sottostima del livello dei premi futuri che risentirebbe di un adeguamento in diminuzione). Una sopra-stima non è certo gradita agli azionisti e, d'altra parte, genera anch'essa perturbazioni alle gestioni future.

Passando ora all'aspetto operativo della questione occorre premettere che la riserva sinistri è originata da due distinti motivi. Essa si genera:

1) perché alla chiusura dell'esercizio , i sinistri denunciati e registrati dall'impresa nell'esercizio stesso o precedenti non sono stati ancora (completamente) pagati . La somma da pagare può essere precisata oppure tuttora non conosciuta (per effetto, ad esempio, del non ancora espresso verdetto della Magistratura) ;
2) perché alla chiusura dell'esercizio non appaiono registrati sinistri accaduti nell'esercizio stesso o, addirittura, in esercizi precedenti

(tardiva denuncia). Come già segnalato, i sinistri di tale tipo vengono designati con la sigla I.B.N.R. (incurred but not reported).

L'importanza relativa delle due cause originanti la necessità di appostare a riserva il risarcimento di un sinistro può variare notevolmente da caso a caso . Si osservi che per il riassicuratore di eccesso sinistro singolo l'obbligo, secondo il trattato, di intervento può manifestarsi ben dopo l'accadimento e la denuncia (all'assicuratore) del sinistro. Se lo stesso non è liquidato nell'esercizio, come avviene frequentemente e specialmente se l'entità del danno è rilevante, l'importo per il suo risarcimento può, trascorrendo il tempo, superare la priorità concordata, anche se all'atto della denuncia una prima stima lo collocava , invece, sotto la priorità e quindi totalmente a carico dell'assicuratore(4) .

Per l'assicuratore , invece , la tardiva denuncia di sinistro è , solitamente, limitata a pochi sinistri accaduti in prossimità della chiusura di esercizio. Non è infrequente , tuttavia , una diversa circostanza per rischi R.C.D. (si pensi alla responsabilità prodotti…) . Ne viene che la valutazione della riserva sinistri I.B.N.R. interessa soprattutto il riassicuratore e che per l'assicuratore diretto essa rappresenta , d'ordinario , un impegno relativamente modesto , rispetto a quello richiesto dalla valutazione della riserva sinistri già denunciati e registrati .

Per i sinistri già denunciati e registrati la valutazione della riserva può avvenire , polizza per polizza , aggiornandola , esercizio dopo esercizio , sino al momento del pagamento conclusivo . Per gli I.B.N.R. è usuale valutare preventivamente l'incidenza numerica media per esercizio e , sempre basandosi sull'esperienza passata , valutare altresì il loro costo medio di risarcimento . Soprattutto per portafogli molto numerosi si fa però ricorso , sempre più frequentemente , a metodi statistici più o meno sofisticati . Su uno di questi metodi ci soffermeremo con dettaglio nel

prossimo paragrafo , limitandoci qui a segnalare che a questi metodi fa tipicamente ricorso l'attuario quando , in sede di certificazione di bilancio , è chiamato a verificare la congruità delle risorse ivi appostate .
Gli attuari "non life" , al riguardo , hanno proposto vari modelli più o meno sofisticati e che la costruzione di metodi statistici è ancora oggetto di studio . Va subito osservato che l'impiego di un metodo è condizionato dal tipo e dall'entità di informazione disponibile ; la scelta poi di uno tra i metodi possibili è influenzata dalle particolarità del portafoglio (tipo di rischi , dimensioni , …).
Uno schema di riferimento per l'impostazione del problema in condizioni generali è il seguente .
Si stabilisce anzitutto una prevedibile durata massima del differimento del risarcimento (definitivo) dei sinistri . Tale durata , che indicheremo con t , è misurata in anni ed è caratteristica del portafoglio . A titolo orientativo , per rischi R.C.A. è usuale assumere $t = 8$ o 9 ; mentre per i rischi infortuni , trasporti e altri , seguono smontamenti più rapidi ($t < 4$ o 5). I sinistri già liquidati e quelli in sospeso (o,meglio , le denunce di sinistro non ancora definitivamente liquidate) vengono raggruppati per anno di denuncia , o , più propriamente detto , per anno di generazione , e l'osservazione statistica al 31/12 dell'anno υ (data di valutazione della riserva sinistri) riguarda la registrazione datata delle liquidazioni dei sinistri dall'anno υ e di quelle dei sinistri delle generazioni antecedenti (anni υ-1, υ-2,… υ-t,…).
Il numero di queste ultime generazioni è dunque non inferiore alla prevista durata massima del differimento della liquidazione.
Abitualmente , peraltro , vengono raggruppate nella generazione υ-t anche le denunce dei (relativamente pochi) sinistri precedenti non ancora

liquidati dopo t anni di differimento , si conviene di considerarli liquidati con risarcimento pari all'importo appostato a riserva .

Le osservazioni forniscono informazioni relative alle date , numero ed entità dei pagamenti (parziali o conclusivi) dei sinistri di ciascuna delle t+1 generazioni υ-t , υ-(t-1),..., υ-1, υ che , onde evitare il riferimento al particolare anno υ , vengono codificate rispettivamente con 0, 1,…,t.

Per esemplificare , se t = 4 e la valutazione della riserva dev'essere fatta il 31/12/2002, interessa prendere in esame la storia delle liquidazioni dei sinistri denunciati nel 1998 e precedentemente , generazione 0, registrando informazioni sui pagamenti fatti nel 1998 stesso , nel 1999 (differimento di un anno),…, nel 2002 differimento di 4 anni e , in maniera analoga , la storia delle liquidazioni dei sinistri denunciati nel 1999 , generazione 1 , nel 2000 , generazione 2 , …,nel 2002 , generazione t.

Precisiamo ora il discorso segnalando che le informazioni usualmente registrate riguardano :

a) il numero , n_i , dei sinistri imputabili alle varie generazioni (i=0,1,2,…t) ,

   e in alternativa o congiuntamente ,

a') l'entità globale ,d_i, degli importi denunciati a carico dei sinistri della singola generazione (i=0,1,2,…t) ,

b) gli importi ,P_{ij} , dei risarcimenti di sinistri della generazione i (i=0,1,2,…t) , effettuati con j anni di differimento (j = 0,1,2,…t-i) , ovvero nell'anno di pagamento i+j,

   oppure in alternativa , sostanzialmente equivalente , ma più adatta (a volte) per le elaborazioni statistiche ,

b') gli importi , $C_{ij} = \sum_{h=0}^{j} P_{ih}$, del cumulo di risarcimenti di sinistri della generazione i effettuati nei primi j anni di differimento (j=0,1,2,…,t-1) ,

c) l'importo , ${}_tR_0$, appostato a riserva in data attuale (31/12/t) per sinistri della generazione 0 e "superstiti" di generazioni precedenti . Trattasi , come già osservato , di un importo riguardante i (relativamente) pochi sinistri il cui risarcimento non è concluso dopo t anni dall'accadimento . In taluni modelli si postula addirittura ${}_tR_0 = 0$.

Le informazioni b o b' che , con scrittura unificante indicheremo con γ_{ij} , riempiono il quadro di dati triangolare della seguente tabella .

Tabella 1.E.

Generazione (anno di accadimento)	**Durata (in anni) del differimento del risarcimento**								
	0	**1**	**…**	**j**	**…**	**…**	**…**	**t -1**	**t**	**t+1**
0	$\gamma_{0,0}$	$\gamma_{0,1}$	…	$\gamma_{0,j}$	…	…	…	…	$\gamma_{0,t}$	$\gamma_{0,t+1}$
1	$\gamma_{1,0}$	$\gamma_{1,1}$	…	…	…	…	…	$\gamma_{1,t-1}$		
…	…	…	…	…	…	…	…			
…	…	…	…	…	…	…				
i	$\gamma_{i,,0}$	…	…	…	$\gamma_{i,,t-1}$					
…	…	…	…							
…	…	…								
t	$\gamma_{t,0}$									

Anzichè di un triangolo di dati , quale quello della tabella 1.E, detto triangolo di run–off , si dispone a volte di un insieme D che può assumere, a seconda dei casi , la forma di un trapezio (se il numero delle generazioni preso in considerazione è maggiore di quello degli ani di differimento) o di un parallelogramma (dati relativi ad un certo numero di anni di pagamento ($h \leq i+j+ \leq t$)) o altro . Nel seguito considereremo il caso “standard” del triangolo di dati della tabella 1 con l’informazione aggiuntiva raccolta in ${}_tR_0$ (elemento aggiuntivo $\gamma_{0,\,t+1}$) .

A questo punto , e disponendo o meno dell’informazione a) o a') , si tratta di stimare , con opportuno metodo , i valori degli elementi del triangolo inferiore della matrice quadrata $||\ \gamma_{ij}\ ||$ di ordine t+1 , ovvero i termini γ_{hk} ($h = 1,2,\ldots,t;\quad k = t-h+1,\ldots,t$) , nonché i termini aggiuntivi ${}_tR_i$ ($i=1,2,\ldots,t$) (riserve relative a pagamenti con più di t anni di differimento). A partire da queste stime , sarà poi immediato pervenire alla costruzione della previsione delle liquidazioni future , cioè alla stima della riserva sinistri del portafoglio.

E’ importante inoltre sottolineare il fatto che in presenza di riassicurazione , la cedente trattiene in deposito le riserve (tra cui la riserva sinistri) a carico del riassicuratore . In particolare , l’assicuratore a fine esercizio trasferisce al riassicuratore i premi di riassicurazione e paga per intero i risarcimenti dei sinistri in attesa di vedersi rimborsare , a fine esercizio , quanto dovuto dal riassicuratore .

A sua volta corrisponderà – a fine esercizio - gli interessi maturati dall’investimento delle riserve trattenute e introiterà le provvigioni .

Tornando ai principi di calcolo della riserva sinistri , nel seguente paragrafo illustreremo, per semplicità , un solo metodo di stima , essendo ben altri i fini della mia trattazione .

1.4.1 Stima della riserva sinistri con il metodo della catena (metodo di "Chain Ladder") .

Gli importi γ_{ij} della tabella 1.E sono qui gli importi C_{ij} cumulativamente pagati per risarcire sinistri della generazione i nei primi j anni di differimento . In corrispondenza all'informazione $\gamma_{0,\ t+1}$,viene registrato l'importo che indicheremo con $C_{0,\infty}$,somma dei pagamenti già effettuati , $C_{0,t}$, e di quelli relativi ai risarcimenti dei sinistri della generazione 0 e dei precedenti , importo quest'ultimo che abbiamo precedentemente indicato con ${}_tR_0$.

Il metodo si basa sull'ipotesi che le colonne del triangolo di rin-off del pagato cumulato siano proporzionali , a meno di disturbi di natura casuale . In altre parole , al variare di j tra 1 e t , il valore dei rapporti $\frac{C_{i,j}}{C_{i,j-1}}$ non dipenda , a meno di variazioni aleaotarie , dalla generazione i cui essi fanno riferimento , ma solo da j .Come dire che si assume che la progressione dei pagamenti cumulati si mantenga sostanzialmente la medesima per ogni generazione . Pertanto il metodo è inadeguato se fattori interni o esterni causano un cambiamento nel modello di run-off , quali , ad esempio , la variazione nel trattamento amministrativo dei risarcimenti e quindi nella politica di liquidazione dei sinistri , la variazione nell'orientamento giurisprudenziale che accresce o diminuisce il livello degli indennizzi (danno biologico) e la crescita dell'inflazione che accresce i risarcimenti dei sinistri sospesi in modo più che proporzionale . Viceversa , una variazione nelle dimensioni o nella composizione del portafoglio della compagnia non viola l'ipotesi di base del modello . Determinati , con i dati C_{ij} a disposizione , i rapporti in questione , $\dfrac{C_{i,j}}{C_{i,j-1}}$, è immediato costruire delle stime $\hat{C}_{hk}$ ($1 \leq h \leq t$; $k \geq t-h+1$) e valutare quindi la riserva sinistri .

La stima del rapporto tra importi delle colonne contigue j e j-1 viene effettuata secondo le

$$m_j = \frac{\sum_{i=o}^{t-j} C_{i,j}}{\sum_{i=o}^{t-j} C_{i,j-1}} , \qquad j=1,2,\ldots,t \qquad \textbf{(1.15)}$$

Ne seguono le stime

$$\hat{C}_{hk} = C_{h,\, t-h} \cdot \prod_{j=t-h+1}^{k} m_j \qquad h=1,2,\ldots,t. \qquad \textbf{(1.16)}$$

$$k = t-h+1,...,t.$$

In modo analogo vengono stimati gli importi cumulati finali

$\hat{C}_{i,\infty} = \hat{C}_{i,t} + {}_tR_i$.

Precisamente , posto $m_\infty = \dfrac{C_{0,\infty}}{C_{0,t}}$, si assumono le $\hat{C}_{i,\infty} = \hat{C}_{i,t} + m_\infty$, con $i=1,2,\ldots t$.

La riserva globale è data , infine , dalla $R= \sum_{i=o}^{t} \left(\hat{C}_{i,\infty} - C_{i,t-i}\right)$, con $\hat{C}_{0,\infty} = C_{0,\infty}$.

Per chiarire il concetto , presentiamo il seguente esempio numerico , puramente teorico(5), apportando delle modifiche onde eliminare o almeno attenuare l'influenza di talune cause esogene perturbatrici del contenuto dell'ipotesi fondamentale .Poniamo di dover effettuare la valutazione della riserva al 31/12/02 , facendo corrispondere alla generazione 0 l'anno di calendario 1998. Si pensi ad esempio che una

---

(5) Esempio tratto da Luciano Daboni (1988): "Lezioni di tecnica attuariale delle assicurazioni contro i danni" . Edizioni LINT Trieste.

scarsa aderenza all'ipotesi possa essere attribuita a fattori esogeni che , sulla scorta delle osservazioni del passato , si traducono in fattori "inflattivi" con tassi rispettivamente uguali all'11% nel passaggio dal 1998 al 1999 , al 10,5% dal 1999 al 2000 , al 12% dal 2000 al 2001 e al 15% dal 2001 al 2002. Si postuli poi che per gli anni a venire il tasso inflativo si mantenga costantemente uguale al 12%.

Anzitutto si costruisce la tabelle dei pagamenti (in milioni di lire) effettuati per ogni generazione nei singoli anni di differimento , cioè degli importi P_{ij} ($C_{i,j}$-$C_{i,j-1}$). Nell'esempio si tratterrà dunque del "triangolo" seguente :

	0	1	2	3	4	${}_tR_0$
0	789	367	89	49	32	22
1	960	458	120	77		
2	1170	533	150			
3	1407	655				
4	1798					

Si inflazionano poi gli importi P_{ij} prendendo come anno di riferimento quella della generazione più recente (cioè 2002), passando quindi al triangolo di importi P^*_{ij} (arrotondati al milione) :

	0	1	2	3	4	${}_tR_0$
0	1246	522	115	56	32	22
1	1366	590	138	77		
2	1507	613	150			
3	1618	655				
4	1798					

(E' ad esempio $P^*_{1,0}$, inflazionato, = $P_{1,0} \cdot 1.5 \cdot 1.12 \cdot 1.105 = 960 \cdot 1.423 =$ 1366,31).

Si costruisce a questo punto il triangolo superiore degli importi cumulati

$$C^*_{i,j} = \sum_{h=0}^{j} P^*_{i,h} \;, \qquad\qquad 0 \leq j \leq 4-i$$

Come illustrato nel triangolo superiore della seguente tabella :

	0	1	2	3	4	>4
0	1246	1769	1883	1940	1972	1994
1	1366	1956	2094	2171	2206	2231
2	1507	2120	2270	2346	2385	2411
3	1618	2273	2430	2512	2553	2581
4	1798	2544	2719	2811	2857	2888

E , calcolando gli m_j (secondo la 1.15) , si calcolano i previsti $\hat{C}_{hk}$.

Applicando la formula 1.15 , si trova

$$m_1 = \frac{1769+1956+2120+2273}{1246+1366+1507+1618} = 1.415 \; ; \quad m_2 = \frac{1883+2094+2270}{1769+1956+2120} = 1.069;$$

analogamente troviamo $m_3 = 1.034$; $m_4 = 1.016$ e $m_\infty = 1.011$.

Per trovare gli importi stimati , $\hat{C}_{hk}$, in accordo con la formula 1.16 ,

avremo :

$$\hat{C}_{4,1} = C_{4,0} \cdot m_1 = 1798 \cdot 1.415 = 2544$$

$$\hat{C}_{4,2} = \hat{C}_{4,1} \cdot m_2 = C_{4,0} \cdot m_1 \cdot m_2 = 2544 \cdot 1.069 = 2719$$

e analogamente per tutti i $\hat{C}_{hk}$.

Si costruisce ora la matrice triangolare dei pagamenti annuali previsti in futuro , $\hat{P}_{i,j} = \hat{C}_{i,j} - \hat{C}_{i,j-1}$, cioè la

	0	1	2	3	4	${}_tR_i$
0						22
1					36	24
2				77	39	26
3			157	82	41	28
4		746	175	92	46	31

i cui importi devono essere inflazionati secondo l'assunta ipotesi (tasso costante pari al 12%) . Si perviene con ciò alla seguente matrice d'importi (arrotondati)

	0	1	2	3	4	${}_tR_i$
0						25
1					40	30
2				86	49	37
3			176	103	58	44
4		836	220	129	72	55

dai quali , sommando per righe , si traggono le riserve R_i competenti alle successive generazioni , cioè

$R_0 = {}_4R_0 = 25;$

$R_1 = \hat{P}_{1,4} + {}_4R_1 = 40+30 = 70;$

$R_2 = \hat{P}_{2,3} + \hat{P}_{2,4} + {}_4R_2 = 86+49+37 = 172$ e , analogamente ,

$R_3 = 381$ e $R_4 = 1312$.

La riserva globale sarà data da : $R_0 + R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = 1960$.

Non commentiamo il risultato , in quanto è stato ottenuto a partire da ipotesi e dati fittizi e presentato a scopo illustrativo .

Capitolo 2

Studio della variabile aleatoria del costo sinistri aggregato , $\tilde{X}$, secondo l'approccio collettivo della teoria del rischio classica .

Premessa : supponiamo di disporre di un'adeguata informazione di natura statistica tratta dall' osservazione di rischi " analoghi " a quello che vogliamo esaminare , quindi di rischi aventi in comune tra loro il maggior numero possibile di caratteristiche , quali quelle morfologiche , il tipo di esposizione e l'ordine di grandezza della sua dimensione monetaria , le modalità contrattuali della copertura, ecc. Quindi il nostro portafoglio dovrà essere composto da rischi con un alto grado di omogeneità , come , ad esempio , i rischi di massa R.C.Auto. La possibilità di far riferimento all' osservazione statistica specificatamente riferita al rischio oggetto del contratto è concreta in molti casi , in altri invece ,di importanza non meno rilevante dei precedenti , è assente.

Secondo un approccio individuale della teoria del rischio , il costo sinistri aggregato viene calcolato considerando ogni singolo rischio in portafoglio e il relativo costo sinistri che esso può generare , nell' arco temporale contrattuale definito. Pertanto , considerando un numero finito di N rischi in portafoglio , il costo sinistri aggregato, nel periodo t, risulta essere pari alla somma del costo sinistri generato dal singolo rischio:

$$\tilde{X}_t = \sum_{i=1}^{N_t} \tilde{Y}_{i,t} \qquad (\tilde{X}_t = 0 \text{ se } N_t = 0)$$

dove :

N_t = numero di rischi in portafoglio nel periodo t ;

$\tilde{Y}_{i,t}$= variabile aleatoria costo sinistri riferita al rischio i-esimo, nel periodo t.

Nel seguito, invece,si farà riferimento ad un approccio collettivo della teoria del rischio , in cui non si presterà alcuna attenzione al singolo rischio pertanto , il costo sinistri aggregato viene analizzato considerando il portafoglio nella sua globalità. Ai fini dello studio della distribuzione di $\tilde{X}$ è usuale assumere, in accordo con tale approccio , delle ipotesi fortemente semplificatrici e precisamente , considerando $\tilde{N}_t$ la variabile aleatoria numero dei sinistri generato dal portafoglio (o dal ramo) in esame , nell' unità di tempo t , (esempio un anno) e $\tilde{Z}_{i,t}$ la variabile aleatoria costo sinistri di ogni singolo sinistro i-esimo verificatosi nell'anno t ,si postula quanto segue :

1.gli $\tilde{Z}_{i,t}$, i=1... $\tilde{N}_t$, sono identicamente distribuiti ,secondo la funzione di ripartizione $S(x) = Pr\{\tilde{Z}_{i,t} \leq x\}=\{\tilde{Z}_{i+1,t} \leq x\}=Pr\{\tilde{Z}_{i+2,t} \leq x\}=...$;

2.reciproca indipendenza di tutti i sinistri .

In tali condizioni , il costo sinistri aggregato nel periodo t è definito da :

$$\tilde{X}_t = \sum_{i=1}^{\tilde{N}_T} \tilde{Z}_{i,t} \qquad (\tilde{X}_t = 0 \text{ se } \tilde{N}_t = 0) \qquad \textbf{(2.6.1)}$$

Se alle ipotesi predette , aggiungiamo l'ipotesi (3) che anche $\tilde{Z}$ e $\tilde{N}$ siano stocasticamente indipendenti , la funzione di ripartizione del costo sinistri aggregato $\tilde{X}$ (per semplicità di scrittura verrà meno la lettera t al pedice) sarà:

$$F_{\tilde{X}}(x) = Pr\{\tilde{X} \leq x\} = Pr\{\tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_2 + ... \tilde{Z}_{\tilde{N}} \leq x\} = \sum_{N=0}^{\infty} Pr\{\tilde{N}=n\} \cdot$$

$$Pr\{\tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_2 + ... + \tilde{Z}_N \leq x\} = \sum_{N=0}^{\infty} Pr\{\tilde{N}=n\} \cdot S^{*N}(x) = \sum_{N=0}^{\infty} Pn \cdot S^{*N}(x)$$

dove $S^{*N}(x)$ esprime l'ennesima convoluzione[(1)] della distribuzione S(x) relativa al costo del singolo sinistro , mentre le distribuzioni di $\tilde{Z}$e di $\tilde{N}$ costituiscono la base tecnica del rischio in esame .

Ai fini della stima della riserva di rischio , definita nella sua equazione più semplificata , dobbiamo calcolare i premi puri , ma prima ancora quelli di rischio, nonchè il valore atteso del costo sinistri aggregato.

Tenendo presenti tutte le ipotesi predette , poniamo perciò l'attenzione sul calcolo dei primi due momenti : $E[\tilde{X}]$ e $E[\tilde{X}^2]$.

A tal fine ,consideriamo dapprima $E[\tilde{X} \mid \tilde{N}=N] = E[\sum_{i=1}^{N} \tilde{z}_i] \overset{(2)}{=} \sum_{i=1}^{N} E[\tilde{Z}_i] =$

$=N \cdot E[\tilde{Z}]$. Segue che : $E[\tilde{X}] \overset{(3)}{=} E[E(\tilde{X} \mid \tilde{N}=N)] = E[\tilde{N} \cdot E(Z)] \overset{(4)}{=} E[\tilde{N}] \cdot E[\tilde{Z}]$

Calcoliamo dunque la varianza partendo dal momento semplice condizionato di ordine due , pertanto :

$E[(\tilde{X}^2 \mid \tilde{N}=N)] = E[\sum_{i=1}^{N} \tilde{Z}_I]^2 = E[\sum_{i=1}^{N} \tilde{Z}_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1 j\neq i}^{N} \tilde{Z}_i \tilde{Z}_j] = \sum_{i=1}^{N} E[\tilde{Z}_i^2] + N \cdot (N-1)$

$\cdot E[\tilde{Z}_i \cdot \tilde{Z}_j] \overset{(5)}{=} N \cdot E[\tilde{Z}^2] + N \cdot (N-1) \cdot \overline{E[\tilde{Z}]}^2$. Segue che :

$E[\tilde{X}^2] = E[E(\tilde{X}^2 \mid \tilde{N}=N)] = E[\tilde{N}] \cdot E[\tilde{Z}^2] + \tilde{N} \cdot (\tilde{N}-1) \cdot \overline{E[\tilde{Z}]}^2 = E[\tilde{N}] \cdot$

$E[\tilde{Z}^2] + \overline{E[\tilde{Z}]}^2 \cdot E[\tilde{N} \cdot (\tilde{N}-1)] = E[\tilde{N}] \cdot E[\tilde{Z}^2] + E[\tilde{N}^2] \cdot \overline{E[\tilde{Z}]}^2 - E[\tilde{N}] \cdot \overline{E[\tilde{Z}]}^2 =$

$\overset{(6)}{=} E[\tilde{N}] \cdot \sigma^2(\tilde{Z}) + E[\tilde{N}^2] \cdot \overline{E[\tilde{Z}]}^2$.

---

(1)Date due variabili aleatorie indipendenti X_1 e X_2 , ciascuna avente funzione di ripartizione F_1 e F_2, la funzione di ripartizione della loro somma $X = X_1 + X_2$ è data dalla seguente formula di convoluzione :

$$F(X) = F_1 * F_2(X) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(X - X_2)\, d F_2(X_2)\, d X_2$$

dove il simbolo * indica il segno di convoluzione

In particolare , se X_2 è una variabile aleatoria continua avente funzione di densità f_2 , avremo : $F(X) = F_1 * F_2(X) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(X - X_2)\, f_2(X_2)\, d X$

(2)Per la proprietà di additività del valore atteso

(3)Per la proprietà delle medie condizionate

(4)Per l'ipotesi d'indipendenza tra $\tilde{N}$ e $\tilde{Z}$.

(5)Poiché le variabili aleatorie $\tilde{Z}$ sono indipendenti ed identicamente distribuite.

Applicando la definizione di varianza come differenza tra la media dei quadrati e il quadrato della media , si ha:

$\mathrm{Var}(\tilde{X}) = E[\tilde{X}^2] - \overline{E[\tilde{X}]}^2 = E[\tilde{N}]\cdot \sigma^2(\tilde{Z}) + E[\tilde{N}^2]\cdot \overline{E[\tilde{Z}]}^2 - \overline{E[\tilde{N}]}^2 \cdot \overline{E[\tilde{Z}]}^2 =$

$= E[\tilde{N}]\cdot \sigma^2(\tilde{Z}) + \mathrm{Var}(\tilde{N})\cdot \overline{E[\tilde{Z}]}^2$.

Com'era intuibile , il calcolo dei momenti di $\tilde{X}$ è ricondotto a quello dei momenti di $\tilde{N}$ e di $\tilde{Z}$ separatamente . Nei riguardi della variabile $\tilde{N}$, che conta il numero aleatorio di sinistri incombenti in un anno sul rischio, si assume ordinariamente che essa sia poissoniana di parametro λ , pertanto $E[\tilde{N}] = \mathrm{Var}(\tilde{N}) = \lambda$, quindi

$\mathrm{Var}(\tilde{X}) = E[\tilde{N}]\cdot[\ \sigma^2(\tilde{Z}) + E[\tilde{Z}^2]]$.

Nei seguenti capitoli analizzeremo , pertanto , il comportamento delle variabili aleatorie $\tilde{N}$ e $\tilde{Z}$.

2.1 Distribuzione della variabile aleatoria "numero dei sinistri" , $\tilde{N}$, secondo il processo di Poisson Puro.

Consideriamo dunque che il numero aggregato di sinistri, $\tilde{N}$, in un determinato periodo da 0 fino a t ,sia una funzione del tempo t e pertanto sia un processo stocastico $\tilde{N}(t)$. Se questo processo soddisfa le seguenti condizioni :

1) i numeri di sinistri che si verificano in due intervalli di tempi disgiunti sono indipendenti (indipendenza degli incrementi);
2) uno stesso evento sfavorevole non può causare più di un sinistro (esclusione di sinistri multipli);
3) la probabilità che un sinistro si verifichi in un preciso punto temporale è pari a zero (esclusione di punti temporali speciali),

(6) Per definizione di varianza

allora il numero di sinistri che accadono in un intervallo di tempo fissato segue la distribuzione di *Poisson pura* ,quindi la probabilità che $\tilde{N}$ assuma determinati valori è data da :

$$p_n = \Pr\{\tilde{N} = n\} = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!} \qquad n=1\,,2\,,3... \infty \qquad \textbf{(2.7)}$$

dove λ , parametro della distribuzione di Poisson , è un numero reale positivo corrispondente al valore atteso del numero di sinistri nell' intervallo di tempo considerato , cioè $\lambda = E[\tilde{N}]$

Un metodo per studiare le caratteristiche di questa distribuzione , al fine di poterne ricavare anche i momenti principali , è l'utilizzo della funzione generatrice dei momenti[(7)] M(s), (f.g.m.), e di quella dei cumulanti[(8)] $\psi(s)$, (f.g.c.), (per definizione di cumulante quest' ultima è preferibile nel calcolo dei momenti centrali).

Procediamo dunque , applicandone la definizione , al calcolo della funzione generatrice dei momenti e dei cumulanti di una variabile

---

(7)Sia $\tilde{X}$ una variabile aleatoria (v.a.), a seconda che essa sia continua , (ipotizzando in tal caso l'esistenza e la convergenza degli integrali), o discreta , definiamo la sua funzione generatrice dei momenti M(s), con s punto qualsiasi , come segue:

$$M(s) = E[e^{s\tilde{X}}] = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{s\tilde{X}}\, f(x)dx & \tilde{X} \text{ v.a. continua} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N} e^{s\tilde{X}} \cdot \Pr\left\{\tilde{X} = X_i\right\} & \tilde{X} \text{ v.a. discreta} \end{cases}$$

Questa funzione gode delle seguenti proprietà:

a) il momento semplice a di ordine j è uguale alla derivata j-esima di M(s) calcolata nell'origine , cioè : $a_j = M^{(j)}(0)$;

b) $M(s) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot \frac{s^j}{j!}$

c) la distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria è unicamente definita dalla sua f.g.m. M(s).

d) se $\tilde{X}_1$ e $\tilde{X}_2$ sono v.a. indipendenti , allora la f.g.m. della loro somma è uguale al prodotto delle singole funzioni generatrici , cioè : $M_{\tilde{x}_1+\tilde{x}_2}(s) = M_{\tilde{x}_1}(s) \cdot M_{\tilde{x}_2}(s)$.

poissoniana di parametro λ (ved. 2.7) come segue :

$$M(s) = E[e^{s\tilde{N}}] = \sum_{N=0}^{\infty} e^{sN} \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^N}{N!} = e^{-\lambda} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(\lambda \cdot e^S)^N}{N!} = e^{-\lambda}\, e^{\lambda \cdot e^S} \overset{(9)}{=} e^{\lambda(e^S - 1)}$$

$\psi(s) = \ln M(s) = \lambda\,(e^s - 1)$.

Applicando le proprietà della f.g.c. (ved.8) , otterremo quanto segue :

$K_1 = E[\tilde{N}] = \lambda$,

$K_2 = \sigma^2(\tilde{N}) = \lambda$,

$K_3 = \mu_3(\tilde{N}) = \lambda$,

pertanto l'indice di asimmetria $\gamma_{\tilde{N}} = \dfrac{K_3}{\sigma^3} = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$.

Al fine di risolvere e analizzare problemi pratici di natura assicurativa è opportuno illustrare la seguente proprietà di additività della variabile

---

e) la f.g.m. della trasformazione lineare di una v.a. $\tilde{Y} = a\tilde{X} + b$ (con a e b costanti reali) è la seguente : $M_{a\tilde{X}+b}(s) = e^{bS} \cdot M_{\tilde{X}}(a \cdot s)$

8) Sia $\tilde{X}$ una generica variabile aleatoria , definiamo la sua funzione generatrice dei cumulanti , $\psi(s)$, con s punto generico, come segue :

$\psi(s) = \ln M(s) = \ln [E(e^{S\tilde{X}})]$.

Questa funzione gode delle seguenti proprietà :

a) il cumulante di ordine j è uguale alla derivata j-esima di $\psi(s)$ calcolata nell'origine, cioè : $k_j = \psi^{j}(0)$

b) $\psi(s) = \sum_{j=0}^{\infty} k_j \dfrac{s^j}{j!}$

c) la distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria è unicamente definita dalla sua f.g.c. $\psi(s)$.

d) se $\tilde{X}_1$ e $\tilde{X}_2$ sono v.a. indipendenti , allora la f.g.c. della loro somma è uguale alla somma delle singole funzioni generatrici cumulanti, cioè : $\psi_{\tilde{X}1+\tilde{X}2}(s) = \psi_{\tilde{X}1}(s) \cdot \psi_{\tilde{X}2}(s)$.

e) la f.g.c. della trasformazione lineare di una v.a. $\tilde{Y} = a\tilde{X} + b$ (con a e b costanti reali) è la seguente : $\psi_{a\tilde{X}+b}(s) = b \cdot s + \psi_{\tilde{X}}(a \cdot s)$.

(9) Per lo sviluppo in serie di Taylor $\sum_{N=0}^{\infty} \dfrac{(\lambda \cdot e^S)^N}{N!} = e^{\lambda \cdot e^S}$

aleatoria poissoniana : la somma di variabili aleatorie indipendenti di Poisson , è ancora una variabile aleatoria di Poisson . Più precisamente , sia M il numero dei rischi in portafoglio e $\tilde{N}_1$, $\tilde{N}_2$,…, $\tilde{N}_m$ le rispettive variabili aleatorie "numero dei sinistri ". Se queste sono tutte reciprocamente indipendenti e distribuite , ciascuna , secondo una Poisson Pura, di parametri rispettivamente λ_1, λ_2,…, λ_m ,per la proprietà (d) della funzione generatrice dei cumulanti $\psi(s)$, si dimostra che anche la variabile aleatoria $\tilde{N} = \tilde{N}_1 + \tilde{N}_2 + \ldots + \tilde{N}_m$, "numero totale dei sinistri" , è una Poisson Pura di parametro $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m$. Tornando alla definizione di variabile aleatoria poissoniana , per calcolare la probabilità $p_n = \Pr\{\tilde{N}=n\}$, si può anche facilmente utilizzare la seguente formula ricorsiva : $p_n = \frac{\lambda}{N} \cdot p_{N-1}$, **(2.8)** con valore iniziale $p_0 = e^{-\lambda}$, infatti $e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!} = \frac{\lambda}{N} \cdot \left(e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{(N-1)}}{(N-1)!}\right)$, (per λ piuttosto elevato , è opportuno riscrivere i calcoli secondo una scala di valori più ridotta , ad esempio secondo la scala logaritmica).Utilizzando inoltre la definizione di funzione di ripartizione per una variabile aleatoria discreta , si può calcolare la probabilità che un sinistro sia maggiore o minore di un certo valore , pertanto si avrà:

$$F(N) = \Pr\{\tilde{N} \le N\} = \sum_{i=0}^{N} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!} \quad . \qquad \textbf{(2.9)}$$

Per N elevato , il calcolo di F(N) risulta essere piuttosto laborioso , pertanto , alcune volte , sono preferibili delle formule di approssimazione .

Analizziamo ora il comportamento della variabile aleatoria $\tilde{N}$, numericamente e graficamente , al variare del numero R di rischi in portafoglio . Esempio 1: consideriamo pertanto tre ipotetici portafogli , A , B , C , composti rispettivamente da 10 , 15 , 20 rischi , per ognuno dei quali si ha $\tilde{N}_{i(i=1,\ldots,20)}$ ~ Poisson pura di parametri λ_i, pari a :

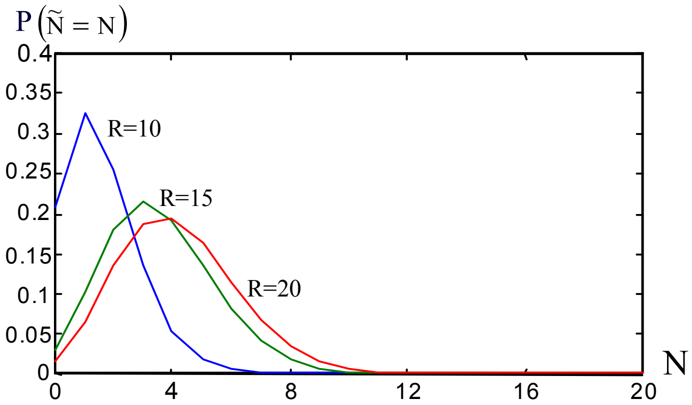
	λ_i,		λ_i,		λ_i,		λ_i,		λ_i,
i =1	0.10	**i =5**	0.15	**i =9**	0.22	**i =13**	0.24	**i =17**	0.27
i =2	0.12	**i =6**	0.15	**i =10**	0.23	**i =14**	0.24	**i =18**	0.28
i =3	0.12	**i =7**	0.17	**i =11**	0.23	**i =15**	0.25	**i =19**	0.29
i =4	0.13	**i =8**	0.18	**i =12**	0.24	**i =16**	0.26	**i =20**	0.30

Consideriamo i primi 10 rischi per il portafoglio A , gli ultimi 15 per B e tutti i 20 per C . Applicando la proprietà di additività sopra citata , avremo , per il portafoglio A ,che la v.a. $\tilde{N}_A$ si distribuisce secondo una Poisson di parametro λ_A pari a $\sum_{i=1}^{10}\lambda_i$ = 1.57, analogamente avremo per i portafogli B e C rispettivamente λ_B pari a $\sum_{i=6}^{20}\lambda_i = 3.55$ e λ_C pari a $\sum_{i=1}^{20}\lambda_i =$ 4.17. Procediamo quindi al calcolo di E[$\tilde{N}$], $\sigma^2(\tilde{N})$, γ e dell' indice di variabilità relativa $\sigma(\tilde{N})$/E [$\tilde{N}$] elencandone i risultati nella seguente tabella 2.A :

	Portafoglio A	**Portafoglio B**	**Portafoglio C**
E [$\tilde{N}$]	1,57	3,55	4,17
$\sigma^2(\tilde{N})$	1,57	3,55	4,17
γ ($\tilde{N}$)	0,798	0,531	0,490
$\sigma(\tilde{N})$ / E[$\tilde{N}$]	0,798	0,531	0,490

Graficamente:

Distribuzione di Poisson al variare del numero dei rischi , R , in portafoglio .



Calcoliamo infine , applicando la formula 2.9, la probabilità che il numero totale di sinistri , $\tilde{N}$, riferiti ai rischi dei tre portafogli considerati , sia minore di un certo valore , ad esempio 5 . Pertanto , per il portafogli A , avremo : $\Pr\{\tilde{N}_A \leq 5\} = \sum_{i=1}^{5} e^{-\lambda_A} \cdot \frac{\lambda^N}{N!} = e^{-1.57} \cdot \frac{1.57^0}{0!} + e^{-1.57} \cdot \frac{1.57^1}{1!}$

$+ e^{-1.57} \cdot \frac{1.57^2}{2!} + \ldots + e^{-1.57} \cdot \frac{1.57^5}{5!} = 0.9945$, analogamente si avrà per i portafogli B e C , rispettivamente $\Pr\{\tilde{N}_B \leq 5\} = 0.8509$ e $\Pr\{\tilde{N}_C \leq 5\} = 0.7580$.

Come si può notare , dal grafico , dalla tabella e dai calcoli ,all'aumentare del numero dei rischi , aumentano , come è lecito aspettarsi , sia il valore atteso del numero di sinistri , sia la varianza assoluta e , quindi , il rischio del portafoglio stesso . L'indice di asimmetria e la variabilità relativa, invece , diminuiscono .Aumentando il numero dei rischi in portafoglio , infatti , c'è più probabilità che gli scarti negativi si compensino con quelli positivi , rendendo , pertanto , la distribuzione della variabile aleatoria in questione , più omogenea .In altre parole , per la legge dei grandi numeri , aumentando il numero dei casi favorevoli , nel nostro caso i rischi in portafoglio , la probabilità statistica (o frequenza osservata) di un evento tenderà alla sua probabilità teorica. Infatti , per la compagnia, al fine di raggiungere un maggiore equilibrio della sua gestione , è meglio sottoscrivere un gran numero di rischi “piccoli” , piuttosto che un piccolo numero di “grandi” rischi, con la conseguenza, appunto , di apportare una maggiore omogeneità al suo portafoglio e di rendere meno probabili gli eventi rari .

Non dobbiamo trascurare che , quanto detto finora sulla distribuzione della variabile aleatoria “numero totale dei sinistri “, $\tilde{N}$, è vero solo se sono rispettate le tre condizioni sopra elencate . Nella realtà , però , tali condizioni non sono sempre verificate , pertanto , nel seguito , occorrerà introdurre la distribuzione di Poisson Mista (o mistura) che meglio si adatta agli aspetti reali .

2.2 Distribuzione della variabile aleatoria ” numero dei sinistri” , $\tilde{N}$, secondo il processo di Poisson Misto (o misturato).

Come già accennato nel paragrafo precedente , le condizioni che rendono valida la legge di Poisson Pura , (ammesso che questa si adatti alle caratteristiche della classe di rischi oggetto di esame) , non sono sempre soddisfatte nella pratica , in quanto , non di rado , potrebbero esserci dei fattori di contesto , come le condizioni economiche , meteorologiche, epidemiche , ecc…, che possono provocare delle variazioni nella sottostante intensità di sinistro delle unità assicurate che non sono ricomprese nelle oscillazioni casuali proprie di ogni variabile aleatoria. Considerando ad esempio il ramo incendio di una compagnia assicurativa danni , in condizioni climatiche particolarmente sfavorevoli, come un’ estate troppo calda e arida , potrebbe crescere la propensione al rischio , pertanto , se nella prima settimana di Luglio , si verifica un insolito numero elevato di incendi delle foreste , è probabile che anche nella seconda settimana il numero di incendi sia ancora piuttosto elevato. Pensiamo anche alle assicurazioni malattia , epidemie o malattie contagiose potrebbero implicare una correlazione tra i sinistri in due differenti periodi di tempo , pertanto in questo caso , come anche nell'esempio precedente , la condizione d'indipendenza della Poisson Pura è violata . In alcuni rami assicurativi , inoltre , è possibile che uno stesso evento possa causare più di un sinistro , ad esempio un incidente fra due autovetture , pertanto , anche la condizione di esclusione dei sinistri multipli non è sempre verificata , (un metodo per ridurre tale inconveniente è quello di considerare tutti i sinistri generati da uno stesso evento come parti di un singolo sinistro). Una caratteristica peculiare dei sinistri è la casualità del loro verificarsi, è quindi imprevedibile quando essi accadono , pertanto , la condizione di esclusione di punti temporali speciali della Poisson Pura , è automaticamente soddisfatta. Tale condizione è equivalente ad affermare che il numero di sinistri N(t) = E[$\tilde{N}$ (t)] è una funzione continua di t .

I fattori esterni sopra citati , quindi le condizioni economiche , meteorologiche , epidemiche , stagionali , ecc, che da ora in poi chiameremo fattori di disturbo "q", potrebbero provocare situazioni di questo tipo :

a) trends (crescenti o decrescenti) implicano una lenta , ma progressiva variazione della probabilità che si verifichi il sinistro e quindi una modifica strutturale e non temporanea di λ . Ad esempio l'adozione di sistemi antincendio nella costruzione di fabbricati , determinerà un trend decrescente di λ ;

b) oscillazioni di breve periodo della propensione al rischio , pertanto scostamenti da λ più elevati rispetto a quelli propri della variabile, nel

nostro caso , poissoniana , dovuti a fattori di stagionalità (correlati a fattori economici , e/o meteorologici , e/o epidemici) ;
c) cicli di lungo periodo che determinano variazioni periodiche (non regolari) della propensione al rischio , dovute per lo più a cicli economici , nazionali e/o internazionali . Si pensi , ad esempio , alle variazioni di λ , nel ramo infortuni , dovute alle maggiori (o minori) assunzioni, in un determinato periodo di tempo ;
d) effetti combinati dei casi precedenti .
Quando le variazioni che subisce la propensione al rischio sono deterministiche (q=costante) , come accade nella maggior parte dei casi di trend , le condizioni che supportano la distribuzione della Poisson pura sono generalmente verificate , pertanto si può applicare ancora tale distribuzione , ma con parametro λq , anziché λ , come segue :

$$p_n = \Pr\{\tilde{N} = n\} = e^{-\lambda q} \cdot \frac{(\lambda q)^n}{n!} \qquad n=1 , 2 , 3... \infty \quad , \ q \in R$$

Quando , invece , le variazioni che subisce la propensione al rischio sono aleatorie, ($q = \tilde{q}$) , la condizione di indipendenza degli incrementi non è più verificata . Siamo infatti in presenza di un doppio stadio di aleatorietà e , precisamente , il primo stadio riguarda l'aleatorietà del parametro di sinistrosità sottostante , nel nostro caso λ , mentre il secondo stadio riguarda, una volta determinato il parametro , gli scostamenti casuali propri di ogni variabile aleatoria . Per chiarire il concetto , supponiamo che $\tilde{q}$ sia una v.a. discreta e che possa assumere k determinazioni , ciascuna secondo delle probabilità assegnate . Estraiamo dapprima , una q dall' urna , ad esempio q_A , la cui probabilità assegnata è 0.10 . Effettuiamo dunque un'altra estrazione nell'urna , dove sono contenuti i possibili valori del numero dei sinistri (0,1,2…,N), in proporzione delle rispettive probabilità assegnate dalla Poisson pura , nel nostro caso con parametro $\lambda\cdot 0{,}10$. In questo caso , le variazioni stocastiche dell'intensità di sinistro possono spesso essere interpretate come oscillazioni aleatorie del parametro della Poisson dal suo livello atteso λ . Ciò può essere generalmente descritto da un fattore moltiplicativo aleatorio $\tilde{q}$, avente una funzione di ripartizione $H(\tilde{q}) = \Pr\{\tilde{q} \le q\}$ definita per q>0 e per la quale deve risultare $E[\tilde{q}]=1$. Pertanto se $\tilde{q} > 1$, allora la probabilità di accadimento del sinistro sarà maggiore di quanto ci si aspetta , viceversa nel caso in cui 0<q<1 . Quest'ultima condizione è quindi restrittiva , in quanto impone che il parametro sottostante delle distribuzione "del numero dei sinistri ", rimanga sempre λ . Pertanto, è esclusa , la presenza di trends , mentre , invece , viene considerata l'esistenza di possibili oscillazioni di breve durata e/o cicli di lungo periodo . Nel seguito considereremo , per semplicità , che i fattori di disturbo $\tilde{q}$ siano dovuti unicamente ad oscillazioni di breve durata , non correlate , del parametro λ , restringendo quindi la variabilità di $\tilde{q}$, rispetto al caso più generale , dove sono considerati anche i cicli di lungo periodo . Ricordando quanto detto sul doppio stadio di aleatorietà , la distribuzione di probabilità di $\tilde{N}/\tilde{q}$, risulta essere una sorta di media ponderata , otte- nuta facendo il valore atteso delle probabilità condizionate, $\Pr\{\tilde{N} = n|\tilde{q}\}$, come segue :

$$p_n = \Pr\{\tilde{N} = n\} = E[\Pr\{\tilde{N} = n|\tilde{q}\}] = \int_0^\infty e^{-\lambda q} \cdot \frac{(\lambda q)^n}{n!} \, dH(q) \ ,$$

mentre la funzione di ripartizione di $\tilde{N}/\tilde{q}$ risulta pari a :

$$F(n) = \Pr\{\tilde{N} \le n\} = E[\Pr\{\tilde{N} \le n|\tilde{q}\}] = \int_0^\infty F_{\lambda q} \, dH(q) = \int_0^\infty [\sum_{h \le n} e^{-\lambda q} \cdot \frac{(\lambda q)^h}{h!}] \, dH(q) \quad \textbf{(2.10)}$$

Al fine di studiare le caratteristiche della variabile aleatoria di Poisson mista , o mistura , $\tilde{N}/\tilde{q}$, e quindi i momenti della variabile aleatoria $\tilde{N}$ in presenza di fattori di disturbo $\tilde{q}$, si può utilizzare , come nel caso della Poisson pura , la funzione generatrice dei momenti , $M_{\tilde{N}}(s)$, e dei cumulanti , $\psi(s)$, come segue :

$$M_{\tilde{N}}(s) = E[M_{\tilde{N}}(s|\tilde{q})] = \int_0^\infty e^{\lambda q(e^s-1)} dH(q) = E[e^{\lambda \tilde{q}(e^s-1)}] = M_{\tilde{q}}[\lambda(e^s-1)]$$

$$\psi_{\tilde{N}}(s) = \ln M_{\tilde{q}}[\lambda(e^s-1)] = \psi_{\tilde{q}}[\lambda(e^s-1)] = \psi_{\tilde{q}}(g(s))$$

dove $g(s) = \lambda(e^s-1)$.

Applicando le proprietà della f.g.c e delle derivate si ottengono i seguenti valori , che per comodità chiameremo : **(2.11)**

$K_1 = E[\tilde{N}] \overset{(13)}{=} E[E[\tilde{N}|\tilde{q}] = \psi'_{\tilde{q}}(g(0)) \cdot g'(0) = \psi'_{\tilde{q}}(0) \cdot g'(0) = 1 \cdot \lambda = \lambda$[14];

$K_2 = \sigma^2(\tilde{N}) = \psi''_{\tilde{q}}(g(0)) \cdot \overline{g'(0)}^2 + \psi'_{\tilde{q}}(0) \cdot g''(0) = \sigma^2_{\tilde{q}} \cdot \lambda^2 + 1 \cdot \lambda = \lambda + \lambda^2 \sigma^2_{\tilde{q}}$;

$K_3 = \lambda + 3\lambda^2 \sigma^2_{\tilde{q}} + \lambda^3 \mu_{3,\tilde{q}}$[15] ,

pertanto l'indice di asimmetria $\gamma_{\tilde{N}} = \dfrac{K_3}{\sigma^3(\tilde{N})} = \dfrac{\lambda + 3\lambda^2\sigma^2_{\tilde{q}} + \lambda^3\gamma_{\tilde{q}}\sigma^3_{\tilde{q}}}{\sigma^3(\tilde{N})}$.

Come si può facilmente osservare , la varianza della variabile aleatoria "numero totale dei sinistri", $\tilde{N}$, in presenza dei fattori disturbo $\tilde{q}$, risulta maggiore della varianza della suddetta variabile nel caso della Poisson pura , in particolare l'incremento è dovuto alla presenza di $\lambda^2\sigma^2_{\tilde{q}}$. Anche l'indice di asimmetria , in presenza di $\tilde{q}$, aumenta rispetto al caso della Poisson pura , mentre il valore atteso rimane invariato.

Pertanto si può affermare che i fattori di disturbo aumentano la

(13) Per la proprietà delle medie condizionate .

(14) Tale risultato si poteva raggiungere anche in questo modo : $E[\tilde{N}] = E[E[\tilde{N}|\tilde{q}] = E[\lambda \cdot \tilde{q}] = \lambda \cdot E[\tilde{q}] = \lambda$, poiché $E[\tilde{q}] = 1$.

(15) $\mu_{3,\tilde{q}}$ è il momento centrale terzo di $\tilde{q}$, vale a dire $K_3(\tilde{q})$.

variabilità, e quindi il rischio , del nostro portafoglio e ne riducono pertanto l'omogeneità che si traduce in un aumento dell'indice di asimmetria . L'esperienza assicurativa ha mostrato che i valori di $\sigma_{\tilde{q}}$, per la maggior parte dei rami , sono generalmente compresi tra 0.02 e 0.08 . Illustriamo quanto detto , mediante 2 semplici esempi numerici. Esempio 1 : confrontiamo le caratteristiche principali del portafoglio assicurativo C , (esempio 1 - par 2.11) , dove la v.a." numero totale dei sinistri "si distribuisce secondo una Poisson Pura di parametro λ=4.17, con quelle del medesimo portafoglio in presenza della variabile aleatoria $\tilde{q}$, avente la seguente distribuzione di probabilità discreta :

q_i	$Pr\{\tilde{q} = q_i\} = h_i$(17)
0.30	0.22
0.80	0.18
0.90	0.15
1.00	0.15
1.50	0.20
2.05	0.10

Eseguendo i calcoli si ottiene :

$E[\tilde{q}]=1$; $\qquad \sigma^2_{\tilde{q}} = E[\tilde{q}^2] - \overline{E[\tilde{q}]}^2 \overset{(16)}{=} 0.277 \Rightarrow \sigma_{\tilde{q}} = 0.526$;

$\mu_{3,\tilde{q}} = E[\tilde{q}^3] - 3 \cdot E[\tilde{q}] \cdot E[\tilde{q}^2] + 2 \cdot \overline{E[\tilde{q}]}^3 = 0.063 \Rightarrow \gamma_{\tilde{q}} = \dfrac{\mu_{3,\tilde{q}}}{\sigma^3_{\tilde{q}}} = 0.433.$

Pertanto , per le caratteristiche della Poisson Pura e per la 2.11 , si avranno i risultati rappresentati nella seguente tabella :

(16) $E[\tilde{q}^2] - \overline{E[\tilde{q}]}^2 = (0.30^2 \cdot 0.22 + 0.80^2 \cdot 0.18 + 0.90^2 \cdot 0.15 + 1^2 \cdot 0.15 + 1.50^2 \cdot 0.20 + 2.05^2 \cdot 0.10) - 1^2$.

(17) Affinchè h_i sia una probabilità , deve valere : $0<h_i<1$ e $\sum_i h_i = 1$.

tabella 2.B

	Poisson Pura ($\tilde{q}_i \equiv 1$)	Poisson Mista
$E[\tilde{N}]$	4.17	4.17
$\sigma^2(\tilde{N})$	4.17	8.99
$\gamma(\tilde{N})$	0.490	0.860
$\sigma(\tilde{N})/E[\tilde{N}]$	0.490	0.719

I risultati numerici rispecchiano perfettamente quanto è già stato detto teoricamente , in particolare , nella Poisson mista si ha una maggiore variabilità sia assoluta che relativa , che si traduce nell'aumento del rischio del portafoglio in esame . E' utile ribadire che la presenza di fattori di disturbo incidono negativamente sull'omogeneità del nostro portafoglio , comportando infatti un aumento dell'indice di asimmetria .

Esempio 2[(18)] : consideriamo un portafoglio assicurativo , ramo incendi foreste , in cui la variabile aleatoria " numero totale dei sinistri in portafoglio nel mese di Luglio " sia distribuita secondo una Poisson mista , di parametro λ=100 . Supponiamo che i fattori di disturbo $\tilde{q}_i$ siano dovuti alle condizioni meteorologiche che , per semplicità, consideriamo classificate in 5 classi i-esime, i=1,2,…5 , e , come mostrato nella tabella 2.C, che ciascuna classe abbia probabilità h_i di verificarsi .

(18) Esempio tratto da Daykin C.,Pentikainen T., E. Pesonen(1994) ."Practical Risk Theory for actuaries" . Ed.Chapman & Hall, Londra.

Tabella 2.C :

	Clima nel mese di Luglio	q_i	$Pr\{\tilde{q} = q_i\} = h_i$
i =1	Molto piovoso	0.30	0.10
i =2	Piovoso	0.60	0.25
i =3	Normale	0.80	0.40
i =4	Secco	1.75	0.20
i =5	Molto secco	3.00	0.05

Applicando la formula 2.10 , abbiamo la seguente funzione di ripartizione della variabile aleatoria "numero di incendi" $\tilde{N}$:

$$F(n)=Pr\{\tilde{N} \leq n\}=\sum_{i=1}^{5} F_{\lambda q_i}(n) \cdot h_i = \sum_{q_i}[\sum_{h_i \leq n} e^{-\lambda q_i} \cdot \frac{(\lambda q_i)^{h_i}}{h_i!}] \cdot Pr\{\tilde{q} = q_i\}.$$

Al fine di fare opportuni commenti , poniamo a confronto, nelle seguente tabella , le funzioni di ripartizione di $\tilde{N}$, $F(N \mid \tilde{q}_i \equiv 1)$ e $F(N)$, rispettivamente in assenza e in presenza della v.a. $\tilde{q}$:

tabella 2.D:

N	$F(N \mid \tilde{q}_i \equiv 1)$	F(N)
50	0.00	0.13
70	0.01	0.47
100	0.53	0.74
150	1.00	0.76
200	1.00	0.94
300	1.00	0.98

Come si può facilmente osservare , nel caso della Poisson mista , i casi estremi sono maggiormente probabili , infatti , ad esempio , la probabilità che si verifichino più di 200 sinistri è nulla , nel caso della Poisson Pura , mentre è positiva , e precisamente pari a 0.06 (1-0.94) , nel caso della Poisson mista . Questo è spiegabile dal fatto che , come abbiamo visto dalle formule e dall'esempio 1 , i fattori di disturbo aumentano la variabilità e l'indice di asimmetria del portafoglio , pertanto la coda della distribuzione di $\tilde{N}$ diventa più lunga e quindi gli eventi rari si fanno più probabili .

Nelle applicazioni pratiche , a seconda delle circostanze , la funzione di ripartizione di $\tilde{q}$, $H(\tilde{q})$, è espressa comunemente mediante :

a) la sua forma analitica , ad esempio $H(\tilde{q})$~Gamma(19) ;

b) la sua distribuzione in forma tabellare (come quella già incontrata nei due esempi precedenti);

c) le sue caratteristiche principali , in particolare $E[\tilde{q}], \sigma_{\tilde{q}}$ e $\gamma_{\tilde{q}}$.

Accenniamo brevemente il caso in cui $\tilde{q}$ ~Gamma (h,h) , allora :

$$H(\tilde{q}) = \frac{\int_0^{hq} e^{-z} \cdot z^{h-1} dz}{\Gamma(h)}$$, le cui caratteristiche principali sono :

$$E[\tilde{q}] = \frac{h}{h} = 1 \ , \ \sigma_{\tilde{q}} = \frac{1}{\sqrt{h}} \quad e \quad \gamma_{\tilde{q}} = \frac{2}{\sqrt{h}} \ .$$

In questo caso si dimostra $\tilde{N} \sim$ Polya (n , h , p) (o binomiale negativa), pertanto : $p_n = \Pr\{\tilde{N} = n\} = E[\Pr\{\tilde{N} = n|\tilde{q}\}] = \binom{h+n-1}{n} p^h \cdot (1-p)^n$,

dove n rappresenta il numero delle prove o degli insuccessi per avere h successi dunque $n = 0,1,2\ldots$, $h=0,1,2\ldots$, $p=\frac{h}{\lambda+h}$, $0<p<1$ e infine $\binom{r}{s} = \frac{(r+s)!}{r!\cdot s!} = \frac{\Gamma(r+s+1)}{\Gamma(r+1)\cdot\Gamma(s+1)}$ rappresenta il coefficiente binomiale

---

(19) Sia $\tilde{X}$ una v.a. continua , diremo che $\tilde{X}$ ~Gamma (r,a) se la sua funzione di densità , definita per $x \geq 0$, è la seguente : $f(x) = \frac{a^r}{\Gamma(r)} \cdot e^{-ax} \cdot x^{r-1}$, dove "a" e "r "sono costanti reali e positive e $\Gamma(r) = \int_0^{\infty} e^{-u} \cdot u^{r-1} du$. La media di una v.a. Gamma è $\frac{r}{a}$.

generalizzato ai valori non interi della variabile tramite la funzione di Eulero .

Un metodo per calcolare p_n può essere dato anche dalla seguente formula ricorsiva , simile a quella della Poisson pura :

$p_n = \left(a + \frac{b}{n}\right) \cdot p_{n-1}$, n=0,1,2,... , con valore iniziale $p_0 = p^h$, $p = \frac{h}{\lambda + h}$,

$a=1-p$ e $b=(h-1)\cdot a$.

Se $a=0$ e $b=\lambda$, ritorniamo alla formula (2.8)

Consideriamo dunque , come nei casi precedenti , la funzione generatrice dei momenti che per una binomiale negativa è :

$$M(s) = \left(\frac{h}{h + \lambda - \lambda e^s}\right)^h ,$$

da cui , applicando i soliti procedimenti si ottengono le principali caratteristiche di $\tilde{N}$:

$$E[\tilde{N}] = \lambda , \quad \sigma^2(\tilde{N}) = \lambda + \frac{\lambda^2}{h} \quad e \quad \gamma_{\tilde{N}} = \frac{\lambda + \frac{3\lambda^2}{h} + \frac{2\lambda^3}{h^2}}{\sigma^3(\tilde{N})} .$$

La distribuzione binomiale negativa o Polya si presta piuttosto adeguata per descrivere il comportamento della variabile aleatoria $\tilde{N}$, ma presenta un grosso "handicap" , rappresentato dal fatto che vi è un solo parametro libero, (h) . Pertanto , non sempre si ha una buona approssimazione , in quanto fissare un certo valore di h , può permettere di porre $\sigma^2(\tilde{N})$ pari al valore empiricamente osservato , ma ciò non è detto che valga anche per $\gamma_{\tilde{N}}$ .Inoltre , possiamo notare che per $h \to \infty \Rightarrow \sigma_{\tilde{q}} \to 0$, pertanto $p_n =$

$\Pr\{\tilde{N} = n\} \cong e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!} \Rightarrow \tilde{N} \sim$ Poisson pura (λ) .

Prima di procedere allo studio della distribuzione della variabile aleatoria $\tilde{X}$, per quanto già detto sul suo calcolo , secondo l'approccio collettivo della teoria del rischio , è necessario , oltre allo studio della variabile aleatoria $\tilde{N}$, conoscere o assumere le possibili distribuzioni che sono generalmente appropriate e applicabili per descrivere l'andamento della variabile aleatoria "costo del singolo sinistro " $\tilde{Z}$. Nel seguente paragrafo cercherò di perseguire tale obiettivo .

2.3 Distribuzione della variabile aleatoria "costo del singolo sinistro", $\tilde{Z}$.

Per conoscere o attribuire un'appropriata funzione che descriva l'andamento della v.a. $\tilde{Z}$, sarebbe ideale disporre di un adeguato numero di dati statistici sul costo dei singoli sinistri , riferiti a rischi analoghi a quelli che vogliamo esaminare , pertanto , in questo caso , la distribuzione di $\tilde{Z}$, potrà essere stimata sulla base dei dati osservati . Non è sempre possibile , però , disporre di un'adeguata informazione statistica , soprattutto nel caso di nuovi prodotti assicurativi o di rischi poco probabili .Trascuriamo , per il momento , l'evoluzione del costo sinistri dovuta all'inflazione o ad altri fattori e illustriamo come può essere espressa la funzione di ripartizione di $\tilde{Z}$, sulla base dell'osservazione dei dati :

1) mediante la sua forma analitica ;
2) in forma tabellare ;
3) mediante i principali momenti , media , varianza e indice di asimmetria, calcolati sulla base dei dati .

Sinora abbiamo considerato , indistintamente, il costo medio del singolo sinistro $\tilde{Z}_i$, o danno medio, come il risarcimento aleatorio a carico della compagnia . In realtà , però , presentano significati diversi . Per chiarire tale differenza , indichiamo con $\widetilde{Y}_i$ il risarcimento aleatorio del sinistro i-esimo a carico della compagnia, pertanto avremo che $\widetilde{Y}_i = \varphi(\widetilde{Z}_i)$, essendo $\varphi(.)$ una funzione di variabile reale che traduce le specifiche modalità del contratto assicurativo . In particolare : $\widetilde{Y}_i = \widetilde{Z}_i$ se l'assicurazione è a valore intero o a garanzia illimitata, $\widetilde{Y}_i$= min (M, $\widetilde{Z}_i$) , se è previsto un massimale M[20] , $\widetilde{Y}_i$= min (M-d, $\widetilde{Z}_i$-d) in presenza di un massimale M e di una franchigia assoluta d[21] , $\widetilde{Y}_i = \widetilde{Z}_i$ (1-s) se sV è lo scoperto[22]obbligatorio sul valore intero V , $\widetilde{Y}_i = \widetilde{Z}_i \frac{S}{V}$ in presenza di regola proporzionale . Per calcolare i momenti del singolo risarcimento aleatorio C, occorre rifarsi alla particolarità della funzione φ nell'applicazione $\widetilde{Y}_i = \varphi(\widetilde{Z}_i)$ che dice come , per ogni sinistro , il risarcimento è legato al danno . Sviluppiamo formalmente il discorso . Indicata con F($\widetilde{Z}$) la funzione di ripartizione del danno Z , sussistono le

(20)In luogo di assumere il valore V, valore del bene assicurando , come unità di misura dell'esposizione patrimoniale , le parti contraenti possono concordare che quell'unità sia misurata dal cosiddetto M.P.L. (Maximum Probabile Loss) . Intendiamo designare con tale sigla l'estremo superiore degli importi cui , soggettivamente , viene attribuita probabilità non nulla di rappresentare il danno patrimoniale complessivo arrecato da un unico sinistro . Fissare il massimo danno probabile , M.P.L., pari a M , (chiamato *massimale*) , significa attribuire probabilità nulla a determinazioni del danno , causato da un unico sinistro , che siano superiori ad M e positiva a quelle non superiori ad M e ad esso prossime quanto si vuole .

(21)Un'importante modalità , frequentemente presente nei contratti , riguarda la *franchigia* al risarcimento . E' fissato in tali casi , contrattualmente , un importo *d* che funge da soglia agli intervanti dell'assicuratore nel senso che i danni di importo non superire a *d* non vengono risarciti . I danni di entità $\widetilde{Z}_i$ maggiore di *d* possono essere risarciti integralmente – e si parla allora di contratti con franchigia relativa (rispetto a *d*) – o , più frequentemente , nelle misura $\widetilde{Z}_i - d$ e si tratta allora di contratti con franchigia assoluta .

seguente relazioni :

a) $$E[\tilde{Y}] = E[\tilde{Z}] = \int_0^{+\infty} Z \; dF(Z) \qquad \textbf{(2.12)}$$

nel caso di garanzia illimitata o a valore intero V (nel qual caso l'estremo superiore dell'integrale a secondo membro è V o , comunque , nella 2.12 $F(\tilde{Z})=1$ per $\tilde{Z} \geq V$) ;

b) $$E[\tilde{Y}] = \int_d^M (Z - d) \; dF(Z) + (M - d) \int_M^{+\infty} dF(Z) \qquad \textbf{(2.13)}$$

nel caso di contratto con franchigia assoluta (e fissa) *d* e massimale (fisso) M. ;

c) $$E[\tilde{Y}] = \int_d^M Z \; dF(Z) + M \int_M^{+\infty} dF(Z) \qquad \textbf{(2.14)}$$

nel caso di franchigia relativa *d* e massimale M .

E' utile osservare che "M" può anche rappresentare il pieno di conservazione di una copertura " excess of loss ".

La funzione di ripartizione di $\tilde{Z}$, sulla base dell'osservazione dei dati , può essere discreta e quindi espressa in forma tabellare , quando si ha a disposizione un largo volume di dati sulla sinistralità , ma questo non è adatto per rappresentare la coda della distribuzione specialmente quando potrebbero verificarsi , seppure eccezionalmente , sinistri di importi assai rilevanti . Si è soliti , pertanto , esprimere la funzione di ripartizione di $\tilde{Z}$ mediante la sua forma analitica , utilizzando delle distribuzioni di

(22)Con l'intendimento di far partecipare l'assicurato alla copertura del rischio che lo riguarda , (come anche nel caso della presenza della franchigia) , viene talvolta adottata la clausola contrattuale di *scoperto* , in forza della quale è demandata all'assicurato la copertura di una percentuale fissa dell'esposizione e quindi del risarcimento.

(23)Per stimare , in base all'osservazione , i valori di tali parametri si ricorre a classici strumenti della statistica metodologica , in particolare il metodo della verosimiglianza o il metodo dei momenti . Si tratterà poi di verificare la bontà della perequazione dei dati con la distribuzione teorica .

probabilità continue . Tra le più utilizzate , troviamo la distribuzione log-normale , atta a descrivere la distribuzione del danno generato da un gran numero di fattori , ugualmente distribuiti , indipendenti , agenti in senso moltiplicativo l'uno dell'altro . Diremo che la variabile aleatoria del costo del singolo sinistro , $\tilde{Z}$, si distribuisce secondo la *log-normale* se può essere espressa nella seguente forma :

$$\tilde{Z} = d + e^{\tilde{y}} \qquad \textbf{(2.15)}$$

dove d = punto iniziale del range di $\tilde{Z}$ (cioè il valore minimo del danno, ad esempio pari alla franchigia) ,

$\tilde{Y}$ = v.a. normale , con media μ e varianza σ^2, cioè $\tilde{Y} \sim N(\mu, \sigma^2)$ Risolvendo la 2.15 rispetto alla $\tilde{Y}$ si ottiene :

$$e^{\tilde{y}} = \tilde{Z}\text{-}d \rightarrow \tilde{Y} = \ln(\tilde{Z}\text{-}d),$$

pertanto la funzione di distribuzione (ripartizione) della v.a. $\tilde{Z}$, $F(\tilde{Z})$, risulta essere la seguente :

$$F(\tilde{Z}) = \Pr\{\tilde{Z} \le z\} = \Pr\{\tilde{Y} \le \ln(\tilde{Z}\text{-}d)\} = N\left[\frac{\ln(\tilde{Z}-d)-\mu}{\sigma}\right]$$

e , quindi , dopo alcuni passaggi , si dimostra che la funzione di densità di $\tilde{Z}$ è :

$$F'(\tilde{Z}) = f(\tilde{Z}) = \frac{1}{(Z-d)\cdot\sigma\cdot\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\ln(Z-d)-\mu}{\sigma}\right]^2} \qquad (Z > d)$$

dove d , μ , σ sono i parametri(23) della distribuzione $\tilde{Z}$, cioè

$\tilde{Z} \sim \text{Log}N\ (d, \mu, \sigma)$.

Se il valore atteso ($E[\tilde{Z}]$), che da ora in poi chiameremo "m" o "a_1", lo scarto quadratico medio ($\sigma_{\tilde{Z}}$) e l'indice di asimmetria ($\gamma_{\tilde{Z}}>0$) del singolo danno $\tilde{Z}$ sono conosciuti , allora si ottengono i corrispondenti parametri della distribuzione mediante le seguenti relazioni :

$$d = m - \frac{\sigma_{\tilde{Z}}}{\eta} \; ; \qquad \sigma^2 = \ln(1+\eta^2)\; ; \qquad \mu = \ln(m-d) - \frac{\sigma^2}{2} \;, \quad \textbf{(2.16)}$$

dove η è una variabile ausiliaria pari alla radice reale dell'equazione :

$\eta^3 + 3\eta - \gamma_{\tilde{Z}} = 0.$

principali momenti della distribuzione log-normale sono forniti dalle seguenti relazioni :

$$\begin{cases} E[\tilde{Z}] = m = e^{\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)} + d \\ \sigma^2_{\tilde{Z}} = e^{\left(2\mu+\sigma^2\right)} \cdot e^{\sigma^2} - 1 \\ \gamma_{\tilde{Z}} = (e^{\sigma^2} + 2)\cdot\sqrt{e^{\sigma^2} - 1} \end{cases} \qquad \textbf{(2.17)}$$

E' utile notare che $\gamma_{\tilde{Z}}$ è sempre positivo e che , per valori molto elevati , la coda sinistra della distribuzione è molto corta , pertanto si potrebbero verificare dei problemi in caso di applicazione .

Oltre alla distribuzione log-normale , la distribuzione del danno può essere approssimata dalla distribuzione di *Pareto* che può essere utilmente impiegata per approssimare , in maniera analiticamente semplice , la "coda"della distribuzione del danno . L'esperienza assicurativa , infatti , ha mostrato che la formula di Pareto è spesso un appropriato modello per la funzione di distribuzione di $\tilde{Z}$, specialmente in quei casi in cui possono avvenire sinistri di eccezionale gravità .

Qualora la distribuzione del danno possa essere approssimata dalla Pareto , risulterà :

$$F(\tilde{Z}) = \Pr\{\tilde{Z} \le z\} = 1 - \left(\frac{D+\beta}{Z+\beta}\right)^{\alpha} \qquad (Z \ge D) \qquad \textbf{(2.18)}$$

dove α, β, D sono i parametri della distribuzione che devono soddisfare le seguenti relazioni : $\alpha > 0$ e $\beta > -D$.

Il primo parametro , α , esprime la "pesantezza" della coda della distribuzione : più piccolo è α , più "pesante" è la coda .Il secondo parametro , β, influenza maggiormente il range sinistro della distribuzione , e non modifica essenzialmente la coda della distribuzione nella regione dove Z è significativamente più grande di β. Il parametro D delimita il range di Z .

Un vantaggio della distribuzione di Pareto è rappresentato dalla semplicità di calcolo delle sue principali caratteristiche , in particolare dei suoi momenti principali . Pertanto avremo :

$$\begin{cases} E[\tilde{Z}] = m = \dfrac{\alpha D + \beta}{\alpha - 1} & \text{esiste solo se } \alpha > 1 \\ \sigma^2_{\tilde{Z}} = \dfrac{\alpha (D+\beta)^2}{(\alpha-1)^2 \cdot (\alpha - 2)} & \text{esiste solo se } \alpha > 2 \\ \gamma_{\tilde{Z}} = 2 \cdot \dfrac{(\alpha+1)}{(\alpha-3)} \cdot \sqrt{\dfrac{\alpha-2}{\alpha}} & \text{esiste solo se } \alpha > 3 \end{cases} \qquad \textbf{(2.19)}$$

Osserviamo che , come nel caso della log-normale , l'indice di asimmetria (quando esiste) è sempre positivo .

Questa funzione , come è facile notare dalla 2.19 , per piccoli valori di α, ha una coda molto "pesante". Questo lo si può capire anche dal fatto che i momenti semplici di ordine j , chiamiamoli a_j ,sono infiniti quando $j \geq \alpha$. Infatti , ad esempio , per $0 < \alpha \leq 1$, il valore atteso della distribuzione di Pareto è infinito . Questo problema (della non convergenza) è , comunque , sormontabile , dal momento che nella pratica esiste , in genere , un limite superiore al danno che si può verificare (massimo danno probabile) e , quindi , la parte più estrema della coda viene "tagliata".

Possono verificarsi dei casi in cui si è interessati a considerare solo quelle determinazioni del danno Z che sono contenute in un intervallo , all'ipotesi { $\tilde{Z} \in I$ }, e si parlerà di distribuzione *troncata* o *normalizzata* .

Consideriamo , per esempio , la distribuzione di *Pareto troncata*, fissando , pertanto , un limite massimo al singolo danno , Z_{max} , che rappresenta l'importo massimo che l'assicuratore si impegna a risarcire . Questo può verificarsi nel caso in cui l'importo del danno che supera un limitato , "I". Si considererà allora la distribuzione di $\tilde{Z}$, condizionata all'ipotesi { $\tilde{Z} \in I$ }, e si parlerà di distribuzione *troncata* o *normalizzata* .

Consideriamo , per esempio , la distribuzione di *Pareto troncata*, fissando , pertanto , un limite massimo al singolo danno , Z_{max} , che rappresenta l'importo massimo che l'assicuratore si impegna a risarcire . Questo può verificarsi nel caso in cui l'importo del danno che supera un certo livello, nel nostro caso Z_{max} ,viene ceduto in riassicurazione oppure non è coperto dalla polizza assicurativa . La funzione di ripartizione troncata della variabile aleatoria $\tilde{Z}$, sarà :

$$F_{tr}(\tilde{Z}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \tilde{Z} \geq Z_{max} \\ F(\tilde{Z}) & \text{se } Z < Z_{max} \end{cases}$$

I momenti $a_j = a_j(Z_{max})$ di una variabile aleatoria troncata , $\tilde{Z}_{tr}$ = min ($\tilde{Z}$, Z_{max}) sono sempre finiti e , in accordo con la 2.18 , i momenti della distribuzione di Pareto troncata (α, β, D) sono ottenuti dalla seguente formula :

$$a_j(Z_{max}) = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \cdot (-\beta)^{j-i} \cdot E[(Z_{tr} + \beta)^i] \;, \qquad \textbf{(2.20)}$$

dove $\quad E[(Z_{tr} + \beta)^i] = \dfrac{\alpha \cdot (D+\beta)^i - i \cdot (Z_{max} + \beta)^i \cdot (1 - F(Z_{max}))}{\alpha - i}.$

Nel caso in cui α fosse un numero intero , pari a “i” ($\alpha = i$) potrebbero sorgere dei problemi sulla risoluzione dei calcoli , in quanto il denominatore diventerebbe pari a 0 , ma si dimostra che , anche in questo caso , $E[(Z_{tr} + \beta)^i]$ assume valore finito.

Nel seguito vedremo della applicazioni pratiche in cui utilizzeremo qualcuna delle suddette distribuzioni atte a descrivere il costo medio del singolo sinistro , (non sono le uniche , ma sono quelle più utilizzate).

E’ utile ribadire che , al fine di ridurre la variabilità del costo sinistri aggregato , l’assicuratore generalmente provvede a tecniche riassicurative , proteggendosi , pertanto , da perdite rilevanti che possono sorgere a seguito dell’accadimento di sinistri eccessivamente numerosi o d’importi notevoli o di un sinistro catastrofale .

Nel primo capitolo abbiamo già analizzato l’impegno aleatorio a carico dell’assicuratore a seguito della diverse coperture riassicurative , pertanto , nel seguito soffermeremo la nostra attenzione alla variazione dell’andamento della riserva di rischio a seguito della riassicurazione . Dapprima , però , dobbiamo studiare la distribuzione del costo sinistri aggregato $\widetilde{X}$, in quanto una sua stima è determinante per simulare l’andamento della suddetta riserva .

2.4 Distribuzione composta della variabile aleatoria del "costo sinistri aggregato" , $\tilde{X}$.

Come già accennato precedentemente , secondo l'approccio collettivo della teoria del rischio , il costo sinistri aggregato viene analizzato considerando il portafoglio nella sua globalità. E' utile ribadire , in accordo con tale approccio , l'assunzione di ipotesi fortemente semplificatrici e precisamente , considerando $\tilde{N}_t$ la variabile aleatoria numero dei sinistri generato dal portafoglio (o dal ramo) in esame , nell' unità di tempo t , (esempio un anno) e $\tilde{Z}_{i,t}$ la variabile aleatoria costo sinistri di ogni singolo sinistro i-esimo verificatosi nell'anno t ,si postula quanto segue :

1.gli $\tilde{Z}_{i,t}$, i=1... $\tilde{N}_t$, sono identicamente distribuiti ,secondo la funzione di ripartizione $S(x) = \Pr\{\tilde{Z}_{i,t} \leq x\}=\{\tilde{Z}_{i+1,t} \leq x\}=\Pr\{\tilde{Z}_{i+2,t} \leq x\}=...$;

2.reciproca indipendenza di tutti i sinistri .

In tali condizioni , il costo sinistri aggregato nel periodo t è definito da :

$$\tilde{X}_t = \sum_{i=1}^{\tilde{N}_T} \tilde{Z}_{i,t} \qquad (\tilde{X}_t = 0 \text{ se } \tilde{N}_t = 0)$$

Se alle ipotesi predette , aggiungiamo l'ipotesi (3) che anche $\tilde{Z}$ e $\tilde{N}$ siano stocasticamente indipendenti , la funzione di ripartizione del costo sinistri aggregato $\tilde{X}$ (per semplicità di scrittura verrà meno la lettera t al pedice) sarà:

$$F_{\tilde{X}}(x) = \Pr\{\tilde{X} \leq x\} = \Pr\{\tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_2 + ... \tilde{Z}_{\tilde{N}} \leq x\} = \sum_{N=0}^{\infty} \Pr\{\tilde{N} = n\} \cdot$$

$$\Pr\{\tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_2 + ... + \tilde{Z}_{\tilde{N}} \leq x\} = \sum_{N=0}^{\infty} \Pr\{\tilde{N} = n\} \cdot S^{*N}(x) = \sum_{N=0}^{\infty} Pn \cdot S^{*N}(x)$$

dove $S^{*N}(x)$, ricordiamo , esprime l'ennesima convoluzione della distribuzione S(x) .

Sulla scorta di quanto detto , essendo $\tilde{X}$ una variabile aleatoria composta , $F_{\tilde{X}}(x)$ è una distribuzione composta . Precisamente :

- se $\tilde{N}$ si distribuisce secondo una Poisson pura , allora $\tilde{X}$ definisce un processo di Poisson composto ;
- se $\tilde{N}$ si distribuisce secondo una Poisson mista , allora $\tilde{X}$ definisce un processo di Poisson composto misto ;
- se $\tilde{N}$ si distribuisce secondo una Polya (binomiale negativa) , allora $\tilde{X}$ definisce un processo di Polya composto .

Al fine di studiare le caratteristiche e quindi i momenti della variabile aleatoria $\tilde{X}$ si può utilizzare , la funzione generatrice dei momenti , $M_{\tilde{X}}(s)$, e dei cumulanti , $\psi_{\tilde{X}}(s)$.

Supponendo di conoscere il numero totale dei sinistri in portafoglio nel periodo t , cioè ponendo $\tilde{N} = N$, e richiamando la proprietà della funzione generatrice dei momenti sulla somma di variabili aleatorie indipendenti (se $\tilde{X}_1$ e $\tilde{X}_2$ sono v.a. indipendenti , allora la f.g.m. della loro somma è uguale al prodotto delle singole funzioni generatrici) , si avrà :

$$M_{\tilde{X}}(s \mid \tilde{N} = N) = M_{\tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_2 + \ldots + \tilde{Z}_N}(s) = M_{\tilde{Z}_1} \cdot M_{\tilde{Z}_2} \cdot \ldots \cdot M_{\tilde{Z}_N}(s) \overset{(24)}{=}$$

$$M_{\tilde{Z}} \cdot M_{\tilde{Z}} \cdot \ldots \cdot M_{\tilde{Z}}(s) \overset{(25)}{=} \left[M_{\tilde{Z}}(s) \right]^N .$$

Per la proprietà delle medie condizionate , avremo che la funzione generatrice di $\tilde{X}$, non condizionata , sarà la media delle rispettive $M_{\tilde{X}}(s \mid \tilde{N} = N)$ ponderate con la probabilità che sia $\tilde{N} = N$:

---

(24) Per l'ipotesi (1) , cioè per l'identicità della distribuzione delle variabili aleatorie $\tilde{Z}_i$.

(25) Avendo posto $\tilde{N} = N$.

$$M_{\tilde{X}}(s) = \sum_{K=0}^{\infty} \Pr\{\tilde{N} = N\} \cdot M_{\tilde{X}}(s \mid \tilde{N} = N) = \sum_{K=0}^{\infty} \Pr\{\tilde{N} = N\} \cdot \left[M_{\tilde{Z}}(s)\right]^{N} \overset{(26)}{=}$$

$$E\left[e^{\tilde{N} \cdot \ln M_{\tilde{Z}}(s)}\right] = M_{\tilde{N}}(\ln M_{\tilde{Z}}(s)) \overset{(27)}{=} M_{\tilde{N}}(\psi_{\tilde{Z}}(s)) .$$

La funzione generatrice dei cumulanti sarà :

$$\psi_{\tilde{X}}(s) = \ln(M_{\tilde{N}}(\psi_{\tilde{Z}}(s)) = \psi_{\tilde{N}}(\psi_{\tilde{Z}}(s)) ,$$

dove $\psi_{\tilde{N}}$ è la funzione generatrice dei cumulanti della variabile aleatoria

$\tilde{N}$, cioè del numero totale dei sinistri ;

$\psi_{\tilde{Z}}$ è la funzione generatrice dei cumulanti della variabile aleatoria

$\tilde{Z}$, cioè del costo del singolo sinistro .

Supponiamo che $\tilde{N}$ si distribuisca secondo una Poisson pura e quindi che $\psi_{\tilde{N}}(s) = \lambda(e^{S} - 1)$, allora $\psi_{\tilde{X}}(s) = \psi_{\tilde{N}}(\psi_{\tilde{Z}}(s)) = \lambda\,(e^{\psi_{\tilde{Z}}(s)} - 1) =$

$$\lambda \cdot e^{\ln M_{\tilde{Z}}(s)} - \lambda = \lambda \cdot M_{\tilde{Z}}(s) - \lambda .$$

Applicando le proprietà della funzione generatrice dei cumulanti (e quella dei momenti) è possibile ottenere i momenti e quindi le principali caratteristiche della variabile aleatoria $\tilde{X}$. Pertanto si avrà : **(2.22)**

$$K_1(\tilde{X}) = E[\tilde{X}] = \psi'_{\tilde{X}}(0) = \lambda \cdot M'_{\tilde{Z}}(0) = \lambda \cdot E[\tilde{Z}] = \lambda \cdot a_1(\tilde{Z}) = \lambda \cdot m$$

$$K_2(\tilde{X}) = \sigma^2(\tilde{X}) = \psi''_{\tilde{X}}(0) = \lambda \cdot M''_{\tilde{Z}}(0) = \lambda \cdot a_2(\tilde{Z}) .$$

---

(26) Per le proprietà dei logaritmi , $\left[M_{\tilde{Z}}(s)\right]^{N}$ si può anche scrivere come $e^{N \cdot \ln M_{\tilde{Z}}(s)}$.

(27) Per definizione di funzione generatrice dei cumulanti .

$K_3(\tilde{X}) = \mu_3(\tilde{X}) = \psi'''_{\tilde{X}}(0) = \lambda \cdot M'''_{\tilde{Z}}(0) = \lambda \cdot a_3(\tilde{Z}) \Rightarrow \gamma_{\tilde{X}} = \dfrac{\lambda \cdot a_3(\tilde{Z})}{(\lambda \cdot a_2(\tilde{Z}))^{3/2}} =$

$\dfrac{a_3(\tilde{Z})}{(a_2(\tilde{Z}))^{3/2} \cdot \sqrt{\lambda}}$.

Se invece $\tilde{N}$ si distribuisce secondo una Poisson mista e quindi $\psi_{\tilde{N}}(s) = \psi_{\tilde{q}}[\lambda(e^{S}-1)]$, allora $\psi_{\tilde{X}}(s) = \psi_{\tilde{N}}(\psi_{\tilde{Z}}(s)) = \psi_{\tilde{q}}(\lambda(e^{\psi_{\tilde{Z}}(s)}-1))$ $= \psi_{\tilde{q}}(\lambda \cdot e^{\ln M_{\tilde{Z}}(s)} - \lambda) = \psi_{\tilde{q}}(\lambda \cdot (M_{\tilde{Z}}(s)-1))$.

Come prima , calcoliamo , tramite la funzione generatrice dei cumulanti (e quella dei momenti) , i momenti e quindi le principali caratteristiche della variabile aleatoria $\tilde{X}$. Pertanto si avrà : **(2.23)**

$K_1(\tilde{X}) = E[\tilde{X}] = \psi'_{\tilde{X}}(0) \overset{(28)}{=} \lambda \cdot M'_{\tilde{Z}}(0) \cdot \psi'_{\tilde{q}}(0) = \lambda \cdot a_1 \cdot E[\tilde{q}] \overset{(29)}{=} \lambda \cdot m$.

$K_2(\tilde{X}) = \sigma^2(\tilde{X}) = \psi''_{\tilde{X}}(0) = \lambda \cdot a_2(\tilde{Z}) \cdot \psi'_{\tilde{q}}(0) + (\lambda \cdot a_1)^2 \cdot \psi''_{\tilde{q}}(0) \overset{(30)}{=} \lambda \cdot a_2(\tilde{Z}) \cdot$

$E[\tilde{q}] + \lambda^2 \cdot a_1^2(\tilde{Z}) \cdot \sigma^2_{\tilde{q}} = \lambda \cdot a_2(\tilde{Z}) + \lambda^2 \cdot m^2 \cdot \sigma^2_{\tilde{q}}$.

Con gli stessi procedimenti si ottiene : $K_3(\tilde{X}) = \mu_3(\tilde{X}) = \psi'''_{\tilde{X}}(0) =$

$\lambda \cdot a_3(\tilde{Z}) + 3\lambda^2 m\, a_2(\tilde{Z})\, \sigma^2_{\tilde{q}} + \lambda^3 m^3 \gamma_{\tilde{q}}\, \sigma^3_{\tilde{q}} \Rightarrow$

---

(28) $\psi'_{\tilde{X}}(s) = \lambda \cdot M'_{\tilde{Z}}(s) \cdot \psi'_{\tilde{q}}(\lambda \cdot (M_{\tilde{Z}}(s)-1)) \Rightarrow \psi'_{\tilde{X}}(0) = \lambda \cdot M'_{\tilde{Z}}(0) \cdot \psi'_{\tilde{q}}(0)$.

(29) $E[\tilde{q}]=1$, in quanto precedentemente abbiamo imposto che il parametro sottostante delle distribuzione "del numero dei sinistri" , in presenza di fattori di disturbo , debba rimanere sempre λ .

(30) $\psi''_{\tilde{X}}(s) = \lambda \cdot M''_{\tilde{Z}}(s) \cdot \psi'_{\tilde{q}}(\lambda \cdot (M_{\tilde{Z}}(s)-1)) + (\lambda \cdot M'_{\tilde{Z}}(s))^2 \cdot \psi''_{\tilde{q}}(\lambda \cdot (M_{\tilde{Z}}(s)-1))$

$\Rightarrow \psi''_{\tilde{X}}(0) = \lambda \cdot a_2 \cdot \psi'_{\tilde{q}}(0) + (\lambda \cdot a_1)^2 \cdot \psi''_{\tilde{q}}(0)$.

$$\gamma_{\tilde{X}} = \frac{\lambda \cdot a_3(\tilde{Z}) + 3\lambda^2 \, m \, a_2(\tilde{Z})\sigma^2_{\tilde{q}} + \lambda^3 m^3 \gamma_{\tilde{q}} \sigma^3_{\tilde{q}}}{(\lambda \cdot a_2(\tilde{Z}) + \lambda^2 m^2 \sigma^2_{\tilde{q}})^{3/2}}$$

Comparando le due distribuzioni “poissoniane” , è immediato osservare che valgono le stesse considerazioni fatte nel caso dello studio della distribuzione della variabile aleatoria $\tilde{N}$. E’ utile ribadire che i fattori di disturbo incidono sull’asimmetria e sulla variabilità , assoluta e relativa, del portafoglio, aumentandone i valori e quindi rendendo i casi estremi maggiormente probabili . Come avevamo osservato nell’esempio 2, par. 2.1.2 , tabella 2.D, infatti , la probabilità che la variabile aleatoria $\tilde{N}$ sia minore di un certo valore N , Pr{ $\tilde{N} \le N$}, è maggiore in presenza dei fattori di disturbo. Ne consegue che al fine di diminuire la variabilità del portafoglio dovuta ai fattori di disturbo , $\sigma_{\tilde{q}}$, sarà più adatta una copertura di tipo globale , piuttosto che una copertura che agisce sul singolo rischio o sinistro . In particolare se , in riferimento ad un dato portafoglio , si verifica un gran numero di sinistri “piccoli” , il riassicuratore di un trattato “excess of loss” non interverrà , in quanto questo trattato non incide sul numero dei sinistri , ma sul costo del singolo sinistro .

Passiamo al caso in cui $\tilde{N}$ si distribuisca secondo una Polya (o Binomiale negativa) , basterà sostituire a $\sigma^2_{\tilde{q}} \to 1/h$ e a $\gamma_{\tilde{q}} \to 2/\sqrt{h}$ per ottenere le solite caratteristiche della variabile aleatoria $\tilde{X}$, pertanto si avrà :

$K_1(\tilde{X}) = E[\tilde{X}] = \lambda \cdot m$.

$K_2(\tilde{X}) = \sigma^2(\tilde{X}) = \lambda \cdot a_2(\tilde{Z}) + \lambda^2 \cdot m^2 \cdot 1/h$

Con gli stessi procedimenti si ottiene : $K_3(\tilde{X}) = \mu_3(\tilde{X}) =$

$$\lambda \cdot a_3(\tilde{Z}) + 3\lambda^2 \cdot m \cdot a_2(\tilde{Z}) \cdot 1/h + \lambda^3 \cdot m^3 \cdot 2/\sqrt{h} \cdot (1/\sqrt{h})^{3/2} \Rightarrow$$

$$\gamma_{\tilde{X}} = \frac{\lambda \cdot a_3(\tilde{Z}) + 3\lambda^2 \cdot m \cdot a_2(\tilde{Z}) \cdot 1/h + \lambda^3 \cdot m^3 \cdot 2/\sqrt{h} \cdot (1/\sqrt{h})^{3/2}}{(\lambda \cdot a_2(\tilde{Z}) + \lambda^2 \cdot m^2 \cdot 1/h)^{3/2}}.$$

Come nei casi delle variabili aleatorie “numero totale dei sinistri” e “costo del singolo sinistro” , per un’analisi completa della variabile aleatoria composta “costo sinistri aggregato”, occorre saperne calcolare la funzione di ripartizione , cioè $F(X) = \Pr\{\tilde{X} \leq X\}$.

Si dimostra(32) che , nel caso in cui siano verificate le seguenti due condizioni :

a)(33) $p_N = \Pr\{\tilde{N} = N\} = (a+b/N) \cdot p_{N-1}$ per $N = 1,2,3,\ldots$

dove a e b sono due costanti ;

b) $Z_i = i \cdot C$ per $i = 0,1,2,3,\ldots,r$

dove C rappresenta un determinato valore monetario , detto “step” e “r” sono le possibili determinazioni del costo del singolo sinistro che descrivono una v.a. $\tilde{Z}$ non negativa , a “rete”, cioè discreta ed equidistante , vale la seguente formula “esatta” per il calcolo della distribuzione di probabilità (e quindi della funzione di ripartizione) :

$$f_j = \Pr\{\tilde{X} = j \cdot C\} = \begin{cases} f_0 & j = 0 \\ \dfrac{1}{1 - a \cdot s_0} \cdot \displaystyle\sum_{i=1}^{\min(j,r)} \left(a + \frac{i \cdot b}{j}\right) \cdot s_i \cdot f_{j-1} & j = 1,2,\ldots \end{cases}$$

(32)Vedi pagina 101-102 R.E.Beard , T. Pentikainen , E. Pesonen(1984) :“Risk Theory- the stochastic basis of insurance” . Ed.Chapman & Hall , Londra .

(33) Si dimostra che questa condizione è soddisfatta per le distribuzioni p_N del tipo Poisson , Polya e Binomiale .

dove $s_i = \Pr\{\tilde{Z} = i \cdot C\}$, mentre f_0 dipende dalla distribuzione p_N .

Applicando la definizione di funzione di ripartizione si ha

$$F_{\tilde{X}}(j \cdot C) = \Pr\{\tilde{X} \leq j \cdot C\} = \sum_{i=0}^{j} f_i . \qquad \textbf{(2.24)}$$

Adottando questa formula , però , si potrebbero incontrare degli inconvenienti dovuti agli eccessivi tempi di elaborazione , soprattutto nel caso di r molto grande , cioè in presenza di un elevato numero delle possibili determinazioni di $\tilde{Z}$.

Per ovviare a tali inconvenienti , si può ricorrere a delle formule di approssimazione della funzione di distribuzione F . In questa sede ne tratteremo tre .

Un primo banale approccio è quello di approssimare la F alla distribuzione Normale (c.d. *Normal approximation* , *N*) , pertanto si avrà:

$$F_{\tilde{X}}(X) = \Pr\{\tilde{X} \leq X\} \cong \Pr\{\frac{\tilde{X} - E(\tilde{X})}{\sigma_{\tilde{X}}} \leq \frac{X - E(\tilde{X})}{\sigma_{\tilde{X}}}\} \cong N\left(\frac{X - E(\tilde{X})}{\sigma_{\tilde{X}}}\right) \qquad \textbf{(2.25)}$$

Come ben sappiamo , però , la distribuzione Normale è simmetrica e , quindi , non tiene conto dell'indice di asimmetria . Pertanto non si presta ad approssimare in modo appropriato la distribuzione della variabile aleatoria "costo sinistri aggregato" , a meno che $\gamma(\tilde{X})$ non sia molto piccolo . L' utilizzo di questa formula nei casi in cui $\gamma(\tilde{X})$ non sia trascurabile , provoca una sottostima rilevante del costo sinistri , provocando , quindi , una sottostima della probabilità di rovina della compagnia , che si traduce in un' inadeguatezza a livello di gestione dei rischi in portafoglio e quindi nella determinazione dei premi da far pagare agli assicurati .

Un altro approccio è quello di utilizzare la Normale tenendo però conto anche di $\gamma(\tilde{X})$, (c.d. *Normal Power approximation* , *NP*) mediante la seguente approssimazione :

$$F_{\tilde{X}}(X) = \Pr\{\tilde{X} \le X\} \cong N\left[-\frac{3}{\gamma_{\tilde{X}}} + \sqrt{\frac{9}{\gamma_{\tilde{X}}^{2}} + 1 + \frac{6}{\gamma_{\tilde{X}}} \cdot \frac{X - E[\tilde{X}]}{\sigma_{\tilde{X}}}}\,\right] \qquad \textbf{(2.26)}$$

La suddetta formula fornisce una discreta approssimazione fino a che risulta $\gamma(\tilde{X}) \le 1$ ed è valida solo per la coda destra di $F_{\tilde{X}}(X)$, $X>E[\tilde{X}]$, pertanto ci restituisce una stima della variabile $\tilde{X}$ più corretta rispetto al caso precedente .

Un altro criterio è quello di utilizzare la c.d. *Wilson-Hilferty approximation* , *WH,* che rispetto alla . *Normal Power* ha il vantaggio di valere anche per la coda sinistra della distribuzione della v.a. $\tilde{X}$, ($X< E[\tilde{X}]$) , in questo caso avremo :

$$F_{\tilde{X}}(X) = \Pr\{\tilde{X} \le X\} \cong N\left[\, c_1 + c_2 (x + c_3)^{1/3}\right] \text{ dove :} \qquad \textbf{(2.27)}$$

$$x = \frac{X - E(\tilde{X})}{\sigma_{\tilde{X}}}, \qquad c_1 = \frac{\gamma_{\tilde{X}}}{6} - \frac{6}{\gamma_{\tilde{X}}}, \qquad c_2 = 3 \cdot \left(\frac{6}{\gamma_{\tilde{X}}}\right)^{2/3}, \qquad c_3 = \frac{2}{\gamma_{\tilde{X}}}.$$

Occorre tener presente , però , che al crescere di $\gamma_{\tilde{X}}$ l'efficacia delle approssimazioni si deteriora rapidamente , in particolare , se $\gamma_{\tilde{X}}$ supera 1 o al più 1.2 i metodi suddetti divengono inaffidabili e , pertanto , non dovrebbero essere utilizzati. Nel seguito vedremo alcuni esempi numerici sulle suddette formule di approssimazione .

Capitolo 3

Studio dell'andamento della riserva di rischio , della probabilità di rovina e della solvibilità di una compagnia ramo danni.

Premessa : la teoria del rischio si propone quale importante strumento di analisi per il management di una generica compagnia assicurativa , consentendo quindi di studiare e stimare , nel breve , medio e lungo periodo , il profilo della sua solvibilità , nonché l'andamento della riserva di rischio e , di conseguenza , la probabilità di rovina della compagnia stessa .A tal fine , deve essere condotta un'appropriata analisi sulla gestione del rischio , considerando quindi la composizione del portafoglio d'investimenti e dei contratti della compagnia stessa e il capitale a rischio disponibile al momento della valutazione . Una volta fissata la probabilità di rovina , accettabile ed appropriata per la compagnia , è opportuno stabilirne , per un determinato orizzonte temporale , un limite superiore che non deve essere oltrepassato . Nel caso in cui il risultato della stima della probabilità di rovina ecceda il limite sopra menzionato , il management della compagnia dovrà ricorrere a delle strategie ,(ad esempio un' accurata selezione dei rischi da assumere per mantenere il portafoglio il più omogeneo possibile ,o/e aumentare i caricamenti di sicurezza , o/e aumentare il capitale a rischio mediante nuove contribuzioni agli azionisti, o/e ricorrere alla riassicurazione), al fine di riportare il limite superiore di tale probabilità ad un livello appropriato per la compagnia stessa .

Consideriamo ora tutti gli aspetti della realtà gestionale , con particolare riguardo al costo sinistri , alle politiche tariffarie e a quelle riassicurative, alla stima delle riserve , alla volatilità degli assets , quindi alla scelta degli investimenti e alle spese in generale.

Facendo riferimento alle voci presenti nel conto economico e nello stato patrimoniale di una compagnia assicurativa , nel nostro caso, ramo danni, perverremo dunque al concetto e , quindi , al significato della riserva di rischio , al fine di poterne effettuare una stima e , quindi , un probabile andamento , nei vari anni di gestione .Consideriamo dunque la seguente equazione (emerging costs equation)*: **(3.1)**

$A_t = A_{t-1} + B'_t + J_t + X'_{re\,t} + U_{new\,t} + \Delta W_t - B'_{re\,t} + X'_t + E_t + T_t + D_t$

dove t è il generico periodo di valutazione , in riferimento del quale :

A_t è l'ammontare delle attività ;

A_{t-1} è l'ammontare delle attività alla fine del periodo t-1, quindi all'inizio del periodo t ;

B'_t è l'ammontare dei premi di tariffa sottoscritti ;

J_t è l'ammomtare dei proventi finanziari , ordinari e straordinari ;

$X'_{re\,t}$ è l'ammontare dei sinistri a carico del riassicuratore ;

$U_{new\,t}$ è l'ammontare dei nuovi versamenti di capitale ;

ΔW_t è la variazione dei debiti /crediti verso banche o altri enti;

$B'_{re\,t}$ è l'ammontare dei premi di tariffa ceduti al riassicuratore ;

X'_t è l'ammontare del costo dei sinistri accaduti;

E_t è l'ammontare delle spese di gestione ,di acquisizione e di amministrazione sostenute ;

TX_t è l'ammontare delle imposte e delle tasse;

D_t è l'ammontare dei dividendi distribuiti agli azionisti.

Per una corretta stima della riserva di rischio , occorre considerare l'ammontare dei premi e dei sinistri di competenza e calcolare correttamente il valore delle attività e delle passività . Consideriamo

* Daykin C. , Pentikainen T. , Pesonen M.(1994) : "Practical Rick Theory for actuaries" Ed. Chapman & Hall , Londra .

dunque i premi di competenza del periodo t:

$B_t = B'_t - V_t + V_{t-1}$ **(3.2)**

dove :

B_t è l'ammontare dei premi di competenza nel periodo t ;

B'_t vedere formula 3.1 ;

V_t è l'ammontare della riserva premi alla fine del periodo t ;

V_{t-1} è l'ammontare della riserva premi alla fine del periodo t-1,quindi inizio del periodo t .

Calcoliamo ora i sinistri di competenza del periodo t :

$X_t = X'_t + C_t - C_{t-1}$ **(3.3)**

dove :

X_t è l'ammontare dei sinistri di competenza del periodo t

X'_t vedere formula 3.1 ;

C_t è l'ammontare della riserva sinistri alla fine del periodo t ;

C_{t-1} è l'ammontare della riserva sinistri alla fine del periodo t-1 , quindi all'inizio del periodo t .

Consideriamo dunque le passività nel periodo t, escludendo quelle relative agli azionisti :

$L_t = V_t + C_t + W_t + L_{ot}$ **(3.4)**

dove:

V_t vedere formula 3.2 ;

C_t vedere formula 3.3 ;

W_t è l'ammontare dei debiti verso le banche o altri creditori;

L_{ot} è l'ammontare delle altre riserve tecniche .

La riserva di rischio , U_t , da stimare nei vari anni ,è data dalla differenza tra le attività A_t e le passività L_t , vale a dire :

$U_t = A_t - L_t$ **(3.5)**

Tale differenza può anche essere chiamata : solvency margin , shareholders' fund , surplus o asset margin .

Sostituendo (3.2) e (3.3) nella (3.1), si ottiene dalla (3.5) la seguente equazione (basic accounting equation):

$U_t = U_{t-1} + B_t + J_t - X_t - E_t - B_{re\,t} + X_{re\,t} + U_{new\,t} - D_t - (L_{ot} - L_{ot-1})$

dove $(L_{ot}-L_{ot-1})$ è la variazione delle passività ,(vedere 3.4),dovuta solo a modifiche di valore , ma senza flussi di cassa.

Al fine di poter effettuare delle previsioni sull'andamento della riserva di rischio , nel breve e nel lungo periodo , consideriamo come punto di partenza , l'equazione semplificata , secondo la teoria del rischio classica, della variazione annua della riserva di rischio , senza pertanto considerare il rendimento degli investimenti :

$$\tilde{U} = \tilde{U}_{t-1} + B_t - (\tilde{X}_t + E_t) = \tilde{U}_{t-1} + P_t \cdot (1+\eta) + E_t - ((\tilde{X}_t + E_t) = \tilde{U}_{t-1} + P_t \cdot (1+\eta) - \tilde{X}_t \qquad \textbf{(3.6)}$$

dove :

$\tilde{X}_t$ è l'ammontare del costo sinistri nel periodo t;

P_t è l'ammontare , supposto noto, dei premi equi (o di rischio) nel periodo t , pertanto equivalente al valore atteso del costo sinistri ,cioè

$P_t = E[\tilde{X}_t]$;

η è il caricamento di sicurezza , supposto noto , espresso in percentuale dei premi equi , pertanto la quantità $P_t \cdot (1+\eta)$ è l'ammontare dei premi puri nel periodo t .

Si deduce che la riserva di rischio al tempo t è una variabile aleatoria , in quanto è la somma di una componente deterministica e di una componente aleatoria pertanto , per effettuare delle previsioni sul suo andamento nei vari anni di gestione della compagnia , occorre conoscere, considerando l'equazione semplificata 3.6 , la frequenza di accadimento dei sinistri e la variabilità della loro dimensione in termini di costo, nonchè i principali momenti (media , varianza , ecc) della distribuzione di probabilità dell ' unica variabile aleatoria esistente in tale equazione, cioè del costo sinistri aggregato , $\widetilde{X}_t$, nel periodo di valutazione t.

3.1 Studio dell'andamento della riserva di rischio , "$\widetilde{U}$" , e della relativa probabilità di rovina , nel breve e nel lungo periodo .

3.1.1 Analisi di breve periodo del processo di rischio $\widetilde{U}$.

Per uno studio completo dell' andamento della riserva di rischio , occorre calcolare i suoi momenti principali . Consideriamo la sua forma più semplificata , secondo la formula 3.6 , riferita ad un orizzonte temporale annuale , in particolare al primo anno di gestione :

$\widetilde{U} = U_0 + [(1+\eta)\cdot P - \widetilde{X})]$,

dove , ricordiamo :

$\widetilde{X}$ è la v.a. del costo sinistri aggregato nel periodo di riferimento (nel nostro caso nel primo anno di gestione) ;

P è l'ammontare , supposto noto, dei premi equi (o di rischio) nel periodo di riferimento, pertanto equivalente al valore atteso del costo sinistri cioè $P = E[\widetilde{X}]$;

η è il caricamento di sicurezza , supposto noto , espresso in percentuale dei premi equi , pertanto l'importo $P \cdot (1+\eta)$ è l'ammontare dei premi puri nel periodo di riferimento .

Applicando la proprietà di additività e moltiplicatrice del valore atteso e della varianza , si avrà : **(3.7)**

$E(\widetilde{U}) = E[U_0 + (1+\eta)\cdot P - E(\widetilde{X})] \overset{(33)}{=} U_0 + \eta\cdot P$;

$\sigma^2(\widetilde{U}) = (-1)^2\sigma^2(\widetilde{X}) = \sigma^2(\widetilde{X})$;

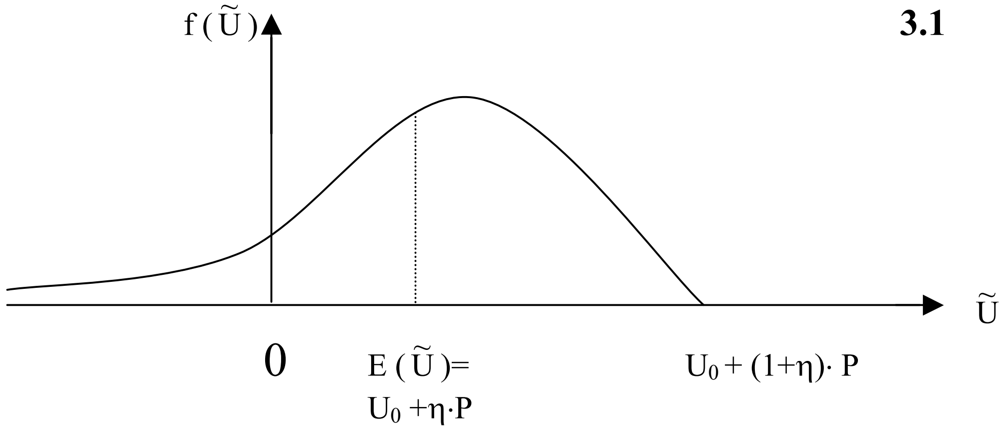
$$\mu_3(\tilde{U}) = E\,[\tilde{U} - E(\tilde{U})]^3 = E\,[U_0 + (1+\eta)\cdot P - \tilde{X} - U_0 + \eta\cdot P]^3 = E\,[P - \tilde{X}]^3 =$$

$$E[E[\tilde{X}] - \tilde{X}]^3 = -E[\tilde{X} - E[\tilde{X}]]^3 = -\mu_3(\tilde{X}) \Rightarrow \gamma(\tilde{U}) = \frac{\mu_3(\tilde{U})}{\sigma^3(\tilde{U})} = -\frac{\mu_3(\tilde{X})}{\sigma^3(\tilde{X})}$$

$$= -\gamma(\tilde{X}) .$$

Indichiamo con $f(\tilde{U})$ la funzione di probabilità della riserva di rischio e tracciamone un probabile andamento

3.1



Come si può notare il grafico ha la coda sinistra illimitata , pertanto la nostra v.a. $\tilde{U}$ può assumere valori infinitamente negativi , questo è dovuto alla presenza dell'unica variabile aleatoria presente nella formula, $\tilde{X}$, che , a meno della presenza di massimali nella polizza o di pieni di conservazione , può assumere , diversamente dai premi di tariffa , un ammontare illimitato . La coda destra della distribuzione $f(\tilde{U})$, invece , è corta e limitata , in quanto , se l'anno di gestione è eccezionalmente "fortunato" , si avrà $\tilde{X} = 0$ e quindi $\tilde{U}$ al massimo potrà raggiungere il valore $U_0 + (1+\eta)\cdot P$.

Nell'ambito dello studio della riserva di rischio è fondamentale stimare la probabilità che essa possa assumere risultato negativo e adottare

(34) Ricordiamo che $P = E[\tilde{X}]$.

adeguate strategie atte a ridurre tale probabilità. Ricordiamo che ricorrere alla riassicurazione riduce il costo sinistri a carico della compagnia cedente e quindi , a meno di sacrifici di utili troppo elevati, la compagnia riduce la sua probabilità di rovina .

Facendo riferimento al precedente grafico , calcolare al probabilità di rovina significa trovare l'area sottesa dalla curva nel quadrante in cui $\tilde{U}$ è minore di 0 , pertanto , chiamata quest'area "α " , si avrà: **(3.8)**

$$\alpha = \Pr\{\tilde{U} < 0\} = \Pr\{U_0 + (1+\eta)\cdot P - \tilde{X}) < 0\} = \Pr\{\tilde{X} > U_0 + (1+\eta)\cdot P\} = 1 - \Pr\{\tilde{X} \leq U_0 + (1+\eta)\cdot P\} = 1 - F_{\tilde{X}}(U_0 + (1+\eta)\cdot P).$$

A questa probabilità viene imposto un limite superiore (limite superiore del Cantelli) che si può calcolare anche senza individuare la distribuzione di $\tilde{X}$.Tale limite è dato dalla seguente espressione :

$$\alpha = \Pr\{\tilde{U} = U_0 + (1+\eta)\cdot P - \tilde{X}) < 0\} \leq \frac{1}{[1 + \frac{U_0 + \eta\cdot P}{\sigma(\tilde{X})}]^2}, \qquad \textbf{(3.9)}$$

dove $\frac{U_0 + \eta\cdot P}{\sigma(\tilde{X})}$ è detto indice di stabilità .

Dapprima limiteremo la nostra valutazione ad un anno di gestione , dato che , in questo modo , è più facile trovare delle interdipendenze tra le variabili in gioco , (esempio la dimensione del portafoglio , il costo sinistri , la riassicurazone , i caricamenti di sicurezza , ecc…) in modo da rendere semplice l'analisi della struttura del processo di rischio , ma non dobbiamo dimenticare che la valutazione limitata ad un solo anno di gestione , non è sufficiente per poter fare delle considerazioni su importanti questioni , come ad esempio sull'evoluzione della solvibilità della compagnia o su pianificazioni di lungo termine , ecc….

Nel nostro caso possiamo facilmente osservare che per diminuire α e, quindi, per aumentare l'indice di stabilità si potrebbero adottare le seguenti strategie :

- diminuire la variabilità del portafoglio , $\sigma(\widetilde{X})$, mediante la riassicurazione o la selezione dei rischi ;
- aumentare il capitale iniziale , cioè U_0, attraverso nuove contribuzioni degli azionisti ;
- aumentare i caricamenti di sicurezza e, di conseguenza , i premi da richiedere agli assicurati .

Certamente , il "management" seguirà la strategia che garantirà il miglior profitto per gli azionisti , con la limitazione , però , di fissare una probabilità di rovina che non dovrà essere superata. In pratica , una volta stimato il rapporto rischio/rendimento per ogni strategia applicabile , potrà essere tracciata una frontiera efficiente , pertanto il "management" sceglierà quella strategia , che , con un livello di rischio tollerabile , restituirà il massimo profitto . L'adozione della prima strategia , analizzata sotto l'aspetto della riassicurazione , come già detto , porterà l'assicuratore a dover pagare un prezzo per il servizio di trasferimento del rischio . Pertanto, l'assicuratore stesso , mentre vedrà diminuire la variabilità e quindi il rischio del proprio portafoglio , dovrà ripartire con il riassicuratore gli utili attesi e , quindi, la profittabilità dei rischi riassicurati , a seconda delle condizioni del trattato . A volte , però , il sacrificio degli utili potrebbe essere considerato eccessivo dal management della compagnia cedente , in quanto si potrebbe verificare che , nonostante la variabilità della riserva di rischio (in altre parole il patrimonio netto della compagnia) si riduca ad un livello adeguato per la compagnia stessa , il sacrificio degli utili sia tale da causare un aumento della probabilità di rovina della compagnia , anziché una diminuzione , pertanto , in questo caso , al fine di ridurre la propria esposizione aleatoria , la compagnia sarà portata ad optare per altre strategie . Come abbiamo precedentemente affermato , la riduzione della variabilità del portafoglio può essere raggiunta anche tramite la selezione dei rischi. Questa strategia , però , è applicata quasi a stento , in quanto il management della compagnia è generalmente contrario a "sacrificare" i premi , anche perché il volume dei premi di tariffa , è uno dei principali aspetti della compagnia , spesso rappresentativi del suo prestigio e della sua forza economica sul mercato . Adottando la seconda strategia potrebbero , invece , sorgere dei problemi di reperimento di capitali o, comunque , nel caso in cui altre variabili rimanessero invariate , tale strategia avrebbe delle ripercussioni sul bilancio della compagnia in termini di riduzione del ROE (return on equity) .Pertanto , agli azionisti sarà richiesto un aumento di capitale solo in quei casi in cui il trasferimento dei rischi , di cui si abbisogna , implica un sacrificio di utili più consistente rispetto alla riduzione del ROE (previsto). Un aumento dei caricamenti di sicurezza (terza strategia) , invece , da una parte si traduce in un aumento del valore atteso degli utili della compagnia nell'anno di gestione di riferimento , dall'altra , invece , potrebbe comportare dei problemi di competitività all'interno del mercato assicurativo , in quanto un aumento del livello dei premi potrebbe causare una riduzione del numero di polizze e , in alcuni casi , anche una diminuzione del livello dei premi. Non va trascurato il fatto che un alto numero di rischi (polizze) omogenei assicura un livello di variabilità relativa piuttosto basso , e , quindi , un più largo numero di polizze implica una riduzione delle variabilità del "loss ratio"(cioè del rapporto costo sinistri dell'esercizio/premi di tariffa di competenza) e una migliore stabilità dei risultati assicurativi .

A titolo di esemplificazione numerica[35] , calcoliamo la probabilità di rovina (approssimata) per le tre compagnie (vedi esempio 3)ALFA , BETA e GAMMA , al variare di η e di U_0 .Pertanto in accordo con le formule 2.25, 2.26, 2.27 e 3.8 si avrà - esempio 4- :

- se $\eta = 0$ e $U_0=0$

$\alpha = \Pr\{\tilde{U} < 0\} = \Pr\{P - \tilde{X} < 0\} = \Pr\{\tilde{X} > P\} = 1 - \Pr\{\tilde{X} \le P\} = 1 - F_{\tilde{X}}(P)$.

	Compagnia ALFA	Compagnia BETA	Compagnia GAMMA ($\tilde{q}=1$)
N	1-N(0)=50%	1-N(0)=50%	1-N(0)=50%
NP	1-N(0.128)=44.91%	1-N(0.0025)=49.90%	1-N(0.1252)=45.02%
WH	1-N(0.130)=44.83%	1-N(0.0024)=49.91%	1-N(0.1272)=44.94%

- se $\eta = 10\%$ e $U_0= 40\%\cdot P$

$\alpha = \Pr\{\tilde{U} < 0\} = \Pr\{U_0 + (1+\eta)\cdot P - \tilde{X}) < 0\} = \Pr\{\tilde{X} > 40\%\cdot P + 1.10\cdot P\} =$

$= \Pr\{\tilde{X} > 1.5\cdot P\} = 1 - \Pr\{\tilde{X} \le 1.5\cdot P\} = 1 - F_{\tilde{X}}(1.5\cdot P)$.

	Compagnia ALFA	Compagnia BETA	Compagnia GAMMA ($\tilde{q}=1$)
N	1-N(0.7912)=21.45 %	1-N(1.1674)=12.15%	1-N(1.0706)=14.22%
NP	1-N(0.8313)=20.29%	1-N(1.1665)=12.17%	1-N(1.0559)=14.55 %
WH	1-N(0.8512)=19.74%	1-N(1.1665)=12.17%	1-N(1.0781)=14.05 %

E' immediato osservare che nel primo caso , $\eta = 0$ e $U_0=0$, la probabilità di rovina è maggiore rispetto al secondo , confermando , pertanto , quanto precedentemente detto sulle strategie da adottare per diminuire tale probabilità . Tornando al primo caso , essendo le condizioni pressoché irreali , cioè avendo ipotizzato lo stesso capitale

(35)Esempio tratto dalla dispensa di Nino Savelli. A.A. 1999/2000 : "Lezioni del Corso di Teoria del rischio" .

iniziale e caricamento di sicurezza , nulli per tutte le tre compagnie , la compagnia BETA , quella con più contratti in portafoglio , presenta la più alta probabilità di rovina .Per il momento limitiamoci ad accennare che questo è dovuto al fatto che all'aumentare dei rischi in portafoglio , la riserva di rischio non può che aumentare e , in seguito , vedremo che questo aumento avviene in maniera meno che proporzionale all'aumentare dei premi (e quindi dei rischi) in portafoglio . Nel secondo caso , invece , avendo ipotizzato un capitale iniziale proporzionale premi in portafoglio , la compagni BETA , presenta una probabilità di rovina più bassa rispetto alle altre compagnie . Questo rispecchia le considerazioni precedentemente fatte circa l'impatto della dimensione del portafoglio sulla variabilità (rischiosità) relativa e sull'indice di asimmetria . Ricordiamo che per la legge dei grandi numeri è meglio , per la compagnia , avere in portafoglio un maggior numero di rischi "piccoli" e il più omogenei possibile , piuttosto che un basso numero di rischi "grandi", in quanto , nel primo caso vi è una maggiore probabilità che gli scarti negativi (dal valore atteso del costo sinistri) si compensano con quelli negativi . Confrontando la compagnia ALFA con la compagnia GAMMA , nel secondo caso , come è logico supporre , la presenza di fattori di disturbo (nella compagnia ALFA) aumenta la probabilità di rovina della compagnia stessa , in quanto , come abbiamo già visto , in questo caso , aumentano gli indici di rischiosità del portafoglio (varianza relativa e assoluta) e l'indice di asimmetria , rendendo gli eventi rari più probabili . Nel primo caso ($\eta = 0$ e $U_0=0$) , invece , ciò non è rilevabile per problemi imputabili alle formule di approssimazione e anche alle ipotesi del tutto irreali . Generalmente la formula di approssimazione "Normal" , in condizioni di "normalità" dovrebbe restituire una probabilità di rovina più bassa rispetto a quella ottenuta con le altre due formula di approssimazione , in quanto non tiene conto delle coda destra della distribuzione del costo sinistri aggregato . Questo, nel nostro esempio , si verifica solo nel secondo caso , per la compagnia BETA .Ciò è spiegabile dal fatto che indice di asimmetria è basso e , quindi , non c'è molta differenza tra l'utilizzo di una formula di approssimazione rispetto ad un'altra .

Fino ad ora , per semplicità , abbiamo considerato l'andamento della riserva di rischio e il calcolo della probabilità di rovina in un orizzonte temporale annuale . Non dobbiamo dimenticare , però , che la valutazione limitata ad un solo anno di gestione , non è sufficiente per poter fare delle considerazioni su importanti questioni , come ad esempio su pianificazioni di strategie di lungo termine , e , soprattutto , trascura la fluttuazioni legate ad effetti ciclici che possono comportare notevoli perdite , anche per più anni consecutivi . Estendiamo , ora , le nostre valutazioni , ad un orizzonte temporale di breve periodo . A tal scopo , consideriamo , per semplicità che il nostro portafoglio sia "statico" negli anni , pertanto non saranno presi in considerazione né i proventi degli investimenti , né l'evoluzione dei premi dovuta sia all'inflazione che al tasso di crescita reale .

Dunque , partendo dall'equazione semplificata della riserva di rischio, (formula 3.6) , si suppone che :

$$P_t = P = E[\tilde{X}_1]=E[\tilde{X}_2]=\ldots=E[\tilde{X}_t]$$

allora la riserva di rischio nel generico anno "t", quindi nell'orizzonte temporale [0 , T] sarà data dalla seguente equazione :

$$\tilde{U}_t = U_0+[(1+\eta)\cdot P\cdot t - \sum_{s=1}^{t}\tilde{X}_s)] = U_0+[(1+\eta)\cdot P\cdot t - \tilde{X}(t)].$$

A seconda della distribuzione di probabilità della variabile $\widetilde{X}$ e quindi del suo valore nell'orizzonte temporale [0 , T], la riserva di rischio $\widetilde{U}_t$ varierà entro un "range" di valori [$U_{T\ MIN}$; $U_{T\ MAX}$] detti limiti di confidenza e determinati dalla seguente relazione :

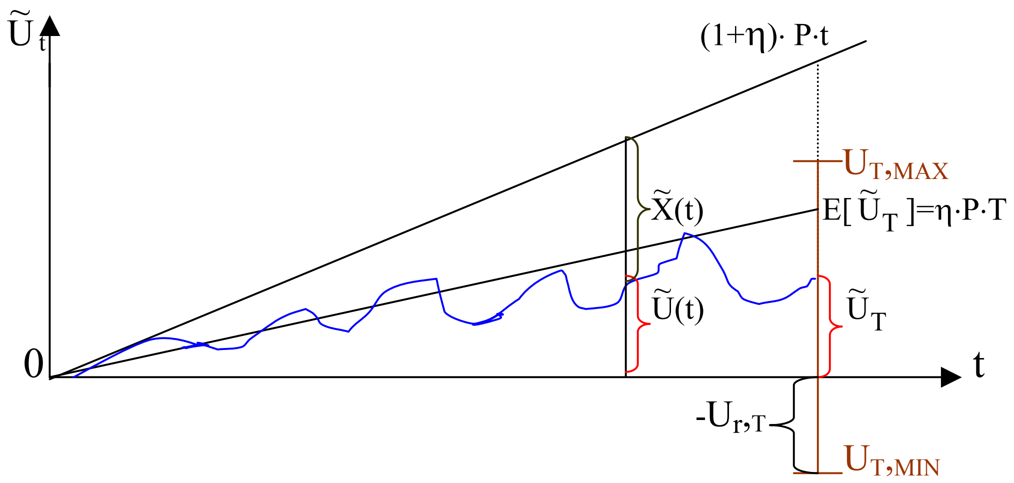
$$\Pr\{U_{T\,MIN} \leq \widetilde{U}_t \leq U_{T\,MAX}\} = 1 - 2\varepsilon \qquad \textbf{(3.10)}$$

dove ε rappresenta la probabilità di confidenza fissata .

Definiamo inoltre "capitale a rischio" $U_{r,t}$ quella parte di capitale proprio della compagnia che al tempo "0" , sulla base di una fissata probabilità di confidenza, può essere considerata a rischio di erosione nel tempo T a seguito di caricamenti di sicurezza che , nell'orizzonte temporale [0 , T], non riescono a far fronte agli scarti del costo sinistri in eccesso alla sua media, cioè se si verifica $(1+\eta)\cdot P\cdot t<\widetilde{X}(t)$ .In altri termini , il capitale a rischio rappresenta quel patrimonio che la compagnia deve possedere inizialmente al fine di chiudere l'esercizio , o gli esercizi , con un limite inferiore della riserva di rischio non negativo , prefissato un intervallo di confidenza . Quindi variando quest'ultimo , varierà anche il capitale a rischio , in particolare , come avremo modo di vedere in seguito , aumentando l'intervallo di confidenza (quindi diminuendo ε) aumenta anche $U_{r,t}$. Pertanto deve valere che al tempo t =T il capitale a rischio U_r sia pari a : $U_{r,T} = -U_{T\,MIN}$, di conseguenza la 3.10 diventerà :

$$\Pr\{\widetilde{U}_t \geq -U_{r,t}\} = 1 - \varepsilon = \Pr\{\widetilde{U}_t \geq U_{T\,MIN}\} = \Pr\{(1+\eta)\cdot P\cdot T - \widetilde{X}(T) \geq -U_{r,T} = U_{T\,MIN}\} = 1 - \varepsilon . \qquad \textbf{(3.11)}$$

Ponendo $U_0 = 0$ si ha , graficamente :



Nella applicazioni della teoria del rischio , solamente l'estremo inferiore della regione di confidenza , $U_{T\ MIN}$, desta particolare interesse . Se l'orizzonte temporale è breve , $U_{T\ MIN}$ è generalmente negativo , a dimostrazione del fatto che è probabile che si verifichino quei casi "avversi" in cui il valore atteso di $\tilde{U}_t$, $\eta\cdot P\cdot T$, non è sufficiente a coprire l'eccesso del costo sinistri aggregato dalla sua media , $E[\tilde{X}]$. Per il momento verrà trascurato l'effetto tempo , pertanto , sulla base della formula 3.11 , si avrà la seguente relazione :

$Pr\{\tilde{U} \geq -U_r\} = 1-\varepsilon$.

per risolvere la quale si ricorre generalmente a due approcci :

1. fissata la regione di confidenza e quindi la probabilità $1-\varepsilon$ trovare il valore U_r;
2. fissato U_r determinare la probabilità associata $1-\varepsilon$.

Il secondo approccio , in pratica è quella già effettuato precedentemente nell'esempio 4 , dove , fissato un certo capitale iniziale , si sono calcolate le probabilità di rovina delle tre compagnie .

3.1.1.1 Stima del capitale a rischio U_r .

Dalla relazione Pr{ $\tilde{U} = (1+\eta)\cdot P - \tilde{X} \geq -U_r$ }, mediante alcuni passaggi(36), si ricava la soluzione :

$$U_r = X_\varepsilon - (1+\eta)\cdot P \qquad \textbf{(3.12)}$$

dove

X_ε è lo $(1-\varepsilon)$-esimo frattile della distribuzione della v.a. $\tilde{X}$, cioè è quell' ascissa della distribuzione di probabilità della v.a. "costo sinistri aggregato" che lascia alla sua destra un'area pari ad ε , pertanto X_ε si ricava dalla seguente espressione :

$(1-\varepsilon) = F_{\tilde{X}}(X_\varepsilon)$.

Dalla formula 3.12 si ricava , ricordiamo , l'ammontare del capitale che è necessario disporre in modo da poter far fronte , con probabilità $1-\varepsilon$, alle avverse fluttuazioni del costo sinistri $\tilde{X}$.

Analizzando quindi il primo approccio , U_r può essere trovato applicando le stesse formule di approssimazione utilizzate precedentemente nel calcolo della funzione di ripartizione del costo sinistri aggregato , anche se spesso risulta più interessante fare uso di "formule abbreviate" che hanno il pregio di mostrare in modo più chiaro l'interdipendenza di U_r con tutte le altre variabili assicurative (η ,λ , m , $a_2(\tilde{Z})$, $a_3(\tilde{Z})$…).

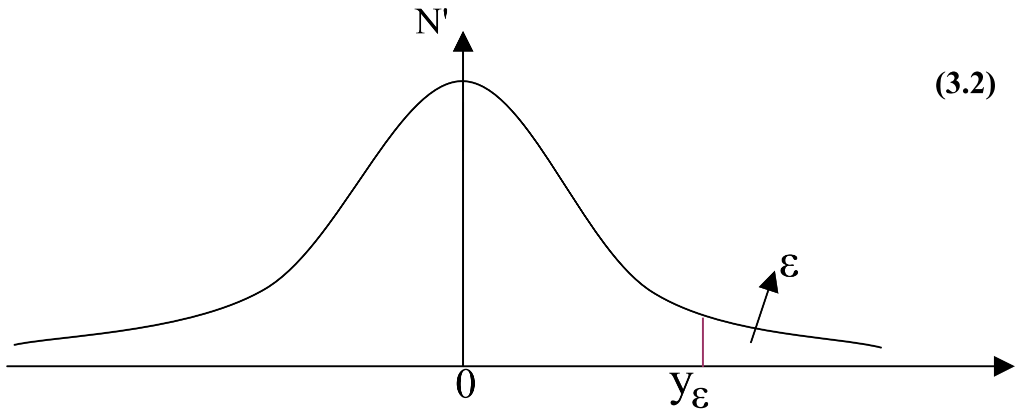
Soluzione di U_r mediante *NP- approximation* :

$$U_r \cong y_\varepsilon\, \sigma_{\tilde{X}} - \eta\cdot P + R_\gamma \qquad \textbf{(3.13)}$$

dove :

(36) $\Pr\{U_r \geq \tilde{X} - (1+\eta)\cdot P\} = 1-\varepsilon \Rightarrow \Pr\{\tilde{X} \leq U_r + (1+\eta)\cdot P\} = 1-\varepsilon \Rightarrow X_\varepsilon = U_r + (1+\eta)\cdot P$.

- y_ε è lo $(1\text{-}\varepsilon)$-esimo frattile della distribuzione normale standardizzata , cioè $(1\text{-}\varepsilon) = N(y_\varepsilon)$. Graficamente, indicando con N' la funzione di densità della "Normale standard" si ha :



(3.2)

In altri termini y_ε è quell'ascissa della normale standardizzata che lascia alla sua destra un'area pari ad ε ;

- R_γ è il temine di correzione che introduce l'effetto dello "skewness", (cioè dell'indice di asimmetria) ed è pari a :

$$\frac{1}{6}\cdot\gamma_{\tilde{X}}\cdot(y_\varepsilon^2-1)\cdot\sigma_{\tilde{X}},$$

dove , ricordiamo , sia $\sigma_{\tilde{X}}$ che $\gamma_{\tilde{X}}$ dipendono dalle variabili aleatorie $\tilde{Z}$ e $\tilde{N}$, rispettivamente "costo del singolo sinistro" e "numero totale dei sinistri in portafoglio" , e dalla presenza dei fattori di disturbo .

Infatti, posto $\sigma_{\tilde{X}}=\sqrt{\lambda\cdot a_2(\tilde{Z})\cdot\lambda^2\cdot m^2\sigma_{\tilde{q}}^2}$ e

$$\gamma_{\tilde{X}}=\frac{\lambda\cdot a_3(\tilde{Z})+3\lambda^2 m a_2(\tilde{Z})\sigma_{\tilde{q}}^2+\lambda^3 m^3\gamma_{\tilde{q}}\sigma_{\tilde{q}}^3}{(\lambda\cdot a_2(\tilde{Z})+\lambda^2 m^2\sigma_{\tilde{q}}^2)^{3/2}},$$

utilizzando gli indici di rischio $r_2(\tilde{Z})=\dfrac{a_2(\tilde{Z})}{(a_1(\tilde{Z}))^2}=\dfrac{a_2(\tilde{Z})}{m^2}$ e $r_3(\tilde{Z})=\dfrac{a_3(\tilde{Z})}{(a_1(\tilde{Z}))^3}=\dfrac{a_3(\tilde{Z})}{m^3}$ si ottengono(37) $\sigma_{\tilde{X}} = \lambda \cdot m\sqrt{\dfrac{r_2(\tilde{Z})}{\lambda}+\sigma^2_{\tilde{q}}} = P\cdot\sqrt{\dfrac{r_2(\tilde{Z})}{\lambda}+\sigma^2_{\tilde{q}}}$ e $\gamma_{\tilde{X}}=\dfrac{r_3(\tilde{Z})/\lambda^2+3\,r_2(\tilde{Z})\cdot\sigma^2_{\tilde{q}}/\lambda+\gamma_{\tilde{q}}\sigma^3_{\tilde{q}}}{(r_2(\tilde{Z})/\lambda+\sigma^2_{\tilde{q}})^{3/2}}$ **(3.14)**;

Dalla soluzione trovata con la *NP* (vedi formula 3.13) è facile osservare che il capitale a rischio U_r dipende da:

- y_ε , cioè dall'intervallo di confidenza . Infatti , come è logico supporre , se vogliamo ottenere una probabilità sempre maggiore che la nostra riserva di rischio non vada al di sotto di un valore prefissato, cioè se desideriamo che quel capitale iniziale della compagnia riesca a far fronte , con maggiore probabilità , alle avverse fluttuazioni del costo sinistri , a parità delle altre condizioni , maggiore dovrà essere tale capitale iniziale , U_r .
- $\sigma_{\tilde{X}}$, cioè dalla variabilità del costo sinistri aggregato , e , quindi, secondo la 3.14 , da λ , da m , da $a_2(\tilde{Z})$ e da $\sigma^2_{\tilde{q}}$. In particolare , all'aumentare $\sigma_{\tilde{X}}$, a parità di altre condizioni , aumenta il capital necessario per far fronte agli scarti negativi del costo sinistri aggregato dal suo valore medio , $E[\tilde{X}]$.
- η , cioè dal caricamento di sicurezza . Infatti , come è logico supporre aumentando il caricamento di sicurezza , e quindi gli utili attesi nell'esercizio , occorrerà , (a parità di altre condizioni), un minor

(37) Confronta Daykin C. , Pentikainen T. , Pesonen M.(1994) : "Practical Rick Theory for actuaries"-Ed. Chapman & Hall , Londra .

capitale iniziale .

- R_γ, cioè , oltre che dall'intervallo di confidenza e da $\sigma_{\tilde{X}}$, anche dall'indice di asimmetria della distribuzione della v.a. $\tilde{X}$. In particolare , aumentando $\gamma_{\tilde{X}}$, gli eventi rari si fanno più probabili , quindi , maggiore è la probabilità che $\tilde{X}$ assuma un valore di gran lunga superiore alla sua media . Pertanto , per fronteggiare le fluttuazioni del costo sinistri che saranno "avverse" con maggiore probabilità , sarà necessario , (a parità di altre condizioni) , un maggiore capitale iniziale .

Sostituendo i risultati ottenuti dalla 3.14 nella soluzione 3.13 si ottiene :

$$U_r = y_\varepsilon \cdot P \cdot \sqrt{\frac{r_2(\tilde{Z})}{\lambda} + \sigma_{\tilde{q}}^2} - \eta \cdot P + R_\gamma \qquad \textbf{(3.15)}$$

dove $R_\gamma = P \cdot \frac{(y_\varepsilon^2 - 1)}{6} \cdot \frac{r_3(\tilde{Z})/\lambda^2 + 3\, r_2(\tilde{Z}) \cdot \sigma_{\tilde{q}}^2/\lambda + \gamma_{\tilde{q}} \sigma_{\tilde{q}}^3}{r_2(\tilde{Z})/\lambda + \sigma_{\tilde{q}}^2}$.

Dalla 3.15 osserviamo che per determinare il capitale a rischio U_r , abbiamo bisogno di conoscere le seguenti variabili :

λ , m , η , $\sigma_{\tilde{q}}$, $r_2(\tilde{Z})$ o $a_2(\tilde{Z})$, e , se si tiene conto del fattore di correzione R_γ, anche le variabili $r_3(\tilde{Z})$ o $a_3(\tilde{Z})$ e $\gamma_{\tilde{q}}$.

In aggiunta alle considerazioni sulla formula 3.14 , possiamo osservare che il capitale sotto rischio cresce in relazione alla radice quadrata di λ , $\sqrt{\lambda}$, cioè , come avevamo già accennato , cresce in maniera meno che proporzionale all'aumentare dei rischi in portafoglio .

Con la formula 3.15, seppur d'approssimazione , possiamo quantificare il capitale a rischio della compagnia e confrontarlo direttamente con la realtà aziendale , cioè con il patrimonio libero della compagnia , nonché con la riserva di rischio . Se il patrimonio libero della compagnia è minore del capitale sotto rischio , maggiore è la probabilità di rovina della compagnia stessa . Pertanto sarà necessario ricorrere a delle opportune strategie , come quelle viste in precedenza , atte , appunto , ad aumentare la riserva di rischio fino ad un livello ritenuto accettabile (per la compagnia stessa) . In particolare , focalizzeremo la nostra attenzione sulla strategia riassicurativa , essendo questo l'oggetto della nostra trattazione .L'assicuratore può infatti decidere di conservare un ammontare massimo , M , per ogni singolo sinistro , e riassicurare tutto l'ammontare superiore ad M .Ciò , come abbiamo già visto , si verifica ad esempio , nel caso di una riassicurazione per eccesso di sinistro (c.d.XL) , (oltre che in presenza di un massimale di copertura).

La presenza del pieno di conservazione , influisce sulla distribuzione del costo del singolo sinistro , e cioè sui suoi momenti principali ($a_1(\tilde{Z})a_2(\tilde{Z})$, ecc…) .Infatti il momento semplice di ordine "j" , richiamando i simboli già noti , sarà dato dalla seguente espressione :

$$a_j = \int_0^M z^j \cdot dS(Z) + M^j[1 - S(M)]. \qquad \textbf{(3.16)}$$

Il nostro assicuratore , quindi pagherà l'importo

$$\begin{cases} \tilde{Z} & \text{se } \tilde{Z} \leq M \\ M & \text{se } \tilde{Z} > M \end{cases}$$

E' evidente che diminuendo M , diminuisce il valor medio del costo del singolo sinistro a carico dell' assicuratore , e , quindi , anche la sua variabilità , in quanto la coda destra della distribuzione di $\tilde{Z}$ viene ceduta al riassicuratore . Per quanto già detto sulle relazioni tra il capitale a rischio e le variabili $a_1(\tilde{Z})$, $a_2(\tilde{Z})$, si può dedurre che al diminuire del limite di conservazione , a parità di altre condizioni , diminuisce U_r , cioè il capitale iniziale necessario per far fronte alle avverse fluttuazioni della variabile aleatoria del costo sinistri aggregato .

Soluzione di U_r mediante la distribution–free approximation .

Tale impostazione risulta essere estremamente utile quando non siano conosciuti né la distribuzione $S(\tilde{Z})$, né i suoi principali momenti , ma si possa ipotizzare un limite di conservazione netta per ciascun sinistro .

In tal caso , in primo luogo , si dovrà osservare la sussistenza delle seguenti disuguaglianze :

$$a_j = \int_0^M z^j \cdot dS(Z) + M^j[1-S(M)] \leq M \int_0^M z^{j-1} \cdot dS(Z) + M \cdot M^{j-1}[1-S(M)] =$$

$$M \cdot a_{j-1} \Rightarrow a_2 \leq M \cdot a_1 \Rightarrow a_3 \leq M \cdot a_2 \leq M^2 \cdot a_1.$$

Pertanto , utilizzando gli indici di rischio , si ha :

$$r_2(\tilde{Z}) \overset{(38)}{\leq} \frac{M}{m}$$

$$r_3(\tilde{Z}) \overset{(39)}{\leq} \left(\frac{M}{m}\right)^2 .$$

Nel caso in cui la v.a. $\tilde{X}$ definisca un processo di Poisson semplice , avremo :

$$\sigma_{\tilde{X}} = \sqrt{\lambda \cdot a_2(\tilde{Z})} \leq \sqrt{\lambda \cdot M \cdot m} = \sqrt{M \cdot P} , \qquad \textbf{(3.17)}$$

---

(38) $r_2(\tilde{Z}) = \dfrac{a_2(\tilde{Z})}{(a_1(\tilde{Z}))^2} = \dfrac{a_2(\tilde{Z})}{m^2} \leq \dfrac{M \cdot a_1(\tilde{Z})}{a_1^{\,2}(\tilde{Z})} = \dfrac{M}{m}$

(39) $r_3(\tilde{Z}) = \dfrac{a_3(\tilde{Z})}{(a_1(\tilde{Z}))^3} = \dfrac{a_3(\tilde{Z})}{m^3} \leq \dfrac{M^2 \cdot a_1(\tilde{Z})}{a_1^{\,3}(\tilde{Z})} = \dfrac{M^2}{m^2} = \left(\dfrac{M}{m}\right)^2 .$

$$\gamma_{\tilde{X}} \overset{(40)}{=} \frac{a_3(\tilde{Z})}{a_2(\tilde{Z})} \cdot \frac{1}{\sigma_{\tilde{X}}} \overset{(41)}{\leq} \frac{M}{\sigma_{\tilde{X}}} \quad . \tag{3.18}$$

Dalla 3.17 osserviamo che

$$\frac{\sigma_{\tilde{X}}}{\sqrt{PM}} \leq 1.$$

Nella pratica , mediante calcoli appositamente effettuati, tale rapporto , $(\frac{\sigma_{\tilde{X}}}{\sqrt{PM}})$, risulta essere mediamente pari a 0.7 , pertanto $\sigma_{\tilde{X}}$ può stimarsi pari a : $\sigma_{\tilde{X}} \cong 0.7 \cdot \sqrt{PM} \overset{(42)}{\cong} K \cdot \sqrt{PM}$ **(3.19)**

Nel caso in cui la v.a. $\tilde{X}$ definisca un processo di Poisson composto , avremo :

$$\sigma_{\tilde{X}} \overset{(42')}{\cong} \sqrt{0.49 \cdot M \cdot P + P^2 \cdot \sigma^2_{\tilde{q}}} \ . \tag{3.20}$$

Sulla base delle formule 3.19 e 3.20 , si possono ottenere per la soluzione

$U_r = y_\varepsilon \cdot P \cdot \sqrt{\frac{r_2(\tilde{Z})}{\lambda} + \sigma^2_{\tilde{q}}} - \eta \cdot P + R_\gamma$ i limiti massimi , a seconda che $\tilde{X}$ sia un processo di Poisson composto semplice o misto .

---

(40) $\gamma_{\tilde{X}} = \frac{a_3(\tilde{Z})}{(a_2(\tilde{Z}))^{3/2} \cdot \sqrt{\lambda}} = \frac{a_3(\tilde{Z})}{a_2(\tilde{Z}) \cdot \sqrt{\lambda \cdot a_2(\tilde{Z})}} = \frac{a_3(\tilde{Z})}{a_2(\tilde{Z})} \cdot \frac{1}{\sigma_{\tilde{X}}}$

(41) $\gamma_{\tilde{X}} \cdot \sigma_{\tilde{X}} = \frac{a_3(\tilde{Z})}{a_2(\tilde{Z})} \leq \frac{M^2 \cdot a_1(\tilde{Z})}{M \cdot a_1(\tilde{Z})} \Rightarrow \frac{a_3(\tilde{Z})}{a_2(\tilde{Z})} \cdot \frac{1}{\sigma_{\tilde{X}}} \leq \frac{M}{\sigma_{\tilde{X}}}$

(42) Poniamo $K = \frac{\sigma_{\tilde{X}}}{\sqrt{PM}} \cong 0.7.$

(42') $\sigma_{\tilde{X}} = \sqrt{\lambda \cdot a_2(\tilde{Z}) \cdot \lambda^2 \cdot m^2 \sigma^2_{\tilde{q}}} = \sqrt{\lambda \cdot a_2(\tilde{Z}) \cdot P^2 \sigma^2_{\tilde{q}}} = \sqrt{K^2 \cdot M \cdot P + P^2 \cdot \sigma^2_{\tilde{q}}}$.

- $\tilde{X} \sim$ *Poisson composto semplice* .

$$U_r = y_\varepsilon \cdot \sigma_{\tilde{X}} - \eta \cdot P + R_\gamma \le y_\varepsilon \cdot \sqrt{PM} - \eta \cdot P + R_\gamma \overset{(43)}{\le} y_\varepsilon \cdot \sqrt{PM} - \eta \cdot P + \frac{(y_\varepsilon^2 - 1)}{6} \cdot M . \qquad \textbf{(3.21)}$$

E' utile mettere in chiaro che i premi di rischio $P = E[\tilde{X}] = \lambda \cdot m$, dipendono dal livello di conservazione M tramite la seguente relazione del costo medio :

$$m = \int_0^M z \cdot dS(Z) + M \cdot [1 - S(M)]$$

da cui è immediato notare che quanto più basso è M , tanto minore sarà il valore sia dell'integrale sia del secondo addendo $M \cdot [1 - S(M)]$. Pertanto, la diminuzione di M restituisce un minore costo medio del singolo sinistro a carico dell'assicuratore .

Qualora M non sia particolarmente elevato , il fattore di correzione R_γ può essere trascurato , e , attribuendo il valore approssimato di 0.7 al rapporto $\frac{\sigma_{\tilde{X}}}{\sqrt{PM}}$, spesso risulta valida la seguente formula di approssimazione :

$$U_r \cong y_\varepsilon \cdot 0.7 \cdot \sqrt{PM} - \eta \cdot P \qquad \textbf{(3.22)}$$

Se , ad esempio, $\varepsilon = 1\% \Rightarrow y_\varepsilon = 2.33 \rightarrow U_r \cong 1.6 \cdot \sqrt{PM} - \eta \cdot P$,

se , $\varepsilon = 0.1\% \Rightarrow y_\varepsilon = 3.09 \rightarrow U_r \cong 2.2 \cdot \sqrt{PM} - \eta \cdot P$.

---

(43) Ricordiamo che $\frac{(y_\varepsilon^2 - 1)}{6} \cdot \gamma_{\tilde{X}} \sigma_{\tilde{X}} \le \frac{(y_\varepsilon^2 - 1)}{6} \cdot M$.

- $\tilde{X} \sim$ *Poisson composto misto .*

In questo caso , se omettiamo il fattore di correzione si ottiene la seguente formula di approssimazione :

$$U_r \cong y_\varepsilon \, \sigma_{\tilde{X}} - \eta \cdot P \cong y_\varepsilon \sqrt{\lambda \cdot a_2(\tilde{Z}) \cdot P^2 \sigma_{\tilde{q}}^2} - \eta \cdot P = y_\varepsilon \sqrt{K^2 \cdot M \cdot P + P^2 \cdot \sigma_{\tilde{q}}^2} - \eta \cdot P$$

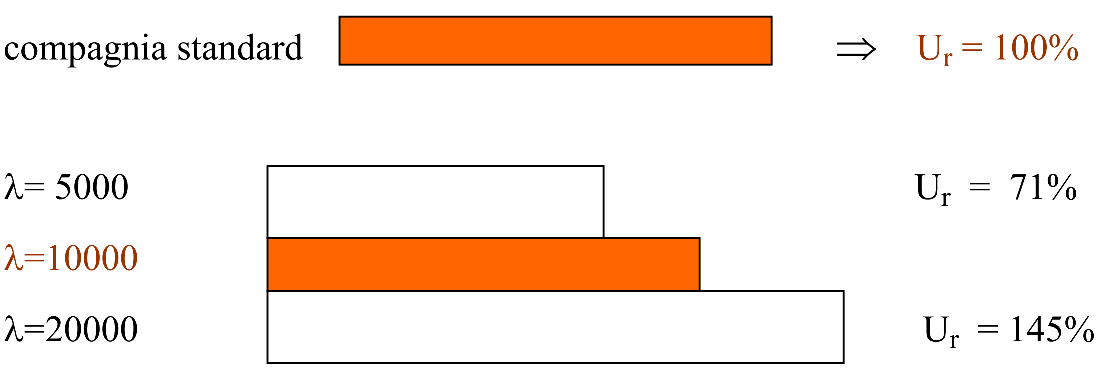
$$\cong y_\varepsilon \sqrt{0.49 \cdot M \cdot P + P^2 \cdot \sigma_{\tilde{q}}^2} - \eta \cdot P \, . \qquad \textbf{(3.23)}$$

Per chiarezza , concludiamo lo studio del capitale a rischio con il seguente esempio numerico[44] che riassume le variazioni di U_r al variare delle variabili sopra menzionate . In particolare , prenderemo termine di riferimento una compagnia "standard" , con determinate caratteristiche e vedremo come , al variare di queste , si modificherà il valore del capitale a rischio .

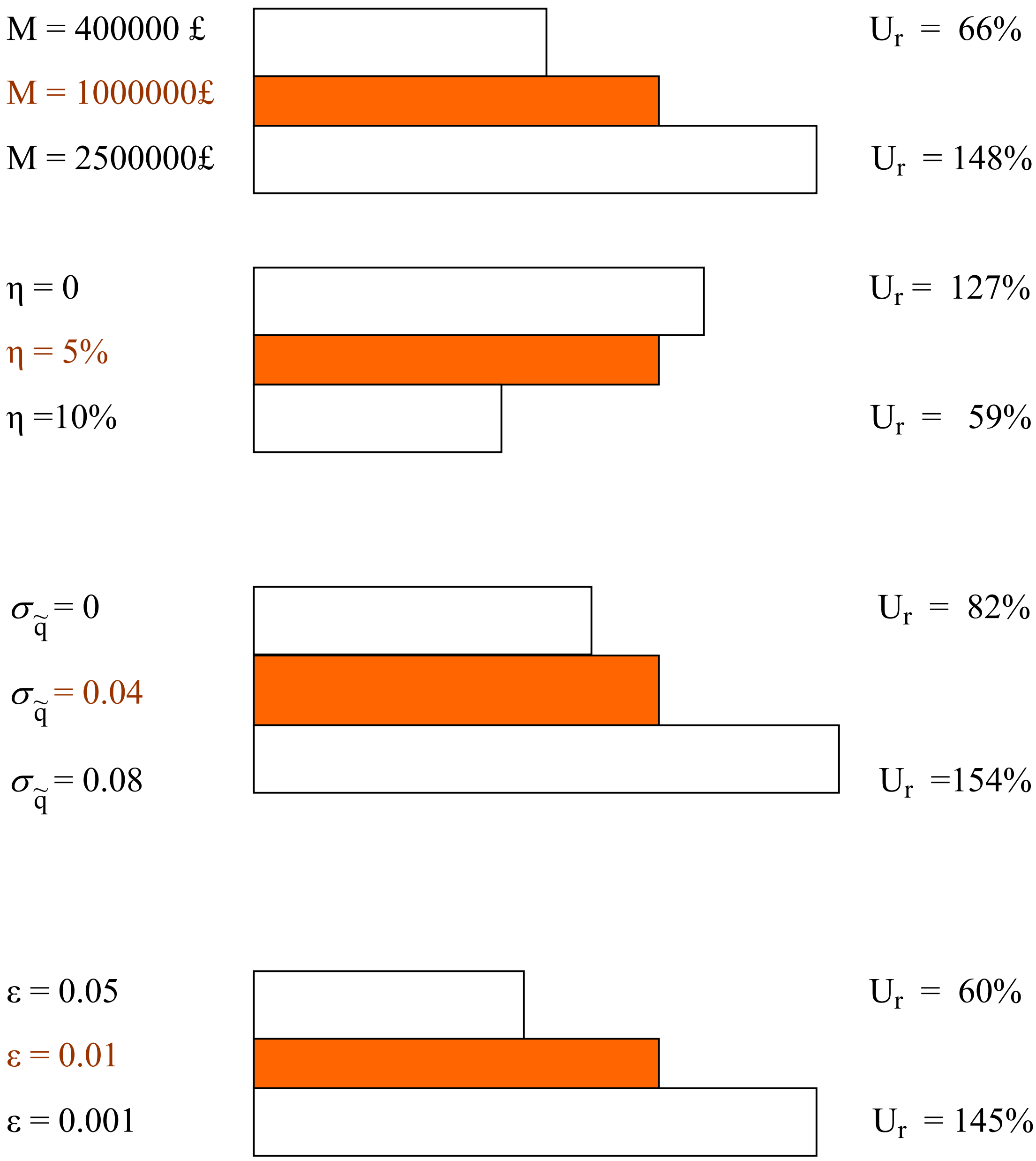
Esempio 5 .

Caratteristiche della compagnia "standard" :

λ	**M £**	**m £**	**$r_2(\tilde{Z})$**	**$r_3(\tilde{Z})$**	**$\sigma_{\tilde{q}}$**	**$\gamma_{\tilde{q}}$**	**η**	**ε**	**U_r £**	**P £**
10000	1000000	6160	37.3	3832	0.04	0.25	0.04	0.01	8610000	61600000



(44) Esempio pag. 166 Daykin C.,Pentikainen T., E. Pesonen(1994) . "Practical Risk Theory for actuaries". Ed.Chapman & Hall, Londra.

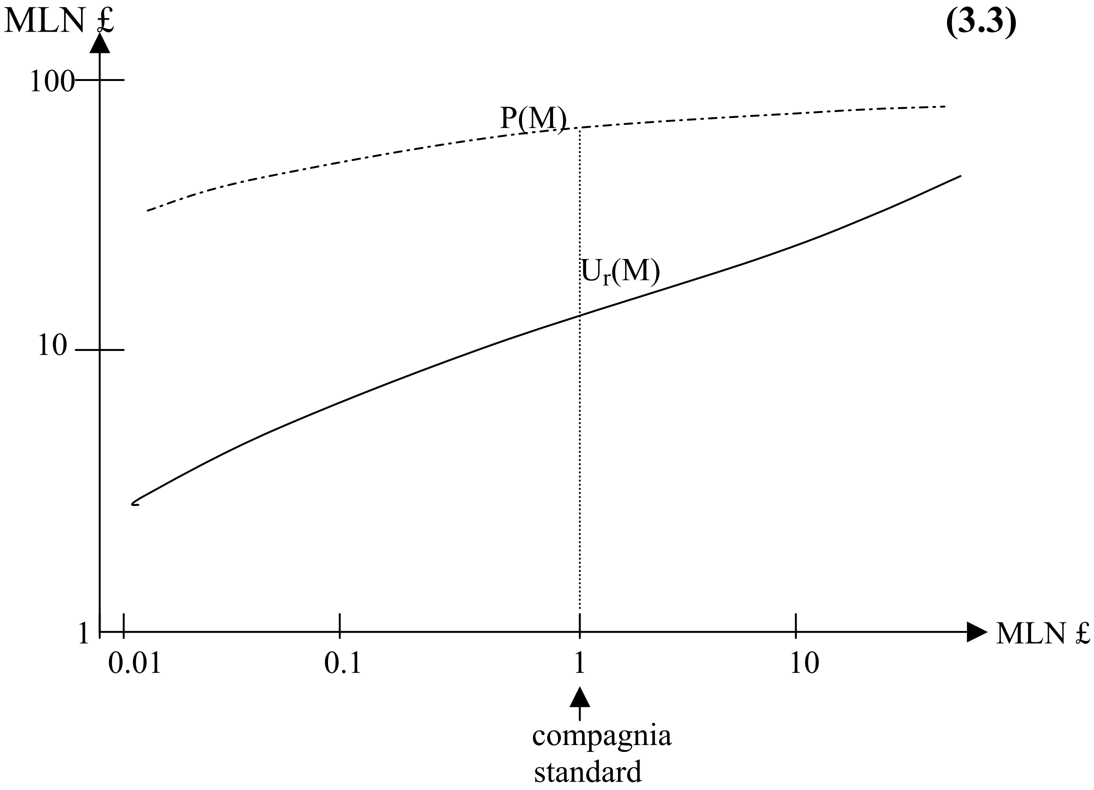


3.1.1.2 Alcune relazioni per la determinazione del limite di conservazione "M" in funzione di altri variabili .

Ricordiamo che il principale scopo della riassicurazione è quello di ridurre l'impatto delle avverse fluttuazioni del costo sinistri della cedente . La valutazione degli effetti delle varie forme riassicurative e la

decisione di un appropriato livello della ritenzione netta della cedente sono fra le più importanti applicazioni della teoria del rischio . Per semplicità ci riferiremo ad un orizzonte temporale annuale e considereremo il trattato di eccesso di singolo sinistro .
Abbiamo già visto che il capitale a rischio dipende dal limite di conservazione . Vediamo ora ,con il seguente grafico[45] , (in scala logaritmica) , l'andamento del capitale a rischio e dei premi equi in funzione del limite di conservazione M .

(3.3)



(45) Grafico , pag. 171 ., tratto da Daykin C.,Pentikainen T., E. Pesonen (1994) "Practical Risk Theory for actuaries". Ed.Chapman & Hall, Londra.

Se il valore di U_r è dato , il corrispondente valore di M può essere letto dal grafico . Per esempio , se l'assicuratore desidera proteggere i suoi affari in modo tale che la perdita del suo capitale , nel 99% dei casi , sia inferiore a U_r = £ 5 milioni , allora M dovrà essere pari a 0.19 .

In alcune situazioni è utile determinare la dipendenza dei premi incassati ($P = \lambda \cdot m(M)$) , dal limite di conservazione , come mostrato dal grafico 3.3. Se M viene diminuito al fine di ridurre il capitale a rischio , anche i premi devono ridursi . Si osserva facilmente , inoltre , che per valori ridotti di U_r non esiste una soluzione possibile per M , in quanto rimane comunque la variabilità $\sigma_{\tilde{q}}$ che un trattato eccesso di sinistri non può ridurre , perché , come abbiamo già avuto modo di spiegare , un trattato eccesso di sinistri non agisce sul numero di sinistri , ma solo sull'importo di ciascuno di essi .

Dalla 3.23 , ottenuta mediante la formula di approssimazione "distribution free – approximation", è possibile , esplicitandola rispetto ad M , ottenere la seguente relazione :

$$U_r \cong y_\varepsilon \sqrt{K^2 \cdot M \cdot P + P^2 \cdot \sigma_{\tilde{q}}^2} - \eta \cdot P \Rightarrow (U_r + \eta \cdot P)^2 \cong y_\varepsilon{}^2 \cdot (K^2 \cdot M \cdot P + P^2 \cdot \sigma_{\tilde{q}}^2)$$

$$\Rightarrow M \cong \frac{(\eta^2 - y_\varepsilon \sigma_{\tilde{q}}^2) \cdot P^2 + 2\eta U_r P + U_r{}^2}{K^2 \cdot P \cdot y_\varepsilon^2} \quad . \qquad \textbf{(3.24)}$$

Se indichiamo con :

$w = \dfrac{M}{U_r}$ e $u = \dfrac{U_r}{P}$, la relazione precedente si può riscrivere come :

$$w = \frac{1}{K^2 \cdot y_\varepsilon^2}\left(\frac{\beta}{u} + u + 2\eta\right) , \qquad \textbf{(3.25)}$$

dove $\beta = \eta^2 - y_\varepsilon \sigma^2_{\tilde{q}}$. La 3.25 rappresenta una funzione iperbolica in cui, se $\beta > 0$, vi è un minimo al punto ($u = \sqrt{\beta}$; $w = \dfrac{2(\eta + \sqrt{\beta})}{K^2 \cdot y^2_\varepsilon}$) . Pertanto, (se $\beta > 0$) esisterà la seguente disuguaglianza :

$$\frac{M}{U_r} \geq \frac{2(\eta + \sqrt{\beta})}{K^2 \cdot y^2_\varepsilon} \qquad \textbf{(3.26)}$$

che per $\sigma^2_{\tilde{q}} = 0$, può essere semplificata in questo modo :

$$M \geq \frac{4\eta}{K^2 \cdot y^2_\varepsilon} \cdot U_r \ .$$

Se poniamo K = 0.7 e ε = 0.01 otteniamo $M \geq 1.5 \cdot \eta \cdot U_r$.

Queste stime possono essere utili quando l'ordine di grandezza del netto di conservazione deve essere ottenuto velocemente o quando non si dispone di un'informazione adeguata sulla distribuzione del costo del sinistro e di altri importanti parametri .

3.1.2 Analisi di lungo periodo del processo di rischio $\tilde{U}_t$.

Per una corretta analisi del processo di rischio , nel lungo periodo , è necessario considerare il tasso di rendimento annuale "j" degli investimenti che viene posto costante e pari al tasso "free-risk". Per semplicità non prenderemo in considerazione né le tasse né i dividendi . Secondo la teoria del rischio classica , la riserva di rischio $\tilde{U}_t$ alla fine del generico anno t , è data dalla seguente relazione :

$$\tilde{U}_t = (1+j)\ \tilde{U}_{t-1} + [B_t - \tilde{X}_t - E_t] \cdot (1+j)^{1/2} \qquad \textbf{(3.27)}$$

dove

B_t = ammontare dei premi di tariffa realizzati a metà dell ' anno t ;

$\tilde{X}_t$ = v.a. del costo sinistri aggregato riferito a metà dell'anno t ;

E_t = spese generale e di acquisizione " " " " " " .

L' ammontare dei premi di tariffa è composto da :

P_t = premi di rischio ($P_t = E[\tilde{X}_t]$);

$P_t \cdot \eta$= caricamento di sicurezza , espresso in percentuale dei premi di rischio ;

$c \cdot B_t$ = caricamento per spese , espresso in percentuale dei premi di tariffa .

Pertanto si avrà :

$B_t = P_t + P_t \cdot \eta + c \cdot B_t$.

Nel caso in cui si pone $E_t = c \cdot B_t$, la 3.27 diventa :

$$\tilde{U}_t = (1+j)\ \tilde{U}_{t-1} + [(1+\eta_t) \cdot P_t - \tilde{X}_t] \cdot (1+j)^{1/2} \qquad \textbf{(3.28)}$$

Facendo cadere l'ipotesi di staticità del portafoglio nei vari anni e , considerando , pertanto , l'incremento annuale del volume dei premi di tariffa dovuto sia al tasso d'inflazione "i" , sia al tasso di crescita reale , "g" , assumendo che tali tassi rimangano costanti , si ottiene la seguente relazione :

$$B_t = (1+i) \cdot (1+g) \cdot B_{t-1} \qquad \textbf{(3.29)}$$

Richiamando la formula 2.6.1, $\tilde{X}_t = \sum_{i=1}^{\tilde{N}_T} \tilde{Z}_{i,t}$, (i cui simboli sono già noti), supponiamo che la v.a. $\tilde{X}_t$ definisca un processo di Poisson composto , (con $\tilde{N}_t$ e $\tilde{Z}_{i,t}$ reciprocamente indipendenti per ogni anno t) dove $\tilde{N}_t$ è la variabile aleatoria , nel nostro caso "poissoniana" , di parametro $\lambda_t = (1+g)^t \lambda_0$ e $\tilde{Z}_{i,t}$ sono variabili aleatorie Lognormali , indipendenti e identicamente distribuite aventi i seguenti momenti semplici :

$E[\tilde{Z}^j_{i,t}] = (1+i)^{j\cdot t} \cdot E[\tilde{Z}^j_{i,0}] = (1+i)^{j\cdot t} \cdot a_{jZ,0}$,

dove λ_0 , $a_{jZ,0}$ sono i parametri del portafoglio assicurato iniziale , cioè al tempo 0 .

Assumendo le condizioni sopra menzionate , escludendo eventuali autocorrelazioni tra tutte le componenti del costo sinistri aggregato , le principali caratteristiche della distribuzione di probabilità del processo $\tilde{X}_t$ sono :

$$E[\tilde{X}_t] = \lambda_t \cdot a_{1Z,t} = (1+g)^t \cdot (1+i)^t \cdot E[\tilde{X}_0] \tag{3.30}$$

$$\sigma^2(\tilde{X}_t) = \lambda_t \cdot a_{2Z,t} = (1+g)^t \cdot (1+i)^{2t} \cdot \sigma^2[\tilde{X}_0]$$

$$\gamma(\tilde{X}_t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_t}} \cdot \frac{a_{3Z,t}}{(a_{2Z,t})^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{(1+g)^t}} \cdot \gamma(\tilde{X}_0) .$$

Nello studio del processo di rischio , è preferibile utilizzare il "ratio" $\frac{\tilde{U}_t}{B_t} = \tilde{u}_t$, anziché la grandezza assoluta $\tilde{U}_t$, pertanto la formula 3.28 diventerà :

$$\tilde{u}_t = r \cdot \tilde{u}_{t-1} + h \cdot [(1+\eta) - \frac{\tilde{X}_t}{P_t}] \tag{3.31}$$

dove

$$r = \frac{(1+j)}{(1+i)\cdot(1+g)} \qquad \text{e} \qquad h = \frac{1-c}{1+\eta}(1+j)^{1/2} = \frac{P}{B}(1+j)^{1/2} .$$

Il fattore annuale composto , r , dipende dal tasso di rendimento degli investimenti j e dal tasso di crescita reale g ; il fattore h dipende principalmente dal rapporto dei premi di rischio sui premi di tariffa (P/B), che è costante se i caricamenti per spese e di sicurezza (c e η) si mantengono costanti nel tempo .

A seguito di alcune manipolazioni , l'equazione stocastica del "ratio" $\tilde{u}_t$ diventa :

$$\tilde{u}_t = r^t \cdot \tilde{u}_0 + h \cdot [(1+\eta) \cdot \sum_{K=0}^{t-1} r^k - \sum_{K=1}^{t} \frac{\tilde{X}_t}{P_t} r^{t-k} \ ] \qquad \textbf{(3.32)}$$

Nel caso in cui ipotizziamo un portafoglio statico nel tempo , quindi un livello di premi costante (g=0) , un tasso inflazionistico e di rendimento degli investimenti nulli (i=0 e j=0) , la 3.32 diventa :

$$\tilde{u}_t = \tilde{u}_0 + h \cdot [(1+\eta) \cdot t - \sum_{K=1}^{t} \frac{\tilde{X}_t}{P_t} \ ] = \tilde{u}_0 + [(1+\eta) \cdot \frac{P}{B} t - \sum_{K=1}^{t} \frac{\tilde{X}_t}{B}] \ . \qquad \textbf{(3.33)}$$

Generalmente l'ipotesi di staticità non è verificata , pertanto per calcolare i momenti di $\tilde{u}_t$ si farà riferimento all'equazione 3.30 .

Al fine di analizzare il comportamento stocastico della v.a. $\tilde{u}_t$, è necessario calcolare i momenti del "loss ratio" $\frac{\tilde{X}_k}{P_k}$, ottenibili dai principi basilari della teoria del rischio in riferimento al processo di Poisson composto . Pertanto si ha[46] :

$$E\,(\tilde{X}_k / P_k) = 1 \qquad \textbf{(3.34)}$$

$$\sigma^2 (\tilde{X}_k / P_k) = \frac{1 + c_z^2}{n_k} = \frac{1}{(1+g)^k} \sigma^2 (\tilde{X}_0 / P_0)$$

$$\gamma (\tilde{X}_k / P_k) = \gamma (\tilde{X}_k) = \frac{1}{\sqrt{(1+g)^K}} \cdot \gamma (\tilde{X}_0) \ .$$

dove $c_z = \sigma(\tilde{Z})/E(\tilde{Z})$ rappresenta il coefficiente di variabilità della variabile aleatoria $\tilde{Z}$, costo del singolo sinistro , indipendente dal tempo

---

(46) Confronta : Nino Savelli (2002) :"Solvency and traditional reinsurance for non - life insurance".Catholic University of Milan .

se la forma della distribuzione è sempre la stessa , cioè il costo del sinistro è mutato solamente dal tasso inflazionistico i .

Osserviamo che la varianza del "loss-ratio", allo scorrere del tempo, si riduce a 0 per valori positivi crescenti del tasso di crescita reale "g", mentre cresce verso infinito per valori negativi di "g" . Lo stesso commento può essere fatto per l'indice di asimmetria del "loss-ratio" , decrescente , fino ad annullarsi , per g>0 , crescente , verso infinito , al diminuire del portafoglio (g<0). Nel caso di indipendenza delle variabili $\tilde{Z}_{i,t}$, come nel nostro caso , questo fenomeno è dovuto alla legge dei grandi numeri .

Una volta ottenuti i momenti dei "loss ratios" $\tilde{X}_k / P_k$ per K = 1 ,2 , … ,t, si possono calcolare i momenti del "ratio" $\tilde{u}_t$. Per quanto concerne il valore atteso della v.a. $\tilde{u}_t$, si ha :

$$E[\tilde{u}_t] \begin{cases} \tilde{u}_0 + h \cdot [(\frac{1-c}{1+\eta}) \cdot \eta \cdot (1+j)^{1/2} \cdot t & \text{se } r = 1 \\ \\ r^t \, \tilde{u}_0 + h \cdot [(\frac{1-c}{1+\eta}) \cdot \eta \cdot (1+j)^{1/2} \cdot \frac{1-r^t}{1-r} & \text{se } r \neq 1. \end{cases}$$

Osserviamo che se r = 1 , il valore atteso del "ratio" $\tilde{u}_t$, è una funzione lineare del tempo t , crescente se il caricamento di sicurezza η è positivo, mentre se se $r \neq 1$, $E[\tilde{u}_t]$ non assume un comportamento lineare .

Solamente se r<1 , il processo di rischio in esame converge verso un livello di equilibrio quando $t \to \infty$ .In tal caso , infatti , risulta :

$$\bar{u} = \lim_{t\to\infty} E[\tilde{u}_t] = \frac{1-c}{1+\eta} \cdot \frac{\eta}{1 - r} \cdot (1+j)^{1/2} .$$

Il livello di equilibrio $\bar{u}$ è maggiore o minore del "ratio" iniziale u_0 a seconda dei parametri η , c , i , g e j , in particolare $\bar{u}$ assumerà un valore maggiore all'aumentare dei caricamenti di sicurezza (η), del tasso dei rendimenti (j) e della media del ratio $\frac{P}{B}$(ricordandoci che $\frac{1-c}{1+\eta}(1+j)^{1/2} = \frac{P}{B}(1+j)^{1/2}$), mentre diminuirà all'aumentare del tasso di crescita reale (g) e del tasso d'inflazione (i) . Nel caso in cui r>1 , $E[\tilde{u}_t]$ diverge verso infiniti valori , negativi o positivi , a seconda del segno del caricamento di sicurezza η. In tal caso , si potrà ricorrere ad un "controllo dinamico" dei premi o dei proventi finanziari, al fine, appunto , di non far divergere il processo di rischio $\tilde{u}_t$.

Vale la pena osservare che $E[\tilde{u}_t]$, nel breve periodo, dipende significativamente dal livello di capitalizzazione iniziale u_0, (mediante il fattore r^t) , ma nel caso in cui r<1 , la sua influenza va diminuendo in favore del secondo elemento, dove è presente il caricamento di sicurezza η. Il livello di equilibrio, invece, non dipende dal livello di capitalizzazione iniziale .

Per quanto concerne la scelta dell'orizzonte temporale T , si a presente che al suo aumentare crescerà anche l'incertezza (variabilità) del processo di rischio. Di conseguenza per un dato capitale iniziale la probabilità di rovina aumenta al crescere dell'orizzonte (0 ; T). Per comprendere meglio il concetto di crescita della variabilità all'aumentare dell'orizzonte temporale considerato, possiamo ricorrere al processo di rischio $\tilde{U}_t$, (o , analogamente all'equazione 3.33) , ipotizzando che il portafoglio rimanga identico per tutto l'orizzonte temporale di riferimento (0,t) (derivandone quindi le stesse caratteristiche del costo sinistri $E(\tilde{X})$, $\sigma(\tilde{X})$ ecc…) , e che non vi siano rendimenti finanziari .

Pertanto consideriamo la seguente relazione :

$$\widetilde{U}_t = U_0 + (1+\eta)P\cdot t - \sum_{i=1}^{t} \widetilde{X}_i \qquad \textbf{(3.35).}$$

In questo caso semplificato , media , varianza e skewness di $\widetilde{U}_t$ saranno:

$E[\widetilde{U}_t] = U_0 + \eta P\cdot t$;

$$\sigma^2(\widetilde{U}_t) \overset{(47)}{=} \sigma^2\left(\sum_{i=1}^{t}\widetilde{X}_i\right) \overset{(48)}{=} \sum_{i=1}^{t}\sigma^2(\widetilde{X}_i) \overset{(49)}{=} \sum_{i=1}^{t}\sigma^2(\widetilde{X}) = t\cdot\sigma^2(\widetilde{X})$$

$$\Rightarrow \sigma(\widetilde{U}_t) = \sigma(\widetilde{X})\sqrt{t} \ ;$$

$$\gamma(\widetilde{U}_t) = \frac{\mu_3(\widetilde{U}_t)}{\sigma^3(\widetilde{U}_t)} = \frac{-\mu_3\left(\sum_{i=1}^{t}\widetilde{X}_i\right)}{\sigma^3(\widetilde{U}_t)} \overset{(48)}{=} \frac{-t\cdot\mu_3(\widetilde{X}_i)}{\sigma^3(\widetilde{X})\cdot t\cdot\sqrt{t}} = \frac{-\mu_3(\widetilde{X}_i)}{\sigma^3(\widetilde{X})}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}} = -\gamma(\widetilde{X})\frac{1}{\sqrt{t}}.$$

Per quanto riguarda il valore atteso di $\widetilde{U}_t$, valgono le stesse considerazioni fatte su $E[\widetilde{u}_t]$, cioè $E[\widetilde{U}_t]$ è una funzione lineare del tempo t , crescente se il caricamento di sicurezza η è positivo .

E' immediato osservare , inoltre , la diretta proporzionalità tra la varianza assoluta del processo di rischio $\widetilde{U}_t$ e l'orizzonte temporale t , mentre , per quanto riguarda l'indice di asimmetria ($\gamma(\widetilde{U}_t)$) , si ha una proporzionalità inversa con la radice quadrata di t ($\sqrt{t}$), cioè $\gamma(\widetilde{U}_t)$ diminuisce all'aumentare di t , in proporzione alla sua radice quadrata . Questo può essere spiegato dal fatto che continuando a sommare un numero sempre maggiore di variabili aleatorie somiglianti , i.i.d., per il teorema del limite centrale , la variabile aleatoria risultante tenderà ad una distribuzione normale , pertanto l'indice di asimmetria tenderà a valori sempre più piccoli .

---

(47) Abbiamo applicato la proprietà della varianza sui cambiamenti di scala .

(48)Abbiamo applicato l'ipotesi che tutte le t variabili aleatorie $\widetilde{X}_i$ sono reciprocamente indipendenti .

(49) Abbiamo applicato l'ipotesi di staticità del portafoglio .

Per quanto riguarda i limiti di confidenza della riserva di rischio $\tilde{U}_t$ secondo un prefissato livello di confidenza (1-ε), questi possono essere determinati mediante le formule di approssimazione già incontrate , (Normal-Power ,Wilson-Hilferty…), calcolando , dapprima , per ciascun anno t, $E[\tilde{U}_t]$, $\sigma(\tilde{U}_t)$ e $\gamma(\tilde{U}_t)$. In genere , però, queste caratteristiche della distribuzione di $\tilde{U}_t$ è possibile ottenerle , in modo analitico , solo per i primissimi anni , al massimo 2 o 3 . Per conoscere quelle degli anni successivi , si può ricorrere alle simulazioni . In pratica , attribuita una distribuzione di probabilità alle v.a. presenti nel modello (numero dei sinistri, costo del singolo sinistro , rendimenti finanziari , ecc.) , si tratterà di "simulare" l'andamento del processo di rischio $\tilde{U}_t$, mediante la generazione di numeri "pseudorandom" da attribuire alle predette variabili aleatorie in modo da ottenere un "cammino simulato" di $\tilde{U}_t$ (o del ratio $\tilde{u}_t$) . Ripetuto quanto detto un numero di volte che si ritiene necessario affinché i risultati possano essere ritenuti attendibili , si ottiene un insieme di cammini simulati . Dai risultati numerici ottenuti dalle simulazioni , ricaviamo per ciascun anno i momenti di $\tilde{U}_t$ e , quindi , calcoliamo mediante le formule di approssimazione già incontrate , NP , WH , ecc, i limiti di confidenza U_{MAX} e U_{MIN}.

Concludiamo lo studio del processo di rischio $\tilde{U}_t$, nel lungo periodo , stimando la probabilità di rovina per un orizzonte infinito , secondo la teoria del rischio classica . Nel caso di un orizzonte temporale illimitato ($T\to\infty$) si dimostra[50] che la probabilità di rovina $\Psi_\infty(U_0)$ è pari alla

(50) Confronta R.E.Beard , T. Pentikainen , E. Pesonen (1984) :"Risk Theory the stochastic basis of insurance ". Ed.Chapman & Hall , Londra.

seguente formula di Lundberg :

$$\Psi_\infty(U_0) = C(U_0) \cdot e^{-R \cdot U_0} \qquad \textbf{(3.36)}$$

dove U_0 è il capitale iniziale , $C(U_0)$ è una funzione ausiliaria , con valori compresi tra 0 e 1 , che dipende da speciali caratteristiche del processo di rischio , tra cui la unzione di distribuzione $S(\tilde{Z})$, mentre R indica il "coefficiente di Lundberg" o , anche , "coefficiente di correzione" .

Nel caso in cui la variabile aleatoria $\tilde{X}$ descriva un processo di Poisson composto semplice , si dimostra che :

$$R = \frac{2 \cdot \eta}{m \cdot r_2} = \frac{2 \cdot \eta}{m(M) \cdot r_2(M)} \qquad \textbf{(3.37)}$$

(che può essere scritta anche come $\frac{2 \cdot \eta \cdot m}{a_2} \cdot \frac{\lambda}{\lambda} = \frac{2 \cdot \eta \cdot E(\tilde{X})}{\sigma^2(\tilde{X})}$) .

Qualora esista un limite superiore M per il costo del singolo sinistro (ad esempio riassicurazione XL) si dimostra che :

$$e^{-R \cdot M} < C(U_0) < 1$$

e pertanto vale la seguente disuguaglianza :

$$e^{-R \cdot M} \cdot e^{-R \cdot U_0} < \Psi_\infty(U_0) = C(U_0) \cdot e^{-R \cdot U_0} < e^{-R \cdot U_0} \Rightarrow$$

$$e^{-R(M+U_0)} < \Psi_\infty(U_0) < e^{-R \cdot U_0} .$$

Normalmente il limite di conservazione M è piuttosto ridotto in confronto a capitale iniziale U_0 e , di conseguenza , i due limiti sono molto ravvicinati tra loro , per cui una buona stima di Ψ_∞ è la seguente :

$$\Psi_\infty(U_0) \cong e^{-R \cdot U_0} . \qquad \textbf{(3.38)}$$

Pertanto , nel caso della Poisson semplice , la formula di Lundberg diventa :

$$\Psi_\infty(U_0) \cong e^{-\frac{2\cdot\eta}{m\cdot r_2}\cdot U_0} = e^{-\frac{2\cdot\eta\cdot m}{a_2}\cdot U_0} \qquad \textbf{(3.39)}$$

Osserviamo che la probabilità di rovina Ψ_∞ non è influenzata , in alcun modo , dalla grandezza dell'impresa , manca , infatti , nella formula 3.39, il parametro λ indicante il numero medio di sinistri . I valori m e r_2 dipendono dal limite di conservazione M e , in particolare , all'aumentare di M , aumenta , come abbiamo già detto altre volte , il costo medio e la variabilità a_2 del sinistro a carico dell'assicuratore . Tale aumento incide sul coefficiente del Lundberg facendolo diminuire e causando , pertanto , un aumento della probabilità di rovina . Un aumento del caricamento di sicurezza η , di m e U_o , invece , comporta un aumento del coefficiente R e , di conseguenza , una diminuzione della probabilità di rovina Ψ_∞.

La formula (3.36) , però , presenta alcuni inconvenienti dovuti , innanzitutto , al fatto che , come tutta la teoria del rischio classica , non tiene conto dei fenomeni ciclici , della redditività degli investimenti , dell'andamento autoregressivo di inflazione , ecc… . In secondo luogo , tale formula rappresenta il "paradosso della teoria del rischio classica" , in quanto si ha che $\Psi_\infty(U_0) < 1$ solo se $\tilde{U}_t \to \infty$ (cioè non vi siano barriere superiori) .

Ciò sta a significare che qualora si ponga un qualsiasi limite superiore al processo di rischio $\tilde{U}_t$, allora $\Psi_\infty(U_0) = 1$, cioè la rovina , per qualsiasi assicuratore è certa , prima o poi .

3.1.3 Stima della riserva di rischio mediante le simulazioni .

Come abbiamo avuto modo di spiegare più volte, la presenza di un trattato di riassicurazione , incide sul valore medio del costo del singolo sinistro, pertanto ,anche l' equazione (3.27)

$$\tilde{U}_t = (1+j)\ \tilde{U}_{t-1} + [B_t - \tilde{X}_t - E_t] \cdot (1+j)^{1/2}$$

subirà delle modifiche dovute , a seconda delle condizioni del trattato, all'eventuale diminuzione del costo sinistri aggregato , $\tilde{X}_t$, a carico dell'assicuratore . Ma , come ben sappiamo , a fronte della cessione di parte della sua esposizione aleatoria , l'assicuratore dovrà pagare un premio e , di contro, riceverà dal riassicuratore delle commissioni , calcolate secondo le modalità previste dal trattato stesso.

In via semplicistica , ipotizzando la staticità del portafoglio nei vari anni e l'assenza dei rendimenti finanziari, considerando fluttuazioni di breve periodo del parametro λ e trascurando tasse e dividendi , la 3.27, a seguito della riassicurazione , diventerà :

$$\tilde{U}_t = \tilde{U}_{t-1} + [(B_t - \tilde{X}_t - E_t) - (B_t^{RE} - \tilde{X}_t^{RE} - C_t^{RE}] \qquad \textbf{(3.40)}$$

dove B_t^{RE} = volume dei premi ceduti al riassicuratore al lordo delle commissioni ;

$\tilde{X}_t^{RE}$ = costo sinistri a carico del riassicuratore

C_t^{RE} = commissioni pagate all'assicuratore .

Al fine di stimare la riserva di rischio a seconda della presenza di un trattato riassicurativo , per semplicità , prendiamo in considerazione un trattato proporzionale "quota share".

Richiamando i simboli già noti , cioè $B_t = P_t + P_t \cdot \eta + c \cdot B_t$, $E_t = c \cdot B_t$, e ponendo

$$B_t^{RE} = a \cdot B_t \ , \quad \tilde{X}_t^{RE} = a \cdot \tilde{X}_t \ , \quad C_t^{RE} = b \cdot B_t \qquad \text{con} \quad 0<a<1 \ , \ 0<b<1$$

si ottiene

$$\tilde{U}_t = \tilde{U}_{t-1} + [((1+\eta_t)\cdot P_t - \tilde{X}_t) - a\cdot((1+\eta_t)\cdot P_t - \tilde{X}_t) + b\cdot B_t] \qquad \textbf{(3.41)}$$

Ricordiamo che per conoscere le caratteristiche principali di $\tilde{U}_t$ ($E[\tilde{U}_t]$, $\sigma(\tilde{U}_t), \gamma(\tilde{U}_t)\ldots$) , per gli anni successivi ai primi , in genere , si ricorre alle simulazioni , pertanto è necessario attribuire una distribuzione di probabilità appropriata alle v.a. presenti nel modello , nel nostro caso nell'equazione 3.41. Come abbiamo già avuto modo di spiegare, generalmente si preferisce studiare il ratio $\tilde{u}_t = \tilde{U}_t / B_t$, pertanto, basterà dividere l'equazione 3.41 per B_t $(= P_t + P_t \cdot\eta + c\cdot B_t)$.

Dunque si supponga che :

$\lambda = E[\tilde{N}] = 5000$;

richiamando il doppio stadio di aleatorietà (confronta par. 2.2)

$\tilde{N} \sim$ Poisson $(\lambda\cdot\tilde{q})$,

dove $\tilde{q} \sim$ Gamma (h , h)[51], posto $\sigma_{\tilde{q}}$ =0,06→ Gamma $\left(\frac{1}{0.06^2}, \frac{1}{0.06^2}\right)$;

$E[\tilde{Z}]$= 5.000;

$C_{\tilde{z}}$ = 5;

$\tilde{Z} \sim$ Lognormale (x, y),

dove x e y sono i parametri della lognormale ricavati secondo la formula (2.16) .

u_0=25%;

η = 5%;

c=25%.

---

(51) Ricordiamo che $h = \frac{1}{\sigma^2_{\tilde{q}}}$

Supponiamo inoltre che la cedente debba scegliere tra le seguenti tre ipotetiche strategie di riassicurazione, differenti tra loro per la quota di cessione “a” e per le commissioni $b \cdot B_t$:

I. strategia $\rightarrow$ a=40% b=20%

II. strategia $\rightarrow$ a=30% b=20%

III. strategia $\rightarrow$ a=40% b=25%

Si proceda dunque, a seconda della presenza della riassicurazione, all’osservazione del risultato grafico di 1000 simulazioni di $\tilde{u}_t$, in un orizzonte temporale di 10 anni.

Grafico 1.A

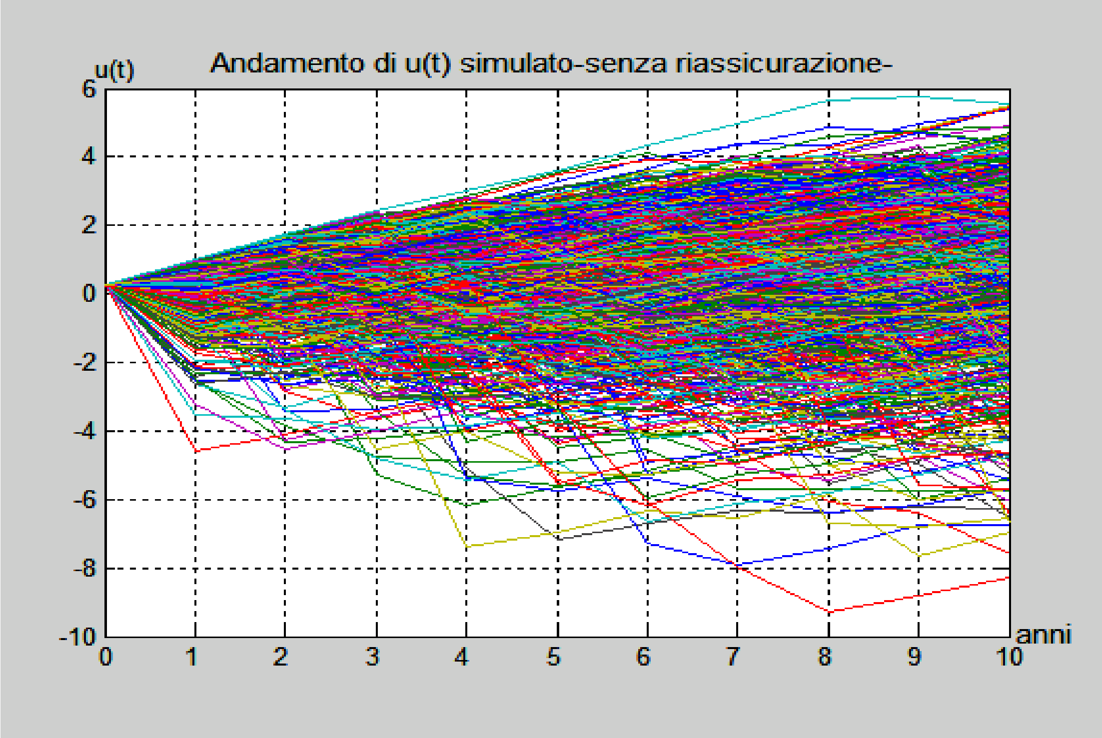
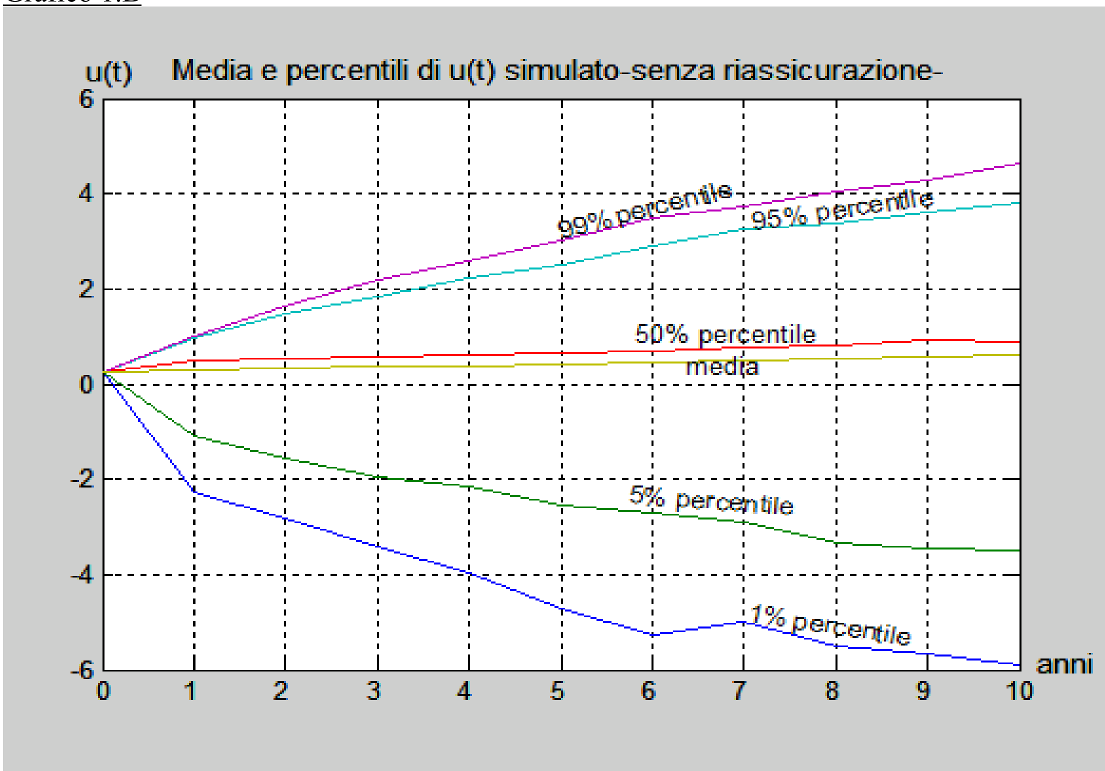


Grafico 1.B



- **I.** Strategia: a=40% e b=20% .

Grafico 2.A

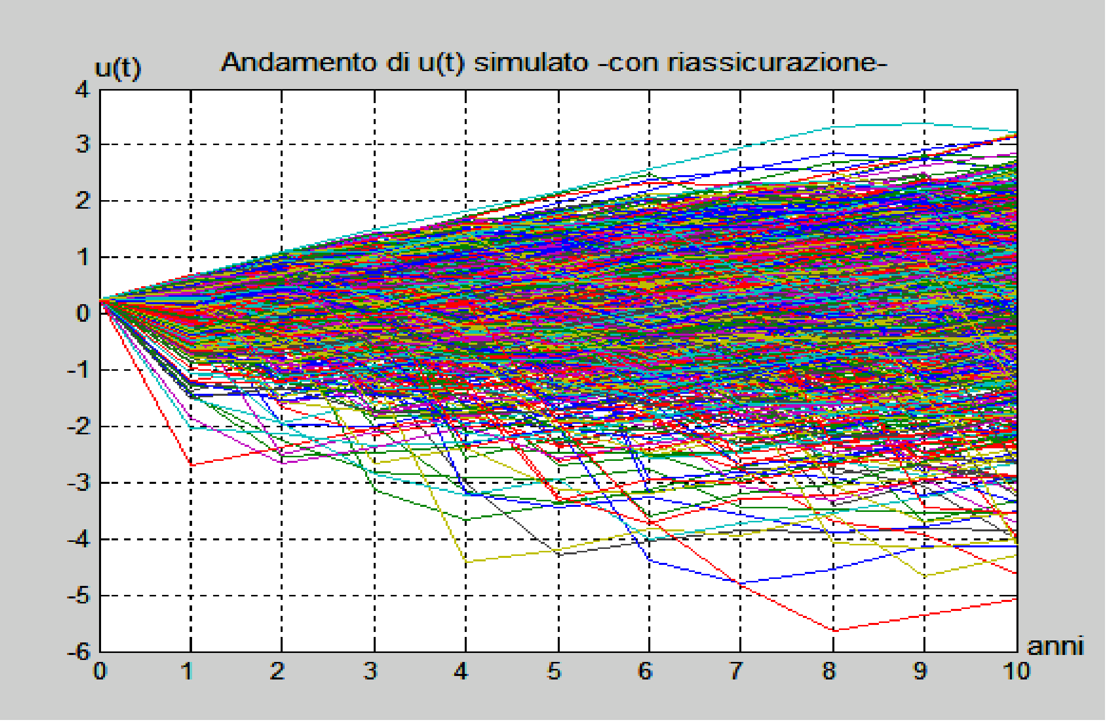
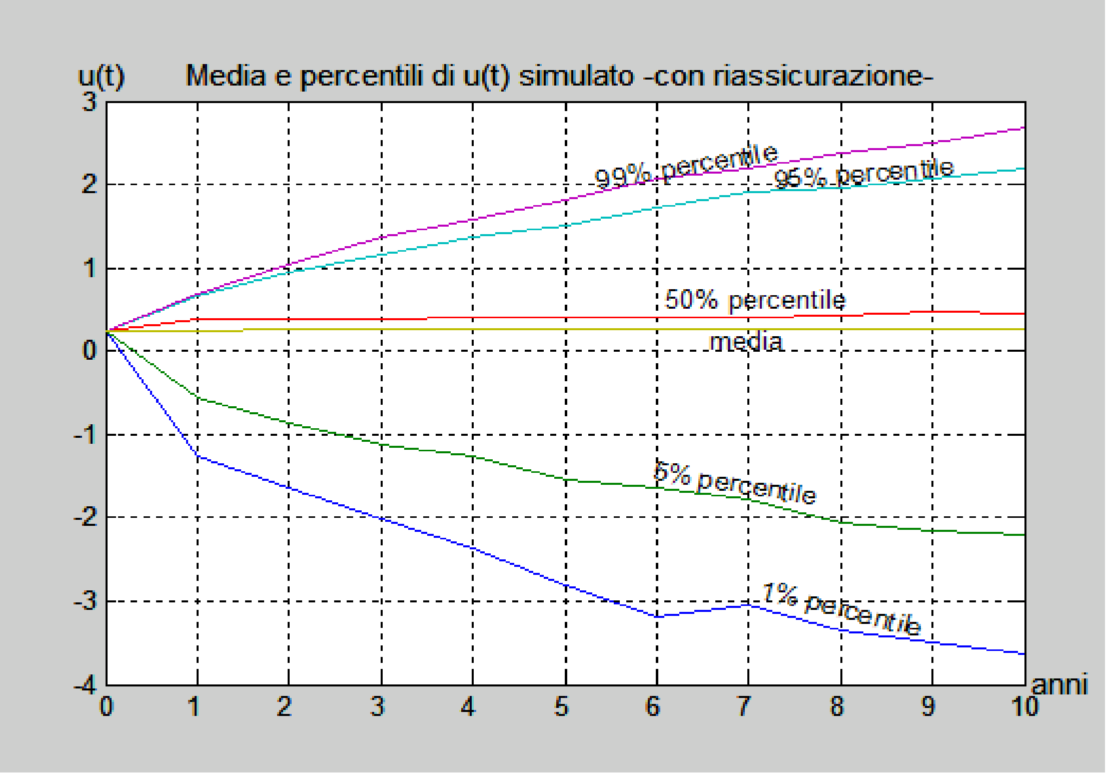


Grafico 2.B



I grafici sopra rappresentati mostrano chiaramente, a seguito della riassicurazione in quota considerata, una riduzione del range di variazione del ratio $\tilde{u}_t$, nonché della sua variabilità.

Altrettanto visibile è la riduzione della media di $\tilde{u}_t$. Infatti, considerando per brevità un arco temporale di 5 anni, (esaminando l'intero orizzonte temporale valgono le stesse considerazioni), in assenza di riassicurazione, alla fine del quinto anno $E[\tilde{u}_t]$ raggiunge un valore (ricavato dai risultati numerici delle simulazioni) circa pari a 0.4286 che, in caso di copertura riassicurativa, si riduce approssimativamente a 0.2571. Era lecito aspettarsi questo risultato, in quanto, oltre che per le considerazioni più volte fatte circa l'impatto della riassicurazione sulla media degli utili della cedente, quest'ultima a fronte di spese, (c), pari al 25% riceve commissioni pari al 20%.

Per meglio comprendere l'impatto della riassicurazione sull'andamento di $\tilde{u}_t$, occorre analizzare i seguenti risultati ottenuti dalle 1000 simulazioni. Per brevità consideriamo solo i primi 5 anni .

SENZA RIASSICURAZIONE

T	$E[\tilde{u}_t]$	$\sigma(\tilde{u}_t)$	$\gamma(\tilde{u}_t)$
0	0.25	----	----
1	0.2857	0.6951	-1.8879
2	0.3214	0.9874	-1.3275
3	0.3571	1.1951	-1.1299
4	0.3929	1.4267	-1.1063
5	0.4286	1.5978	-1.0287

CON RIASSICURAZIONE

T	$E[\tilde{u}_t]$	$\sigma(\tilde{u}_t)$	$\gamma(\tilde{u}_t)$
0	0.25	----	----
1	0.2514	0.4170	-1.8879
2	0.2529	0.5924	-1.3275
3	0.2543	0.7170	-1.1299
4	0.2557	0.8560	-1.1063
5	0.2571	0.9586	-1.0287

SENZA RIASSICURAZIONE

Percentili					
T	**1%**	**5%**	**50%**	**95%**	**99%**
1	-2.2500	-1.0678	0.5018	0.9626	0.9938
2	-2.8194	-1.5591	0.5340	1.4687	1.6368
3	-3.4210	-1.9349	0.5766	1.8472	2.1933
4	-3.9660	-2.1576	0.6250	2.2478	2.5976
5	-4.7055	-2.5656	0.6696	2.5235	3.0039

CON RIASSICURAZIONE

Percentili					
T	**1%**	**5%**	**50%**	**95%**	**99%**
1	-1.2700	-0.5607	0.3811	0.6575	0.6762
2	-1.6317	-0.8755	0.3804	0.9412	1.0421
3	-2.0126	-1.1209	0.3859	1.1483	1.3559
4	-2.3596	-1.2746	0.3950	1.3686	1.5786
5	-2.8233	-1.5394	0.4017	1.5141	1.8023

Circa l'indice di asimmetria di $\tilde{u}_t$, possiamo osservare che esso assume gli stessi valori sia in assenza che in presenza di riassicurazione. Ciò è riconducibile al fatto che l'indice di asimmetria è invariante rispetto ai cambiamenti di scala, infatti, ricordando la relazione 2.28 ($\gamma(\tilde{U})=-\gamma(\tilde{X})$), avremo che, in presenza di riassicurazione proporzionale in quota (net of reinsurance -NR)

$$\gamma_{NR}(\tilde{X})= \frac{\mu_3[(1-a)\tilde{X}]}{\sigma^3[(1-a)\tilde{X}]} = \frac{(1-a)^3 \cdot \mu_3(\tilde{X})}{(1-a)^3 \sigma^3(\tilde{X})} = \frac{\mu_3(\tilde{X})}{\sigma^3(\tilde{X})} = \gamma(\tilde{X}),$$

dove a è la quota di cessione (nel nostro caso pari al 40%).

E' immediato concludere che anche $\gamma(\tilde{U})=\gamma_{NR}(\tilde{U})$.

Per quanto riguarda la variabilità di $\tilde{U}$ (e quindi di $\tilde{u}$) ricordando la formula 3.7 ($\sigma^2(\tilde{U})=\sigma^2(\tilde{X})$) osserviamo che in presenza di riassicurazione proporzionale viene rispettata la seguente relazione:

$\sigma^2_{NR}\,(\widetilde{X})=\sigma^2[(1\text{-a})\,\widetilde{X}]=(1\text{-a})^2\,\sigma^2(\widetilde{X})=(1\text{-a})^2\,\sigma^2(\widetilde{U})=\sigma^2_{NR}(\widetilde{U})$

$\rightarrow\sigma_{NR}\,(\widetilde{X})=\sigma_{NR}(\widetilde{U})=(1\text{-a})\cdot\sigma\,(\widetilde{U})$.

Confrontando i valori dei percentili osserviamo che, in presenza di riassicurazione, la probabilità che $\tilde{u}_t$ assuma valori negativi ($\Pr\{\tilde{u}_t\}<0$) e,in valore assoluto, piuttosto elevati, come in caso di sinistri catastrofali, è inferiore rispetto al caso in cui non vi sia copertura riassicurativa. In particolare per esempio, nel primo caso, osserviamo che all'anno 5 solo l'1% dei cammini aleatori di $\tilde{u}_t$ si troverà al disotto di -2.8233 e il 5% al di sotto di -1,5394, mentre, nel caso opposto, troviamo rispettivamente -4,7055 e -2,5656 .

Di contro, come era lecito aspettarsi, nel primo caso, solo l'1% dei cammini si troverà al di sopra di 1.5141 e il 5% al di sopra di 1.8023, mentre in assenza di copertura riassicurativa troviamo rispettivamente 2.5235 e 3.0039.

Nonostante una diminuzione dei suoi utili attesi, l'impresa, a seguito della copertura riassicurativa considerata, ha ridotto la sua probabilità di rovina, aumentando quindi la sua solvibilità.

Confrontando questa strategia, con le altre, otteniamo i seguenti risultati:

II. strategia→ a=30% , b=20%

T	$E[\tilde{u}_t]$	$\sigma(\tilde{u}_t)$	$\gamma(\tilde{u}_t)$
0	0.25	----	----
1	0.26	0.5164	-1.8879
2	0.27	0.7163	-1.3275
3	0.28	0.8695	-1.1299
4	0.29	0.9933	-1.1063
5	0.30	1.0997	-1.0287

III.strategia → a=40%, b=25%

T	$E[\tilde{u}_t]$	$\sigma(\tilde{u}_t)$	$\gamma(\tilde{u}_t)$
0	0.25	----	----
1	0.2714	0.4170	-1.8879
2	0.2929	0.5924	-1.3275
3	0.3143	0.7170	-1.1299
4	0.3357	0.8560	-1.1063
5	0.3571	0.9586	-1.0287

E' immediato osservare che i valori medi di $\tilde{u}_t$ calcolati utilizzando la seconda e la terza strategia sono maggiori di quelli ottenuti a seguito dell'applicazione della prima.

Tale risultato, per quanto riguarda la terza strategia, era possibile prevederlo in quanto , a parità dei premi ceduti (40%), la cedente ha un introito maggiore di commissioni (25%, anziché 20%), riuscendo, pertanto, a coprire interamente le spese (c).

In merito, possiamo anche osservare che la variabilità (s.q.m) di $\tilde{u}_t$ è rimasta invariata. Ciò è da ricondursi al fatto che la cedente ha conservato la stessa percentuale di premi (e quindi anche del costo sinistri $\tilde{X}$).

E' logico concludere che la terza strategia è da preferirsi alla prima.

Anche per quanto riguarda la seconda strategia, era possibile prevedere un aumento degli utili rispetto a quelli ottenuti con la prima, in quanto, a parità di commissioni (20%), la compagnia cede una quota minore di premi, 30% anziché 40%, e quindi "sacrifica" una quota minore di utili attesi. Tuttavia, abbiamo un peggioramento, in senso di aumento, della variabilità (s.q.m.) di $\tilde{u}_t$, da ricondursi al fatto che (con la seconda strategia) la cedente conserva una quota maggiore di sinistri a suo carico,70% anziché 60% e quindi una rischiosità maggiore del proprio portafoglio. Nonostante ciò, anche la seconda strategia è da preferirsi alla prima, in quanto l'aumento della media di $\tilde{u}_t$ avviene in misura più che proporzionale rispetto all'aumento della sua variabilità.

Infine, confrontando le ultime due strategie, possiamo osservare che l'aumento delle commissioni incide in misura maggiore rispetto alla diminuzione della quota di cessione dei premi. Infatti aumentando (dalla seconda alla terza strategia) le commissioni del 5% , ma cedendo il 10%

in meno dei premi, e quindi degli utili attesi, la terza strategia restituisce comunque un risultato preferibile rispetto alla seconda: un aumento della media ed una diminuzione della variabilità (s.q.m.) di $\tilde{u}_t$.

Concludiamo quindi che la terza politica di copertura riassicurativa è da preferirsi alle altre due.

3.2 Politica di ritenzione ottima della cedente secondo il criterio dell'utilità attesa : cenni .

Diversamente dal paragrafo precedente, in cui si ricercava la politica riassicurativa migliore secondo il criterio di ridurre la probabilità di rovina della compagnia , nel presente paragrafo si procederà, teoricamente, alla ricerca della ritenzione ottima secondo il criterio dell'utilità attesa.

Ponendoci unicamente dal punto di vista della compagnia cedente , è importante, appunto, ricercare quale sia l'ottima ritenzione dei rischi in portafoglio che si intenda riassicurare in forma proporzionale o non proporzionale . Chiaramente , la scelta della forma è dettata da varie motivazioni , non ultima quella delle opportunità offerte dal mercato . Spesso , come abbiamo detto , vengono scelte forme miste . Occorre sottolineare che l'ottimalità di una politica di ritenzione dei rischi è relativa al criterio impiegato per "ordinare" le possibili politiche in termini di preferibilità dei risultati da esse scaturenti .

E' utile premettere che , al fine di ricercare la politica ottima di ritenzione della cedente sono state accolte ipotesi semplificatrici quali : quella di trascurare la considerazione delle spese (i premi sono premi netti , nei quali dunque figura il solo caricamento per sicurezza ; non figurano le spese di transazione ;…) ; quella che siano note ad entrambe le parti le basi tecniche dei rischi in esame . La ricerca della politica ottima è stata condotta adottando il criterio della massimizzazione dell'utilità attesa del guadagno aleatorio del portafoglio riassicurato per un esercizio ed impiegando il modello di utilità esponenziale (normalizzata)[51]

$$u(x) = B[1 - e^{-\frac{x}{B}}] \qquad -\infty < x < +\infty$$

Il parametro B, è il reciproco della misura di avversione al rischio (qui costante) e solitamente rappresenta il patrimonio libero dell'impresa.

rappresenta il patrimonio dell'impresa ed è il reciproco della misura di avversione al rischio (qui costante) .

Indicata con $G^{(r)}$ il guadagno aleatorio a seguito della riassicurazione (e al netto delle spese) sussisterà , con riferimento al singolo rischio nel caso delle riassicurazioni individuali o all'intero portafoglio nel caso delle riassicurazioni globali , la

$$G^{(r)} = P + C - P_r - \tilde{\Gamma} \qquad \textbf{(3.42)}$$

ove P è il premio netto dell' assicuratore , C è la provvigione riconosciutagli dal riassicuratore che chiede un "premio" P_r e $\tilde{\Gamma}$, come già incontrato nel primo capitolo , è la ritenzione della cedente .

L'importo certo P_r e quello aleatorio $\tilde{\Gamma}$ sono funzioni delle percentuali (a) di ritenzione nel caso delle riassicurazioni proporzionali , delle priorità (L) in quello delle riassicurazioni non proporzionali (delle coppie

---

(51)La teoria del comportamento del soggetto economico in condizioni di incertezza, basata sulla nozione di utilità bernoulliana (e di avversione al rischio) , insegna che un qualsiasi contratto deve riuscire vantaggioso o almeno indifferente pr l'assicuratore . Precisamente sia u(x) la funzione di utilità del guadagno dell'impresa , diremo che è di tipo esponenziale normalizzata se può essere scritta nelle seguente forma : $u(x) = B[1 - e^{-\frac{x}{B}}]$,
dove B , con le dimensioni d'importo , rappresenta il reciproco della misura di avversione al rischio (1/B) della compagnia stessa .

(a,L) nel caso delle forme miste del tipo excess of loss modificato) . L'importo C dipende da vari fattori e fondamentalmente dalla forma riassicurativa nonché dal volume dei premi in considerazione ; la sua entità è fissata contrattualmente nel trattato nel caso delle riassicurazioni obbligatorie e concordata in quelle facoltative.

Nel caso delle riassicurazioni individuali la 3.42 è propriamente e con chiaro significato dei simboli avremo la

$$G^{(r)} = \sum_{i=1}^{n} G_i^{(r)} = \sum_{i=1}^{n} (P_i + C_i - P_{i(r)} - \widetilde{\Gamma}_i) . \qquad \textbf{(3.42')}$$

Ciò posto , l'adozione del nostro criterio , conduce alla *ricerca delle variabili decisionali* (percentuali a, priorità L) che rendono massima l'utilità attesa , $E[u(G^{(r)})]$, del guadagno aleatorio del portafoglio riassicurato .

Con la nostra scelta della classe delle funzioni d'utilità esponenziali si tratterà dunque *ricercare il massimo* di

$E[u(G^{(r)})] =$[52] $B\left[1 - E\left(e^{-\frac{G^{(r)}}{B}}\right)\right]$, ovvero il minimo di $E\left(e^{-\frac{G^{(r)}}{B}}\right)$, sotto i vincoli riguardanti le quote "a" (non negative e non superiori all'unità) o le priorità "L" (non negative e superiormente limitate dai valori assicurati o dai massimali garantiti) .

Denoteremo nel seguito con $\varphi_{G^{(r)}}(-\frac{1}{B})$ la speranza matematica $E\left(e^{-\frac{G^{(r)}}{B}}\right)$ che , com'è noto , è il valore della funzione generatrice dei momenti di $G^{(r)}$ calcolata in $-\frac{1}{B}$, che supponiamo esista in ogni caso .

52) Per la proprietà di additività del valore atteso e dell'utilità attesa

Osserviamo subito un interessante conseguenza dell'adozione dell'utilità esponenziale .

Con riferimento ad un portafoglio di n rischi assicurati in forma individuale si ha

$$E\left(e^{-\frac{G^{(r)}}{B}}\right) = E\left(e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n} G_i^{(r)}}{B}}\right) = E\left(\prod_{i=1}^{n} e^{-\frac{G_i^{(r)}}{B}}\right) .$$

Assumendo l'ipotesi semplificatrice ed usuale che i rischi del portafoglio siano *stocasticamente indipendenti* tra loro , risulta allora :

$$\varphi_{G^{(r)}}\left(-\frac{1}{B}\right) = \prod_{i=1}^{n} E\left(e^{-\frac{G_i^{(r)}}{B}}\right) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{G_i^{(r)}}\left(-\frac{1}{B}\right) \qquad \textbf{(2.48'')}.$$

Per quanto riguarda la ricerca del minimo di $\varphi_{G^{(r)}}(-\frac{1}{B})$ essa sarà ricondotta a quella del minimo di $ln\varphi_{G^{(r)}}(-\frac{1}{B})$.

Riassicurazioni proporzionali .

- *in quota globale* .

Assunta l'ipotesi semplificatrice

P_r - C = E ($\tilde{X}$ - $\tilde{\Gamma}$) + g_r = (1-a)m_r $\rightarrow$ E($G^{(r)}$) = η - (1-a)m_r

ove g_r : è un importo (guadagno medio del riassicuratore al netto della provvigione) inferiore al caricamento che l'assicuratore adotterebbe per garantire lui stesso il risarcimento aleatorio $\tilde{X} - \tilde{\Gamma}$. Con tale accorgimento l'effetto della provvigione è assorbito nella differenza di caricamento dei medesimi premi equi della due parti contraenti ;

m_r :guadagno medio che il riassicuratore si garantirebbe ove ritenesse lui per intero tutti i rischi del portafoglio corrispondendo le provvigioni all'assicuratore ;

η :caricamento di sicurezza per l'assicuratore (già incontrato in precedenza) ;

a seconda dell'indice di asimmetria , si dimostra(53) che la soluzione ottima è la seguente :

- Se $\gamma = 0$: la distribuzione della v.a. $\tilde{X}$ è simmetrica attorno al suo valore medio (ipotesi adottabile in approssimazione) ,

  allora $\hat{a} = \min\left(1 \,;\, B\frac{m_r}{\sigma^2(\tilde{X})} \right)$;

- $\gamma > 0$: la distribuzione della v.a. $\tilde{X}$ presenta asimmetria positiva (è il caso di gran lunga più frequente) ,

  allora $\hat{a} = \min\left(1 \,;\, \frac{B}{\gamma(\tilde{X})\sigma(\tilde{X})}\left[\left(1 + 2\frac{m_r}{\sigma(\tilde{X})}\gamma(\tilde{X})\right)^{1/2} - 1\right]\right)$. **(3.43)**

  Nell'ipotesi , frequentemente verificata , $2\frac{m_r}{\sigma^2(\tilde{X})}\cdot\gamma(\tilde{X}) < 1$, e in vista di evidenziare il contributo di $\frac{m_r}{\sigma^2(\tilde{X})}$ consentendo con ciò il confronto con il caso di simmetria della distribuzione ,si dimostra che può essere impiegata la seguente approssimazione :

  $\hat{a} \cong B\frac{m_r}{\sigma(\tilde{X})}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{m_r}{\sigma(\tilde{X})}\gamma(\tilde{X})\right)$ **(3.43')**.

- $\gamma < 0$: la distribuzione della v.a. $\tilde{X}$ presenta asimmetria negativa .

  Occorre distinguere i due casi a seconda del valore di γ.

---

(53)Per la dimostrazione consultare pag. 133 ss Luciano Daboni (1988): "Lezione di tecnica attuariale delle assicurazioni contro i danni" . Edizione LINT Trieste .

I.) Se $2\frac{m_r}{\sigma^2(\tilde{X})} \cdot |\ \gamma(\tilde{X})| < 1$,

allora $\hat{a} = \min\left(\ 1\ ;\ \frac{B}{\gamma(\tilde{X})\sigma(\tilde{X})}[(1 + 2\frac{m_r}{\sigma(\tilde{X})}\gamma(\tilde{X}))^{1/2} - 1]\right)$ **(3.43")**

e può essere impiegata l'approssimazione

$\hat{a} \cong B\frac{m_r}{\sigma^2(\tilde{X})}(1 - \frac{1}{2}\frac{m_r}{\sigma(\tilde{X})}\gamma(\tilde{X}))$; **(3.43"')**

II.) Se $2\frac{m_r}{\sigma^2(\tilde{X})} \cdot |\ \gamma(\tilde{X})| > 1$, risulta $\hat{a} = 1$.

Osserviamo , con riferimento alle (3.43') (3.43"') , che per la determinazione della quota ottimale conta essenzialmente (ed esclusivamente se $\gamma = 0$) il confronto tra il rapporto $\frac{m_r}{\sigma^2(\tilde{X})}$, cioè tra il guadagno medio del riassicuratore e la varianza del risarcimento (riferiti entrambi al risarcimento totale) e la misura dell'avversione al rischio . Fissato B , la quota ottimale di ritenzione è tanto più elevata quanto maggiore è il rapporto $\frac{m_r}{\sigma^2(\tilde{X})}$ (e quindi anche il rapporto $\frac{m}{\sigma^2(\tilde{X})}$ tra il guadagno medio (dell'assicuratore) e varianza in assenza di riassicurazione) . Fissato invece il rapporto $\frac{m_r}{\sigma^2(\tilde{X})}$, la quota ottimale è tanto più elevata quanto minore è l'avversione al rischio , $\frac{1}{B}$.

• *in quota individuale* .

Ponendoci nell'ipotesi che conduce alla (3.42") , si dimostra che nel caso della riassicurazione proporzionale individuale per un portafoglio di n rischi stocasticamente indipendenti , la soluzione del problema , nei casi di asimmetria dei rischi X_i è data per i =1, 2,… n , dalle

$$\hat{a}_i = \min\left(1\ ;\ \frac{B}{\gamma(\tilde{X}_i)\sigma(\tilde{X}_i)}[(1+2\frac{(m_i)_r}{\sigma(\tilde{X}_i)}\gamma(\tilde{X}_i))^{1/2}\text{-}1]\right)$$

o , se $2\frac{(m_i)_r}{\sigma^2(\tilde{X}_i)}\cdot|\gamma(\tilde{X}_i)|<1$, dalle

$$\hat{a}_i = \min\left(1;\ B\frac{(m_i)_r}{\sigma^2(\tilde{X}_i)}\cdot(1\text{-}\frac{1}{2}\cdot\frac{(m_i)_r}{\sigma(\tilde{X}_i)}\gamma(\tilde{X}_i)\right) .$$

Se poi le distribuzioni degli X_i (risarcimenti da riassicurare) sono simmetriche ($\gamma(\tilde{X}_i)=0\ \forall\ i=1\ ,2,\ldots,n$) , o si discostano poco da simile andamento o sono comunque trascurabili i termini $\frac{(m_i)_r}{\sigma(\tilde{X}_i)}\gamma(\tilde{X}_i)$, la soluzione si presenta nella semplice formula

$$\hat{a}_i = \min\left(1\ ;\ B\frac{(m_i)_r}{\sigma^2(\tilde{X}_i)}\right) \qquad i=1,2,\ldots n .$$

<u>Riassicurazioni non proporzionali</u> .

• *Per eccesso sinistro singolo .*

Con riferimento al singolo contratto nella $G_i^{(r)}=P_i+C_i-P_{i(r)}-\tilde{\Gamma}_i$, si supponga che la portata del trattato sia totale (pari cioè a M_i-L_i se M_i è il massimale previsto dal contratto assicurativo , non limitata se il contratto prevede garanzia illimitata) .

Per quanto riguarda il calcolo del premio $P_{i(r)}$, anzi dell'importo $P_{i(r)}-C_i$, si assuma la seguente ipotesi

$$P_{i(r)}-C_i=(1+\eta_{i(r)})\,E[\tilde{N}_i]\int_{L_i}^{M_i}[\int_{Z_i}^{\infty}dF(Z_i)]dz \qquad \textbf{(3.44)}$$

corrispondente al criterio di speranza matematica per il calcolo del premio netto . Va inteso che , anche in questo caso , per assorbire gli effetti della provvigione , il coefficiente di caricamento del riassicuratore $\eta_{i(r)}$ è inferiore a quello che sarebbe adottato (per la medesima copertura e con il medesimo criterio) dall'assicuratore . Accogliendo le suddette ipotesi e aggiungendo l'indipendenza stocastica degli n rischi in portafoglio e che la variabile aleatoria $\tilde{X}$ costo sinistri aggregato si distribuisca secondo una Poisson Composta , si dimostra che le priorità ottimale sono date da :

$$L_i^* = \min (B\, ln(1+ \eta_{i(r)}), M_i) \qquad \textbf{(3.45)}$$

e (con l'approssimazione $ln(1+ \eta_{i(r)}) \cong \eta_{i(r)}$) $\rightarrow L_i^* \cong \min (B\, \eta_{i(r)}, M_i)$.

Giova osservare che la conclusione testé raggiunta determina le priorità ottimali in funzione solamente dell'importo B e dei coefficienti $\eta_{i(r)}$ di caricamento del riassicuratore prescindendo dalle particolarità delle distribuzioni di danno e di singolo sinistro . Tale fatto è peraltro conseguenza dell'assunto che il premio del riassicuratore sia calcolato con il criterio della speranza matematica (oltre che della consueta ipotesi Poisson-composta) .

• *Per eccesso globale* .

Si tratta ora di ricercare la ritenzione ottimale dal punto di vista dell'assicuratore nel caso della riassicurazione in eccesso sinistro globale . In proposito va subito segnalata la difficoltà del riassicuratore di valutare il premio di sua competenza ed è questo il problema più delicato sul quale si appunta frequentemente l'attenzione degli attuari .

Formalmente , il guadagno del portafoglio riassicurato secondo la forma stop loss è ancora

$$G^{(r)} = P + C - P_{(r)} - \tilde{\Gamma},$$

ove P è il cumulo dei premi netto dell'assicuratore , mentre $\tilde{\Gamma}$, come già detto , è la variabile aleatoria $\min(\tilde{X},L)$, se L è la priorità fissata dall'assicuratore a fronte del risarcimento aleatorio globale $\tilde{X}$.

In analogia al ragionamento che ci ha condotti alla formula 3.44 , porremo

$$P_r - C = (1+\eta_r) \int_L^{\infty} \left[\int_Z^{\infty} dF(Z) \right] dz \ .$$

Supponendo inoltre che gli n rischi in portafoglio siano stocasticamente indipendenti si dimostra che una buona approssimazione della priorità L è data da :

$$L \cong (2\, E(\tilde{X}) B\, \eta_r\,)^{1/2}.$$

Le formule che forniscono le soluzioni (approssimate) dei problemi di ricerca dell'ottima politica riassicurativa (secondo il criterio dell'utilità attesa e dal punto di vista unilaterale della cedente) delle quattro formule fondamentali appaiono molto semplici e di immediata interpretazione .

Ciò avviene per merito delle varie ipotesi semplificatrici che sono state assunte .

Dev'essere osservato , però , che per un concreto impiego di quelle formule si richiederebbe la conoscenza del parametro B della funzione di utilità dell'assicuratore ovvero la "misura" della sua avversione al rischio e dovrebbe essere altresì affrontata la valutazione numerica di altre grandezze (coefficiente di caricamento del riassicuratore , varianze dei risarcimenti ,coefficienti di asimmetria) basandosi allo scopo di una ricca documentazione statistica .

Per quel che riguarda la conoscenza della funzione di utilità dell'impresa è possibile -almeno teoricamente- procurarsi un'approssimazione della stessa sulla base dell' impiego di questionari [(55)] e impiegare poi procedimenti perequativi per ricavarne una forma esponenziale .

Si intende , comunque , che non è agevole pervenire ad una portata operativa delle formule stabilite .

3.3 La riassicurazione tradizionale e finanziaria : uno strumento di consolidamento del margine di solvibilità disponibile .

La natura stessa dell'attività delle società di assicurazione le sottopone sia all'andamento della congiuntura economica mondiale , che influisce sul valore dell'attivo , che alla pressione esercitata sul passivo dall'evoluzione dei rischi . Nell'attuale contesto , questi fenomeni si traducono in una diminuzione del capitale disponibile proprio nel momento in cui le disposizione regolamentari evidenziano in molti paesi l'esigenza di incrementare il margine di solvibilità . Tali modifiche spingono spesso le cedenti a definire , insieme al riassicuratore delle soluzioni atte a ripristinare la propria solvibilità a breve o medio termine. Vedremo come la riassicurazione può rivelarsi uno strumento particolarmente efficace per il consolidamento del capitale . Essa , tra l'altro , consente di ottimizzare , la gestione del capitale e la sua remunerazione , permettendo , dal punto di vista strategico , di accedere ai mercati finanziari nelle migliori condizioni .

Il capitale di una società di assicurazione può essere definito , in poche parole , come la differenza tra il valore dell'attivo e degli impegni . Vi sono però varie nozioni di capitale . Il margine di solvibilità disponibile , ad esempio, è imposto dalla legislazione . Deve essere sempre superiore all'esigenza di margine di solvibilità (EMS) definita per legge in funzione dei rischi sottoscritti dall'assicuratore allo scopo di proteggere gli interessi degli assicurati .

---

(55)Confronta appendice 2,pag. 273 - Luciano Daboni (1988): "Lezione di tecnica attuariale delle assicurazioni contro i danni" . Edizione LINT Trieste .

Se questa condizione non è soddisfatta , il libero esercizio dell'impresa di assicurazione viene vietato o fortemente limitato. Il capitale economico, invece, interessa in particolar modo i mercati finanziari e gli azionisti. Rappresenta infatti il valore economico dei fondi propri della società di assicurazione, il suo "valore di mercato". La differenza di valore tra margine di solvibilità disponibile e capitale economico è dovuto all'uso di criteri di valutazione diversi sia per l'attivo che per il passivo. Le regole statutarie sono caratterizzate infatti da una certa prudenza. Pertanto, delle società considerate solvibili in base a determinati criteri economici potranno essere dichiarate insolvibili dalla legislazione in vigore .

Mentre si assottiglia il valore del margine di solvibilità disponibile, i vincoli legislativi impongono l'obbligo di aumentarlo . Dalla metà dell'anno 2000 , i mercati finanziari hanno registrato un notevole flessione acuitasi dopo gli attentati terroristici dell' 11 Settembre 2001. Inoltre il degrado delle condizioni economiche ha fatto aumentare il numero di fallimenti , gravando anche sull'attivo delle compagnie che avevano investito in tali aziende. Nonostante il miglioramento dei mercati finanziari, le minusvalenze latenti degli investimenti degli assicuratori rimangono significative .

In funzione delle norme nazionali, che devono essere rispettate dagli assicuratori, il crollo dei mercati finanziari può avere due conseguenze diverse: ripercuotersi direttamente sull'attivo quando le imprese valutano i loro investimenti a valore di mercato, come ad esempio negli Stati Uniti (per le azioni e i prodotti derivati) o nel Regno Unito; oppure ripercuotersi sul passivo quando le imprese valutano gli investimenti costo storico, costituendo fondi per rischi di esigibilità o per deprezzamenti durevoli, come in Francia. Questa situazione difficile, in cui il margine di solvibilità disponibile risulta basso a causa delle riduzione dell'attivo e/o dell'aumento del passivo, è ulteriormente aggravato dall'irrigidimento delle regole di solvibilità da parte delle autorità competenti. In Europa , ad esempio, il capitale minimo richiesto per svolgere un'attività assicurativa nel ramo danni , varia da 0,2 a 1,4 milioni di € . Il margine di solvibilità richiesto U_{req}, invece , può essere calcolato facendo riferimento o al volume dei premi , o all'indice di sinistrosità . In particolare :

$$U_{req} = \max \begin{cases} [18\% \cdot 10000000\,€ + 16\% \,(B - 10000000\,€)^{+}] \cdot \alpha \\ \\ [26\% \cdot 7000000\,€ + 23\% \,(\bar{S} - 7000000\,€)^{+}] \cdot \alpha \end{cases}$$

Per imprese di dimensioni medio-grandi U_{req} , in pratica , si può approssimare con :

$$U_{req} \cong \begin{cases} 16\% \cdot B \cdot \alpha & \bar{S}/B < 70\% \\ \\ 23\% \;\; \bar{S} \cdot \alpha & \bar{S}/B \geq 70\% \end{cases}$$

dove :

B = premi di tariffa di competenza dell'esercizio ;

$\bar{S}$= onere medio dei sinistri nell'ultimo triennio .

Posto S = costo sinistri complessivo e S_R = costo sinistri a carico del riassicuratore , si ha :

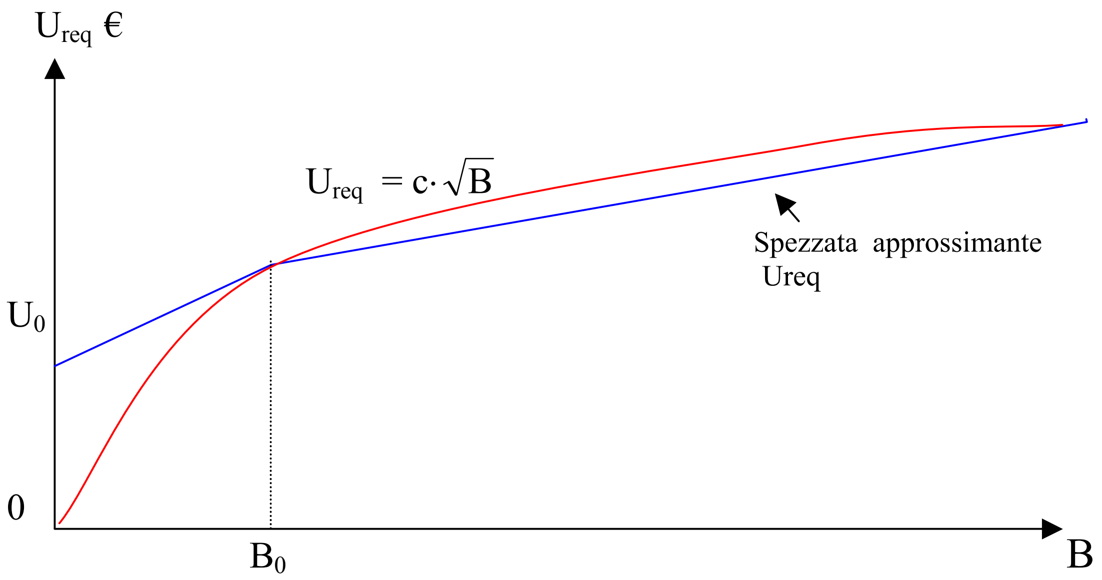
α = grado di conservazione = max $\{50\% ; (S-S_R)/ S\}$.

La formulazione del margine di solvibilità , nella sua rappresentazione grafica, presenta un andamento parabolico. In particolare U_{req} può essere approssimato da una spezzata[51] , cioè :

$$U_{req} = U_0 + a \cdot B - b\,(B - B_0)^+ = \begin{cases} U_0 + a \cdot B & B \leq B_0 \\ U_0 + a \cdot B - b\,(B - B_0)^+ & B > B_0 \end{cases}$$

dove poniamo B , importo dei premi di tariffa , pari a 10000000 € , $a = 18\%$, $b = 2\ \%$.

Graficamente :



E ' immediato notare , come è già stato accennato in precedenza , che il margine di solvibilità richiesto aumenta all'aumentare dei premi , ma in modo meno che proporzionale .

In caso di insufficienza del margine di solvibilità disponibile , il primo impulso delle aziende è quello di rivolgersi ai mercati finanziari .

---

(51) Confronta pag .165 R.E.Beard , T. Pentikainen , E. Pesonen (1984) - "Practical Risk Theory- the stochastic basis of insurance". Ed.Chapman & Hall , Londra.

Per poter soddisfare l'esigenza di capitale, l'azienda dispone di varie possibilità: collocare nuove azioni , emettere dei prestiti obbligazionari o cartolarizzare i propri portafogli . Queste misure sono però onerose , irreversibili, complesse o poco flessibili, mentre la riassicurazione propone soluzioni al tempo stesso semplici e flessibili .

Nella maggior parte delle legislazioni, una semplice riassicurazione in quota permette di ridurre l'esigenza di margine di solvibilità. La riduzione dell'EMS si spiega col fatto che il riassicuratore condivide , proporzionalmente alla sua quota (massimo 50%) , gli stessi rischi dell'assicuratore .

Oltre alla riduzione dell'esigenza di margine di solvibilità , l'obiettivo frequente è di rafforzarlo per poter finanziare le proprie attività o svilupparne altre . Soluzioni di riassicurazione più avanzate consentono di soddisfare contemporaneamente tali esigenze . I trattati detti di finanziamento , o finanziari , consentono infatti di aumentare la solvibilità sostenendo al tempo stesso l'attività dell'assicuratore . Da una parte tali trattati in quota , come descritto sopra , riducono l'EMS . Dall'altra , l'importo di finanziamento versato sotto forma di commissioni di riassicurazione consente di incrementare il margine di solvibilità disponibile grazie all'apporto di liquidità attraverso il conto economico . Pertanto la riassicurazione ha un doppio effetto : riduzione del capitale ed aumento del capitale .

Possono essere proposti vari tipi di finanziamento a seconda della necessità dell'assicuratore . Molti assicuratori utilizzano la riassicurazione per finanziare nuovi affari . Per il riassicuratore , questa tecnica classica consiste nel partecipare al pagamento delle spese di acquisizione di nuovi contratti e nel ridurre inoltre l'EMS. Il versamento delle commissioni di riassicurazione evita all'assicuratore di contabilizzare una perdita di primo anno per una determinata generazione di contratti e gli impedisce di contabilizzare un risultato negativo che intaccherebbe il capitale e contemporaneamente aumenta la liquidità .Tuttavia il portafoglio interessato rappresenta generalmente una quota poco elevata del suo portafoglio totale , a meno che le attività dell'impresa riassicurata siano in fase iniziale . A fronte del rafforzamento desiderato del margine di solvibilità disponibile , l'importo finanziato rimane quindi relativamente basso .

Un'altra soluzione consiste nel riassicurare un portafoglio già in essere e nel versare un importo di finanziamento pari ad una frazione degli utili futuri . Questa tecnica consente di iniettare elevate somme in una sola volta nel conto economico dell'assicuratore (una somma che equivale spesso a qualche decina di milioni di euro) con un conseguente aumento del margine di solvibilità disponibile .

Questa soluzione non si applica a tutti i portafogli . In genere , è limitata a portafogli caratterizzati da elevati livelli di riserve che comprendono una parte di utili futuri . Le commissioni versate prendono allora in considerazione la differenza tra la valutazione realizzata secondo le norme di legge e la valutazione economica delle riserve tecniche . Questo scarto è ancora più importante se le basi tecniche per il calcolo della riserva sono prudenti e lontane dalla "realtà economica".

Inoltre , le norme contabili attuali non permettono , in genere , di integrare nel calcolo del margine di solvibilità disponibile gli utili futuri di un determinato portafoglio , mentre la riassicurazione lo consente .

E' importante notare che questo strumento è dotato di un'estrema flessibilità : si adatta alle singole esigenze , sia in termini di durata che di importo o di struttura .

Infine , queste soluzioni richiedono tutte un'ottima conoscenza dei rischi e dei relativi prodotti da parte del riassicuratore . Il finanziamento degli utili futuri richiede infatti un'analisi precisa dei flussi futuri del portafoglio riassicurato , in fase di costituzione o già esistente .

Capitolo 4

Aspetti generali della riassicurazione finanziaria .

Premessa : il primo grande incentivo a ricercare forme non convenzionali di riassicurazione è riconducibile alle difficoltà incontrate dalle compagnie cedenti a riallocare i loro rischi di portafoglio presso i riassicuratori internazionali . Il mercato riassicurativo è sottoposto nel tempo a consistenti modifiche della propria capacità di ricopertura assicurativa , con la conseguenza di presentare , e di aver presentato , forti carenze di coperture nelle fasi cicliche più negative . Di qui , uno stimolo allo sviluppo della domanda di ricoperture non convenzionali .

Il secondo grande incentivo a ricorrere alla riassicurazione finanziaria è costituito dal bisogno delle compagnie di ridurre le forti fluttuazioni finanziarie e di reddito tipiche dei loro bilanci , un bisogno perciò di stabilizzazione finanziaria e reddituale e di indipendenza dai cicli di mercato , di qui uno stimolo alla ricerca di trattati riassicurativi con un contenuto specificatamente o prevalentemente finanziario .

Diversi possono essere , quindi , gli scopi cui tali contratti mirano in modo diretto (indirettamente , poi , ogni trattato può consentire altri benefici) . Tali obiettivi possono essere riassunti brevemente come segue :

a) copertura di eventi generalmente esclusi dai tradizionali trattati (p.e. inquinamento , RC prodotti) ;
b) ottimizzazione del bilancio : stabilizzazione dei risultati economici – finanziari della cedente , con livellamento delle fluttuazioni di bilancio derivanti da un aumento della frequenza e/o dell'importo dei sinistri ;
c) miglioramento dei risultati di bilancio e dei relativi "ratios" , con un

di solvibilità che consente alla compagnia cedente di espandersi ulteriormente , di fatto di migliorare la sua capacità di "underwriting" ;

d) permettere l'aumento della ritenzione della cedente , contenendo le esposizioni catastrofali ;
e) protezione della crescita della riserva sinistri ;
f) protezione per il ritiro da un ramo o classe di affari , per la chiusura o il trasferimento dell'attività assicurativa ;
g) costituzione delle riserve di equilibrio per sinistri di elevata severità e bassa frequenza ;
h) pianificazione fiscale e facilitazione di programmi di ristrutturazione aziendale .

I trattati riassicurativi finanziari , quindi , sono stipulati sulla base di un'analisi della situazione finanziaria della compagnia e dei relativi obiettivi ; i trattati riassicurativi tradizionali , invece , sono stipulati sulla base dell'analisi dei rischi in portafoglio e della relativa esposizione aleatoria .

I trattati riassicurativi non convenzionali vengono chiamati "trattati finite" e prevedono una copertura di durata pluriennale , in quanto sono generalmente utilizzati per coprire gruppi di affari di natura long-tail dove l'elemento finanziario nel tempo ha un ruolo importante . Il termine "finite" designa un rischio limitato da parte del riassicuratore e , di riflesso , un margine di guadagno notevolmente ridotto per il riassicuratore stesso . Tali trattati , quindi , come quelli tradizionali , prevedono un trasferimento del rischio , ma , al contempo , anche una condivisone del profitto tra riassicuratore e riassicurato . Il concetto di condivisione del profitto viene spesso sottolineato dalla presenza di clausole di partecipazioni agli utili .

L'elemento rischio sopra menzionato , è visibile per il fatto che il riassicuratore è esposto a subire anche una perdita . Le dimensioni di quest' ultima vengono a dipendere , anche e soprattutto , dalla significatività della componente assicurativa del trattato . La presenza di quest' ultima componente potrà caratterizzare il contratto riassicurativo facendolo valere ai fini del calcolo per il margine di solvibilità . L'elemento finanziario , invece , è rappresentato anche dal fatto che , dal riassicurato , viene pagato un premio anticipato in funzione di un importo stimato e programmato di sinistri .

I trattati in questione si dividono in "trattati prospettici" e "trattati retrospettivi". I primi si riferiscono ad un'attività futura della compagnia e , pertanto , riguardano premi e rischi futuri ; i secondi , invece ,si riferiscono ad un'attività assicurativa già acquisita e riguardano , quindi , sinistri già accaduti . In questi trattati , come anche in quelli tradizionali , il riassicuratore dovrà corrispondere adeguate provvigioni alla cedente, vale a dire una commissione , in percentuale dei premi riassicurati , a copertura dei costi di acquisizione e della gestione dei rischi e dei sinistri. Questa percentuale può essere determinata a priori (commissione fissa) , o a posteriori (commissione a scalare). Quest'ultima , ricordiamo, deve essere prevista a priori nel contratto e , in questo caso , è necessario stabilire una commissione "provvisoria" al cui aggiustamento si procederà a fine esercizio , una volta conosciuti i dati previsti dalla formula per la determinazione della percentuale definitiva .

Per quanto riguarda la valutazione dei contratti in questione , il 15 Dicembre 1992 l'Associazione degli Accounts emanò una disposizione (la SFAS 113) sui contratti riassicurativi con riferimento al metodo standard GAAP (Generally Accepted Accounting Principles) . In merito ai contratti riassicurativi di tipo "finite" , appunto , venne precisato che un contratto può essere contabilizzato come riassicurazione se il riassicuratore assume un rischio significativo e se è ragionevolmente possibile che esso possa subire una perdita significativa dalla gestione del contratto : di fatto si richiedeva la presenza significativa sia del rischio di sottoscrizione che del rischio di timing (connesso all'incertezza dello sviluppo del pagamento dei sinistri) . La stessa Associazione ritiene che quando il contratto consenta la separazione tra un rischio assicurativo e un elemento finanziario , occorre procedere alla distinta contabilizzazione di ciascuna componente . Anche nel Regno Unito occorre fare riferimento , per riconoscere la valenza riassicurativa di un contratto , alla significatività del rischio assicurativo . A differenza dello SFAS 113 , però , si ritiene sufficiente la presenza anche separatamente tra di loro , o di un rischio di sottoscrizione , o di un rischio di timing . Il concetto di significatività viene riempito con riferimento alla ragionevole possibilità di realizzare una perdita significativa e alla ragionevole possibilità di una significativa varietà dei risultati . Quanto alla contabilizzazione , ove il contratto includa un trasferimento di rischio reale e un elemento finanziario sarebbe "appropriata" la loro contabilizzazione separata senza , tuttavia , l'obbligo di effettuarla , nella consapevolezza della difficoltà ad effettuare una divisione . Per quanto riguarda la valutazione della riassicurazione finanziaria in Europa , al momento non vi è alcuna direttiva della Comunità , né vi sono linee guida dei singoli stati membri.

4.1 Trattati prospettici .

4.1.1 Il trattato finanziario proporzionale (“financial proportional cover”) .

La prima forma tipica di un contratto finite è il trattato finanziario proporzionale . Tale trattato prevede il trasferimento della riserva premi (premi non di competenza) al riassicuratore . Di conseguenza lo stesso riassicuratore prende in carico anche i sinistri relativi ai premi trasferiti. La cedente riceve una commissione di riassicurazione sui premi ceduti , proteggendo , pertanto , il proprio capitale per fronteggiare l’onere del margine di solvibilità . Oltre alla riduzione dell’esigenza di margine di solvibilità , l’obiettivo frequente è di rafforzarlo per poter finanziare le proprie attività o svilupparne altre (da ciò deriva la denominazione per tale trattato di surplus relief) . Infatti , nel nostro caso , possiamo affermare che , di fatto , il riassicuratore finanzia lo sviluppo dei premi della compagnia , garantendole , a mezzo della commissione , la protezione finanziaria del capitale ; ciò si traduce anche in un miglioramento dei ratios in portafoglio .

Le commissioni di riassicurazione saranno inferiori rispetto a quelle previste per i trattati proporzionali tradizionali , in quanto il rischio trasferito al riassicuratore è inferiore , in particolare , richiamando la formula 1.A $\Big(\mathrm{RCR} = \mathrm{PRCR} - \mathrm{SF}\cdot\left\{\frac{\mathrm{RL}}{\mathrm{RP}} - (1 - \mathrm{PRCR} - \mathrm{RM})\right\} = 0.33 - 0.5 \cdot \left\{\frac{\mathrm{RL}}{\mathrm{RP}} - (1 - 0.33 - 0.05)\right\}$ incontrata nel corso della trattazione delle forme riassicurative tradizionali proporzionali, dove, ricordiamo,

RCR = commissioni di riassicurazione in percentuale dei premi ,

PRCR = commissioni di riassicurazione provvisorie

SF = slide factor,

$\frac{RL}{RP}$ = rapporto sinistri a premi a carico del riassicuratore .

RM = margine di profitto del riassicuratore,

min RCR = valore minimo di RCR

max RCR = valore massimo di RCR)

si avrà , per esempio , una modifica di questo tipo :

SF = 100% (anziché 50%) ,

min RCR = 15% (anziché 25%) .

Il riassicuratore inoltre può far partecipare la cedente ai risultati dei suoi utili , in quegli anni in cui il rapporto $\frac{RL}{RP}$ è stato particolarmente basso .

Se il riassicuratore avesse interesse a delimitare la sua esposizione aleatoria , potrà introdurre nel trattato delle limitazioni di responsabilità sotto forma di : loss ratio massimi e minimi (corridoi di sinistrosità) , franchigie , un tetto di limite aggregato ,ecc….

Un altro obiettivo della cedente è rappresentato dal differimento dei costi di acquisizione . Per il riassicuratore , questo consiste nel partecipare al pagamento delle spese di acquisizione di nuovi contratti e nel ridurre inoltre l'EMS. Il versamento delle commissioni di riassicurazione evita all'assicuratore di contabilizzare una perdita di primo anno per una determinata generazione di contratti e gli impedisce di contabilizzare un risultato negativo che intaccherebbe il capitale e contemporaneamente aumenta la liquidità . Tuttavia il portafoglio interessato rappresenta generalmente una quota poco elevata del suo portafoglio totale , a meno che le attività dell'impresa riassicurata siano in fase iniziale . A fronte del rafforzamento desiderato del margine di solvibilità disponibile , l'importo finanziato rimane quindi relativamente basso .

Formalizziamo il discorso come nel caso delle riassicurazioni tradizionali , pertanto , indicando con $\tilde{\Gamma}$ l'impegno conservato dall'assicuratore sull'intero portafoglio , avremo :

$$\tilde{\Gamma}_t = \tilde{X}_t - \tilde{X}_t^{RE} = \tilde{X}_t - \left(\frac{\tilde{X}_t}{B} \cdot \alpha \cdot RP\right) \qquad 0 \leq \alpha \leq 1$$

dove $\tilde{X}_t$ = ammontare dei sinistri di competenza del periodo t ;

$\tilde{X}_t^{RE}$ = ammontare dei sinistri a carico del riassicuratore ;

$\tilde{X}_t/B$ = loss ratio riferito al periodo t ;

α = percentuale della riserva premi trasferita al riassicuratore ;

RP_t = riserva premi ala fine dell'anno t .

Riassumiamo quanto detto con il seguente esempio numerico (1) riguardante l'impatto sul bilancio del trattato in questione .

Compagnia X – Bilancio esercizio N .

Premi sottoscritti	Euro 10 mln
Premi non di competenza	Euro 5 mln
Loss ratio	70%
Costi	30% premi sottoscritti
Commissione cessione	30%
Capitale per il margine di solvibilità	Euro 5 mln

Bilancio Compagnia senza utilizzo del trattato finanziario

(in milioni di euro)	**N**	**N+1**
Premi sottoscritti	+10	-
Riserva Premi	-5	+5
Premi di competenza	+5	+5
Loss ratio(70%premi di comp.)	-3.5	-3.5
Costi (30%premi sottoscritti)	-3	-
Utile/perdita	-1.5	+1.5
Capitale per il margine di solvibilità (iniziale)	+5	+3.5
Capitale per il margine di solvibilità (finale)	+3.5	+5

Bilancio Compagnia con utilizzo del trattato finanziario

(in milioni di euro)	N	N+1
Premi sottoscritti	+10	-
Riserva Premi	-5	-
Premi di competenza	+5	-
Loss ratio(70%premi di comp)	-3.5	-
Costi (30%premi sottoscritti)	-3	-
Utile/perdita	-1.5	-
Commissione	+1.5	-
Risultato finale	-	-
Capitale per il margine di solvibilità (finale)	+5	+5

Vale la pena ribadire che a seguito della riassicurazione , la cedente ha conservato il capitale per fronteggiare l'onere del margine di solvibilità , infatti senza il trattato , nell'esercizio N+1 , avrebbe avuto a disposizione un capitale per il margine pari a 3,5 (meno del necessario) ; dopo il trattato , invece , il capitale disponibile è risultato pari a 5 .

Riportiamo ora un altro esempio [(2)] che tenga conto , questa volta , anche dei risultati di alcuni "financial ratios" a seguito del trattato in questione .

Supponiamo che , al 31/12/90 , la cedente ceda il 66% (2/3) della riserva premi e riceva , in cambio , commissioni provvisorie pari al 30% del ceduto e , inoltre , che venga programmato , come nel caso precedente , un movimento della riserva premi , del pagamento aggregato dei sinistri e della commissione in modo da determinare , come risultato finale previsto ex-ante , una somma zero (sia per il riassicurato che per il riassicuratore) . Al fine di valutare gli effetti sul

---

(1) Esempio tratto dal seminario: "Riassicurazione non proporzionale e alternative risk transfer" . Giuseppe Gionta(2002)

(2) Esempio tratto dal seminario "Financial Reinsurance"- (ex) Unione Italiana di riassicurazione .Giugno ,1990.

bilancio , a seguito del trattato *financial quota share* , rappresentiamo nelle seguenti tabelle , gli aspetti basilari e semplificati della situazione patrimoniale ed economica della cedente , prima e dopo la riassicurazione .

- Prima della riassicurazione .

STATO PATRIMONIALE

(in milioni di dollari)	**31/12/90**	**31/12/91**
Riserva Sinistri	650	650
Riserva Premi	200	200
Surplus	150	150
Totale (passività & surplus)	1000	1000
Attività	1000	1000

CONTO ECONOMICO

(in milioni di dollari)	**31/12/90**	**31/12/91**
Premi incassati	500	500
Sinistri sostenuti	400	400
Spese sostenute	150	150
Risultato conto tecnico	-50	-50
Reddito da investimenti	50	50
Risultato al lordo delle tasse	0	0

- Dopo la riassicurazione .

STATO PATRIMONIALE

(in milioni di dollari)	**31/12/90**	**31/12/91**
Riserva Sinistri	650	650
Riserva Premi	67(3)	200
Surplus	190(4)	150
Totale (passività & surplus)	907	1000
Attività	907	1000

CONTO ECONOMICO

(in milioni di dollari)	31/12/90	31/12/91
Premi incassati	500	367(5)
Sinistri sostenuti	400	294(6)
Spese sostenute	110	163(7)
Risultato conto tecnico	-10	-90
Reddito da investimenti	50	50
Risultato al lordo delle tasse	40	-40

FINANCIAL RATIOS

Financial ratios	Prima	Dopo
Premi / Surplus	3,33(8)	1,93(9)
Loss/ratio	80%	80%
Expense ratio(10)	30%	30%
Combined ratio(11)	110%	110%

Possiamo osservare che a seguito del trattato finanziario la cedente ha migliorato il suo rapporto premi /surplus , infatti per la cedente a parità di premi incassati , tanto minore è questo rapporto , migliore sarà il suo "stato di salute". Infatti un valore minore di questo rapporto (a parità di premi) è restituito da un maggiore valore del surplus generato (dalla compagnia stessa) nell' esercizio , pertanto questo incremento potrà essere utilizzato per finanziare nuovi affari , oltre che per fronteggiare l'onere del margine di solvibilità .

(3) $67 \cong 200-(200\cdot 2/3)$.
(4) $190 \cong 150+((200-67)\cdot 0.30)$.
(5) $367 = 500 - (200 - 67)$.
(6) Il rapporto sinistri a premi (loss ratio) è pari all'80% , pertanto il riassicuratore risponderà per un importo pari a : $(0.8 \cdot 200)\cdot 2/3 \cong 106 \rightarrow$ l'impegno per l'assicuratore sarà pari a $400 - 106 = 294$.
(7) $163 = 150 + 13$ dove 13 è l'importo relativo agli aggiustamenti delle commissioni di riassicurazione dovute al riassicuratore dalla cedente .
(8) $3,33 \cong 500/150$.
(9) $1,93 \cong 367/190$
(10)expense ratio =totali spese sostenute/ premi di competenza .
(11)combined ratio = expense ratio + loss ratio .

Ai fini di discriminare le imprese “sane” da quelle “in pericolo “, è utile lo studio dei suddetti (e altri) ratios in un orizzonte temporale ragionevolmente lungo , in modo da poterne calcolare la variabilità e decidere eventualmente di provvedere alla sua diminuzione , in quanto una variabilità troppo elevata di tali ratios è indice di una instabilità economica e finanziari della compagnia stessa . Nel seguito ci preoccuperemo di chiarire meglio il concetto mediante un opportuno esempio numerico .
Vale la pena osservare, inoltre, che il trattato finanziario in quota si differenzia da quello tradizionale principalmente per il fatto che la cedente incassa anticipatamente le provvigioni, cioè incassa nell’anno N le provvigioni relativa ai premi ai sinistri di competenza dell’anno N+1; pertanto il premio del riassicuratore è rappresentato da una quota della riserva premi (premi non di competenza dell’anno N).

4.1.2 Il trattato finanziario eccesso di sinistri aggregato prospettico (“spread loss”) .

Il trattato prevede la copertura di pagamenti futuri dei sinistri derivanti dall’anno di sottoscrizione corrente a fronte , anno per anno , di un premio di riassicurazione calcolato tenendo conto sia del valore attuale dei sinistri attesi nell’arco di tempo del trattato , sia del reddito stimato dell’investimento dei premi . Quest’ultimi , infatti , sono di norma investiti in un fondo separato ed anche il reddito maturato viene reinvestito nello stesso fondo . In tal modo premi e reddito servono ad autofinanziare i sinistri attesi . I premi , quindi , non sono fissati con riferimento al trasferimento di un rischio assicurativo , bensì in funzione dei sinistri che si stima verranno in concreto pagati , e quindi entro ben definiti limiti . In assenza di sinistri , con la “Profit Commission” il riassicuratore restituirà alla cedente parte del premio e degli interessi generati . Il rischio trasferito è limitato , infatti il riassicuratore è responsabile di un importo ben definito per ciascun sinistro che eccede la ritenzione , più un altrettanto ben definito , limite aggregato di responsabilità , pertanto , per quanto riguarda la ritenzione della cedente, vi sarà un limite per ciascun sinistro ed un limite aggregato per l'insieme dei sinistri , cioè (con noto significato dei simboli):

$$\tilde{\Gamma} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{h=0}^{\tilde{N}_i} b_i \tilde{Z}_h^{(i)} + c \sum_{i=1}^{n} \tilde{X}_i \qquad 0 \leq b \leq 1 \text{ e } 0 \leq c \leq 1.$$

Di conseguenza , il conto tecnico della cedente sarà addebitato per i sinistri pagati e accreditato per i premi e il reddito degli investimenti , al netto delle deduzioni contrattuali . Il saldo finale verrà rimborsato anche a mezzo dei premi futuri , dalla compagnia in presenza di un deficit o dal riassicuratore se positivo .

L'obiettivo della compagnia è di programmare i flussi di cassa in entrata e in uscita e livellare , attraverso l'autofinanziamento dei sinistri , le oscillazioni dei risultati del proprio reddito nell'arco del tempo , generalmente da 5 a 10 anni . Con questo tipo di trattato , quindi , la cedente mitiga l'eventuale effetto dell'incremento atteso nella frequenza dei sinistri medio/piccoli , ottenendo contemporaneamente un nuovo capitale per il finanziamento di nuovi affari e un miglioramento del risultato tecnico e dei ratios di bilancio .

Nell'ambito di questo trattato , il riassicuratore sarà esposto ad alcuni rischi che dovranno essere ben valutati in sede di contrattazione , infatti lo stesso riassicuratore sarà soggetto al trasferimento di :

- <u>Underwriring Risk</u> : il riassicuratore , infatti , ricevendo un premio , è responsabile di una parte dei sinistri che colpiscono la cedente e , pur considerando tutti i possibili aggiustamenti del premio , il risultato del trattato rimane comunque incerto ;

- Timing Risk : in relazione all'incerta sequenza dei pagamenti e dei rimborsi dei sinistri : i sinistri , ad esempio , potrebbero essere anche anticipati rispetto all'incasso dei premi ;
- Credit Risk : in relazione all'incertezza relativa ai premi ancora da incassare ;
- Investment Return Risk : in relazione all'incertezza relativa al reddito che maturerà effettivamente sull'investimento e che a consuntivo potrebbe differire da quello preventivato (ove il riassicuratore facesse pagamenti in eccesso rispetto alle somme investite , la compagnia dovrebbe pagare i premi futuri "rivisitati" verso l'alto , per tener conto della sinistrosità effettiva e del reddito maturato) ;
- Expense Risk : eventualità che i caricamenti per spese , inclusi nel premio , siano insufficienti per coprire i costi derivanti dalla gestione del contratto .

A titolo di esemplificazione numerica , riportiamo il seguente esempio(12) numerico : -esempio 2 -

Durata del trattato : 6 anni

Premio di riassicurazione : 10 mln

Responsabilità riass.re : fino 30 mln l'anno e 100 mln su base aggregata

Tasso d'interesse del fondo : 10% .

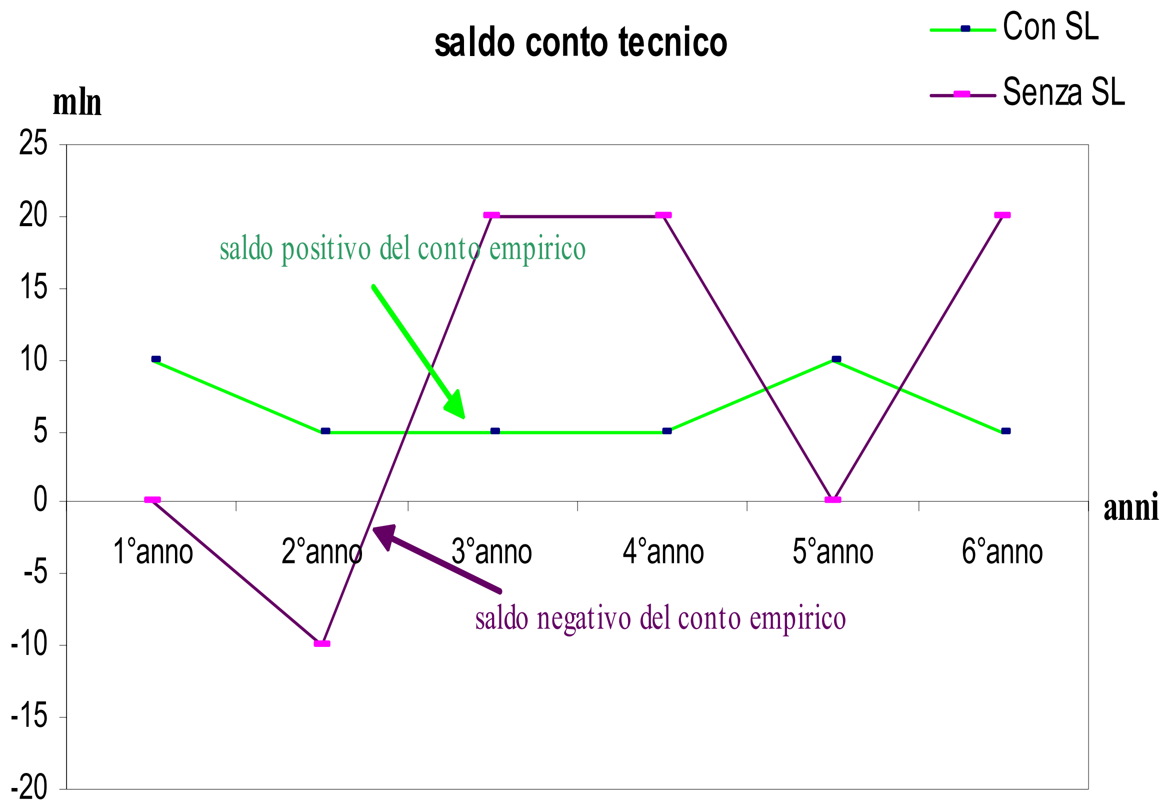
Se il saldo empirico è negativo , l'assicuratore versa per ogni anno del periodo rimanente un premio supplementare pari a 5 mln , fino alla concorrenza dell'importo mancante . Si supponga inoltre che i premi siano pagati all'inizio dell'anno mentre i danni a fine di ciascun periodo .

Rappresentiamo nella seguente tabella il conto tecnico dell'assicuratore diretto (con e senza il trattato spread loss –SL-) :

(in milioni)	1°Anno	2° Anno	3° Anno	4° Anno	5° Anno	6° Anno
Premi incassati	30,0	30,0	30,0	30,0	30,0	30,0
Costi acq.ne ed esercizio	10,0	10,0	10,0	10,0	10,0	10,0
Sinistri	20,0	30,0	00,0	00,0	20,0	00,0
Premio di riass.ne	10,0	15,0	15,0	15,0	10,0	15,0
Interessi	1,0	0,6	-0,8	0,6	1,6	1,3
Saldo del conto tecnico(empirico)	-9,0[13]	-23,4[14]	-9,2[15]	6,4[16]	-2,0	14,3
Risultato tecnico con SL	10,0	5,0	5,0	5,0	10,0	5,0
Risultato tecnico senza SL	00,0	-10,0	20,0	20,0	00,0	20,0
Premi/ Risultato tecnico con SL	3	6	6	6	3	6
Premi/ Ris. tecnico senza SL	--[17]	-3	1,5	1,5	--[17]	1,5

Proseguiamo ora con una rappresentazione grafica dei risultati tecnici (numerici) , al fine di renderci conto degli effetti derivanti dalla sottoscrizione di in contratto Spread Loss , in particolare osservando l'avvenuta stabilizzazione dei risultati :

(12) Esempio tratto dal Seminario :" Riassicurazione non proporzionale e alternative risk transfer" . Giuseppe Gionta (2002).
(13) -9 = 30-10-20-10+1 .



Lo studio dei risultati di bilancio (e dei relativi ratios) di una compagnia, in un orizzonte temporale ragionevolmente lungo , è molto importante ai fini di determinarne lo "stato di salute" , in particolare emergono interessanti indicazioni circa la possibilità di discriminare le imprese "sane" da quelle "in pericolo" attraverso l'esame di valori medi di tali risultati (e ratios) o di loro opportune funzioni . E' il caso di sottolineare che nel caso di imprese "in pericolo" gli scarti quadratici medi dei risultati (e ratios) sono molto più elevati di quelli relativi alle "sane" . Ciò conferma l'opportunità di esaminare non un unico bilancio , ma una sequenza ragionevolmente lunga di bilanci . Nel nostro caso , con l'applicazione del trattato , la nostra compagnia ha stabilizzato i suoi risultati , infatti è passata da un valore dello scarto quadratico medio (degli stessi) pari a 2.35702 -in assenza di riassicurazione- , ad un valore pari a 12.13352 - in presenza di riassicurazione- . Per quanto riguarda lo s.q.m. dei ratios premi/risultato tecnico , la compagnia è passata da un valore estremamente alto , dovuto alla presenza di valori nulli al denominatore (in questi casi ho approssimato lo 0 con un valore infinitesimo pari a 0.0000001) , approssimativamente pari a 141421356 , ad un valore pari a $\sqrt{2}$.

4.2 Trattati retrospettivi .

4.2.1. Il trattato di trasferimento delle riserve sinistri ("Loss Portfolio Transfer ").

Con tale trattato vengono cedute al riassicuratore le riserve sinistri (ivi compresi eventualmente gli IBNR) a fronte del pagamento di un premio approssimativamente eguale al valore attuale delle riserve (attualizzate sulla base di un tasso di interesse concordato) .

Con tale trattato vengono cedute al riassicuratore le riserve sinistri (ivi compresi eventualmente gli IBNR) a fronte del pagamento di un premio approssimativamente eguale al valore attuale delle riserve (attualizzate sulla base di un tasso di interesse concordato) .

---

(14) 23,4=30-10-30-15+0,6+1 . (1è il valore degli interessi dell'esercizio precedente)

(15) -9,2=30-10-15-0,8+(16,6-30). (16,6 = 1+15+0,6 è il reddito prodotto dall' investimento dei premi e il reinvestimento degli interessi , relativamente agli esercizi precedenti , che serve , anche se non sufficientemente , per coprire l'importo dei sinistri pari a 30 .

(16)6,4 =30-10-15+0,6+(15-0,8-13,4) . La somma tra parentesi rappresenta il reddito prodotto dall'investimento del premio e il reinvestimento degli interessi .

(17) Essendo il denominatore = 0 , tale rapporto tende ad infinito

La compagnia cedente paga un premio il cui importo è minore della passività di riserva trasferita . Il trasferimento , infatti , avviene ad un prezzo che attualizza la riserva , anno per anno , in funzione del suo probabile sviluppo e quindi del relativo smontamento . Il valore attuale , più basso del valore della riserva ceduta , consente di far diminuire l'attivo in misura inferiore della diminuzione del passivo . La compagnia cedente , perciò , realizza un guadagno in termini di aumento del proprio capitale . Tale guadagno sarà tanto maggiore quanto più lento è previsto lo smontamento della riserva .

Indicando con $\tilde{\Gamma}$ l'impegno conservato dall'assicuratore sull'intero portafoglio , avremo :

$\tilde{\Gamma}_t = \tilde{X}_t - RS_{RE}$,

dove $\tilde{X}_t$ = costo sinistri aggregato alla fine del periodo considerato,

RS_{RE} = parte della riserva sinistri ceduta al riassicuratore .

Anche in questo caso il riassicuratore fronteggerà un <u>timing risk</u> connesso all'incertezza dello sviluppo del pagamento dei sinistri . Se le previsioni sul tempo di smontamento sono corrette e se i pagamenti effettivi non si discostano dal valore lordo accollato della riserva sinistri , anche il riassicuratore può conseguire un utile pari alla differenza fra i redditi futuri prodotti dall'investimento del premio e il tasso di attualizzazione applicato . Tale utile , ricordiamo , come in tutti i contratti di tipo "finite" , dovrà essere condiviso con la cedente , sottoforma di una sorta di commissioni (Profit Commission). Di conseguenza , il riassicuratore dovrà fronteggiare anche un <u>rischio di credito</u> : il reddito a consuntivo , incerto ex ante , non dovrà essere inferiore a quello derivante dal tasso di attualizzazione . Il riassicuratore può delimitare la propria esposizione nel modo seguente : escludendo certi tipi di sinistri ; introducendo delle franchigie ; introducendo un limite aggregato massimo di risarcimento ; prevedendo la corresponsione a consuntivo di un premio aggiuntivo ove i sinistri superino un dato limite. Il riassicuratore , inoltre , dovrà provvedere al pagamento dei sinistri entro un dato numero di giorni dopo la chiusura di un esercizio .

Come si può facilmente evincere da quanto appena detto , con tale trattato la cedente mira :

- ad aumentare il proprio capitale per finanziare i nuovi affari ;
- a chiudere anni di sottoscrizione ancora aperti contabilmente ;
- al contenimento delle responsabilità per i sinistri di serie pregresse ;
- al miglioramento del risultato tecnico ;
- al miglioramento dei ratios in bilancio .

Riportiamo ora il seguente esempio numerico di cessione della riserva sinistri , dandone poi una rappresentazione visiva , al fine di chiarire quelli che sono gli effetti sul bilancio al seguito dell'applicazione di tale trattato .

Esempio 3[14] :

Anno di generazione	**Riserva sinistri**	**Smontamento (in miliardi di lire)**			
		N	**N+1**	**N+2**	**N+3**
N	10	10			
N+1	20	10	10		
N+2	40	20	10	10	
N+3	60	30	10	10	10
	130	70	30	20	10

Ricordando che il calcolo del premio è il calcolo del valore attuale delle riserve sinistri secondo un tasso concordato dalle parti , che ipotizziamo

(14)Confronta Gropello(1996) : "Principi di tecnica riassicurativa" , Edizione LINT Trieste .

pari al 7% e riferito a metà anno , risulterà la seguente uguaglianza :

premio a fronte della cessione della riserva sinistri = $70(1+0.07)^{-1/2}+$

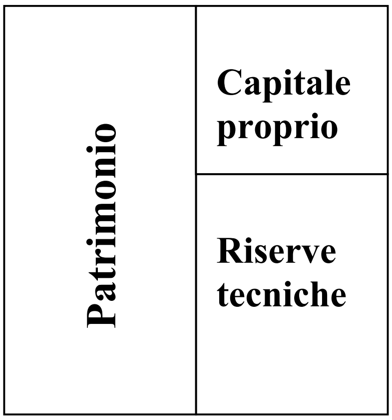
$30(1+0.07)^{-3/2}+20(1+0.07)^{-5/2}+10(1+0.07)^{-7/2}$ = 119,5 mld £ .

Pertanto , l'impatto sul bilancio della cedente nell'anno n+3 (mld £) , risulterà :

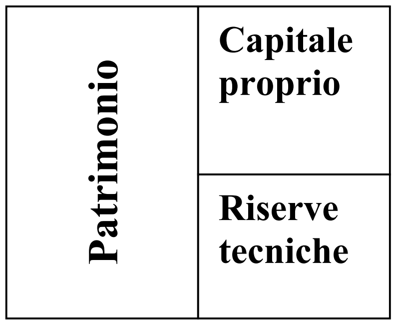
ATTIVO : -119,5 (pagamento premio)

PASSIVO : +130,0 (trasferimento della riserva sinistri)

INCREMENTO NETTO : +10,5 .



Bilancio nell'anno precedente alla stipulazione del contratto Loss Portfolio Transfer



Bilancio nell'anno successivo alla stipulazione del contratto Loss Portfolio Transfer

Come avevamo già accennato , a seguito dell'applicazione di questo trattato , è avvenuta una diminuzione dell'attivo in misura inferiore alla diminuzione del passivo , pertanto la cedente ha migliorato il proprio capitale e , quindi , potenzialmente , la propria capacità di sottoscrizione . Spesso accade che invece di cedere l'intera riserva sinistri (o una porzione), l'assicuratore preferisca cederne una parte in eccesso ad un limite prefissato . In tal caso si parla di "**adverse development cover**" . E' utilizzato soprattutto nelle acquisizioni e fusioni , per coprire dubbie protezioni riassicurative attuate dalle passate gestioni e che hanno dato luogo a difficoltà di recuperi . La cedente viene in tal modo ad assumere una maggiore stabilità . In entrambi questi trattati , il riassicuratore dovrà salvaguardarsi da eventuali insufficienze delle riserve , al contrario , qualora si verifichino sufficienze rilevanti verrà dato luogo ad un rimborso parziale .

Proseguiamo ora con un altro esempio numerico[15] al fine di osservare come possono variare i ratios di bilancio della cedente a seguito di un trattato di tipo adverse development cover .

Supponiamo dunque che la compagnia possieda una riserva sinistri pari a $400 mila il cui smontamento sia stimato avvenire in questo modo :

ANNO	SOMMA	CUMULATO
1	100	100
2	100	200
3	50	250
4	50	300
5	20	320
6	20	340
7	20	360
8	20	380
9	20	400

Supponiamo inoltre che , a fronte di un premio pari a $60 mila , venga ceduta in riassicurazione una somma pari a $ 100 mila in eccesso ad una ritenzione cumulativa pari a $300mila .

---

(15) Esempio tratto dal seminario “ Financial Reinsurance” - (ex) Unione Italiana di riassicurazione .Giugno ,1990

Rappresentiamo ora nelle seguenti tabelle , gli aspetti basilari e semplificati della situazione patrimoniale ed economica della cedente , prima e dopo la riassicurazione .

• Prima della riassicurazione .

STATO PATRIMONIALE

(in milioni di dollari)	31/12/90
Riserve	850
Patrimonio netto	150
Totale (passività & P.N.)	1000
Attività	1000

CONTO ECONOMICO

(in milioni di dollari)	31/12/90
Premi incassati	500
Sinistri sostenuti	400
Spese sostenute	150
Risultato conto tecnico	-50
Reddito da investimenti	50
Utile/perdita (al lordo imposte)	0

• Dopo la riassicurazione .

STATO PATRIMONIALE

(in milioni di dollari)	31/12/90
Riserve	750
Patrimonio netto	190[16]
Totale (passività & P.N.)	940
Attività	940

(16) 190 = 150+(100-60) .

CONTO ECONOMICO

(in milioni di dollari)	31/12/90
Premi incassati	440
Sinistri sostenuti	300
Spese sostenute	150
Risultato conto tecnico	-10
Reddito da investimenti	50
Utile/perdita (al lordo imposte)	40

FINANCIAL RATIOS

Financial ratios	Prima	Dopo
Premi / Surplus	500/150= 3,33	440/190 = 2,32
Expense ratio	150/500= 30%	150/440= 34%
Loss/ratio	400/500= 80%	300/440= 68%
Combined ratio	30%+80%=110%	34%+68% = 102%

A seguito di questo trattato , la compagnia ha ottenuto un globale miglioramento dei suoi ratios di bilancio .

In particolare :

- ha diminuito il rapporto premi/surplus e di fatto , essendo tale decremento frutto di una diminuzione dei premi pari al 12% contro un aumento del surplus pari circa al 27% , come abbiamo già avuto modo di osservare , ha migliorato la sua stabilità economico-finanziaria ;
- ha diminuito il loss ratio , in quanto a fronte di una diminuzione dei premi del 12% si è avuta una diminuzione dei sinistri di competenza pari al 25% ;
- ha aumentato , seppur di soli quattro punti percentuali , l'expense ratio in quanto a fronte di una diminuzione dei premi , le spese sono rimaste invariate . Questo è l'unico ratio che , di fatto , non ha migliorato la situazione economico-finanziaria della compagnia ;
- ha diminuito il combined ratio , in quanto la diminuzione del loss ratio

(15%) è stata più alta dell'aumento dell'expense ratio (≅13%) . E' facilmente intuibile che , a parità di premi di competenza , tanto minore è questo rapporto , minore sarà l'incidenza della somma delle spese e dei sinistri pagati sul risultato tecnico di bilancio , pertanto maggiore sarà "lo stato di salute" della compagnia stessa .

4.3 I derivati assicurativi

Premessa : nel corso dell'ultimo decennio , la pratica assicurativa ha sviluppato molteplici tecniche di trasferimento dei rischi (alternative risk transfer) agganciate ai mercati finanziari . Una di queste è rappresentata dai derivati assicurativi . Gli strumenti derivati di tipo finanziario sono tutti quegli strumenti finanziari il cui valore dipende dall'andamento del prezzo di un altro strumento finanziario (denominato « titolo sottostante ») . Gli strumenti derivati possono essere simmetrici , quando prevedono impegni vincolanti per entrambi i contraenti (acquirente e venditore) , oppure asimmetrici , quando sono vincolanti per il solo venditore del contratto . Nella prima categoria rientrano i future , i forwards , gli swaps ; nelle seconda tutti i contratti che hanno contenuti di opzione (oltre alle opzioni , anche i warrant , i covered warrant) e così via . Secondo un'ulteriore classificazione , si distingue tra gli strumenti derivati che sono scambiati su mercati regolamentati e quelli negoziati fuori borsa . I contratti scambiati su mercati regolamentati hanno caratteristiche standardizzate (scadenze , modalità di fissazione del prezzo e di liquidazione dei contratti , diritti oneri spettanti a compratore e venditore) , mentre i contratti negoziati fuori borsa possono essere adattati di volta in volta alle specifiche esigenze dei contraenti . Sui mercati regolamentati sono negoziati essenzialmente contratti future e alcuni tipi di opzione , mentre altri strumenti derivati , molto diffusi , dei quali però daremo solo cenno della loro esistenza , quali , ad esempio gli swaps e alcuni tipi di opzioni , sono scambiati fuori borsa . Elemento caratterizzante di tutti gli elementi derivati è il differimento della prestazione contrattata rispetto al momento della stipulazione del contratto : tutti gli strumenti derivati sono infatti contratti a termine . In alcuni casi , il termine è fermo , (cioè alla scadenza le due parti eseguono esattamente la prestazione stipulata) , in altri casi il termine è condizionato (cioè alla scadenza una delle parti ha la facoltà di scelta sull'esecuzione del contratto) . Il prezzo del contratto a termine «fermo» è denominato «prezzo future» o «forward» , mentre il prezzo corrente di mercato dell'attività sottostante è detto «prezzo spot» .

I derivati assicurativi sono utilizzati principalmente per coprire sinistri catastrofali o , comunque per mantenere il loss ratio entro un limite desiderato . In questa sede tratteremo i futures assicurativi e le options .

4.3.1 I futures assicurativi.

Il future assicurativo ha adattato all'attività assicurativa la struttura e la tecnica del Future finanziario , che ricordiamo essere un contratto a termine standardizzato mediante il quale acquirente e venditore si impegnano a scambiarsi una determinata quantità di un certo strumento finanziario ad un prezzo prefissato con liquidazione differita ad una data futura prestabilita (o entro , nell'uso americano) . Anche nel Future finanziario si ritrova , dunque , una componente assicurativa : la copertura del rischio di variazioni indesiderate nei tassi d'interesse e quindi nei prezzi . Il Future assicurativo consente di prefissare un dato rapporto Sinistri/Premi con riferimento ad un periodo futuro . Il prezzo del Future , e il suo cambiamento , è funzione delle aspettative di sinistrosità e delle sue modifiche . Ove un operatore abbia comprato un Future sulla base di un'aspettativa di sinistrosità più bassa di quella poi realmente registrata per il periodo di riferimento , egli potrà conseguire un profitto poiché il prezzo del Future a seguito della maggiore sinistrosità sarà aumentato . Il profitto conseguito compenserà la maggiore sinistrosità che anche l'operatore stesso avrà probabilmente subito ove il suo portafoglio–rischi rifletta quello del mercato . Di fatto è come se l'operatore si fosse riassicurato riuscendo a mantenere il suo loss ratio entro i limite desiderato .

Come il mercato prevede la sinistrosità e , quindi , come si forma il prezzo ? Vediamolo in sintesi .

Circa un centinaio di compagnie che compongono il mercato (le principali) inviano all'Insurance Service Office (ISO) (17) i premi ed i sinistri riferiti ad un dato trimestre (loss ratio trimestrale) : sulla base di tali dati viene definito il prezzo di mercato del Future . Lo stesso ISO calcolerà a consuntivo il loss ratio effettivo riferito al trimestre oggetto della copertura sulla base della sinistrosità registrata dalle stesse compagnie e comunicata all'ISO entro la fine del trimestre seguente quello di copertura . Come nel caso del Future finanziario , anche per il future assicurativo esiste una stanza di compensazione giornaliera per l'aggiustamento dei margini sulle transazioni : è il Board of Trade Clearing Corporation (BOTCC) . Tale associazione agisce come garante nei confronti di circa 130 membri del Chicago Board of Trade (CBOT, mercato dove sono quotati i futures catastrofali per la copertura dei rischi

---

(17) L'ISO è l'associazione nazionale che riunisce , immagazzina e distribuisce l'informazione statistica e attuariale ai regolatori del mercato e alle compagnie . A mezzo di una sua controllata è responsabile dell'assemblaggio dei dati relativi ai premi e ai sinistri denunziati dalle compagnie , nonché per la determinazione del valore finale di liquidazione per ciascun contratto trimestrale .

riassicurativi) , facendo da stanza giornaliera di compensazione nei confronti di tutte le operazioni giornaliere , nel senso che è controparte di ogni transazione - venditrice nei confronti dell'acquirente e acquirente nei confronti del venditore - ; definisce e aggiusta i margini di garanzia sulle transazioni in modo che riflettano le mutate condizioni del mercato, al fine di garantire il mercato stesso dai rischi di insolvenza .

Come avevamo già accennato , i derivati assicurativi vengono utilizzati soprattutto per coprire sinistri catastrofali e in particolare presentano un largo utilizzo nei seguenti rami : multirischi proprietà – abitazione , multirischio commerciale, terremoti , incendio , garanzie accessorie , RCA privata e commerciale , multirischio impresa agricola , trasporti terrestri commerciali .

Vediamo adesso , attraverso un esempio(18) di utilizzo dei Futures catastrofali , come una compagnia può coprirsi dal rischio di un aumento indesiderato della futura sinistrosità .

Esempio di utilizzo di futures catastrofali per copertura

La compagnia α intende coprirsi da una eventuale maggiore sinistrosità che essa potrebbe subire entro la fine di un dato periodo . Si considerino i seguenti dati :

• periodo di copertura :	trimestre Luglio-Settembre ;
• premi del periodo comunicato dalle 100 compagnie all' ISO :	6 miliardi di dollari ;
• sinistri previsti per il trimestre :	400 milioni di dollari ;

(18)Confronta Gropello(1996) : "Principi di tecnica riassicurativa" , Edizione LINT Trieste .

- sinistri effettivi : determinati entro il Dicembre successivo . La determinazione dei sinistri è effettuata dall'ISO usando i dati ottenuti dalle compagnie designate ;
- sinistri registrati in % di quelli accaduti entro Dicembre : 75% (ovviamente tale percentuale può essere stabilita fino al 100%).

DATI DELLA COMPAGNIA α

- portafoglio premi : 20 milioni di dollari ;
- sinistri proprio portafoglio previsti : 1,4 milioni di dollari .

Si noterà che il Loss Ratio della compagnia (7%) è non dissimile da quello del mercato (6,7%) .

- *PREZZO FUTURE LUGLIO-SETTEMBRE DA ACQUISTARE*

$25000(19) · 6.7% ($400 mil./ $6miliardi) · 0.75 = $ 1250

- *NUMERO CONTRATTI NECESSARI PER LA COPERTURA DELL'INTERO PORTAFOGLIO DELLA COMPAGNIA* .

$ 20milioni /25000/75% = 1067 contratti

In tal modo la compagnia si è coperta da un 'eventuale maggiore sinistrosità a consuntivo rispetto a quella prevista inizialmente (7%).

DATI CONSUNTIVI

Sinistri mercato : 580 milioni di dollari ;

Sinistri compagnia : 2 milioni di dollari ;

Si noterà che , nell'esempio , il loss ratio del mercato e della compagnia , è aumentato nello stesso modo (+3%) , raggiungendo rispettivamente

(19) $ 25000 è la dimensione base di un contratto future e , nella quotazione del prezzo il loss ratio è espresso in punti percentuali ($250) e decimi ($25) di un punto .

un valore pari al 9.7% nel primo caso e pari al 10% nel secondo .

• *PREZZO FUTURE A FINE DICEMBRE* :

$25000 · 9.7% ($580mil./ $6miliardi) · 0.75 = $ 1812,50 .

• *UTILE SU FUTURES DELLA COMPAGNIA* :

($ 1812,50 - $ 1250) · 1067 = $ 562,5 · 1067 = $ 600187

L'utile realizzato dalla vendita dei Futures è circa pari al maggior costo della sinistrosità effettiva rispetto a quella prevista . In tal modo la compagnia ha realizzato una perfetta copertura dell'eccedenza dei sinistri .

Ove a consuntivo il loss ratio del mercato fosse stato più basso di quello previsto a Luglio , il Future avrebbe avuto un valore più basso e l'acquirente avrebbe avuto una perdita . Ma se il loss ratio effettivo del mercato fosse stato a consuntivo più basso , lo sarebbe stato , presumibilmente , anche quello della compagnia avendo quest'ultima un portafoglio qualitativamente non dissimile da quello del mercato (essa , quindi , non avrebbe avuto più bisogno dell'utile dei Futures per la propria copertura) .

In sintesi , le formule sono le seguenti :

• calcolo del valore attuale del future :

$25000(dimensione base del contratto) · sinistri trimestrali /Premi · 75% (percentuale dei sinistri coperta e denunziata entro il trimestre successivo) ;

• numero dei contratti acquistabili per una perfetta copertura :

premi compagnia / $25000 / 0.75% ;

• valore dei future a scadenza :

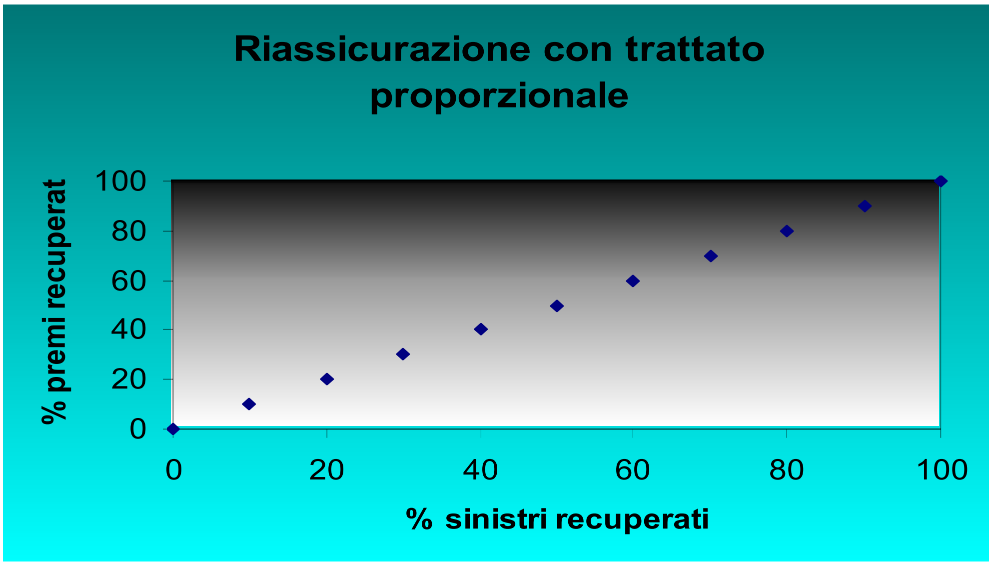
$25000 · sinistri effettivi/premi

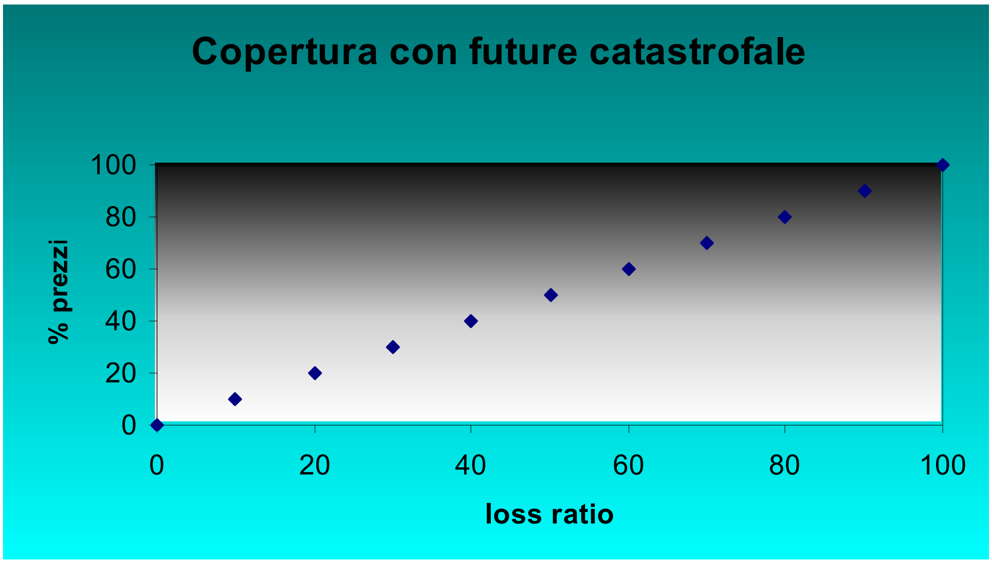
Cerchiamo di capire le analogie che sussistono tra i contratti assicurativi e riassicurativi tradizionali e i Futures catastrofali .

L'acquisto di un Future catastrofale è assimilabile ad una copertura riassicurativa con trattato proporzionale in quota parte senza massimale . Con il trattato proporzionale l'assicuratore cede , e il riassicuratore accetta , una quota prefissata di ciascun rischio sottoscritto dalla cedente. Il riassicuratore in cambio di una quota proporzionale dei premi è obbligato a condividere nella stessa proporzione tutti i sinistri . Di fatto : a maggiori rischi ceduti corrisponderanno anche maggiori premi ceduti .

Analogamente , l'acquisto di un Future catastrofale comporta la cessione a carico del venditore del Future di una quota parte dei sinistri effettivi con una copertura proporzionale al numero dei contratti acquistati . Di fatto , anche in questo caso : a maggior Loss ratio previsto e stimato corrisponde un maggior prezzo pagato per il Future , ovvero , ad una più elevata copertura corrisponde un maggior costo della stessa .

Graficamente :





4.3.2 Le options catastrofali .

Al CBOT sono anche quotate le options sui Future catastrofali .

Come nella option finanziaria , il sottoscrittore ha il diritto di comprare (*call option*) o di vendere (*put option*) un future catastrofale ad un prezzo stabilito (*strike price*) ad (o entro) una data prefissata .

Se il loss ratio aumenterà , l'acquirente di una option catastrofale eserciterà il diritto di comprare al prezzo prestabilito , che ovviamente sarà più basso del prezzo corrente . Pertanto , una volta detratto il premio pagato per sottoscrivere la call option , il guadagno dell'acquirente sarà pari alla differenza tra il prezzo corrente raggiunto dal future e lo strike price . Viceversa , in caso di diminuzione del loss ratio , il sottoscrittore di una put option eserciterà il diritto di vendere il future al prezzo prestabilito , ottenendo un guadagno (una volta detratto il premio pagato per sottoscrivere la put option) pari alla differenza tra lo strike price e il prezzo corrente del future.

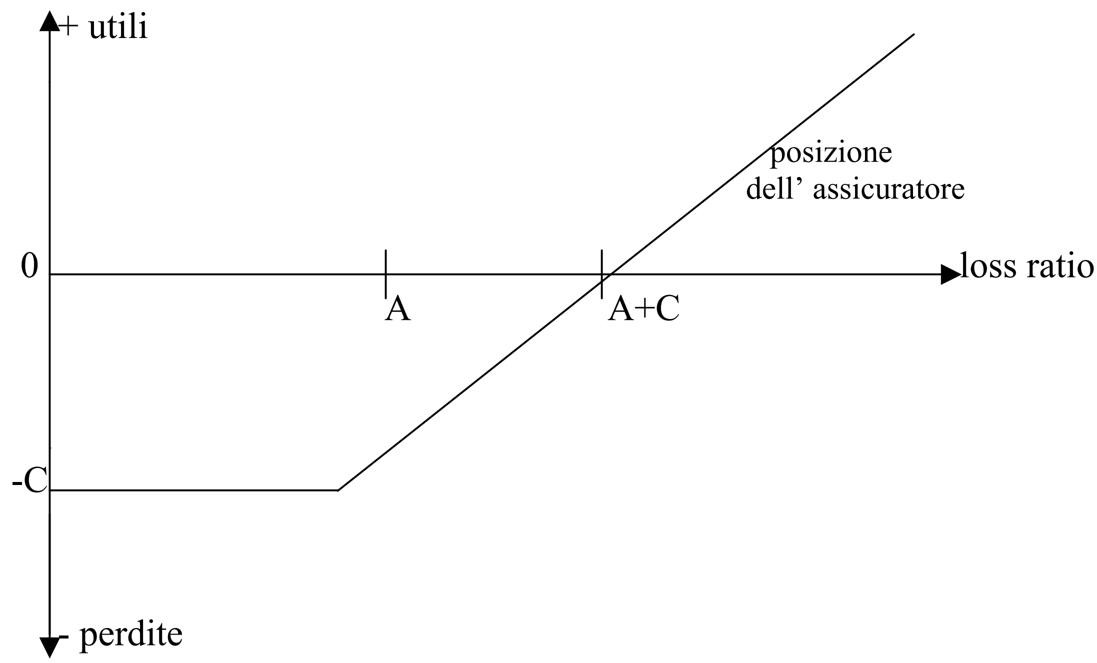
Come accade per l'acquirente di un future , l'acquirente di una option realizzerà utili che lo compenseranno della maggiore sinistrosità che egli stesso avrà subito ove il suo portafoglio rischi sia in linea con quello del mercato .

A differenza dell'acquirente di un future , il sottoscrittore di una call option ha solo pagato un premio : ove il futuro loss ratio sia più basso di quello originariamente atteso , l'acquirente non eserciterà l'opzione conseguendo una perdita pari al premio , ma , se il suo portafoglio è in linea con la tendenza del mercato , avrà realizzato utili nella sua gestione assicurativa .

Vale la pena fare delle ultime considerazioni riguardo all'esistenza di forti analogie tra la riassicurazione tradizionale , in particolare tra un trattato di tipo stop loss , e la sottoscrizione di options .

Ricordiamo che il trattato stop loss è un accordo a mezzo del quale il riassicuratore si impegna pagare tutti i sinistri che superino un dato limite (punto di eccesso) del rapporto sinistri/premi .

ACQUISTO DI UN TRATTATO STOP LOSS

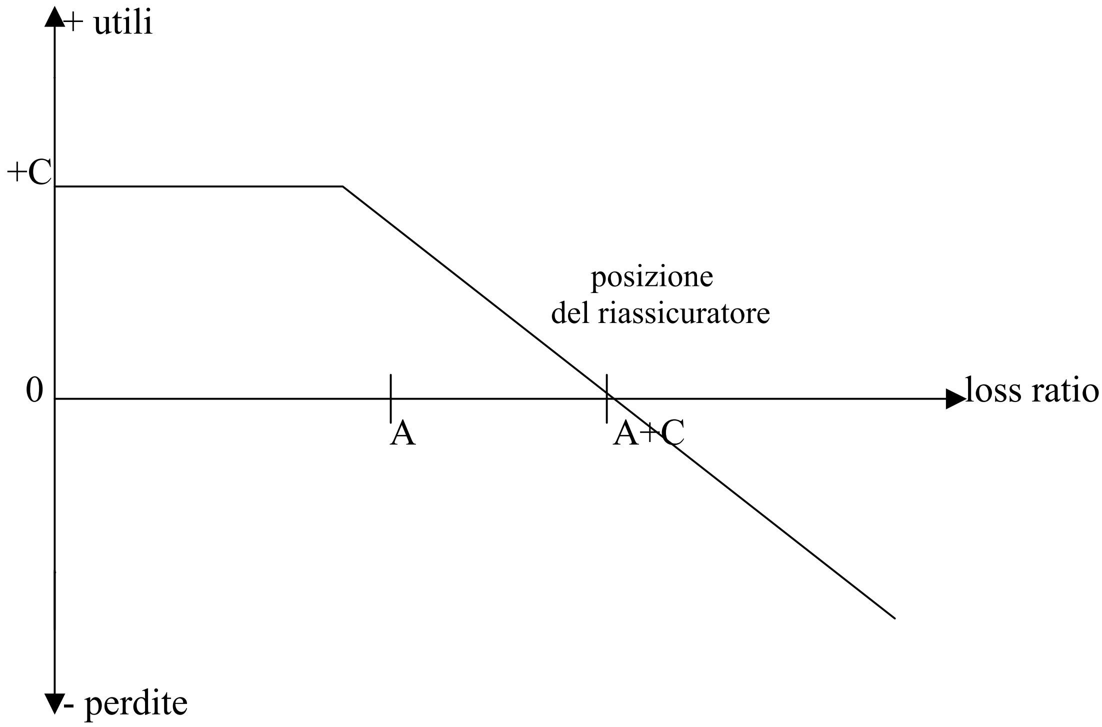


C = Premio fisso pagato al riassicuratore

A = Punto di eccesso .

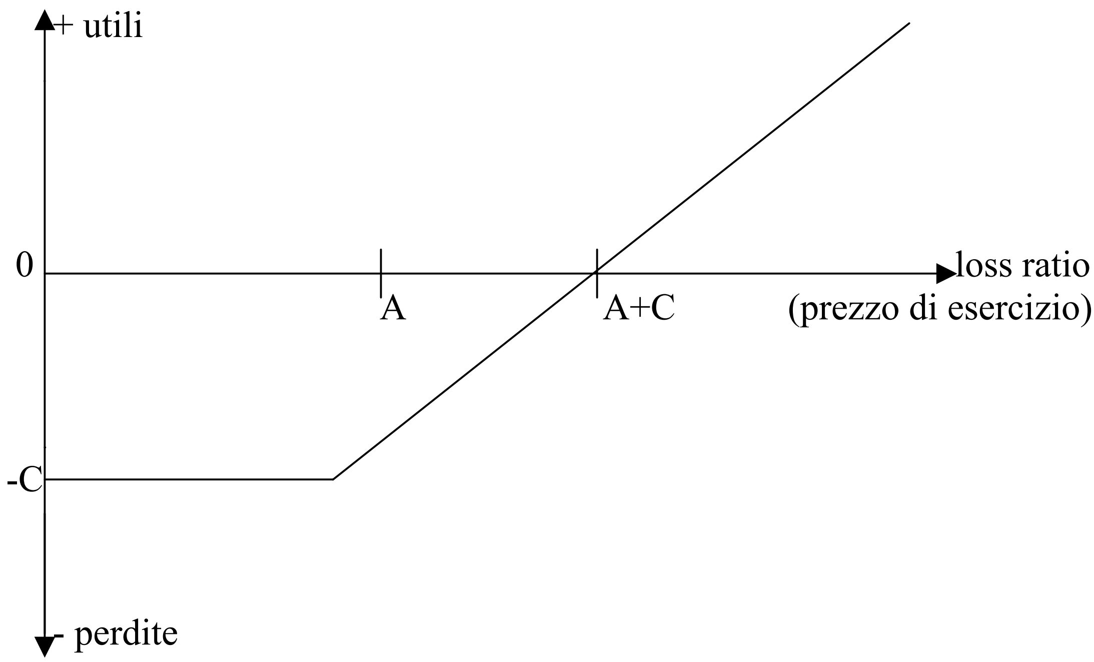
Ove i sinistri rimangano al di sotto del limite A , l'assicuratore non riceve alcun rimborso ed i sinistri rimangono interamente a suo carico ; ove superino il limite A l'assicuratore comincerà a ricevere il rimborso . Al di sopra della soglia A+C , con il pieno recupero del costo del trattato, l'assicuratore comincerà a realizzare un utile (in media pari al caricamento di sicurezza) .

VENDITA DI UN TRATTATO STOP LOSS



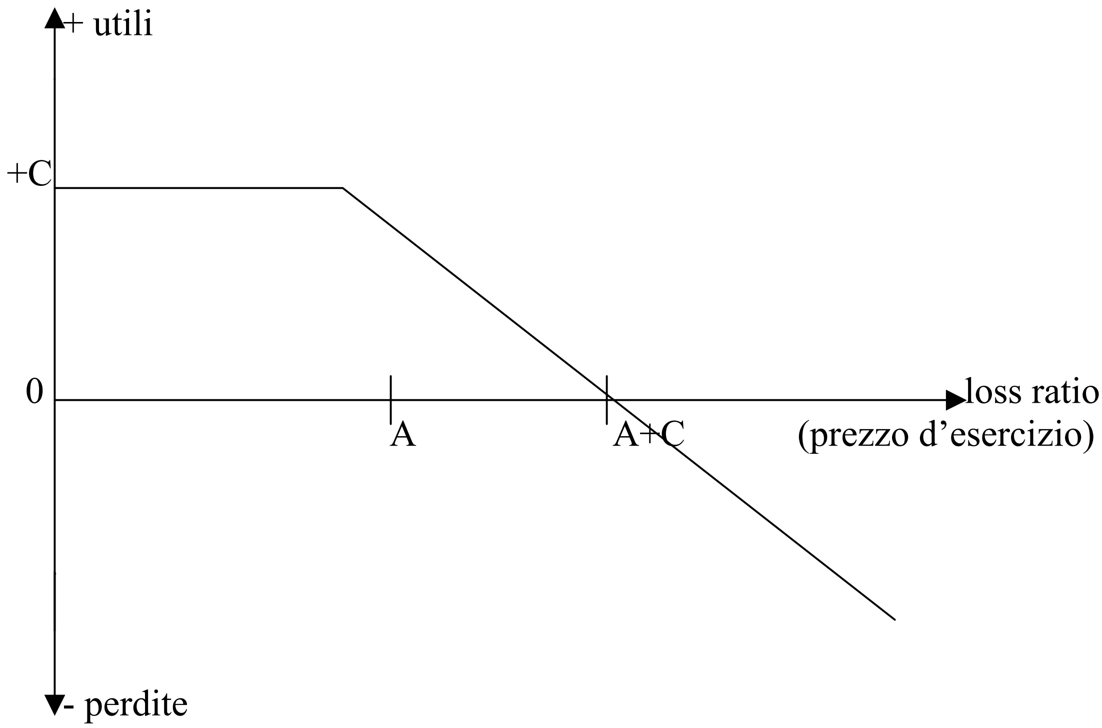
Specularmente , il riassicuratore , ove i sinistri rimangano al di sotto del limite A non interviene (fino a tale valore il riassicuratore realizzerà un guadagno pari la premio C) . Entro la soglia A+C il riassicuratore riesce comunque ad ottenere un utile che si annulla alla soglia suddetta . Oltre tale soglia , il riassicuratore comincerà a registrare delle perdite via via crescenti .

ACQUISTO DI UNA CALL OPTION SU UN FUTURE CATASTROFALE



Se la sinistrosità (loss ratio) risulterà pari o al di sotto di A (in questo caso rappresentante il prezzo di esercizio), l'acquirente non eserciterà l'opzione e , pertanto , subirà una perdita pari al premio C pagato per sottoscrivere la option (analogo al premio riassicurativo nel caso dell'acquisto di un trattato stop loss) . Per valori superiori ad A , invece , l'acquirente riterrà conveniente esercitare l'opzione e realizzerà dei profitti quando il loss ratio , e conseguentemente il prezzo del future , supererà la soglia A+C , ovvero dopo il recupero del costo dell'opzione.

VENDITA DI UNA CALL OPTION SU UN FUTURE CATASTROFALE



Il venditore della call option, che può essere paragonato al riassicuratore di un trattato stop loss, registrerà un utile pari al ricavo della vendita dell'opzione, (nel caso del riassicuratore, pari alla vendita della copertura riassicurativa a fronte del pagamento del premio C) , se il loss ratio risulterà inferiore ad A -prezzo d'esercizio-; l'utile si annullerà quando il prezzo corrente del future raggiungerà un valore pari alla somma del prezzo d'esercizio e del premio C. Oltre tale soglia , il venditore comincerà a registrare delle perdite.

E' interessante aggiungere il fatto che l'assicuratore che acquista un trattato stop loss con portata illimitata e il sottoscrittore della call option potranno realizzare una perdita limitata (rappresentata dall'importo C, oppure un guadagno illimitato) mentre i rispettivi riassicuratore e venditore potranno realizzare una situazione diametralmente opposta: perdita illimitata e guadagno limitato.

I due strumenti di copertura messi a confronto , cioè la riassicurazione e i derivati assicurativi, presentano delle differenze che possono condizionare la scelta dell'assicuratore. In particolare con la riassicurazione non si coprono solo dei rischi, ma si forniscono anche dei servizi di assistenza e consulenza per la politica assuntiva e per la più corretta definizione dei piani di copertura, pertanto possono essere accordate specifiche ed uniche esigenze di copertura della compagnia cedente. Nel mercato standardizzato dei futures , invece, questi servizi non possono essere garantiti. Di contro, però , il mercato dei derivati offre prezzi, costi e rischi di credito molto contenuti , oltre che una liquidabilità maggiore. Tali confronti portano a considerare che i due strumenti non debbano essere visti come alternativi, bensì possano essere utilizzati a complemento e supporto delle numerose e diverse strategie di copertura presenti nella realtà operativa.

Conclusioni

Nell'ambito della gestione di una compagnia assicurativa, sulla base di quanto è stato trattato, si osserva l'importanza dell' utilizzo della teoria del rischio al fine di studiare e stimare, nel breve, medio e lungo periodo, il profilo della solvibilità, nonché l'andamento della riserva di rischio e, di conseguenza , la probabilità di rovina della compagnia stessa.

Da un punto di vista teorico, è stato immediato osservare che per aumentare sia la riserva di rischio, (e pertanto,a parità di condizioni, la solvibilità) di una generica compagnia danni, analizzata nella sua forma più semplificata

$$\tilde{U} = U_0 + [(1+\eta) \cdot P - \tilde{X}$$

sia il relativo indice di stabilità

$$I = \frac{U_0 + \eta \cdot P}{\sigma(\tilde{X})}$$

il management della compagnia stessa, potrebbe adottare le seguenti strategie

- diminuire la variabilità del portafoglio, $\sigma(\tilde{X})$, mediante la riassicurazione o la selezione dei rischi ;
- aumentare il capitale iniziale, cioè U_0, attraverso nuove contribuzioni degli azionisti ;
- aumentare i caricamenti di sicurezza e, di conseguenza , i premi da richiedere agli assicurati .

Certamente, il "management" seguirà, compatibilmente con le condizioni di mercato, la strategia che garantirà il miglior profitto per gli azionisti, con la limitazione, però, di fissare una probabilità di rovina ritenuta accettabile.

L’adozione della prima strategia, analizzata sotto l’aspetto della riassicurazione, porterà l’assicuratore a dover pagare un prezzo per il servizio di trasferimento del rischio. Pertanto, l’assicuratore stesso, mentre vedrà diminuire la variabilità e quindi il rischio del proprio portafoglio, dovrà ripartire con il riassicuratore gli utili attesi relativi ai rischi riassicurati, a seconda delle condizioni del trattato.

In casi estremi, il sacrificio degli utili potrebbe essere considerato eccessivo dal management della compagnia cedente, in quanto si potrebbe verificare che, nonostante la variabilità della riserva di rischio (in altre parole il patrimonio netto della compagnia) si riduca ad un livello adeguato per la compagnia stessa , la diminuzione degli utili attesi sia tale da causare un aumento della probabilità di rovina della compagnia, anziché una diminuzione della stessa (come di solito si dovrebbe verificare in presenza di riassicurazione) pertanto, in questo caso, al fine di ridurre la propria esposizione aleatoria, la compagnia sarà portata ad optare per altre strategie.

Di conseguenza, è di fondamentale importanza lo studio delle relazioni intercorrenti tra il limite di conservazione del singolo sinistro o del portafoglio di rischi (a seconda dei trattati considerati) ed i momenti principali della variabile aleatoria $\widetilde{Z}$ (costo del singolo sinistro), nonchè l’impatto che tale limite di conservazione ha sul processo di rischio $\widetilde{U}_t$, ovvero sulla probabilità di rovina della compagnia stessa.

Sulla base della presente trattazione è stato possibile cogliere un altro obiettivo potenzialmente conseguibile con l’applicazione di un trattato riassicurativo: ridurre l’EMS, vale a dire il margine di solvibilità richiesto, e, al contempo rafforzarlo.

Nella maggior parte delle legislazioni, ad esempio, una semplice

riassicurazione in quota permette di ridurre l'esigenza di margine di solvibilità, in quanto il riassicuratore condivide, proporzionalmente alla sua quota (massimo 50%) , gli stessi rischi dell'assicuratore.
Tuttavia (contrariamente alla direttiva Europea circa il calcolo del margine di solvibilità), non bisogna trascurare le provvigioni che il riassicuratore stesso corrisponderà alla cedente (ved. par. 3.1.3), in quanto queste potrebbero essere insufficienti a colmare, nella giusta proporzione, le spese di gestione e di acquisizione sostenute dalla cedente per i rischi riassicurati.
Oltre alla riduzione dell'esigenza di margine di solvibilità , come già accennato, l'obiettivo frequente è di rafforzarlo per poter finanziare le proprie attività o svilupparne altre. Soluzioni di riassicurazione più avanzate consentono di soddisfare contemporaneamente tali esigenze .
Alcuni trattati finanziari (nella nostra trattazione ciò è stato riscontrato nel trattato "*financial proportional cover*") consentono, infatti, di aumentare la solvibilità sostenendo al tempo stesso l'attività dell'assicuratore.
In altre parole, l'importo di finanziamento versato sotto forma di commissioni di riassicurazione (ved. par. 4.1.1) evita all'assicuratore di contabilizzare una perdita di primo anno per una determinata generazione di contratti, impedendogli, pertanto, di registrare un risultato negativo che intaccherebbe il capitale per il margine. Contemporaneamente, l'importo delle commissioni suddetto genera un aumento di liquidità.
Nell'ambito della realtà gestionale assicurativa, quindi, occorre analizzare, con la massima attenzione, le varie politiche di riassicurazione e considerarle come potenziali strategie atte ad aumentare la solvibilità di una compagnia.

Bibliografia

Sherman R.(1991): *Actuaries and Insurance Futures*, The Actuarial Review.

Albrecht P. (1995): *An Actuarial approach to risk management with cat insurance contracts*, Convegno AFIR.

Barile A.(1995): *A practical guide to financial reinsurance* , Executive Enterprises Publ., New York.

Coutts S.M., Thomas T. (1997): *Capital and risk and their relationship to reinsurance programmes* , 5th International Conference on Insurance Solvency and Finance, London.

Financial Reinsurance (Giugno 1990).Seminario ottenuto presso UNIORIAS.

De Finetti B.(1940): *Il problema dei pieni* , Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari, Roma.

Pentikainen T., Bonsdorff H. , Pesonen M., Rantala J., Ruohonen M. (1989): *Insurance solvency and financial strength* , Finnish Insurance Training and Publishing Company , Helsinki.

Luciano Daboni (1988): *Lezioni di tecnica attuariale delle assicurazioni contro i danni* . Edizioni LINT, Trieste.

Antigono Donati, Giovanna Volpe Putzolu (1998): *Manuale di diritto delle assicurazioni*. Quinta edizione, Giuffrè editore, Milano.

Pitacco E. (2001):*Matematica e tecnica attuariale delle assicurazioni sulla vita*. Edizione LINT, Trieste.

Coutts S.M., Thomas T. (1997): *Modelling the impact of reinsurance on financial strength*, British Actuarial Journal , vol. 3, part. III.,London .

Daykin C., Pentikainen T. , Pesonen M.(1994): *Practical Risk Theory for actuaries*. Ed. Chapman & Hall , London.

Giulio di Gropello (1996): *Principi di tecnica riassicurativa*. Edizione LINT Trieste.

Phifer R.(1996): *Reinsurance fundamentals* , John Wiley & Sons.

Giuseppe Gionta (2002): *Riassicurazione non proporzionale e alternative risk transfer*. Seminario. SIFA.

Savelli N. (2002): *Risk analysis of a non-life insurer and traditional reinsurance effects on the solvency profile*, presented at 6th International Congress on Insurance , Mathematics and Economics, Lisbon.

Beard R.E., Pentikainen T., Pesonen E. (1984): *Risk Theory - The stochastic basis of insurance* .Third Edition , Chapman & Hall , London.

Selleri L.(1994): *Soluzioni innovative nella gestione assicurativa :i "cat futures" e "le cat option call" nel Chicago Board of Trade* , Rivista Milanese di Economia.

Savelli N. (2002): *Solvency and Traditional Reinsurance for Non-Life Insurance*, Proceedings 9th National Congress on Risk Theory, University of Molise, Campobasso.

De Lourdes Centeno M. (1995): *The effect of the retention limit on risk reserve*, ASTIN Bulletin, vol.25 n.1.