



Université Catholique de Louvain  
Institut d'Administration et de Gestion  
Institut des Sciences Actuarielles

---

VARIABLE ANNUITIES

Transfert d'une partie du risque de longévité au client

---

Mémoire présenté par Grégory DEKIMPE  
en vue de l'obtention du Master en Sciences Actuarielles

Promoteur : Pr. M. DENUIT

ACTU 22MS

Année Académique 2008-2009



# Table des matières

Avant propos	iii
Introduction	1
<b>I Les rentes</b>	<b>3</b>
<b>1 Définition et concepts</b>	<b>5</b>
1.1 Définition	5
1.2 Concepts	6
1.2.1 Point de vue de l'assuré	7
1.2.2 Point de vue de l'assureur	8
<b>II Risque de longévité</b>	<b>11</b>
<b>2 Historique, défis et solutions envisageables</b>	<b>13</b>
2.1 Défis	15
2.2 Solutions	16
2.2.1 La réassurance et la titrisation	16
2.2.2 L'adossement de garanties décès : du hedging naturel	20
2.2.3 GSA : une solution extrême	22
<b>III Tables de mortalité prospectives</b>	<b>29</b>
<b>3 Modèle de Lee &amp; Carter</b>	<b>31</b>
3.1 Théorie	31
3.2 Modélisation stochastique des durées de vie	32
3.3 Modèle de Lee & Carter	33
3.4 Estimation des paramètres	34
3.4.1 Estimation de $\alpha_a$	35
3.4.2 Estimation de $\beta_a$ et $\kappa_t$	35
3.4.3 Réajustement des $\hat{\kappa}_t$	36
3.5 Sélection de la période optimale d'ajustement des $\kappa_t$	37
3.6 Complétion des tables officielles	38
3.7 Lissage des données	39
3.8 Analyse des résidus	39

3.9	Projection des $\hat{\kappa}_t$ . . . . .	40
3.10	Anti-sélection . . . . .	42
3.11	Simulation par Bootstrapping . . . . .	44
3.11.1	Méthodologie . . . . .	44
3.11.2	Résultats . . . . .	46
<b>IV</b>	<b>Les taux d'intérêts</b>	<b>49</b>
<b>4</b>	<b>Modèle de Vasicek</b>	<b>51</b>
4.1	Pourquoi simuler les taux d'intérêts? . . . . .	51
4.2	Méthodologie . . . . .	51
4.2.1	Théorie . . . . .	52
4.2.2	Modèle de Vasicek . . . . .	52
4.2.3	Simulations sur base du modèle de Vasicek . . . . .	53
<b>V</b>	<b>Partage du risque et application</b>	<b>57</b>
<b>5</b>	<b>Partage du/des risque(s) entre l'assuré et l'assureur</b>	<b>59</b>
5.1	Risque de tables de mortalité prospectives . . . . .	59
5.2	Choix d'un indice de longévité . . . . .	60
5.2.1	Comparaison entre les méthodes de Lee & Carter et du BFP . . . . .	61
5.3	Risque de taux d'intérêts . . . . .	62
5.4	Inclusion de garanties . . . . .	62
5.5	Risque global . . . . .	63
<b>6</b>	<b>Lancement du produit et simulation des <i>cash-flows</i></b>	<b>65</b>
6.1	Caractéristiques du groupe fermé . . . . .	65
6.2	Résultats techniques et financiers, 1.000 et 10.000 assurés . . . . .	66
6.3	Interprétation des résultats et conclusion . . . . .	88
6.4	Approche commerciale : comment vendre ce produit? . . . . .	94
	<b>Conclusion</b>	<b>97</b>
	<b>Annexes</b>	<b>103</b>

# Avant propos

Par ces quelques mots, je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont aidées dans la réalisation de ce travail, tout aussi complexe que passionnant. Leur collaboration, leurs connaissances ou tout simplement leurs encouragements ont été pour moi une source de motivation sans laquelle je n'aurais pu aboutir à ce résultat. Je tiens particulièrement à remercier Ludovic pour sa précieuse aide dans les derniers instants de ce mémoire.

Je tiens aussi à remercier tout particulièrement le Professeur M. DENUIT, qui a accepté de diriger ce mémoire, pour sa bienveillance, ses conseils avisés et son suivi permanent. Ses innombrables connaissances en la matière m'ont à maintes reprises aidées dans l'avancement de ce travail, tant lors des entretiens que nous avons pu avoir à ce sujet, qu'au travers des différents cours qu'il nous dispense à l'Institut des Sciences Actuarielles de l'UCL. Ce fut pour moi un immense honneur de pouvoir collaborer avec lui dans ce domaine.

Je tiens également à adresser mes remerciements les plus sincères à mes deux collègues, Laurence AUQUIER et Christophe BONTA, tous deux ALM Officer au sein de Fortis Insurance Belgium, pour leur précieuse aide concernant tant la partie théorique que la partie pratique de ce mémoire. Le temps qu'ils ont consacré à m'expliquer les techniques de tarification des "variables annuités" ainsi que les techniques de simulation Monte-Carlo fut pour moi une aide indispensable. J'en profite également pour remercier mon manager, Adriaan RAES, pour m'avoir permis de prendre de mon temps de travail pour avancer dans ce mémoire. Je tiens à lui présenter ici toute ma gratitude pour avoir de ce fait alourdi sa charge de travail durant de précieuses heures.

Enfin, je remercie vivement ma famille et ma petite amie Caroline, pour leur soutien permanent, tant moral que logistique, et pour leur compréhension lors des moments plus difficiles. J'adresse également une pensée toute particulière à mes grands-parents qui, malgré les circonstances qu'ils traversent actuellement, ont très gentiment accepté de s'adonner au jeu de la correction orthographique. Tout cela m'a été d'une aide inestimable.



# Introduction

*« La prédiction est un art difficile, surtout quand elle concerne l'avenir »*

Mark TWAIN

Les compagnies d'assurance sont à l'heure actuelle dans une position bien moins confortable qu'elles ne l'ont été par le passé. Celles-ci sont touchées de plein fouet par la crise financière que nous traversons actuellement, et les engagements contractés dans le passé, à une époque où les taux d'intérêt étaient à des niveaux inimaginables aujourd'hui, sont des catastrophes à honorer. Si l'on rajoute à ces difficultés financières certaines évolutions particulièrement nuisibles pour leurs activités d'assurances vie, telles que l'allongement de la durée de vie et la plus grande volatilité de la mortalité aux grands âges, on comprend aisément que certaines innovations sont souhaitables, voire nécessaires pour permettre à ces sociétés de continuer à offrir des garanties de qualité à leurs clients, tout en s'assurant des bénéfices acceptables.

Même si comme nous venons de le souligner, les difficultés rencontrées par ces sociétés sont considérables à l'heure actuelle, elles n'en représentent pas moins de formidables opportunités pour la créativité des actuaires. Ceux-ci sont en effet appelés à trouver ces innovations souhaitables, et de nombreuses pistes en ce sens sont en cours d'étude au niveau mondial. L'une de ces pistes fait l'objet de ce mémoire, à savoir la possibilité de transférer une partie du risque de longévité directement aux rentiers eux-mêmes.

Plus précisément, ce travail sera divisé en cinq parties distinctes, à savoir :

1. Une première partie exposant le concept des rentes variables. Nous verrons notamment ce qu'est une rente variable, et quels sont les avantages et inconvénients pour chacune des parties impliquées.
2. La seconde partie traitera du risque de longévité en tant que tel. Nous verrons comment tenir compte de l'évolution temporelle de la mortalité, et comment les assureurs et réassureurs ont jusqu'à présent tenté de limiter ce risque en le transférant aux marchés financiers
3. La troisième partie sera consacrée à l'élaboration des tables prospectives. Cette matière passionnante nous fut enseignée par le directeur de ce mémoire, le Pr. Denuit, et sera exposée succinctement pour décrire la méthodologie utilisée pour la simulation de la mortalité future des assurés fictifs qui seront utilisés pour l'application numérique de ce travail.
4. Dans la quatrième partie de ce travail, nous nous attarderons à une partie plus financière, la simulation des taux d'intérêts. En effet, l'idée sous-jacente de ce mémoire est que la

contre-partie du risque que supporterait l'assuré serait d'augmenter les prestations futures, étant donné que l'immobilisation de capital pour le risque de longévité serait nettement réduite pour l'assureur. Dans ce contexte, l'analyse des taux d'intérêts futurs est évidemment cruciale. Nous verrons quel modèle fut pris en compte, pourquoi, et comment, à partir de ce modèle, simuler la structure à terme des taux d'intérêts futurs. Nous avons de plus envisagé d'également transférer ce risque au client, même si ce ne fut guère concluant, comme nous le verrons dans la partie suivante.

5. La cinquième partie sera en effet consacrée au partage du risque entre l'assureur et l'assuré. Nous envisagerons trois possibilités de partage du risque :
  - soit l'assuré accepte de supporter tout ou partie du risque lié aux tables de mortalité prospectives telles qu'élaborées dans la troisième partie ;
  - soit l'assuré est prêt à accepter le risque de taux d'intérêts décrit dans la quatrième partie ;
  - soit enfin l'assuré accepte de supporter les deux risques simultanément.

Nous verrons également quelles pourraient être les contre-parties accordées par l'assureur dans chacun des cas au client, et s'il est raisonnable d'envisager de tels produits. Enfin, nous terminerons par une application numérique permettant de se faire une idée de la viabilité des différentes situations envisagées à partir d'une application relativement simple simulant les *cash-flows* futurs d'une compagnie fictive. Nous nous attarderons également quelque peu sur le point de vue marketing permettant de faire passer une idée de ce partage de risque au client.

Première partie

Les rentes



# Chapitre 1

## Définition et concepts

Le but de ce travail est d'envisager de faire dépendre les arrérages d'une rente variable en fonction du rapport entre la mortalité observée par la compagnie d'assurance et une mortalité de référence, qui serait déduite de données officielles et dont les tables seraient construites de manière transparente et indiscutable. Commençons tout d'abord par décrire ce qu'est une rente variable.

### 1.1 Définition

Qu'est-ce qu'une rente variable? Une rente variable est un contrat financier liant un assuré et une compagnie d'assurance. Par ce contrat, l'assuré s'engage à verser une somme unique (ou à effectuer une série de paiements) en échange de quoi la compagnie d'assurance lui accordera des paiements périodiques, et ce immédiatement, ou à partir d'une date future fixée, pour une durée fixée ou jusqu'au décès de l'assuré (ou du décès de son époux/épouse). Ces paiements dépendront d'un facteur déterminé au préalable dans le contrat, ce qui différencie les rentes variables des rentes classiques. Ce facteur sera la plupart du temps déterminé par le rendement d'un fonds ou d'un indice boursier. Dans notre cas, nous considérerons non pas le rendement d'un quelconque actif financier, mais bien le rapport entre la mortalité observée par la compagnie d'assurance et celle attendue comme facteur déterminant.

Mathématiquement donc, l'évaluation des rentes dépend de la valeur temporelle de l'argent (les paiements étant effectués dans le futur, parfois longtemps après<sup>1</sup>) et de la survie du rentier. Conditionnellement à la survie du (des) preneur(s), ces paiements peuvent alors être évalués en utilisant la théorie standard de l'économie financière, comme la structure à terme des taux d'intérêts. L'objet de cette recherche est toutefois différent, et ferait dépendre les paiements futurs d'un ratio entre la survie de référence des individus (ces taux de survie servant donc de *benchmark* à l'évaluation de la rente) et la survie réellement constatée des assurés. L'évaluation de ce type de rente ne sera donc pas calculée sur base de la formule classique de la rente (découlant du principe

---

1. Il convient donc d'être très précis sur ces estimations également, nous y reviendrons dans la suite de ce travail.

d'équivalence actuarielle), définie par<sup>2</sup> :

$$a_a = \sum_{k \geq 1} k p_a v^k \quad (1.1)$$

$$= \sum_{k \geq 1} \left( \prod_{j=0}^{k-1} p_{a+j} \right) v^k \quad (1.2)$$

mais bien, comme le suggère DENUIT [13], en y appliquant le rapport

$$\prod_{j=1}^{k-1} \left( \frac{p_{x_0+j}^{\text{ref}}(t_0+j)}{p_{x_0+j}^{\text{obs}}(t_0+j)} \right) \quad (1.3)$$

avec  $\{p_{x_0+j}^{\text{ref}}, k = 0, \dots, \omega - x_0\}$  les prévisions officielles de survie de la population générale, et  $p_{x_0+j}^{\text{obs}}$  les probabilités de survie observée par la compagnie d'année en année. Nous définirons dans la partie V comment calculer le prix de la rente à partir de ce facteur. Nous envisagerons également un autre facteur correctif de la longévité, en appliquant un rapport basé cette fois sur l'espérance de vie. Gageons que ce type de facteur correctif sera peut-être plus facile à envisager d'un point de vue commercial, le concept de probabilité (utilisé dans le premier facteur correctif envisagé) étant sans doute moins intuitif pour l'assuré. Nous pourrions ainsi appliquer un facteur correctif des arrérages de la forme

$$\left( \frac{e_{65+j}^{\text{ref}}(t_0+j)}{e_{65+j}^{\text{obs}}(t_0+j)} \right) \quad (1.4)$$

Typiquement, une rente *classique* sert donc principalement à assurer au souscripteur un revenu périodique fixe à partir d'un âge déterminé, correspondant dans la plupart des cas à l'âge de la retraite, ou à un âge plus avancé encore (en supposant donc que l'assuré disposera de ressources financières suffisantes pour subvenir à ses besoins entre l'âge de sa retraite et cet âge). Dans le cas de la réversion (évoqué dans la conclusion), le but est davantage de subvenir aux besoins du conjoint survivant.

Au vu de cette définition, nous pourrions nous demander si la présente étude est réellement pertinente. En effet, s'il s'agit de s'assurer contre le risque de *survivre à son patrimoine*, l'assuré serait-il dès lors prêt à supporter le risque d'évolution de la mortalité future subie par la compagnie d'assurance? C'est ce que nous allons tenter d'examiner dans la suite de ce travail.

## 1.2 Concepts

Les premiers produits de ce type ont été lancés aux Etats-Unis au début des années 1990. Vint ensuite le tour du Japon, fin des années 1990, et enfin l'Europe, qui vit la commercialisation de sa première *variable annuity* lancée en 2005 sur le marché anglais par le groupe américain THE HARTFORD.

D'après une étude de TOWERS PERRIN réalisée en juillet 2008, l'encours de ces produits représentait à ce moment non moins de \$1.3 trillions aux Etats-Unis, et \$50 billions sur le marché japonais. Le marché européen ne semble toutefois pas (encore?) aussi développé. En effet, au-delà du frein naturel que constitue la réticence à renoncer à la liquidité, viennent s'ajouter de nombreuses

---

2. Cas d'une rente payable en fin d'année à taux d'intérêt supposé constant.

contraintes légales relativement rigides. GAUDEMET [17] relève en outre d'autres éléments limitant l'engouement des Européens pour ce genre de produit, à savoir : la fiscalité, qui tend à favoriser, parmi les produits d'épargne individuelle, ceux permettant une sortie en capital, mais aussi les limites imposées à l'exercice de la concurrence ainsi que les modalités propres à encourager l'auto-sélection, qui contribuent également à resserrer et à rendre inefficace le marché de la rente viagère, et enfin les règles qui s'imposent à la gestion financière, et qui, même si l'on peut aisément en comprendre l'intérêt, limitent cependant très fort le rendement de tels produits pour les compagnies d'assurance.

Certaines de ces contraintes sont toutefois en train de s'assouplir, laissant place à de formidables opportunités, mais également à de nouveaux défis en matière de gestion des risques pour les assureurs européens. Quels sont donc les atouts et les inconvénients de tels produits du point de vue de l'assuré et de l'assureur ?

### 1.2.1 Point de vue de l'assuré

Du point de vue de l'assuré, ce type de produit est particulièrement intéressant, car il permet de combiner les avantages des assurances liées à des produits financiers et ceux des produits plus traditionnels.

En effet, dans une rente variable, l'assuré est libre de choisir d'investir sa (ses) prime(s) dans une gamme de produits d'investissement proposés par la compagnie d'assurance (typiquement des fonds), et ce, en fonction de ses objectifs et de son profil de risque. La valeur de la rente versée par la compagnie à l'assuré dépendra ensuite des performances des produits d'investissement choisis.

Ce produit permet également de bénéficier des avantages liés aux produits plus *traditionnels*, à savoir la possibilité d'inclure différentes garanties dans le contrat. Nous pouvons par exemple citer quelques *variable annuities* communément rencontrées sur les marchés incluant différentes garanties, comme :

- GMAB (Guaranteed Minimum Accumulation Benefit) : garantit un capital minimum défini à la souscription ;
- GMWB (Guaranteed Minimum Withdrawal Benefit) : garantit la possibilité de pouvoir effectuer des retraits réguliers d'un montant annuel minimum défini à la souscription ;
- GMIB (Guaranteed Minimum Income Benefit) : garantit un montant minimum de retraite défini à la souscription ;
- GMDB (Guaranteed Minimum Death Benefit) : garantit un capital minimum défini à la souscription en cas de décès de l'assuré, ce montant pouvant être soit un montant déterminé (montant fixe, total des versements effectués, ...), soit la valeur du contrat au moment du décès de l'assuré.

Notons également que l'assuré est libre de choisir entre une période d'arrérage fixe ou infinie (entendons par là jusqu'au décès, ou jusqu'au décès de l'époux/épouse<sup>3</sup>).

Vu de la sorte, ce type de produit apparaîtrait comme idéal du point de vue de l'assuré. Nuancions toutefois ce propos car, dû aux nombreux risques que supportent l'assureur, la tarification de ce type de produits n'est généralement pas en faveur de l'assuré. De plus, au vu des récents

---

3. Voir à ce propos le cas des rentes avec réversion.

événements observés sur les marchés financiers, les produits dits en *unité de comptes*, c'est-à-dire étant liés à des fonds, risquent de connaître une grave crise de confiance dans les prochaines années (notons toutefois que cette constatation pourrait encourager l'adhésion au produit particulier que nous exposons dans ce travail, comme cela est expliqué dans le paragraphe suivant). Dans le cas particulier de la Belgique, de nombreux obstacles fiscaux<sup>4</sup> viennent également s'ajouter à un obstacle psychologique lourd : l'absence de cession de patrimoine. En effet, une fois l'assuré décédé, plus rien ne sera versé à la famille proche du défunt (à l'exception toutefois des rentes avec réversion, que nous évoquerons dans la conclusion). Cet état de fait est généralement difficile à accepter pour l'assuré.

L'intérêt de la présente étude est donc d'analyser l'impact du transfert d'une partie du risque de longévité à l'assuré. Ainsi, les rentes versées ne dépendraient plus des performances de quelconques produits financiers, mais bien de la mortalité observée par l'assureur, ce qui, à l'heure actuelle, pourrait rencontrer un franc succès au vu de la volatilité nettement moindre de ce paramètre. En effet, si l'on se base sur l'expérience de la TIAA (Teachers Insurance and Annuity Association) aux Etats-Unis, au travers de la CREF (Companion organization college Retirement Equities Fund), il apparaît qu'historiquement, l'impact de l'ajustement annuel dû à la mortalité est resté relativement modeste, la plupart de ces ajustements ayant bien davantage découlés des investissements réalisés<sup>5</sup>.

### 1.2.2 Point de vue de l'assureur

Même si ce type de produit représente une formidable opportunité de croissance, de par la solution innovante qu'il apporte pour répondre aux besoins des clients en terme de rendement et de garanties, il faut être conscient qu'il n'en représente pas moins un défi important pour les compagnies d'assurance en matière de gestion des risques. Celles-ci sont en effet confrontées à de nombreuses sources de risque : risques actuariels, risques opérationnels ou encore risques financiers.

Sur le marché européen, on constate par exemple que seules des compagnies bien implantées aux Etats-Unis, et ayant ainsi acquis un certain *know-how* en la matière, se sont jusqu'ici lancées dans la commercialisation de ces produits. Citons par exemple AXA, principal acteur européen en la matière, AEGON, METLIFE, ING ou encore LINCOLN.

Pour les compagnies d'assurance, l'avènement sur le marché de ce type de produit permet également d'envisager la construction de produits tout à fait innovants. De nombreuses possibilités de *pay-off* sont ainsi envisageables, celui-ci pouvant dépendre d'autres paramètres que simplement le rendement d'un fonds. Dans cette étude nous nous intéressons par exemple au facteur de longévité comme facteur déterminant les arrrages futures. Nous tenterons de voir s'il serait possible, techniquement et commercialement, de lier le montant de l'arrrage à la mortalité future qu'observera la compagnie d'assurance.

Notons toutefois que même si l'offre de ce type de produit commence à se développer, celle-ci reste malgré tout limitée, sans doute à cause de la crainte partagée par les compagnies d'assurance d'une amélioration significative et imprévisible de l'espérance de vie, qui pourrait mener toute compagnie disposant d'un large portefeuille de rentes sur la vie à la déroute. HANNES & BO-

---

4. Notons que ces derniers ont été considérablement réduits en ce qui concerne les produits relevant du deuxième pilier grâce à la LPC (Loi sur les Pensions Complémentaires).

5. Le lecteur intéressé pourra se reporter aux commentaires de BROWN et al. [5] à ce propos.

GAERT [21] soulignent en outre que si l'on considère le cas particulier de la Belgique, au-delà des incertitudes qui pèsent sur la mortalité future, le phénomène d'anti-sélection, et sur les rendements financiers futurs, l'assureur est également confronté à une charge administrative conséquente pour vérifier l'état de vie de l'assuré, et que la législation belge reste fort stricte en matière de liquidation de pensions complémentaires sous forme de rentes<sup>6</sup>. En effet, en Belgique, la table de mortalité est légalement garantie pour toute la durée du contrat, ce qui a donc obligé le législateur à fixer un tarif minimum en incorporant un chargement de sécurité pour tenir compte de l'augmentation de la longévité (rappelons que les tables réglementaires belges sont basées sur un modèle de Makeham, avec des paramètres distincts qu'il s'agisse d'opérations en cas de vie ou de décès, et que celles-ci soient destinées à des hommes ou des femmes). Ces chargements, même s'ils sont instaurés dans une optique de protection de l'assuré, peuvent toutefois être fort handicapants pour les compagnies d'assurance, et ne sont pas pour autant prudents étant donné qu'ils ne se basent pas sur des tables prospectives (ce qui oblige en outre le législateur à revoir les paramètres du calcul du tarif minimum, actuellement fixés à MR-5/FR-5 avec un taux maximum d'actualisation de 3.75% pour les couvertures du second pilier<sup>7</sup>). Les formules de rente ne sont donc encouragées ni par la législation, ni sur le plan fiscal. Ces dernières pourraient toutefois être une alternative souhaitable, voire indispensable, aux problèmes futurs qui attendent notamment les prestations de pension.

---

6. Voir notamment l'article 19, paragraphes 1 et 2 de la Loi sur les Pensions Complémentaires (LPC) du 28 avril 2003.

7. Notons que depuis janvier 2008, la CBFA est devenue compétente en la matière, fixant elle-même les conditions de tarifs minimums. Ces dernières devraient d'ailleurs être adaptées à l'avenir pour tenir compte des tables de mortalité prospective, en se basant sur les prévisions faites par le Bureau Fédéral du Plan.



Deuxième partie

Risque de longévité



## Chapitre 2

# Historique, défis et solutions envisageables

Si l'allongement de la durée de vie n'est pas un phénomène nouveau, la prise en considération de ce risque ainsi que la prise de conscience des conséquences que cela pourrait entraîner ne sont apparues que bien tardivement dans les modèles de tarification actuariels. La raison du manque d'intérêt pour cet aspect devenu aujourd'hui crucial en est simple : les rendements engendrés par les produits financiers antérieurs à l'an 2000 "*masquaient*" en quelque sorte les dangers que représente pour les assureurs l'allongement de la durée de vie. Notons également que les produits de rentes (notamment viagères) sont relativement récents, et que ce sont principalement ces produits qui sont concernés par l'amélioration de la longévité. Ce n'est donc qu'à partir du début des années 2000 que le monde des assurances a commencé à s'inquiéter de cette amélioration, et ce principalement pour deux raisons :

1. d'une part les rendements des actifs financiers étaient de moins en moins élevés, et de plus en plus incertains ;
2. d'autre part on constatait une baisse constante des taux d'intérêts directs alors que de nombreux produits en portefeuille garantissaient encore des taux fort élevés sur les produits d'assurance à long terme.

Ainsi, en dehors du risque technique et du risque financier est donc apparu un troisième type de risque concernant les produits proposant des bénéfices en cas de vie, celui découlant de l'évolution aléatoire de la mortalité dans le futur. D'après une étude du Professeur CAIRNS [6], le risque de longévité inhérent à une rente viagère démarrant dans 30 ans pour un homme aujourd'hui âgé de 35 ans représente non moins de 25% du risque total. Il est donc aujourd'hui primordial de tenir compte aussi précisément que possible de ce risque supplémentaire.

BROUHNS & DENUIT [3] (a) ont ainsi analysés l'évolution de la mortalité en Belgique de 1880 à nos jours. Il ressort de cette étude de nombreux faits marquant caractérisant l'évolution de la mortalité dans notre pays, mais qui peuvent également être étendus à de nombreux pays industrialisés.

Ainsi, les auteurs mettent en exergue la rectangularisation de la courbe de survie (définie par  $x \mapsto {}_x p_0 = l_x/l_0$ ), qui traduit le fait que le nombre de survivants d'une cohorte reste quasiment

constant de 0 à 60-70 ans, pour ensuite diminuer très rapidement aux âges plus avancés<sup>1</sup> (le graphique des courbes de survie est présenté à la figure (2.1)). Auparavant, cette courbe de survie décroissait dès les premiers âges, cette décroissance s'accroissant à partir de 60-70 ans également. Les résultats de l'étude menée par ces auteurs démontrent également une diminution de la variance de la durée de vie au cours du temps, ainsi qu'un gain au niveau de l'espérance de vie<sup>2</sup>.

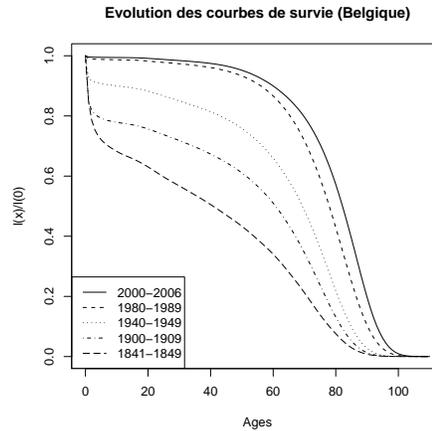


FIGURE 2.1 – Evolution des courbes de survie

Si l'on s'attarde à la représentation graphique de l'espérance de vie à la naissance (figure (2.2)) nous pouvons constater que celle-ci est en constante évolution<sup>3</sup>.

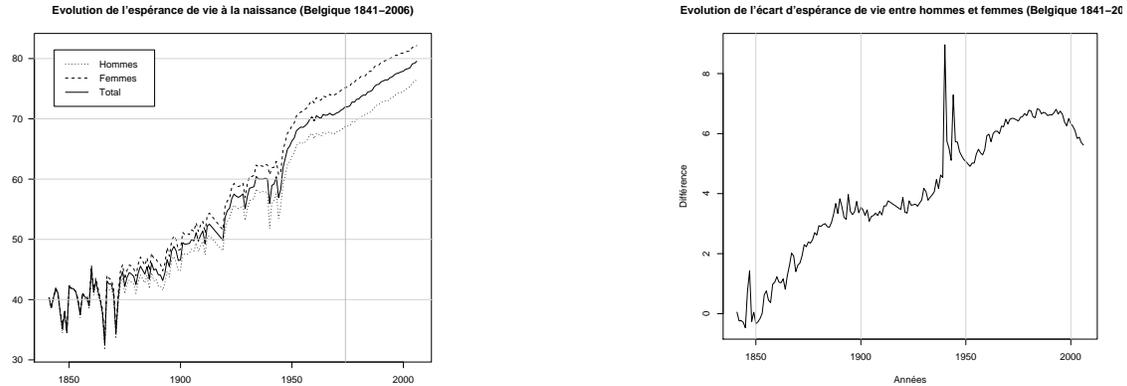


FIGURE 2.2 – Evolution des espérance de vie à la naissance avec à droite la différence entre ♂ et ♀

Toutes ces évolutions montrent donc que l'utilisation de tables de mortalité prospectives est plus que nécessaire dans le cadre des rentes viagères. L'immobilisation de capital nécessaire pour faire face à ce risque représente dès lors un poids considérable pour les assureurs. Nous étudierons donc la possibilité de transférer une partie de ce risque au client afin de diminuer ce besoin de capital, et d'en faire ainsi également profiter le client rentier au niveau de la prime à payer.

1. Ce phénomène est davantage encore marqué chez les femmes que chez les hommes.
2. Voir à ce propos les tables INS rendant compte de l'évolution de la vie médiane.
3. Nous avons placé un repère en 1974, nous y reviendrons à la section 3.5

## 2.1 Défis

L'allongement de la durée de vie humaine n'est pas sans poser quelques problèmes aux assureurs donc, et particulièrement en ce qui concerne les produits de rentes. Quelle pourrait dès lors être la solution à envisager pour tenir compte de ce phénomène qui, de toute évidence, ne devrait pas s'estomper dans les années à venir ?

La réponse à cette question est simple, il s'agit de prédire le plus fidèlement possible l'évolution future de cette mortalité afin d'adapter la tarification des produits de rente en fonction de cette évolution. Toutefois, même si cette réponse peut paraître évidente, la mise en oeuvre d'un tel processus est une tâche excessivement ardue, et une telle adaptation tarifaire ne serait pas nécessairement acceptable d'un point de vue commercial. Une solution intermédiaire serait donc de partager ce risque de longévité.

Durant de nombreuses années, et comme c'est encore le cas au sein de nombreuses compagnies d'assurance, la tarification des produits d'assurance sur la vie découle de tables de mortalité dites *du moment*, ou *transversales* (faisant référence au diagramme de Lexis, notion bien connue en démographie). Celles-ci sont établies à partir d'une période d'observation de la mortalité de la population générale, et les produits de rentes sont ensuite tarifés en adaptant ces tables de façon à *rajeunir* artificiellement les assurés. La CBFA impose en effet d'utiliser les tables MR et FR<sup>4</sup>, en appliquant un rajeunissement artificiel de 5 ans (tant pour les hommes que pour les femmes).

Toutefois, comme le soulignent BROUHNS & DENUIT [3] (a), un inconvénient majeur de ces tables périodiques est qu'elles ne reflètent le risque réel d'aucun assuré vu que la mortalité évolue au cours du temps. L'espérance de vie qui en découle équivaut donc "*à la durée de vie moyenne d'une génération fictive qui aurait tout au long de son existence les conditions de mortalité par âge de la période considérée. Dans une période d'allongement de la durée de la vie humaine, les espérances de vie calculées sur base des tables transversales sous-estiment donc systématiquement la durée de vie moyenne de la génération née cette année-là*". On comprend donc aisément le besoin de projeter la mortalité future à laquelle seront soumis les assurés ayant souscrits à des produits de rente.

Au-delà de l'établissement de ces tables de mortalité prospectives, une des grandes craintes auxquelles doivent faire face les assureurs concernant l'évolution de la mortalité est une amélioration significative de la longévité de l'ensemble de leurs assurés. Les assureurs du monde entier cherchent actuellement des solutions pour faire face à ce défi majeur qui pourrait les plonger dans une situation pour le moins délicate eu égard aux obligations que ces derniers ont contractés vis-à-vis de leurs clients rentiers.

Dans un premier temps nous analyserons donc quelques-unes des pistes envisagées afin de pouvoir partager ce risque. Nous verrons notamment quel pourrait être le rôle joué par les réassureurs ou par les marchés financiers. Une autre solution, même si fort délicate à mettre en place, serait de reprendre l'idée implicite des *assurances mixtes*, en incluant un bénéfice en cas de décès dans le

---

4. Tables de mortalité définies comme "prudentes" établies sur base d'observations de la mortalité de la population générale belge pour l'estimation des paramètres du modèle de Makeham. Notons que dans le cas de la tarification de produits d'assurance sur la vie, il est fréquent que ces tables ne remplissent pas l'objectif de prudence pour lequel elles ont été créées (voir à ce propos DENUIT [12]). Il est d'ailleurs étrange de constater que dès leur introduction, en 1992, ces tables "prudentes" étaient en fait déjà obsolètes au vu de l'évolution de la longévité dans notre pays.

produit, afin de procéder à une sorte de *hedging naturel*. Nous verrons également qu'il existe des solutions plus exotiques, telle que celle proposée par les GSA (qui serait davantage une solution envisageable par les sociétés mutuelles ou pour des fonds de pension, qui sont tous deux également directement confrontés au problème de l'allongement de la durée de vie).

## 2.2 Solutions

### 2.2.1 La réassurance et la titrisation

La réassurance devrait logiquement apparaître comme la solution la plus plausible pour gérer les risques les plus importants auxquels sont confrontées les compagnies d'assurance. En effet, leur expertise en matière de risques conséquents est nettement supérieure, et leur diversification des risques tant dans leur nature que dans leur géographie permet de faire jouer le phénomène de mutualisation même sur ces risques conséquents. De même, ces risques pourraient également être directement transférés aux marchés financiers, bien plus à même de gérer de telles masses financières qu'une *simple* compagnie d'assurance.

Ces solutions seraient-elles donc les "*solutions miracles*" pour supporter le risque de longévité des rentes ? Rien n'est moins sûr. En effet, il est clair que ce risque n'est que peu diversifiable : la plupart des rentes vendues dans le monde le sont dans des pays industrialisés (principalement aux Etats-Unis, au Japon et en Europe, comme nous avons pu le voir dans l'introduction). L'évolution de la mortalité dans l'ensemble de ces régions est toutefois fortement corrélée, et le risque de longévité est donc d'autant moins diversifiable. La solution de la réassurance apparaît donc comme peu adaptée pour supporter ce risque. La titrisation pourrait éventuellement intéresser certains secteurs pour lesquels de tels produits constitueraient une diversification idéale. Nous pensons entre autres aux entreprises pharmaceutiques, pour lesquelles le vieillissement de la population représente une opportunité plus qu'intéressante. En souscrivant à de tels produits financiers, ceux-ci seraient donc couverts dans les deux cas, qu'il s'agisse d'une hausse ou d'une baisse future de la mortalité<sup>5</sup>.

Une autre raison mettant en doute l'intérêt que portent les entreprises de réassurance et les investisseurs à la gestion du risque de longévité est la longueur implicite de l'engagement. En effet, les effets de l'amélioration de la longévité ne sont visibles qu'après de très nombreuses années, tout comme le sont dès lors les engagements.

Malgré ces aspects attirant les réticences des principaux investisseurs et protagonistes en matière de réassurance, une première expérience en la matière fut toutefois tentée en décembre 2003, sous la forme d'une obligation émise par SWISS RE, de type "*mortality bond*", connue sous le nom de *Vita I*. Celle-ci fut basée sur un indice de mortalité<sup>6</sup> construit à partir des indices de mortalité des populations générales des pays suivants : Etats-Unis, Royaume-Uni, France, Italie et Suisse. Les termes de l'obligation étaient eux : maturité de 3 ans, principal de \$400 million, payant trimestriellement le taux LIBOR à 3 mois + 135 points de base. Si l'indice de mortalité excédait 130% du niveau de 2002, le principal était réduit, et ce dernier était même annulé si l'indice dépassait

---

5. Bien qu'une hausse de la mortalité future soit assez peu envisageable, à l'exception d'épidémies ou de maladies graves, mais dans ce cas à nouveau, les entreprises pharmaceutiques pourraient être sollicitées et engranger des profits conséquents.

6. Cet indice fut pondéré par pays, par âge et par sexe.

150% de la mortalité de 2002<sup>7</sup>. Entre ces deux taux pivots, le principal était réduit de façon linéaire.

Ce produit rencontra un grand succès auprès des investisseurs, et fut même suivi d'autres obligations de ce type, à des conditions toutefois moins avantageuses pour les investisseurs : *Vita II* (SWISS RE, 2005), *Vita III* (SWISS RE, 2007), *Tartan* (SCOTTISH RE, 2006) ou encore *Osiris* (AXA, 2006). Notons toutefois que le second inconvénient majeur est ici évité par une maturité fixée à 3 ans, les principaux risques couverts étant donc une épidémie (principalement de grippe), une attaque terroriste majeure ou encore une catastrophe naturelle.

Notons également qu'une autre tentative de partage du risque de longévité fut tentée en novembre 2004, conjointement par la EIB (*European Investment Bank*) et BNP PARIBAS. L'obligation émise était cette fois une véritable obligation de longévité ("*survivor bond*"), sur une période de 25 ans. L'index de référence de survie était basé sur les données du UK GAD (*Government Actuary's Department*) pour la population générale masculine âgée de 65 ans. Dans cette obligation, BNP PARIBAS supportait le risque de longévité, mais le réassura auprès de PARTNER RE. La structure de l'obligation était assez complexe, et comportait notamment un swap de mortalité et un swap de taux d'intérêt. L'opération ne rencontra cependant pas le succès escompté, notamment car le risque couvert était trop grand et que le capital nécessaire était trop important pour la protection offerte, et fut dès lors abandonnée dès l'année suivante<sup>8</sup>.

La section suivante décrit le calcul d'un produit similaire à celui proposé par SWISS RE. Remarquons toutefois que le raisonnement de ce type de produit consiste à se protéger contre une hausse de la mortalité sur la période considérée, et non contre une amélioration de la longévité. Toutefois, par symétrie, nous décrirons un tel produit sous l'angle d'une protection contre l'allongement de la durée de vie. Nous verrons également qu'un autre produit financier, un *swap*, pourrait rencontrer les mêmes objectifs. Nous nous baserons sur les développements de LIN & COX [28].

### Description de l'obligation

Bien que les produits basés sur la longévité suivent généralement la même structure que ceux basés sur les risques de catastrophe, ceux-ci se distinguent toutefois de manière importante de ces "*cat bonds*". En effet, une déviation dans les prévisions de mortalité peut apparaître graduellement sur une longue période, contrairement à une perte due à une catastrophe naturelle. Dans les deux cas, on retrouve toutefois le concept de *SPC* (pour *Special Purpose Company*) au vu des pertes conséquentes que pourrait subir la compagnie de réassurance. Une *SPC* est une entité juridique créée lors d'une transaction financière (essentiellement de titrisation, cas qui nous occupe) afin d'acquiescer les créances du cédant et émettre des titres sur le marché. "*Cette entité intermédiaire entre le cédant et les investisseurs est aussi une garantie de bonne fin de l'opération de titrisation en cas de défaillance du cédant*"<sup>9</sup>. La *SPC* émet donc des obligations, afin de transférer le risque aux investisseurs, et investit les primes de réassurance et le produit de la vente des obligations dans des actifs sans risque. En résumé, le fonctionnement de la *SPC* créée par SWISS RE à cet effet peut se comprendre à la figure (2.3)<sup>10</sup>.

Considérons donc le cas d'un assureur soumis au paiement annuel de 1000 par assuré ayant

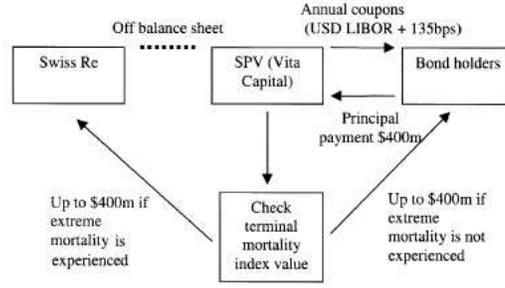
---

7. D'après une étude réalisée par MORGANSTANLEY, cet événement était décrit comme *un événement survenant une fois tous les 25 ans*.

8. Pour de plus amples détails quant à cette opération, se reporter à BLAKE & al. [2].

9. Remarque de <http://fr.wikipedia.org/wiki/Titrisation>.

10. Graphique extrait de BLAKE & al. [2].

FIGURE 2.3 – Fonctionnement de la SPC pour *Vita I* (source : BLAKE et al. [2])

souscrit un contrat de rente immédiate, avec  $l_x$  assurés tous âgés initialement de  $x$  années. L'assureur paye donc  $1000 \times l_{x+t}$  avec  $l_{x+t}$  le nombre de survivants en  $t$ . Ce paiement est donc aléatoire vu depuis  $t = 0$ . Supposons que cet assureur veuille se protéger contre le risque de devoir payer plus d'un certain montant par an. Pour ce faire, il achète donc une assurance auprès d'une SPC, et paye donc une prime  $P$  en  $t = 0$ . Le contrat définit un certain niveau  $X_t$  tel que la SPC paye à l'assureur l'excès de paiement au-delà de ce seuil. Toutefois cette protection affiche un plafond d'indemnisation de la part de la SPC. Fixons ce plafond à  $1000C$ , un multiple du taux de paiement.

Ainsi, chaque année  $t = \{1, 2, \dots, T\}$ , l'assureur recevra de la SPC le montant :

$$B_t = \begin{cases} 1000C & \text{si } l_{x+t} > X_t + C \\ 1000(l_{x+t} - X_t) & \text{si } X_t < l_{x+t} \leq X_t + C \\ 0 & \text{si } l_{x+t} \leq X_t \end{cases}$$

et le montant réellement versé par l'assureur, après déduction des sommes perçues, sera donc :

$$\begin{aligned} \text{Cash-flow net de l'assureur} &= 1000l_{x+t} - B_t \\ &= \begin{cases} 1000(l_{x+t} - C) & \text{si } l_{x+t} > C + X_t \\ 1000X_t & \text{si } X_t < l_{x+t} \leq C + X_t \\ 1000l_{x+t} & \text{si } l_{x+t} \leq X_t \end{cases} \end{aligned}$$

Attardons-nous à présent à décrire le contrat obligataire en tant que tel. En définissant  $D_t$  le coupon total payé aux investisseurs par la SPC, nous avons donc

$$\begin{aligned} D_t &= \begin{cases} 0 & \text{si } l_{x+t} > C + X_t \\ 1000C - B_t & \text{si } X_t < l_{x+t} \leq C + X_t \\ 1000C & \text{si } l_{x+t} \leq X_t \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } l_{x+t} > C + X_t \\ 1000(C + X_t - l_{x+t}) & \text{si } X_t < l_{x+t} \leq C + X_t \\ 1000C & \text{si } l_{x+t} \leq X_t \end{cases} \end{aligned}$$

Notons par ailleurs que la valeur maximum de  $l_{x+t}$  vaut  $l_x$ , obtenue si personne ne décède, mais vu depuis  $t = 0$ , et est donc une variable aléatoire comprise entre 0 et  $l_x$ . Le total des paiements effectués par la SPC équivaut donc à  $B_t + D_t = 1000C$  pour chaque année  $t = \{1, 2, \dots, T\}$ ,  $B_t$  étant versé à l'assureur et  $D_t$  aux investisseurs, le principal  $1000F$  étant remboursé aux investisseurs en  $t = T$ .

La SPC va donc tarifier l'obligation de sorte à s'assurer que si  $P$  représente les primes d'assurance et  $V$  le prix de marché de l'obligation,  $P + V$  soit au moins égal au prix  $W$  d'une obligation sans risque de coupon annuel  $1000C$  et de principal  $1000F$ , évaluée au facteur d'actualisation du marché obligataire  $v(0, k)$ <sup>11</sup>, et ainsi

$$P + V \geq W = 1000Fv(0, T) + \sum_{k=1}^T 1000Cv(0, k) \quad (2.1)$$

Nous avons donc construit une obligation transférant intégralement le risque de longévité au marché des capitaux. En effet, si la prime d'assurance ( $P$ ) et le produit de la vente des obligations aux investisseurs ( $V$ ) sont suffisants, la SPC peut acheter une obligation directe et obtenir exactement les cash-flow requis pour remplir ses obligations. La SPC reçoit donc  $1000C$  annuellement de l'obligation directe, et reverse ensuite  $D_t$  aux investisseurs et  $B_t$  à l'assureur. Dans ce cas,  $1000C = D_t + B_t$  est le montant exact pour faire face à ses obligations. Le risque de longévité sur les  $T$  années est donc intégralement transféré au marché des capitaux.

### Description du *swap*

Il est également possible de créer un autre produit financier engendrant des cash-flow identiques. Ce swap doit donc être tel qu'il engendre annuellement des montants  $B_t$  et  $D_t$ , mais ne comporte cette fois plus de paiement du principal en  $T$ . Vu que ce produit ne comporte plus de collatéral (le principal de l'obligation), nous faisons donc face à un risque supplémentaire de défaut de la contre-partie.

En supposant que ce risque de contre-partie est nul, le swap peut alors être décrit de la façon suivante : le paiement  $P$  de l'assuré en 0 peut être remplacé par un niveau  $x$  de paiement annuel, de sorte que

$$P = x \sum_{k=1}^T v(0, k) \quad (2.2)$$

et l'assureur paye donc annuellement  $x$  à la SPC, ou à l'émetteur du swap si le risque est directement supporté par les marchés financiers. En échange, l'assureur reçoit un montant flottant  $B_t$  chaque année  $t = \{1, 2, \dots, T\}$ .

Du point de vue de l'assureur, cette opération est donc belle et bien un swap de taux fixe contre flottant. Si l'on omet le risque de contre-partie, le produit de réassurance décrit dans la section précédente peut donc être dupliqué par un swap, celui-ci pouvant être émis par une banque d'investissement (et non pas uniquement un réassureur).

Si l'on continue la comparaison avec l'obligation de la section précédente, qu'advient-il pour le détenteur de l'obligation ? Au lieu de payer  $V$  pour acheter cette obligation, celui-ci payera un montant  $y$  chaque année, ce  $y$  étant déterminé de telle sorte à engendrer les mêmes *cash-flows* :

$$y \sum_{k=1}^T v(0, k) + 1000Fv(0, T) = \sum_{k=1}^T E^* [D_t] v(0, k) + 1000Fv(0, T) \quad (2.3)$$

et donc

$$y \sum_{k=1}^T v(0, k) = \sum_{k=1}^T E^* [D_t] v(0, k) \quad (2.4)$$

---

11. Ce facteur  $v(0, k)$  est dicté par le marché obligataire au moment de l'émission de la couverture.

avec  $E^*$  l'espérance des paiements futurs de la partie flottante.

La SPC recevra donc chaque année  $x+y$  correspondant exactement à ses engagements  $B_t + D_t$ . La seule différence se situe donc au niveau du collatéral qui disparaît, entraînant ainsi un risque de défaut de la contre-partie. Toutefois, cette solution permet d'éviter un intermédiaire (à savoir le réassureur) en transférant directement le risque au marché financier, et en diminuant ainsi les coûts de transactions.

Bien sûr, pour que tout ceci se réalise, il convient de tarifier l'obligation liée à la longévité (ou le swap) de manière actuariellement *juste*. Pour ce faire, LIN & COX [28] suggère d'utiliser la méthode de la transformée de Wang permettant de faire le lien entre les produits financiers et d'assurance. Nous n'irons toutefois pas plus loin dans le raisonnement, l'objet de ce mémoire n'étant pas de réassurer ce risque de longévité, ni même de le transférer sur les marchés financiers, mais bien d'en transférer une partie directement au client. Nous avons cependant démontré qu'il était tout à fait envisageable théoriquement de transférer ce risque. Reste à savoir si de tels produits pourraient à l'avenir rencontrer un quelconque succès, car il est important pour les compagnies d'assurance du monde entier de ne pas devoir supporter seules un risque aussi important que celui de la longévité.

### 2.2.2 L'adossement de garanties décès : du hedging naturel

Attardons-nous à présent à l'adossement de garanties décès au produit. En effet, si l'on considère un allongement de la durée de vie, les prestations en cas de décès seront donc reportées dans le temps, et l'on pourrait ainsi jouer sur ce fait pour créer une sorte de "*hedging* naturel" contre un changement dans la mortalité<sup>12</sup> qui poserait problème pour un portefeuille de rentes.

Si l'on considère par exemple que la valeur actuelle des engagements contractés pour les assurances vie<sup>13</sup> et pour les rentes est la même, que les paiements sont faits annuellement dans les deux cas (les bénéfices en cas de décès sont versés en fin d'année) et que le nombre d'assurés est identique, nous pouvons alors définir les engagements totaux du portefeuille<sup>14</sup>.

Pour les assurances vie, la valeur actuelle du paiement de 1 à la fin de l'année du décès est  $v^{k+1}$  et la valeur présente attendue est donc donnée par

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} \quad (2.5)$$

avec  $x$  l'âge de l'assuré à la souscription. Les primes payées par l'assuré se définissent quant à elle par la valeur actuelle des paiements futurs, versés en début d'année jusqu'à l'année de décès, c'est-à-dire

$$\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|} = \frac{1 - v^{K(x)+1}}{i}$$

dont la valeur actuelle attendue est

$$\ddot{a} = E \left[ \ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_x \quad (2.6)$$

12. Celui-ci pouvant être à la hausse ou à la baisse, même si une hausse de la mortalité future est assez peu envisageable.

13. Prévoyant un versement de capital au décès de l'assuré(e).

14. En supposant une structure à terme des taux d'intérêt plate.

et la prime annuelle  $P_x$  est donc définie telle que  $P_x \ddot{a} = A_x$ . Si l'assuré décède en  $K(x) = t$ , la perte nette pour l'assureur est donc la valeur actuelle du paiement moins la valeur actuelle des primes, c'est-à-dire

$$L = v^{K(x)+1} - P_x \ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|} = v^{K(x)+1} - P_x \frac{1 - v^{K(x)+1}}{i} \quad (2.7)$$

qui est nulle si  $P_x$  est définie correctement. En supposant que ça soit le cas, en moyenne la perte sera donc nulle.

Si l'on s'intéresse maintenant au cas du rentier d'âge  $y$ , le paiement fait par la compagnie d'assurance de 1 euro en début d'année est donc calculé de façon identique à la prime de l'assurance vie, à savoir

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{\overline{K(y)+1}|} &= \frac{1 - v^{K(y)+1}}{i} \\ \ddot{a} = \mathbb{E} \left[ \ddot{a}_{\overline{K(y)+1}|} \right] &= \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_y \end{aligned}$$

qui est égal à la prime unique réclamée à l'assuré. Notons qu'il est important pour l'assureur de prendre des tables de mortalité d'expérience différentes selon le produit envisagé. La perte de la compagnie sera donc, par unité de paiement,

$$\ddot{a}_{\overline{K(y)+1}|} - \ddot{a}_y = \frac{1}{i} - \ddot{a}_y - \frac{v^{K(y)+1}}{i} \quad (2.8)$$

qui sera en moyenne égal à 0 étant donné la définition de  $\ddot{a}_y$ .

Si l'on agrège à présent le tout, en considérant un montant  $c$  de paiement à la fin de l'année de décès de l'assuré d'âge  $x$ , et un engagement de rente d'un montant  $b$  au début de chaque année où l'assuré d'âge  $y$  est en vie, nous pouvons définir l'engagement total de la compagnie comme

$$c v^{K(x)+1} + b \ddot{a}_{\overline{K(y)+1}|} \quad (2.9)$$

la compagnie recevant pour cela des primes d'un montant total de

$$c P_x \ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|} + b \ddot{a}_y \quad (2.10)$$

La différence entre les deux termes sera donc la perte subie par la compagnie d'assurance, c'est-à-dire

$$L = \left[ c v^{K(x)+1} + b \ddot{a}_{\overline{K(y)+1}|} \right] - \left[ c P_x \ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|} + b \right] \ddot{a}_y \quad (2.11)$$

La perte attendue est donc égale à 0. Cette hypothèse n'est valable que si la tarification des produits est faite de façon actuariellement juste. Si la mortalité venait à évoluer par rapport aux tables de mortalité utilisées, l'amélioration de celle-ci aurait toutefois un impact différent sur les engagements d'assurance vie et de rentes. Ainsi, COX & LIN [9] considèrent un choc dans la mortalité de  $\varepsilon$  (un pourcentage de la force de mortalité  $\mu_{x+t}$ <sup>15</sup>) qui entraîne donc des probabilités de survie modifiées, ces nouvelles probabilités étant égales à

$$p_{x+t}^* = (\exp^{-\mu_{x+t}})^{1-\varepsilon} = (p_{x+t})^{1-\varepsilon} \quad (2.12)$$

---

15. Cette notion est définie dans la section 3.2.

Si l'on prend une diminution dans la mortalité de  $\varepsilon = 0.10$ , cela entraînerait ainsi une augmentation de 2% des paiements attendus pour les rentes, mais un gain de 5% au niveau des assurances vie. De plus, si l'assureur combine ces deux effets, cette amélioration de la mortalité n'a qu'un effet global de 1.5%. Les auteurs illustrent ainsi de manière graphique le *hedging* qui s'opère au niveau de la combinaison de ces deux produits, ce graphique étant représenté à la figure (2.4).

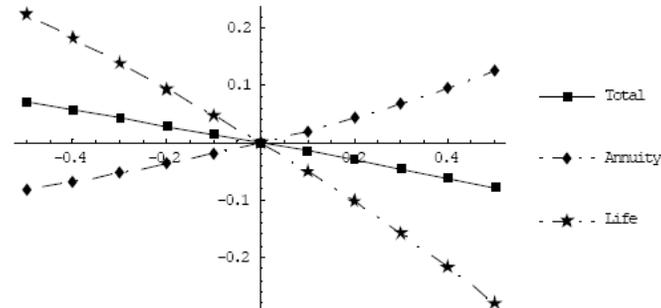


FIGURE 2.4 – Hedging naturel : impact d'une modification de la mortalité sur le résultat de la compagnie (source : COX & LIN [9])

L'exemple considéré dans cet article est évidemment tout à fait hypothétique, et sans doute fort loin de la réalité des assureurs à l'heure actuelle, mais il a toutefois le mérite de démontrer qu'un *hedging* naturel existe bel et bien entre ces deux types de produit. Certains assureurs semblent d'ailleurs commencer à s'intéresser à cette combinaison entre rente viagère et capital décès. Ainsi, AXA a-t-il lancé en 2006 son produit "*TwinStar*" offrant au rentier une couverture en cas de décès (notons que ce produit laisse également à l'assuré la possibilité de disposer du capital à tout moment, en plus d'autres caractéristiques intéressantes pour celui-ci).

Il est toutefois illusoire de penser qu'une telle solution pourrait à elle seule faire disparaître le problème du risque de longévité. En effet, il faudrait pour cela que les assurances vie classiques (prévoyant le paiement d'un capital au décès de l'assuré) soient autant sollicitées que les rentes, ce qui n'est plus du tout le cas à l'heure actuelle, et il faudrait de surcroît procéder à un hedging dynamique en continu, ce qui serait impossible à mettre en oeuvre dans la pratique.

### 2.2.3 GSA : une solution extrême

Une autre solution envisageable pourrait être l'adhésion d'un certain nombre de participants (assurés) à ce que l'on appelle un *Group Self-Annuity*. Ce type d'instrument d'assurance vie se distingue par sa répartition du risque : le principe de ce groupement d'assurés consiste à supporter individuellement le risque systématique de longévité, mais à partager le risque idiosyncratique, c'est-à-dire relevant des déviations individuelles à la mortalité moyenne.

Notons d'emblée que le besoin d'un assureur dans ce cas n'est certainement pas indispensable, et devrait idéalement même être évité afin de diminuer les coûts de fonctionnement de ce produit. Ce système pourrait donc davantage s'appliquer à une mutuelle ou à un fonds sectoriel, voir même au niveau d'un schéma de pension national, c'est pourquoi nous qualifions cette solution *d'extrême*.

MILEVSKY & ROBINSON [31] ont étudiés analytiquement les conséquences du choix fait par un individu partant à la retraite entre une rente volontaire, passant donc par un assureur, et une *rente*

*personnelle* (où l'individu se base uniquement sur ses propres ressources pour financer sa retraite). Il ressort de cette étude que la seconde possibilité procure sans surprise davantage de ressources à l'individu, mais ceci se fait au dépend du risque de *survivre à ses ressources*. ALBRECHT & MAURER [1] ont évalués ce risque en calculant la probabilité de survivre à ses ressources, et il s'avère que celle-ci est substantielle. Une solution intermédiaire pourrait donc être ces GSA.

Les développements exposés ci-après sont inspirés des articles de PIGGOTT, VALDEZ & DETZEL [32] et de VALDEZ, PIGGOTT & WANG [36]. Nous nous bornerons dans cette section à décrire ce produit dans sa globalité, le lecteur intéressé par les développements analytiques complets pouvant se référer à ces articles.

### Exemple simple

Partons tout d'abord de l'exemple le plus simple qu'il soit, c'est-à-dire en ne considérant qu'une seule cohorte, ayant les mêmes caractéristiques de mortalité, sur un marché avec un seul actif sans risque à taux constant. Nous améliorerons ensuite progressivement ce modèle pour tenir compte de changements possibles sur ces paramètres.

Un GSA s'apparente de prime abord à une rente viagère<sup>16</sup> ordinaire. Afin de pouvoir tarifier ce produit, il faudra donc tenir compte de la mortalité future attendue du rentier (et donc également de l'amélioration future anticipée de cette mortalité) ainsi que du taux de rendement du portefeuille, supposé ici composé uniquement d'actifs sans risque à taux constant.

Supposons  $l_x$ , le nombre de rentiers au temps 0, tous âgés de  $x$ . Si ces derniers souhaitent recevoir un montant de rente  $B_0$ , le total du fonds en  $t = 0$  devra donc être de

$$F_0 = l_x B_0 \sum_{t=0}^{\infty} (l_{x+t}/l_x) v^t = l_x B_0 \ddot{a}_x$$

Cette formule reprend les notations actuarielles standards qui, pour rappel, sont :

- $l_z$  représente le nombre attendu de survivants atteignant l'âge  $z$
- $v$  représente le facteur d'actualisation  $1/(1+r)$  avec  $r$  comme taux d'intérêt
- $\ddot{a}_x$  représente le facteur viager, donné par  $\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^t (l_{x+t}/l_x)$ , interprété comme la valeur actuelle attendue d'une rente viagère payant périodiquement un montant de 1 en début de période.

Attardons-nous maintenant au cas où la mortalité observée ne correspondrait pas à celle attendue. Il serait dès lors impossible de continuer à payer un montant  $B_0$  aux rentiers. Notons par  $l_{x+1}^*, l_{x+2}^*, \dots, l_{x+t}^*, \dots$  le nombre de survivants réels aux différents âges. Supposons que les revenus d'investissement soient, quant à eux, réalisés comme prévu. Dans ce cas, et en supposant qu'aucun changement n'intervient en  $t = 0$ , de telle sorte que le paiement par survivant est effectivement  $B_0$ , le fonds devient en  $t = 1$ ,

$$F_1 = (F_0 - l_x B_0)(1+r) = l_x B_0 (\ddot{a}_x - 1)(1+r)$$

De la sorte, le revenu attribué en  $t = 1$  aux individus survivants est donc, compte tenu de leurs durées de vie future attendues,

---

16. Par *rente viagère* nous entendons une rente de durée indéterminée, celle-ci se terminant au décès de l'assuré.

$$B_1^* = \frac{1}{l_{x+1}^*} \left( \frac{F_1}{\ddot{a}_{x+1}} \right) = \frac{1}{l_{x+1}^*} \left( \frac{l_x B_0 (\ddot{a}_x - 1)(1+r)}{\ddot{a}_{x+1}} \right)$$

En utilisant la relation de récursivité pour les facteurs viagers, il vient  $\ddot{a}_{x+1} = (\ddot{a}_x - 1)(1+r)/p_x$ , avec  $p_x = l_{x+1}/l_x$ , nous pouvons alors déterminer  $B_1^*$  à partir de  $B_0$  grâce à la relation

$$B_1^* = \frac{1}{l_{x+1}^*} \left( \frac{l_x B_0 (\ddot{a}_x - 1)(1+r)}{(\ddot{a}_x - 1)(1+r)/p_x} \right) = B_0 \left( \frac{l_x p_x}{l_{x+1}^*} \right) = B_0 \left( \frac{p_x}{p_x^*} \right)$$

avec  $p^*$  représentant le taux de survie annuel réalisé<sup>17</sup>.

Partant de cette équation, en n'importe quel  $t$  nous avons donc<sup>18</sup>,

$$B_t^* = B_{t-1}^* \left( \frac{p_{x+t-1}}{p_{x+t-1}^*} \right)$$

Pour revenir à notre problème, en étendant au cas où les revenus d'investissement seraient aussi différents de ceux prévus, c'est-à-dire que le rendement réalisé  $r^*$  serait différent de celui attendu  $r$ , le fond au temps  $t$  serait donc égal à

$$F_t^* = (F_{t-1}^* - l_{x+t-1}^* B_{t-1}^*)(1+r_t^*) = l_{x+t-1}^* B_{t-1}^* (\ddot{a}_{x+t-1} - 1)(1+r_t^*)$$

et donc

$$B_t^* = \frac{F_t^*}{l_{x+t}^* \ddot{a}_{x+t}} = \frac{l_{x+t-1}^* B_{t-1}^* (\ddot{a}_{x+t-1} - 1)(1+r_t^*)}{l_{x+t}^* \ddot{a}_{x+t}}$$

serait le montant versé en  $t$  à chaque individu, recalculé suite à une modification et des revenus d'investissement réalisés et de la mortalité observée.

En repartant de la relation de récursivité du facteur viager, nous pouvons finalement déduire le montant  $B_t^*$  à partir de  $B_{t-1}^*$  de la façon suivante :

$$B_t^* = B_{t-1}^* \frac{l_{x+t-1}^*}{l_{x+t}^*} \frac{(\ddot{a}_{x+t-1} - 1)}{(\ddot{a}_{x+t-1} - 1)(1+r)/p_{x+t-1}} (1+r_t^*) \quad (2.13)$$

$$= B_{t-1}^* \left( \frac{p_{x+t-1}}{p_{x+t-1}^*} \times \frac{1+r_t^*}{1+r} \right) \quad (2.14)$$

Le paiement en  $t$  peut donc être obtenu à partir du paiement en  $t-1$  à l'aide de deux facteurs d'ajustement<sup>19</sup>, l'un rendant compte de la déviation dans la mortalité observée, l'autre de la déviation dans les revenus d'investissements réalisés. Ceci nous amène donc à considérer

$$B_t^* = B_{t-1}^* \times MEF_t \times IRF_t$$

avec  $MEF_t$ <sup>20</sup> le coefficient d'ajustement de la mortalité observée et  $IRF_t$ <sup>21</sup> le coefficient d'ajustement du taux d'intérêt de  $t-1$  à  $t$ . Le plan de paiement du GSA opérera donc en recalculant périodiquement le paiement en le multipliant par les coefficients d'ajustements rendant compte

17. Le facteur d'ajustement à ajouter est donc un ratio basé sur les taux de survie, plutôt que sur le nombre de décès.

18. Pour le développement complet, voir PIGGOTT, VALDEZ & DETZEL [32].)

19. Notons que les termes correctifs ici obtenus sont à la base de la construction de ceux utilisés dans l'application de ce mémoire, que nous détaillerons dans la partie V.

20. MEF signifiant *Mortality Enhancement Factor*.

21. IRF signifiant *Interest Rate Factor*.

des écarts observés entre prédictions et réalité.

Nous constatons donc qu'au vu des multiples ajustements que subira le contrat de l'assuré, ce type de produit s'adresse davantage à des assurances de type mutuelles. Nous verrons que ce raisonnement pourrait également être utilisé dans le cas qui nous occupe, c'est-à-dire celui d'une rente variable dépendant de la mortalité future et/ou des taux d'intérêts futurs. Nous reviendrons donc sur ce concept dans la partie V, en supposant alors que l'assureur dispose d'estimations suffisamment fiables sur lesquelles il pourra baser sa tarification.

### Contributions et rentes variables

Si l'on permet à présent une variation dans les montants de contributions, et donc de rentes, nous pouvons remarquer que le raisonnement est identique.

En considérant  $A_0$  la cohorte d'individus tous âgés de  $x$ ,  $F_{i,0}$  désigne le montant apporté au fonds par l'individu  $i$  en 0, de sorte que la valeur totale du fonds en 0 est égale à

$$F_0 = \sum_{A_0} F_{i,0}$$

De la sorte, le bénéfice attendu en 0 par l'individu  $j$  est donné par

$$B_{j,0} = \frac{F_{j,0}}{\ddot{a}_x} = \frac{F_0}{\ddot{a}_x} \frac{F_{j,0}}{F_0} = B_0 \left( \frac{F_{j,0}}{F_0} \right)$$

et il est immédiat que  $B_0 = \sum_{A_0} B_{j,0}$ .

Après une période, en  $t = 1$ , la valeur totale du fonds est donc devenue (en considérant le rendement réel obtenu)  $F_1^* = (F_0 - B_0)(1 + r_1^*)$  qui détermine donc le montant reçu par l'ensemble des individus en  $t = 1$ ,  $B_1^* = \frac{F_1^*}{\ddot{a}_{x+1}}$ . A partir de là, nous pouvons déterminer le bénéfice par unité du fonds qui est égal à

$$\frac{B_1^*}{\sum_{A_1} F_{i,1}^*} = \frac{B_1^*}{F_1^* - \sum_{D_0} F_{i,1}^*}$$

où  $\sum_{A_1}$  considère les fonds pour les individus encore vivants en  $t = 1$  qui est en fait la somme de tous les fonds  $F_{i,1}^*$  d'où l'on a retranché ceux des personnes décédées entre  $[0, 1[$ .

Si l'on considère donc le cas de l'individu  $j$  vivant à la fin de la période, celui-ci recevra donc un montant

$$\begin{aligned} B_{j,1}^* &= \frac{B_1^*}{\sum_{A_1} F_{i,1}^*} F_{j,1}^* = \frac{F_1^*}{\sum_{A_1} F_{i,1}^*} \frac{F_{j,1}^*}{\ddot{a}_{x+1}} = \frac{\sum_{A_1} F_{i,1}^* + \sum_{D_0} F_{i,1}^*}{\sum_{A_1} F_{i,1}^*} \frac{F_{j,1}^*}{\ddot{a}_{x+1}} \\ &= \frac{F_{j,1}^* + \left( \frac{\sum_{D_0} F_{i,1}^*}{\sum_{A_1} F_{i,1}^*} \right) F_{j,1}^*}{\ddot{a}_{x+1}} \end{aligned}$$

où l'on voit apparaître (dans le second terme du numérateur) le bénéfice supplémentaire dû à la répartition entre les individus vivants en fin de période des fonds de ceux décédés pendant cette période. Interprétons maintenant la formule dans un autre sens afin de faire ressortir non plus le bénéfice dû à la mortalité observée, mais en essayant de calculer récursivement le montant perçu

par l'individu  $j$  de période en période. Ainsi,

$$\begin{aligned} B_{j,1}^* &= \frac{F_1^*}{\sum_{A_1} F_{i,1}^*} \frac{F_{j,1}^*}{\ddot{a}_{x+1}} = \frac{F_1^*}{\sum_{A_1} F_{i,1}^*} \frac{(\ddot{a}_x B_{j,0} - B_{j,0})(1 + r_1^*)}{(\ddot{a}_x - 1)(1 + r)/p_x} \\ &= B_{j,0} \frac{p_x}{(\sum_{A_1} F_{i,1}^*)/F_1^*} \left( \frac{1 + r_1^*}{1 + r} \right) \end{aligned}$$

d'où nous obtenons donc en généralisant cette expression

$$B_{j,t}^* = B_{j,t-1}^* \frac{p_{x+t-1}}{(\sum_{A_1} F_{i,t}^*)/F_t^*} \left( \frac{1 + r_t^*}{1 + r} \right) \quad (2.15)$$

où  $A_1$  désigne les survivants en  $t = 1$  de la cohorte initiale, et d'où l'on peut à nouveau identifier un terme dépendant de l'ajustement dû à la mortalité,  $MEF$ , et un terme dépendant de l'ajustement des taux d'intérêts,  $IRF$ , tels que :

$$\begin{aligned} - MEF_t &= \frac{p_{x+t-1}}{(\sum_{A_1} F_{i,t}^*)/F_t^*} \\ - IRF_t &= \frac{1 + r_t^*}{1 + r} \end{aligned}$$

### Analyse des cohortes

Nous n'avons considéré que le cas relativement simple où l'ensemble des individus adhérents au GSA envisagé le faisait tous au même âge, au même moment, et donc avec des facteurs viagers ( $\ddot{a}_x$ ) identiques. Nous n'irons toutefois pas plus loin dans le développement de cette solution. En effet, même si la philosophie de ce type de produit est fort identique à celle de notre application (évoquée dans la partie V) dans le cas du facteur correctif basé sur les probabilités de survie, nous n'avons cependant pas analysé le cas de cohortes successives, et le développement de ce cas pour les GSA ne nous concerne dès lors pas plus. Soulignons que dans le cas des GSA, comme le démontre PIGGOTT, VALDEZ & DETZEL [32], l'inclusion de multiples cohortes permet d'atténuer fortement l'effet d'une déviation de la mortalité d'une des cohortes sur les paiements reçus par l'ensemble des participants au plan, comme le montre la figure (2.5)<sup>22</sup> issue de cet article. Le risque idiosyncratique est donc bel et bien partagé par les participants, alors que le risque systématique reste le soucis de tout un chacun, ce qui était bien le but annoncé des GSA. Notons que l'inclusion de différentes cohortes d'assurés dans notre application devrait donc également nous mener à ce genre de constatation.

Si nous avons pris tant de temps pour décrire le fonctionnement des GSA, c'est parce que celui-ci s'apparente en de nombreux points à l'idéologie que nous suivrons dans l'application de ce mémoire. En effet, les arrérages futurs seront adaptés selon différents facteurs correctif tenant compte de la longévité observée, en comparaison avec celle attendue, et de même au niveau des taux d'intérêts. Nous avons vu que les GSA fonctionnaient également en adaptant d'année en année le montant de l'annuité des participants. L'idée que nous suivrons sera à peu près identique, à la différence toutefois que nous nous baserons sur des projections afin d'adapter ces montants, et ce vu depuis l'instant  $t = 0$  (ces adaptations se faisant alors *a priori* afin de tarifier ces produits). Notons encore que, si dans le cadre des GSA, la présence d'une compagnie d'assurance n'est pas indispensable (voir même souhaitable), nous ne ferons que mutualiser le risque de variation autour des tables de mortalité, et non des tables de mortalité elles-mêmes. Dans ce cas, le rôle de l'assureur sera donc bien plus que celui d'un simple gestionnaire de fonds. De plus, nous verrons également

22. Source : PIGGOTT, VALDEZ & DETZEL [32]

que l'assuré pourrait réclamer une garantie minimum sur ses arrérages. A nouveau, l'assureur jouera alors un rôle de protection indispensable à la mise en place de ces garanties.

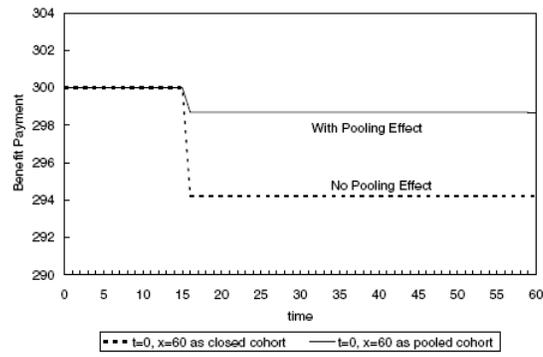


FIGURE 2.5 – Analyse de l'effet d'une chute de 50% dans la mortalité sur les paiements futurs versés aux adhérents au GSA dans le cas de la mutualisation d'une ou de plusieurs cohortes



## Troisième partie

# Tables de mortalité prospectives



# Chapitre 3

## Modèle de Lee & Carter

### 3.1 Théorie

Comme nous avons pu le constater, la construction de tables de mortalité prospectives est indispensable pour pouvoir tarifer des produits de rentes de façon adéquate. Toutefois, la projection de la mortalité future requiert l'analyse et l'extrapolation de nombreuses données, et il serait illusoire de vouloir procéder à cela sans commencer par réduire la dimensionnalité de ce problème.

Une approche bien connue en sciences actuarielles consisterait à vouloir ajuster un modèle paramétrique sur les données brutes, et ce pour chaque année, afin de réduire le problème à l'ajustement d'un nombre restreint de paramètres. Une fois chose faite, il conviendrait de modéliser l'évolution au cours du temps de ces paramètres afin de pouvoir extrapoler la mortalité observée.

Le problème essentiel de cette méthode consiste évidemment en la corrélation forte entre les paramètres, ceux-ci étant estimés à partir des mêmes données. Cette méthode est notamment utilisée par le modèle bien connu de *Makeham*, ou encore celui de *Heligman-Pollard*. Toutefois, au vu des enjeux découlant de la construction des tables prospectives (pricing des produits d'assurance vie tels que les rentes, et par là constitution de réserves suffisantes pour faire face aux engagements futurs de la compagnie d'assurance), une modélisation univariée apparaît donc peu pertinente.

Une modélisation multivariée des séries temporelles s'impose dès lors pour tenter de répondre à notre problème (à savoir la projection de la mortalité future), tant à cause du problème de corrélation entre les paramètres, qu'à cause du fait que la spécification rigoureuse du modèle paramétrique pourrait poser de graves problèmes pour l'assureur si ce modèle ne s'avérait pas juste.

A cette fin, les démographes LEE & CARTER [27] sont à la base d'un modèle devenu depuis lors une référence tant il semble reproduire assez fidèlement la mortalité<sup>1</sup>. Ce modèle consiste à décomposer les taux instantanés de mortalités (après passage au logarithme) en deux composantes<sup>2</sup>,

---

1. Voir à ce propos les *back-testing* effectués par les auteurs du modèle dans leur article de 1992. Notons toutefois que pour certaines tranches d'âge ce modèle ne semble pas bien fonctionner, mais cette observation n'est valable qu'à des tranches d'âges fort basses (essentiellement entre 0 et 24 ans), tranches qui ne nous concernent que fort peu dans notre étude.

2. Nous verrons dans la section suivante que la version initialement proposée par Lee & Carter se base en fait sur les taux centraux de mortalité  $m_{a,t}$ , mais qu'il est préférable de travailler avec les taux instantanés de mortalité  $\mu_{a,t}$ .

l'une reflétant l'effet de l'âge, et l'autre l'effet de tendance, et ensuite d'extrapoler la composante relative au temps et de l'appliquer sur le facteur dépendant de l'âge pour obtenir les taux futurs de mortalité.

Notons que, si ce modèle semble efficace pour reproduire la mortalité observée, il ne prend absolument pas en compte les changements structurels importants qui pourraient se produire. Remarquons que dans une optique purement prudentielle, ceci n'est toutefois pas un soucis dans le cadre de produits de rente, étant donné qu'un choc dans la mortalité (épidémie ou autre) ne ferait qu'avantager l'assureur, et n'impacterait donc pas sa solvabilité. Il serait toutefois intéressant de pouvoir tenir compte de ces possibilités dans une optique plus commerciale, afin de pouvoir proposer le produit au tarif le plus avantageux possible, ou encore si l'assureur tentait de mettre au point une solution de *hedging* entre produits d'assurance vie classiques et rentes (tel que décrit dans la section 2.2.2), mais l'analyse de ces chocs de mortalité constitue un sujet de recherche à part entière, et ne sera donc pas évoqué dans le présent travail.

### 3.2 Modélisation stochastique des durées de vie

Le modèle initial proposé par LEE & CARTER [27] en 1992 se base en fait sur les taux de mortalité  $m_{a,t}$  pour l'âge  $a$  au temps  $t$ . Nous considérerons dans la suite de ce travail une version modifiée de ce modèle, préférant se baser sur les taux instantanés de mortalité  $\mu_{a,t}$ . En effet, les taux  $m_{a,t}$  présentent le désavantage majeur de ne pas être bornés (ces taux sont positifs, mais peuvent toutefois excéder 1 dans le cas de populations fort âgées, l'exposition au risque pouvant y être inférieure au nombre de décès par unité de temps). Dans la suite de ce travail, nous ferons référence au modèle modifié dans ce cas sous le nom de modèle de Lee & Carter.

D'un point de vue mathématique, le modèle de Lee & Carter (modifié) décompose donc l'estimation brute des taux instantanés de mortalité  $\hat{\mu}_a(t)$  de  $\mu_a(t)$  sur l'échelle logarithmique. Pour rappel, les taux instantanés de mortalité se basent sur les taux  $m_{a,t}$  de mortalité, eux mêmes définis par le rapport entre le nombre de décès et l'exposition au risque moyenne

$${}_t m_a = \frac{{}_t d_a}{{}_t e t r_a}$$

Les taux instantanés de mortalité se calculent donc de telle manière que

$$\begin{aligned} \mu_{a+t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}[t \leq T_a \leq t + \Delta t \mid T_a > t]}{\Delta t} \\ &= \frac{1}{{}_t p_a} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}[T_a \leq t + \Delta t] - \mathbb{P}[T_a \leq t]}{\Delta t} \\ &= \frac{1}{{}_t p_a} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}_{t+\Delta t} q_a - {}_t q_a}{\Delta t} \\ &= \frac{1}{{}_t p_a} \frac{\partial}{{\partial t}} {}_t q_a \\ &= -\frac{1}{{}_t p_a} \frac{\partial}{{\partial t}} {}_t p_a \\ &= -\frac{\partial}{{\partial t}} \ln {}_t p_a \end{aligned}$$

ce qui nous mène à l'interprétation des  $\mu_{a,t}$  en fonction des taux de mortalité  $m_{a,t}$  par la relation

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta t m_a = \mu_a$$

Dans la suite de ce travail, nous supposons les taux instantanés de mortalité constants par morceaux, c'est-à-dire  $\mu_{x+t} = \mu_x$  pour  $0 \leq t \leq 1$  et  $x \in \mathbb{N}$ . Notons que l'ensemble des symboles utilisés fait référence aux usages courants en sciences actuarielles, dont quelques notions sont rappelées au besoin en annexe.

### 3.3 Modèle de Lee & Carter

En se basant sur ces définitions, nous pouvons définir le modèle de Lee & Carter de la façon suivante :

$$\ln \hat{\mu}_a(t) = \alpha_a + \beta_a \kappa_t + \varepsilon_{at}$$

en supposant les  $\varepsilon_{at}$  centrées, indépendantes, et de même variance  $\sigma^2$ . Notons d'emblée que ces  $\varepsilon_{at}$  ne doivent présenter aucune structure particulière. En effet, le cas échéant, cela signifierait que le modèle ne rend pas compte d'un événement, et ne serait donc pas optimal. Notons également que ce terme d'erreur représentant les influences historiques pour certains âges (non pris en compte dans le modèle donc) ne devrait guère différer étant donné qu'il représente les déviations des logarithmes des taux.

Ce modèle nous permet donc de décomposer l'évolution de la mortalité (sur l'échelle logarithmique, et au terme d'erreur près) en une composante reflétant l'effet de l'âge  $a$ , et en y ajoutant le produit d'un paramètre temporel  $t$  (représentant l'évolution de la mortalité) et d'un paramètre décrivant les écarts des taux instantanés de mortalité à l'âge  $a$  par rapport à leur "moyenne". Ainsi, :

- $\alpha_a$  : représente, sur l'échelle logarithmique, les taux instantanés de mortalité moyens aux différents âges, et représente donc la forme générale du profil de la mortalité spécifique par âge
- $\beta_a$  : représente les écarts des taux instantanés de mortalité par rapport au comportement moyen ( $\alpha_a$ ), et ce, également pour les différents âges. Combiné avec les  $\kappa_t$ , il représente le facteur d'amélioration des taux de mortalité, donc les changements de vitesse de la décroissance des taux, étant donné que

$$\frac{\partial \ln(\mu_{a,t})}{\partial t} = \beta_a \frac{\partial \kappa_t}{\partial t}$$

- $\kappa_t$  : et enfin ce facteur, indicé par le temps, permet de rendre compte de l'évolution de la mortalité dans le modèle de Lee & Carter. Notons que si  $\kappa_t$  est linéaire avec le temps, la mortalité à chaque âge change donc à son propre taux exponentiel constant, et étant donné que  $\kappa_t$  tend vers  $-\infty$  avec le temps, le taux de mortalité à chaque âge tend donc vers 0 (à une vitesse toutefois différente). Ceci est également un avantage de ce modèle quant à la projection des taux futurs, des taux négatifs ne pouvant résulter de celui-ci.

Pour l'estimation des paramètres, ce modèle propose de passer par la décomposition en valeurs singulières de la matrice des taux de mortalité, indexés d'une part par l'âge, et d'autre part par le temps calendaire. Cette matrice sera donc approximée au rang 1 par un produit de deux vecteurs propres traduisant l'effet de l'âge et l'effet du temps. Il conviendra ensuite d'extrapoler dans le futur le vecteur décrivant l'évolution de la mortalité au cours du temps à l'aide d'un modèle ARIMA pour en déduire des tables de mortalité prospectives fiables, à condition bien évidemment que l'ensemble des paramètres aient été correctement établis. Notons que, comme précisé dans l'ouvrage de DELWARDE & DENUIT [10], « *il est bon de noter d'emblée que la méthode de Lee*

«*Carte* possède les avantages et les inconvénients de l'objectivité : elle n'incorpore pas d'avis d'expert sur l'évolution présumée de la mortalité, sur les progrès de la médecine, l'apparition de nouvelles maladies ou encore l'évolution du style de vie ».

Cette méthode ainsi définie permet donc de réduire le problème de la projection de la mortalité future à l'étude d'une seule série chronologique univariée, à savoir les  $\kappa_t$  avec  $t = \{1, 2, \dots, n\}$ .

Définissons à présent ces paramètres sur le plan mathématique. En effet, nous pouvons constater que, présenté de la sorte, le modèle n'est pas identifiable. Par identifiable, nous entendons le fait qu'il n'est pas possible de trouver deux jeux de paramètres distincts produisant le même résultat. Or, dans l'état actuel, si les vecteurs  $\alpha_a$ ,  $\beta_a$  et  $\kappa_t$  sont solutions, alors pour tout scalaire  $c$ ,  $\alpha_a - \beta_a c$ ,  $\beta_a$  et  $\kappa_t + c$  est aussi solution, tout comme  $\alpha_a$ ,  $\beta_a c$  et  $\kappa_t/c$ . Ceci vient du terme bilinéaire. Il est donc nécessaire de fixer des contraintes sur les paramètres pour rendre le modèle identifiable. Pour ce faire, Lee et Carter proposent de fixer les contraintes suivantes :

$$\sum_{a=a_{min}}^{a_{max}} \beta_a = 1 \quad (3.1)$$

$$\sum_{t=t_{min}}^{t_{max}} \kappa_t = 0 \quad (3.2)$$

Notons au passage que le choix de ces contraintes permet de justifier l'interprétation faite précédemment des  $\alpha_a$ . En effet, en notant  $\mathcal{N}_t = t_{max} - t_{min} + 1$ , nous obtenons, grâce à ces contraintes,

$$\prod_{t=t_{min}}^{t_{max}} \mu_a(t) = \exp \left( \alpha_a \mathcal{N}_t + \beta_a \sum_{t=t_{min}}^{t_{max}} \kappa_t \right) = \exp(\alpha_a \mathcal{N}_t)$$

de sorte que  $\alpha_a$  apparaît bien comme la tendance moyenne (sur l'échelle logarithmique) des taux instantanés de mortalité, étant donné que

$$\alpha_a = \frac{1}{\mathcal{N}_t} \sum_{t=t_{min}}^{t_{max}} \ln \mu_a(t)$$

### 3.4 Estimation des paramètres

Pour estimer les différents paramètres du modèle de Lee & Carter, nous allons minimiser la fonction objectif  $\mathcal{O}$  par moindres carrés (en annulant les dérivées partielles de la somme des écarts relatifs au carré). Cette fonction objectif tente de reproduire la matrice des taux instantanés de décès observés historiquement. Ainsi, la fonction à minimiser s'exprime de la façon suivante,

$$\mathcal{O}_{LS}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\kappa}) = \arg \min_{\alpha, \beta, \kappa} \sum_{a=a_{min}}^{a_{max}} \sum_{t=t_{min}}^{t_{max}} (\ln \hat{\mu}_a(t) - \alpha_a - \beta_a \kappa_t)^2 \quad (3.3)$$

Notons que lors de la projection de la mortalité, et notamment dans le calcul de l'intervalle de confiance, nous ne prêterons que peu d'attention aux erreurs d'estimation possibles sur les paramètres en dehors de celles découlant de l'estimation de l'indice de mortalité  $\kappa_t$ . En effet, dans leur article de 1992, Lee & Carter démontrent que la plupart de la variance de la mortalité future est contenue dans la variance de ce paramètre<sup>3</sup>.

3. Voir à ce propos l'annexe B de LEE & CARTER [27].

### 3.4.1 Estimation de $\alpha_a$

Pour l'estimation de  $\alpha$ , dérivons la fonction objectif en ce paramètre. De par les contraintes 3.1 et 3.2, ceci nous donne :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_a} \mathcal{O} = -2 \sum_{t=t_{min}}^{t_{max}} (\ln \hat{\mu}_a(t) - \alpha_a - \beta_a \kappa_t) = 0 \quad (3.4)$$

Partant de cette expression, il est aisé de voir que  $\exp(\alpha_a)$  représente bien le niveau moyen de la mortalité à l'âge  $a$ . Si l'on applique ce raisonnement sur les données du Bureau Fédéral du Plan, recensant les  $q(x)$  observés par âge entre 1948 et 2006 pour la population générale de sexe masculin, ceci nous donne le résultat suivant :

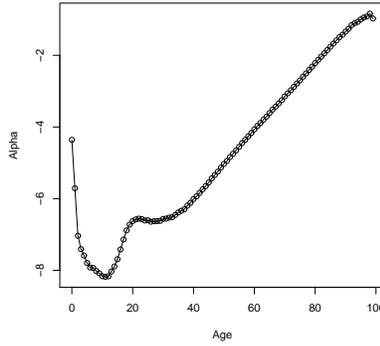


FIGURE 3.1 –  $\hat{\alpha}_a$  estimés sur base des données du BFP

### 3.4.2 Estimation de $\beta_a$ et $\kappa_t$

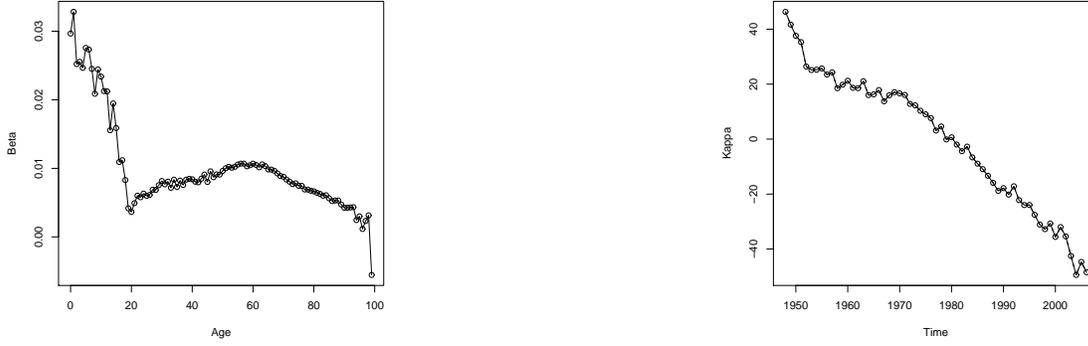
Pour l'estimation des paramètres  $\beta_a$  et  $\kappa_t$ , il s'agit de passer par la méthode de décomposition en valeurs singulières de la matrice  $\mathbf{Z}$ , de dimension  $\mathcal{N}_a \times \mathcal{N}_t$ , dont les composantes sont les  $\ln \hat{\mu}_a(t)$  centrés par rapport à leur moyenne temporelle, c'est-à-dire centrés par rapport à  $\hat{\alpha}_a$ . On tente ensuite d'approximer cette matrice  $\mathbf{Z}$  par le produit de deux matrices :  $\mathbf{Z} \approx \hat{\beta} \hat{\kappa}'$ , ces deux matrices représentant respectivement les  $(\hat{\beta}_{a_{min}}, \dots, \hat{\beta}_{a_{max}})$  et les  $(\hat{\kappa}_{t_{min}}, \dots, \hat{\kappa}_{t_{max}})$ . On tente donc d'approximer cette matrice  $\mathbf{Z}$  de manière optimale au sens des moindres carrés, c'est-à-dire en minimisant

$$\sum_{a=a_{min}}^{a_{max}} \sum_{t=t_{min}}^{t_{max}} (z_{a-a_{min}+1, t-t_{min}+1} - \beta_a \kappa_t)^2$$

Ce problème se résoud alors par décomposition de  $\mathbf{Z}$  en valeurs singulières<sup>4</sup>,  $\det(\mathbf{Z}^T \mathbf{Z} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ , d'où l'on déduit

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} \times \mathbf{u}_1 = \lambda_1 \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{Z} \mathbf{Z}^T \times \mathbf{v}_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1 \end{cases}$$

4. Notons que cette décomposition en valeur singulière ne fonctionne que pour des tableaux de données où l'âge maximum est constant sur la période et dépourvus de valeur manquante. Nous verrons par la suite comment remplir ces conditions.

FIGURE 3.2 –  $\hat{\beta}_a$  et  $\hat{\kappa}_a$  estimés sur base des données du BFP

et on minimise ensuite

$$\min \sum_{x,t} (\mathbf{z}_{x,t} - \mathbf{u}\mathbf{v})^2$$

De la sorte, en notant  $\mathbf{u}_i$  et  $\mathbf{v}_i$  les vecteurs propres de la  $i$ -ème valeur singulière de  $\mathbf{Z}$ , nous obtenons la solution à notre problème :

$$\hat{\beta} = \frac{\mathbf{v}_1}{\sum_j v_{1j}}$$

$$\hat{\kappa} = \sqrt{\lambda_1} \left( \sum_j v_{1j} \right) \mathbf{u}_1$$

A nouveau, si l'on effectue ces calculs sur les données fournies par le Bureau Fédéral du Plan, nous obtenons les résultats exposés à la figure (3.2).

### 3.4.3 Réajustement des $\hat{\kappa}_t$

Afin de reproduire les nombres observés de décès aux différentes périodes, il convient de procéder au réajustement des  $\hat{\kappa}_t$ <sup>5</sup>. Ceci va permettre de s'assurer que le modèle calibré sur la période retenue reproduira bien le nombre total de décès observés dans le passé au niveau de la population générale<sup>6</sup> ainsi que la distribution de la population par âge. Cette technique permet également de prendre en compte les périodes pour lesquelles la distribution par âge de la population et le nombre de décès total sont connus, mais pas les taux de mortalité par âge. L'année de base pour les prédictions pourra alors être la dernière année pour laquelle le nombre total de décès est connu (sans devoir attendre la publication des taux de mortalité par âge).

Pour ce faire, Lee & Carter proposent d'introduire comme contrainte, en prenant les  $\hat{\alpha}_a$  et  $\hat{\beta}_a$  obtenus précédemment comme donnés, et en considérant  $er_{at}$  l'exposition au risque, c'est-à-dire la population d'âge  $a$  l'année  $t$ ,

$$\sum_{a=a_{min}}^{a_{max}} d_{at} = \sum_{a=a_{min}}^{a_{max}} er_{at} \exp(\hat{\alpha}_a + \hat{\beta}_a \hat{\kappa}_t) \quad (3.5)$$

5. Notons que WILMOTH a développé en 1993 une technique d'estimation permettant, grâce à une pondération de la matrice de décomposition singulière, d'éviter cette étape de réestimation des  $\hat{\kappa}_t$ .

6. En effet étant donné que les estimations sont faites sur base des logarithmes des taux de mortalité, une légère erreur à ce niveau pourrait avoir de lourdes conséquences sur les taux de mortalité.

Les nouveaux estimateurs  $\hat{\kappa}_t$  sont donc obtenus grâce à

$$\sum_{a=a_{min}}^{a_{max}} \left[ er_{at} \exp(\hat{\alpha}_a) \exp(\hat{\beta}_a \hat{\kappa}_t) - d_{at} \right] = 0$$

qui peut se résoudre par une méthode itérative de type Newton-Raphson dans le cas où les  $\hat{\beta}_a$  sont de même signe, ce qui est presque toujours le cas<sup>7</sup>, cette condition garantissant alors l'unicité de la racine des fonctions à estimer.

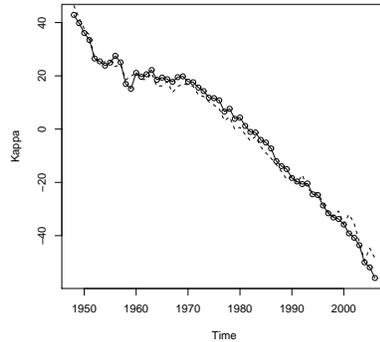


FIGURE 3.3 –  $\hat{\kappa}_a$  réajustés sur base des données du BFP

Notons toutefois qu'à présent, les nouveaux estimateurs  $\hat{\kappa}_t$  ne respectent plus la contrainte (3.2), et qu'il faut donc procéder à une dernière transformation afin que les taux instantanés de mortalité projetés restent indépendants de la transformation précédemment effectuée, de telle sorte que

$$\begin{aligned} \hat{\kappa}_t &\leftarrow \hat{\kappa}_t - \bar{\kappa} \\ \hat{\alpha}_a &\leftarrow \hat{\alpha}_a + \hat{\beta}_a \bar{\kappa} \end{aligned}$$

où  $\bar{\kappa}$  se définit comme la moyenne des  $\hat{\kappa}_t$ .

### 3.5 Sélection de la période optimale d'ajustement des $\kappa_t$

Pour procéder à l'ajustement des  $\kappa_t$  comme décrit dans la section précédente, nous cherchons à considérer la période optimale, et ce afin d'obtenir les  $\hat{\kappa}_t$  les plus précis possible avant de les projeter dans le futur.

Pour ce faire, nous allons nous baser sur la valeur statistique  $R^2$  (donnant la part de variance expliquée par le modèle). Plus précisément nous allons déterminer la période d'observation optimale en considérant l'année  $t_{min}$  telle que

$$t_{min}^* = \arg \max_u R_{u,t_{max}}^2$$

7. Lee & Carter souligne à ce propos qu'il est possible, en principe, que les  $\hat{\beta}_a$  soient de signe négatif, indiquant que la mortalité pour cet(ces) âge(s)  $a$  tend à croître. En pratique toutefois, cela ne semble jamais être le cas sur le long terme.

où  $R_{u,t_{max}}^2$  sera déduit de la régression linéaire sur les paramètres  $\{\hat{\kappa}_u, \dots, \hat{\kappa}_{t_{max}}\}$ . Le résultat exposé à la figure (3.4) nous montre que l'année de départ optimale à considérer est 1974 pour la population belge, ce qui peut également se remarquer de manière plus intuitive que mathématique à la figure (2.2).

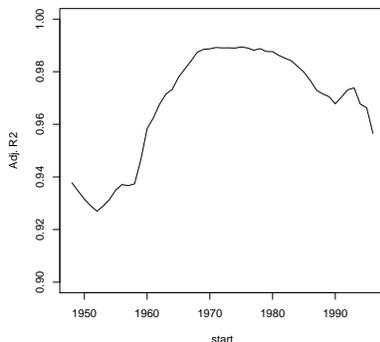


FIGURE 3.4 – Estimation de la période optimale d'ajustement des  $\hat{\kappa}_t$  sur base des données du BFP

### 3.6 Complétion des tables officielles

Comme nous l'avons souligné dans la note de bas de page de la section 3.4.2, pour pouvoir obtenir la décomposition en valeur singulière nécessaire pour estimer les paramètres  $\hat{\beta}_a$  et  $\hat{\kappa}_t$ , il faut que la matrice des quotients de mortalité soit complète, et que l'âge de fermeture de la table soit constant. Pour ce faire, nous allons nous baser sur la méthode proposée par DENUIT & GODERNIAUX [14]<sup>8</sup> qui, sans vouloir faire un rappel exhaustif de cette méthode, se base sur un modèle de régression log-quadratique contraint ajusté pour chaque année  $t$  de la forme

$$\ln \hat{q}_a(t) = \alpha_t + \beta_t a + \theta_t a^2 + \varepsilon_{at}$$

avec  $\varepsilon_{at}$  iid et suivant une loi  $\mathcal{N}(0, \hat{\sigma}^2)$ . Ce modèle est ensuite appliqué aux  $\hat{q}_a$  lissés pour les âges supérieurs à  $a_0^*$ , l'âge de raccord déterminé en maximisant le coefficient d'ajustement sur les âges 75 à 89. Deux contraintes sont ensuite imposées au modèle, à savoir

- une contrainte de fermeture de la table,  $q_{130} = 1$
- une contrainte d'inflexion,  $q'_{130} = 0$ , garantissant la décélération de la mortalité aux grands âges

Ceci nous amène donc à considérer

$$\ln \hat{q}_a = \theta(130 - a)^2 + \varepsilon_a$$

On remplace alors les  $q_a$  lissés par ceux obtenus grâce à ce modèle de fermeture, et ce, pour tout  $a \geq a_0^*$ . Graphiquement, nous obtenons donc l'estimation de nos paramètres du modèle de Lee & Carter sur base de ces données complétées à la figure (3.5).

8. Pour plus de détails, voir la section 2 du chapitre 4 de DELWARDE & DENUIT [10].

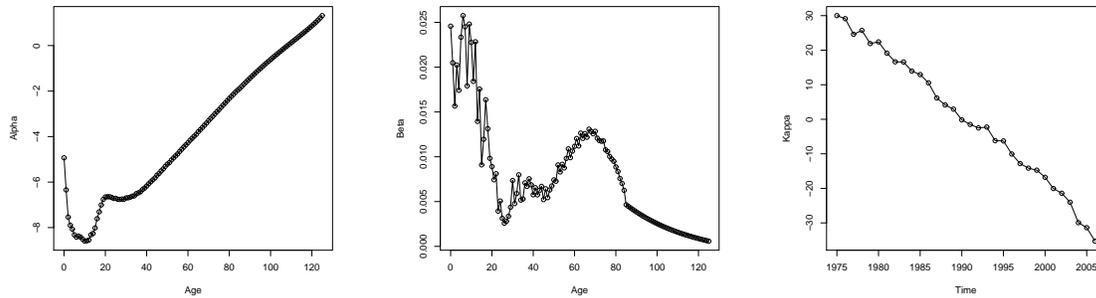


FIGURE 3.5 – Paramètres du modèle de Lee &amp; Carter sur base des données du BFP complétées

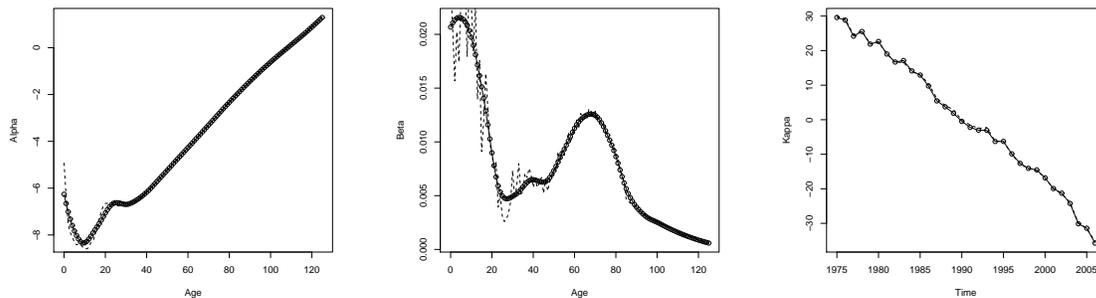


FIGURE 3.6 – Paramètres lissés du modèle de Lee &amp; Carter sur base des données du BFP

### 3.7 Lissage des données

Afin d'enlever les variations de la mortalité dues à des données suspectes, manquantes ou au peu de données disponibles, et qui pourraient inutilement perturber la calibration du modèle, il convient de lisser les résultats obtenus, surtout aux grands âges. Comme expliqué dans la note technique de REACFIN [33], une technique de régression locale est utilisée à cette fin. Avec deux variables explicatives, l'âge et le temps calendrier, le modèle est de la forme

$$\ln \frac{\hat{q}_a(t)}{\hat{p}_a(t)} = f(a, t) + \varepsilon_{at}$$

où la fonction inconnue  $f$  est alors estimée sur base des données. Une approximation quadratique locale est alors utilisée telle que

$$f(a, t) \approx \beta_0(a_0, t_0) + \beta_1(a_0, t_0)a + \beta_2(a_0, t_0)t + \beta_3(a_0, t_0)a^2 + \beta_4(a_0, t_0)at + \beta_5(a_0, t_0)t^2$$

Les coefficients  $\beta_i$  sont estimés par moindres carrés pondérés, et la fonction  $\hat{f}(\cdot, \cdot)$  est alors déterminée<sup>9</sup>. Le lissage des trois paramètres nous conduit donc aux résultats graphiques (3.6).

### 3.8 Analyse des résidus

Passons à présent rapidement par l'analyse des résidus du modèle. Nous pouvons apercevoir sur le graphique (3.7) (représentant  $(a, t) \mapsto r_{a,t}$ ) que ceux-ci ne présentent aucune structure par-

9. Pour de plus amples détails, le lecteur est invité à consulter la note technique fournie par REACFIN sur son site internet [www.reactfin.com](http://www.reactfin.com) dans la section *Documents*.

ticulière, ce qui garantit donc que le modèle de Lee & Carter décrit bien la mortalité observée au niveau de la population belge. Notons toutefois que la structure observée au-delà de 85 ans est dû à la fermeture des tables, et que les résidus sont plus importants autour de la "*bosse accident*", mais étant donné que nous nous intéressons à la population rentière, ceci ne pose guère de problème dans notre cas. En effet, pour la simulation par bootstrapping (voir la section 3.11) des probabilités de survies futures et des espérances de vie futures, nous n'avons dès lors tenu compte que des résidus pour les âges supérieurs à 60 ans afin que le phénomène observé au niveau de la "*bosse accident*" ne viennent inutilement perturber les estimations futures (étant donné que la population d'intérêt de cette recherche est la population rentière).

De plus, nous pouvons également remarquer qu'aucun effet de cohorte n'apparaît sur les données de la population belge, ce qui n'est pas le cas d'autres pays (par exemple le Royaume-Uni). Dans ce cas, il conviendrait alors d'utiliser un modèle prenant en compte cet effet de cohorte par l'ajout d'un paramètre bilinéaire de la forme  $\beta_a^{(0)}\psi_{t-a}$ , où le  $\psi$  est indicé par les cohortes, et multiplié par un terme dépendant de l'âge pour rendre compte de la mortalité spécifique par âge de chaque cohorte. Le modèle devient dans ce cas<sup>10</sup> :

$$\ln \hat{\mu}_a(t) = \alpha_a + \beta_a^{(0)}\psi_{t-a} + \beta_a^{(1)}\kappa_t + \varepsilon_{at}$$

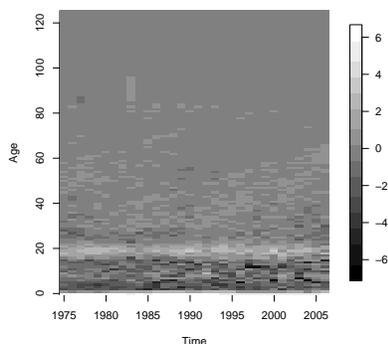


FIGURE 3.7 – Analyse des résidus du modèle

### 3.9 Projection des $\hat{\kappa}_t$

Après tout ce cheminement, nous arrivons donc enfin à la projection du facteur rendant compte de l'évolution temporelle des durées de vie. Pour ce faire, nous considérons donc les  $\hat{\kappa}_t$  comme une série temporelle, modélisée par un processus ARIMA (pour AutoRegressive Integrated Moving Average). Nous tentons donc, par cette approche, d'extrapoler dans le futur les tendances observées dans le passé. Il n'est donc nullement tenu compte de progrès quelconque en matière médicale ou autre concernant la durée de vie des individus.

Plus précisément, nous utiliserons la méthode de BOX & JENKINS pour ajuster notre série

---

10. Le lecteur intéressé par l'inclusion de l'effet de cohorte dans le modèle de Lee & Carter pourra utilement se reporter à RENSHAW & HABERMAN [34].

temporelle. La méthodologie utilisée<sup>11</sup> est largement détaillée dans DELWARDE & DENUIT [10], et nous ne ferons qu'exposer les résultats de la méthodologie utilisée, le lecteur pouvant au besoin se référer à l'ouvrage précité. Ainsi, le modèle utilisé est de type ARIMA (0,1,0), qui est une marche aléatoire avec tendance. Ce modèle s'écrit

$$\hat{\kappa}_t = \hat{\kappa}_{t-1} + \theta + \zeta_t \quad (3.6)$$

$\theta$  représentant le terme de tendance, et  $\zeta \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\zeta^2)$  étant les erreurs iid. De ce fait, les valeurs de  $\hat{\mu}_a$  sont donc modélisées par un processus stochastique de paramètre  $\kappa$ . Si l'on ignore le terme d'erreur du modèle de Lee & Carter (les  $\varepsilon_{at}$ , qui devraient être peu importants), les variations dans les valeurs de  $\ln(\hat{\mu}_a)$  sont donc parfaitement corrélées entre elles, étant donné qu'elles sont toutes fonction du même paramètre de variabilité temporelle  $\kappa$ . Cette caractéristique nous permettra donc de pouvoir calculer les bornes des tables prospectives en se limitant au calcul des bornes sur les projections des  $\kappa$ <sup>12</sup>.

L'estimation des paramètres du modèle ARIMA par maximum de vraisemblance se déduit alors de

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= \frac{\hat{\kappa}_{t_{max}} - \hat{\kappa}_{t_{min}}}{\mathcal{N}_t - 1} \\ \hat{\sigma}_\zeta^2 &= \frac{1}{\mathcal{N} - 1} \sum_{t=t_{min}}^{t_{max}-1} (\hat{\kappa}_{t+1} - \hat{\kappa}_t - \hat{\theta})^2 \end{aligned}$$

Partant de là, nous pouvons donc estimer des  $\hat{\kappa}_{t_{max}+\tau}$  avec  $\tau = \{1, 2, \dots, n\}$  grâce à la formule

$$\hat{\kappa}_{t_{max}+\tau} = \hat{\kappa}_{t_{max}} + \tau\hat{\theta} + \sum_{u=1}^{\tau} \zeta_{t_{max}+u}$$

que nous pouvons réécrire

$$\hat{\kappa}_{t_{max}+\tau} = \hat{\kappa}_{t_{max}} + \tau\hat{\theta} + \sqrt{\tau}\zeta_{t_{max}}$$

grâce à l'hypothèse d'indépendance et d'identique distribution des  $\zeta_t$ . Notons au passage que l'écart-type des prévisions augmente avec l'horizon de projection (à un facteur racine carrée près), ce qui se comprend intuitivement.

De ce fait, nous pouvons donc définir les deux premiers moments de notre série temporelle,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\hat{\kappa}_{t_{max}+\tau} \mid \hat{\kappa}_{t_{min}}, \dots, \hat{\kappa}_{t_{max}}] &= \hat{\kappa}_{t_{max}} + \tau\hat{\theta} \\ \text{Var} [\hat{\kappa}_{t_{max}+\tau} \mid \hat{\kappa}_{t_{min}}, \dots, \hat{\kappa}_{t_{max}}] &= \tau\hat{\sigma}_\zeta^2 \end{aligned}$$

ce qui nous permettra de pouvoir faire des simulations de ces taux futurs. En effet, nous pouvons intégrer les  $\hat{\kappa}$  projetés directement dans la formule des  $\hat{\mu}_a$  de sorte que nous déduisons (en se

11. Notamment la justification de l'utilisation de ce modèle avec ces paramètres pour modéliser notre série temporelle.

12. Cette méthode est utilisée dans de nombreuses applications du modèle de Lee & Carter, en ignorant donc les autres sources de variabilité du modèle (notamment sur les autres paramètres), voir à ce propos la critique de LEE [26].

basant sur les moments de la série temporelle)

$$\hat{\mu}_a(t_{max} + \tau) = \exp(\hat{\alpha}_a + \hat{\beta}_a \hat{\kappa}_{t_{max} + \tau}) \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} &= \exp(\hat{\alpha}_a + \hat{\beta}_a (\hat{\kappa}_{t_{max}} + \tau \hat{\theta})) \\ &= \exp(\hat{\alpha}_a + \hat{\beta}_a \hat{\kappa}_{t_{max}}) \exp(\hat{\beta}_a (\hat{\kappa}_{t_{max} + \tau} - \hat{\kappa}_{t_{max}})) \\ &= \hat{\mu}_a(t_{max}) \exp(\hat{\beta}_a (\hat{\kappa}_{t_{max} + \tau} - \hat{\kappa}_{t_{max}})) \\ &= \hat{\mu}_a(t_{max}) \exp(\hat{\beta}_a \tau \hat{\theta}) \end{aligned} \quad (3.8)$$

ce qui nous sera utile dans l'extrapolation des taux de mortalité.

### 3.10 Anti-sélection

L'anti-sélection est un phénomène couramment observé au niveau du secteur de l'assurance. Celle-ci découle d'une asymétrie d'information entre l'assureur et l'assuré (en économie, cette situation est appelée problème *principal-agent*). En effet, les deux parties étant libres de contracter, l'assuré dispose d'un avantage important en matière d'information sur sa propre situation. L'assureur n'aura quant à lui qu'une information limitée sur l'état réel de santé de l'assuré. De nombreuses études ont par exemple démontré que l'espérance de vie des rentiers était supérieure à celle de la population générale : les personnes souscrivant à ce type de produit le font donc sur base du fait qu'elles sont (ou du moins croient être) en bonne santé (le contraire n'aurait évidemment pas de sens, l'assuré préférant alors une assurance décès ou une assurance vie à durée déterminée). Il est donc très important pour l'assureur de pouvoir quantifier ce phénomène. Si ce dernier base ses primes en fonction des quotients de mortalité de la population générale, les pertes techniques s'accumuleront en proportion du nombre de contrat.

Ce phénomène d'anti-sélection est d'autant plus marqué dans notre pays, car le choix de la liquidation des pensions complémentaire en capital ou en rente n'est pas neutre fiscalement, et n'est pas avantageux pour le choix de la conversion en rente. De plus, la fiscalité en la matière est relativement complexe, ce qui ne fait également qu'accentuer le phénomène d'anti-sélection étant donné que seules les personnes en bonne santé analyseront l'opportunité d'une conversion en rente (voir à ce propos HANNES & BOGAERT [21]). Toutes ces considérations nous amènent donc à penser que la mortalité de ces assurés devrait donc être (nettement) inférieure à celle de la population générale. Analysons graphiquement l'impact de ce phénomène. Nous nous baserons sur les données HMD<sup>13</sup> pour la population générale (celles-ci ayant l'avantage de fournir également l'exposition au risque, contrairement aux données du BFP), et sur celles fournies par la CBFA concernant les assurés (tant pour les assurances individuelles que collectives).

Nous présentons donc à la figure (3.8) les (logarithmes des) quotients de mortalité pour la population générale et pour les assurés, pour l'année 2005 ainsi que l'évolution de l'espérance de vie des hommes à 65 ans pour chacun des groupes entre 1993 et 2005. Nous pouvons clairement y remarquer une différence notable au niveau de la mortalité entre les différents groupes considérés. Nous pouvons également y constater les premiers effets de la Loi sur les Pensions Complémentaires, votées en 2003, et tendant à démocratiser la rente. Ceci eut pour effet de permettre l'accès

13. Par l'intermédiaire du site [www.mortality.org](http://www.mortality.org), Human Mortality Database, un projet ayant pour but de rassembler les données concernant la mortalité des populations générales d'un ensemble de pays, dont la Belgique.

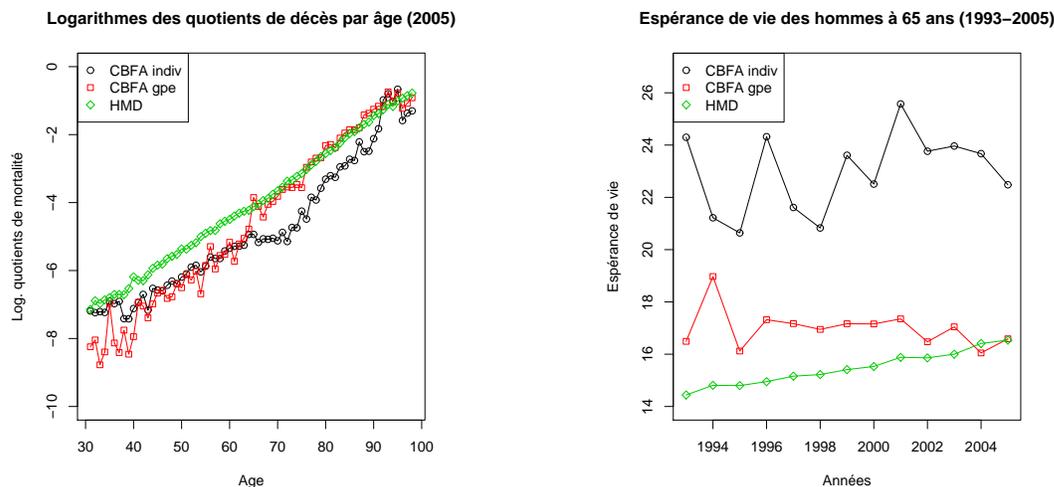


FIGURE 3.8 – Effets de l’anti-sélection sur les quotients de mortalité (gauche) et sur l’espérance de vie (à droite)

à ce type de produit à des personnes moins favorisées (principalement par des contrats d’assurance groupe), et qui a de ce fait alourdit la mortalité de la population assurée. En effet, de nombreuses études ont démontrées le lien entre les facteurs socio-économiques et les durées de vie. Pour une application actuarielle de cette constatation, voir par exemple COSSETTE & AL. [7] ou pour un exemple basé sur les données belges DELWARDE & DENUIT [11].

Notons qu’étant donné que nous effectuerons nos simulations sur base des données HMD, et que les quotients de mortalité de référence utilisés seront ceux fournis par le BFP, nous ne tiendrons toutefois pas compte de cette anti-sélection, celle-ci n’intervenant dans aucune de ces bases de données. Dans le cadre d’un produit réel, il faudrait néanmoins en tenir compte, tant dans les simulations que dans l’indice de référence. Celui-ci devrait d’ailleurs être soit un indice fourni par la CBFA (mais au vu du peu de données, de la forte hétérogénéité de celles-ci ainsi que de leur caractère assez erratique, il est toutefois difficile d’envisager de prendre ces données comme indice), soit les quotients de mortalité du BFP multipliés par un facteur tenant compte de l’anti-sélection. Pour ce faire, on pourrait avoir recours, comme l’indiquent BROUHNS & DENUIT (b) [4], à un modèle relationnel (de type logit), ces auteurs ayant mis en évidence un lien linéaire entre les logarithmes des taux instantanés de mortalité calculés sur base des données de la population générale et du secteur de l’assurance belge. Il conviendrait alors d’appliquer le même coefficient correcteur (par âge) aux simulations et à l’indice de référence. Dans la suite de ce travail donc, nous supposons que le coefficient correcteur se base sur la mortalité observée (par simulation) et de référence de la population générale, sans ajustement tenant compte de l’anti-sélection.

Terminons toutefois cette section en mentionnant qu’au vu de l’évolution des espérances de vie à 65 ans et des (logarithmes des) quotients de mortalité présentés aux graphiques (3.8), il convient de s’interroger sur la nécessité d’appliquer un tel coefficient correcteur. En effet, nous pouvons y constater que l’espérance de vie à 65 ans de la population générale tend à croître linéairement sur toute la période, rattrapant même en bout de course celle des assurés couverts par une assurance de groupe. Deux explications à un tel phénomène sont alors envisageables : soit les progrès en terme

de longévité sont plus importants pour la population générale que pour la population couverte par une assurance de groupe, ce qui est en soit peu plausible, soit nous assistons à un effet de composition : le marché de l'assurance groupe n'est en effet pas figé, et l'on constate que de plus en plus de personnes ont accès à ce type de produit (notamment dans le cadre d'assurances groupe ou d'épargne-pension). Au vu de l'évolution de la mortalité des assurés ayant souscrits à de tels produits groupe, il semblerait donc qu'il ne faille désormais plus vraiment appliquer de coefficient correcteur pour tenir compte de l'anti-sélection. Au niveau de l'assurance individuelle, même si l'anti-sélection y est encore fort marquée, celle-ci semble également diminuer, notamment depuis l'instauration de la LPC (Loi sur les Pensions Complémentaires). L'effet d'anti-sélection devrait ainsi peu à peu s'estomper, à mesure que l'Etat encourage(ra) les citoyens à épargner pour leur pension en souscrivant à de tels produits d'assurance.

### 3.11 Simulation par Bootstrapping

Afin d'illustrer nos simulations par un exemple concret et intuitif, nous cherchons donc maintenant à déterminer l'espérance de vie à 65 ans (âge typique de début de rente, correspondant à la retraite de l'assuré) des individus afin de pouvoir évaluer les prestations futures de la rente<sup>14</sup>. Rappelons que l'espérance de vie se déduit des probabilités de survie de sorte que<sup>15</sup>

$$\begin{aligned} \dot{e}_a &= \int_{t \geq 0} {}_t p_a dt \\ &= \sum_{k \geq 0} {}_k p_a \frac{p_{a+k} - 1}{\ln p_{a+k}} \end{aligned}$$

Remarquons également que, comme le soulignent DELWARDE & DENUIT [10], la prime unique pure d'une rente viagère qui serait servie continûment à l'assuré peut se voir comme l'espérance de vie de l'individu dans le cas où le taux d'intérêt  $i = 0$  (et donc le facteur d'actualisation  $v = 1$ ), étant donné que

$$\bar{a}_a = \int_{t \geq 0} {}_t p_a v^t dt$$

on retrouve donc bien  $\bar{a}_a = \dot{e}_a$  dans ce cas.

Au vu de l'importance majeure que revêt donc la prévision de ces variables, il est donc indispensable de fournir des intervalles de confiance pour leurs valeurs futures. Pour ce faire, nous allons recourir à une technique de simulation des  $\hat{\mu}_a(t)$  futurs. Il existe toutefois différentes méthodes possibles permettant de simuler de façon relativement aisée un grand nombre de tables de mortalité prospectives à partir du modèle de Lee & Carter détaillé précédemment.

#### 3.11.1 Méthodologie

Nous allons nous baser sur un bootstrapping des résidus du modèle. Deux autres méthodes pourraient être utilisées pour simuler ces tables prospectives : l'une reposant sur les techniques de simulation Monte-Carlo afin de resimuler des jeux de paramètres  $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\kappa})$ , et l'autre se basant sur un *bootstrap* paramétrique recréant des quantités  $\hat{\mu}_a^b(t)$  en simulant le terme d'erreur  $\varepsilon_{at}$  sachant

14. Notons que dans l'application (partie V), nous tiendrons compte d'une part de l'espérance de vie, mais également des probabilités de survie pour effectuer nos calculs.

15. En gardant notre hypothèse de constance des taux instantanés de décès dans l'année, c'est-à-dire  $\mu_x = \mu_{x+t} \forall t [0, 1[$ .

que celui-ci suit une distribution  $\mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$ . Toutefois, comme cela est détaillé dans la note technique sur la mortalité de la société REACFIN [33], la première de ces deux méthodes est à éviter pour des raisons de gestion du risque, étant donné que les résultats découlant de cette approche dépendent essentiellement des contraintes d'identifiabilité.

Nous nous baserons sur la première méthode évoquée, à savoir celle du *bootstrap* sur résidus, car c'est cette méthode qui fut utilisée dans l'implémentation du programme de la société REACFIN<sup>16</sup>, et celle-ci fournit de bons résultats quant aux quantités recherchées étant donné que ces résidus sont indépendants et identiquement distribués (aucune tendance ne s'en dégage, sinon le modèle ne serait pas correctement spécifié, comme nous l'avons évoqué dans la section 3.8).

Pour ce faire, nous considérons donc un âge de début et de fin pour le *bootstrap* des résidus, respectivement  $a_{min}$  et  $a_{max}$ , ainsi qu'une période de temps, cette période allant de  $t_{min}$  à  $t_{max}$ . Nous considérons  $a_{min} = 60$ <sup>17</sup>, et pour  $t_{min}$  nous prenons l'année 1974 comme année de départ, étant donné que les  $\hat{\kappa}_t$  semblent relativement linéaires depuis les années 1970. L'idée est ensuite de mélanger (avec remise) les résidus obtenus par le modèle de Lee & Carter afin de générer  $B$  répliques  $\mathbf{R}^b$  ( $b = \{1, 2, \dots, B\}$ ) de la matrice  $\mathbf{R}$  des résidus, dont les éléments standardisés (afin de vérifier les propriétés d'indépendance et d'identique distribution de ces derniers) sont définis par

$$r_{at} = \frac{\hat{\varepsilon}_a(t)}{\sqrt{\frac{1}{\mathcal{N}_a \mathcal{N}_t} \sum_{a_{min}}^{a_{max}} \sum_{t_{min}}^{t_{max}} (\hat{\varepsilon}_a(t))^2}}$$

avec  $\mathcal{N}_a = (a_{max} - a_{min})$ ,  $\mathcal{N}_t = (t_{max} - t_{min})$  et  $\hat{\varepsilon}_a(t)$  les résidus définis par  $\hat{\varepsilon}_a(t) = \ln \hat{\mu}_a(t) - (\hat{\alpha}_a + \hat{\beta}_a \hat{\kappa}_t)$ .

Ensuite, pour chaque simulation  $b$ , nous ajoutons alors les éléments  $\hat{\varepsilon}_a^b(t)$  de la matrice ainsi obtenue  $\mathbf{R}^b$  aux taux instantanés de décès estimés  $\ln \hat{\mu}_a(t) = \hat{\alpha}_a + \hat{\beta}_a \hat{\kappa}_t$ , ce qui nous donne donc de nouvelles matrices de taux de décès (ces résidus étant mélangés avec remise) desquelles nous réestimons les  $\alpha_a^b$ ,  $\beta_a^b$  et  $\kappa_t^b$ . Nous obtenons ainsi  $B$  jeux de paramètres, et nous estimons la série temporelle à partir des  $\kappa_t^b$ . Ceci nous donne alors de nouveaux jeux de paramètres ARIMA<sup>18</sup>, que nous utilisons pour générer des projections de  $\hat{\kappa}_t$ ,  $t \geq 2008$ . Nous simulons donc ainsi un certain nombre de  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$  et  $\hat{\kappa}$  à partir de ces résidus (en appliquant à nouveau les étapes détaillées dans les sections 3.3 à 3.9).

Nous calculons ensuite l'espérance de vie à 65 ans pour un certain nombre d'années avec  $t \geq 2008$  sur chacune des simulations ainsi effectuées, et déduisons ensuite l'intervalle de confiance en suivant la méthodologie proposée dans KOISSI & AL. [23] : si l'on considère l'intervalle  $(1 - 2\alpha)$ , celui-ci est donné par  $[e_a^{b(\alpha)}(t), e_a^{b(1-\alpha)}(t)]$  où  $e_a^{b(\vartheta)}(t)$  est la  $100 \times \vartheta$ -ème valeur de  $e_a^b(t)$  une fois ces derniers ordonnés par ordre croissant pour  $b = \{1, 2, \dots, B\}$ .

16. Je tiens d'ailleurs à profiter de l'occasion pour remercier très chaleureusement MM. DENUIT et MARÉCHAL pour m'avoir permis de m'inspirer du programme de la société REACFIN fourni lors de la mission de consultance chez FORTIS INSURANCE BELGIUM. concernant l'élaboration de ces tables prospectives

17. Nous avons déjà évoqué le fait que les résidus semblaient présenter une structure particulière autour de la "bosse accident", il est donc préférable de prendre ces résidus au niveau de la population d'intérêt.

18. Notons que nous ne sélectionnons pas de nouveau modèle ARIMA sur base de ces nouvelles données, mais que nous en réestimons toutefois les paramètres.

### 3.11.2 Résultats

Notons tout d'abord que nous nous basons ici sur les données statistiques fournies par HMD. Nous utiliserons ces données pour procéder à l'extrapolation de l'espérance de vie que nous recherchons. Ces données présentent l'avantage de fournir des informations fiables (à tout le moins pour la période 1920 - 2006 que nous utiliserons dès lors). Si l'on s'attarde donc au calcul de l'intervalle de confiance à 90% de l'espérance de vie à 65 ans pour les années 2009 à 2060 de la population masculine belge (sur base des données HMD), nous obtenons les résultats présentés aux graphiques (3.9) pour l'estimation des paramètres du modèle de Lee & Carter (lissés et les  $\hat{\kappa}_t$  réestimés), aux graphiques (3.10) concernant l'analyse des résidus de ce modèle, et enfin aux graphiques (3.11) concernant la simulation à proprement parlé, et les espérances de vie à 65 ans découlant de ces simulations, ces derniers graphiques (3.11) représentant respectivement :

1. l'histogramme de l'espérance de vie à 65 ans en 2009 (toujours pour la population masculine belge et sur base des données HMD), dont les quantiles à 5% et 95% sont respectivement pour 1000 et 10.000 simulations, (18.18827 ; 19.67168) et (18.24565 ; 19.59243) ;
2. le graphique de l'espérance de vie à 65 ans pour les années 2009 à 2060 avec son intervalle de confiance pour 1000 et 10.000 simulations
3. et enfin le *fan-chart* de cette même espérance de vie (les zones les plus foncées représentant les valeurs les plus probables, c'est-à-dire l'intervalle 45-55%, puis en un peu moins foncé l'intervalle 40-60% et ainsi de suite jusqu'à l'intervalle 5-95% de cette espérance de vie à 65 ans pour la population masculine belge) également pour 1000 et 10.000 simulations.

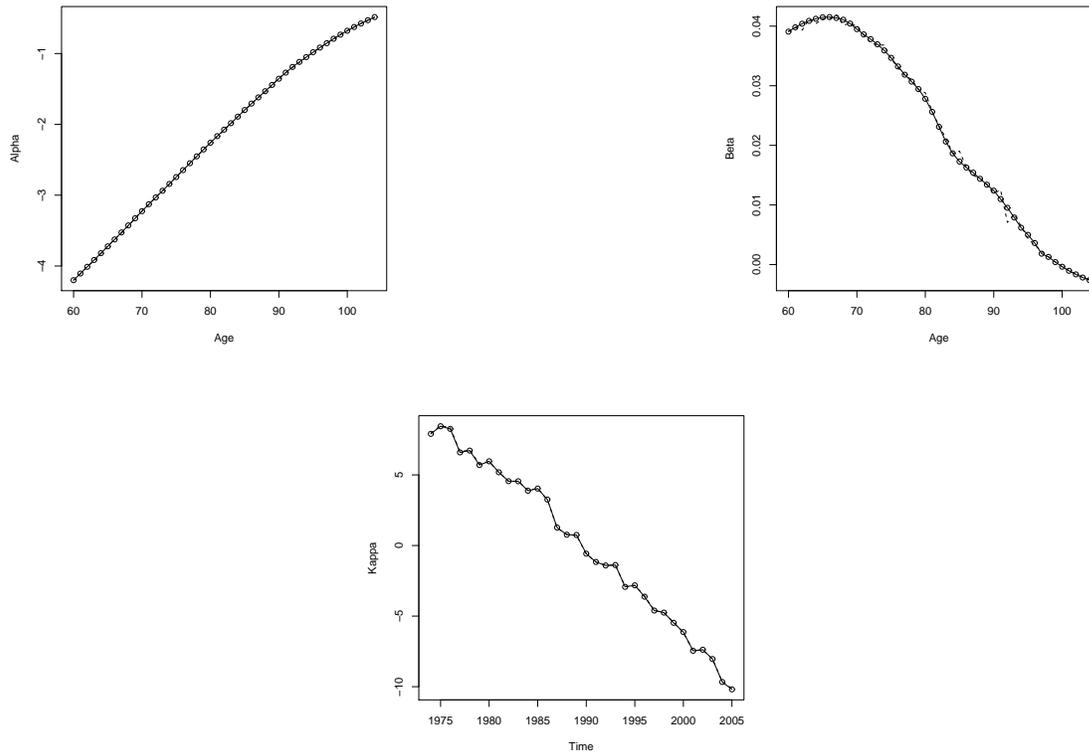


FIGURE 3.9 – Paramètres lissés du modèle (avec  $a_{min} = 60$ ,  $a_{max} = 104$ ,  $t_{min} = 1974$ ,  $t_{max} = 2008$ ) de Lee & Carter sur base des données HMD



FIGURE 3.10 – Analyse des résidus du modèle sur base des données HMD

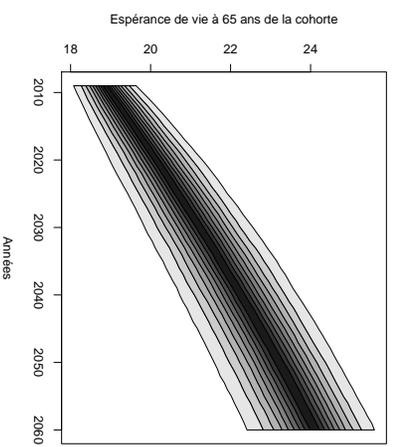
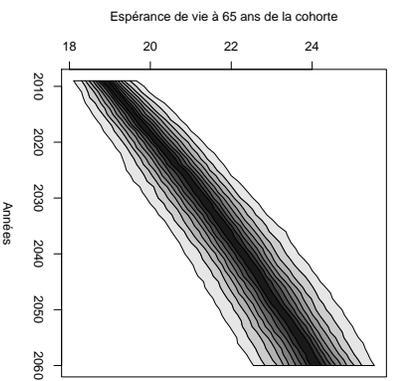
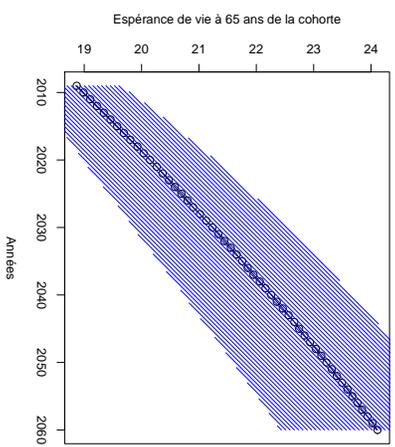
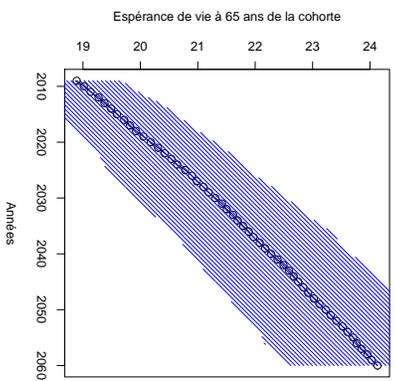
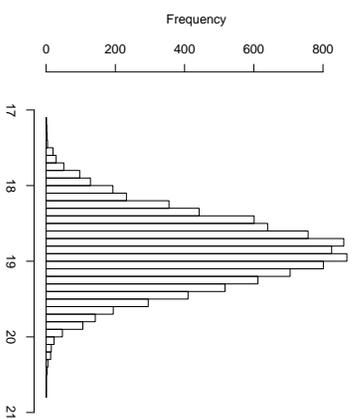
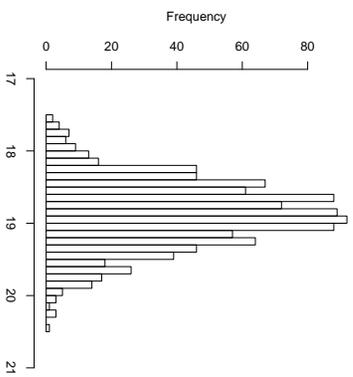


FIGURE 3.11 – Espérances de vie simulées (à l'aide de 1000 simulations par bootstrapping à gauche, et 10.000 à droite) pour les hommes belges à 65 ans sur base des données HMID

Quatrième partie

Les taux d'intérêts



# Chapitre 4

## Modèle de Vasicek

### 4.1 Pourquoi simuler les taux d'intérêts ?

Dans une rente variable, quel que soit le paramètre dont dépendent les arrérages, il est évident que les taux d'intérêts jouent un rôle fondamental. En effet, l'assureur doit pouvoir prédire le plus précisément possible ces taux futurs, et ce quel que soit le type de rente. Il peut ainsi provisionner des montants suffisants pour faire face à ses engagements futurs. Ce travail portant bien davantage sur l'aspect de la longévité que sur l'aspect financier, nous ferons des hypothèses relativement simplistes à ce niveau. Nous considérerons par exemple que l'assureur investit l'ensemble de ses primes dans des produits sans risque, ce qui ne reflète évidemment pas l'exacte réalité. Ceci nous permettra toutefois de nous faire une idée concernant les montants à provisionner, et ce en fonction du risque (ou de la partie du risque) supporté par l'assureur.

La simulation de la structure à terme des taux d'intérêts aux différents instants nous permettra donc d'une part d'évaluer le facteur correctif de taux d'intérêts, que nous détaillerons dans le chapitre suivant, mais également de pouvoir correctement actualiser les *flux* futurs aux différents pas de temps. Nous reviendrons plus en détail sur ces aspects lors de l'application pratique.

### 4.2 Méthodologie

Le choix du modèle à utiliser pour simuler les taux d'intérêt ne fut pas pour autant des plus simples. En effet, de très nombreux modèles ont été proposés dans la littérature financière, chacun ayant ses avantages et ses inconvénients. Pourquoi avoir dès lors choisi le modèle de VASICEK [37] ?

Le modèle de Vasicek est un modèle de simulation de taux d'intérêts à un seul facteur, c'est-à-dire que le risque n'est pris en compte qu'au travers d'un seul paramètre. L'idée principale sous-tendant ce modèle est qu'il existe un taux d'intérêt d'équilibre à long terme. Cette propriété, en plus d'être assez réaliste, permet d'éviter que les taux d'intérêts ne croissent indéfiniment<sup>1</sup> dans le modèle<sup>2</sup>.

---

1. Cette propriété empêche également une décroissance infinie des taux, qui serait tout aussi improbable.

2. Cette propriété est intéressante dans le cas de la simulation du cours d'une action par exemple, mais n'est certainement pas réaliste pour un taux d'intérêt.

Un modèle multi-factoriel, comme par exemple celui proposé par HEATH, JARROW & MERTON, aurait probablement apporté davantage de précision encore dans la description des mouvements de la structure à terme des taux d'intérêts, mais le principal désavantage de ces modèles est qu'ils ne sont pas markoviens, c'est-à-dire que la distribution des taux d'intérêts de la période  $t + 1$  dépend non seulement du taux en  $t$ , mais également des taux des périodes antérieures à  $t$ . Il aurait donc été nettement plus difficile d'implémenter ce type de modèle, et rappelons que ce n'est pas l'objet principal de ce mémoire. Parmi les modèles markoviens à un facteur, nous avons donc considéré le modèle de Vasicek, qui possède une résolution analytique relativement aisée. Détaillons quelque peu ce modèle.

### 4.2.1 Théorie

Commençons tout d'abord par quelques rappels. Un modèle de taux d'intérêt est une description probabiliste de l'évolution future de ces derniers. A partir de l'information disponible aujourd'hui, les taux d'intérêt futurs sont évidemment incertains : un modèle de taux d'intérêt est une caractérisation de cette incertitude.

Les modèles de taux court à un facteur contiennent deux parties : l'une spécifiant le taux moyen de changement du taux court à chaque pas de temps, le *drift*, et l'autre décrivant la volatilité instantanée de ce taux court. L'équation différentielle stochastique de ces processus de retour à la moyenne (aussi appelés processus d'*Ornstein-Uhlenbeck*) est de la forme

$$dr(t) = \mu(r, t)dt + \sigma(r, t)dW(t)$$

La partie gauche de l'équation représente le changement dans le taux court terme prévu au cours du prochain pas de temps. Le premier terme de droite,  $\mu(r, t)dt$ , est le *drift* multiplié par le pas de temps, et la seconde partie,  $\sigma(r, t)dW(t)$ , est la volatilité multiplié par l'incrément d'une variable aléatoire qui suit une loi normale, le mouvement brownien (aussi appelé *Wiener process*).

### 4.2.2 Modèle de Vasicek

Le modèle de Vasicek se caractérise donc par un processus d'*Ornstein-Uhlenbeck*, et son équation différentielle stochastique est donné par

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma dW(t) \tag{4.1}$$

où

- $a$  représente la *vitesse de retour à la moyenne* (ou d'une façon plus générale de réversion),
- $b$  représente le taux d'intérêt d'équilibre à long terme,
- $\sigma$  représente la volatilité instantanée du taux d'intérêt,
- $dW(t)$  représente le mouvement brownien.

Nous détaillerons ce qu'est un mouvement brownien juste après, mais nous pouvons déjà remarquer, en résolvant l'équation différentielle stochastique du modèle, que

$$r(t) = r(0)e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dW_s$$

d'où nous déduisons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[r(t)] &= r(0)e^{-at} + b(1 - e^{-at}) \\ \text{Var}[r(t)] &= \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}) \end{aligned}$$

Il est alors facile de voir que

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[r(t)] &= b \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{V}\text{ar}[r(t)] &= \frac{\sigma^2}{2a}\end{aligned}$$

qui représentent respectivement le taux et la variance à long terme, ce qui sous-tend bien la philosophie de retour à la moyenne du modèle.

Notons toutefois que si l'idée d'un processus de retour à la moyenne fut très bonne, ce modèle souffre malgré tout de certains inconvénients : il peut mener à des taux d'intérêt négatifs, la volatilité des taux est supposée constante, et le modèle suppose que tous ces taux sont dictés par le taux court terme. Une fois de plus, cette partie n'étant pas le sujet de ce mémoire, nous nous satisferons donc de ce modèle.

### Mouvement Brownien

Un mouvement brownien, aussi connu sous le nom de *Wiener process*, est un processus stochastique ayant les propriétés commodes suivantes :

1.  $W(0) = 0$  ;
2.  $W(t)$  est presque sûrement<sup>3</sup> continu ;
3. les incréments de  $W(t)$  sont indépendants, de distribution  $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$  pour  $0 \leq s < t$ .

Ces propriétés sont dès lors fort intéressantes pour simuler le facteur de risque du marché, celui-ci étant aléatoire et modélisé par le mouvement brownien de loi  $\mathcal{N}(0, dt)$ .

#### 4.2.3 Simulations sur base du modèle de Vasicek

En pratique, nous simulons donc le taux d'intérêt court terme sur base du modèle de Vasicek à l'aide de simulations Monte-Carlo. Cette simulation se fait donc de manière discrète, avec un pas de temps  $dt$  relativement petit toutefois. Pour ce faire, nous devons donc recourir à une discrétisation du processus. Par application du schéma d'Euler, nous pouvons alors discrétiser le processus de sorte que

$$r(t_{i+1}) = r(t_i) + a(b - r(t_i))\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z_{i+1}$$

Pour pouvoir procéder à ces simulations, un facteur non négligeable à prendre en compte est donc la génération du nombre aléatoire  $Z$ . En effet, c'est ce dernier qui va nous permettre de simuler les différentes trajectoires que pourra prendre le taux court terme. Détaillons dès lors quelque peu la méthodologie utilisée à cette fin.

#### Génération du nombre aléatoire : méthode polaire de Marsaglia-Bray

Afin de simuler le mouvement brownien  $dW(t)$ , il convient de générer un nombre aléatoire de loi normale  $(0, dt)$ . Pour ce faire, nous avons considéré une possibilité parmi tant d'autres, à savoir la méthode de MARSAGLIA-BRAY [30]. Cette méthode, basée sur la transformée de Box-Muller,

---

3. En théorie des probabilités, un événement qui se produit *presque sûrement* est un événement qui se produit avec une probabilité 1. De manière formelle, soit  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace de probabilité : l'événement  $E$  dans  $\mathcal{F}$  survient *presque sûrement* si  $\mathbb{P}(E) = 1$ . De même, l'événement  $E$  survient *presque sûrement* si la probabilité que  $E$  ne se produise pas vaut 0.

en est une application plus rapide et facile à implémenter. En effet, cette méthode est basée sur le concept des méthodes de rejet, et est numériquement plus robuste. Elle évite également de devoir utiliser les fonctions trigonométriques de la méthode de Box-Muller. Décrivons rapidement le fonctionnement de cette méthode.

La méthode de Marsaglia génère donc une paire de variables aléatoires indépendantes de loi normale standard en choisissant deux points aléatoires  $v_1 = 2u_1 - 1$ ,  $v_2 = 2u_2 - 1$  (à partir de deux variables uniformes  $u_1$  et  $u_2$ ) tels que  $-1 < v_1, v_2 < 1$ , assurant donc que ces points constitue des coordonnées dans le cercle de rayon 1. On rejette toutefois ces points jusqu'à ce que jusqu'à ce que  $s = v_1^2 + v_2^2 < 1$ , projetant ainsi ces points de coordonnées  $(v_1/\sqrt{s}, v_2/\sqrt{s})$  sur la circonférence unitaire (ce qui garanti donc également que  $s$  sera elle-même une variable distribuée uniformément sur l'intervalle  $[0,1]$ ). Ces points sont alors radialement projetés pour créer les distances aléatoires par  $\sqrt{-2\ln(s)}$  en utilisant le même  $s$ , celui-ci étant indépendant des points aléatoires sur la circonférence, et distribué selon une loi uniforme. Les nombres aléatoires sont alors déduits de par  $v_1\sqrt{-2\ln(s)/s}$  et  $v_2\sqrt{-2\ln(s)/s}$ .

Concrètement, l'algorithme implémenté en  $R$  définit deux variables aléatoires de loi uniforme,  $u_{1,i,j}$  et  $u_{2,i,j}$  avec  $i$  la boucle pour les différents pas de temps et  $j$  celle pour le nombre de simulations. De là on déduit  $v_{1,i,j} = 2u_{1,i,j} - 1$ ,  $v_{2,i,j} = 2u_{2,i,j} - 1$ , et  $s_{i,j} = v_{1,i,j}^2 + v_{2,i,j}^2$ . Les deux nombres aléatoires sont alors défini par  $a_{1,i,j} = \left(v_{1,i,j}\sqrt{-2\ln(s)/s}\right)\sqrt{dt}$  et  $a_{2,i,j} = \left(v_{2,i,j}\sqrt{-2\ln(s)/s}\right)\sqrt{dt}$ , ceux-ci suivant alors une loi normale  $(0,dt)$ . Le mouvement brownien est ensuite donné par  $dW(t) = \rho \times (a_{1,i,j} - a_{1,i-1,j}) + \sqrt{1-\rho^2} \times (a_{2,i,j} - a_{2,i-1,j})$  ( $\rho$  étant le coefficient de corrélation entre les deux variables aléatoires de distributions gaussiennes bivariées, et fixé à 50%) assurant ainsi que celui-ci respecte bien les propriétés du mouvement brownien énoncées à la sous-section (4.2.2).

### Paramétrisation du modèle Vasicek

Afin d'estimer les paramètres du modèle de Vasicek, il convient de se baser sur les taux sans risque observés sur le marché. Pour ce faire, nous avons estimés ces paramètres sur base :

- du taux Eonia pour le taux de maturité à 1 jour,
- des taux Euribor pour les taux de maturité inférieure à 1 an,
- les taux des OLO pour les maturités 1 à 30 ans

Pour déduire la structure à terme de référence (nécessaire à la calibration), nous devons toutefois d'abord procéder à un *bootstrapping* sur ces derniers, car ces taux sont en fait des taux couponnés, c'est-à-dire des taux de coupons d'obligations cotant au pair au moment où ils sont donnés, donc équivalent techniquement à des taux *swap*. Cette procédure est expliquée en annexe. Nous pouvons ensuite procéder à une minimisation par moindres carrés entre les prix de ces obligations zéro-coupons basés sur les taux sans risque, et ceux basés sur le modèle de Vasicek, qui se déduisent grâce à la formule<sup>4</sup>

$$B(t, T) = \exp \left[ -b(T-t) + (b-r_t) \frac{1-e^{-a(T-t)}}{a} - \frac{\sigma^2}{4a^3} \left(1-e^{-a(T-t)}\right)^2 \right]$$

4. Cette équation s'obtient par transformation de la formule exposée par VASICEK [37] en définissant le taux  $R(\infty) = b - \frac{\sigma^2}{2a^2} + \frac{\lambda\sigma}{a}$  avec  $\lambda$  le prix du risque de marché.

$$\left. + \frac{\sigma^2}{2a^3} (T - t) \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right] \quad (4.2)$$

Nous avons ainsi obtenus, après minimisation non-linéaire afin d'ajuster au mieux la courbe des taux à la date du 24 avril 2009 (voir graphique (4.1), et pour de plus amples détails sur cette minimisation non-linéaire, le lecteur intéressé pourra se reporter aux annexes de ce travail), les paramètres suivants :

- $a = 0.6329737$
- $b = 6.6116036$
- $\sigma = 1.28070403$

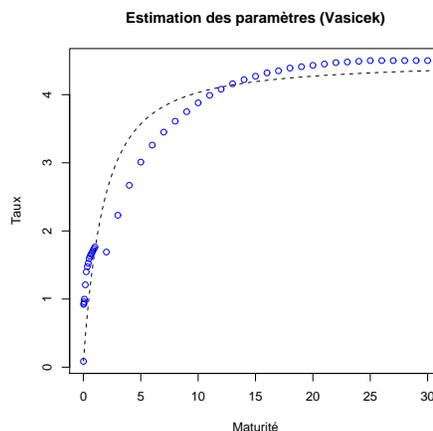


FIGURE 4.1 – Paramétrisation du modèle de Vasicek sur base de la courbe des taux actuelle

## Résultats

Nous pouvons donc à présent simuler les taux court terme du modèle de Vasicek à partir des paramètres estimés et du mouvement brownien simulé. Cette simulation est exposée à la figure (4.2). Nous calculons tout d'abord les prix des obligations zéro-coupons pour chaque maturité grâce à l'équation (4.2) avec  $t = 0$ , et nous pouvons ensuite en déduire les taux correspondants grâce à la relation  $B(T) = \exp(-r(T)T)$ . Sur base de 1.000 simulations, nous obtenons alors la structure à terme des taux d'intérêts en  $t = 0$  (ainsi qu'un intervalle de confiance à 95%) exposée à la figure (4.2).

Dans le cadre de notre application pratique, il nous faut toutefois simuler cette structure à terme à différentes échéances, et pour différentes maturités, et ce, tant pour évaluer le facteur correctif que nous détaillerons dans le chapitre suivant, que pour évaluer, aux différents pas de temps, les taux d'actualisation correspondant. Pour ce faire, nous nous basons donc sur l'équation (4.2), et considérons alors  $\bar{r}_t$ , la moyenne des taux  $r(t)$ , pour définir la structure de *référence*<sup>5</sup> aux différents instants qui nous permettra d'actualiser les différents *flux* futurs. Nous conservons donc

5. Celle-ci n'étant pas observable pour chaque pas de temps sur le marché, nous faisons donc l'hypothèse qu'elle correspond à la moyenne des taux simulés aux différentes échéances. Même s'il est évident que cette façon de faire relève davantage de l'approximation que du calcul exact, celle-ci est à notre sens acceptable, la variance des taux obligataires étant relativement faible.

une matrice contenant, pour chaque pas de temps et pour chaque simulation, les taux  $r(t)$  simulés, desquels nous pourrions alors évaluer les taux d'actualisation  $B(t, T)$  aux différents instants futurs.

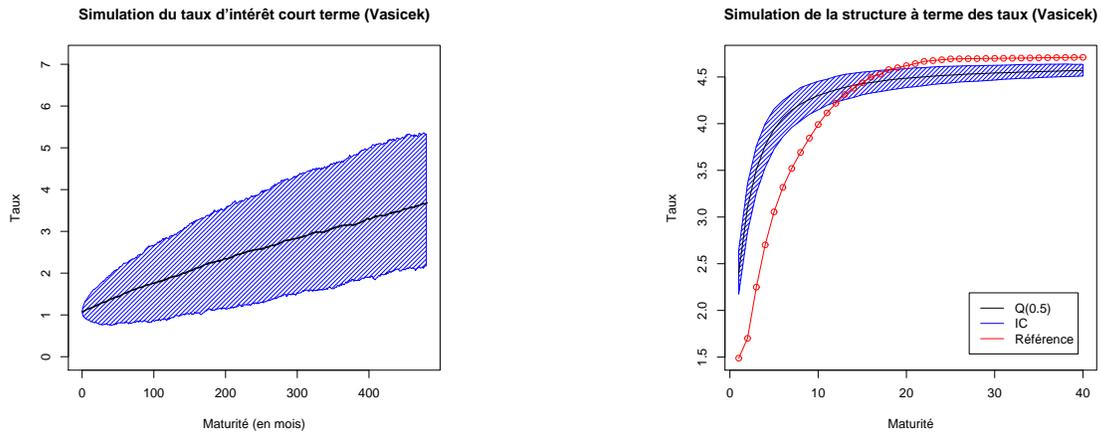


FIGURE 4.2 – Simulation du taux court terme et de la structure à terme des taux d'intérêts sur base du modèle de Vasicek

## Cinquième partie

# Partage du risque et application



## Chapitre 5

# Partage du/des risque(s) entre l'assuré et l'assureur

Après avoir exposé les modèles théoriques sous-jacents à notre application, il nous reste encore à spécifier le partage des risques entre les protagonistes : la compagnie d'assurance et l'assuré. En effet, comme nous l'avons vu, le montant de l'arrérage (et donc la prime unique en découlant, étant donné que nous utiliserons le principe d'équivalence actuarielle pour tarifer le produit) dépendra donc d'une part d'un rapport entre la mortalité observée et attendue par la compagnie sur la période de la rente (d'abord sous forme d'un rapport entre les probabilités de survie cumulées futures, et ensuite d'un rapport entre les espérances de vie futures), mais peut également dépendre d'un facteur correctif similaire au niveau des taux d'intérêts.

### 5.1 Risque de tables de mortalité prospectives

Nous envisagerons donc dans un premier temps le cas d'une rente variable en fonction du seul facteur de "correction" de la longévité défini par le rapport entre les probabilités de survie de référence, qui sont celles établies pour la période 2006 à 2060 par le Bureau Fédéral du Plan [24] (nous décrirons la méthodologie utilisée à cet effet à la sous section 5.2.1), et les probabilités de survie *observées*, qui seront déterminées par les valeurs obtenues par simulation, décrite à la sous section 3.11.2. Nous considérerons donc dans un premier temps une structure à terme des taux d'intérêt constante, le but étant de voir l'impact de ce seul facteur correctif sur le montant de la rente. Ce dernier est défini par

$$\prod_{j=0}^{k-1} \left( \frac{p_{x_0+j}^{\text{ref}}(t_0 + j)}{p_{x_0+j}^{\text{obs}}(t_0 + j)} \right) \quad (5.1)$$

Dans un deuxième temps, nous envisagerons la possibilité de modifier les montants d'arrérage en fonction d'un facteur basé non plus sur les probabilités de survie des assurés, notion sans doute peu intuitive pour ces derniers, mais bien sur l'espérance de vie de ceux-ci aux différentes périodes, en considérant toujours une structure à terme des taux constante et en appliquant donc à la rente une correction de la forme

$$\left( \frac{e_{65+j}^{\text{ref}}(t_0 + j)}{e_{65+j}^{\text{obs}}(t_0 + j)} \right) \quad (5.2)$$

Ainsi, l'arrérage dépendra du rapport entre l'espérance de vie de référence, qui sera d'une part celle établie par le Bureau Fédéral du Plan pour les années 2006 à 2060, et d'autre part les espé-

rances de vie futures projetées par l'INSEE<sup>1</sup>. Nous expliquerons dans la section suivante pourquoi avoir procédé à un tel choix.

Gageons d'ores et déjà que les résultats obtenus par application de ce second facteur correctif devraient *a priori* être plus lisses. En effet, si le premier facteur (5.1) apparaît comme un choix naturel au niveau technique afin de transférer le risque de longévité au client, ce dernier est évalué directement au niveau des probabilités de survie futures, sans transformation. De plus, ce facteur reste un élément purement technique, que l'assuré pourrait avoir du mal à comprendre. Le second facteur correctif (5.2) devrait, en plus de permettre une compréhension plus intuitive pour l'assuré, également entraîner des amplitudes de correction moins brutales. En effet, rappelons une fois encore que les espérances de vie intègrent l'ensemble des probabilités de survie futures<sup>2</sup>, tout en étant moins directement corrélées à celles-ci. D'un point de vue purement mathématique, l'intégration de ces probabilités  $p_x$  futures devrait donc fournir un résultat plus lisse, mais également sans doute moins bon, car moins approprié pour transférer le risque de longévité de manière adéquate.

## 5.2 Choix d'un indice de longévité

Le choix des indices de référence est évidemment crucial. En effet, l'assuré doit être en mesure de se référer à un indice fiable, et construit de manière transparente afin d'évaluer le facteur correctif appliqué à sa rente. Le calcul de cet indice doit bien évidemment être fait par un organisme indépendant des activités de l'assureur.

Un choix naturel au niveau du premier facteur correctif (basé sur les probabilités de survie) nous a semblé être de prendre les quotients de mortalité fournis par les projections du Bureau Fédéral du Plan. En effet, cet organisme indépendant et fiable fournit des données présentant toutes les caractéristiques requises pour constituer un bon indicateur. Nous nous attarderons à décrire la méthodologie utilisée par cet organisme afin de projeter les taux de mortalité futurs à la sous section 5.2.1.

Au niveau de la référence concernant les espérances de vie futures, nous utiliserons d'une part les données fournies par le Bureau Fédéral du Plan également, ces données étant déduites des probabilités de décès futures, et d'autre part celles établies par l'INSEE en France<sup>3</sup>. En effet, ces données nous permettront ainsi de voir l'impact du facteur de référence utilisé sur les arrrages des assurés. De plus, cet organisme fournit des espérances de vie basses, moyennes et élevées pour le futur. Nous pourrions ainsi envisager de nombreuses possibilités quant au niveau du facteur correctif des arrrages. Cette référence étant utilisée à titre purement illustratif, nous ne nous attarderons donc pas sur la méthodologie utilisée par cet organisme pour projeter la longévité. Nous nous contenterons d'en utiliser les résultats, mais nous ne pouvons que conseiller au lecteur intéressé de se référer à ROBERT-BOBEE [35]. Notons également que nous aurions pu utiliser d'autres indices de référence, telles que les projections établies par Eurostat ou les Nations-Unies, mais le manque de temps ne nous permet pas de développer ces comparaisons qui, selon toutes vraisemblances, ne

---

1. Institut National de la Statistique et des Etudes Economiques (France).

2. Les espérances de vie étant déduites de  $\hat{e}_a = \int_{t \geq 0} t p_a dt$

3. Nous faisons donc implicitement l'hypothèse que les indicateurs de mortalité de référence pour la population des assurés (belges) sont basés sur les indicateurs français, ce qui n'est pas tout à fait correct au vu de l'évolution différente de la longévité entre ces deux pays. Nous utiliserons donc cet exemple à titre purement illustratif, mais une application réelle ne devrait évidemment pas se baser sur ces indicateurs.

devraient toutefois pas apporter de changements fondamentaux aux résultats obtenus.

### 5.2.1 Comparaison entre les méthodes de Lee & Carter et du BFP

Les projections établies par le BFP se base sur un modèle de la forme

$$\begin{aligned} q_a(t) &= \exp(\alpha_a + \beta_a t) \\ \text{avec } \alpha_a + \beta_a t &\leq 0, \quad \forall a \quad \forall t \end{aligned} \quad (5.3)$$

$\alpha_a$  étant le logarithme du quotient de mortalité à l'âge  $a$  pour l'année de départ (soit  $\ln q_a(0)$ ), et  $\beta_a$  le taux de décroissance des  $q_a(t)$  en fonction du temps. Nous remarquons donc que l'évolution temporelle de la mortalité est cette fois considérée comme linéaire (et non plus bilinéaire comme cela était le cas dans le modèle de Lee & Carter). Ce modèle garde toutefois l'idée que les probabilités de décès par âge décroissent à leur propre taux exponentiel étant donné que le facteur  $\beta$  est aussi indicé par  $a$ .

Les  $\hat{q}_a(t)$  empiriques sont ensuite lissés à travers le temps pour chaque âge  $a$  par une moyenne géométrique mobile. Les paramètres  $\alpha_a$  et  $\beta_a$  sont alors estimés par moindres carrés pour les âges inférieurs à 89 ans, et ce à partir de 1970<sup>4</sup>, c'est-à-dire en effectuant

$$\arg \min \sum_{a=0}^{89} \sum_{t=1970}^{2006} (\ln \hat{q}_a(t) - \alpha_a - \beta_a t)^2 \quad (5.4)$$

Les  $\hat{\beta}_a$  obtenus pour les âges  $a = 0, \dots, 89$  sont ensuite lissés en utilisant une moyenne géométrique mobile sur 6 ans<sup>5</sup>, et les  $\hat{\alpha}_a$  sont alors ajustés pour rendre compte de la mortalité réellement observée sur les 10 dernières années, et corrigent ainsi le biais d'estimation.

Les séries de  $\hat{\alpha}_a$  et  $\hat{\beta}_a$  sont ensuite extrapolées pour les âges  $a \geq 90$ , en considérant un âge ultime  $\omega$  (avec  $\omega_{\text{♂}} = 130$  et  $\omega_{\text{♀}} = 140$  et en considérant un gain supplémentaire de 5 ans sur le siècle) tel que

$$\begin{aligned} q_\omega(t) &= 1 \quad \forall t \\ \Rightarrow \alpha_\omega = \beta_\omega &= 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

Cette extrapolation se base en partant de  $\hat{\alpha}_{89}$  et  $\hat{\beta}_{89}$  et sachant (5.5), et fait donc décroître  $\hat{\alpha}_a$  et  $\hat{\beta}_a$  vers 0 pour tout  $a \geq 90$  grâce à un facteur  $\lambda_a^\zeta$  avec

$$\begin{aligned} \lambda_a &= \frac{\omega - a}{\omega - 89} \\ \zeta(t) \text{ tel que } \frac{\partial q_a(t)}{\partial a} \Big|_{a_{89+1}} &= \frac{\partial q_a(t)}{\partial a} \Big|_{a_{89}} \end{aligned}$$

et donc  $\hat{q}_{90}(t) - \hat{q}_{89}(t) = \hat{q}_{89}(t) - \hat{q}_{88}(t)$  ce qui garanti qu'il n'y aura pas de "saut" entre la dernière valeur observée et la première valeur projetée. Pour  $a \geq 90$  le modèle considère donc

$$\hat{q}_a(t) = \exp\left(\hat{\alpha}_{89} \lambda_a^{\zeta(t)} + \hat{\beta}_{89} \lambda_a^{\zeta(t)} t\right) \quad (5.6)$$

4. Nous avons expliqué à la section 3.5 qu'une nette amélioration dans les conditions de mortalité est constatée depuis les années 1970, et que la période d'estimation commence donc à cette date pour rendre compte de l'évolution récente de la mortalité.

5. Et ce afin d'atténuer les variations de la vitesse de décroissance entre deux âges consécutifs.

Après analyse, il s'avère que les résultats fournis par les deux méthodes sont assez semblables (voir à ce sujet la troisième partie de LAMBRECHT & PAUL [25]), et nous pourrions être amenés à envisager des variations plus importantes dans les simulations de projection de la mortalité effectuées à la sous section 3.11.2 (en modifiant les  $\hat{\kappa}$  projetés). En effet, si les résultats fournis pour les  $\hat{q}_a$  des deux méthodes étaient trop semblables, le facteur correctif évoqué à l'équation (5.1) ne trouverait alors pas à s'appliquer. Nous reviendrons sur ce point lors du choix des paramètres pour l'application à la section 6.1.

### 5.3 Risque de taux d'intérêts

Si l'on s'attarde à présent au risque de taux d'intérêts, nous pourrions envisager de faire varier la rente en fonction du taux réellement observé, comparé au taux attendu<sup>6</sup>. Concrètement, nous faisons l'hypothèse fort simplificatrice qu'il existe une obligation zéro-coupons pour la maturité de la rente de chaque assuré. En définissant alors  $B(t, T)$  le taux de l'obligation zéro-coupons à l'instant  $t$  pour une maturité  $T$ ,  $x_i$  l'âge de début des paiements de l'assuré  $i$ , nous pouvons alors, en suivant l'idéologie utilisée pour le facteur correctif de la longévité, définir le facteur de correction des taux d'intérêts par

$$\left( \frac{B(t, T - x_i - t)^{\text{ref}}(t_0 + t)}{B(t, T - x_i - t)^{\text{obs}}(t_0 + t)} \right) \quad (5.7)$$

Nous pourrions ainsi envisager une actualisation des *cash-flows* futurs différente à chaque instant d'arrérage, tout en appliquant en parallèle un facteur correctif basé sur les taux observés au niveau des arrérages. Notons que nous ne considérerons pas le cas où seul le risque de taux d'intérêt serait transféré au client par adaptation de ses arrérages, ceci n'étant pas l'objet de ce mémoire. Nous tiendrons compte de la volatilité de ce facteur au travers d'un produit de rente variable combinant le risque global (la combinaison du risque de longévité et du risque de taux d'intérêt), tel que décrit à la section 5.5.

### 5.4 Inclusion de garanties

Comme nous l'avons déjà souligné, le principal attrait que représente un produit de rente est de se couvrir contre le risque d'épuiser ses ressources au-delà de l'âge de la retraite (avant le décès). L'assuré serait-il donc enclin à supporter une variation quelconque de ses arrérages? Il y a fort à parier que non, celui-ci comptant certainement sur cette rentrée financière pour son bien-être, voir sa survie.

Nous étudierons donc l'impact d'une limitation des facteurs correctifs des montants de rente, ce qui est en soit une approche sans doute plus réaliste. Ainsi, l'assuré pourra souscrire à un contrat de rente variable en fonction des facteurs précités, mais en exigeant par exemple que ceux-ci ne descendent pas en-dessous d'un seuil  $x\%$ , diminuant ainsi son arrérage de maximum  $x\%$  en cas d'amélioration de la longévité supérieure à celle attendue. Nous pourrions également envisager une limite supérieure pour les arrérages, fixée à  $y\%$ . Evidemment, par le principe d'équivalence actuarielle, sa prime sera alors adaptée en conséquence.

---

6. Notons que le risque de taux d'intérêt ne sera pas du tout considéré en dehors du produit proposant une double adaptation (au niveau de la longévité et des taux d'intérêt), la courbe des taux étant alors déterminée à l'aide du taux court terme moyen  $\bar{r}_t$  lors de l'application de la formule (4.2).

Si nous incluons cette garantie de rente minimum (et maximum), nous en analyserons alors l'impact sur les produits de rentes variables créés. En considérant  $x$ , le pourcentage minimum et  $y$ , le pourcentage maximum à garantir, nous utiliserons alors comme facteurs correctifs pour les *produits 1* et *2*<sup>7</sup>, respectivement :

$$\min \left[ \max \left( x\%, \prod_{j=0}^{k-1} \frac{p_{x_0+j}^{\text{ref}}(t_0+j)}{p_{x_0+j}^{\text{obs}}(t_0+j)} \right), y\% \right] \quad (5.8)$$

$$\min \left[ \max \left( x\%, \frac{e_{65+j}^{\text{ref}}(t_0+j)}{e_{65+j}^{\text{obs}}(t_0+j)} \right), y\% \right] \quad (5.9)$$

De la sorte, l'assuré définit donc un intervalle sur lequel peut varier sa rente. Ainsi, il percevra chaque année comme arrérage un montant  $c$  compris entre  $[c \times x\%; c \times y\%]$ . Toutes les combinaisons sont alors envisageables. Afin de restreindre quelque peu l'étendue que pourrait prendre l'analyse à ce niveau, nous ne considérerons que deux cas :

1.  $x = 90\%$  et  $y = 110\%$
2.  $x = 70\%$  et  $y = 130\%$

Ceci devrait nous mener à de conséquents changements sur les montants versés. En effet, si l'on considère une rente souscrite à 65 ans et allant jusqu'à l'âge maximal de paiement d'arrérages (105), nous verrons au chapitre suivant que les garanties trouveront à s'appliquer dans de nombreux cas d'adaptations des arrérages (notamment pour le facteur correctif basé sur le rapport entre les probabilités de survie futures, comme cela sera expliqué).

## 5.5 Risque global

Dans cette section, nous allons donc tenter de voir si nous pouvons supposer l'indépendance entre les tables de mortalité ainsi établies (notamment le facteur  $\kappa_t$ , au sens des lois de probabilité) et les taux d'intérêts. En effet, si tel était le cas, la combinaison des risques de longévité et de taux d'intérêts pourrait se faire sans peine, en multipliant simplement les deux facteurs correctifs (5.1) et (5.7). Si intuitivement il semble difficile de répondre à cette question, qu'en est-il d'un point de vue plus scientifique ?

La littérature consacrée à ce sujet est relativement peu élaborée. En effet, les premiers articles de ce genre en matière actuarielle sont relativement récents. Nous présenterons donc succinctement les résultats des recherches menées par HANEWALD à ce propos, cet auteur ayant combinés les résultats des études démographiques et épidémiologiques tentées à cet égard, tout en portant un regard actuariel sur ces considérations.

Ainsi, HANEWALD ([19], [20]) démontre qu'empiriquement, un lien significatif existe entre l'indice temporel de la mortalité du modèle de Lee & Carter ( $\kappa_t$ ) et certaines variables macroéconomiques. En effet, cet indice temporel est par exemple significativement corrélé au taux de croissance du PNB australien, américain et canadien (uniquement pour le  $\kappa_t$  de la population masculine dans ce cas) ou encore aux changements dans le taux de chômage au Japon (principalement au niveau de la mortalité féminine cette fois), et ce pour la période 1950-2005. De plus, plusieurs études ont également démontré que les taux de mortalité variaient de façon pro-cyclique (par rapport à

7. Ceux-ci seront définis au chapitre suivant.

l'activité économique) aux Etats-Unis, en Espagne, au Japon, en Suède ainsi que dans 23 pays de l'OCDE pour la période 1960-1997<sup>8</sup> (voir à ce propos GERDTHAM & RUHM [18]). Nuancions toutefois ces propos. En effet, HANEWALD [20], en procédant à une analyse plus détaillée en décomposant la période 1950-2005 en 3 sous périodes (1950-1970, 1971-1990 et 1991-2005) démontre que le lien existant entre l'état de l'économie et la mortalité a tendance à changer systématiquement, et semble même s'inverser (de pro-cyclique à contra-cyclique) dans presque tous les cas envisagés, cette inversion s'opérant graduellement au fil du temps.

En résumé, cette étude démontre donc que le facteur temporel du modèle de Lee & Carter ( $\kappa_t$ ) ne fluctue pas de façon indépendante et erratique, mais est bel et bien lié à une série de facteurs extérieurs, notamment les facteurs macroéconomiques. De plus, ce lien établit entre la mortalité et l'activité économique est soumis à un changement structurel au cours du temps, et a même tendance à s'inverser dans les années les plus récentes de cette étude. L'auteur explique ce phénomène par le fait que les causes de mortalité pro-cycliques (principalement les maladies cardiaques, hépatiques, les pneumonies et les gripes ainsi que les accidents de la route) ont tendance à diminuer ces dernières années, contrairement aux causes acycliques et contra-cycliques, comme les décès dus aux cancers. De ce fait, les taux de mortalité semblent désormais diminuer lors de périodes de croissance économique, et vice-versa.

Notons que s'il existe un lien entre cet indice temporel  $\kappa_t$  et le taux de croissance du PNB, la corrélation entre le PNB et le niveau des taux d'intérêt est évidemment bien réelle également. Par déduction, il apparaît donc que supposer l'indépendance entre la mortalité et les taux d'intérêts est une approximation fautive (le caractère prudent ou non de cette approximation est difficile à déterminer, celui-ci dépendant d'une part de l'état de l'économie, et d'autre part de l'importance des causes de mortalité pro et contra-cyclique). Toutefois, HANEWALD [20] démontre également que le lien entre les taux de mortalité et le PNB est davantage marqué pour la population active. Ceci s'expliquerait par le fait que la diminution du nombre de décès dus à des maladies davantage marquées chez les personnes âgées (essentiellement les maladies cardio-vasculaires) est à présent pris en compte dans le niveau du facteur  $\beta_a$ , et donc que les changements relatifs de l'activité économique (mesurée par le PNB) aurait un impact moins significatif d'un point de vue statistique sur le facteur  $\kappa$  si l'on ne considérait que ces âges pour la calibration et l'extrapolation de la série temporelle (ce que nous avons fait en définissant  $a_{min} = 60$ ). Ceci nous permet donc, dans le cadre de notre produit de rente, de supposer l'indépendance entre ces deux facteurs de risque comme approximation, ce qui permettra de les combiner en tenant compte des deux facteurs définis aux équations (5.1) et (5.7). Notons qu'un produit de rente prenant en compte ces deux facteurs simultanément pourra donc bénéficier d'une compensation entre ceux-ci, et seul un cas pourrait être totalement défavorable à l'assuré (cas où la longévité réelle serait supérieure aux estimations de référence, et où les taux d'intérêt futurs seraient, simultanément, inférieurs à ceux attendus). Notons à titre informatif que lorsque ces risques ne sont pas transférés aux assurés, l'assureur souscrit parfois à un traité de réassurance de type *double trigger* (avec une garantie *stop-loss* ou autre) afin d'éviter cette situation la moins favorable.

---

8. La mortalité attribuable aux maladies cardiaques et hépatiques, les pneumonies et les gripes ainsi que les accidents de la route a, d'après ces études, tendance à augmenter lorsque l'activité économique s'accélère. Par contre, les décès dus aux cancers et les suicides auraient eux un comportement acyclique, voir même contra-cyclique.

## Chapitre 6

# Lancement du produit et simulation des *cash-flows*

Ayant à présent décrit l'ensemble des méthodes stochastiques sous-jacentes ainsi que les manières envisageables de partager ces risques, il est à présent temps de passer à l'application proprement dite. Pour ce faire, il nous reste toutefois à spécifier divers éléments, tels que les caractéristiques du groupe d'assurés, ou encore les paramètres choisis au niveau du partage des risques.

### 6.1 Caractéristiques du groupe fermé

Nous supposons que le groupe d'assuré est fermé, c'est-à-dire que tous souscrivent au même moment, et qu'une fois cette "période de souscription" passée, plus aucun assuré ne peut choisir ce produit. Cette façon de faire, même si elle n'est pas vraiment réaliste, nous permettra néanmoins d'alléger quelque peu les calculs (et le temps nécessaire pour effectuer ces derniers, notamment au niveau de la simulation du nombre de survivants). Notons toutefois que l'inclusion de différentes cohortes d'assurés n'est pas en soit plus compliquée. Il suffirait en effet de simuler la trajectoire d'un  $\kappa_t$  supplémentaire en bout de table pour tenir compte des nouveaux assurés souscrivant au produit de rente en  $t = 1$ , et ainsi de suite. Malheureusement nous n'avons pas pu analyser ce cas par manque de temps. De ce fait, nous supposons donc les caractéristiques suivantes (en faisant toutefois varier la longueur de l'engagement) :

- tous les assurés souscrivent leur contrat en 2010, à l'âge de 65 ans
- la rente débute à 65 ans et est payée annuellement en fin d'année
- on considère un groupe de 1.000 assurés dans un premier temps, de 10.000 assurés ensuite

Afin de simuler les *cash-flows* que peuvent générer un produit où l'assuré supporterait le risque de mortalité et/ou de taux d'intérêt, nous avons donc écrit un programme en R afin de calculer les valeurs suivantes sur base des tables de mortalité prospectives simulées auparavant et de la

structure à terme de référence aux différents instants :

$$\text{V.A. annuite class} = \sum_{k=1}^T l_k B(t, k) \quad (6.1)$$

$$\text{V.A. paiements prod1} = \sum_{k=1}^T l_k \left( \prod_{j=0}^{k-1} \frac{p_{x_0+j}^{\text{ref}}(t_0 + j)}{p_{x_0+j}^{\text{obs}}(t_0 + j)} \right) B(t, k) \quad (6.2)$$

$$\text{V.A. paiements prod2} = \sum_{k=1}^T l_k \left( \frac{e_{65+k}^{\text{ref}}(t_0 + k)}{e_{65+k}^{\text{obs}}(t_0 + k)} \right) B(t, k) \quad (6.3)$$

où  $l_k$  est le nombre d'assurés encore vivant à l'instant  $k$ ,  $t$  l'instant de calcul et  $T$  la maturité de la rente envisagée. Notons que la variable aléatoire  $l_k$  est modélisée par une distribution binomiale et de façon récursive (d'année en année) pour toute la durée de l'annuité grâce à

$$L(t) \sim \mathcal{B}in(L(t-1), p_{65+t}^b(2009 + t|\kappa)) \quad (6.4)$$

où  $L(t)$  est le nombre de survivant (c'est-à-dire le nombre de contrats encore actifs) à l'instant  $t$  à l'âge considéré, et  $p_{65+t}^b(2009 + t|\kappa)$  sont les probabilités de survie futures déduites des tables de mortalité prospectives élaborées et ce pour  $b = \{1, \dots, B\}$ ,  $B$  étant le nombre de simulations envisagées <sup>1</sup>.

Remarquons que si le portefeuille était de taille très grande, toutes les fluctuations autour des tables simulées seraient alors annulées, et seule resterait l'incertitude concernant la probabilité de survie aléatoire, représentant la partie non-diversifiable. Le risque de longévité future ne peut donc être totalement écarté (le risque contenu dans les  $p_{65+t}^b(2009 + t|\kappa)$ ), même avec un portefeuille de très grande taille. En effet, la loi  $\mathcal{B}in$  tendrait vers une moyenne, mais celle-ci resterait aléatoire car dépendante des probabilités de survie, elles-mêmes aléatoires.

## 6.2 Résultats techniques et financiers, 1.000 et 10.000 assurés

Afin de pouvoir quantifier l'impact des différentes modifications apportées aux arrérages (par rapport à une rente *classique*), nous tiendrons compte de deux valeurs :

- d'une part le quantile 99.5% de la distribution des valeurs actuelles des montants de rente simulés (sur base des équations (6.1), (6.2) et (6.3)), qui nous permettra de déduire le capital à immobiliser par l'assureur pour faire face à ses engagements futurs, sans pour autant mettre sa solvabilité en péril. Ce capital sera financé d'une part par les primes payées par les assurés, et d'autre part par les fonds propres de la compagnie, amenés par les actionnaires, et qui devra donc être rémunéré;
- d'autre part la prime à payer par les assurés sera définie par l'espérance des valeurs actuelles déduites des simulations. Concrètement, en considérant  $S$  le nombre de simulations, les

---

1. Différentes possibilités s'offraient à nous pour simuler le nombre de contrats encore actifs à chaque instant  $t$ . Nous avons donc, à partir des  $p_{65+t}^b(2009 + t|\kappa)$  simulés, déduits les  $p_{65+t}^b(2009 + t|\kappa)$  correspondants, et ensuite recouru à la modélisation de cette variable par une loi binomiale de paramètres  $L_t$  et  $p_{65+t}^b(2009 + t|\kappa)$ , car cette façon de faire est nettement plus rapide que la méthode de simulation des instants de décès des rentiers (comparant la valeur d'une réalisation d'une variable uniforme à celles des probabilités de survies cumulées pour chaque instant  $t$  pour chaque rentier). Il suffit donc dans notre cas de simuler une seule variable aléatoire (le nombre de survivants) pour chaque année simulée (par simulation).

primes seront donc définies par

$$\text{Prime}_{\text{class}} = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \left( \sum_{k=1}^T l_k B(t, k) \right) \quad (6.5)$$

$$\text{Prime}_1 = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \left( \sum_{k=1}^T l_k \left( \prod_{j=0}^{k-1} \frac{p_{x_0+j}^{\text{ref}}(t_0+j)}{p_{x_0+j}^{\text{obs}}(t_0+j)} \right) B(t, k) \right) \quad (6.6)$$

$$\text{Prime}_2 = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \left( \sum_{k=1}^T l_k \left( \frac{e_{65+k}^{\text{ref}}(t_0+k)}{e_{65+k}^{\text{obs}}(t_0+k)} \right) B(t, k) \right) \quad (6.7)$$

Ces valeurs nous permettront d'analyser la viabilité financière et les avantages dont pourraient bénéficier les clients en souscrivant aux produits étudiés. Attardons-nous tout d'abord aux résultats sous forme graphique. En effet, ceux-ci nous permettront directement de nous faire une idée relativement précise des modifications apportées par nos produits par rapport à une rente *classique*.

Ainsi, le facteur correctif basé sur les probabilités de survie cumulées (équation (5.1)) évolue de façon décroissante pour les âges 65 à 97 ans environ (figure (6.1)). Cela signifie donc que la longévité observée (déduite des probabilités de survie futures simulées) est donc supérieure à la longévité de référence établie par le Bureau Fédéral du Plan. Cette constatation aura donc nécessairement un impact sur les produits envisagés lorsque ceux-ci feront appel aux tables prospectives de cet organisme. Nous pouvons effectivement vérifier à la figure (6.3) que les probabilités de survie futures du BFP sont bien inférieures à celles simulées (la courbe des  $p_x$  de référence se situe presque toujours en-dessous de l'intervalle de confiance à 90% des  $p_x$  simulés). Notons qu'en fin de table (essentiellement à partir de 100 ans), les probabilités de survie deviennent nettement plus erratiques. Toutefois, si nous analysons en parallèle le graphique décrivant l'extinction des cohortes (de 1.000 et 10.000 assurés, figure (6.3)), nous pouvons nous rendre compte qu'il ne reste que très peu d'assurés à ces âges. Economiquement, cette variabilité n'a donc pas vraiment de sens.

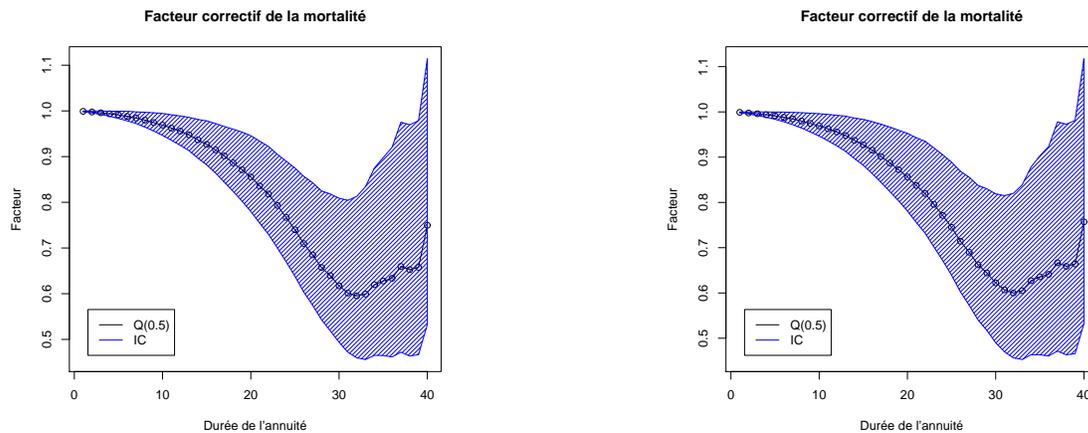


FIGURE 6.1 – Evolution du facteur correctif basé sur les probabilités de survie (1.000 et 10.000 simulations)

Pour en revenir aux prévisions établies par le BFP, notons encore qu'en analysant l'évolution du facteur correctif basé cette fois sur le rapport entre les espérances de vie (équation (5.2)), nous pouvons nous rendre compte que ces prévisions ne sont toutefois pas trop éloignées des espérances de vie simulées (figure (6.4)). Cependant, l'intervalle de confiance à 90% de cette variable est

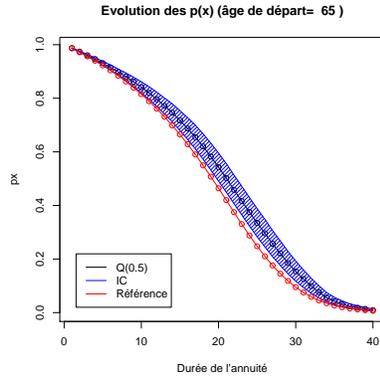


FIGURE 6.2 – Evolution des probabilités de survie futures

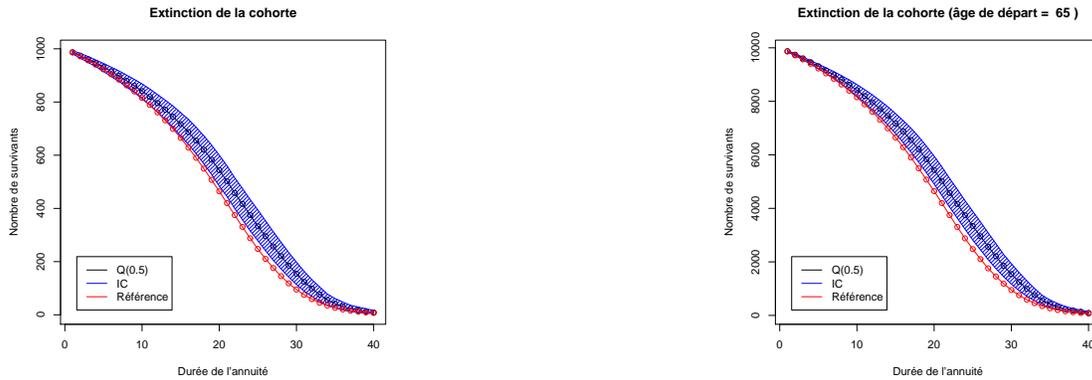


FIGURE 6.3 – Description de l'extinction de la cohorte de 1.000 assurés et 10.000 assurés)

relativement large, et pourrait donc toutefois amener à des modifications non négligeables des arrérages. Notons encore que, dans un souci "d'esthétisme commercial", il conviendrait toutefois de normaliser ce facteur afin qu'il commence à un niveau de 1 (et donc adapter la prime en conséquence). Dans ce cas, l'assuré aurait alors, d'après nos simulations, toutes les chances de voir sa rente augmenter au fur et à mesure des années, ce qui devrait concorder avec ses besoins.

Concernant cette fois les prévisions d'espérance de vie à 65 ans établies par l'INSEE, nous pouvons constater sur le graphique (6.5) que la projection centrale de cette variable est approximativement égale à 95% des espérances de vie simulées sur base du modèle de Lee & Carter calibré sur les données de la population belge (HMD). Notons qu'une fois de plus, la variabilité de ce facteur est assez conséquente si l'on en croit l'intervalle de confiance à 90% illustré sur ce graphique. Les projections élevées et basses fournies par cet organisme reflètent des tendances très claires qui se répercuteront nécessairement sur l'adaptation des montants de rente dans le cas d'un produit lié au facteur correctif basé sur les espérances de vie (en prenant comme référence les données *ad-hoc*). A nouveau, il conviendrait de normaliser le rapport pour que ce dernier commence à 1. Notons encore, à titre informatif, que DELWARDE & DENUIT [10] ont démontré, sur base des observations passées (en vision périodique), qu'un écart d'un an était constaté entre les espérances de vie (à la naissance) belges et françaises, au profit de ces derniers. Si l'on présente les espérances de vie à 65 ans simulées par notre application avec celles de référence (figure (6.6)), nous pouvons

effectivement constater un décalage en début de période entre les prévisions futures établies par le BFP et l'INSEE. Nous pouvons également constater un décalage entre nos simulations et les prévisions officielles. A ce propos, rappelons que nos projections ont été calibrées sur les données HMD les plus récentes, alors que les prévisions officielles datent respectivement de 2006 et 2005 (l'estimation des paramètres étant alors modifiée), et que la méthodologie utilisée diffère suivant les prévisions considérées.

Remarquons que, sur base de ces références INSEE, l'assureur pourrait également envisager un grand nombre de possibilités d'adaptation des rentes. Toute la méthodologie développée au niveau des options financières de type *barrières* trouverait ici un terrain d'application intéressant. Nous aurions pu envisager une adaptation des montants de rente uniquement si le rapport entre les espérances de vie se trouvait dans le couloir entre la projection haute et basse, en appliquant alors un ratio sur base de l'écart relatif, ou encore si ce rapport était supérieur à telle prévision ou inférieur à telle autre prévision. Bref, nous avons considéré ici une adaptation simple des montants de rente, mais des structures nettement plus complexes pourraient trouver à s'appliquer. Encore faudrait-il dans ce cas pouvoir expliquer à l'assuré, dans un langage accessible à ce dernier, comment seraient alors adaptées ses rentes futures, ce qui ne serait sans doute pas si évident (si les options *barrières* sont aisément compréhensibles pour un financier, il n'en est certainement pas de même pour une personne non initiée à ce genre de concept).

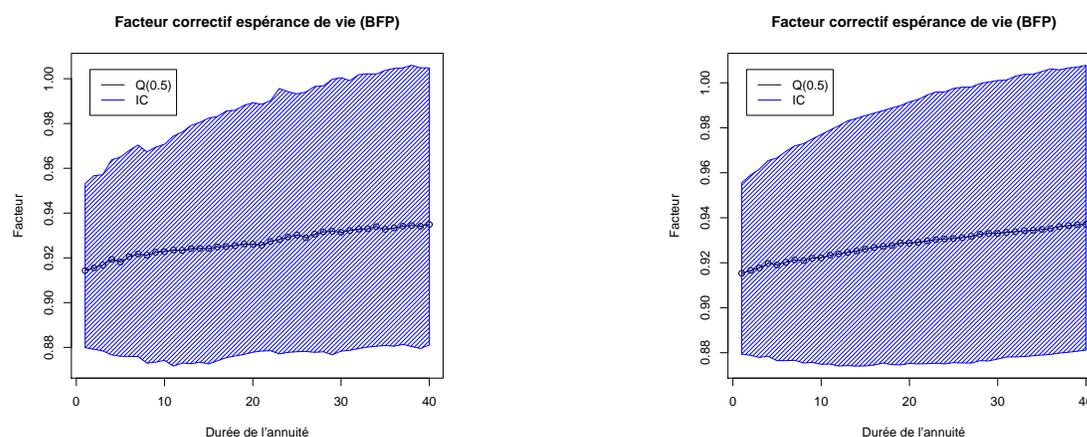


FIGURE 6.4 – Evolution du facteur correctif basé sur les espérances de vie, référence BFP (1.000 et 10.000 simulations)

Nous allons donc à présent analyser l'impact du transfert des risques de longévité et/ou de taux d'intérêt sur base de notre portefeuille de 1.000 et 10.000 assurés âgés de 65 ans à la souscription. Pour déterminer les avantages que ces derniers pourront retirer en acceptant ce(s) risque(s), nous déterminerons donc le capital à apporter par les actionnaires par la différence entre d'une part le capital à immobiliser et d'autre part les primes perçues. Ces produits étant, dans le cadre de ce travail, vendus en prime unique, nous nous sommes donc interrogés sur l'évolution d'année en année de ce capital économique nécessaire. Dans la pratique, il s'avère que, sur base de notre exemple<sup>2</sup>, la meilleure façon de procéder est de déterminer l'espérance des arrérages totaux futurs comme étant une "prime fictive" que recevrait la compagnie, et de prendre le quantile 99.5% de cette distribution pour déterminer le capital à immobiliser, et ce, d'année en année. La différence

2. En pratique, ce coût du capital aurait en effet été intégré dans la tarification des différents produits

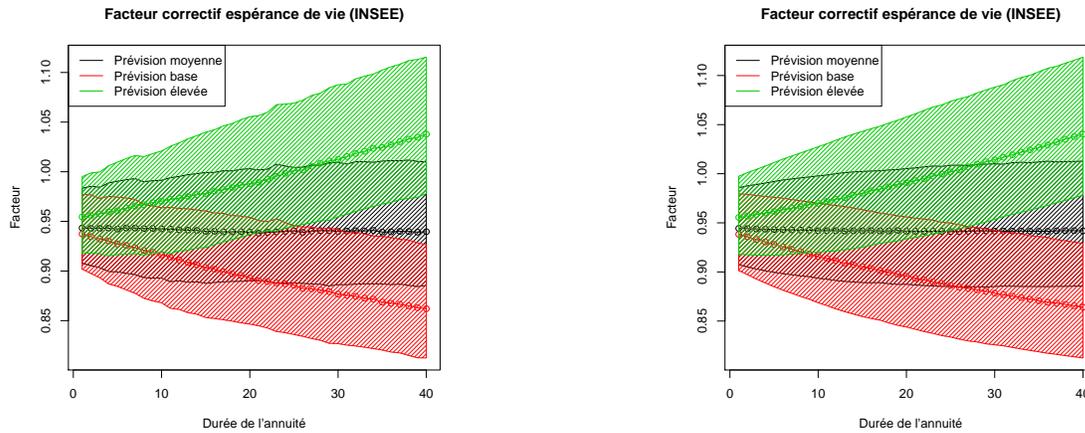


FIGURE 6.5 – Evolution du facteur correctif basé sur les espérances de vie, référence INSEE, prévisions hautes, moyennes et basses (1.000 et 10.000 simulations)

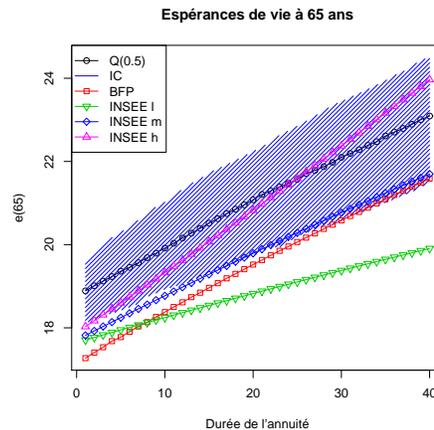


FIGURE 6.6 – Espérances de vie futures simulées et de référence (BFP et les 3 prévisions de l'INSEE)

entre ces deux montants nous donnera alors le besoin en capital de la compagnie, qui rémunérera annuellement celui-ci à hauteur de 10%. Il est important de noter qu'au vu de l'application des facteurs correctifs, la distribution du montant total d'arrérages futurs dépend de la maturité de la rente. Ces valeurs nous permettront donc de déterminer quelle est l'économie (ou la perte) réalisée sur le capital à immobiliser de nos produits par rapport à une rente *classique*. Cette économie sera ensuite partagée entre l'assureur (10%) et les assurés (90%).

Notons enfin que les résultats exposés le seront dans un premier temps maturité par maturité, et que nous finirons par un paragraphe de conclusion (section 6.3) reprenant l'ensemble des résultats importants et mettant en exergue les causes de ces derniers. Nous resterons donc relativement succincts dans le développement à chaque maturité, à l'exception toutefois de la première, fixée à 5 ans, non pas pour son intérêt particulier, mais bien pour expliquer pas à pas comment ont été menés les calculs. Le lecteur intéressé trouvera également en annexe les graphiques des dividendes à distribuer aux actionnaires, période par période, pour chaque maturité, et chaque produit envisagé.

## Rente de durée 5 ans

Nous considérons donc le cas de 1.000 et 10.000 assurés de 65 ans de sexe masculin, souscrivant une rente immédiate, payable en fin d'année. Cette rente est souscrite en 2010, et se finira donc en 2015 (fin de l'année). Cette durée relativement restreinte de la rente ne devrait toutefois pas amener à des changements importants dans les montants d'arrérage des assurés (au niveau de la longévité), d'une part car le *laps* de temps relativement court ne laisse pas vraiment entrevoir la variabilité de l'évolution future des durées de vie, et d'autre part car la probabilité de survie des assurés entre 65 et 70 ans est élevée. Cet exemple introductif nous permettra toutefois de voir les premiers effets des produits d'assurances créés sur base des différentes possibilités évoquées.

### Risque de mortalité, 1.000 assurés

**Facteur correctif basé sur les probabilités de survie (équation (5.1))** Si l'on s'attarde tout d'abord à la rente transférant le risque de longévité au client, et ce par l'application du facteur correctif basé sur les probabilités de survie, tel que défini à l'équation (6.2), nous pouvons comparer celle-ci par rapport à une rente *classique* (définie à l'équation (6.1)) au niveau de la prime réclamée au client, ainsi qu'au niveau du capital à immobiliser par l'assureur. Pour ce faire, l'assureur exigera un montant de prime équivalent à l'espérance de la distribution des arrérages futurs (divisée par le nombre d'assurés) vu depuis l'instant de départ. A titre exceptionnel (pour ne pas surcharger le présent travail de nombreux graphiques<sup>3</sup>, mais afin que le lecteur puisse constater comment ont été élaborés les simulations), pour cette maturité, nous présentons en annexe les histogrammes des montants futurs d'arrérages pour la première année (vu depuis l'instant de départ), avec et sans la combinaison des risques de longévité et de taux d'intérêt, et ce, pour 1.000 et 10.000 assurés. Ainsi, nous prenons l'espérance de ces différentes distributions comme primes, et le quantile 99.5% comme montant à immobiliser.

L'assureur réclamera donc, si nous ignorons les divers chargements et frais, une prime unique pure de 4.471 euros à l'assuré pour une rente classique, tandis que si ce dernier consent à supporter le risque de longévité, la prime réclamée sera de 4.452 euros. Toutefois, au vu de l'évolution des probabilités de survie et de référence, l'assuré doit s'attendre à des arrérages effectivement réduits. Ce dernier n'a donc jusqu'alors aucun incitant à souscrire à ce type de produit, le montant moindre réclamé au niveau de la prime correspondant à l'ajustement moyen de ses arrérages. Néanmoins, si nous analysons le capital à immobiliser d'année en année, l'assureur ne doit provisionner, pour la première année que 59.12 euros de plus que la somme des primes dans le cas de la rente variable, tandis que la rente classique l'obligerait à immobiliser 68.48 euros. Bien évidemment, si l'on se place à présent en  $t > 1$ , tant le capital à immobiliser que les "primes fictives" seront moindres. En effet, il reste alors moins d'années à couvrir, et certains assurés seront déjà décédés. Sur l'ensemble de la période, l'assureur aura ainsi économisé 32.11 euros au niveau de l'immobilisation de capital. Celui-ci pourrait dès lors décider d'en faire profiter l'assuré, une fois les actionnaires rémunérés pour cette immobilisation de capital. En faisant donc l'hypothèse que l'assureur rémunère annuellement ses actionnaires sous forme de dividende, à hauteur de 10% du capital investi par ces derniers, et que le portefeuille est constitué d'un groupe homogène de 1.000 assurés, nous aurions donc la rémunération de l'immobilisation de capital dans le cas d'une rente *classique* = 10% (68.48 + 62.27 + 50.50 + 37.40 + 20.22) = 23.887, et, pour notre produit, grâce à l'économie de capital à immobiliser réalisée, nous aurions 10% (59.12 + 53.46 + 45.87 + 31.47 + 16.84) =

3. Ces graphiques présentant de plus un intérêt limité étant donné qu'il faudrait présenter ceux-ci pour chaque année de chaque maturité, et pour chaque possibilité considérée.

20.676. L'économie réalisée par l'assureur au niveau du capital à immobiliser est donc de 3.211 euros. Si ce dernier décide de redistribuer 90% de ce bénéfice, c'est-à-dire 2.890 euros, la prime unique pure à payer par l'assuré serait alors de  $4.452 - \frac{2.890}{1000} = 4.449$ . L'évolution du dividende à payer est présenté en annexe à la figure (6.13).

Comme nous l'avions annoncé, l'avantage dans le cas d'une rente de 5 ans souscrite par 1.000 assurés de 65 ans n'est pas vraiment conséquent, ni pour l'assureur (0.321 euros d'économie), ni pour l'assuré, qui voit sa prime unique pure diminuer de 0.003 euros, soit 0.065% à peine. Toutefois, cet avantage est un bénéfice pure pour chacune des parties, et devrait aller en s'accroissant pour des rentes de durées supérieures. Nous avons ainsi montré comment se dérouleraient les calculs ultérieurs au niveau de la remise sur la prime pour le *produit 1* (basé sur l'adaptation des arrérages en appliquant le facteur correctif (5.1)).

**Facteur correctif basé sur les espérances de vie (équation (5.2))** Nous considérons cette fois le cas où les arrérages sont modifiés sur base du rapport entre les espérances de vie successives de référence et observées. Nous pouvons d'emblée remarquer que, comme nous l'avons déjà souligné, en prenant comme référence tant les espérances de vie projetées par le BFP que par l'INSEE, ce rapport est, dès la première année, inférieur à 1. Au niveau des résultats, nous pouvons constater au tableau (6.1) que, quelle que soit la référence utilisée, la prime est toujours inférieure à celle d'une rente *classique* ou même à celle de la rente du *produit 1*<sup>4</sup>. Nous y remarquons donc que les primes réclamées (et fictives) sont nettement moins élevées (dû à l'adaptation des arrérages, ceux-ci étant diminués sur toute la période), alors que l'immobilisation en capital nécessaire est légèrement supérieure au cas d'une rente classique. Ceci devrait donc nous amener à un résultat fort peu favorable pour l'assureur (et donc pour l'assuré). Nous expliquerons dans la conclusion de cette section d'où provient cette différence, contentons-nous pour le moment de présenter les résultats.

Détaillons les gains de chacune des parties suivant la référence utilisée :

- **BFP** : la prime à payer par l'assuré s'élève dans ce cas à 4.102 euros. Notons à nouveau que, même si la prime d'une rente *classique* s'élève à 4.471 euros, ceci n'est pas un bénéfice pour l'assuré, ces primes étant basées sur le principe d'équivalence actuarielle. Cette diminution correspond donc aux diminutions auxquelles doit s'attendre l'assuré au niveau de ses arrérages. Toutefois, le capital à immobiliser dans le cas de ce *produit 2*<sup>5</sup> basé sur les projections du BFP pour la première année est de 4379.67 euros, soit 214.28 euros de plus que la somme des primes perçues. Dans ce cas donc, l'assureur devra immobiliser davantage de capital que dans le cas de la rente *classique* (où le capital à immobiliser s'élevait pour la première année à 68.48 euros). Ce surplus à immobiliser est constaté sur toute la période de la rente, allant toutefois en décroissant. Au total, l'immobilisation de capital supplémentaire par rapport à une rente *classique* s'élève à 580.71 euros (819.58 euros dans le cas de la rente variable, contre 238.87 euros pour la rente classique). Ce produit n'est donc pas avantageux pour l'assureur, celui-ci devant cette fois rémunérer les actionnaires pour un montant supérieur à celui nécessaire dans le cadre d'une rente classique. Aucune remise ne pourra dès lors être faite au client pour ce type de produit et celui-ci s'avère donc inutile pour l'assuré. Le chargement

4. Nous utiliserons désormais cette appellation pour désigner la rente adaptée par le rapport entre les probabilités de survie cumulées tel que décrit à l'équation (6.2)

5. Cette appellation fera désormais référence à la rente telle que décrite à l'équation (6.3), et nous préciserons à chaque fois quelle est la référence retenue : BFP, INSEE basse, moyenne ou élevée

supplémentaire sur la prime de ce dernier devrait en effet être de 1.274% afin de couvrir le surplus de capital à immobiliser. Rappelons une fois de plus que nous verrons dans la conclusion de cette partie (section 6.3) d'où provient cette différence, et que nous ne faisons dans un premier temps qu'exposer les résultats. L'assureur ne devrait donc pas envisager un tel produit, du moins pour une maturité aussi courte (nous verrons par la suite que celui-ci pourrait envisager une rente fixe sur les premières années, qui deviendrait variable après un certain temps afin de profiter de l'économie sur l'immobilisation de capital qui surviendra pour des maturités de rente plus longues).

- **INSEE** : dans le cas des projections faites par l'INSEE, rappelons que 3 cas sont envisageables : un facteur correctif du type (5.2) basé soit sur les prévisions basses, soit sur les prévisions moyennes, soit encore sur les prévisions élevées d'espérances de vie futures. Nous avons donc :
  - Prévision basse : nous voyons clairement sur le graphique (6.5) que l'adaptation des arrérages est croissante avec le temps, l'assuré percevant des arrérages de moins en moins conséquents au fil des années. Ce type de produit n'aurait donc pour ce dernier que peu d'intérêt, étant donné que, conceptuellement, il va à l'encontre de ses besoins. En effet, il y a fort à parier que l'assuré ait un besoin croissant de capital en fonction de son âge, notamment pour financer ses soins de santé. Si nous suivons toutefois le raisonnement proposé jusqu'ici au niveau des primes et du capital économique, nous obtenons une prime qui s'élève à 4.173 euros par assuré, et un besoin en capital au-delà des primes, sur toute la période, de 830.97 euros. Si l'assureur rémunère ce capital à hauteur de 10% annuellement, ce dernier devra donc verser 59.210 euros de plus aux actionnaires que dans le cas d'une rente *classique*, et ainsi augmenter la prime de l'assuré de 1.277% pour financer ce surplus. Ce produit ne présente donc aucun avantage, ni pour l'assuré, l'adaptation de sa rente allant à l'encontre de ses besoins, et étant de surcroît plus onéreux, ni pour l'assureur, qui devra verser davantage de dividende à ses actionnaires pour l'apport en capital à immobiliser.
  - Prévision moyenne : l'adaptation de la rente est dans ce cas nettement plus stable dans le temps, celle-ci étant à peu près comprise entre 90% et 100% tout au long de la vie de l'assuré. L'assuré devra, pour souscrire à cette rente variable d'une durée de 5 ans, déboursier 4.219 euros. Le capital à immobiliser par l'assureur au-delà des primes perçues s'élève cette fois à 841.72 euros, ce qui nous amène à une rémunération des actionnaires de 84.172 euros, à comparer aux 23.887 euros dans le cas de la rente *classique*. Ce produit n'a donc guère plus d'intérêt, la prime étant alors augmentée de 1.286%.
  - Prévision élevée : notons avant tout que ce type de produit pourrait rencontrer un succès plus important auprès des assurés potentiels. En effet, si l'adaptation des montants d'arrérage était normalisée par rapport à celui d'une rente *classique* (commençant donc à un niveau de 100%), l'adaptation due au facteur (5.2) devrait progressivement augmenter le montant de ces arrérages, et devrait ainsi dépasser celui de la rente *classique*<sup>6</sup>. Dans notre cas, l'assuré devra s'acquitter d'une prime de 4.284 euros, et l'assureur immobiliser 856.24 euros de plus que les primes perçues, et donc verser 85.624 euros à ses actionnaires à titre de rémunération du capital. Même si ce type de produit pourrait donc être intéressant, il ne l'est toutefois pas pour une rente de durée si courte, la surprime à financer étant de 1.297%. A nouveau, nous verrons qu'une solution envisageable pourrait être de proposer

---

6. Notons qu'évidemment la prime serait alors adaptée en conséquence

	<i>Prime</i>	<i>Surplus</i>	<i>Différence</i>	<i>Gain assureur</i>	<i>Gain assuré</i>
<i>Rente classique</i>	4.471	238.87			
<i>Produit 1</i>	4.452	206.76	3.211	0.321	0.065%
<i>Produit 2, BFP</i>	4.102	819.58	-58.071	-5.807	-1.274%
<i>Produit 2, INSEE basse</i>	4.173	830.97	-59.210	-5.921	-1.277%
<i>Produit 2, INSEE moyenne</i>	4.219	841.72	-60.285	-6.029	-1.286%
<i>Produit 2, INSEE élevée</i>	4.284	856.24	-61.737	-6.174	-1.297%

TABLE 6.1 – Rente 5 ans, 1.000 assurés

une rente fixe au début de celle-ci, qui deviendrait ensuite variable pour bénéficier des avantages que proposerait alors la rente variable au niveau du capital à immobiliser.

Présentons également ces résultats sous forme de tableau, comme nous le ferons désormais dans la suite de ce travail, afin d’avoir une vue immédiate et claire des implications de nos produits pour toute la durée de la rente. Décrivons en quelques lignes comment sont construits ces tableaux.

### Résultats techniques et financiers, 1.000 et 10.000 assurés ( $x_0 = 65$ ) : tableaux

Ces tableaux comprennent 5 colonnes, contenant

1. Prime : le montant de la prime à payer par l’assuré, défini par les équations (6.5), (6.6) et (6.7)
2. Surplus : le surplus de capital à immobiliser par rapport aux primes perçues, sur toute la durée de la rente. Ce surplus devra donc être financé par les actionnaires, et rémunéré annuellement au coût du capital (fixé à 10%) sous forme de dividende
3. Différence : l’économie (ou la perte) réalisée découlant du moindre capital à immobiliser (par rapport à une rente *classique*) grâce à l’application des facteurs correctifs. Cette économie réalisée sera ensuite répartie entre l’assureur et les assurés. L’avantage pour chacune des parties de la création des produits proposés (par rapport à une rente *classique*) sera déterminé à partir de ce montant
4. Gain assureur : est défini comme étant égal à 10% de l’économie décrite au point précédent. L’assureur tire donc également un avantage à créer ces produits dans le cas où l’immobilisation de capital au-delà des primes est inférieure à celle d’une rente *classique*
5. Gain assuré : représente le gain (ou la perte) en % accordé à l’assuré sur sa prime, cette remise découlant de l’économie réalisée par l’assureur au niveau du capital à immobiliser (décrite au point 3). Ce poste représente donc l’avantage réel accordé au client qui découlera de la création des rentes variables envisagées

### Risque de mortalité, 10.000 assurés

Si l’on envisage à présent la souscription de 10.000 assurés, quels seront dans ce cas les *cash-flows* futurs de la compagnie d’assurance ? Avec 10.000 assurés, le portefeuille de la compagnie est nettement plus conséquent, et les résultats obtenus devraient tendre davantage vers le cas du portefeuille de taille infinie, où toute la partie diversifiable du risque de longévité serait effectivement diversifiée (les déviations autour de la table).

	<i>Prime</i>	<i>Surplus</i>	<i>Différence</i>	<i>Gain assureur</i>	<i>Gain assuré</i>
<i>Rente classique</i>	4.472	1,147.00			
<i>Produit 1</i>	4.453	623.61	52.339	5.234	0.106%
<i>Produit 2, BFP</i>	4.103	6,950.47	-580.347	-58.035	-1.273%
<i>Produit 2, INSEE basse</i>	4.174	7,060.17	-591.317	-59.132	-1.275%
<i>Produit 2, INSEE moyenne</i>	4.220	7,162.38	-601.538	-60.154	-1.283%
<i>Produit 2, INSEE élevée</i>	4.285	7,293.12	-614.612	-61.461	-1.291%

TABLE 6.2 – Rente 5 ans, 10.000 assurés

Sur toute la durée de la rente, les besoins en capitaux (au-delà des primes) de la compagnie d'assurance devraient donc logiquement être inférieurs à ceux dans le cas d'un portefeuille de 1.000 assurés. Ainsi, il vient les résultats exposés au tableau (6.2), dont la forme est expliquée ci-dessus.

Nous pouvons constater, au vu de ses résultats, que la prime unique pure ne varie pour ainsi dire pas, et que les montants à immobiliser dans l'absolu sont évidemment nettement plus élevés<sup>7</sup>. Si l'on analyse ces chiffres en profondeur, il s'avère qu'au niveau du montant à immobiliser par l'assureur au-delà des primes, l'augmentation de la taille du portefeuille profite essentiellement au *produit 1*. L'augmentation de capital à immobiliser au-delà des primes sur toute la durée de la rente est présentée au tableau (6.3) sous forme de coefficient. Nous y constatons que les *produits 2* bénéficient nettement moins de cette diversification : le coefficient est effectivement inférieur à 10, ce qui indique qu'il y a bien un effet de diversification, mais celui-ci est fort proche du coefficient de la rente *classique*. Etant donné que nous évaluons les avantages des différents produits créés par rapport au cas de la rente classique, la diversification n'apporte dans ce cas un bénéfice réel qu'au niveau du *produit 1*. En passant ainsi de 1.000 à 10.000 assurés, la prime accordée par l'assureur représente alors respectivement 0.065% et 0.106%.

<i>Produit</i>	<i>Coefficient</i>
<i>Classique</i>	8.03
<i>Produit 1</i>	6.28
<i>Produit 2 BFP</i>	8.08
<i>Produit 2 INSEE basse</i>	7.98
<i>Produit 2 INSEE moyenne</i>	7.97
<i>Produit 2 INSEE élevée</i>	7.90

TABLE 6.3 – Coefficient multiplicateur du besoin de capital au-delà des primes pour une rente de 5 ans en passant de 1.000 à 10.000 assurés

### Garantie de rente minimum

Comme expliqué précédemment, nous incluons à présent une garantie sur le montant d'arrage payé au client. Si l'on analyse les deux cas, c'est-à-dire  $x_1 = 90\%$  et  $y_1 = 110\%$ , et  $x_2 = 70\%$  et  $y_2 = 130\%$ , nous obtenons alors les évolutions exposées aux figures (6.7) et (6.8) des différents facteurs correctifs de la mortalité envisagés, et ce suivant les seuils considérés.

<sup>7</sup> Les histogrammes de la distribution des *cash-flows* futurs vus depuis l'instant 0 sont également présentés en annexe pour ce cas à titre illustratif

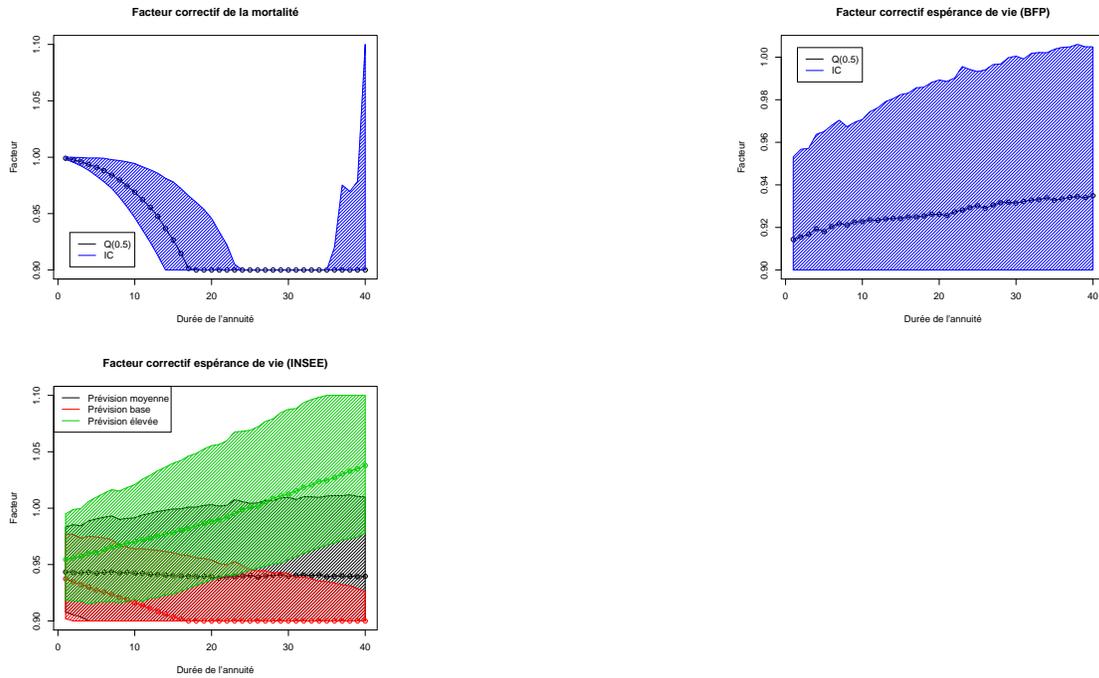


FIGURE 6.7 – Analyse de l'évolution des facteurs correctifs de la mortalité en incluant une garantie d'ar-rérage de minimum 90% et maximum 110% du montant initial (équations (5.8) et (5.9))

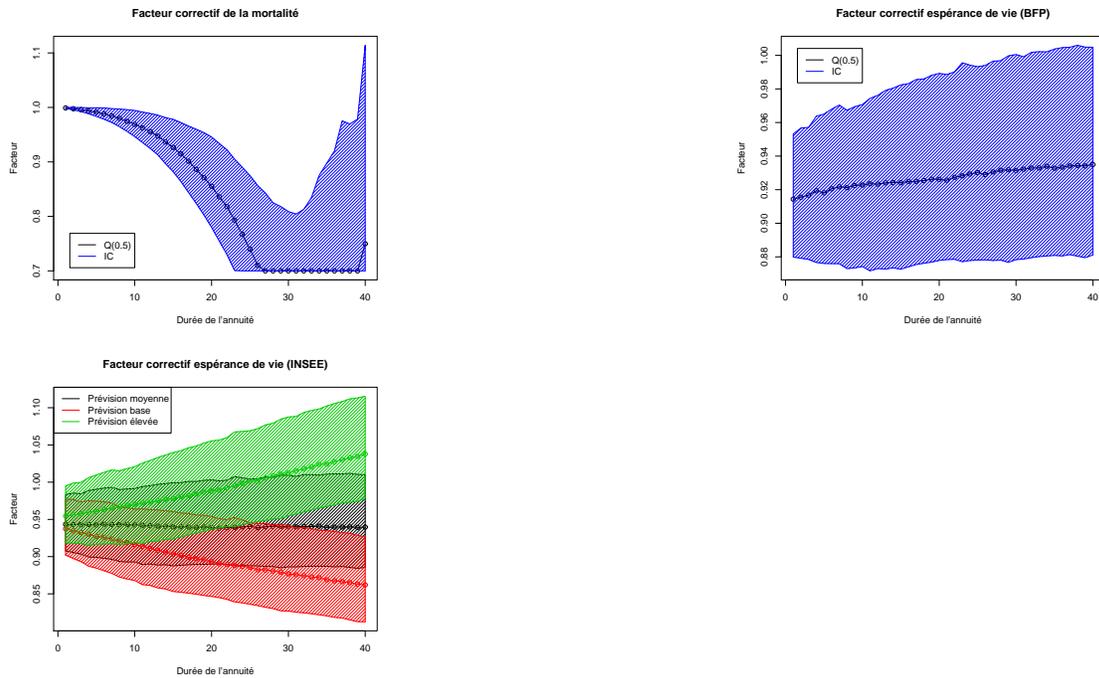


FIGURE 6.8 – Analyse de l'évolution des facteurs correctifs de la mortalité en incluant une garantie d'ar-rérage de minimum 70% et maximum 130% du montant initial (équations (5.8) et (5.9))

D'un point de vue viabilité et profitabilité du produit en incluant les garanties, nous pouvons remarquer, au niveau de la remise accordée par l'assureur sur la prime unique à payer (ces résultats étant exposés aux tableaux (6.4) et (6.5)), que la surprime à payer sur les *produits 2* est légèrement inférieure (à l'exception du *produit 2* basé sur les espérances élevées de l'INSEE), alors que l'avantage accordé au client dans le cadre du *produit 1* est pour ainsi dire identique. Concernant la garantie 70/130, celle-ci n'a qu'un impact marginal (dû au peu de simulations effectuées) sur la remise, et ce quel que soit le produit considéré. Ces résultats seront détaillés dans la section suivante, traitant de l'interprétation des résultats (section 6.3).

<i>Produit</i>	<i>Remise (1.000 assurés)</i>	<i>Remise (10.000 assurés)</i>
<i>Classique</i>		
<i>Produit 1</i>	0.061%	0.105%
<i>Produit 2 BFP</i>	-1.064%	-1.081%
<i>Produit 2 INSEE basse</i>	-1.018%	-1.024%
<i>Produit 2 INSEE moyenne</i>	-1.163%	-1.167%
<i>Produit 2 INSEE élevée</i>	-1.293%	-1.295%

TABLE 6.4 – Remise sur la prime : rente 5 ans, garantie 90/110

<i>Produit</i>	<i>Remise (1.000 assurés)</i>	<i>Remise (10.000 assurés)</i>
<i>Classique</i>		
<i>Produit 1</i>	0.062%	0.108%
<i>Produit 2 BFP</i>	-1.268%	-1.269%
<i>Produit 2 INSEE basse</i>	-1.278%	-1.273%
<i>Produit 2 INSEE moyenne</i>	-1.282%	-1.279%
<i>Produit 2 INSEE élevée</i>	-1.298%	-1.288%

TABLE 6.5 – Remise sur la prime : rente 5 ans, garantie 70/130

### Risque global

Rappelons avant toute chose que le risque de taux d'intérêt n'était pas du tout pris en compte jusqu'ici, ni au niveau de l'assureur, ni de l'assuré. La structure à terme des taux était alors déterminée par la structure à terme de référence basée sur les taux  $\bar{r}_t$  aux différents instants. Evidemment, cette hypothèse n'était pas réaliste, étant donné que l'assureur est en réalité bel et bien soumis à ce risque de taux. Toutefois, le but étant d'analyser le seul impact de la longévité, nous ne voulions pas faire intervenir un deuxième facteur d'incertitude qui aurait pu induire en erreur les conclusions que nous tirerons à ce propos. En réalité donc, le risque est évidemment plus grand pour l'assureur, et ceci aurait été transcrit dans la prime à payer par le client. Dans cette section, nous tenons donc compte du risque de longévité, mais également du risque de taux d'intérêt. Ces deux risques seront toutefois transférés au client par l'application des facteurs correctifs (5.1) ou (5.2) combiné à (5.7). Même s'il se pourrait donc que la remise accordable au client soit inférieure aux cas évoqués précédemment, gardons bien à l'esprit que ceci n'est pas tout à fait vrai. Si l'on avait inclus le risque de taux d'intérêt dans le chef de l'assureur pour les applications précédentes, il y a fort à parier que le capital à immobiliser aurait été plus conséquent, et la remise dès lors inférieure (ou à tout le moins, les primes auraient été plus élevées).

Nous envisagerons donc de recalculer les valeurs suivantes lorsque nous évoquerons le risque global<sup>8</sup>

$$\text{V.A. class} = \sum_{k=1}^T l_k B(t, k)^{\text{obs}} \quad (6.8)$$

$$\text{V.A. prod1} = \sum_{k=1}^T l_k \left( \prod_{j=0}^{k-1} \frac{p_{x_0+j}^{\text{ref}}(t_0+j)}{p_{x_0+j}^{\text{obs}}(t_0+j)} \right) \left( \frac{B(t, k)^{\text{ref}}(t_0+k)}{B(t, k)^{\text{obs}}(t_0+k)} \right) B(t, k)^{\text{obs}} \quad (6.9)$$

$$\text{V.A. prod2} = \sum_{k=1}^T l_k \left( \frac{e_{65+k}^{\text{ref}}(t_0+k)}{e_{65+k}^{\text{obs}}(t_0+k)} \right) \left( \frac{B(t, k)^{\text{ref}}(t_0+k)}{B(t, k)^{\text{obs}}(t_0+k)} \right) B(t, k)^{\text{obs}} \quad (6.10)$$

Considérons donc à présent le cas où l'assuré serait prêt à supporter la combinaison des risques de longévité et de taux d'intérêt. Présentons rapidement les résultats obtenus en appliquant les facteurs correctifs précités (tableaux (6.6) et (6.7)) pour 1.000 et 10.000 assurés sous forme de tableaux<sup>9</sup>.

	<i>Prime</i>	<i>Surplus</i>	<i>Différence</i>	<i>Gain assureur</i>	<i>Gain assuré</i>
<i>Rente classique</i>	4.359	245.68			
<i>Produit 1</i>	4.188	226.16	1.954	0.002	0.042%
<i>Produit 2, BFP</i>	4.054	828.58	-58.288	-0.052	-1.294%
<i>Produit 2, INSEE basse</i>	4.075	815.25	-56.955	-0.051	-1.258%
<i>Produit 2, INSEE moyenne</i>	4.109	835.07	-58.937	-0.053	-1.291%
<i>Produit 2, INSEE élevée</i>	4.131	840.06	-59.436	-0.053	-1.295%

TABLE 6.6 – Rente 5 ans, 1.000 assurés, risque global

	<i>Prime</i>	<i>Surplus</i>	<i>Différence</i>	<i>Gain assureur</i>	<i>Gain assuré</i>
<i>Rente classique</i>	4.360	1,777.85			
<i>Produit 1</i>	4.189	1,630.77	14.708	0.001	0.032%
<i>Produit 2, BFP</i>	4.054	7,553.00	-577.515	-0.052	-1.282%
<i>Produit 2, INSEE basse</i>	4.076	7,498.29	-572.044	-0.051	-1.263%
<i>Produit 2, INSEE moyenne</i>	4.108	7,680.13	-590.228	-0.053	-1.293%
<i>Produit 2, INSEE élevée</i>	4.129	7,714.89	-593.704	-0.053	-1.294%

TABLE 6.7 – Rente 5 ans, 10.000 assurés, risque global

Rappelons avant tout que l'assuré pourrait bénéficier d'une compensation entre les évolutions de la longévité et des taux d'intérêt (dans le cas où l'une des évolutions serait positive, et l'autre négative). Si l'on analyse les données fournies par les simulations, nous obtenons alors les remises exposées au tableau (6.8). Nous pouvons directement y remarquer que les résultats sont nettement moins stables que dans le cas où seul le facteur correctif de longévité est appliqué. Au niveau des

8. Nous avons en effet procédé de la même manière pour toutes les maturités de rente, c'est-à-dire en ignorant le risque de taux en dehors des sections "Risque global"

9. Dans la suite de ce travail, pour le risque global, nous n'exposerons que la remise sur la prime en terme de résultats chiffrés, afin de ne pas alourdir inutilement celui-ci. Toutefois, les développements exposés à la section 6.3 tiendront compte de l'évolution des autres données chiffrées, et les mettront en exergue pour les cas où cela s'avère nécessaire

remises sur les primes des différents produits (la méthodologie utilisée pour les déterminer étant identique à celle suivie dans le cas où seul le risque de longévité était transféré au client), nous pouvons constater que celles-ci sont tantôt plus favorables, tantôt moins que dans le cas de la rente classique. Nous reviendrons sur la cause de cette constatation lors de l'interprétation des résultats. Nous pouvons toutefois ajouter que cette remise est tout aussi volatile en augmentant la taille du portefeuille. En effet, si l'on s'attarde aux résultats exposés au tableau (6.9), nous pouvons clairement y constater que l'augmentation du nombre d'assurés n'est dans ce cas pas toujours un avantage. Nous détaillerons également pourquoi ultérieurement.

<i>Produit</i>	<i>Remise (1.000 assurés)</i>	<i>Remise (10.000 assurés)</i>
<i>Classique</i>		
<i>Produit 1</i>	0.042%	0.032%
<i>Produit 2 BFP</i>	-1.294%	-1.282%
<i>Produit 2 INSEE basse</i>	-1.258%	-1.263%
<i>Produit 2 INSEE moyenne</i>	-1.291%	-1.293%
<i>Produit 2 INSEE élevée</i>	-1.295%	-1.294%

TABLE 6.8 – Remise sur la prime : rente 5 ans, risque global

<i>Produit</i>	<i>Coefficient</i>
<i>Classique</i>	8.24
<i>Produit 1</i>	9.87
<i>Produit 2 BFP</i>	7.75
<i>Produit 2 INSEE basse</i>	8.82
<i>Produit 2 INSEE moyenne</i>	8.36
<i>Produit 2 INSEE élevée</i>	8.22

TABLE 6.9 – Coefficient multiplicateur du besoin de capital au-delà des primes pour une rente de 5 ans en passant de 1.000 à 10.000 assurés, risque global

## Rente de durée 10 ans

Nous passons à présent à une rente d'une durée de 10 ans, toujours sur base d'une souscription par 1.000 et 10.000 assurés aux différents produits considérés, ces assurés étant tous âgés de 65 ans à la souscription en 2010. Notons que, même si l'effet des différents facteurs correctifs devraient s'accroître sur une rente de cette durée, les adaptations au niveau de la longévité devraient toutefois encore rester relativement faible.

### Risque de mortalité

L'analyse pour cette maturité sera moins détaillée, celle-ci ne faisant pas l'objet de résultats fondamentalement différents de ceux exposés à la section consacrée à la rente de durée égale à 5 ans, et seront de plus largement interprétés dans la section consacrée à l'analyse des résultats. Si l'on s'attarde toutefois quelque peu à l'analyse des tableaux (6.10) et (6.11), nous pouvons remarquer qu'effectivement, les constatations déduites pour les rentes variables de durée 5 ans sont à nouveau valables dans ce cas, en étant même accentuées. En effet, la remise sur la prime pour le *produit 1* sera supérieure à celle offerte dans le cas de la rente de 5 ans. Par contre, pour les

	<i>Prime</i>	<i>Surplus</i>	<i>Différence</i>	<i>Gain assureur</i>	<i>Gain assuré</i>
<i>Rente classique</i>	7.504	1,468.85			
<i>Produit 1</i>	7.422	1,096.18	37.267	3.727	0.452%
<i>Produit 2, BFP</i>	6.897	2,328.60	-85.975	-8.598	-1.122%
<i>Produit 2, INSEE basse</i>	6.964	2,338.58	-86.973	-8.697	-1.124%
<i>Produit 2, INSEE moyenne</i>	7.078	2,385.06	-91.621	-9.162	-1.165%
<i>Produit 2, INSEE élevée</i>	7.216	2,438.12	-96.927	-9.693	-1.209%

TABLE 6.10 – Rente 10 ans, 1.000 assurés

	<i>Prime</i>	<i>Surplus</i>	<i>Différence</i>	<i>Gain assureur</i>	<i>Gain assuré</i>
<i>Rente classique</i>	7.504	10,138.92			
<i>Produit 1</i>	7.422	5,602.43	453.659	45.366	0.550%
<i>Produit 2, BFP</i>	6.897	18,836.04	-869.712	-86.971	-1.135%
<i>Produit 2, INSEE basse</i>	6.964	19,756.98	-961.806	-96.181	-1.243%
<i>Produit 2, INSEE moyenne</i>	7.078	20,472.80	-1,033.388	-103.339	-1.314%
<i>Produit 2, INSEE élevée</i>	7.216	19,887.74	-974.882	-97.488	-1.216%

TABLE 6.11 – Rente 10 ans, 10.000 assurés

*produits 2*, il ne semble toujours pas intéressant de proposer ce produit au client. L'immobilisation de capital sur toute la durée de la rente est en effet toujours supérieure à celle nécessaire pour une rente *classique*. Les conclusions sont identiques lorsque l'on augmente la taille du portefeuille. Nous détaillerons toutefois davantage ces résultats dans la section 6.3.

### Garantie de rente minimum

Si nous permettons maintenant à l'assuré de spécifier une garantie de revenu minimum, qu'advient-il des résultats présentés ci-dessus? Nous constatons aux tableaux (6.12) et (6.13) que, comme pour la rente de 5 ans, la garantie 70/130 ne change pratiquement rien à la remise accordée au client (les différences étant principalement dues au nombre de simulations effectuées), celle-ci n'étant sollicitée par aucun des produits sur cette période. Au niveau de la garantie 90/110, celle-ci trouvera à s'appliquer principalement pour le *produit 2* basé sur les prévisions du BFP (diminuant la surprime à payer par l'assuré, nous détaillerons pourquoi), et pour les *produits 2* basés sur les estimations basses et moyennes de l'INSEE, ce que nous pouvons également constater en annexe au niveau des graphiques représentant l'évolution du dividende payé aux actionnaires sur tout la période (figure(6.14)).

<i>Produit</i>	<i>Remise (1.000 assurés)</i>	<i>Remise (10.000 assurés)</i>
<i>Classique</i>		
<i>Produit 1</i>	0.450%	0.548%
<i>Produit 2 BFP</i>	-1.032%	-1.027%
<i>Produit 2 INSEE basse</i>	-1.059%	-1.168%
<i>Produit 2 INSEE moyenne</i>	-1.113%	-1.278%
<i>Produit 2 INSEE élevée</i>	-1.202%	-1.201%

TABLE 6.12 – Remise sur la prime : rente 10 ans, garantie 90/110

<i>Produit</i>	<i>Remise (1.000 assurés)</i>	<i>Remise (10.000 assurés)</i>
<i>Classique</i>		
<i>Produit 1</i>	0.453%	0.552%
<i>Produit 2 BFP</i>	-1.131%	-1.133%
<i>Produit 2 INSEE basse</i>	-1.119%	-1.239%
<i>Produit 2 INSEE moyenne</i>	-1.159%	-1.319%
<i>Produit 2 INSEE élevée</i>	-1.198%	-1.219%

TABLE 6.13 – Remise sur la prime : rente 10 ans, garantie 70/130

### Risque global

Incluons à présent le risque de taux d'intérêt dans les produits de rente variable. Nous remarquons alors au tableau (6.14) qu'à nouveau, les remises sur la prime sont nettement plus aléatoires, indiquant *a priori* que le nombre de simulations effectuées est trop faible que pour pouvoir réellement se baser sur ces chiffres. Nous reviendrons en détail sur cette réflexion dans la section 6.3.

<i>Produit</i>	<i>Remise (1.000 assurés)</i>	<i>Remise (10.000 assurés)</i>
<i>Classique</i>		
<i>Produit 1</i>	0.488%	0.533%
<i>Produit 2 BFP</i>	-1.110%	-1.121%
<i>Produit 2 INSEE basse</i>	-1.186%	-1.202%
<i>Produit 2 INSEE moyenne</i>	-1.172%	-1.148%
<i>Produit 2 INSEE élevée</i>	-1.199%	-1.204%

TABLE 6.14 – Remise sur la prime : rente 10 ans, risque global

### Rente de durée 20 ans

Pour une rente de maturité égale à 20 ans, nous devrions réellement commencer à constater des effets bénéfiques tant pour l'assuré que pour l'assureur au niveau de l'économie de capital à immobiliser. Présentons les résultats obtenus par simulation pour les différents produits envisagés, afin de voir si notre intuition semble justifiée.

### Risque de mortalité

C'est sans aucun doute au niveau du risque de mortalité que nous devrions assister aux changements les plus conséquents. En effet, la distribution des montants d'arrérages devrait commencer à être plus étendue (moins concentrée autour de la moyenne) pour une rente *classique*, tandis que les facteurs correctifs appliqués à nos rentes variables éviteraient de prendre en compte cette volatilité plus conséquente. L'immobilisation de capital nécessaire à la garantie de la solvabilité de l'assureur devrait donc être moins conséquente au niveau des rentes variables ainsi créées, le risque de longévité étant transféré au client. De ce fait, l'apport en capital des actionnaires devrait lui aussi être inférieur, et les bénéfices en découlant seraient alors partagés entre l'assureur et les assurés.

	<i>Prime</i>	<i>Surplus</i>	<i>Différence</i>	<i>Gain assureur</i>	<i>Gain assuré</i>
<i>Rente classique</i>	11.136	6,139.11			
<i>Produit 1</i>	10.781	3,449.28	268.983	26.898	2.246%
<i>Produit 2, BFP</i>	10.256	4,498.63	164.048	16.405	1.440%
<i>Produit 2, INSEE basse</i>	10.252	4,444.69	169.462	16.946	1.488%
<i>Produit 2, INSEE moyenne</i>	10.496	4,593.14	154.597	15.460	1.326%
<i>Produit 2, INSEE élevée</i>	10.771	4,752.31	138.680	13.868	1.159%

TABLE 6.15 – Rente 20 ans, 1.000 assurés

	<i>Prime</i>	<i>Surplus</i>	<i>Différence</i>	<i>Gain assureur</i>	<i>Gain assuré</i>
<i>Rente classique</i>	11.133	52,704.93			
<i>Produit 1</i>	10.778	19,161.40	3,354.353	335.435	2.801%
<i>Produit 2, BFP</i>	10.253	33,656.00	1,904.893	190.489	1.672%
<i>Produit 2, INSEE basse</i>	10.249	33,879.79	1,882.514	188.251	1.653%
<i>Produit 2, INSEE moyenne</i>	10.493	34,784.05	1,792.088	179.209	1.537%
<i>Produit 2, INSEE élevée</i>	10.768	35,500.06	1,720.487	172.049	1.438%

TABLE 6.16 – Rente 20 ans, 10.000 assurés

Effectivement, nous pouvons constater aux tableaux (6.15) et (6.16) qu'à présent toutes les formules envisagées au niveau de l'adaptation des arrérages en fonction de la longévité observée offrent un avantage tant à l'assureur qu'aux assurés. Cette constatation est à présent également valable pour les *produits 2*, nous en analyserons la cause dans la section suivante détaillant l'évolution des résultats obtenus. De plus, cet avantage est d'autant plus conséquent que le portefeuille de la compagnie est grand. Le coefficient multiplicatif est en effet inférieur à celui nécessaire pour passer de 1.000 à 10.000 assurés pour une rente *classique*, la diversification jouant alors pleinement son rôle dans le cadre d'étude envisagé.

Etant donné que les *produits 2* semblent être profitables à partir d'une maturité de 20 ans, nous pourrions envisager, comme cela se fait par exemple aux Etats-Unis, une rente variable à partir d'un certain âge. Ainsi, l'assuré se verrait offrir une rente fixe sur les 10 ou 15 premières années après la souscription (lorsque l'application du facteur correctif augmente le capital à immobiliser par rapport à une rente *classique*), et cette rente deviendrait ensuite variable, les arrérages étant adaptés par les facteurs correctifs envisagés (à condition bien sûr que l'assuré soit toujours en vie). Il s'agirait alors d'une sorte de rente variable différée, combinée à une rente fixe d'une durée déterminée. Commercialement, ce produit est tout à fait envisageable tant sa construction semble pouvoir correspondre aux besoins des assurés, leur faisant même bénéficier d'une remise sur la prime. Notons toutefois qu'il faudrait alors à nouveau effectuer toutes les simulations en différant la date de souscription (de 2010 à 2020 ou 2025) et l'âge de départ (de 65 à 75 ou 80 ans). Malheureusement, par manque de temps, nous n'avons pu procéder à cette analyse. Il nous apparaît toutefois clair que l'idéologie sous-jacente devrait confirmer les résultats ainsi obtenus, et permettre un produit particulièrement attrayant pour le client. Notons encore que ce genre de produit est parfois proposé aux Etats-Unis avec une adaptation à l'inflation, ces derniers étant alors d'autant plus intéressants (mais également plus risqués pour l'assureur, celui-ci devant également tenir compte de l'inflation future).

<i>Produit</i>	<i>Coefficient</i>
<i>Classique</i>	8.59
<i>Produit 1</i>	5.72
<i>Produit 2 BFP</i>	7.59
<i>Produit 2 INSEE basse</i>	7.65
<i>Produit 2 INSEE moyenne</i>	7.60
<i>Produit 2 INSEE élevée</i>	7.57

TABLE 6.17 – Coefficient multiplicateur du besoin de capital au-delà des primes pour une rente de 20 ans en passant de 1.000 à 10.000 assurés

### Garantie de rente minimum

Si l'on applique un seuil minimum (et maximum) à l'adaptation de la rente, nous pouvons constater aux tableaux (6.18) et (6.19) que pour la garantie 90/110, celle-ci intervient désormais dans tous les cas de figure, à l'exception du *produit 2* INSEE élevée. A présent, le *produit 1* est donc également concerné par cette garantie, faisant (sensiblement) diminuer la remise accordée par l'assureur. Notons également que dorénavant, l'effet de cette garantie pour les *produits 2* s'inverse, c'est-à-dire qu'il ne bénéficie plus à la remise (il la réduit). Nous verrons pourquoi par la suite. Pour la garantie 70/130, celle-ci n'intervient toujours à aucun niveau.

<i>Produit</i>	<i>Remise (1.000 assurés)</i>	<i>Remise (10.000 assurés)</i>
<i>Classique</i>		
<i>Produit 1</i>	1.630%	1.833%
<i>Produit 2 BFP</i>	1.257%	1.266%
<i>Produit 2 INSEE basse</i>	1.479%	1.587%
<i>Produit 2 INSEE moyenne</i>	1.322%	1.531%
<i>Produit 2 INSEE élevée</i>	1.162%	1.443%

TABLE 6.18 – Remise sur la prime : rente 20 ans, garantie 90/110

<i>Produit</i>	<i>Remise (1.000 assurés)</i>	<i>Remise (10.000 assurés)</i>
<i>Classique</i>		
<i>Produit 1</i>	2.243%	2.785%
<i>Produit 2 BFP</i>	1.435%	1.668%
<i>Produit 2 INSEE basse</i>	1.484%	1.647%
<i>Produit 2 INSEE moyenne</i>	1.321%	1.532%
<i>Produit 2 INSEE élevée</i>	1.153%	1.434%

TABLE 6.19 – Remise sur la prime : rente 20 ans, garantie 70/130

### Risque global

Au niveau du risque global, nous constatons au tableau (6.20) que l'instabilité due au peu de simulations effectuées est toujours bien présente, et ce car les arrérages dépendent à présent de deux variables pouvant présenter quatre cas de figures différents au niveau des résultats. Nous

détaillerons davantage cette observation dans l'interprétation des résultats (section 6.3). Nous pouvons toutefois constater que les remises sont toutes positives.

<i>Produit</i>	<i>Remise (1.000 assurés)</i>	<i>Remise (10.000 assurés)</i>
<i>Classique</i>		
<i>Produit 1</i>	2.108%	2.922%
<i>Produit 2 BFP</i>	1.482%	1.624%
<i>Produit 2 INSEE basse</i>	1.296%	1.702%
<i>Produit 2 INSEE moyenne</i>	1.293%	1.318%
<i>Produit 2 INSEE élevée</i>	1.168%	1.249%

TABLE 6.20 – Remise sur la prime : rente 20 ans, risque global

### Rente de durée 30 ans

La plupart des observations faites pour les rentes d'une durée de 20 ans peuvent s'extrapoler à cette nouvelle maturité (à l'exception de la garantie 70/130, trouvant une première application à cette maturité). Comme nous pouvons le voir aux tableaux (6.21) et (6.22), les effets bénéfiques des produits envisagés au niveau de l'adaptation à la longévité observée sont amplifiés par la durée plus longue de la rente. En effet, plus celle-ci sera longue, plus les mouvements erratiques de bout de table auront un impact sur les rentes *classiques*. Au niveau des rentes variables, ces impacts devraient être nettement moins forts, le risque étant principalement transféré au client. Ce dernier bénéficiera toutefois de remises substantielles sur sa prime, calculée par principe d'équivalence actuarielle, et donc prenant en compte le fait que ses arrérages seront adaptés. Ce dernier aurait alors un intérêt certain à souscrire à ce type de produit si une adaptation de ses arrérages n'est pour lui pas inconcevable au niveau de sa situation financière à ce moment de sa vie.

### Risque de mortalité

Effectivement, comme nous pouvons le constater au regard des tableaux (6.21) et (6.22), il s'avère que les produits ainsi envisagés semblent particulièrement intéressants pour des maturités aussi lointaines (jusqu'à 95 ans en 2040). Nous analyserons en détail les principaux changements induits par cette maturité lors de l'interprétation des résultats, à la section suivante, mais gageons déjà que les remises dépassent à présent les 5% dans le cadre du *produit 1*, ce qui devient donc relativement conséquent. Rappelons toutefois que, même si l'adaptation des arrérages est déjà prise en compte dans la tarification des différents produits, le client doit tout de même accepter de voir ces derniers varier à un moment où celui-ci pourrait en avoir grandement besoin (la tarification ne tenant compte que de l'adaptation *moyenne* des arrérages), étant donné qu'il risque d'avoir épuisé la plupart de ses ressources financières depuis sa pension. Même si d'un point de vue technique ces différents produits commencent visiblement à prendre tout leur sens, il n'est pas certain que d'un point de vue commercial cela soit également le cas.

### Garantie de rente minimum

Comme nous l'avons souligné, la garantie 70/130 va trouver sa première application pour cette maturité et pour le *produit 1*. Concernant la garantie 90/110, l'application de celle-ci est toujours identique à une rente de durée 20 ans, avec toutefois un impact (très) important au niveau du *produit 1*. On peut en effet vérifier à la figure (6.7) que celle-ci va intervenir complètement pour plus

	<i>Prime</i>	<i>Surplus</i>	<i>Différence</i>	<i>Gain assureur</i>	<i>Gain assuré</i>
<i>Rente classique</i>	12.226	11,630.77			
<i>Produit 1</i>	11.609	4,929.80	670.097	67.010	5.195%
<i>Produit 2, BFP</i>	11.267	6,502.91	512.786	51.279	4.096%
<i>Produit 2, INSEE basse</i>	11.217	6,286.37	534.440	53.444	4.288%
<i>Produit 2, INSEE moyenne</i>	11.519	6,621.16	500.961	50.096	3.914%
<i>Produit 2, INSEE élevée</i>	11.859	6,858.18	477.259	47.726	3.522%

TABLE 6.21 – Rente 30 ans, 1.000 assurés

	<i>Prime</i>	<i>Surplus</i>	<i>Différence</i>	<i>Gain assureur</i>	<i>Gain assuré</i>
<i>Rente classique</i>	12.226	103,528.82			
<i>Produit 1</i>	11.609	22,691.48	8,083.734	808.373	6.267%
<i>Produit 2, BFP</i>	11.268	44,344.26	5,919.456	591.946	4.728%
<i>Produit 2, INSEE basse</i>	11.217	43,031.80	6,049.702	604.970	4.854%
<i>Produit 2, INSEE moyenne</i>	11.519	45,241.40	5,828.742	582.874	4.554%
<i>Produit 2, INSEE élevée</i>	11.859	49,082.83	5,444.599	544.460	4.232%

TABLE 6.22 – Rente 30 ans, 10.000 assurés

de la moitié de la période entre 20 et 30 ans. L'adaptation nettement moindre du facteur correctif va dès lors provoquer une dispersion largement plus conséquente<sup>10</sup> au niveau de la distribution des montants d'arrérages totaux (d'autant plus que la variabilité du nombre de survivants à ces âges est élevée), et ainsi provoquer une chute conséquente sur la remise à laquelle pourrait consentir l'assureur. Nous reviendrons toutefois sur ce point dans la section 6.3. Les résultats sont présentés aux tableaux (6.23) et (6.24).

<i>Produit</i>	<i>Remise (1.000 assurés)</i>	<i>Remise (10.000 assurés)</i>
<i>Classique</i>		
<i>Produit 1</i>	1.963%	2.075%
<i>Produit 2 BFP</i>	3.479%	3.486%
<i>Produit 2 INSEE basse</i>	2.527%	2.454%
<i>Produit 2 INSEE moyenne</i>	3.817%	4.141%
<i>Produit 2 INSEE élevée</i>	3.655%	4.125%

TABLE 6.23 – Remise sur la prime : rente 30 ans, garantie 90/110

### Risque global

En incluant le risque de taux d'intérêts et le facteur correctif correspondant dans la variabilité de la rente, qu'advient-il des résultats obtenus? Ceux-ci sont exposés au tableau (6.25) où nous constatons que la remise sur la prime est à nouveau positive. Nous tenterons d'expliquer ce phénomène dans l'interprétation des résultats.

10. Se rapprochant ainsi de la dispersion de la distribution constatée au niveau de la rente *classique* pour des âges aussi élevés.

<i>Produit</i>	<i>Remise (1.000 assurés)</i>	<i>Remise (10.000 assurés)</i>
<i>Classique</i>		
<i>Produit 1</i>	4.905%	5.820%
<i>Produit 2 BFP</i>	4.087%	4.733%
<i>Produit 2 INSEE basse</i>	4.263%	4.872%
<i>Produit 2 INSEE moyenne</i>	3.891%	4.600%
<i>Produit 2 INSEE élevée</i>	3.585%	4.154%

TABLE 6.24 – Remise sur la prime : rente 30 ans, garantie 70/130

<i>Produit</i>	<i>Remise (1.000 assurés)</i>	<i>Remise (10.000 assurés)</i>
<i>Classique</i>		
<i>Produit 1</i>	5.204%	6.019%
<i>Produit 2 BFP</i>	4.221%	4.910%
<i>Produit 2 INSEE basse</i>	4.130%	4.746%
<i>Produit 2 INSEE moyenne</i>	4.001%	4.598%
<i>Produit 2 INSEE élevée</i>	3.882%	4.394%

TABLE 6.25 – Remise sur la prime : rente 30 ans, risque global

## Rente de durée 40 ans

Enfin, attardons-nous au cas extrême où l'assuré souhaiterait se couvrir jusqu'à l'âge de 105 ans. Au vu du caractère fort erratique que présente la mortalité pour ces âges particulièrement élevés (rappelons-nous que l'étude menée ici porte sur la population masculine), l'adaptation de la rente par les facteurs correctifs de longévité pourrait devenir particulièrement intéressante, d'une part au niveau de la remise sur la prime, mais également car le facteur correctif du *produit 1* semble présenter une allure qui pourrait intéresser l'assuré au plus au point (revenant, pour le quantile 0.5, à un niveau proche de 100%). Celui-ci pourrait donc bénéficier de la remise sur la prime, sans toutefois devoir faire un sacrifice trop important sur le montant de ses arrérages en fin de vie, si ce dernier parvient cependant à survivre jusqu'à ces âges. Notons qu'au vu du peu d'assurés survivant jusqu'alors, ce facteur correctif présente également un caractère très volatile (l'intervalle de confiance est particulièrement large).

## Risque de mortalité

Nous pouvons effectivement constater aux tableaux (6.26) et (6.27) que la remise sur la prime devient relativement conséquente pour un assuré souhaitant se couvrir pour une période aussi longue. Notons donc les résultats encourageants pour l'ensemble de la période, exposés aux tableaux (6.26) et (6.27). Nous commenterons juste après les nombreux changements intervenus au niveau des remises accordées par l'assureur pour chaque maturité, et terminant ainsi sur une note particulièrement positive pour une maturité aussi longue (même dans le cas des *produits 2*).

## Garantie de rente minimum

Passons à présent à l'analyse des résultats si l'on inclut à nouveau deux niveaux de garantie (présentés aux tableaux (6.28) et (6.29)). L'on peut constater que la garantie 90/110 sert à présent quel que soit le produit analysé. L'impact est particulièrement important au niveau du *produit 1*,

	<i>Prime</i>	<i>Surplus</i>	<i>Différence</i>	<i>Gain assureur</i>	<i>Gain assuré</i>
<i>Rente classique</i>	12.345	13,877.53			
<i>Produit 1</i>	11.683	5,268.46	860.907	86.091	6.632%
<i>Produit 2, BFP</i>	11.378	7,582.97	629.456	62.946	4.979%
<i>Produit 2, INSEE basse</i>	11.320	7,283.00	659.453	65.945	5.243%
<i>Produit 2, INSEE moyenne</i>	11.630	7,716.21	616.132	61.613	4.768%
<i>Produit 2, INSEE élevée</i>	11.979	8,195.36	568.217	56.822	4.269%

TABLE 6.26 – Rente 40 ans, 1.000 assurés

	<i>Prime</i>	<i>Surplus</i>	<i>Différence</i>	<i>Gain assureur</i>	<i>Gain assuré</i>
<i>Rente classique</i>	12.338	124,170.99			
<i>Produit 1</i>	11.677	17,495.11	10,667.588	1066.759	8.222%
<i>Produit 2, BFP</i>	11.372	54,297.63	6,987.336	698.734	5.530%
<i>Produit 2, INSEE basse</i>	11.315	47,972.01	7,619.818	761.982	6.061%
<i>Produit 2, INSEE moyenne</i>	11.624	51,094.78	7,307.621	730.762	5.658%
<i>Produit 2, INSEE élevée</i>	11.973	54,541.34	6,962.965	696.297	5.234%

TABLE 6.27 – Rente 40 ans, 10.000 assurés

et fait lourdement chuter la remise accordée. Le même constat peut être établi au niveau du *produit 2*, prévision INSEE basse, où la garantie joue alors un rôle considérable dans les montants d'arrérage. Au niveau de la garantie 70/130, seul le *produit 1* est concerné. Nous reviendrons sur cette constatation juste après.

<i>Produit</i>	<i>Remise (1.000 assurés)</i>	<i>Remise (10.000 assurés)</i>
<i>Classique</i>		
<i>Produit 1</i>	2.307%	2.326%
<i>Produit 2 BFP</i>	3.617%	3.777%
<i>Produit 2 INSEE basse</i>	2.630%	2.629%
<i>Produit 2 INSEE moyenne</i>	4.052%	4.591%
<i>Produit 2 INSEE élevée</i>	4.084%	4.947%

TABLE 6.28 – Remise sur la prime : rente 40 ans, garantie 90/110

<i>Produit</i>	<i>Remise (1.000 assurés)</i>	<i>Remise (10.000 assurés)</i>
<i>Classique</i>		
<i>Produit 1</i>	5.454%	6.114%
<i>Produit 2 BFP</i>	4.898%	5.470%
<i>Produit 2 INSEE basse</i>	5.228%	5.957%
<i>Produit 2 INSEE moyenne</i>	4.724%	5.577%
<i>Produit 2 INSEE élevée</i>	4.222%	5.129%

TABLE 6.29 – Remise sur la prime : rente 40 ans, garantie 70/130

### Risque global

Au niveau du risque global, les résultats exposés au tableau (6.30) présente désormais un avantage conséquent au niveau de l'immobilisation de capital. Ceci est dû à deux facteurs que nous détaillerons dans l'interprétation des résultats, qui suit directement. Notons que l'augmentation de la taille du portefeuille a dorénavant un effet positif sur la remise accordée au client (nous constatons en effet au tableau (6.31) que le coefficient multiplicateur du besoin en capital au-delà des primes est à présent inférieur pour les produits créés que pour une rente *classique*).

<i>Produit</i>	<i>Remise (1.000 assurés)</i>	<i>Remise (10.000 assurés)</i>
<i>Classique</i>		
<i>Produit 1</i>	6.841%	7.892%
<i>Produit 2 BFP</i>	5.203%	5.621%
<i>Produit 2 INSEE basse</i>	5.289%	6.128%
<i>Produit 2 INSEE moyenne</i>	4.927%	5.901%
<i>Produit 2 INSEE élevée</i>	4.402%	5.412%

TABLE 6.30 – Remise sur la prime : rente 40 ans, risque global

## 6.3 Interprétation des résultats et conclusion

Après avoir présenté l'ensemble des résultats, passons à présent à une analyse détaillée des changements constatés au niveau des remises sur les primes pour les différents produits.

### *Produit 1*

#### Sans garantie

Au niveau du *produit 1*, nous pouvons constater qu'il est le seul à présenter une remise sur la prime toujours positive, quelle que soit la maturité de la rente. Ceci n'est toutefois pas vraiment étonnant. En effet, rappelons qu'il est le seul produit, d'un point de vue technique, à être directement lié aux probabilités de survie (et donc au nombre de survivants) observées. En effet, nous constatons que la variabilité du facteur correctif est étroitement liée à celle des probabilités de survie futures simulées. Si l'on multiplie donc les  $l_x$  (basés sur les  $p_x^{\text{obs}}$  cumulés) par le facteur  $\prod_{j=0}^{k-1} \left( \frac{p_{x_0+j}^{\text{ref}}(t_0+j)}{p_{x_0+j}^{\text{obs}}(t_0+j)} \right)$ , ceci devrait stabiliser les *cash-flows* de l'assureur, ramenant ces derniers à

<i>Produit</i>	<i>Coefficient</i>
<i>Classique</i>	8.79
<i>Produit 1</i>	6.96
<i>Produit 2 BFP</i>	7.69
<i>Produit 2 INSEE basse</i>	7.70
<i>Produit 2 INSEE moyenne</i>	7.69
<i>Produit 2 INSEE élevée</i>	7.70

TABLE 6.31 – Coefficient multiplicateur du besoin de capital au-delà des primes pour une rente de 40 ans, risque global, en passant de 1.000 à 10.000 assurés

un niveau plus proche des  $p_{x_0+j}^{\text{ref}}(t_0 + j)$ . Ainsi, ce produit, le plus important de ce travail de recherche étant donné qu'il découle directement des tables prospectives établies, permet à l'assureur d'offrir une réduction sur la prime aux assurés. Ceci est dû au fait que le facteur correctif (5.1) appliqué aux arrérages permet donc de transférer de manière adéquate le risque de longévité au client. De la sorte, l'assureur a donc moins de capital à immobiliser, la distribution des montants totaux d'arrérages futurs étant davantage rassemblée que dans le cas de la rente *classique* grâce à l'application de ce facteur. Ainsi, bien que l'assuré accepte de supporter le risque de longévité en souscrivant à une telle rente, il faut toutefois souligner que celui-ci en retire donc un avantage substantiel (croissant avec la maturité de la rente). Bien que de petits écarts peuvent apparaître au niveau des résultats (ceci aurait pu être évité en augmentant le nombre de simulations), nous pouvons résumer le comportement des remises pour ce produit de la façon suivante :

- la remise est croissante avec la maturité de la rente. Plus celle-ci sera longue, et plus la remise accordée pourra être élevée. En effet, c'est aux âges les plus avancés que la volatilité de la longévité se fera le plus ressentir au niveau de l'assureur (celle-ci intervenant de surcroît dans de nombreuses années). Si ce dernier parvient à transférer ce risque au client, l'immobilisation de capital nécessaire s'en trouve alors grandement réduite, tout comme le coût qui en découle donc ;
- cette remise est toujours positive, le risque de longévité est donc bel et bien transféré au client de façon adéquate (réduisant la volatilité des résultats de l'assureur). Le lien entre ces deux notions vient du moindre montant de capital à immobiliser ;
- notons également que la remise est toujours plus conséquente dans le cas d'un portefeuille de 10.000 assurés que dans le cas de 1.000 assurés, et ce, quelle que soit la maturité de rente considérée. Les déviations autour des tables prospectives futures étant d'autant plus réduites, l'assureur peut donc consentir à une remise plus élevée.

Notons encore que ce produit, transférant le risque de longévité de façon adéquate, aurait alors toutes les chances d'être un succès pour la compagnie d'assurance, à deux conditions toutefois :

1. que l'assuré soit disposé à prendre en charge ce risque de longévité, en échange d'une remise sur sa prime (nous avons déjà évoqué les réserves que l'on pourrait émettre à ce propos). Il faudra de plus de sérieux talents au niveau des services de *marketing* de la compagnie pour faire comprendre à l'assuré que l'adaptation moyenne de ses arrérages est déjà prise en compte au niveau de la prime, inférieure à celle d'une rente *classique*, et que la remise accordée sur celle-ci est effectivement un avantage net (découlant uniquement du moindre capital à immobiliser, et non de la diminution de ses arrérages) ;
2. que les estimations faites par la compagnie d'assurance à l'aide du modèle de Lee & Carter correspondent à la réalité future. Nous évoquerons dans la conclusion de ce mémoire les principaux désavantages présentés par celui-ci, et quelques pistes de réflexion pour y faire face.

### Avec garanties de rendement

Notons tout d'abord que ces garanties n'interviennent pas toujours. En effet, nous pouvons constater que celles-ci n'ont un impact que pour une rente de durée au moins égale à 20 ans pour la garantie 90/110, et d'au moins 30 ans pour la garantie 70/130. Toutefois, l'effet de l'inclusion des garanties est toujours le même, à savoir qu'il diminue la remise accordable. En effet, le facteur correctif appliqué diminuant *de facto* la volatilité des *cash-flows* futurs pour l'assureur, si l'effet de celui-ci est restreint, la volatilité augmente alors (la volatilité des  $l_x$  étant moins compensée par

le facteur), tout comme l'écart entre les primes perçues et le capital à immobiliser. L'assureur ne peut dès lors offrir une réduction sur la prime aussi élevée que dans le cas sans garantie. Notons cependant que cela n'est pas sans intérêt pour le client, celui-ci préférant peut-être une remise moins élevée, mais avec la garantie de toucher un montant minimum chaque année. En effet, il est raisonnable de penser que l'assuré souhaitera toucher un montant minimum défini au préalable afin de garantir ses revenus financiers, et ce, quitte à accepter une réduction moins importante sur sa prime.

## **Produit 2, BFP**

### **Sans garantie**

Remarquons avant toute chose que, comme nous le pressentions, l'adaptation des arrérages sur base de ce facteur est nettement plus lisse et stable que dans le cas du facteur basé sur les probabilités de survie brutes<sup>11</sup>. Notons cependant que l'intervalle de confiance en découlant est relativement large, et ce, dès le début de la période (nous avons déjà évoqué le fait que l'écart moyen présent dès le début de la période est dû au décalage de date entre les bases de données choisies ainsi qu'au niveau de la méthodologie utilisée pour les projections, et que de plus nous avons basé nos simulations sur les données HMD plutôt que sur celles du BFP, pour des raisons essentiellement techniques évoquées précédemment). Afin de pouvoir commercialiser un tel produit, il conviendrait cependant de normaliser ces facteurs en début de période, afin que ceux-ci démarre à un niveau de 100% (ceci n'ayant toutefois aucun impact sur l'intervalle de confiance observé).

Au niveau du "comportement" de l'évolution du pourcentage de remise accordable en fonction de la maturité de la rente, celui-ci est ici totalement différent. Ainsi, il apparaît que la "remise" est au début négative, ce qui signifie que l'application du facteur correctif (5.2) disperse la distribution des arrérages. Nous envisageons deux causes possibles à cela : d'une part, n'oublions pas que l'espérance de vie prend en compte l'ensemble des espérances de vie futures (au-delà de l'âge considéré de départ, c'est-à-dire 65 ans dans notre cas). Pour les rentes de maturité courte, il s'avère donc possible que cela ait un impact négatif. En effet, les prévisions du nombre de survivants à court terme peuvent être relativement précises, plus d'ailleurs que l'ensemble des espérances de vie futures. D'autre part, et cette raison est d'après nous plus pertinente, nous pouvons remarquer que la variabilité du facteur correctif est assez forte sur toute la période. Toutefois, celle-ci reste relativement constante, contrairement à la variabilité du nombre de survivants, qui elle va croître dans le temps. Ainsi, il s'avère que l'application de ce facteur a un impact négatif sur les premières rentes (de maturité 5 et 10 ans), mais qu'au-delà, en raison de la variabilité accrue des  $l_x$ , celui-ci finit par avoir un effet bénéfique sur la distribution des *cash-flows* futurs. En effet, en multipliant les  $l_x$  par le facteur  $\left(\frac{e_{65+j}^{\text{ref}}(t_0+j)}{e_{65+j}^{\text{obs}}(t_0+j)}\right)$ , dont la variabilité dépend exclusivement des  $e_{65+j}^{\text{obs}}(t_0+j)$ , nous constatons alors que la variabilité supérieure de ces derniers en début de période disperse la distribution. Par contre, une fois la variabilité des  $l_x$  supérieure à celle des  $e_{65+j}^{\text{obs}}(t_0+j)$ , ceux-ci étant au dénominateur du facteur correctif, ce dernier va alors davantage rassembler la distribution des *cash-flows* futurs, et ainsi diminuer le besoin en capital à immobiliser.

Nous pouvons encore émettre deux remarques à propos de l'application de ce facteur : la taille du portefeuille a un effet nettement moindre sur la remise accordable que dans le cas du *produit 1*

---

11. Voir à ce propos les figures (6.4) et (6.5).

et le nombre de simulations effectuées devrait idéalement être augmenté. En effet, ce facteur n'est qu'indirectement lié aux fluctuations du nombre de survivant, l'effet de l'augmentation du nombre d'assurés en portefeuille étant alors moins conséquent, même si celui-ci s'observe dans quelques cas, mais de façon plus nuancée. Enfin, notons que l'augmentation du nombre de simulations aurait eu dans ce cas un effet bien plus bénéfique. En effet, nous pouvons clairement remarquer aux figures (6.4) et (6.5) que ces facteurs subissent de temps à autre des "bosses" dans la variabilité de ceux-ci avec 1.000 simulations. Ceci explique les quelques résultats pouvant être parfois moins intuitifs observés (notamment au niveau des montants de remise lors de la l'application de garanties). Passons justement à l'analyse de ces cas.

### **Avec garanties de rendement**

Il est intéressant de noter que la garantie 70/130 ne trouvera jamais à s'appliquer pour ce produit, même si le facteur avait été normalisé. En effet, la volatilité de celui-ci est relativement constante sur toute la période, comme nous l'avons déjà évoqué, et n'atteint jamais de tels seuils. Cet argument sera d'ailleurs à présenter au client.

Au niveau de la garantie 90/110, nous pouvons par contre constater que celle-ci joue tout au long de la période, et protège l'assuré contre une réduction trop importante de ses arrérages. Notons que si nous avions procédé à une normalisation préalable du facteur, cette garantie n'aurait pas non plus eu à s'exercer. Toutefois, ceci n'ayant pas été fait, l'effet de la garantie sur la remise accordable est alors différent suivant la maturité concernée. En effet, comme nous l'avons souligné, l'application de ce facteur est, dans un premier temps, négatif au niveau du capital à immobiliser. Dans ce cas, une diminution de l'effet de ce facteur grâce à l'inclusion de la garantie aura alors un effet "positif" sur la remise accordable. Notons qu'il s'agit en fait d'une "diminution de la surprime" à payer (remise négative) pour les rentes de 5 et 10 ans. Au-delà, la variabilité du nombre de survivant ayant dépassée celle du facteur correctif (dont la variabilité est au dénominateur), celui-ci devenant donc bénéfique, la garantie aura donc, comme dans le cas du *produit 1*, un impact négatif sur la remise accordable, diminuant cette dernière.

## ***Produit 2, INSEE***

### **Sans garantie**

Comme nous avons pu le constater, l'effet de l'application du facteur correctif basé sur les espérances de vie au niveau des arrérages fut fort différent, que l'on envisage les prévisions basses, moyennes ou élevées de cet organisme. Au niveau de l'interprétation purement intuitive et économique tout d'abord, nous avons pu nous rendre compte que la prise en compte des prévisions basses n'avait guère de sens. En effet, rares devraient être les assurés souhaitant bénéficier d'arrérages décroissants dans le temps, d'une part car leurs besoins financiers devraient aller, eux, en augmentant avec l'âge (au niveau des soins de santé, des frais éventuels de dépendance de cette personne, etc...) mais de plus car l'inflation positive généralement constatée dans nos contrées ne ferait qu'accroître ce phénomène de décroissance des arrérages. Au niveau des prévisions moyennes, l'intérêt des clients potentiels pourrait être davantage marqué. En normalisant le facteur, on constate ainsi que l'adaptation des arrérages ne devrait pas être trop conséquente, tout en permettant, pour une rente de maturité suffisamment longue, de bénéficier d'une remise sur la prime. Enfin, au niveau des prévisions élevées, même si la remise semble très légèrement inférieure à celle des deux autres cas, l'intérêt de la clientèle devrait être important, étant donné l'évolution probable des arrérages.

Si nous analysons à présent l'évolution des résultats de nos simulations, nous pouvons remarquer que, comme nous l'avons déjà évoqué, l'application de ce facteur correctif n'est toutefois bénéfique que pour des rentes relativement longues. En effet, la variabilité de ce facteur est au début plus importante que celle du nombre de survivants, et pénalise donc l'assureur (et l'assuré) au niveau de l'immobilisation de capital. La cause de ce phénomène est identique à celle observée lorsque les données du BFP sont utilisées comme référence, car la variabilité constatée au niveau du dénominateur du facteur correctif (à savoir les  $e_{65+j}^{\text{obs}}(t_0 + j)$ ) est identique, seul le numérateur étant modifié. La variabilité de ce facteur est alors approximativement la même, surpassant celle des  $l_x$  en début de période, pour ensuite diminuer la variabilité totale de la rente (celle des  $l_x$  étant alors supérieure à celle des  $e_{65+j}^{\text{obs}}(t_0 + j)$  au dénominateur, atténuant dès lors la variabilité des *cash-flows* futurs). Au bout d'un certain temps, l'adaptation des arrérages restant globalement constante et lisse (contrairement à la variabilité croissante des  $l_x$ ), ce produit présentera donc un intérêt au niveau de la remise envisageable sur la prime. Notons qu'à ce point de vue, les résultats sont relativement semblables quelle que soit la référence utilisée (basse, moyenne ou élevée), étant donné à nouveau que la variabilité du dénominateur du facteur correctif reste identique.

### Avec garanties de rendement

Notons avant tout que la variabilité de l'adaptation ne permettra jamais d'atteindre les bornes fixées par la garantie 70/130 d'après nos simulations. Cette dernière n'aura donc jamais d'impact, quelle que soit la maturité ou la référence utilisée au niveau de ce produit. Concernant la garantie 90/110, celle-ci jouera un rôle différent selon la maturité de la rente, et l'effet bénéfique ou non de l'application du facteur (les deux étant liés). Lorsque l'application de celui-ci a un impact négatif, la limitation de ses effets par l'inclusion de la garantie (pour les prévisions moyennes ou basses) aura donc nécessairement un impact positif. *A fortiori*, dans le cas contraire, l'inclusion de la garantie limitera alors la remise accordable. Notons enfin que pour la prévision élevée, la garantie ne jouera qu'en toute fin de période, et pour limiter par le haut l'adaptation de l'arrérage (et ce à un moment où l'application du facteur est particulièrement positive du point de vue de l'immobilisation de capital). Certes, elle limitera donc les montants à payer par l'assureur aux quelques rares survivants, mais augmentera toutefois légèrement le besoin en capital à immobiliser d'après nos simulations (ce besoin supplémentaire restant toutefois fort limité). Cela a bien un sens, car la remise sur la prime ne dépend que de la variabilité de la distribution, et non du montant des *cash-flows* futurs : le fait de limiter ces derniers n'interviendra qu'au niveau de la prime unique réclamée, qui sera alors légèrement moins élevée en incluant la garantie<sup>12</sup>.

Notons enfin que si ces facteurs avaient été normalisés, l'effet de l'inclusion de la garantie aurait été tout autre. En effet, celle-ci aurait bien davantage impacté la rente variable basée sur les prévisions hautes, n'aurait eu aucun impact sur les prévisions moyennes, et aurait par contre eu un impact nettement moins important sur les prévisions basses, modifiant alors considérablement les remises que l'assureur pourrait accorder. Les primes auraient également été adaptées en conséquence pour tenir compte de ces limitations.

---

12. Cette diminution sera toutefois limitée étant donné que ceci n'interviendra que sur peu de périodes, et dans de nombreuses années.

## Risque global

L'analyse des produits prenant en compte tant les risques de longévité que de taux d'intérêt est à notre sens beaucoup plus délicate. En effet, nous pouvons d'ores et déjà déplorer le peu de simulations effectuées. Les deux processus stochastiques pouvant présenter quatre possibilités différentes de combinaison, il est donc difficile d'analyser les effets de ces derniers en ne se basant que sur 1.000 simulations. L'interprétation de ces résultats est donc d'après nous sensiblement dépendante de ce nombre de simulations. Risquons-nous toutefois à une analyse des résultats obtenus.

Dans l'ensemble, nous pouvons constater que l'effet de l'application des différents facteurs correctifs sur cette rente variable, combinant les deux sources de risque, est relativement semblable à l'application du facteur correctif basé sur la longévité, celui-ci semblant jouer un rôle nettement plus prépondérant dans notre analyse de transfert de risque. Ceci est dû à la variabilité relativement faible des taux d'intérêts considérés. Rappelons également que le fait de prendre en compte le taux court terme simulé moyen,  $\bar{r}_t$ , comme référence entraîne donc que l'application du facteur aura autant de chance d'augmenter que de diminuer la rente. Bien entendu, comme nous l'avons déjà évoqué, cette façon de faire n'est pas exacte, mais la structure à terme des taux aux différents pas de temps n'étant pas observable sur le marché, nous devons poser un choix quant à la référence à utiliser.

A ce niveau, il faut noter que les arrérages sont à présent corrigés par deux facteurs, l'un concernant la longévité (et basé soit sur les probabilités de survie, soit sur les espérances de vie), tentant alors de diminuer la variabilité due à cette dernière (au travers des  $l_x$ ), et l'autre concernant les taux d'intérêt, le but étant cette fois de limiter l'impact (pour l'assureur) de la variabilité de l'actualisation. Toutefois, comme nous l'avons déjà évoqué, l'aspect positif ou non de l'application de ces facteurs va dépendre de leur variabilité, comparée à la variabilité des phénomènes qu'ils tentent d'atténuer. Ainsi, au niveau de la longévité, comme nous l'avons déjà souligné, la variabilité des  $l_x$  est au début assez peu conséquente. Si le facteur correctif de longévité présente un intervalle de confiance large (traduisant une variabilité conséquente) sur cette période, l'application de celui-ci dispersera alors la distribution des *cash-flows* futurs. Dans le cas contraire (la variabilité des  $l_x$  étant de plus en plus importante), les éléments variables des facteurs correctifs envisagés étant au dénominateur de ces derniers, ils diminueront alors la dispersion de cette distribution, et donc le capital à immobiliser.

Au niveau des taux d'intérêt et de l'actualisation, la philosophie utilisée est identique. Nous tentons en effet de diminuer la variabilité des facteurs d'actualisation  $B(k, t)^{\text{obs}}$  en appliquant un facteur basé sur le rapport  $\left(\frac{B(k, t)^{\text{ref}}(t_0+t)}{B(k, t)^{\text{obs}}(t_0+t)}\right)$ , afin de transférer ce risque "d'investissement" (l'assureur basant sa tarification en considérant ces rendements futurs) au client. Cependant, notons que ce facteur prend en compte un horizon d'investissement égal à la maturité de la rente. Il considère en effet les taux zéro-coupons mais dans un sens inversé par rapport au taux d'actualisation, c'est-à-dire qu'en  $t = 0$ , nous considérons le rapport des taux d'obligations zéro-coupons ayant comme maturité la maturité de la rente variable. En  $t = 1$ , ce rapport sera cette fois basé sur les taux des obligations zéro-coupons vu depuis cet instant et ayant comme maturité la maturité de la rente (et donc de l'obligation), ce qui fait qu'au total la maturité de l'obligation sera réduite d'un an, et ainsi de suite. D'une manière générale, nous pouvons cependant constater que les remises accordables, même si celles-ci sont nettement moins stables (l'application des deux facteurs correctifs présentant de nombreuses possibilités de combinaison), dépendent toutefois bien davantage

du rapport basé sur le facteur corrigeant l'effet de la longévité (sur les résultats de l'assureur) que de celui basé sur les taux d'intérêts. A nouveau, rappelons que ceci est dû à l'utilisation du taux moyen comme référence, ce qui fait que, tel qu'elle est considérée dans ce travail, la correction du risque de taux d'intérêts présente une utilité nettement moindre.

Terminons donc cette section en notant que ce facteur correctif ne présente pas un intérêt énorme, à tout le moins considéré de cette façon et sur base de ce modèle (rappelons à ce propos que le modèle de Vasicek n'est certainement pas optimal, celui-ci ne parvenant dès le départ pas à calibrer correctement la courbe des taux sans risque observée sur les marchés). En outre, nous avons vu que supposer l'indépendance entre les tables de mortalité et les taux d'intérêts était une façon plaisante de procéder, mais que celle-ci n'était pas tout à fait exacte. Il faudrait donc tenir compte de la corrélation existante entre ces deux variables. Cet aspect des choses est encore largement à explorer à l'heure actuelle. Notons aussi que ce risque de taux d'intérêt est sans doute surestimé dans notre exemple. En réalité, l'assureur placera une partie de ses primes en actifs risqués, en espérant ainsi obtenir un rendement plus élevé. Si celui-ci ne pouvait dès lors investir aux taux sans risques escomptés successivement, il pourrait toutefois espérer bénéficier d'un rendement supérieur au niveau de ses autres actifs financiers (du moins pour certaines années), et ainsi compenser la perte éventuelle due à des taux sans risque inférieurs à ceux espérés.

Certaines améliorations sont donc encore à apporter au niveau de ce facteur correctif de taux d'intérêt, mais l'assureur devra clairement étudier de façon attentive (et complète) la construction de ce dernier, afin d'effectivement transférer ce risque au client décidant de l'accepter en échange d'incitants acceptables.

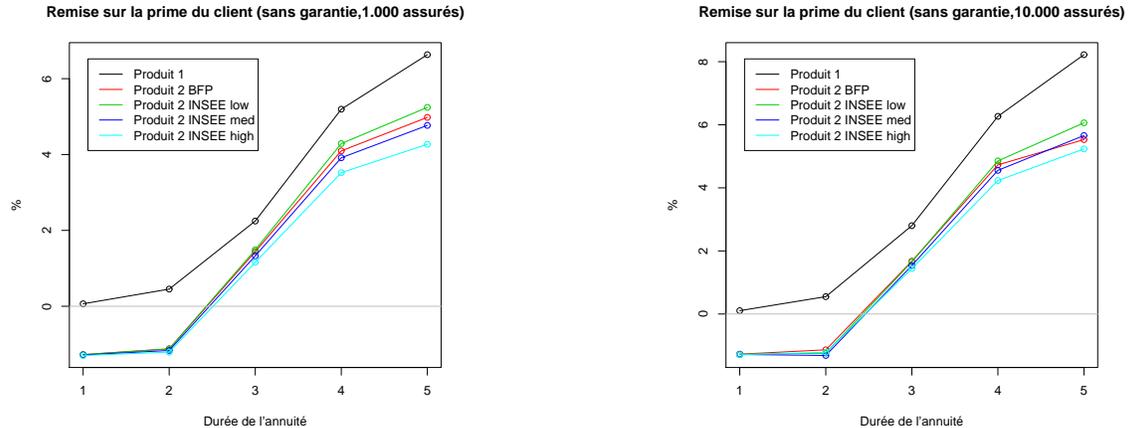


FIGURE 6.9 – Pourcentage de remise que l'assureur peut accorder, en fonction du produit envisagé et de la maturité de la rente, portefeuille de 1.000 (gauche) et 10.000 (droite) polices

## 6.4 Approche commerciale : comment vendre ce produit ?

Au vu des résultats obtenus dans la section 6.2, nous pourrions nous interroger quant à la stratégie *marketing* à adopter par la compagnie d'assurance. En effet, même si le client consent à supporter le risque de longévité, ce contre quoi il s'assure *a priori* en souscrivant à un produit

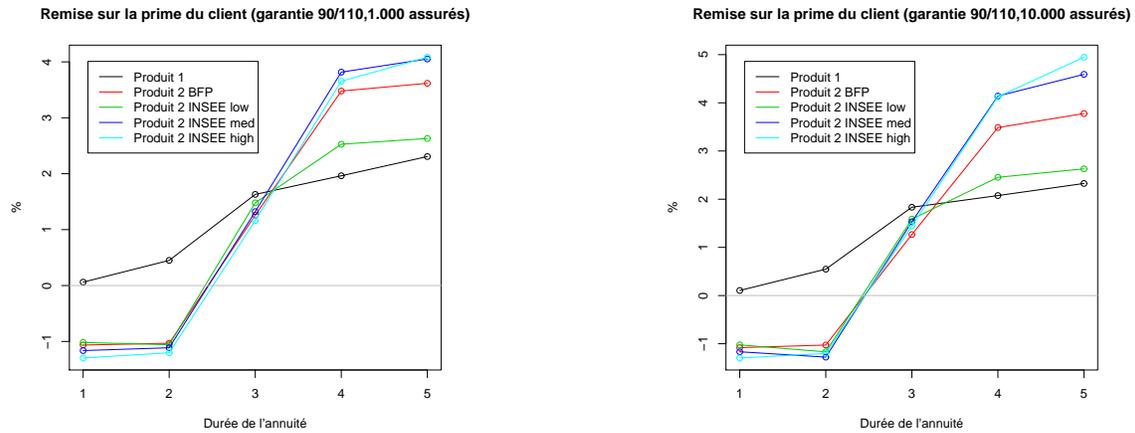


FIGURE 6.10 – Pourcentage de remise que l'assureur peut accorder, en fonction du produit envisagé et de la maturité de la rente, avec une garantie 90% / 110%, portefeuille de 1.000 (gauche) et 10.000 (droite) polices

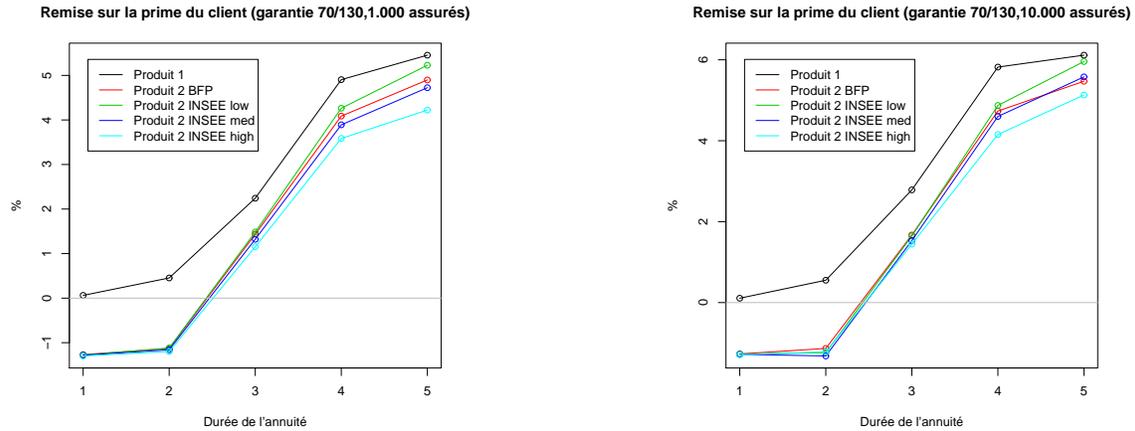


FIGURE 6.11 – Pourcentage de remise que l'assureur peut accorder, en fonction du produit envisagé et de la maturité de la rente, avec une garantie 70% / 130%, portefeuille de 1.000 (gauche) et 10.000 (droite) polices

de rente, celui-ci n'en retire pas moins certains avantages supplémentaires à ceux exposés lors de notre analyse, qui ont d'ailleurs été mis en avant par LÜTHY & AL. [29], qu'il convient de lui faire remarquer. Citons par exemple

1. la prime réclamée au client devrait contenir moins de chargement. En effet, il n'y a désormais plus la nécessité d'inclure un chargement pour tenir compte de l'évolution de la longévité (exigé par le régulateur) étant donné que l'assureur n'a plus à supporter ce risque (ou du moins ce chargement devrait être considérablement réduit) ;
2. le client dispose d'un "potentiel à la hausse". En cas de détérioration de la longévité comparée aux prévisions (par exemple en cas d'augmentation brutale de la mortalité due à une épidémie, une catastrophe naturelle ou autre), le client se verra accordé des rentes plus importantes ;

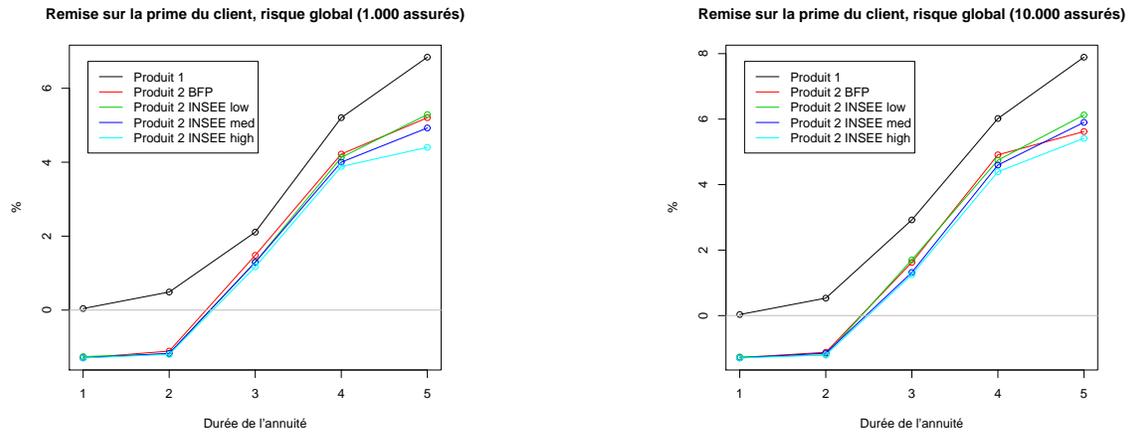


FIGURE 6.12 – Pourcentage de remise que l'assureur peut accorder, en fonction du produit envisagé combinant les risques de taux et de longévité (et leurs facteurs correctifs) et de la maturité de la rente, portefeuille de 1.000 (gauche) et 10.000 (droite) polices

3. le fait de transférer ce risque au client devrait amener davantage d'émetteurs pour ce type de produit. Ce risque de longévité est en effet une des craintes principales des assureurs. Si celui-ci est transféré au client, nous devrions assister à un engouement de la part des émetteurs pour ce type de produit, et ainsi contribuer à rendre le marché des rentes plus compétitif et efficace. Nous pourrions même envisager un marché secondaire pour ce type de produit, ce dernier gagnant en liquidité par l'augmentation des émetteurs<sup>13</sup> ;
4. il en va de l'intérêt de chacun (assuré et assureur) de partitionner le risque en ses composantes. Les rentes seraient ainsi mieux adaptées aux attentes des clients potentiels, et le risque inhérent à ces dernières serait plus facilement gérable pour l'assureur.

13. Notons toutefois qu'un important travail d'évaluation de ces contrats devrait alors se faire pour éviter qu'une des parties ne soit lésée.

# Conclusion

## Résultats obtenus et modèle de Lee & Carter

Au vu des différents résultats obtenus dans la partie application de ce travail, nous pouvons conclure sur le fait que ce type de produit devrait pouvoir trouver un écho positif sur le marché de l'assurance, d'autant plus si l'assureur consent à redistribuer les bénéfices qu'il pourrait engranger. Nous avons toutefois pu constater que seul le *produit 1* présentait un avantage quelque soit la maturité. Il est en effet le seul permettant de compenser efficacement la variabilité de la longévité future. Malheureusement, tout porte à croire que ce produit reste difficile à expliquer à un assuré. En effet, le concept de probabilité (de survie dans ce cas) est généralement difficile à appréhender pour ce dernier, et comme le dit l'adage, "on n'achète pas ce qu'on ne connaît pas", et donc *a fortiori* que l'on ne comprend pas. Quant aux autres produits, il conviendrait alors pour l'assureur d'effectuer une analyse préalable très précise des différentes conséquences que ces derniers pourraient engendrer afin de ne proposer ceux-ci que pour des maturités où tant l'assureur que l'assuré pourrait y retirer un avantage, c'est-à-dire lorsque l'application des facteurs permet de compenser la variabilité des différentes composantes de la rente. De plus, l'assureur devrait pouvoir baser ses adaptations (au niveau tarifaire) à partir de chiffres officiels au niveau des espérances de vie observées. En effet, celles-ci étant basées sur un modèle<sup>14</sup>, ce dernier devrait être indépendant de l'assureur pour éviter tout conflit d'intérêt au niveau des adaptations d'arrérages futures. Si ce type de produit était envisagé, il faudrait donc pouvoir trouver une solution à ce problème supplémentaire, et éventuellement recourir à une vision périodique des espérances de vie au niveau de l'assureur, car les données officielles servent déjà au niveau de la référence, et ne peuvent donc être utilisées comme données observées (auquel cas le facteur correctif n'aurait alors aucune utilité). Toute la question est alors de savoir si ce produit présente encore un avantage quelconque dans le transfert du risque de longévité.

Au niveau des résultats obtenus pour les remises accordables, il est évident que ceux-ci reposent largement sur les spécifications des modèles retenus. Au niveau de la longévité, le modèle de Lee & Carter présente certains avantages, mais souffre également de quelques lacunes. Ainsi le Professeur VAUPEL [38] considère les avantages suivants de ce modèle :

- d'une part l'estimation des taux de mortalité futurs aux différents âges s'appuie sur la tendance historique de diminution des taux. Implicitement, le modèle suppose donc que les progrès futurs seront aussi importants que les progrès passés. D'après ce spécialiste de la survie aux grands âges, il serait absurde d'en douter ;
- d'autre part, grâce aux méthodes statistiques d'analyse des séries temporelles, ce modèle

---

14. Rappelons que l'espérance de vie tient compte des probabilités de survie futures, et que celles-ci doivent donc être estimées à partir d'un modèle

permet d'établir un intervalle de confiance concernant ces prévisions ;

- un avantage moins mathématique, mais tout aussi important (notamment pour pouvoir justifier de tels produits auprès du régulateur) est la facilité d'interprétation des paramètres du modèle.

Toutefois, comme tout modèle, celui de Lee & Carter présente également certains défauts qu'il ne faut pas oublier tels que

- le modèle fait l'hypothèse que les taux de mortalité d'une classe d'âge vont diminuer au même rythme (en moyenne) que lors des décennies précédentes. Or, notamment pour les âges élevés, l'on constate une accélération des améliorations au niveau de la durée de vie ;
- au niveau des intervalles de confiance créés, ceux-ci se basent également sur les variations des taux de mortalité passés. Le modèle ne prend donc pas en compte les sauts qui pourraient intervenir au niveau des taux de mortalité, tant à la hausse (pandémie, catastrophe naturelle majeure ou autre) qu'à la baisse (importantes découvertes biomédicales) ;
- enfin, le Professeur VAUPEL de rappeler également qu'il est très difficile d'utiliser ce modèle pour prévoir la mortalité aux grands âges (au-delà de 95 ou 100 ans), car nous ne disposons actuellement que de peu de données pour cette population

Nous pouvons également relever le fait que la dynamique temporelle n'est (dans le modèle de base de Lee & Carter tel que nous l'avons utilisé) définie que par un seul paramètre ( $\kappa_t$ ), ce qui pourrait mener à de fausses prévisions (même si la tendance paraît fort linéaire, et que cet inconvénient est également un des avantages majeurs du modèle, en ce sens qu'il ne requiert l'estimation que d'une série temporelle univariée). D'un point de vue plus statistique, notons encore que le modèle suppose l'homoscédasticité des erreurs (pour l'estimation par moindres carrés) et ce quelque soit l'âge considéré, ce qui en pratique n'a guère de sens, les (logarithmes des) taux de mortalité étant généralement davantage variables pour les âges élevés, étant donné le peu d'information disponible pour ces derniers. De nombreux autres modèles ont dès lors été proposés, et il serait opportun, pour un assureur souhaitant commercialiser le genre de produit évoqué dans ce travail, d'en tenir compte dans l'élaboration de sa tarification, afin de garantir la pertinence de celle-ci (en étant assez prudent, sans toutefois l'être trop, afin de ne pas grever la prime de chargements inutiles et pénalisant d'un point de vue commercial). A ce titre également, l'inclusion de "sauts" au niveau de la mortalité devrait également être prise en compte.

Au niveau de la modélisation des taux d'intérêts futurs également, le choix du modèle a un impact conséquent sur les résultats exposés. Ce dernier n'était certainement pas optimal, et la prise en compte de modèle plus élaborés (G2++, Hull & White à 2 facteurs, Heath-Jarrow-Merton ou autre) ne pourrait qu'améliorer l'exactitude des prévisions de l'assureur. Il serait de plus intéressant de voir la variabilité de ces taux futurs s'ils étaient simulés sur base d'autres modèles, et ainsi voir si le facteur correctif envisagé serait plus à même de compenser cette dernière (afin de stabiliser les résultats de l'assureur). Soulignons une dernière fois que l'inclusion de ce facteur correctif supplémentaire obligerait également l'assureur à procéder à de nombreuses simulations afin d'obtenir des résultats plus robustes.

Terminons tout de même sur une note positive : ces produits ne semblent pas dénués d'intérêt, notamment pour le *produit 1*. En effet, ceux-ci pourraient présenter des avantages pour chacune des parties impliquées, à condition toutefois que l'assureur puisse avoir une confiance suffisante dans les prévisions établies. Une étude plus approfondie de ces dernières (à l'aide par exemple de différents modèles) pourrait donc s'avérer intéressante pour les compagnies d'assurance, qui

pourraient y trouver une source d'inspiration nouvelle.

## Rentes avec réversion

Attardons-nous également quelques instants au cas des rentes avec réversion. En effet, cette spécificité représente un concept primordial dans les produits de rentes modernes proposés par les compagnies d'assurance. Ainsi, dans certains cas, l'assuré (entendons par là la tête assurée, c'est-à-dire la personne sur laquelle pèse le risque assuré) va spécifier une réversion au profit de son mari/de sa femme<sup>15</sup>. Concrètement, l'assureur versera donc une rente, supposée viagère, au souscripteur jusqu'à son décès (ou jusqu'au terme du contrat si celui-ci intervient avant), puis au bénéficiaire de la réversion jusqu'à son propre décès (cette réversion étant d'un niveau  $\xi$ ,  $\xi \leq 1$ ).

Avant de voir quelles seraient les implications dans la tarification du produit d'une telle clause, notons encore deux spécificités de la réversion. Premièrement, celle-ci va nécessairement influencer le prix de la rente. L'assureur s'engage en effet vis-à-vis de deux personnes, on parle alors de "deux têtes assurées". Nous verrons d'ailleurs que le prix de la rente est alors influencé d'une part par l'espérance de vie de la deuxième "tête assurée", mais également par la dépendance entre les durées de vie des époux. Deuxièmement, le souscripteur peut décider du pourcentage qu'il désire pour la réversion. Les pourcentages de réversion communément rencontrés sont  $\frac{2}{3}$  ou  $\frac{1}{2}$ , supposant par là que l'époux (épouse) survivant(e) pourra subvenir à ses besoins avec un paiement régulier équivalent à  $\frac{2}{3}$  ou  $\frac{1}{2}$  de celui versé lorsque les deux assurés étaient en vie. Notons encore que si  $\xi = 1$ , ce type de rente est communément appelé *au dernier survivant*, et que  $\xi = 0$  représente le cas de la rente de *survie jointe*.

Prenons donc l'exemple du calcul de la prime pure d'une rente *au dernier survivant*, l'idée étant d'assurer une rente au conjoint survivant dès le décès du premier conjoint, d'un montant identique au paiement effectué lorsque les 2 époux étaient en vie. De nombreuses études ont démontrées qu'il existait une dépendance évidente entre les durées de vie des époux (voir par exemple JAGGER & SUTTON [22]). En effet, dans le cas où les deux époux sont en vie, ceux-ci ont tendance à vivre davantage que dans le cas de l'indépendance (où les deux individus vivent donc isolément). Par contre, au décès du premier conjoint, la durée de vie du conjoint survivant a tendance à être inférieure à celle dans le cas de l'indépendance. Il existe donc une corrélation entre les deux espérances de vie, et donc :

- les  $\kappa_{\mathcal{O}^{\uparrow}}$  et  $\kappa_{\mathcal{O}^{\downarrow}}$  sont corrélés positivement, ce qui oblige donc à considérer des modèles de séries chronologiques bivariées afin de tenir compte de cette corrélation<sup>16</sup> ;
- les deux époux ayant le même mode de vie, il existe une dépendance entre les durées de vie des époux.

Pour des raisons pratiques toutefois, les compagnies d'assurance considèrent habituellement les durées de vie entre les époux comme indépendantes, c'est d'ailleurs ce que nous avons supposé dans ce travail (en ne spécifiant pas le cas particulier de la réversion, nous l'avons donc envisagé

---

15. Notons que les développements ici exposés et développés en utilisant les termes *mariés*, *époux* et autres s'entendent en fait dans le cas de *conjoint*, c'est-à-dire de vie commune des deux individus, partageant par là le même mode de vie, les mêmes activités, etc...

16. Notons que la modélisation d'une série chronologie multivariée est nettement plus compliquée que dans le cas univarié.

comme la combinaison de deux rentes indépendantes). Quel est l'impact d'une telle simplification ? Si l'on considère une rente viagère avec réversion au taux  $\xi$ , il est facile de démontrer que la prime à réclamer au couple d'assuré est alors égale à

$$a_{xy}(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} v(k) (\xi_k p_x + \xi_k p_y - (2\xi - 1)_k p_{xy}) \quad (6.11)$$

ou encore, si l'on considère des taux de réversion différents pour l'époux et l'épouse

$$a_{xy}(\xi_{\sigma}, \xi_{\varphi}) = \sum_{k=0}^{\infty} v(k) \left( \xi_{\sigma} k p_x^{\sigma} + \xi_{\varphi} k p_y^{\varphi} - (\xi_{\sigma} - \xi_{\varphi} - 1)_k p_{xy} \right) \quad (6.12)$$

où  ${}_k p_x^{\sigma}$  et  ${}_k p_y^{\varphi}$  représentent respectivement les probabilités conditionnelles de survie pendant  $k$  années de l'homme d'âge  $x$  et de la femme d'âge  $y$ <sup>17</sup>, et que  ${}_k p_{xy} = {}_k p_x + {}_k p_y - {}_k p_{\overline{xy}}$  est la probabilité conditionnelle que les époux survivent encore  $k$  années. Ainsi, FREES, CARRIERE & VALDEZ [16] ont pu démontrer, dans un article fort intéressant, qu'en utilisant une distribution bivariée pour les durées de vie et une fonction copule rendant compte de la dépendance entre les durées de vie des époux<sup>18</sup>, la valeur d'une rente réversible est alors diminuée d'approximativement 5% si l'on tient compte de cette dépendance. Ils démontrent donc que l'hypothèse d'indépendance des durées de vie pratiquées dans de nombreuses compagnies d'assurance constitue donc implicitement une marge de sécurité sur ces rentes. Cependant, cette étude étant principalement empirique, attardons-nous sur les travaux réalisés en la matière par DENUIT & ROBERT [15] et DELWARDE & DENUIT [10].

Sous un angle plus probabiliste, DELWARDE & DENUIT [10] démontrent que cette hypothèse est effectivement prudente dans le cas d'une rente immédiate *au dernier survivant* de durée  $n$ . Supposons  $T_x$  et  $T_y$  les variables aléatoires représentant le temps de survie jusqu'au décès d'un homme d'âge  $x$ , et d'une femme d'âge  $y$ , respectivement. La rente immédiate de durée  $n$  est alors définie par

$$a_{\overline{xy}; \overline{n}} = \sum_{k=1}^n v^k \mathbb{P}[T_x > k \mid T_y > k]$$

Si l'on suppose les durées de vie indépendantes, c'est-à-dire que  $T_x$  est indépendant de  $T_y$ , nous avons donc

$$a_{\overline{xy}; \overline{n}}^{\perp} = \sum_{k=1}^n v^k (\mathbb{P}[T_x > k] + \mathbb{P}[T_y > k] - \mathbb{P}[T_x > k] \mathbb{P}[T_y > k])$$

Toutefois, comme nous l'avons souligné, il existe une dépendance entre les durées de vie des époux. Ces variables aléatoires  $T_x$  et  $T_y$  sont dites *dépendantes positivement par quadrant*. Deux variables aléatoires sont ainsi définies lorsque  $\mathbb{P}[X_1 > x_1, X_2 > x_2] \geq \mathbb{P}[X_1 > x_1] \mathbb{P}[X_2 > x_2]$  pour tout  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ . Dans notre cas, et repartant de la définition de la *rente au dernier survivant*, nous

17. Ces probabilités sont décrites dans DENUIT & ROBERT [15] qui démontrent que ces probabilités sont conditionnelles à l'âge du conjoint et à l'état matrimonial. Par exemple,  ${}_t p_x^{\sigma}$  est défini grâce à

$${}_t p_x^{\sigma} = {}_t p_x^{\sigma, m} \left( {}_t p_y^{\varphi, m} + \int_0^t {}_{\tau} p_y^{\varphi, m} \mu_{\varphi, m}(y + \tau) \frac{{}_{t-\tau} p_{x+\tau}^{\sigma, v}}{{}_{t-\tau} p_{x+\tau}^{\sigma, m}} d\tau \right)$$

où  $m$  et  $v$  représentent les états mariés et veufs.

18. La distribution des durées de vie des assurés est modélisée selon une loi Gompertz, et la fonction copule utilisée est de la famille FRANK (1979).

pouvons donc en conclure que

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}[T_x > k \mid T_y > k] &= \mathbb{P}[T_x > k] + \mathbb{P}[T_y > k] - \mathbb{P}[T_x > k]\mathbb{P}[T_y > k] \\
 &\leq \mathbb{P}[T_x > k] + \mathbb{P}[T_y > k] - \mathbb{P}[T_x^\perp > k]\mathbb{P}[T_y^\perp > k] \\
 &= \mathbb{P}[T_x^\perp > k \mid T_y^\perp > k] \\
 &\Rightarrow a_{\overline{xy};\overline{n}} \leq a_{\overline{xy};\overline{n}}^\perp
 \end{aligned}$$

et donc le fait de supposer les durées de vie indépendantes surestime donc bien le montant de la prime.

Toutefois, si l'on considère à présent d'autres types de rente, les auteurs exposent les résultats suivants dans le cas de la rente *au premier décès*, et de la rente *de survie* :

$$\begin{aligned}
 a_{xy;\overline{n}} &\geq a_{xy;\overline{n}}^\perp \\
 a_{x|y} &\leq a_{x|y}^\perp
 \end{aligned}$$

qui nous indiquent que dans le cas de la rente *au premier décès*, l'hypothèse d'indépendance n'est toutefois pas prudente. Si l'on considère donc le cas classique de la réversion (paiement d'un montant  $M$  mensuel tant que les deux époux sont en vie, et ensuite un montant  $\xi M$  une fois l'un des deux époux décédé<sup>19</sup>), le caractère prudentiel de l'hypothèse d'indépendance dépendra donc de l'instant du premier décès. Si celui-ci intervient *rapidement*, l'hypothèse d'indépendance sera donc prudente, le conjoint survivant ayant tendance à mourir plus rapidement<sup>20</sup>, mais que celle-ci pourrait toutefois être imprudente si ce premier décès survenait *tardivement*. Au vu de la complexité que revêt cet aspect<sup>21</sup>, nous n'avons pas considéré, dans ce travail, la dépendance entre les durées de vie des époux. L'assureur souhaitant se lancer dans la commercialisation de produits de rentes variables tels qu'envisagés devrait donc également approfondir l'étude de la dépendance entre les durées de vie dans les cas de réversion, et ce afin d'être en mesure de proposer à sa clientèle une gamme élargie de produits rencontrant le plus possible ses besoins. Notons toutefois que l'intérêt pour une rente avec réversion qui serait variable pourrait s'avérer limité à une clientèle relativement aisée, dont les arrérages seraient alors un complément de revenus plutôt qu'une réelle nécessité.

## Avenir des rentes variables

Il est à peu près certain que ce type de produit est appelé à se développer considérablement. Pour nombre d'assureurs, la période n'est certes pas propice à l'élaboration de grands projets tels que ceux-ci, mais une fois la crise passée, il sera d'autant plus important de pouvoir se démarquer de la concurrence par la création de produits innovants. De plus, la prise en compte du risque inhérent aux produits d'assurance s'est sans nul doute considérablement accrue suite aux récents événements. Il y a donc fort à parier que l'assuré potentiel, tout comme les services de *risk management*, seront d'autant plus attentifs à cet aspect dans l'analyse de ces produits. Le fait de créer

19. Où l'on peut considérer un  $\xi_{\mathcal{C}}$  différent d'un  $\xi_{\mathcal{Q}}$  comme nous l'avons déjà évoqué

20. Notons que cet effet s'estompe avec la durée écoulée depuis le décès du conjoint, comme le soulignent DENUIT & ROBERT [15], et qu'il faudrait donc faire dépendre les taux instantanés de mortalité au temps de séjour dans l'état veuf/veuve. Nous ne pouvons que conseiller au lecteur de se référer à cet ouvrage pour davantage de développements à ce propos.

21. Notons en effet que d'autres paramètres influent également sur le caractère prudentiel ou non de l'hypothèse d'indépendance, comme le niveau des taux d'intérêts ou encore les âges  $x$  et  $y$  des conjoints à la souscription.

des produits partitionnant le risque en différentes composantes, et proposant au client de sélectionner ceux dont il est prêt à supporter l'impact, serait évidemment un avantage considérable. Encore faut-il pour cela que les tarifs soient adaptés en conséquence, et que donc l'assureur puisse disposer de prévisions les plus adéquates possibles quant aux différentes sources de risque.

Il faudra également tenir compte de l'attitude adoptée par le régulateur face à ce genre de produits, notamment dans le cadre de *Solvency II*. Nous avons à ce propos utilisé une approche de type VaR (Value-at-Risk)<sup>22</sup> concernant le capital à immobiliser, comme cela devrait être la règle dans ce nouveau cadre réglementaire. A ce niveau également, l'assureur devra pouvoir présenter des estimations fiables des différentes sources de risque. Le transfert d'une partie de ces risques au client devrait toutefois lui permettre de garantir plus facilement sa solvabilité, allant ainsi dans le sens des objectifs du régulateur. Ce type de produit ne devrait donc *a priori* pas rencontrer d'obstacles majeurs à ce niveau, à condition toutefois, comme nous l'avons déjà souligné à maintes reprises, que les différents processus utilisés soient adéquats, et correctement calibrés.

## Conclusion

D'un point de vue plus personnel, je ne pourrais terminer ce mémoire sans me remémorer les nombreuses heures de travail qu'il a exigé. Mon *background* académique ne m'avait pas permis de disposer d'un bagage très conséquent en matière de programmation, et mes compétences en la matière ont été largement sollicitées tout au long de ce mémoire. D'un point de vue mathématique également, je ne pourrais cacher que les différents modèles utilisés m'ont demandé de nombreux moments d'intense réflexion. Toutefois, à l'heure où j'écris ces dernières lignes, ce n'est qu'avec plus de fierté que je peux me retourner et voir le chemin accompli. Ce travail m'a permis d'appliquer la rigueur et l'exactitude dans mes démarches que m'ont enseignées ces deux années du *master* en sciences actuarielles. Il ne fait aucun doute que ce fut pour moi ma plus belle expérience académique, mais également la plus exigeante. Je terminerai donc cette réflexion en remerciant une fois de plus le Professeur M. DENUIT, pour sa disponibilité à toute épreuve, ses conseils avisés et son soutien tout au long de ce travail, mais également l'ensemble du corps professoral de l'Institut des Sciences Actuarielles de l'UCL pour ces deux années pleines d'intenses émotions.

---

22. En considérant la capital à immobiliser comme étant le quantile 99.5% de la distribution des montants totaux d'arrérages futurs. Pour rappel, la VaR est le quantile d'ordre  $\epsilon$  de  $X$ , de sorte que  $\text{VaR}[X; \epsilon] = F_X^{-1}(\epsilon) = \inf \{x \in \mathbb{R} | F_X(x) \geq \epsilon\}$

# Annexes

## Notions actuarielles classiques

Rappelons brièvement, en nous inspirant fortement de l'article de BROUHNS & DENUIT [3] (a), les principales variables aléatoires en assurance-vie ainsi que leur notation :

- Durée de vie restante d'un individu de la population de référence :

$$T_x =_d [T - x | T > x]$$

avec  $x = \{0, 1, 2, \dots\}$ . Ainsi, la personne vivante à l'âge  $x$  décèdera à l'âge  $x + T_x$

- Probabilité de survie :

$${}_t p_x = \mathbb{P}[T_x > t] = \mathbb{P}[T > x + t | T > x]$$

- Probabilité de décès :

$${}_t q_x = 1 - {}_t p_x = \mathbb{P}[T_x \leq t] = \mathbb{P}[T \leq x + t | T > x]$$

- Fonction de survie :  $x \mapsto l_x$  décrit le nombre moyen de survivants d'une cohorte de  $l_0$  individus tous nés la même année. Nous pouvons alors redéfinir

$${}_t q_x = 1 - {}_t p_x = 1 - \frac{l_{x+t}}{l_x}$$

et, si l'on considère  ${}_t d_x = l_x - l_{x+t}$  le nombre d'individus décédant entre  $x$  et  $x + t$ , il vient alors

$${}_t q_x = \frac{{}_t d_x}{l_x}$$

- Temps vécu : mesure le temps vécu par tout groupe d'individus de la cohorte dans un intervalle d'âge donné sur base de la variable personne-année. Le nombre d'années vécues par les individus entre l'âge  $x$  et l'âge  $x + t$  est donné par

$${}_t L_x = \int_{\xi=0}^t l_{x+\xi} d\xi$$

- Temps restant à vivre : représente le nombre de personnes-années pour la cohorte depuis l'âge  $x$  jusqu'à l'extinction complète et est donné par

$$L_{x\bullet} = \int_{\xi=x}^{+\infty} l_{\xi} d\xi = \int_{\xi=0}^{+\infty} l_{x+\xi} d\xi = \sum_{k=x}^{+\infty} L_k$$

- Taux de mortalité : ramène le nombre de décès à un effectif moyen (et non l'effectif initial, comme dans le cas des quotients de mortalité), généralement l'exposition au risque pour l'âge et la période concerné. Le taux de mortalité sur  $(x, x + t)$  est donné par

$${}_t m_x = \frac{{}_t d_x}{{}_t L_x}$$

- Taux instantané de mortalité : nous avons déjà détaillé le calcul de cette variable à la section 3.2. Notons toutefois que celui-ci peut également s'obtenir à partir des taux de mortalité en partant de

$$\Delta t m_x = \frac{\Delta t d_x}{\Delta t L_x} = \frac{l_x - l_{x+\Delta t}}{\int_{\xi=0}^{\Delta t} l_{x+\xi} d\xi}$$

et en passant à la limite, nous obtenons alors

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta t m_x = -\frac{\frac{d}{dx} l_x}{l_x} = \mu_x$$

car

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{\xi=0}^{\Delta t} l_{x+\xi} d\xi = l_x$$

Les auteurs démontrent également le lien entre ce taux instantané de mortalité et les probabilités de survie grâce à

$${}_t p_x = \exp\left(-\int_{\xi=0}^t \mu_{x+\xi} d\xi\right)$$

## Fonction de minimisation non-linéaire pour la calibration du modèle de Vasicek

Afin de calibrer le modèle de Vasicek sur base du taux Eonia pour le taux de maturité à 1 jour, des taux Euribor pour les taux de maturité inférieure à 1 an et des taux OLO pour les maturités 1 à 30 ans, nous avons utilisé la fonction "nlm" du logiciel R, basée sur un algorithme de type Newton-Raphson. Cette fonction permet d'effectuer une minimisation non-linéaire. Dans notre cas, nous avons ainsi estimé les paramètres  $a$ ,  $b$  et  $\sigma$  du modèle de Vasicek ( $dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma dW(t)$ ) en minimisant la somme des carrés des écarts des taux zéro-coupons correspondants (en utilisant la méthodologie détaillée au chapitre 4.2.3) par rapport aux taux de référence précités.

## Bootstrapping des taux OLO pour obtenir les taux zéro-coupons correspondants

Pour les maturités supérieures à un an, nous nous sommes basés sur les taux *swap* (nous avons expliqué en quoi les taux OLO pouvaient être considérés comme des taux *swap* à la section 4.2.3) pour les différentes maturités, afin de déduire les taux d'actualisation grâce à la méthode de *bootstrapping*. Cette méthode nous permet ensuite d'obtenir les taux *swap* pour les maturités ultérieures, en appliquant les formules suivantes de proche en proche pour obtenir les facteurs d'actualisation  $B(t)$  avec  $t_1 < t_2 < \dots < T$ ,

$$\begin{aligned} R(t_2) &= \frac{1 - B_t(0, t_2)}{B_t(0, t_1) + B_t(0, t_2)} \\ \Rightarrow B_t(0, t_2) &= \frac{1 - B_t(0, t_1)R(t_2)}{1 + R(t_2)} \end{aligned}$$

Nous nous basons donc sur le taux *swap* pour ensuite déterminer le taux d'actualisation correspondant, et, d'une manière générale, nous pouvons ainsi calculer les taux et facteurs d'actualisation de proche en proche pour toutes les maturités par l'application de

$$R(t_i) = \frac{1 - B(0, t_i)}{\sum_{n=1}^i B(0, t_n)}$$

$$\Rightarrow B(0, t_i) = \frac{1 - R(t_i) \sum_{n=1}^{i-1} B(0, t_n)}{1 + R(t_i)}$$

**Résultats techniques et financiers : graphiques du versement des dividendes et histogrammes de la distribution des *cash-flows* futurs (vus depuis  $t = 0$  pour une rente de 5 ans)**

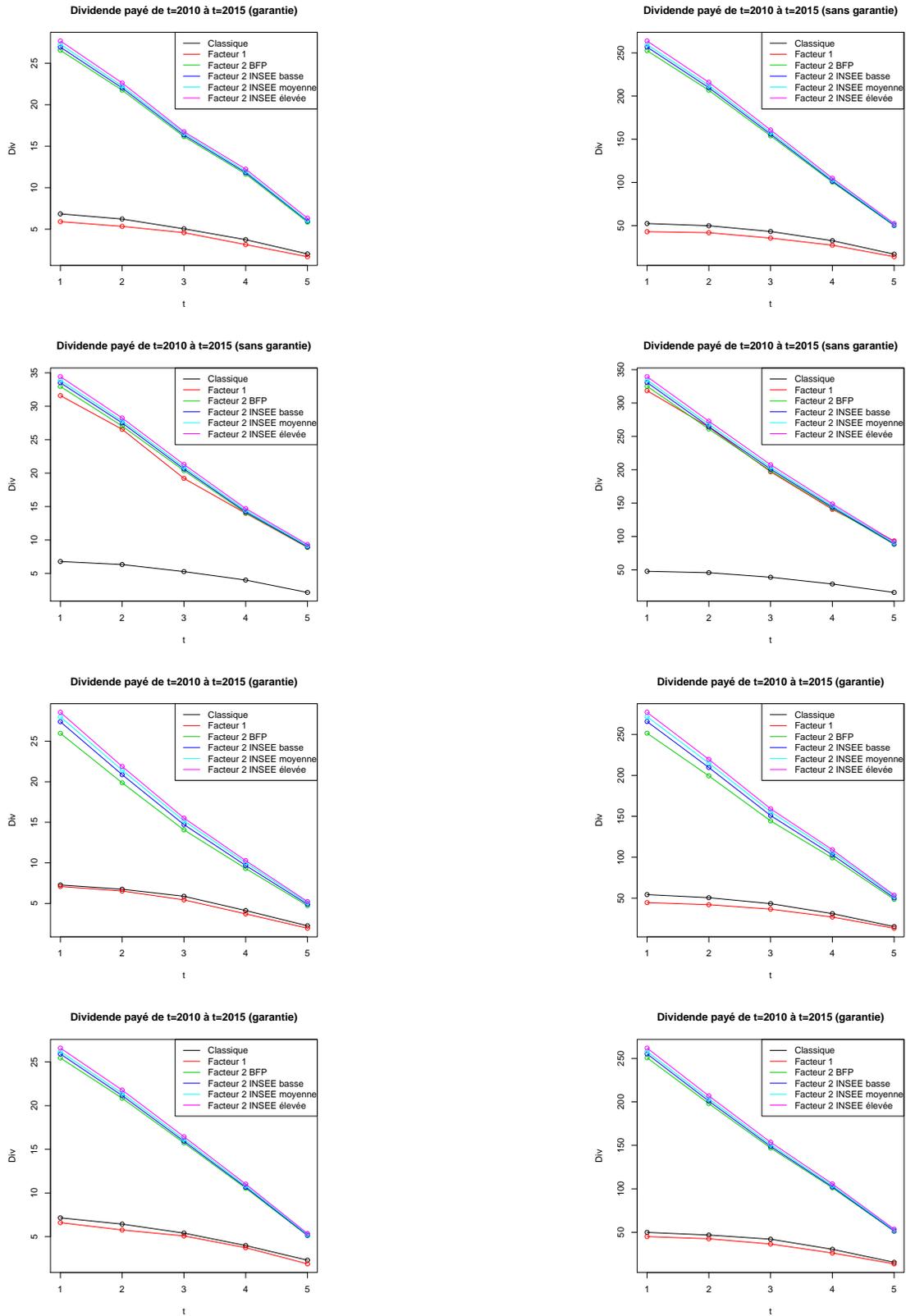


FIGURE 6.13 – Rente de 5 ans, évolution du dividende à verser aux actionnaires suivant les différentes possibilités (1.000 et 10.000 assurés, respectivement à gauche et à droite) : (1) = sans garantie, taux constant (2) = sans garantie, taux variable (3) = garantie 90/110, taux constant (4) = garantie 70/130, taux constant

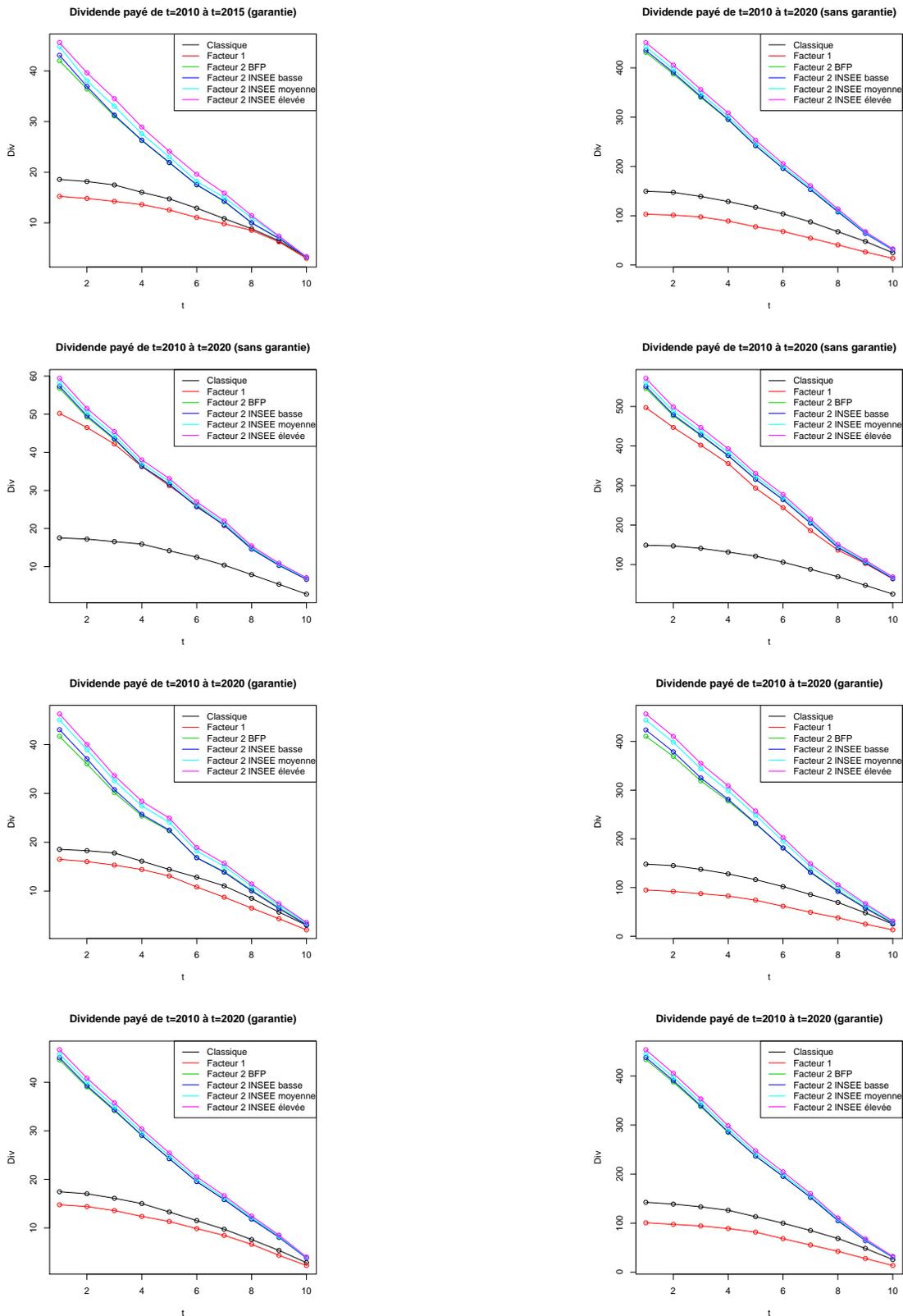


FIGURE 6.14 – Rente de 10 ans, évolution du dividende à verser aux actionnaires suivant les différentes possibilités (1.000 et 10.000 assurés, respectivement à gauche et à droite) : (1) = sans garantie, taux constant (2) = sans garantie, taux variable (3) = garantie 90/110, taux constant (4) = garantie 70/130, taux constant

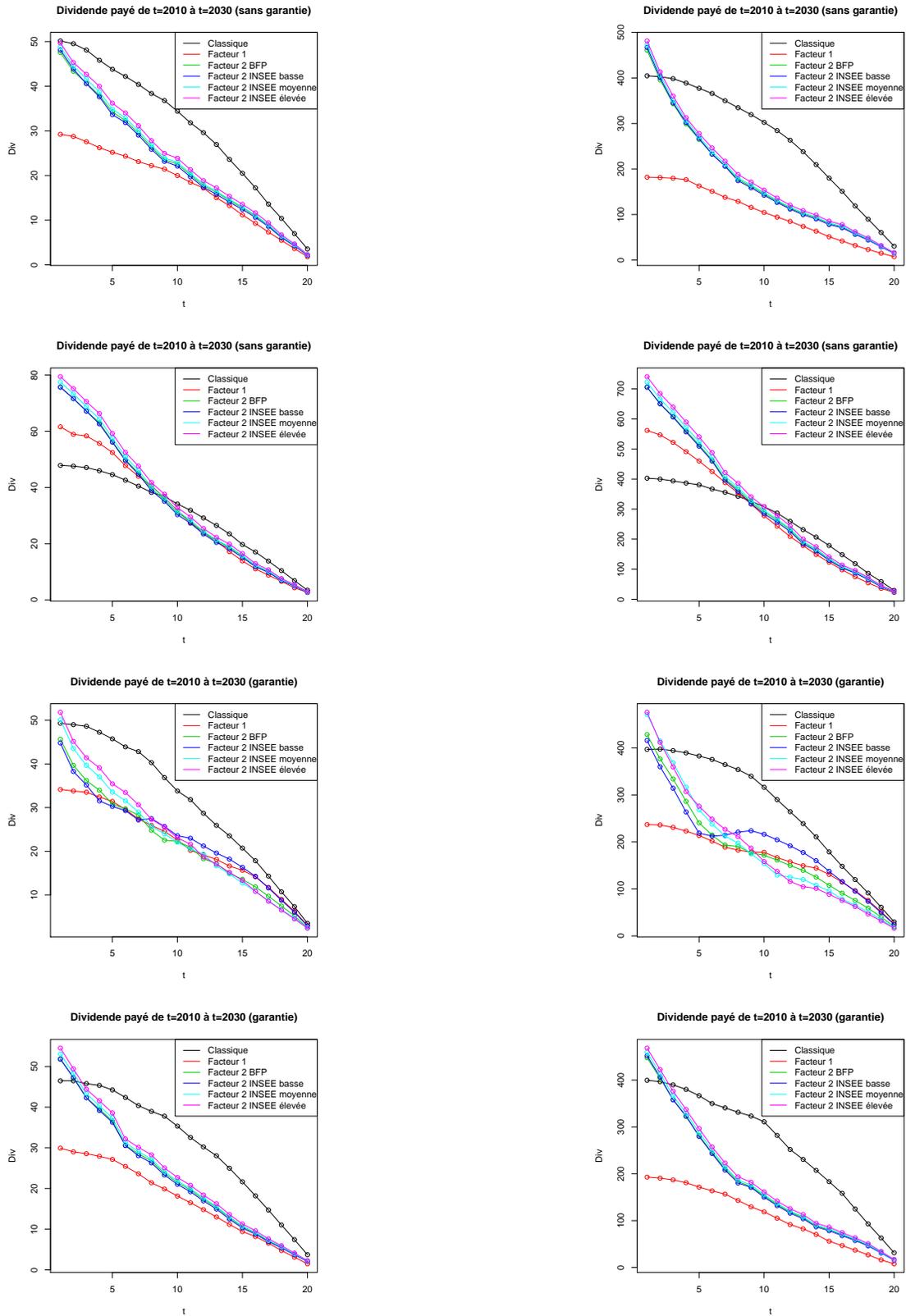


FIGURE 6.15 – Rente de 20 ans, évolution du dividende à verser aux actionnaires suivant les différentes possibilités (1.000 et 10.000 assurés, respectivement à gauche et à droite) : (1) = sans garantie, taux constant (2) = sans garantie, taux variable (3) = garantie 90/110, taux constant (4) = garantie 70/130, taux constant

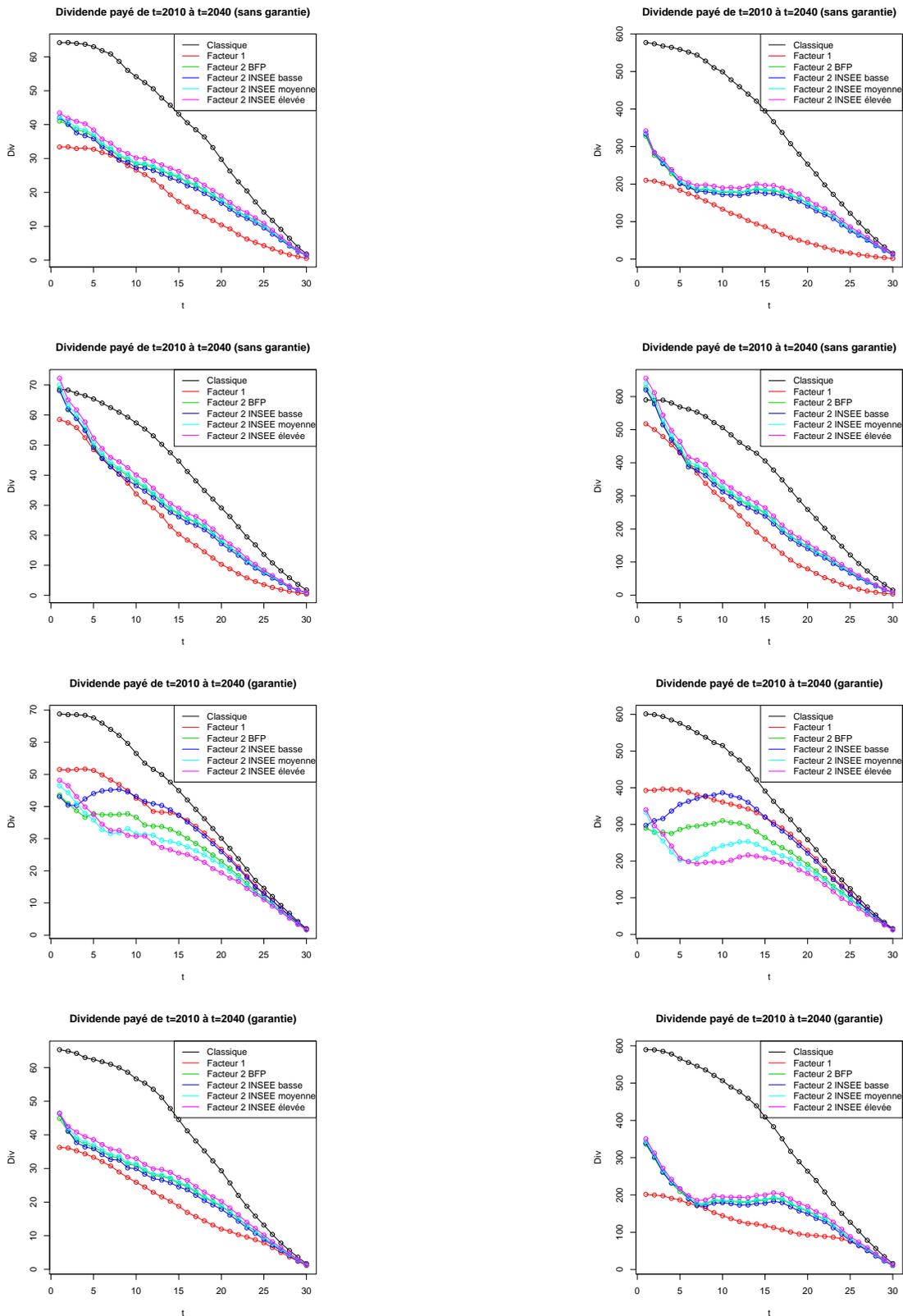


FIGURE 6.16 – Rente de 30 ans, évolution du dividende à verser aux actionnaires suivant les différentes possibilités (1.000 et 10.000 assurés, respectivement à gauche et à droite) : (1) = sans garantie, taux constant (2) = sans garantie, taux variable (3) = garantie 90/110, taux constant (4) = garantie 70/130, taux constant

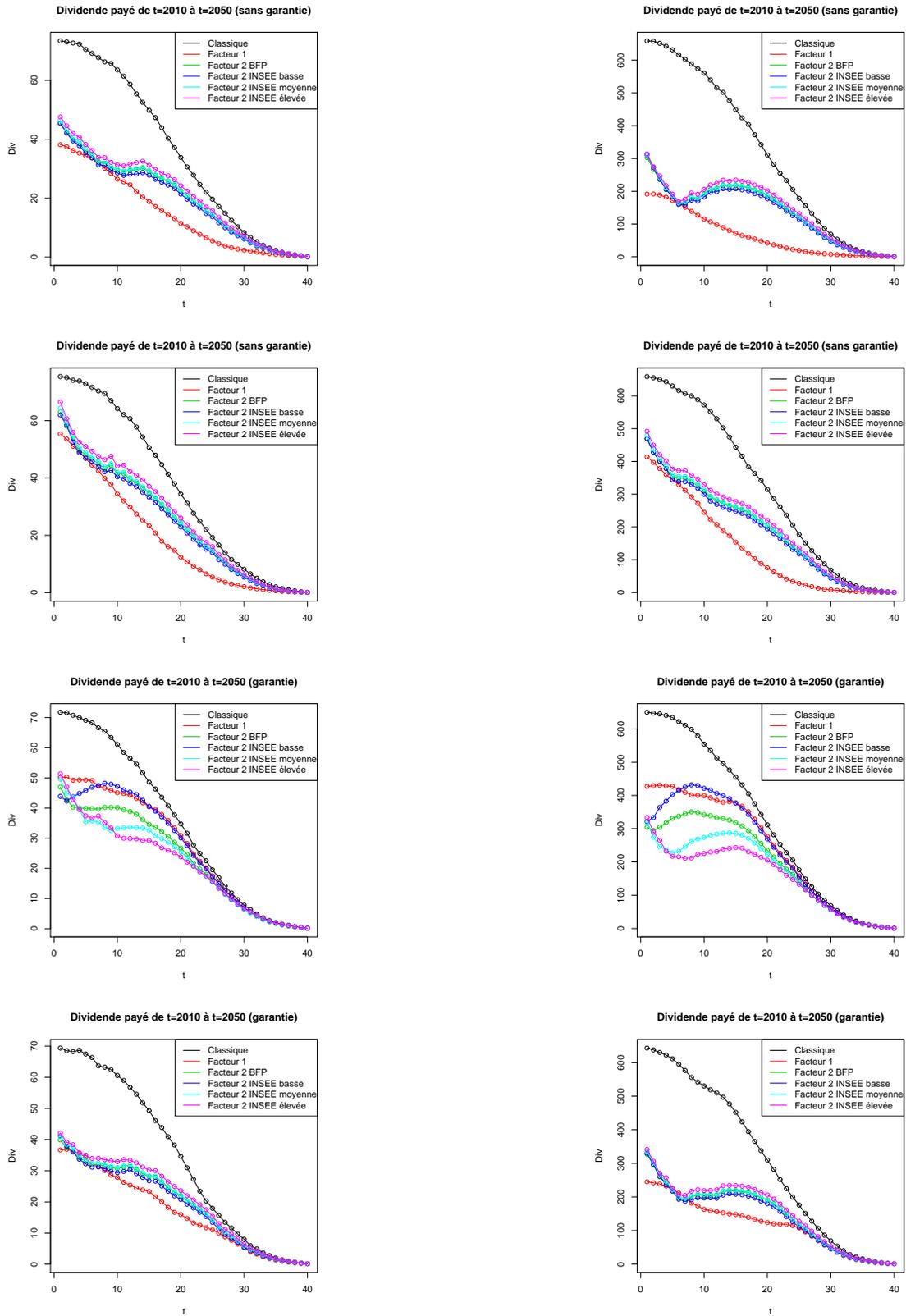


FIGURE 6.17 – Rente de 40 ans, évolution du dividende à verser aux actionnaires suivant les différentes possibilités (1.000 et 10.000 assurés, respectivement à gauche et à droite) : (1) = sans garantie, taux constant (2) = sans garantie, taux variable (3) = garantie 90/110, taux constant (4) = garantie 70/130, taux constant

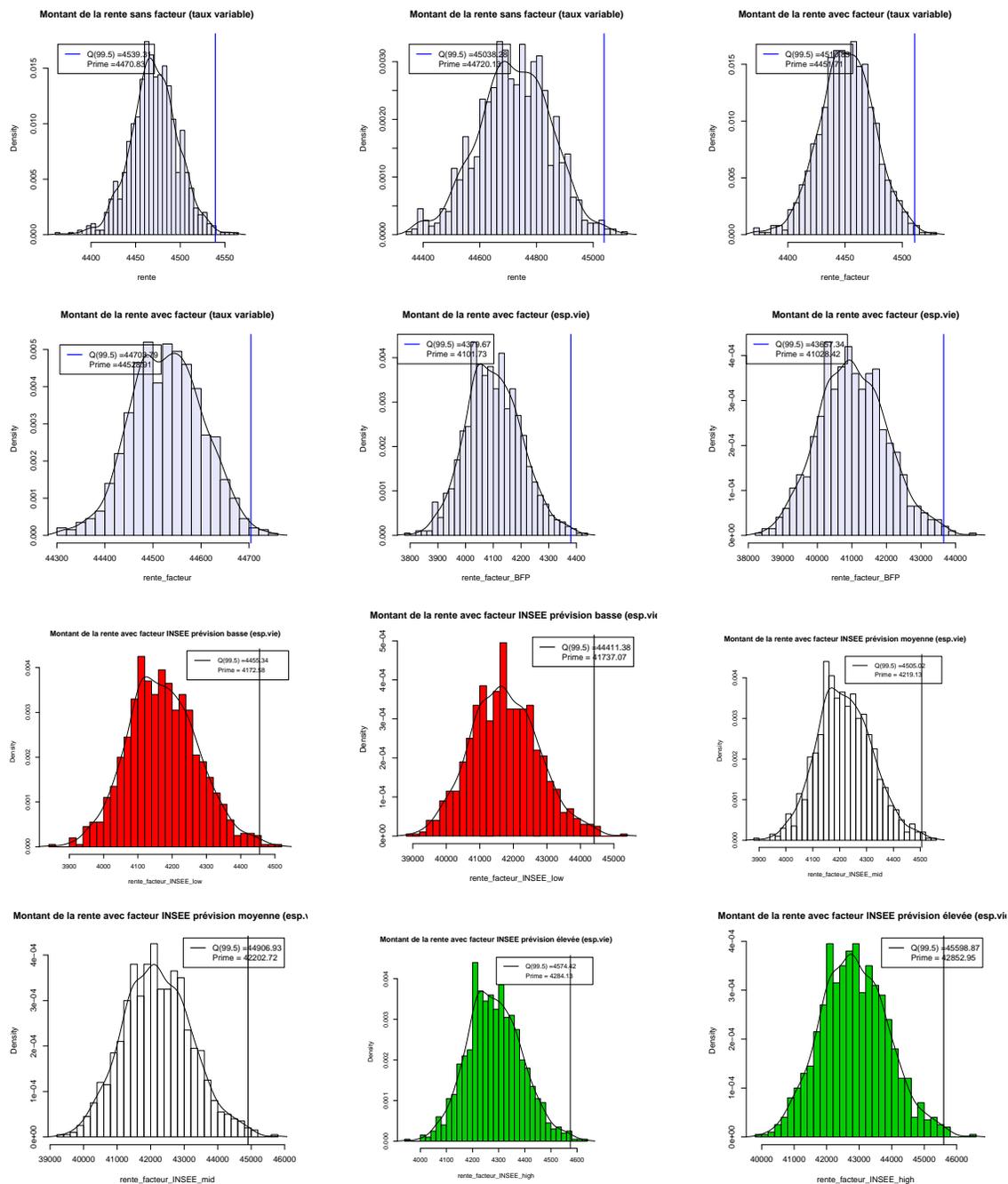


FIGURE 6.18 – Histogrammes des arrrages totaux d’une rente de 5 ans vue depuis  $t = 0$  (1.000 et 10.000 assurés, respectivement à gauche et à droite) : (1) = sans facteur, taux constant (2) = avec facteur (5.1), taux constant (3) = avec facteur (5.2) BFP, taux constant (4) = avec facteur (5.2) INSEE basse, taux constant (5) = avec facteur (5.2) INSEE moyenne, taux constant (6) = avec facteur (5.2) INSEE élevée, taux constant



# Bibliographie

- [1] ALBRECHT P., MAURER R., *Self-annuitization, consumption shortfall in retirement and asset allocation : the annuity benchmark*, Journal of Pension Economics and Finance, Vol.1, 2002.
- [2] BLAKE D., CAIRNS A.J.G., DOWD K., *Living with mortality : longevity bonds and other mortality-linked securities*, British Actuarial Journal, Vol.12, 2006.
- [3] BROUHNS N., DENUIT M., (a) *Risque de longévité et rentes viagères I : Evolution de la mortalité en Belgique de 1880 à nos jours*, Belgian Actuarial Bulletin, Vol.2, No.1, 2002.
- [4] BROUHNS N., DENUIT M., (b) *Risque de longévité et rentes viagères III : Elaboration de tables de mortalité prospectives pour la population assurée belge, et évaluation du coût de l'antisélection*, Belgian Actuarial Bulletin, Vol.2, No.1, 2002.
- [5] BROWN J.R., MITCHELL O.S., POTERBA J.M., WARSHAWSKY M.J., *The Role of Annuity Markets in Financing Retirement*, MIT Press, 2001.
- [6] CAIRNS A.J.G., *Longevity Bonds and Mortality-linked securities*, Heriot-Watt University, Edinburgh
- [7] COSSETTE H., DELWARDE A., DENUIT M., GUILLOT F., MARCEAU E. *Pension plan valuation and dynamic mortality tables*, North American Actuarial Journal, Vol.11, 2007.
- [8] COX J.C., INGERSOLL J.E., ROSS S.A., *A Theory of the Term Structure of Interest Rates*, Econometrica, Vol.53, No.2, Mars 1995.
- [9] COX S.H., LIN Y., *Natural Hedging of Life and Annuity Mortality Risks*, Working Paper, Georgia State University, Mai 2007.
- [10] DELWARDE A., DENUIT M., *Construction de Tables de Mortalité Périodiques et Prospectives*, Economica, 2006.
- [11] DELWARDE A., DENUIT M., *Mortalité des pensionnés du secteur public : analyse actuarielle et démographique*, SPP Politique économique, 2004.
- [12] DENUIT M., *Bases techniques de l'assurance-vie individuelle en Belgique*, Revue Générale des Assurances et des Responsabilités, Vol.4, No.72, 1999.
- [13] DENUIT M., *Cours d'Assurance Vie II*, Institut des Sciences Actuarielles, UCL, 2008.
- [14] DENUIT M., GODERNIAUX A.-C., *Closing and projecting lifetables using log-linear models*, Bulletin de l'Association Suisse des Actuaires, 2005.
- [15] DENUIT M., ROBERT C., *Actuariat des Assurances de Personnes : Modélisation, tarification et provisionnement*, Economica, 2007.
- [16] FREES E.W., CARRIERE J., VALDEZ E, *Annuity Valuation with Dependent Mortality*, Journal of Risk and Insurance, Vol.63, No.2, Juin 1996.
- [17] GAUDEMET J.-P., *Les dispositifs d'acquisition à titre facultatif d'annuités viagères en vue de la retraite : une diffusion limitée*, Economie et Statistique, No. 348, 2001.

- [18] GERDTHAM U.-G., RUHM C., *Deaths rise in good economic times : evidence from the OECD*, IZA Discussion Papers, Institute for the Study of Labor (IZA), No. 654, 2002.
- [19] HANEWALD K., POST T., GRÜNDL H., *Stochastic mortality, macroeconomic risks and life insurer solvency*, SFB 649, Discussion Paper 2009-015, Mars 2009.
- [20] HANEWALD K., *Mortality modeling : Lee-Carter and the macroeconomy*, SFB 649, Discussion Paper 2009-008, Avril 2009.
- [21] HANNES B., BOGAERT S., *Le défi du vieillissement : rendre les assurances de rente plus attrayantes*, Briefing de presse, Assuralia, 2007.
- [22] JAGGER C., SUTTON J., *Death after marital bereavement : is the risk increased*, Statistics in Medicine, No.10, 1991.
- [23] KOISSI M.-C., SHAPIRO A., HOGNAS G., *Evaluating and Extending the Lee-Carter Model for mortality forecasting : Bootstrap confidence interval*, Insurance : Mathematics and Economics, Vol.38, 2006.
- [24] LAMBRECHT M., *Observations jusque 2006 : données RN - DG SIE, Calculs BFP*, Perspectives de population 2007-2060, BFP-DG SIE, 2008.
- [25] LAMBRECHT M., PAUL J.-M., *Quotients de mortalité prospectifs*, Working paper 20-04, BFP-DG SIE, 2004.
- [26] LEE R., *The Lee-Carter method for forecasting mortality, with various extensions and applications*, North American Actuarial Journal, Vol.4, No.1, 2000.
- [27] LEE R.D., CARTER R.C., *Modeling and Forecasting US Mortality*, Journal of the American Statistical Association, Vol.87, No.419, 1992.
- [28] LIN Y., COX S.H., *Securitization of mortality risks in life annuities*, Journal of Risk & Insurance, Vol.72, No.2, Juin 2005.
- [29] LÜTHY H., KELLER P., BINSWANGER K., GMÜR B., *Adaptative algorithmic annuities*, Swiss Actuarial Bulletin, No.2, 2001.
- [30] MARSAGLIA G., BRAY T.A., *A Convenient Method for Generating Normal Variables*, SIAM Review, No.4, 1964.
- [31] MILEVSKY M., ROBINSON C., *Self-annuitization and ruin in retirement*, North American Actuarial Journal, Vol.4, No.2, 2001.
- [32] PIGGOTT J., VALDEZ E.A., DETZEL B., *The simple analytics of a pooled annuity fund*, Journal of Risk & Insurance, Vol.72, No.2, Juin 2005.
- [33] REACFIN S.A., *Reacfin's life tables for Belgium*, Reacfin S.A. UCL Spin-off, 2008.
- [34] RENSHAW A.E., HABERMAN S., *Mortality reduction factors incorporating cohort effects*, Actuarial Research Paper, No.160, Faculty of Actuarial Science and Statistics, City University, London (UK), 2005.
- [35] ROBERT-BOBEE I., *Projection de population 2005-2050 pour la France métropolitaine : méthodes et résultats*, Document de travail No.F0603, Direction des Statistiques démographiques et sociales, INSEE, 2006.
- [36] VALDEZ E.A., PIGGOTT J., WANG L., *Demand and adverse selection in a pooled annuity fund*, Insurance : Mathematics and Economics, Vol.39, 2006.
- [37] VASICEK O., *An Equilibrium Characterisation of the Term Structure*, Journal of Financial Economics, Vol.5, 1977.
- [38] VAUPEL J. W., *Projections de mortalité et rentes viagères*, SCOR Newsletter technique Vie, No.19, 2004.