

Stochastische Methoden zur Quantifizierung von versicherungstechnischen Risiken und Kreditrisiken

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität Tübingen

vorgelegt von
Ramona Maier
aus Oberwischau

2010

Dekanin: Professorin Dr. Kerstin Pull
Erstberichterstatter: Professor Dr. Dr. h.c. mult. Eberhard Schaich
Zweitberichterstatter: Professor Dr. Ralf Münnich
Tag der mündlichen Prüfung: 11.01.2010

Danksagung

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Zeit als wissenschaftliche Angestellte am Lehrstuhl für Statistik, Ökonometrie und Unternehmensforschung an der Universität Tübingen. An dieser Stelle möchte ich mich bei all jenen bedanken, die mich auf dem Weg zur Erstellung dieser Arbeit begleitet und auf verschiedene Weise zum Gelingen der Arbeit beigetragen haben:

Meinem wissenschaftlichen Lehrer, Herrn Professor Dr. Dr. h.c. mult. Eberhard Schaich danke ich herzlich dafür, dass er mir die Möglichkeit zu einer Dissertation im Bereich des Quantitativen Risikomanagements gab und dafür, dass er mich dabei in allen Belangen stets unterstützt hat. Herrn Professor Dr. Ralf Münnich möchte ich für die Übernahme des Zweitgutachtens recht herzlich danken. Besonders möchte ich mich bei Herrn Professor Dr. Michael Merz für seine wertvolle wissenschaftliche und moralische Unterstützung sowie für die produktive Zusammenarbeit bedanken. Dr. Mario V. Wüthrich danke ich recht herzlich für die sehr angenehme und lehrreiche wissenschaftliche Zusammenarbeit.

Für interessante persönliche und wissenschaftliche Gespräche möchte ich mich bei Herrn Professor Dr. Joachim Grammig, bei meinen Kollegen Luis Huergo, Jochen Heberle und Dominik Ohly sowie bei Frau Lea Eiting bedanken.

Ein sehr herzlicher Dank gilt meiner Mutter, meinem Stiefvater, meinen Freunden und insbesondere meinem Lebensgefährten, die mir während meiner Promotion immer zur Seite standen und mich stets unterstützt haben.

Dettenhausen, Januar 2010

Ramona Maier

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Solvency II	7
2.1	Aufbau und Verlauf von Solvency II	7
2.2	Risikoarten	12
3	Credibility Modelle	15
3.1	Die Problematik der Prämienberechnung	15
3.2	Credibility-Theorie	17
3.2.1	Das Modell von Bühlmann	21
3.2.2	Hilbert Räume und orthogonale Projektionen	27
3.2.3	Das Modell von Bühlmann-Straub	31
3.2.3.1	Der Mean Square Error of Prediction	37
3.2.3.2	Schätzung der Strukturparameter	38
3.2.4	Das multidimensionale Modell von Bühlmann-Straub	42
3.2.4.1	Der MSEP im multivariaten Bühlmann-Straub-Modell	49
3.2.4.2	Schätzung der Strukturparameter	50
3.2.5	Überblick über weitere Credibility-Modelle	52
4	Schadenreservierung	55
4.1	Grundlagen und Bedeutung der Schadenreservierung	56
4.2	Das multivariate Bühlmann-Straub-Modell in der Schadenreservierung .	60
4.2.1	Abwicklungsdreieck und Notation	62
4.2.2	Modellbildung	63
4.2.3	Der bedingte Mean Square Error of Prediction	71
4.2.3.1	Einzelne Anfalljahre	72
4.2.3.2	Aggregierte Anfalljahre	75
4.2.4	Schätzung der Strukturparameter	78
4.2.5	Beispiel	80

4.2.6	Beweise und Herleitungen	83
4.2.6.1	Beweis von Lemma 4.2.6	83
4.2.6.2	Herleitung des bedingten Schätzfehlers für ein einzelnes Anfalljahr	84
4.2.6.3	Herleitung des Schätzers für den bedingten MSEP bei zwei aggregierten Anfalljahren	87
5	Modellierung und Analyse von abhängigen Risiken	91
5.1	Copulas	92
5.2	Ein zentraler Grenzwertsatz und „Large-Deviations“ für abhängige Risiken	102
5.2.1	Zentraler Grenzwertsatz	104
5.2.2	Large-Deviations-Verhalten für Bernoulli-verteilte Ränder	107
5.2.3	Large-Deviations-Verhalten für beliebig verteilte Ränder	118
5.2.4	Tail-Dependence-Koeffizienten	119
5.2.5	Beweise	123
5.2.5.1	Beweis des Zentralen Grenzwertsatzes 5.2.1	123
5.2.5.2	Beweise für die Resultate aus Abschnitt 5.2.2	124
5.2.5.3	Beweis von Lemma 5.2.11	127
6	Zusammenfassung und Ausblick	129
A	Hilfsmittel aus der Wahrscheinlichkeitstheorie	133
A.1	Bedingte Erwartungen	134
A.2	Satz von der majorisierten Konvergenz	137
B	Hilbert-Räume	139
B.1	Vektorräume und normierte Räume	139
B.2	Hilbert-Räume	142
	Symbolverzeichnis	145
	Tabellenverzeichnis	149
	Abbildungsverzeichnis	151
	Literaturverzeichnis	153

Kapitel 1

Einleitung

Die Übernahme von Risiken gehört zum Kerngeschäft eines jeden Versicherungsunternehmens. Daher ist gerade für Versicherungen der Unternehmenserfolg von der Qualität ihres Risikomanagements abhängig. Ein leistungsfähiges Risikomanagement-System, mit dem Risiken identifiziert, bewertet, überwacht und gesteuert werden können, verbessert die Wettbewerbsfähigkeit eines Unternehmens und trägt wesentlich zur Steigerung des Unternehmenswertes bei¹. Auch angesichts steigender Natur- und Terrorrisiken erkennen immer mehr Unternehmen die Notwendigkeit eines funktionierenden, in die Unternehmensprozesse integrierten Risikomanagements. Dadurch können Chancen und Gefahren rechtzeitig erkannt und bei unternehmerischen Entscheidungen adäquat berücksichtigt werden.

Den wachsenden Stellenwert des Risikomanagements bei Versicherungsunternehmen haben auch Ratingagenturen erkannt. Um dieser Einsicht Rechnung zu tragen, hat beispielsweise Standard & Poor's, eine der größten und einflussreichsten Ratingagenturen der Welt, neben den bestehenden sieben Ratingfaktoren, den neuen Ratingfaktor „Enterprise Risk Management“ eingeführt². Mit dieser eigenständigen Kategorie will Standard & Poor's das Rating für Versicherungsunternehmen verbessern und einen integrierten Risikomanagement-Ansatz fördern³.

Die hohe Bedeutung des Risikomanagements wird auch vor dem Hintergrund der aktuellen Finanzmarktkrise deutlich. Betroffen sind nicht nur Kreditinstitute, sondern auch Versicherungsunternehmen. Bekanntestes Beispiel hierfür ist der Versicherungskonzern

¹ Vgl. Altenähr et al. (2009), S. 33 und Romeike und Hein (2006).

² Die weiteren sieben Bewertungsfaktoren sind: Wettbewerbsposition, Management und Strategie, Ertragssituation, Kapitalanlage und Asset Liability Management, Liquidität, Kapitalausstattung und finanzielle Flexibilität. Vgl. Clemens (2006).

³ Vgl. Standard & Poor's (2005).

American International Group (AIG), der 2008 in einer sehr schweren finanziellen Schieflage geriet. Eine Insolvenz konnte nur durch die größte staatliche Finanzhilfe der US-Geschichte abgewendet werden. Defizite im Risikomanagement werden als Hauptursache für die Finanzmarktkrise gesehen, wie eine im Juli 2008 von SAS in Auftrag gegebene, weltweite Studie⁴ des Economist Intelligence Unit (The Economist) zeigt. Dabei wurden 318 Führungskräfte von Finanzdienstleistungsunternehmen zum Thema Risikomanagement befragt. Ein Großteil (70%) der Befragten war der Meinung, dass Lücken im Risikomanagement überwiegend für die Finanzkrise verantwortlich seien. Mehr als die Hälfte (59%) der befragten Finanzdienstleister wollen infolge der Finanzkrise ihre Risikomanagement-Systeme eingehend prüfen und überarbeiten. Viele (71%) gaben an, dass sie zwar eine Risikomanagementstrategie haben, diese aber bisher noch nicht vollständig umgesetzt wurde. Die Umsetzung eines ganzheitlichen und umfassenden Risikomanagements-Systems gehört somit zu den aktuellen Herausforderungen in der Finanzdienstleistungsbranche.

Die Implementierung und Verbesserung von Risikomanagement-Systemen wird auch durch den Gesetzgeber vorangetrieben. So verlangt das 1998 verabschiedete Gesetz zur Kontrolle und Transparenz im Unternehmensbereich (KonTraG) vom Vorstand großer Unternehmen und Aktiengesellschaften die Einrichtung eines Überwachungssystems, „damit die den Fortbestand der Gesellschaft gefährdende Entwicklungen früh erkannt werden“ (KonTraG)⁵. Darüber hinaus werden in der 9. Novelle des Versicherungsaufsichtsgesetzes (VAG) aus dem Jahre 2007 durch den neu eingefügten §64a die Anforderungen an ein angemessenes Risikomanagement geregelt⁶. In den USA wurde 2002 der Sarbanes-Oxley Act (SOX)⁷ verabschiedet. Dieses Gesetz enthält Vorschriften zur Berichterstattung von Unternehmen, die an US-Börsen gelistet sind. Das Risikomanagement stellt einen Teil des im SOX geforderten internen Kontrollsystems dar. Auf europäischer Ebene wird mit dem Projekt „Solvency II“ eine grundlegende Reform und Harmonisierung der bestehenden Aufsichtsregeln für Versicherungsunternehmen bezweckt. Solvency II ist durch einen risikoorientierten Ansatz gekennzeichnet, der nach dem bereits von Basel II bekannten 3-Säulen-Modell gegliedert ist. Im Vordergrund der Betrachtungen stehen die in Säule 1 definierten Solvabilitätsvorschriften für

⁴ Die Studie findet man unter http://www.sas.com/resources/whitepaper/wp_5612.pdf.

⁵ Der Gesetzestext kann unter <http://www.beckmannundnorda.de/kontrag.html> eingesehen werden.

⁶ Der Gesetzestext kann unter http://www.gesetze-im-internet.de/vag/_64a.html eingesehen werden. Siehe auch Altenähr et al. (2009), S. 6 ff.

⁷ Der Gesetzestext kann unter <http://thomas.loc.gov/cgi-bin/query/z?c107:H.R.3763.ENR>: eingesehen werden.

die Eigenmittelausstattung der Versicherer. Durch Quantifizierung des Gesamtrisikos soll die erforderliche Kapitalausstattung, die zur Bewältigung der eingegangenen Risiken benötigt wird, bestimmt werden. Dabei sollen alle relevanten Risiken einbezogen und unter Berücksichtigung von Interdependenzen zusammengeführt werden. Neben den quantitativen Bestimmungen der ersten Säule werden qualitative Vorgaben zum aufsichtsrechtlichen Überprüfungsverfahren in der zweiten Säule und Richtlinien zur Offenlegung und Markttransparenz in der dritten Säule formuliert. Die quantitativen und qualitativen Anforderungen von Solvency II fördern den Auf- und Ausbau von unternehmensweiten, integrierten Risikomanagement-Systemen und leiten eine fundamentale Veränderung der Versicherungsaufsicht ein. Eine Umsetzung der Solvency II Regelungen in nationales Recht ist für 2012 geplant.

Um den neuen Solvabilitätsanforderungen gerecht zu werden, ist eine umfassende quantitative Untersuchung sämtlicher Risiken erforderlich. In der vorliegenden Arbeit werden Methoden zur Quantifizierung des Prämien- und Reserverisikos von Nichtleben-Versicherungsunternehmen vorgestellt. Außerdem befasst sich die Arbeit mit der Modellierung und Analyse von Abhängigkeiten zwischen Risiken, insbesondere Kreditrisiken. Dazu gehört vor allem die adäquate Quantifizierung des Gesamtrisikos für Kreditportfolios, die abhängige Risiken enthalten.

Im zweiten Kapitel wird das von der Europäischen Kommission initiierte Projekt Solvency II näher erläutert. Moderne Solvabilitätsvorschriften sind eine der Hauptursachen für die Verbesserung des quantitativen Risikomanagements bei Versicherungsunternehmen. Ferner wird ein Überblick über die verschiedenen Risikotypen gegeben, welche im Rahmen von Solvency II betrachtet werden.

Zu Beginn des dritten Kapitels wird die Problematik bei der Bestimmung einer risikogerechten Prämie erörtert. Außerdem wird herausgearbeitet, warum die Credibility-Theorie eine praktikable Methodik zur Lösung dieser Problematik liefert, in dem sie die individuelle und kollektive Schadenerfahrung zu einem besten affin-linearen Prädiktor für die risikogerechte Prämie verknüpft. Gegenstand des zweiten Abschnitts sind die Credibility-Modelle von Bühlmann und Bühlmann-Straub. Im Rahmen dieser Modelle werden Prädiktoren für die risikogerechte Individual-Prämie sowie die Genauigkeit dieser Credibility-Prädiktoren in Form des mittleren quadratischen Fehlers bestimmt. Zudem werden weitere Eigenschaften der Prädiktoren aufgezeigt und Schätzungen für die Modellparameter angegeben, welche zur konkreten Berechnung der

Credibility-Prädiktoren und des zugehörigen Prognosefehlers benötigt werden. Ferner wird erläutert, wie Credibility-Prädiktoren mit Hilfe von Methoden aus der Hilbert-Raum-Theorie bestimmt werden können, in dem sie als orthogonale Projektionen der Individual-Prämie auf einen geeigneten Unterraum von Zufallsvariablen definiert werden. Um Abhängigkeiten zwischen verschiedenen korrelierten Portfolios berücksichtigen zu können, wird neben dem klassischen univariaten Bühlmann-Straub-Modell auch das multivariate Bühlmann-Straub-Modell vorgestellt. Das Kapitel schließt mit einer Übersicht über weitere Credibility-Modelle.

Das dritte Kapitel beschäftigt sich mit stochastischen Schadenreservierungsverfahren. Eine Erläuterung der Grundlagen und der Bedeutung dieser Thematik erfolgt im ersten Abschnitt. Im zweiten Abschnitt wird ein multivariates Schadenreservierungsverfahren vorgestellt, welches auf dem multivariaten Bühlmann-Straub-Modell basiert. Unter Anwendung dieser Methode werden Prädiktoren für die ausstehenden Schadenzahlungen für noch nicht vollständig regulierte Schäden aus mehreren, abhängigen Portfolios ermittelt. Darüber hinaus wird die Unsicherheit in der Prognose der Gesamtreserve für alle betrachteten Portfolios quantifiziert. Dies erfolgt durch die Bestimmung eines Schätzers für den bedingten mittleren quadratischen Prognosefehler. Dieser Schätzer quantifiziert das Reserverisiko für alle betrachteten Portfolios. Die Ergebnisse werden anhand eines Beispiels verdeutlicht, in dem zwei korrelierte Versicherungsportfolios betrachtet werden. Diese enthalten Schadendaten derselben Versicherungssparte aus zwei verschiedenen Regionen. Zum Abschluss des Kapitels werden die Resultate den Ergebnissen des multivariaten Chain-Ladder-Modells und des multivariaten Additive-Loss-Schadenreservierungsmodells vergleichend gegenübergestellt.

Gegenstand des vierten Kapitels ist die Modellierung und Analyse von abhängigen Risiken. Im ersten Abschnitt wird das Konzept der Copulas eingeführt, welches die Beschreibung von komplexen Abhängigkeitsstrukturen zwischen Zufallsvariablen ermöglicht. In diesem Zusammenhang werden ausgewählte Eigenschaften von Copulas vorgestellt und eine wichtige Familie von Copulas, die Archimedischen Copulas, näher untersucht. Grundlage für die Betrachtungen des zweiten Abschnitts bilden sogenannte Mischungsmodelle, die mit Hilfe Archimedischer Copulas dargestellt werden können. Sie werden zum Modellieren der Abhängigkeitsbeziehungen in großen Portfolios verwendet. Diese Modelle sind dadurch charakterisiert, dass externe ökonomische Faktoren (systematische Risiken), beschrieben durch eine latente Zufallsvariable Θ , das gesamte Portfolio beeinflussen und auf diese Weise Abhängigkeiten im Portfolio her-

vorrufen. Auf Basis dieser Modelle wird eine asymptotische Verteilung für das durchschnittliche Portfolio-Risiko bestimmt. Diese kann zur Approximation der Verteilung des Gesamtrisikos in großen Portfolios herangezogen werden. Des Weiteren wird das stochastische Verhalten der Risiken innerhalb des Portfolios analysiert. Hat die latente Variable Θ einen endlichen Wertebereich, so haben die externen Faktoren nur einen beschränkten Wirkungsbereich. Außerhalb dieses Bereiches können die systematischen Risiken das Portfolio als Ganzes nicht mehr beeinflussen. Hier verhalten sich die Risiken wie unabhängige Zufallsvariablen. Dies bedeutet insbesondere, dass auf diesem Teilbereich die Wahrscheinlichkeiten exponentiell mit der Anzahl der Risiken im Portfolio abfallen. Dieses Verhalten ist typisch für unabhängige Zufallsvariablen und wird als Large-Deviations-Verhalten bezeichnet. Da sich Mischungsmodelle besonders gut zur Modellierung von Kreditrisiken eignen, werden die Anwendungsmöglichkeiten der Ergebnisse anhand von Beispielen zur Messung des Kreditrisikos aufgezeigt. Dazu zählt auch ein Beispiel, in dem das Risiko von sogenannten Collateralised Debt Obligations (CDOs) quantifiziert wird. CDOs sind Kreditderivate, die zu den forderungsbesicherten Wertpapieren (Asset Backed Securities) gehören. Sie sind in den vergangenen Jahren immer populärer geworden und haben in jüngster Zeit im Zusammenhang mit der Finanzkrise viel Aufmerksamkeit auf sich gezogen. Schließlich werden Tail-Dependence-Koeffizienten für Mischungsmodelle, in denen die latente Variable Θ einen beschränkten Wertebereich besitzt, berechnet. Sie messen die Stärke der asymptotischen Abhängigkeit zweier Zufallsvariablen und sind im Hinblick auf die Entscheidung über die Wahl der Verteilung von Θ von Bedeutung. Die Arbeit endet mit einer zusammenfassenden Schlussbetrachtung.

Kapitel 2

Solvency II

Um die eingegangenen Risiken finanziell bewältigen zu können, ist für Versicherungsunternehmen eine ausreichende Eigenkapitalunterlegung von großer Bedeutung. Damit wird nicht nur die Erfüllung der Verpflichtungen des Unternehmens gegenüber den Versicherungsnehmern und Geschädigten, sondern auch die Stabilität der Finanzmärkte gewährleistet. Die adäquate Eigenmittelunterlegung gilt als wesentliches Qualitätsmerkmal eines Versicherungsunternehmens, was Vertrauen bei seinen Kunden und Investoren schafft und somit dessen Wettbewerbssituation stärkt.

Die zur Zeit geltenden EU-Solvabilitätsvorschriften für Versicherungsunternehmen sind unter dem Namen „Solvency I“ bekannt. Die Anforderungen von Solvency I richten sich hauptsächlich nach dem Volumen des Versicherers, nicht nach dessen Risikostruktur¹. So werden beispielsweise im Nichtlebensgeschäft Größen wie Prämien und Schadenaufwendungen herangezogen, so dass eine Prämienhöhung für die Versicherten zu einem erhöhten Eigenkapitalbedarf führt, obwohl die Risikosituation der Gesellschaft sich verbessert. Mit Solvency I kann die Komplexität des Risikoprofils eines Versicherungsunternehmens nicht abgebildet werden, was seit langem Gegenstand heftiger Kritik ist². Das neue Aufsichtssystem Solvency II soll Solvency I ablösen und die Schwächen des alten Systems beseitigen.

2.1 Aufbau und Verlauf von Solvency II

Das Projekt Solvency II wurde im Jahre 2000 von der EU-Kommission ins Leben gerufen, um die bestehenden Richtlinien zu reformieren. Das Ziel des Projektes war

¹ Vgl. hierzu die Richtlinie 2002/13/EG (2002) für die Schadenversicherung und Richtlinie 2002/83/EG (2002) für die Lebensversicherung der Europäischen Kommission sowie Schradin (2003).

² Vgl. Farny (2000), S. 757 ff.

es, ein neues Aufsichtssystem für Versicherungsunternehmen zu schaffen, das risikoorientiert ist, auf einer marktnahen Bewertung der Assets und Liabilities basiert und die bestehenden Aufsichtsregeln harmonisiert. Dabei steht nicht mehr nur der Schutz der Versicherungsnehmer im Vordergrund, sondern auch die Sicherheit und Stabilität der internationalen Finanzmärkte. Zudem wird eine Angleichung der Regeln an die bankaufsichtlichen Richtlinien des Basler Ausschusses für Bankaufsicht, kurz Basel II³ genannt, angestrebt, um gleiche Wettbewerbsbedingungen für Versicherungsunternehmen und Kreditinstitute herzustellen.

Neben der EU-Kommission sind an der Gestaltung von Solvency II auch weitere Einrichtungen und internationale Organisationen beteiligt. Die Ausschüsse European Insurance and Occupational Pensions Committee (EIOPC)⁴ und Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors (CEIOPS)⁵ setzten sich zusammen aus hochrangigen Vertretern der EU-Mitgliedsstaaten und haben in gesetzgeberischen, aufsichtsrechtlichen, regulierenden und auch technischen Fragen eine beratende und unterstützende Funktion im Rahmen des Solvency II-Projekts. Auch die internationale Aufsichtsbehörde für Versicherungsunternehmen IAIS⁶ nimmt zwangsläufig Einfluss auf Solvency II. Überdies sind die Arbeiten des International Accounting Standard Board (IASB), dessen Aufgabe es ist, internationale Rechnungslegungsstandards zu erarbeiten, von besonderer Wichtigkeit für das Vorhaben Solvency II⁷. Denn ohne eine Harmonisierung der Bilanzierungsvorschriften für Versicherungsgeschäfte ist ein Vergleich der Eigenkapitalausstattung europaweit nicht möglich. Weitere Mitwirkende sind Berufsverbände wie die Internationale Aktuarvereinigung IAA⁸ und der Europäische Versicherungsverband CEA⁹, welche einen wesentlichen Beitrag im Hinblick auf das Fachwissen leisten.¹⁰ Es ist nunmehr klar, dass Solvency II nicht nur eine Modifikation von Solvency I ist, sondern die Versicherungsbranche komplett neu ordnen wird.

³ Vgl. BIS (2005). Alle Dokumente zu Basel II findet man auf der Website der Bank for International Settlements (BIS) <http://www.bis.org>.

⁴ Mehr Informationen zu EIOPC findet man auf der Website der Europäischen Kommission: http://ec.europa.eu/internal_market/insurance/committee_en.htm.

⁵ Mehr Informationen zu CEIOPS findet man auf der Website <http://www.ceiops.org>.

⁶ International Association of Insurance Supervisors. Mehr Informationen zu IAIS findet man auf der Website <http://www.iaisweb.org>.

⁷ Vgl. Meyer (2005). Für mehr Informationen siehe auch die IASB Website <http://www.iasb.org>.

⁸ International Actuarial Association. Mehr Informationen zu IAA findet man auf der Website <http://www.actuaries.org>.

⁹ Comité Européen des Assurances oder European Insurance and Reinsurance Federation. Mehr Informationen zu CEA findet man auf der Website <http://www.cea.assur.org>.

¹⁰ Für mehr Details zu den verschiedenen Einrichtungen, die am Solvency II-Projekt beteiligt sind, siehe z.B. Schanté und Caudet (2005).

Solvency II wurde in zwei Phasen unterteilt. Die erste Phase des Projekts diente der Sammlung von Informationen über vergleichbare bestehende Systeme und dem Entwurf von Grundkonzeptionen. In der momentan noch laufenden zweiten Phase sollen die Einzelheiten und Regelungen im Detail ausgearbeitet werden.

Die erste Phase des Projekts Solvency II wurde 2003 mit der Veröffentlichung des EU-Papiers „Solvency II – Reflections on the general outline of a framework directive and mandates for further technical work“ (MARKT/2539/03)¹¹ abgeschlossen. Zu den Grundgedanken des Dokuments gehören der risikobasierte Ansatz des neuen Aufsichtssystems mit dem Ziel der Ermittlung des Gesamtrisikos eines Versicherungsunternehmens und der sich daraus ergebenden Eigenkapitalausstattung sowie ein an Basel II angelehntes 3-Säulen-Konzept, das die Eigenmittelanforderungen durch aufsichtsrechtliche Überprüfungsverfahren und Markttransparenzvorschriften ergänzt.

Das neue Solvenzsystem ist also durch quantitative und qualitative Inhalte gekennzeichnet und baut auf einem 3-Säulen-Modell auf (vgl. Abbildung 2.1), das an dieser Stelle näher erläutert werden soll.

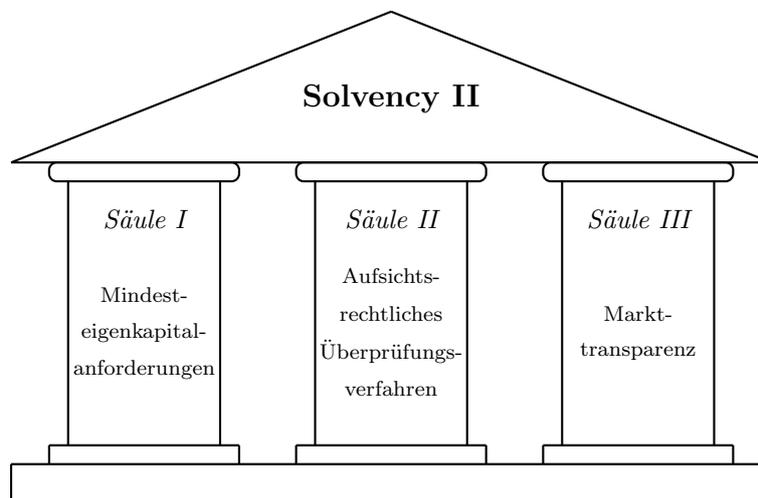


Abbildung 2.1: 3-Säulen-Modell

Säule I, die Eigenkapitalanforderungen, besteht aus den quantitativen Bestimmungen zur Eigenkapitalausstattung von Versicherungsunternehmen und stellt den Kern

¹¹Vgl. MARKT/2539/03 (2003).

der Betrachtung dar. Hier wird zwischen einem Mindestkapital („minimum capital requirements“ (MCR)) und einem ökonomischen Zielkapital („solvency capital requirements“ (SCR)) unterschieden. Das Mindestkapital bildet eine untere Schranke, deren Unterschreiten zu aufsichtsrechtlichen Interventionen führt¹². Das Zielkapital stellt die wünschenswerte Eigenkapitalunterlegung dar und wird unter Einbeziehung aller Risikokategorien sowie unter Berücksichtigung von Abhängigkeitsbeziehungen bestimmt. Es stehen weniger die Einzelrisiken, als vielmehr ein ganzheitliches Konzept für die Gesamtrisikosituation des Unternehmens im Vordergrund.

Zur Berechnung des Zielkapitals soll ein Standard-Risikomodell entwickelt werden. Darüber hinaus wird den Unternehmen die Möglichkeit eingeräumt, interne Modelle zu verwenden. Dies hat den Vorteil, dass sie dem unternehmensspezifischen Risikoprofil unmittelbar Rechnung tragen und zu niedrigeren Kapitalanforderungen führen können. Voraussetzung für den Einsatz eines internen Modells ist die Akkreditierung durch die jeweilige Aufsichtsbehörde.

Säule II, das aufsichtsrechtliche Überprüfungsverfahren, beinhaltet die qualitativen Anforderungen des Aufsichtssystems. Dazu gehören Grundsätze für die interne Kontrolle, für interne Risikomanagementsysteme sowie für die zugehörige Prüfung und Überwachung durch die Aufsicht. Es wird eine Angleichung der Aufsichtsprozesse in den einzelnen EU-Mitgliedstaaten angestrebt, so dass in Krisenzeiten koordinierte Maßnahmen ergriffen werden können¹³.

Säule III, die Markttransparenz, enthält Richtlinien zur Offenlegung, welche die Markttransparenz und damit auch die Marktdisziplin erhöhen. Die Marktteilnehmer sollen die Möglichkeit erhalten, die Risikosituation eines Unternehmens zu beurteilen und dementsprechend zu reagieren¹⁴. Bei der Ausgestaltung der Offenlegungsbestimmungen spielen die internationalen Rechnungslegungsstandards für Versicherungsunternehmen eine bedeutende Rolle, so dass eine Koordination mit den Arbeiten des IASB notwendig ist¹⁵.

¹²Vgl. Sandström (2006), S. 183 ff.

¹³Vgl. Hartung (2005), S. 57.

¹⁴Vgl. Hartung (2005), S. 63 ff.

¹⁵Mehr Informationen zu den Rechnungslegungsstandards IFRS 4 (International Financial Reporting Standard 4) findet man in KPMG (2004). Vgl. auch Meyer (2005) für die Auswirkungen von IFRS auf Solvency II.

In der zweiten Phase des Solvency II Projekts werden die Details des Aufsichtssystems erarbeitet. Dazu hat die EU-Kommission vier CEIOPS-Arbeitsgruppen eingesetzt, die sich ausschließlich mit Solvency II Themen beschäftigen¹⁶. Die Arbeitsgruppen setzen sich zusammen aus Experten aus den Mitgliedsstaaten und fertigen in Zusammenarbeit mit EIOPS Vorschläge über Richtlinien und Regelungen für die EU-Kommission an. Darüber hinaus hat CEIOPS ein Gremium aus Industrieexperten, Verbraucher und Endverbraucher, das Consultative Panel, gegründet, das die Interessen der Marktteilnehmer umfassend berücksichtigt und die Transparenz des gesamten Gesetzgebungsverfahrens gewährleistet.

Seit Juni 2004 gab die EU-Kommission drei so genannte Wellen von Konsultationsersuchen „Specific Calls for Advice“ zu verschiedenen Themen an die CEIOPS-Arbeitsgruppen heraus. In der ersten Welle wurde dazu aufgerufen Stellungnahme zu Anfragen bezüglich Säule II, in der zweiten bezüglich Säule I und in der dritten bezüglich Säule III zu nehmen¹⁷. Die Ausarbeitung der Empfehlungen der CEIOPS zu den drei Wellen wurde im Mai 2006 beendet und leistete einen wesentlichen Beitrag bei der Gestaltung des Richtlinienvorschlags zu Solvency II, der im Juli 2007 vom Europäischen Parlament und Rat angenommen wurde. Mittlerweile wurde der Vorschlag überarbeitet und in der geänderten Fassung im Februar 2008 von der Kommission angenommen¹⁸.

Der Ausschuss der europäischen Aufsichtsbehörden für das Versicherungswesen und die betriebliche Altersvorsorge (CEIOPS) wurde im Rahmen der zweiten Welle von Konsultationsersuchen dazu aufgefordert, so genannte quantitative Auswirkungsstudien (QIS-Quantitative Impact Studies) durchzuführen, um die Auswirkungen der zukünftigen Solvabilitätsanforderungen auf die Versicherungswirtschaft zu untersuchen. Mit Hilfe der Studien soll das Standardmodell auf die Praktikabilität getestet und technische Details optimiert werden. Die Auswirkungsstudien werden auf nationaler Ebene von den jeweiligen Aufsichtsbehörden unter Einbeziehung der Versicherungsunternehmen durchgeführt. Beginnend im Jahre 2005 wurden bis heute vier QIS durchgeführt, deren Ergebnisse in die Ausarbeitung des endgültigen Entwurfs der Solvency II-Rahmenrichtlinie eingehen. Die Annahme der EU-Rahmenrichtlinie für Solvency II soll 2009 erfolgen, während die Fertigstellung der Durchführungsmaßnahmen für 2010 geplant ist. Die Umsetzung der Richtlinie in Nationalrecht in den jeweiligen EU-

¹⁶Weitere Informationen zu den Arbeitsgruppen findet man auf der Website von CEIOPS: <http://www.ceiops.eu/content/view/67/120/>

¹⁷Ausführlichere Informationen zu den Ersuchen findet man auf der Website der Europäischen Kommission: http://ec.europa.eu/internal_market/insurance/solvency/consultation_de.htm.

¹⁸Vgl. KOM(2007) und KOM(2008).

Mitgliedstaaten soll bis 2012 erfolgen.

Der Gesamtverband der Deutschen Versicherungswirtschaft (GDV), der insgesamt 468 private Versicherungsunternehmen in Deutschland vertritt, begrüßt die Veränderungen in der europäischen Versicherungsaufsicht. Im August 2002 veröffentlichte der GDV ein risikoorientiertes Standardmodell für Leben-, Schaden- und Unfallversicherer, das im Hinblick auf Solvency II gemeinsam mit der deutschen Aufsichtsbehörde BaFin¹⁹ nochmals überarbeitet wurde. Die neue Version des GDV-Modells²⁰ enthält alle für ein Versicherungsunternehmen relevanten Risiken und ist mit den Solvency II-Anforderungen an ein Standardmodell kompatibel.

2.2 Risikoarten

Sowohl im GDV-Modell als auch in anderen Risikomodellen zur Berechnung des Zielkapitals wird hauptsächlich zwischen drei Risikokategorien unterschieden, die sich noch feiner differenzieren lassen:

- Versicherungstechnisches Risiko
 - Schaden- und Unfallversicherung
 - Kranken- und Lebensversicherung
- Finanzrisiko
 - Kreditrisiko
 - Marktrisiko
- Operationelles Risiko

Die versicherungstechnischen Risiken im Bereich der Schaden- und Unfallversicherung setzen sich im wesentlichen aus Prämien- und Reserverisiko zusammen. Unter Prämienrisiko versteht man das Risiko, dass die errechnete Versicherungsprämie nicht zur Deckung der zukünftig anfallenden Schadenkosten und sonstigen Kosten ausreicht. Das Reserverisiko quantifiziert das Risiko, dass die Schadenreserven nicht zur Abwicklung der Schäden ausreicht, die bereits eingetreten, aber noch nicht vollständig reguliert sind.

¹⁹Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht

²⁰Einzelheiten zum Standardmodell des GDV findet man in Gießmann et al. (2005) oder GDV (2005).

Das versicherungstechnische Risiko im Bereich der Kranken- und Lebensversicherung setzt sich aus biometrischen Risiken zusammen. Dazu gehören alle Risiken, die unmittelbar mit dem Leben einer Person verbunden sind, wie z.B. das Sterblichkeits-, Langlebigkeits-, Invaliditäts- oder Krankheitsrisiko.

Das Kreditrisiko beschreibt das Risiko des ganzen oder teilweisen Ausfalls der Schuldner und damit der Nichterfüllung von Zahlungsverpflichtungen sowie das Risiko des Ausfalls des Rückversicherers. Zum Kreditrisiko gehört auch das Risiko der Einstufung der Gegenpartei in eine schlechtere Ratingklasse, was zu einem niedrigeren Marktwert der jeweiligen Anleihen führt.

Das Markt- oder auch Marktänderungsrisiko ist das Risiko der Wertveränderung einer Finanzposition, die sich aus Schwankungen von Zinssätzen, Wechselkursen, Aktienkursen, Güterpreisen usw. ergibt.

Das operationelle Risiko wird als das Risiko von Verlusten definiert, die durch unpassende oder fehlerhafte interne Prozesse und Arbeitsabläufe, Menschen, Systeme (z.B. IT-Systeme) oder externe Ereignisse verursacht werden.

Die hier vorgestellten Risikoarten lassen sich nicht immer klar voneinander abgrenzen. Sie stellen lediglich eine grobe Gliederung der Risiken eines Versicherungsunternehmens dar und können noch weiter differenziert, erweitert und unternehmensspezifisch variiert werden.²¹

Im Hinblick auf die Bestimmung des ökonomischen Zielkapitals ist es gemäß Solvency II notwendig, das Gesamtrisiko eines Unternehmens zu quantifizieren. Dabei werden auf verschiedenen Ebenen die Einzelrisiken und Risikogruppen unter Berücksichtigung von Abhängigkeiten aggregiert. Da die Risiken selten unabhängig voneinander sind, ist das Modellieren von Abhängigkeitsbeziehungen beim Aggregationsprozess von zentraler Bedeutung. Falsche oder unzureichende Annahmen bei der Abbildung der Interdependenzen zwischen den Risiken können zu erheblichen Fehleinschätzungen des Solvenzkapitals führen. In den letzten Jahren wurde diesem Thema, das auch einen großen Teil dieser Arbeit einnimmt, mehr Aufmerksamkeit gewidmet.

²¹Eine umfassendere und detailliertere Beschreibung der Risikokategorien findet man z.B. in Sandström (2006), S. 80 ff. und S. 231 ff. oder IAA (2004) S. 26-33. Für die Spezifikation der Risiken in einem internen Modell siehe z.B. Wagner (2005).

In dieser Arbeit werden Methoden zur Quantifizierung von Risiken von Nichtleben-Versicherern²² vorgestellt, die zur Berechnung des Zielkapitals (Säule I) unter Solvency II herangezogen werden können. Besonderes Augenmerk wird hierbei auf das Prämien- und Reserverisiko sowie auf die Modellierung von Abhängigkeiten zwischen beliebigen Risiken, insbesondere auch Kreditrisiken, gelegt.

²²Zu den Nichtleben-Versicherungen gehören alle Versicherungsarten der Schaden- und Unfallversicherung, wie z.B. Sach-, Kfz-, Haftpflicht-, Transportversicherung. Die Rechtsschutzversicherung gehört ebenfalls dazu, während die Krankenversicherung für gewöhnlich nicht dazugezählt wird.

Kapitel 3

Credibility Modelle

Das Prämienrisiko ist eine der wichtigsten Risikoarten eines Versicherungsunternehmens. Demnach gehört das Quantifizieren des Prämienrisikos in Form von Prämien zu den Kernaufgaben eines Versicherers. Die Credibility-Theorie stellt eine der bedeutendsten Techniken zur risikogerechten Prämienberechnung dar.

In diesem Kapitel werden zunächst die Schwierigkeiten bei der Bestimmung einer Versicherungsprämie erörtert und die Credibility-Theorie als geeigneter Ansatz zu deren Lösung vorgestellt. Im Mittelpunkt dieses Kapitels stehen die Credibility Modelle von Bühlmann und Bühlmann-Straub, wobei vom letzteren auch die multidimensionale Version präsentiert wird. Es werden die jeweiligen Credibility-Prädiktoren, deren Eigenschaften sowie die Schätzungen der Modell-Parameter angegeben. Darüber hinaus wird erläutert, wie Hilbert-Raum-Methoden zur Bestimmung von Credibility-Prädiktoren verwendet werden können. Eine Übersicht über weitere Credibility-Modelle schließt das Kapitel ab.

Auch wenn es nicht immer explizit erwähnt wird, werden im Folgenden alle Gleichungen zwischen Zufallsvariablen als fast sicher¹ verstanden.

3.1 Die Problematik der Prämienberechnung

Der Grundgedanke einer Versicherung ist es, bestimmte individuelle Risiken gegen Zahlung einer Prämie auf ein Versicherungsunternehmen zu transferieren. Etwas genauer definiert Farny eine Versicherung als

¹ Zum Begriff der „fast sicheren“ Übereinstimmung von Zufallsvariablen siehe Anhang A, S. 134.

„Deckung eines im einzelnen ungewissen, insgesamt geschätzten Mittelbedarfs auf der Grundlage des Risikoausgleichs im Kollektiv und in der Zeit.“
(Farny (2000), S. 8)

Die zu zahlende Prämie sollte das vom Versicherer übernommene Risiko abdecken. Eine Durchschnittsprämie, die den Gesamtschaden des Versichertenkollektivs deckt, wäre zwar für das Versicherungsunternehmen ausreichend, aber aus Gründen der Beitragsgerechtigkeit und der negativen Risikoselektion nicht wünschenswert. Denn eine nicht dem jeweiligen Risikoprofil angepasste Prämie würde eine Abwanderung der Versicherungsnehmer mit gutem Risikoprofil - auch gute Risiken² genannt - nach sich ziehen. Für schlechte Risiken hingegen wäre eine solche Prämie attraktiv, was zu einer Anhäufung von schlechten Risiken führen würde. Dies wiederum hätte sehr negative Auswirkungen auf die wirtschaftliche Lage der Versicherungsgesellschaft. Eine dem Risiko angepasste Prämie stellt somit eine Notwendigkeit für die Wettbewerbsfähigkeit eines Unternehmens dar³.

Jedoch besteht beim Abschluss eines Versicherungsvertrages Unsicherheit bezüglich der Anzahl und Höhe der zukünftigen Forderungen des Versicherungsnehmers gegenüber dem Versicherungsunternehmen sowie bezüglich den Zeitpunkten des Eintretens eines Schadens, was die Bestimmung einer risikogerechten Prämie problematisch macht⁴. Aufschluss über das individuelle Risiko bzw. über die individuelle Schadenwahrscheinlichkeit können objektive und quantifizierbare Risikomerkmale⁵, die einen deutlichen Einfluss auf den Schadeneintritt haben, sowie die individuelle Schadenvergangenheit geben. Die für die Tarifierung verwendeten Risikomerkmale nennt man auch Tarifmerkmale.

Um eine möglichst risikogerechte Prämie mittels Tarifmerkmalen bestimmen zu können, sollte das Kollektiv in möglichst homogene Risiko- bzw. Tarifklassen unterteilt werden. Andererseits sollten die Klassen hinreichend groß sein, um statistisch fundierte Aussagen treffen zu können. Ist letzteres der Fall, so ist im allgemeinen nicht mehr die Annahme der Homogenität erfüllt. Hinzu kommt noch die ganz andere Problematik, dass viele Faktoren, die für das individuelle Risiko relevant sind, aus unterschiedlichen Gründen nicht erfasst werden können. Dies können politische Gründe bei Merk-

² Mit Risiko wird oft auch ein Versicherungsnehmer aus der Sicht des Versicherungsunternehmens bezeichnet.

³ Vgl. hierzu auch Merz (2005), S. 2 f.

⁴ Siehe z.B. in Schmidt (2006b), S. 1 oder Bühlmann und Gisler (2005), S. 1.

⁵ Das können beispielsweise Alter des Fahrers, Geschlecht, Garage, Jahres-Kilometerleistung, Motorstärke usw. in der Kfz-Versicherung sein.

malen wie Geschlecht, Nationalität usw. oder die Unmöglichkeit der Quantifizierung bzw. des Nachprüfens von Merkmalen wie z.B. Charakter, Temperament, Arbeitsklima, Tabletten- oder Drogenkonsum sein. Auch die Kosten bei der statistischen Erfassung von bestimmten Risikomerkmale spielen in diesem Zusammenhang eine Rolle⁶.

Der individuelle Schadenverlauf alleine bietet wegen der beschränkten Anzahl von Beobachtungen ebenfalls keine zuverlässige statistische Basis für fundierte Aussagen und würde zu schwankenden und zu hohen Prämien führen. Außerdem würde dieses Vorgehen den ursprünglichen Versicherungsgedanken verletzen.

Es liegt also nahe, beides, die kollektive und die individuelle Schadenerfahrung, zur Prämienberechnung heranzuziehen. Die Tarifklassen sollten dabei hinreichend groß sein, um eine ausreichende statistische Basis zu bieten. Das bedeutet, dass man gleichzeitig ihre Heterogenität in Kauf nehmen muss. Die Credibility-Theorie bietet das mathematische Instrumentarium zur Beschreibung nicht homogener Portfolios und liefert die Antwort darauf, wie die individuelle und kollektive Schadenerfahrung zu verknüpfen ist, um einen in gewisser Weise optimalen Schätzer für eine risikogerechte Prämie zu erhalten. In dieser Arbeit wird nur auf die Bestimmung der risikogerechten Nettoprämie eingegangen. Die eigentliche Bruttoprämie ergibt sich durch die Addition eines Sicherheits-, Betriebskosten- und Gewinnzuschlags zur Nettoprämie. Hierfür wird auf Farny (2000), S. 60 ff. und Albrecht und Lippe (1988) verwiesen.

3.2 Credibility-Theorie

Wegbereiter für die Credibility-Theorie waren die frühen Arbeiten von Mowbray (1914) und Whitney (1918). Es dauerte jedoch bis zum Jahre 1967, bis der Schweizer Aktuar Bühlmann eine mathematisch befriedigende Herleitung der Credibility-Formel (siehe (3.2.5)) vorstellte. Seine Beiträge (Bühlmann (1967, 1969)) waren maßgebend für die weitere Entwicklung der klassischen, verteilungsfreien Credibility-Theorie. Das 1970 von Bühlmann und Straub entwickelte Credibility-Modell⁷, das eine Erweiterung der Ergebnisse von Bühlmann darstellt, ist in der Praxis weit verbreitet und wird nicht nur zur Prämienberechnung, sondern auch in der Schadenreservierung⁸ oder zur Quantifi-

⁶ Eine ausführlichere Übersicht über die verschiedenen Gründe, warum viele Merkmale nicht erfasst werden können, findet man z.B. in Sundt oder Bühlmann und Gisler (2005).

⁷ Siehe dazu Abschnitt 3.2.3 und Bühlmann und Straub (1970).

⁸ Siehe Kapitel 4 und die Referenzen darin.

zierung von operationellen Risiken⁹ verwendet.

Die Credibility-Theorie (oder auch Kredibilitätstheorie) beschäftigt sich mit der Frage, wie viel Glaubwürdigkeit bzw. welche Gewichtung man der individuellen Schadenerfahrung bei der Verknüpfung mit der kollektiven Schadenerfahrung beimessen soll. Die Antwort darauf ist eine Konvexkombination aus individueller und kollektiver Schadenerfahrung, der sogenannte *Credibility-Prädiktor*, welcher in einem gewissen statistischen Sinne optimal ist.

Da man in der Regel davon ausgehen kann, dass die Tarifklassen nicht homogen sind, besteht die Notwendigkeit, die Unterschiedlichkeit der einzelnen Risiken zum Ausdruck zu bringen. Für jedes Risiko wird daher ein Parameter θ_i eingeführt, der sein individuelles, nicht bekanntes Risikoprofil charakterisiert. Aufgrund der Tatsache, dass die Schadenneigung θ_i eines Versicherungsnehmers unbekannt ist, wird sie als zufällige Realisation einer Zufallsvariablen Θ_i (Risikoparameter) betrachtet¹⁰. Die Risiken sind zwar unterschiedlich, haben jedoch etwas gemeinsam, sie gehören alle der selben Tarifklasse an. Diese Ähnlichkeit der Risiken lässt sich in dem Umstand ausdrücken, dass alle Zufallsvariablen Θ_i die gleiche Verteilungsfunktion F^* besitzen. Die Verteilung F^* gibt Aufschluss über die Struktur des Portfolios und wird deshalb als *Strukturverteilung* bezeichnet. Auf diese Weise ist die Modellierung von ähnlichen aber dennoch unterschiedlichen Risiken eines Kollektivs möglich.

Der Schadenaufwand eines Risikos für eine der bisherigen Perioden j wird mit X_j ($j = 1, \dots, n$) bezeichnet und ist eine Zufallsvariable¹¹. Der beobachtete Schadenaufwand x_j in der j -ten Periode stellt dementsprechend eine Realisierung der Zufallsvariablen X_j dar. Mit X_{n+1} bezeichnet man den zukünftigen Schadenaufwand des betrachteten Risikos. Für die Prognose des zukünftigen Schadenaufwands wird der in einem gewissen mathematischen Sinn optimale Prädiktor gesucht, welcher ausschließlich auf Informationen aus dem Portfolio beruht. Diese Informationen sind durch den Risikoparameter Θ gegeben, der die Risikostruktur des Portfolios beschreibt. Dieser optimale¹²

⁹ Siehe Bühlmann et al. (2007).

¹⁰ Diese Idee geht auf Lundberg (1940) zurück.

¹¹ Zur Vereinfachung der Notation wird auf den Index i verzichtet, solange nur ein Risiko betrachtet wird.

¹² Dabei handelt es sich um den bezüglich des mittleren quadratischen Fehlers (bzw. des Mean Square Error of Prediction (MSEP)) besten Prädiktor. Siehe dazu Abschnitt 3.2.1 und Brockwell und Davis (1991), S. 62.

Prädiktor ist durch die bedingte Erwartung

$$E[X_{n+1}|\Theta]$$

gegeben¹³, die als *Individual-Prämie* bezeichnet wird. Die risikogerechte Prämie des durch θ charakterisierten Risikos ist dann der bedingte Erwartungswert $E[X_{n+1}|\Theta = \theta]$, welcher den erwarteten Schadenaufwand für die zukünftige Periode $n + 1$ wiedergibt. Da aber im Allgemeinen das individuelle Risikoprofil θ nicht beobachtbar ist, stellt die Individual-Prämie eine Art „fiktive“ Prämie dar, aus der man die „korrekte“ individuelle Prämie ableiten könnte, wenn man θ kennen würde¹⁴. Um eine „echte“ Prämie berechnen zu können ist es also erforderlich, die Individual-Prämie mit Hilfe von beobachtbaren Variablen, der individuellen Schadenerfahrung, bestmöglich zu schätzen. Dabei sollte die Prämie den Praxisanforderungen entsprechen, d.h. möglichst einfach und intuitiv zu berechnen sein und nicht auf spezielle Verteilungsannahmen beruhen.

Die entscheidende Idee von Bühlmann (1967) war es, den bestmöglichen affin-linearen¹⁵ Prädiktor für die Individual-Prämie $E[X_{n+1}|\Theta]$ zu verwenden. Unter der Annahme, dass die Schadenvariablen X_1, \dots, X_n bezüglich des Risikoparameters Θ bedingt unabhängig und identisch verteilt sind, erhielt Bühlmann den Credibility-Prädiktor¹⁶

$$c \cdot \bar{X} + (1 - c) \cdot \mu \tag{3.2.1}$$

mit

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j$$

und

$$\mu = E[E[X_{n+1}|\Theta]] = E[X_{n+1}].$$

Hierbei bezeichnet \bar{X} den durchschnittlichen individuellen Schadenaufwand der ver-

¹³Siehe dazu Satz 3.2.7 oder Brockwell und Davis (1991), S. 63. Für die Definition und Eigenschaften der bedingten Erwartung siehe Anhang A.1.

¹⁴Vgl. Bühlmann und Gisler (2005), S. 8 ff.

¹⁵Dabei handelt es sich um den bezüglich des MSEF besten, affin-linearen Prädiktor für die Individual-Prämie. Siehe dazu Abschnitt 3.2.1.

¹⁶Diese Prämienberechnungsformel wurde schon von Whitney (1918) verwendet, allerdings hat Whitney keine Aussagen über die Qualität dieser Schätzfunktion und der optimalen Wahl des Parameters c treffen können.

gangenen n Perioden und μ den durchschnittlichen erwarteten Schadenaufwand aller Risiken aus dem Kollektiv, die sogenannte *Kollektiv-Prämie*. Daneben ist c eine Konstante aus dem Intervall $[0, 1)$, welche die Glaubwürdigkeit, die der Versicherer der individuellen Schadenerfahrung beimisst, widerspiegelt. Passend dazu wird sie als *Credibility-Faktor* bezeichnet¹⁷. Man erhält auf diese Weise eine Prämie, die den Plausibilitätsanspruch erfüllt, da sie stets zwischen dem mittleren individuellen Schadenaufwand und der Kollektiv-Prämie liegt. Sie ist auch frei von Annahmen bezüglich des Typs der verwendeten Verteilungen - ein weiterer Vorzug im Hinblick auf ihre Praktikabilität.

Beschränkt man sich bei der Schätzung der Individual-Prämie nicht auf Prädiktoren, die affin-linear in den Beobachtungen X_1, \dots, X_n sind, sondern lässt auch Prädiktoren zu, die als beliebige Funktion der bisherigen Beobachtungen darstellbar sind, so ist der sogenannte *Bayes-Prädiktor*,

$$E [E[X_{n+1}|\Theta] | X_1, \dots, X_n],$$

der bestmögliche Prädiktor für die Individual-Prämie $E[X_{n+1}|\Theta]$. Es waren Lundberg und Bailey, die in ihren Arbeiten (Lundberg (1940) und Bailey (1945, 1950)) erstmals den Bayes-Ansatz¹⁸ zur Bestimmung eines Schätzers für die Individual-Prämie verwendeten. Dieses Vorgehen bedarf einer Spezifikation der Strukturverteilung F^* und der bedingten gemeinsamen Verteilung der Schadenvariablen X_1, \dots, X_n bei gegebenem Wert θ von Θ . Die analytische Berechnung des Bayes-Prädiktors ist nur dann möglich, wenn diese Verteilungen aus speziellen Verteilungsfamilien¹⁹ stammen. Ist dies der Fall, so ist der Bayes-Prädiktor

$$E [E[X_{n+1}|\Theta] | X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n]$$

für die beobachteten Schadenaufwendungen x_1, \dots, x_n berechenbar und stimmt sogar mit dem Credibility-Prädiktor überein, wie Jewell (1974) zeigte. Man spricht in diesem Fall von *exakter Credibility*, denn die Einschränkung auf Prädiktoren, die in

¹⁷Die genaue Definition und die Eigenschaften des Credibility-Faktors werden im nächsten Abschnitt ausführlich erläutert.

¹⁸Siehe z.B. Bolstad (2004) für mehr Informationen zur Bayes-Statistik und eine Erläuterung des Bayes-Theorems.

¹⁹Die analytische Berechnung des Bayes-Prädiktors ist z.B. dann möglich, wenn die Schadenvariablen X_i , bedingt gegeben $\Theta = \theta$, unabhängig und identisch verteilt sind, eine Verteilung aus der sogenannten Exponentialfamilie besitzen und der Risikoparameter Θ eine dazu konjugierte Verteilung besitzt. Siehe dazu Jewell (1974), Kaas et al. (1997) und Johansson und Ohlsson (2006).

den Beobachtungen X_1, \dots, X_n affin-linear sind, bringt keinen Güteverlust mit sich. Im Allgemeinen sind aufwendige numerische Verfahren (MCMC-Methoden)²⁰ für die Berechnung des Bayes-Prädiktors erforderlich, da die nötigen Voraussetzungen für die analytisch Berechnung nicht erfüllt sind. Dies stellt einen wesentlichen Nachteil für den Einsatz in der Praxis dar und spricht für die Verwendung des Credibility-Prädiktors.

3.2.1 Das Modell von Bühlmann

In diesem Abschnitt werden analog zu Bühlmann (1967) der Credibility-Prädiktor (3.2.1) hergeleitet, die Eigenschaften dieses Prädiktors vorgestellt und die Unsicherheit bei der Prognose in Form des *Mean Square Error of Prediction (MSEP)* angegeben.

Die Bestimmung des Credibility-Prädiktors im Modell von Bühlmann beruht auf den folgenden einfachen Modellannahmen:

Modellannahmen 3.2.1

- (a) Die Schadenvariablen X_1, \dots, X_n, X_{n+1} besitzen eine endliche Varianz.
- (b) Bedingt gegeben Θ sind die Schadenvariablen X_1, \dots, X_n, X_{n+1} unabhängig und identisch verteilt mit $\text{Var}(E[X_{n+1}|\Theta]) > 0$.

Obwohl die Schadenvariablen bedingt unabhängig sind, sind sie im allgemeinen unbedingt positiv korreliert. Unter Verwendung von Satz A.1.1(h) in Anhang A.1 ergibt sich nämlich für die Kovarianz zweier Schadenvariablen X_i, X_j mit $i \neq j$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_i, X_j) &= E[\text{Cov}(X_i, X_j|\Theta)] + \text{Cov}(E[X_i|\Theta], E[X_j|\Theta]) \\ &= \text{Var}(E[X_i|\Theta]) > 0, \end{aligned}$$

weil aufgrund der Identität der bedingten Verteilungen der Schadenvariablen, auch die bedingten Erwartungen $E[X_j|\Theta]$ für alle $j = 1, \dots, n + 1$ fast sicher übereinstimmen. Die positive Korreliertheit der Schadenvariablen ist erwünscht und plausibel, denn bei Unabhängigkeit der Schadenvariablen wäre eine qualifizierte Schätzung des zukünftigen Schadens mittels Informationen aus den vergangenen Perioden nicht möglich.

²⁰Siehe dazu z.B. Gilks et al. (1996) oder Huergo (2009).

Für die Individual-Prämie und die bedingte Varianz der Schadenvariablen X_{n+1} unter Θ werden für die weitere Betrachtung zwei Abbildungen μ und σ^2 eingeführt, so dass

$$\begin{aligned}\mu(\Theta) &= E[X_{n+1}|\Theta] \\ \sigma^2(\Theta) &= \text{Var}(X_{n+1}|\Theta)\end{aligned}$$

gilt. Ferner wird zur Vereinfachung der Notation

$$\begin{aligned}\zeta^2 &= E[\sigma^2(\Theta)] \\ \tau^2 &= \text{Var}(\mu(\Theta)).\end{aligned}\tag{3.2.2}$$

definiert. Das Ziel ist es nun, den bestmöglichen Prädiktor für die Individual-Prämie $\mu(\Theta)$ unter den in den Schadenvariablen X_1, \dots, X_n affin-linearen Prädiktoren zu finden, wenn die Modellannahmen 3.2.1 gelten. Ein Prädiktor mit dieser Eigenschaft wird dann als bestmöglich angesehen, wenn es keinen anderen in den X_1, \dots, X_n affin-linearen Prädiktor gibt, der eine kleinere erwartete quadrierte Abweichung zur Individual-Prämie besitzt. Das heißt, dass dieser Prädiktor den sogenannten Mean Square Error of Prediction (MSEP) für die Individual-Prämie $\mu(\Theta)$

$$\text{mse}_{\mu(\Theta)}(\hat{Y}) = E\left[\left(\mu(\Theta) - \hat{Y}\right)^2\right]\tag{3.2.3}$$

unter allen in den X_1, \dots, X_n affin-linearen Prädiktoren \hat{Y} minimiert.

Der beste Prädiktor für die Individual-Prämie $\mu(\Theta)$ aus der Klasse der Prädiktoren, die affin-linear in den Schadenvariablen sind, wird mit $\widehat{\mu(\Theta)}^{\text{cred}}$ bezeichnet. Er hat also die Gestalt

$$\widehat{\mu(\Theta)}^{\text{cred}} = a_0 + \sum_{j=1}^n a_j X_j,$$

wobei die Koeffizienten $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ so gewählt werden müssen, dass der MSEP minimiert wird. Demzufolge müssen sie die Gleichung

$$E\left[\left(\mu(\Theta) - a_0 - \sum_{j=1}^n a_j X_j\right)^2\right] = \underset{\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}}{\text{argmin}} E\left[\left(\mu(\Theta) - \alpha_0 - \sum_{j=1}^n \alpha_j X_j\right)^2\right]\tag{3.2.4}$$

erfüllen.

Die Antwort auf dieses Minimierungsproblem wurde schon mit der Formel (3.2.1) ge-

geben. Etwas präziser wird sie nun im folgenden Satz präsentiert.

Satz 3.2.2 (Bühlmann-Prädiktor)

Unter den Modellannahmen 3.2.1 ist der Credibility-Prädiktor gegeben durch

$$\widehat{\mu(\Theta)}^{cred} = c \cdot \bar{X} + (1 - c) \cdot \mu, \quad (3.2.5)$$

mit

$$c = \frac{n}{n + \zeta^2/\tau^2}, \quad \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j \quad \text{und} \quad \mu = E[X_{n+1}]. \quad (3.2.6)$$

Beweis: Siehe Bühlmann (1967), S. 206 f. □

Die optimalen Koeffizienten a_0, \dots, a_n , welche die Gleichung (3.2.4) erfüllen, sind demnach $a_0 = (1-c) \cdot \mu$ und $a_1 = \dots = a_n = \frac{c}{n}$. Damit erhält man eine einfache und intuitive Prämienberechnungsformel, in die nur die drei Momente μ , ζ^2 und τ^2 (*Strukturparameter*) eingehen. Eine weitere schöne Eigenschaft des Credibility-Schätzers (3.2.5) ist dessen Erwartungstreue für die Kollektiv-Prämie μ . Der Credibility-Faktor $c \in [0, 1)$ drückt die Glaubwürdigkeit der individuellen Schadenvergangenheit aus, was sich auch in seinen formalen Eigenschaften widerspiegelt. Diese werden im Folgenden erläutert:

- Der Credibility-Faktor wächst monoton mit der Anzahl der Beobachtungen n . D.h. mit zunehmender Anzahl von Beobachtungen basiert der Credibility-Prädiktor immer mehr auf der individuellen Schadenerfahrung \bar{X}_n und gleichzeitig nimmt der Einfluss der Kollektiv-Prämie μ ab.
- Der Credibility-Faktor ist um so größer, je kleiner die erwartete Varianz eines Vertrages bzw. Risikos ist, die durch $\zeta^2 = E[\text{Var}(X_{n+1}|\Theta)]$ gemessen wird.
- Der Credibility-Faktor steigt, wenn die Heterogenität des Portfolios, die durch $\tau^2 = \text{Var}(\mu(\Theta))$ gegeben ist, zunimmt. D.h. starke Unterschiede der Risiken im Portfolio führen dazu, dass der individuellen Schadenvergangenheit mehr Glaubwürdigkeit zugeschrieben wird.

Die Modellannahmen 3.2.1 sowie die Credibility-Prädiktor (3.2.5) sind bis jetzt nur für ein Risiko formuliert worden. In einem Portfolio mit I Risiken ist jedoch die Bestimmung der Credibility-Prämie für jedes Risiko $i = 1, \dots, I$ notwendig. Dementsprechend wird jedem Risiko sein Risikoprofil in Form der Zufallsvariablen Θ_i zugeordnet, wobei die Ähnlichkeit der Risiken aus einem Portfolio dadurch ausgedrückt wird, dass alle Θ_i , $i = 1, \dots, I$ dieselbe Strukturverteilung F^* besitzen. Die Schadenvariablen eines

Risikos i werden mit $X_{i,1}, \dots, X_{i,n}$ bezeichnet, so dass man folgende Verallgemeinerung der Modellannahmen 3.2.1 für ein Portfolio von Risiken formulieren kann.

Modellannahmen 3.2.3 (Bühlmann-Modell)

- (a) Die Schadenvariablen $X_{i,1}, \dots, X_{i,n}, X_{i,n+1}$ des i -ten Risikos ($i = 1, \dots, I$) besitzen eine endliche Varianz.
- (b) Bedingt gegeben Θ_i sind die Schadenvariablen $X_{i,1}, \dots, X_{i,n}, X_{i,n+1}$ unabhängig und identisch verteilt mit $\tau^2 > 0$.
- (c) Die Zufallsvektoren $(\Theta_1, X_{1,1}, \dots, X_{1,n}), \dots, (\Theta_I, X_{I,1}, \dots, X_{I,n})$ sind unabhängig und identisch verteilt.

Den Credibility-Prädiktor der Individual-Prämie $\mu(\Theta_i) = E[X_{i,n+1}|\Theta_i]$ des i -ten Risikos erhält man analog zum Credibility-Prädiktor (3.2.5) durch das Minimieren des MSEF über alle Prädiktoren, die affin-linear in den Beobachtungen $X_{i,j}$ ($i = 1, \dots, I$, $j = 1, \dots, n$) sind. Diesmal betrachtet man die Schadenvariablen aller Risiken aus dem Portfolio, nicht nur die des i -ten Risikos. Es stellt sich jedoch heraus, dass, aufgrund der Unabhängigkeitsannahme 3.2.3(c), der Credibility-Prädiktor $\widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{cred}}$ nur vom durchschnittlichen individuellen Schadenaufwand des Risikos i abhängt und die Schadenaufwendungen der restlichen Risiken aus dem Portfolio für die Schätzung nicht berücksichtigt werden. Er entspricht damit dem Prädiktor (3.2.5) und hat für alle $i = 1, \dots, I$ die Gestalt

$$\widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{cred}} = c \cdot \bar{X}_{i,n} + (1 - c) \cdot \mu, \quad (3.2.7)$$

wobei

$$\bar{X}_{i,n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_{i,j} \quad \text{und} \quad \mu = E[\mu(\Theta_i)] = E[X_{i,n+1}] \quad (3.2.8)$$

und der Credibility-Faktor c in (3.2.6) gegeben ist²¹.

In den bisherigen Betrachtungen wurde stets angenommen, dass die Kollektiv-Prämie μ bekannt ist. Ist diese Information nicht vorhanden, so ist die Schätzung der Kollektiv-Prämie auf Basis aller Beobachtungen aus dem Portfolio erforderlich. Eine intuitive Herangehensweise ist es, den Gesamtdurchschnitt aller Beobachtungen aus dem Portfolio

$$\bar{X}_n = \frac{1}{In} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^n X_{i,j} \quad (3.2.9)$$

²¹Vgl. Bühlmann und Gisler (2005), S. 61 f.

als Schätzer für μ zu verwenden. Tatsächlich ist es so, dass der auf diese Weise resultierende Credibility-Prädiktor den MSEP für die Individual-Prämie $\mu(\Theta_i)$ innerhalb der Klasse

$$\left\{ \widehat{\mu(\Theta_i)} \mid \widehat{\mu(\Theta_i)} = \sum_{k=1}^I \sum_{j=1}^n \alpha_{k,j} X_{k,j}, \quad E[\widehat{\mu(\Theta_i)}] = E[\mu(\Theta_i)] \right\} \quad (3.2.10)$$

minimiert. Diesen Prädiktor bezeichnet man als *homogenen Credibility-Prädiktor*. Er besitzt die folgende Form:

Satz 3.2.4 (Homogener Bühlmann-Prädiktor)

Unter den Modellannahmen 3.2.3 ist der homogene Credibility-Prädiktor von $\mu(\Theta_i)$ für $i = 1, \dots, I$ gegeben durch

$$\widehat{\mu(\Theta_i)}^{hom} = c \cdot \bar{X}_{i,n} + (1 - c) \cdot \bar{X}_n, \quad (3.2.11)$$

wobei c , $\bar{X}_{i,n}$ und \bar{X}_n in (3.2.6), (3.2.8) bzw. (3.2.9) gegeben sind.

Beweis: Siehe Bühlmann und Gisler (2005), S. 63 bzw. S. 86 ff. □

Der homogene Bühlmann-Prädiktor (3.2.11) ist wie der (inhomogene) Bühlmann-Prädiktor (3.2.5) erwartungstreu für die Kollektiv-Prämie μ . Allerdings wird hier die Erwartungstreue durch die Definition (3.2.10) erzwungen.

Bei der Bestimmung der Credibility-Prädiktoren kam bereits der Mean Square Error of Prediction zum Einsatz. Da er einfach zu handhaben ist und eine Verbindung zu Hilbert-Raum-Techniken herstellt²², hat sich der MSEP als geeignetes Maß zur Beurteilung der Qualität dieser Prädiktoren erwiesen²³. So sind sowohl der (inhomogene) Credibility-Prädiktor (3.2.7), als auch der homogene Credibility-Prädiktor (3.2.11) bestmögliche Prädiktoren, in dem Sinne, dass sie den MSEP für die Individual-Prämie $\mu(\Theta_i)$ innerhalb der jeweiligen Klassen von Schätzfunktionen minimieren. Allerdings wurde bisher der MSEP noch nicht in Form von konkreten Werten, die die Unsicherheit in der Prognose quantifizieren, angegeben. Diese Werte liefert der folgende Satz.

²²Siehe dazu Abschnitt 3.2.2.

²³Der MSEP hat den Nachteil, dass er nur anwendbar ist, wenn die Gleichbehandlung von positiven und negativen Abweichungen gewünscht wird.

Satz 3.2.5 *Unter den Modellannahmen 3.2.3 ist der MSEP des inhomogenen und homogenen Credibility-Prädiktors für die Individual-Prämie $\mu(\Theta_i)$ gegeben durch*

$$E \left[\left(\widehat{\mu(\Theta_i)}^{cred} - \mu(\Theta_i) \right)^2 \right] = \tau^2 (1 - c), \quad (3.2.12)$$

$$E \left[\left(\widehat{\mu(\Theta_i)}^{hom} - \mu(\Theta_i) \right)^2 \right] = \tau^2 (1 - c) \left(1 + \frac{1 - c}{I \cdot c} \right) \quad (3.2.13)$$

mit $c = \frac{n}{n + \zeta^2 / \tau^2}$.

Beweis: Siehe Bühlmann und Gisler (2005), S. 60 und S. 92 f. □

Dadurch, dass im homogenen Credibility-Prädiktor automatisch ein Schätzer für die Kollektiv-Prämie μ eingebaut ist, ist dessen MSEP für die Individual-Prämie $\mu(\Theta_i)$ größer als der des inhomogenen Credibility-Prädiktors. Aus den Gleichungen (3.2.12) und (3.2.13) wird auch ersichtlich, dass für eine wachsende Anzahl n von Beobachtungen pro Risiko beide MSEP immer kleiner werden. Insbesondere gilt die folgende asymptotische Eigenschaft der Credibility-Prädiktoren:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\left(\widehat{\mu(\Theta_i)}^{cred} - \mu(\Theta_i) \right)^2 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\left(\widehat{\mu(\Theta_i)}^{hom} - \mu(\Theta_i) \right)^2 \right] = 0.$$

Eine weitere wünschenswerte, asymptotische Eigenschaft von Schätzfunktionen ist die der *fast sicheren Konvergenz* gegen die zu schätzende Zufallsvariable. Schmidt (1990) zeigte, dass der (inhomogene) Credibility-Schätzer (3.2.7) für $n \rightarrow \infty$ fast sicher gegen die Individual-Prämie $\mu(\Theta_i)$ konvergiert²⁴, d.h. es gilt

$$P \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{\mu(\Theta_i)}^{cred} = \mu(\Theta_i) \right) = 1. \quad (3.2.14)$$

Für die explizite numerische Berechnung des homogenen Credibility-Prädiktors (3.2.11) sowie der MSEP (3.2.12) und (3.2.13) ist die Schätzung der Strukturparameter ζ^2 und τ^2 mit Hilfe der Beobachtungen aus dem Portfolio notwendig. Diese Schätzungen werden im Abschnitt 3.2.3.2 für das Bühlmann-Straub-Modell angegeben. Daraus ergeben sich als Spezialfall die Schätzungen der Strukturparameter ζ^2 und τ^2 für das Bühlmann-Modell (siehe (3.2.66) und (3.2.67)).

²⁴Der Bayes-Prädiktor besitzt dieselben asymptotischen Eigenschaften wie der (inhomogene) Credibility-Prädiktor, siehe dazu z.B. Merz (2004), S. 68 f. und Schmidt (1990). Sie stimmen also im Grenzwert überein. Bei einer endlicher Anzahl n von Schadenvariablen pro Risiko ist im Allgemeinen der MSEP des Bayes-Prädiktors kleiner als der des Credibility-Prädiktors, siehe (3.2.30) weiter unten.

3.2.2 Hilbert Räume und orthogonale Projektionen

In diesem Abschnitt wird eine alternative Möglichkeit zur Gewinnung von Credibility-Prädiktoren durch sogenannte *orthogonale Projektionen* der Individual-Prämie auf geeignete Unterräume des Hilbert-Raumes aller reellwertigen Zufallsvariablen, deren zweites Moment existiert, vorgestellt. Diese Vorgehensweise erlaubt eine intuitive Interpretation einiger Eigenschaften der Credibility-Prädiktoren sowie die Anwendung nützlicher Hilbert-Raum-Methoden in der Credibility-Theorie. De Vylder (1976a) war einer der ersten, der diesen Ansatz in der Credibility-Theorie verwendete. Auch bei Gerber und Jones (1975a) und bei Taylor (1977) kamen die Hilbert-Raum-Methoden zum Einsatz. Eine weitere, empfehlenswerte Darstellung dieses Ansatzes findet man in Bühlmann und Gisler (2005, Kapitel 3.2).

Eine kurze Einführung in die Hilbert-Raum-Theorie, die alle für das Verständnis der hier vorgestellten Methoden notwendigen Begriffe und Eigenschaften von Hilbert-Räumen enthält, wird in Anhang B bereitgestellt. Die für die Credibility-Theory relevanten Notationen und Eigenschaften des Hilbert-Raumes aller reellwertigen Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)^{25}$, deren zweites Moment existiert, werden hier erläutert.

Der Raum aller reellwertigen Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) , deren zweites Moment existiert, ist definiert als

$$L^2(\Omega, \mathcal{F}, P) = \{X \mid X \text{ ist eine Zufallsvariable auf } (\Omega, \mathcal{F}, P) \text{ mit } E[X^2] < \infty\}. \quad (3.2.15)$$

Dieser Raum besitzt die Eigenschaften eines Hilbert-Raumes²⁶ mit dem *Skalarprodukt*

$$\langle X, Y \rangle = E[X \cdot Y] \quad (3.2.16)$$

und der vom Skalarprodukt induzierten *Norm* (bzw. *L^2 -Norm*)

$$\|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle} = \sqrt{E[X^2]}. \quad (3.2.17)$$

²⁵Hierbei bezeichnet Ω eine Ergebnismenge, \mathcal{F} eine σ -Algebra über Ω und P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathcal{F} . Für mehr Informationen zu Wahrscheinlichkeitsräumen und deren Eigenschaften siehe z.B. Schaich und Münnich (2001), S. 1 ff. und die Referenzen darin.

²⁶Siehe Beispiel B.2.3 in Anhang B.2.

Betrachtet man die quadrierte Norm der Differenz zweier Zufallsvariablen $X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$$\|X - Y\|^2 = E[(X - Y)^2],$$

so stellt man fest, dass sie dem MSEP von Y für X (siehe (3.2.3)) entspricht. Die L^2 -Norm (3.2.17) wird also als Maß für die Qualität eines Prädiktors, der ein endliches zweites Moment besitzt, verwendet. So ist ein Prädiktor mit bestimmten Eigenschaften umso geeigneter, je kleiner sein MSEP für die Individual-Prämie $\mu(\Theta_i)$ ist. Der inhomogene Credibility-Prädiktor ist der bezüglich des MSEP optimale Prädiktor innerhalb des Raumes aller in den Schadenvariablen $X_{i,1}, \dots, X_{i,n} \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ affin-linearen Prädiktoren,

$$L(\mathbf{X}_i, 1) = \left\{ \widehat{Y} \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P) \left| \widehat{Y} = \alpha_0 + \sum_{j=1}^n \alpha_j X_{i,j}, \alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \right. \right\}. \quad (3.2.18)$$

Der homogene Credibility-Prädiktor ist der bezüglich des MSEP optimale Prädiktor innerhalb des Raumes aller für μ erwartungstreuen Prädiktoren, die in den Schadenvariablen $X_{i,j}$ ($i = 1, \dots, I$, $j = 1, \dots, n$) linear sind,

$$L(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_I) = \left\{ \widehat{Y} \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P) \left| \widehat{Y} = \sum_{k=1}^I \sum_{j=1}^n \alpha_{k,j} X_{k,j}, \alpha_{k,j} \in \mathbb{R}, E[\widehat{Y}] = E[\mu(\Theta_i)] \right. \right\}. \quad (3.2.19)$$

Den Bayes-Prädiktor

$$\widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{Bayes}} = E[E[X_{i,n+1} | \Theta_i] | X_{i,1}, \dots, X_{i,n}] \quad (3.2.20)$$

erhält man, in dem man den bezüglich dem MSEP optimalen Prädiktor im Raum aller Prädiktoren, die als Funktion von $X_{i,j} \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ($j = 1, \dots, n$) darstellbar sind,

$$\mathcal{M}(\mathbf{X}_i) = \left\{ \widehat{Y} \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P) \left| \widehat{Y} = f(X_{i,1}, \dots, X_{i,n}), f \text{ ist eine reellwertige Funktion} \right. \right\}. \quad (3.2.21)$$

Für die weitere Vorgehensweise sind die folgende Definition und der folgende Projektionssatz von zentraler Bedeutung. Sie ermöglichen die Verbindung zwischen der Credibility-Theory und der Hilbert-Raum-Theorie.

Definition 3.2.6

- (a) Zwei Zufallsvariablen $X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ bezeichnet man als orthogonal zueinander, wenn $\langle X, Y \rangle = 0$ gilt, kurz $X \perp Y$.

(b) Sei $U \subseteq L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein abgeschlossener Unterraum des Hilbert-Raumes $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Dann bezeichnet $X_U \in U$ die orthogonale Projektion von X auf den Unterraum U , falls $X - X_U \perp U$ gilt, d.h. $X - X_U \perp Z$ für alle $Z \in U$.

Satz 3.2.7 (Projektionssatz) Sei $U \subseteq L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein abgeschlossener Unterraum des Hilbert-Raumes $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Dann existiert für ein $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ die orthogonale Projektion X_U und ist eindeutig bestimmt. Außerdem gilt für X_U

$$\|X - X_U\|^2 = \min_{Z \in U} \|X - Z\|^2. \quad (3.2.22)$$

Beweis: Siehe z.B. Brockwell und Davis (1991), S. 51 f. □

Da die drei für die Credibility-Theorie wichtigen Unterräume $L(\mathbf{X}_i, 1)$, $L(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_I)$ und $\mathcal{M}(\mathbf{X}_i)$ abgeschlossene Unterräume von $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sind²⁷, sind die bezüglich dem MSEF bzw. der L^2 -Norm optimalen Prädiktoren nach dem Projektionssatz 3.2.7 eindeutig bestimmt und gegeben durch die jeweiligen Projektionen. Alternativ kann man also die Credibility-Prädiktor und den Bayes-Prädiktor als

$$\widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{cred}} = \mu(\Theta_i)_{L(\mathbf{X}_i, 1)} \quad (3.2.23)$$

$$\widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{hom}} = \mu(\Theta_i)_{L(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_I)} \quad (3.2.24)$$

$$\widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{Bayes}} = \mu(\Theta_i)_{\mathcal{M}(\mathbf{X}_i)} \quad (3.2.25)$$

definieren. Weiterhin haben orthogonale Projektionen und damit auch die Credibility-Prädiktoren folgende Eigenschaften:

Satz 3.2.8 Seien U_1 und U_2 zwei abgeschlossene Unterräume von $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit $U_1 \subseteq U_2$ und $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Dann gilt für die orthogonalen Projektionen X_{U_1} und X_{U_2}

$$\bullet X_{U_1} = (X_{U_2})_{U_1}, \quad (\text{Iterationseigenschaft}) \quad (3.2.26)$$

$$\bullet \|X - X_{U_1}\|^2 = \|X - X_{U_2}\|^2 + \|X_{U_2} - X_{U_1}\|^2 \text{ und} \quad (3.2.27)$$

$$\bullet (a \cdot X + b \cdot Y)_{U_2} = a \cdot X_{U_2} + b \cdot Y_{U_2} \text{ für alle } a, b \in \mathbb{R}. \quad (\text{Linearität}) \quad (3.2.28)$$

Beweis: Siehe z.B. Brockwell und Davis (1991), S. 52 f. □

²⁷Siehe dazu Anhang B.2.

Aus der Iterationseigenschaft (3.2.26) und der Beziehung $L(\mathbf{X}_i, 1) \subseteq \mathcal{M}(\mathbf{X}_i)$ kann man mühelos folgern, dass der Credibility-Prädiktor $\widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{cred}}$ die beste lineare Approximation des Bayes-Prädiktors $\widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{Bayes}}$ ist. Es gilt nämlich

$$\widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{cred}} = \left(\mu(\Theta_i)_{\mathcal{M}(\mathbf{X}_i)} \right)_{L(\mathbf{X}_i, 1)} = \left(\widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{Bayes}} \right)_{L(\mathbf{X}_i, 1)}. \quad (3.2.29)$$

Aus der Eigenschaft²⁸ (3.2.27) ist auch ersichtlich, dass der MSEF des Credibility-Prädiktors größer als der des Bayes-Prädiktors ist, falls die zwei Prädiktoren nicht übereinstimmen. Der Fehler setzt sich wie folgt zusammen:

$$E \left[\left(\widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{cred}} - \mu(\Theta_i) \right)^2 \right] = E \left[\left(\widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{Bayes}} - \mu(\Theta_i) \right)^2 \right] + \left[\left(\widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{Bayes}} - \widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{cred}} \right)^2 \right] \quad (3.2.30)$$

Aufgrund der Tatsache, dass der Credibility-Prädiktor (3.2.23) eine orthogonale Projektion der Individual-Prämie $\mu(\Theta_i)$ auf den Unterraum $L(\mathbf{X}_i, 1)$ ist, erfüllt er die *Normalgleichungen*

$$E \left[\left(\mu(\Theta_i) - \widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{cred}} \right) \cdot 1 \right] = 0 \quad (3.2.31)$$

$$E \left[\left(\mu(\Theta_i) - \widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{cred}} \right) \cdot X_{i,j} \right] = 0 \quad \text{für } j = 1, \dots, n. \quad (3.2.32)$$

Die erste Normalgleichung (3.2.31) besagt, dass der Credibility-Prädiktor $\widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{cred}}$ stets erwartungstreu für die Kollektiv-Prämie $\mu = E[\mu(\Theta_i)]$ ist. Da der Prädiktor $\widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{cred}}$ ein Element aus dem Raum $L(\mathbf{X}_i, 1)$ ist, hat er die Form

$$\widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{cred}} = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k X_{i,k}. \quad (3.2.33)$$

Berücksichtigt man diese Form, so kann man die Normalgleichungen (3.2.31) und (3.2.32) nach kurzen Umformungen²⁹ als

$$a_0 = \mu - \sum_{k=1}^n a_k \cdot E[X_{i,k}] \quad (3.2.34)$$

$$\text{Cov}(\mu(\Theta_i), X_{i,j}) = \sum_{k=1}^n a_k \cdot \text{Cov}(X_{i,k}, X_{i,j}) \quad \text{für } j = 1, \dots, n \quad (3.2.35)$$

²⁸Die Eigenschaft (3.2.27) entspricht dem Satz von Pythagoras, vgl. (B.1.2) in Anhang B.1.

²⁹Vgl. z.B. Bühlmann und Gisler (2005), S. 72 f.

darstellen. Umgekehrt, erfüllt eine Schätzfunktion die Normalgleichungen (3.2.31) und (3.2.32), dann stimmt diese Schätzfunktion mit dem Credibility-Prädiktor $\widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{cred}}$ überein³⁰. Dies bedeutet, dass die Koeffizienten a_0, \dots, a_n von $\widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{cred}}$, und damit auch $\widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{cred}}$ selbst, durch die $n + 1$ Normalgleichungen (3.2.34) und (3.2.35) eindeutig bestimmt sind³¹. Außerdem sind für deren Bestimmung nur die ersten zwei Momente der gemeinsamen Verteilung von $\mu(\Theta_i)$ und $X_{i,1}, \dots, X_{i,n}$ nötig. Im Gegensatz zur Berechnung des Bayes-Prädiktors ist die genaue Kenntnis der Strukturverteilung F^* und der bedingten Verteilungen der Schadenvariablen bei gegebenem Wert θ nicht erforderlich.

Für den homogenen Credibility-Prädiktor gelten ähnliche Normalgleichungen, die sich direkt aus der Definition des homogenen Credibility-Prädiktors als orthogonale Projektion der Individual-Prämie $\mu(\Theta_i)$ auf den Unterraum $L(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_I)$ ergeben:

$$E \left[\left(\mu(\Theta_i) - \widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{hom}} \right) \cdot 1 \right] = 0 \quad (3.2.36)$$

$$E \left[\left(\mu(\Theta_i) - \widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{hom}} \right) \cdot Y \right] = 0 \quad \text{für alle } Y \in L(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_I). \quad (3.2.37)$$

Analog zum inhomogenen Credibility-Prädiktor gilt auch hier, dass ein Prädiktor, der die Normalgleichungen (3.2.36) und (3.2.37) erfüllt, der homogene Credibility-Prädiktor $\widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{hom}}$ sein muss³². Unter den Modellannahmen 3.2.3 ist damit die explizite Berechnung von $\widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{hom}}$ unter Verwendung der Normalgleichungen (3.2.36) und (3.2.37) möglich.

3.2.3 Das Modell von Bühlmann-Straub

Das von Bühlmann und Straub (1970) entwickelte Modell wird vor allem dann verwendet, wenn der Versicherungsschutz für ein ganzes Kollektiv von Einzelrisiken zu bestimmen ist. Das kommt beispielsweise bei der Reiseversicherung für die Kunden einer Reiseagentur, der kollektiven Unfallversicherung einer Firma, der Feuerversicherung für Unternehmen oder auch der Rückversicherung vor. Da die Größe eines solchen zu versichernden Portfolios von Periode zu Periode schwankt, sollte sie in die Schätzung der risikogerechten Prämie einfließen. Dementsprechend wird die Größe des Portfolios

³⁰Vgl. z.B. Bühlmann und Gisler (2005), S. 71.

³¹Dies gilt jedoch nicht, falls $X_{i,1}, \dots, X_{i,n}, 1$ linear abhängig sind, d.h. falls $P(\lambda_1 \cdot X_{i,1} + \dots + \lambda_n \cdot X_{i,n} + \lambda_{n+1} \cdot 1 = 0) = 1$ für $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \neq (0, \dots, 0)$ gilt.

³²Vgl. z.B. Bühlmann und Gisler (2005), S. 71.

mit Hilfe eines geeigneten Volumenmaßes quantifiziert. Bei der Reiseversicherung eignet sich die Anzahl der Kunden der Reiseagentur, bei der kollektiven Unfallversicherung die Lohnsumme, bei der Feuerversicherung die Versicherungssumme und bei der Rückversicherung das Prämienvolumen des Erstversicherers als Volumenmaß³³. Durch die Berücksichtigung eines Volumenmaßes, welches in den einzelnen Perioden unterschiedlich sein kann, ist die zeitliche Homogenität der Risiken, im Gegensatz zum Bühlmann-Modell, nicht mehr gegeben.

Im Folgenden wird das Risikoprofil der i -ten Risiko-Klasse mit Θ_i bezeichnet. Nimmt man an, dass sich in der i -ten Klasse und j -ten Periode $w_{i,j}$ Einzelrisiken mit den jeweiligen Schadenaufwendungen $Y_{i,j}^1, \dots, Y_{i,j}^{w_{i,j}}$ befinden, welche bedingt gegeben Θ_i unabhängig und identisch verteilt sind, so gilt für den durchschnittlichen Schadenaufwand in der i -ten Risikogruppe

$$E \left[\frac{1}{w_{i,j}} \sum_{k=1}^{w_{i,j}} Y_{i,j}^k \middle| \Theta_i \right] = E [Y_{i,j}^1 | \Theta_i] \quad (3.2.38)$$

und

$$\text{Var} \left(\frac{1}{w_{i,j}} \sum_{k=1}^{w_{i,j}} Y_{i,j}^k \middle| \Theta_i \right) = \frac{1}{w_{i,j}} \text{Var} (Y_{i,j}^1 | \Theta_i). \quad (3.2.39)$$

Die Prämie für die i -te Risiko-Klasse lässt sich somit als Produkt von $E [Y_{i,j}^1 | \Theta_i]$ und $w_{i,j}$ berechnen. Die bedingte Varianz des durchschnittlichen Schadenaufwandes ist umgekehrt proportional zur Anzahl $w_{i,j}$ der Einzelrisiken im Portfolio.

Wird der Gesamtschadenaufwand $\sum_{k=1}^{w_{i,j}} Y_{i,j}^k$ in Relation zu einem geeigneten Volumenmaß $w_{i,j}$ gesetzt, so spricht man von *Schadensätzen*. Dies kann nicht nur wie in der obigen Ausführung die Anzahl der Risiken im Portfolio, sondern auch ein anderes passendes Volumenmaß³⁴ sein. Die Schadensätze $\frac{1}{w_{i,j}} \sum_{k=1}^{w_{i,j}} Y_{i,j}^k$ werden mit $X_{i,j}$ bezeichnet und sind Gegenstand der Betrachtung im Modell von Bühlmann-Straub. Motiviert durch die Gleichungen (3.2.38) und (3.2.39) lauten die Modellannahmen des Bühlmann-Straub-Modells wie folgt.

Modellannahmen 3.2.9 (Bühlmann-Straub-Modell)

- (a) Die Schadenvariablen $X_{i,1}, \dots, X_{i,n}, X_{i,n+1}$ des i -ten Risikos ($i = 1, \dots, I$) besitzen eine endliche Varianz.

³³Vgl. Bühlmann und Gisler (2005), S. 78 und Merz (2004), S. 73.

³⁴Beispiele für geeignete Volumenmaße wurden am Anfang dieses Abschnittes gegeben.

(b) *Bedingt gegeben Θ_i sind $X_{i,1}, \dots, X_{i,n}, X_{i,n+1}$ unabhängig mit*

$$E[X_{i,j}|\Theta_i] = \mu(\Theta_i), \quad (3.2.40)$$

$$\text{Var}(X_{i,j}|\Theta_i) = \frac{\sigma^2(\Theta_i)}{w_{i,j}} \quad (3.2.41)$$

und $\text{Var}(\mu(\Theta_i)) > 0$.

(c) *Die Zufallsvektoren $(\Theta_1, X_{1,1}, \dots, X_{1,n}), \dots, (\Theta_I, X_{I,1}, \dots, X_{I,n})$ sind unabhängig und $\Theta_1, \dots, \Theta_I$ sind unabhängig und identisch verteilt.*

Die Schadensätze $X_{i,1}, \dots, X_{i,n}, X_{i,n+1}$ sind im Gegensatz zum Modell von Bühlmann nicht mehr bedingt identisch verteilt. Es wird lediglich unterstellt, dass die bedingten Erwartungen identisch sind und die bedingten Varianzen sich nur um den Faktor $1/w_{i,j}$ unterscheiden. In den Fällen, in denen nicht die Anzahl der Einzelrisiken in der Risiko-Klasse als Volumenmaß verwendet wird, ist es oft vorteilhafter eine Funktion von $w_{i,j}$ anstatt dem Volumenmaß $w_{i,j}$ selbst als Gewichtungsfaktor in der Gleichung (3.2.41) zu wählen (siehe Kapitel 4).

Zur Vereinfachung der Notation werden auch für das Bühlmann-Straub-Modell die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} \mu &= E[\mu(\Theta_i)] \\ \zeta^2 &= E[\sigma^2(\Theta_i)] \\ \tau^2 &= \text{Var}(\mu(\Theta_i)) \end{aligned} \quad (3.2.42)$$

für die Strukturparameter verwendet. Man beachte, dass sich die Definition für σ^2 leicht von der analogen Definition im Bühlmann-Modell unterscheidet. Hier gilt $\zeta^2 = E[\sigma^2(\Theta_i)] = E[w_{i,j} \text{Var}(X_{i,j}|\Theta_i)]$. Im Bühlmann-Modell lautete die Definition $\zeta^2 = E[\text{Var}(X_{i,j}|\Theta_i)]$.

Genau wie beim Bühlmann-Modell sucht man einen Prädiktor für die Individual-Prämie $\mu(\Theta_i)$, der den kleinsten MSEF für $\mu(\Theta_i)$ innerhalb der Klasse

$$L(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_I, 1) = \left\{ \hat{Y} \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P) \left| \hat{Y} = \alpha_0 + \sum_{k=1}^I \sum_{j=1}^n \alpha_{k,j} X_{k,j}, \alpha_0, \alpha_{k,j} \in \mathbb{R} \right. \right\} \quad (3.2.43)$$

besitzt.

Satz 3.2.10 (Bühlmann-Straub-Prädiktor)

Unter den Modellannahmen 3.2.9 ist der Credibility-Prädiktor von $\mu(\Theta_i)$ für $i = 1, \dots, I$ gegeben durch

$$\widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{cred}} = c_i \cdot \sum_{j=1}^n \frac{w_{i,j}}{\sum_{j=1}^n w_{i,j}} X_{i,j} + (1 - c_i) \cdot \mu, \quad (3.2.44)$$

mit

$$c_i = \frac{\sum_{j=1}^n w_{i,j}}{\sum_{j=1}^n w_{i,j} + \kappa}, \quad \text{und} \quad \kappa = \frac{\zeta^2}{\tau^2}. \quad (3.2.45)$$

Beweis: Siehe Bühlmann und Straub (1970), S. 119 ff. □

Bevor der homogene Credibility-Prädiktor des Bühlmann-Straub-Modells vorgestellt wird, noch einige Anmerkungen zum Credibility-Prädiktor $\widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{cred}}$:

- Der Credibility-Prädiktor (3.2.44) hängt nur von der Schadenerfahrung der i -ten Risiko-Klasse (bzw. des i -ten Risikos) ab. Bei bekannter Kollektiv-Prämie μ wird aufgrund der Unabhängigkeit zwischen den Risiken (siehe Modellannahme 3.2.9(c)) die Schadenerfahrung der restlichen Risiken nicht für die Schätzung benötigt.
- Der Credibility-Prädiktor (3.2.44) lässt sich als orthogonale Projektion der Individual-Prämie $\mu(\Theta_i)$ auf $L(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_I, 1)$

$$\widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{cred}} = \mu(\Theta_i)_{L(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_I, 1)} \quad (3.2.46)$$

darstellen³⁵.

- Für $w_{i,1} = \dots = w_{i,n}$ erhält man den Credibility-Prädiktor (3.2.7) des Modells von Bühlmann.
- $\widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{cred}}$ ist ein erwartungstreuer Prädiktor für die Kollektiv-Prämie $\mu = E[X_{i,n+1}]$.
- Auch im Bühlmann-Straub-Modell ist der Credibility-Prädiktor (3.2.44) eine Konvexkombination aus Kollektiv-Prämie μ und individueller Schadenerfahrung des betrachteten Risikos bzw. der betrachteten Risikogruppe $\sum_{j=1}^n \frac{w_{i,j}}{\sum_{j=1}^n w_{i,j}} X_{i,j}$. Allerdings geht nun jedes $X_{i,j}$ gemäß seines Gewichtes $w_{i,j}$ in die Berechnung ein.
- Die Annahme der bedingten Unabhängigkeit der $X_{i,1}, \dots, X_{i,n}, X_{i,n+1}$ in den Modellannahmen 3.2.9 (b) kann auf die Bedingung $E[\text{Cov}(X_{i,k}, X_{i,l} | \Theta_i)] = 0$ für

³⁵Vgl. Bühlmann und Gisler (2005), S. 81 ff.

$k \neq l$ abgeschwächt werden. Alle Aussagen in diesem Abschnitt sind dann weiterhin gültig³⁶.

- Der Credibility-Faktor c_i hat dieselben Eigenschaften wie der Credibility-Faktor c aus dem Bühlmann-Modell. Siehe dazu Seite 23.
- Zur konkreten Bestimmung von $\widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{cred}}$ sind nur die drei Strukturparameter μ, ς^2 und τ^2 nötig, da die Volumenmaße $w_{i,j}$ beobachtbar sind. In der Regel ist die Schätzung der Strukturparameter auf Basis der Beobachtungen erforderlich. Die Parameterschätzer für μ, ς^2 und τ^2 werden am Ende dieses Abschnittes präsentiert.

Ist die Kollektiv-Prämie μ a priori nicht bekannt, so kann man anstatt $\widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{cred}}$ den homogenen Credibility-Prädiktor bestimmen, welcher nur auf den Beobachtungen $X_{i,j}$ ($i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, n$) basiert. Man erhält den homogenen Credibility-Prädiktor für das Bühlmann-Straub-Modell durch das Minimieren des MSEP für die Individualprämie $\mu(\Theta_i)$ innerhalb des Raumes $L(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_I)$ (siehe (3.2.19) auf Seite 28). Für die Zufallsvariablen $X_{i,j}$ aus $L(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_I)$ gelten nun die Modellannahmen 3.2.9 des Bühlmann-Straub-Modells. Der homogene Credibility-Prädiktor ist demnach durch die orthogonale Projektion von $\mu(\Theta_i)$ auf $L(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_I)$

$$\widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{hom}} = \mu(\Theta_i)_{L(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_I)} \quad (3.2.47)$$

gegeben, welche wegen der Iterationseigenschaft (3.2.29) und $L(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_I) \subseteq L(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_I, 1)$ mit der Projektion des Credibility-Schätzers (3.2.44) auf $L(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_I)$

$$\widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{hom}} = \left(\widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{cred}} \right)_{L(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_I)} \quad (3.2.48)$$

übereinstimmt. Verwendet man weiterhin die Linearität (3.2.28) von orthogonalen Projektionen, so ergibt sich für den homogenen Credibility-Prädiktor des Modells von Bühlmann-Straub

$$\widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{hom}} = c_i \cdot \sum_{j=1}^n \frac{w_{i,j}}{\sum_{j=1}^n w_{i,j}} X_{i,j} + (1 - c_i) \cdot \mu_{L(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_I)}. \quad (3.2.49)$$

Der homogene Credibility-Prädiktor resultiert also aus dem inhomogenen, indem man μ durch seinen bestmöglichen erwartungstreuen, in den $X_{i,j}$ ($i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, n$) linearen Schätzer ersetzt. Diesen erhält man als orthogonale Projektion von μ auf

³⁶Vgl. Bühlmann und Gisler (2005), S. 80 ff.

$L(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_I)$, was zur folgenden Darstellung des homogenen Credibility-Prädiktors führt.

Satz 3.2.11 (Homogener Bühlmann-Straub-Prädiktor)

Unter den Modellannahmen 3.2.9 des Bühlmann-Straub-Modells ist der homogene Credibility-Prädiktor von $\mu(\Theta_i)$ für $i = 1, \dots, I$ durch

$$\widehat{\mu(\Theta_i)}^{hom} = c_i \cdot G_i + (1 - c_i) \cdot \widehat{\mu} \quad (3.2.50)$$

gegeben, wobei

$$G_i = \sum_{j=1}^n \frac{w_{i,j}}{\sum_{j=1}^n w_{i,j}} \cdot X_{i,j}, \quad \widehat{\mu} = \sum_{i=1}^I \frac{c_i}{\sum_{i=1}^I c_i} \cdot G_i \quad \text{und} \quad (3.2.51)$$

$$c_i = \frac{\sum_{j=1}^n w_{i,j}}{\sum_{j=1}^n w_{i,j} + \frac{\sigma^2}{\tau^2}} \quad (3.2.52)$$

gilt.

Beweis: Siehe Bühlmann und Gisler (2005), S. 87 ff. □

Der Schätzer für die Kollektiv-Prämie μ ist nicht, wie man vermutlich im ersten Moment angenommen hätte, das mit den Volumina $w_{i,j}$ gewichtete Mittel aller Beobachtungen aus dem Portfolio, sondern der mit den Credibility-Faktoren c_i gewichtete Mittelwert der individuellen, volumengewichteten Durchschnitte G_i . Hier werden die Schadensätze $X_{i,j}$ aller Risiken, nicht nur die des i -ten Risikos, für die Schätzung benötigt.

Eine weitere interessante Eigenschaft des homogenen Credibility-Prädiktors (3.2.50) ist die nachfolgende Gleichgewichtseigenschaft.

Folgerung 3.2.12 (Gleichgewichtseigenschaft) *Unter den Modellannahmen 3.2.9 des Bühlmann-Straub-Modells gilt für den homogenen Credibility-Prädiktor*

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^n w_{i,j} \cdot \widehat{\mu(\Theta_i)}^{hom} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^n w_{i,j} \cdot X_{i,j}. \quad (3.2.53)$$

Beweis: Siehe Bühlmann und Gisler (2005), S. 91 ff. □

Die linke Seite der Gleichgewichtsgleichung (3.2.53) gibt das gesamte Prämienvolumen aller Risiko-Klassen für die letzten n Perioden wieder. Dies stimmt mit dem Gesamtschadenaufwand des ganzen Portfolios für die vergangenen n Perioden überein, welcher auf der rechten Seite von (3.2.53) steht. Portfolio- und zeitübergreifend hat man damit eine faire Prämie für die letzten n Perioden. Darüber hinaus gilt die Gleichgewichtseigenschaft unabhängig von der Wahl bzw. Schätzung der Strukturparameter ζ^2 und τ^2 , die für die Berechnung des homogenen Credibility-Prädiktors benötigt werden.

3.2.3.1 Der Mean Square Error of Prediction

Für den MSEP des inhomogenen und homogenen Credibility-Prädiktors für die Individual-Prämie $\mu(\Theta_i)$ gilt:

Satz 3.2.13 *Unter den Modellannahmen 3.2.9 des Bühlmann-Straub-Modells ist der MSEP des inhomogenen und homogenen Credibility-Prädiktors für die Individual-Prämie $\mu(\Theta_i)$ gegeben durch*

$$E \left[\left(\widehat{\mu(\Theta_i)}^{cred} - \mu(\Theta_i) \right)^2 \right] = \tau^2 (1 - c_i), \quad (3.2.54)$$

$$E \left[\left(\widehat{\mu(\Theta_i)}^{hom} - \mu(\Theta_i) \right)^2 \right] = \tau^2 (1 - c_i) \left(1 + \frac{1 - c_i}{\sum_{i=1}^I c_i} \right) \quad (3.2.55)$$

mit $c_i = \frac{\sum_{j=1}^n w_{i,j}}{\sum_{j=1}^n w_{i,j} + \frac{\zeta^2}{\tau^2}}$.

Beweis: Siehe Bühlmann und Gisler (2005), S. 86 und S. 92 f. □

Erwartungsgemäß ist auch der MSEP des homogenen Credibility-Prädiktors im Modell von Bühlmann-Straub größer als der des inhomogenen Credibility-Prädiktors. Ist zusätzlich die Bedingung

$$\sum_{j=1}^{\infty} w_{i,j} = \infty$$

erfüllt, was im Allgemeinen keine Einschränkung darstellt, dann erhält man unmittelbar aus den Gleichungen (3.2.54) und (3.2.55) die quadratische Konvergenz beider Credibility-Prädiktoren gegen die Individual-Prämie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\left(\widehat{\mu(\Theta_i)}^{cred} - \mu(\Theta_i) \right)^2 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\left(\widehat{\mu(\Theta_i)}^{hom} - \mu(\Theta_i) \right)^2 \right] = 0. \quad (3.2.56)$$

Auch für das Modell von Bühlmann-Straub lässt sich die fast sichere Konvergenz nachweisen. Hess und Schmidt (1994) zeigten unter den Annahmen

$$\sum_{j=1}^{\infty} w_{i,j} = \infty \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w_{i,k}}{\left(\sum_{j=1}^k w_{i,j}\right)^2} < \infty,$$

dass der inhomogene Credibility-Prädiktor fast sicher gegen die Individual-Prämie konvergiert, d.h. es gilt

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{cred}} = \mu(\Theta_i)\right) = 1. \quad (3.2.57)$$

Diese asymptotischen Eigenschaften qualifizieren zusätzlich die Credibility-Prädiktoren als Schätzfunktionen für die Individual-Prämie und begründen insbesondere die Verwendung dieser Prädiktoren bei großem n .³⁷

3.2.3.2 Schätzung der Strukturparameter

In der Praxis sind die Strukturparameter μ , ζ^2 und τ^2 , die für die Berechnung der Credibility-Prädiktoren benötigt werden, für gewöhnlich nicht bekannt und müssen mit Hilfe der Beobachtungen aus dem Portfolio geschätzt werden. Eine Schätzung der Kollektiv-Prämie μ erfolgte schon im Zuge der Bestimmung des homogenen Credibility-Prädiktors und ist in (3.2.51) angegeben. Es ist nur noch die Schätzung der Strukturparameter ζ^2 und τ^2 erforderlich. Bühlmann und Straub (1970) schlugen in ihrem Originalartikel als Schätzer für $\zeta^2 = E[\sigma^2(\Theta_i)]$

$$\widehat{\zeta}^2 = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n w_{i,j} (X_{i,j} - G_i)^2 \quad (3.2.58)$$

vor. Als Durchschnitt der empirischen Varianzen der einzelnen Verträge

$$s_i^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n w_{i,j} (X_{i,j} - G_i)^2$$

ist $\widehat{\zeta}^2$ ein plausibler Schätzer und besitzt zugleich folgende Eigenschaften³⁸:

- $\widehat{\zeta}^2$ ist ein erwartungstreuer Schätzer für ζ^2 , d.h. es gilt $E[\widehat{\zeta}^2] = \zeta^2$,

³⁷Der Bayes-Prädiktor des Bühlmann-Straub-Modells besitzt dieselben asymptotischen Eigenschaften wie der (inhomogene) Credibility-Prädiktor (3.2.44), siehe dazu z.B. Merz (2004), S. 80 oder Hess und Schmidt (1994). D.h. sie stimmen im Grenzwert überein.

³⁸Zum Beweis der Eigenschaften von $\widehat{\zeta}^2$ siehe z.B. Bühlmann und Gisler (2005), S. 93 f.

- $\widehat{\zeta}^2$ ist ein konsistenter Schätzer für ζ^2 , d.h. es gilt $\lim_{I \rightarrow \infty} P\left(\left|\widehat{\zeta}^2 - \zeta^2\right| \geq \varepsilon\right) = 0$ für alle $\varepsilon > 0$.

Als Schätzer für $\tau^2 = \text{Var}(\mu(\Theta_i))$ stellen Bühlmann und Straub (1970) den Schätzer

$$\widehat{\tau}^{2^\circ} = a \cdot \left(\sum_{i=1}^I \frac{w_{i,\bullet}}{w_{\bullet,\bullet}} \cdot \left(G_i - \sum_{k=1}^I \frac{w_{k,\bullet}}{w_{\bullet,\bullet}} G_k \right)^2 - \frac{(I-1) \cdot \widehat{\zeta}^2}{w_{\bullet,\bullet}} \right) \quad (3.2.59)$$

vor, wobei

$$w_{i,\bullet} = \sum_{j=1}^n w_{i,j}, \quad w_{\bullet,\bullet} = \sum_{i=1}^I w_{i,\bullet} \quad \text{und} \quad a = \left(\sum_{i=1}^I \frac{w_{i,\bullet}}{w_{\bullet,\bullet}} \left(1 - \frac{w_{i,\bullet}}{w_{\bullet,\bullet}} \right) \right)^{-1} \quad (3.2.60)$$

definiert wird. Für diesen Schätzer gelten folgenden Eigenschaften:

- $\widehat{\tau}^{2^\circ}$ ist erwartungstreu³⁹ für τ^2 , d.h. es gilt $E\left[\widehat{\tau}^{2^\circ}\right] = \tau^2$,
- $\widehat{\tau}^{2^\circ}$ ist ein konsistenter Schätzer⁴⁰ für τ^2 , d.h. es gilt $\lim_{I \rightarrow \infty} P\left(\left|\widehat{\tau}^{2^\circ} - \tau^2\right| \geq \varepsilon\right) = 0$ für alle $\varepsilon > 0$, falls zusätzlich die Bedingung $\sum_{i=1}^I \left(\frac{w_{i,\bullet}}{w_{\bullet,\bullet}}\right)^2 \rightarrow 0$ für $I \rightarrow \infty$ erfüllt ist.

Um die Erwartungstreue von $\widehat{\tau}^{2^\circ}$ sicherzustellen ist die Differenzbildung in (3.2.59) notwendig, weswegen $\widehat{\tau}^{2^\circ}$ auch negative Werte annehmen kann. In diesen Fällen setzt man $\widehat{\tau}^{2^\circ} = 0$. Es ist dann kein statistisch signifikanter Unterschied zwischen den Risiken innerhalb des Portfolios erkennbar. Man verwendet schließlich

$$\widehat{\tau}^2 = \max\left(\widehat{\tau}^{2^\circ}, 0\right) \quad (3.2.61)$$

als Schätzer für τ^2 . Dieser Schätzer ist allerdings nicht mehr erwartungstreu.

In der Literatur findet man auch andere Schätzer für die Strukturparameter (siehe z.B. Dubey und Gisler (1981), Norberg (1982), De Vylder und Goovaerts (1992), Goulet (1998)). Jedoch wurde für keinen dieser Schätzer nachgewiesen, dass er durchweg besser ist als der von Bühlmann und Straub (1970) vorgeschlagene Schätzer.

³⁹Zum Beweis der Erwartungstreue von $\widehat{\tau}^{2^\circ}$ siehe z.B. Bühlmann und Straub (1970).

⁴⁰Zum Beweis der Konsistenz von $\widehat{\tau}^{2^\circ}$ siehe z.B. Dubey und Gisler (1981).

Ersetzt man nun die Strukturparameter ζ^2 und τ^2 im homogenen Credibility-Prädiktor (3.2.50) durch ihre Schätzungen $\widehat{\zeta}^2$ und $\widehat{\tau}^2$, so erhält man für das i -te Risiko den *empirischen Credibility-Prädiktor*

$$\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}} = \widehat{c}_i \cdot G_i + (1 - \widehat{c}_i) \cdot \widehat{\mu} \quad (3.2.62)$$

mit

$$\widehat{c}_i = \frac{\sum_{j=1}^n w_{i,j}}{\sum_{j=1}^n w_{i,j} + \frac{\widehat{\zeta}^2}{\tau^2}}, \quad \widehat{\mu} = \sum_{i=1}^I \frac{\widehat{c}_i}{\sum_{i=1}^I \widehat{c}_i} \cdot G_i \quad \text{und} \quad (3.2.63)$$

$$G_i = \sum_{j=1}^n \frac{w_{i,j}}{\sum_{j=1}^n w_{i,j}} \cdot X_{i,j}. \quad (3.2.64)$$

Im Falle von $\widehat{\tau}^2 = 0$ gilt für den Schätzer des Credibility-Faktors ebenfalls $\widehat{c}_i = 0$. Für den Schätzer der Kollektiv-Prämie $\widehat{\mu}$ gilt dann

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{w_{\bullet,\bullet}} \sum_{i=1}^I w_{i,\bullet} \cdot G_i = \frac{1}{w_{\bullet,\bullet}} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^n w_{i,j} \cdot X_{i,j}, \quad (3.2.65)$$

der nun auch als empirischer Credibility-Prädiktor $\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}$ fungiert.

Der empirische Credibility-Prädiktor (3.2.62) ist wegen den Interdependenzen der Parameterschätzer im Allgemeinen nicht mehr erwartungstreu für die Kollektiv-Prämie $\mu = E[\mu(\Theta_i)]$. Gilt zusätzlich die Bedingung $\sum_{i=1}^I \left(\frac{w_{i,\bullet}}{w_{\bullet,\bullet}}\right)^2 \rightarrow 0$ für $I \rightarrow \infty$, welche bedeutet, dass kein Risiko bezüglich dem Volumen die anderen dominiert, dann weist der empirische Credibility-Prädiktor für alle $i = 1, \dots, I$ die folgenden zwei asymptotischen Bedingungen auf:

- $\lim_{I \rightarrow \infty} P \left(\left| \widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}} - \widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{cred}} \right| \geq \varepsilon \right) = 0$ für alle $\varepsilon > 0$, (Konsistenz)
- $\lim_{I \rightarrow \infty} E \left[\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}} \right] = \mu$. (Asymptotische Erwartungstreue für μ)

Darüber hinaus gilt für $\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}$ die Gleichgewichtseigenschaft

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^n w_{i,j} \cdot \widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^n w_{i,j} \cdot X_{i,j},$$

welche besagt, dass die durch den empirischen Credibility-Prädiktor erzielte Prämie für das Gesamtportfolio mit dem Gesamtschadenaufwand des gesamten Portfolios übereinstimmt (vgl. Folgerung 3.2.12 auf Seite 36).

Aus dem homogenen Bühlmann-Straub-Prädiktor (3.2.50) geht als Spezialfall der homogene Bühlmann-Prädiktor (3.2.11) hervor, falls die Volumenmaße $w_{i,j}$ für alle $i = 1, \dots, I$ und $j = 1, \dots, n$ identisch sind ($w_{i,j} = w$). Hierbei muss die unterschiedliche Definition des Strukturparameters ζ^2 in beiden Modellen beachtet werden. Um diese definitorische Diskrepanz klarer darstellen zu können, werden die Bezeichnungen ζ_{B}^2 für das Bühlmann-Modell und ζ_{BS}^2 für das Bühlmann-Straub-Modell eingeführt. Damit gilt $\zeta_{\text{BS}}^2 = w \cdot \zeta_{\text{B}}^2$ (vgl. dazu (3.2.2) und (3.2.42)). Dies führt zum folgenden Schätzer des Strukturparameters ζ_{B}^2 im Bühlmann-Modell:

$$\widehat{\zeta}_{\text{B}}^2 = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{i,j} - \bar{X}_{i,n})^2. \quad (3.2.66)$$

Die Schätzung des Strukturparameters τ^2 vereinfacht sich zu

$$\widehat{\tau}^2 = \max(\widehat{\tau}^{2^\circ}, 0) \quad (3.2.67)$$

mit

$$\widehat{\tau}^{2^\circ} = \frac{1}{I-1} \sum_{i=1}^I (\bar{X}_{i,n} - \bar{X}_n)^2 - \frac{1}{n} \cdot \widehat{\zeta}_{\text{B}}^2.$$

Mit Hilfe dieser Schätzer erhält man den *empirischen Credibility-Prädiktor* des Bühlmann-Modells für das i -te Risiko

$$\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}} = \widehat{c} \cdot \bar{X}_{i,n} + (1 - \widehat{c}) \cdot \bar{X}_n, \quad (3.2.68)$$

wobei

$$\widehat{c} = \frac{n}{n + \frac{\widehat{\zeta}_{\text{B}}^2}{\widehat{\tau}^2}}, \quad \bar{X}_{i,n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_{i,j} \quad \text{und}$$

$$\bar{X}_n = \frac{1}{In} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^n X_{i,j}.$$

gilt. Selbstverständlich besitzen die Schätzungen der Strukturparameter sowie der empirische Credibility-Prädiktor im Bühlmann-Modell die selben Eigenschaften wie die

entsprechenden Schätzer des Bühlmann-Straub-Modells.

3.2.4 Das multidimensionale Modell von Bühlmann-Straub

Um Informationen aus verschiedenen Versicherungsportfolios effizient verarbeiten zu können, ist eine simultane Betrachtung der Portfolios zweckmäßig. Dadurch können mögliche Abhängigkeiten zwischen den Portfolios bei der Prognose berücksichtigt werden. Dies führt zu einer multidimensionalen Prognose mehrerer Größen (Individual-Prämie, Individual-Frequenz, Individual-Schadenhöhe, Individual-Schadensatz usw.). Die multidimensionale Credibility-Theorie, zu der auch das multidimensionale Bühlmann-Straub-Modell gehört, geht auf Jewell (1973) zurück, dessen Beitrag ausschlaggebend für die weitere Entwicklung der multivariaten Credibility-Theory war.

Zwei typische Situationen, in denen man an einer simultanen Prognose mehrerer Größen interessiert ist, werden an dieser Stelle exemplarisch erläutert, wenngleich die Anzahl der Beispiele mühelos erweitert werden kann⁴¹.

- Simultane Prognose der Schadensätze (oder Schadenhäufigkeit) für *Normal-* und *Großschäden*⁴². Diese ist in Geschäftsbereichen sinnvoll wie z.B. Auto-Haftpflicht oder allgemeine Haftpflicht, in denen oftmals 1-2 % der Schäden für mehr als 50 % des Gesamtschadens verantwortlich sind. Da die statistische Basis für Großschäden relativ gering ist, bietet es sich an, die Beobachtungen aus beiden Kategorien simultan zu betrachten, um aus der Vielzahl an Daten für Normalschäden statistische Informationen für die Großschäden zu gewinnen. Anstatt der Unterscheidung in Normal- und Großschäden, kann man auch die Differenzierung in *Sach-* und *Körperschäden* vornehmen⁴³.
- Simultane Prognose der Schadenhäufigkeit und der Schadenhöhe. Üblicherweise werden Schadenhäufigkeit und Schadenhöhe separat geschätzt. Daraus prognostiziert man dann den Schadenaufwand eines Risikos für die zukünftige Periode. Falls Abhängigkeiten zwischen diesen zwei Größen vermutet werden, ist die simultane Prognose von Vorteil. Zum Beispiel ist die Schadenhäufigkeit bei Autounfällen in der Stadt tendenziell größer und die Schadenhöhe tendenziell geringer als bei Unfällen auf dem Land.

⁴¹Vgl. dazu Bühlmann und Gisler (2005), S. 167 ff.

⁴²Mit Normal- bzw. Großschäden werden Schäden bezeichnet, deren Höhe eine festgelegte Grenze unter- bzw. überschreiten.

⁴³Siehe dazu auch Bühlmann et al. (2003), S. 2, S. 11.

Die getrennte Prognose der einzelnen Komponenten ist nur dann sinnvoll, wenn die Komponenten unabhängig voneinander sind. Ist dies nicht der Fall, enthalten auch die Beobachtungen der anderen Komponenten wertvolle Informationen, die für eine qualifizierte Prognose unabdingbar sind.

Gegenstand dieses Paragraphen ist das multidimensionale Bühlmann-Straub-Modell, das als Spezialfall aus dem allgemeinen multidimensionalen Credibility-Modell hervorgeht. Für das allgemeine multidimensionale Credibility-Modell wird hier auf Bühlmann und Gisler (2005, Kapitel 7.2) verwiesen. Im multidimensionalen Modell wird jedem Risiko $i \in \{1, \dots, I\}$ für jede Periode $j \in \{1, \dots, n\}$ mehrere eindimensionale Beobachtungen $X_{i,j}^{(1)}, \dots, X_{i,j}^{(M)}$ zugeordnet, welche man zu einem Vektor

$$\mathbf{X}_{i,j} = \left(X_{i,j}^{(1)}, \dots, X_{i,j}^{(M)} \right)' \quad (3.2.69)$$

zusammenfasst. Dieser Vektor ist nun ein Element des Raumes aller M -dimensionalen Zufallsvektoren, deren zweites Moment existiert. Dieser Raum wird mit $L^{2,M}(\Omega, \mathcal{F}, P)$ bezeichnet. Im obigen erstgenannten Beispiel hätte man $\mathbf{X}_{i,j} = \left(X_{i,j}^{(1)}, X_{i,j}^{(2)} \right)'$ mit

$X_{i,j}^{(1)}$ = Schadensatz (oder Schadenhäufigkeit) der Normalschäden des i -ten Risikos in der j -ten Periode und
 $X_{i,j}^{(2)}$ = Schadensatz (oder Schadenhäufigkeit) der Großschäden des i -ten Risikos in der j -ten Periode.

Die zu den Beobachtungen $X_{i,j}^{(m)}$ ($m = 1, \dots, M$) gehörigen Gewichte $w_{i,j}^{(m)}$ werden zum Vektor

$$\mathbf{w}_{i,j} = \left(w_{i,j}^{(1)}, \dots, w_{i,j}^{(M)} \right)' \quad (3.2.70)$$

zusammengefasst. Das Ziel ist es nun, die M -dimensionale Individual-Prämie

$$E[\mathbf{X}_{i,n+1} | \Theta_i] = \left(E[X_{i,n+1}^{(1)} | \Theta_i], \dots, E[X_{i,n+1}^{(M)} | \Theta_i] \right)'$$

für alle Risiken $i = 1, \dots, I$ auf Basis sämtlicher Beobachtungen zu prognostizieren. In Anlehnung an die bisherige Notation werden Funktionen μ_m und σ_m^2 von Θ_i ($m = 1, \dots, M$) eingeführt, so dass für die Individual-Prämie jeder Komponente und für die bedingte Varianz der Beobachtungen $X_{i,n+1}^{(m)}$ unter Θ_i

$$\begin{aligned} \mu_m(\Theta_i) &= E[X_{i,n+1}^{(m)} | \Theta_i] \quad \text{bzw.} \\ \sigma_m^2(\Theta_i) &= \text{Var}(X_{i,n+1}^{(m)} | \Theta_i) \end{aligned}$$

gilt. In Vektorschreibweise hat man damit

$$\boldsymbol{\mu}(\Theta_i) = (\mu_1(\Theta_i), \dots, \mu_M(\Theta_i))'$$

Weiterhin bezeichnen

$$\mathbf{D}(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_M \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{D}(\mathbf{a})^b = \begin{pmatrix} a_1^b & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_M^b \end{pmatrix} \quad (3.2.71)$$

die diagonalen $M \times M$ -Diagonalmatrizen, deren Diagonalelemente die Komponenten der M -dimensionalen Vektoren $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_M)' \in \mathbb{R}^M$ bzw. $(a_1^b, \dots, a_M^b)' \in \mathbb{R}^M$ mit $b \in \mathbb{R}$ sind.

Die nun folgenden Modellannahmen des multidimensionalen Bühlmann-Straub-Modells sind eine Verallgemeinerung der Modellannahmen 3.2.9 des eindimensionalen Modells und lauten wie folgt:

Modellannahmen 3.2.14 (Multivariates Bühlmann-Straub-Modell)

- (a) Die Schadenvariablen $X_{i,1}^{(m)}, \dots, X_{i,n}^{(m)}, X_{i,n+1}^{(m)}$ des i -ten Risikos ($i = 1, \dots, I$) besitzen für alle $m = 1, \dots, M$ eine endliche Varianz.
- (b) Bedingt gegeben Θ_i sind $\mathbf{X}_{i,1}, \dots, \mathbf{X}_{i,n+1}$ unabhängig mit

$$E[\mathbf{X}_{i,j} | \Theta_i] = \boldsymbol{\mu}(\Theta_i) \quad (3.2.72)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(\mathbf{X}_{i,j} | \Theta_i) &= \mathbf{D}(\mathbf{w}_{i,j})^{-1/2} \cdot \Sigma(\Theta_i) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{w}_{i,j})^{-1/2} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sigma_1^2(\Theta_i)}{w_{i,j}^{(1)}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\sigma_M^2(\Theta_i)}{w_{i,j}^{(M)}} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.2.73)$$

wobei die Matrix $\Sigma(\Theta_i)$ die $M \times M$ -Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen $\sigma_1^2(\Theta_i), \dots, \sigma_M^2(\Theta_i)$ ist.

- (c) Die Zufallsvektoren $(\Theta_i, \mathbf{X}'_{i,1}, \dots, \mathbf{X}'_{i,n})$, $i = 1, \dots, I$, sind unabhängig und die Strukturparameter $\Theta_1, \dots, \Theta_I$ sind unabhängig und identisch verteilt.

Diese Modellannahmen vereinfachen sich zu den Modellannahmen 3.2.9 des (klassischen) eindimensionalen Bühlmann-Straub-Modells, falls eindimensionale Beobachtungen vorliegen. In Annahme 3.2.14(b) wird die bedingte Unkorreliertheit der Komponenten von $\mathbf{X}_{i,j}$, gegeben Θ_i , angenommen. Denkt man beispielsweise an die Schadensätze für Normal- und Großschäden, so ist diese Annahme nicht erfüllt. Allerdings sind in diesem Fall die Gewichte für Normal- und Großschäden identisch. Dies führt auf die alternative Annahme, bei der $w_{i,j}^{(m)} = w_{i,j}$ für alle $m = 1, \dots, M$ und damit

$$\text{Var}(\mathbf{X}_{i,j} | \Theta_i) = \frac{1}{w_{i,j}} \cdot \Sigma(\Theta_i) \quad (3.2.74)$$

gilt, wobei $\Sigma(\Theta_i)$ diesmal eine beliebige Varianz-Kovarianz-Matrix ist. Auch unter dieser Alternativannahme behalten alle Aussagen dieses Abschnittes ihre Gültigkeit.

Der Mean Square Error or Prediction (MSEP) eines M -dimensionalen Prädiktors $\widehat{\mathbf{Z}} = (\widehat{Z}_1, \dots, \widehat{Z}_M)'$ für eine M -dimensionale Zufallsvariable $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_M)'$ ist gegeben durch

$$\text{mse}_{\mathbf{Z}}(\widehat{\mathbf{Z}}) = \sum_{m=1}^M E \left[\left(\widehat{Z}_m - Z_m \right)^2 \right]. \quad (3.2.75)$$

Den (inhomogenen) M -dimensionalen Credibility-Prädiktor $\widehat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_i)^{\text{cred}}$ für die Individual-Prämie $\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)$ erhält man durch das Minimieren des MSEP (3.2.75) unter allen M -dimensionalen Prädiktoren $\widehat{\mathbf{Z}} = (\widehat{Z}_1, \dots, \widehat{Z}_M)'$, deren Komponenten \widehat{Z}_k affin-linear in den Komponenten der Beobachtungen $\mathbf{X}_{i,1}, \dots, \mathbf{X}_{i,n}$ sind. Es ist also das Minimierungsproblem

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_i)^{\text{cred}} = \underset{\widehat{\mathbf{Z}} \in L(\mathcal{D}_I^M, 1)}{\text{argmin}} \text{mse}_{\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)}(\widehat{\mathbf{Z}}) \quad (3.2.76)$$

mit

$$L(\mathcal{D}_I^M, 1) = \left\{ \widehat{\mathbf{Z}} \left| \widehat{Z}_k = \alpha_0 + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^M \alpha_{i,j}^{(m)} X_{i,j}^{(m)}, \alpha_0, \alpha_{i,j}^{(m)} \in \mathbb{R} \right. \right\} \quad (3.2.77)$$

zu lösen. Mit den Strukturparametern

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu} &= E[\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)] \\ S &= E[\Sigma(\Theta_i)] \\ T &= \text{Var}(\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)) \end{aligned}$$

erhält man als Resultat des Minimierungsproblems folgenden Credibility-Prädiktor:

Satz 3.2.15 (Inhomogener multivariater Bühlmann-Straub-Prädiktor)

Unter den Modellannahmen 3.2.14 ist der inhomogene multivariate Credibility-Prädiktor von $\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)$ für $i = 1, \dots, I$ durch

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)}^{\text{cred}} = C_i \mathbf{G}_i + (I - C_i) \boldsymbol{\mu} \quad (3.2.78)$$

gegeben, wobei

$$\mathbf{G}_i = \left(\sum_{j=1}^n \frac{w_{i,j}^{(1)}}{w_{i,\bullet}^{(1)}} X_{i,j}^{(1)}, \dots, \sum_{j=1}^n \frac{w_{i,j}^{(M)}}{w_{i,\bullet}^{(M)}} X_{i,j}^{(M)} \right)', \quad (3.2.79)$$

$$C_i = T \left(T + \mathbf{D}(\mathbf{w}_{i,\bullet})^{-1/2} S \mathbf{D}(\mathbf{w}_{i,\bullet})^{-1/2} \right)^{-1}, \quad (3.2.80)$$

$$\mathbf{w}_{i,\bullet} = \left(w_{i,\bullet}^{(1)}, \dots, w_{i,\bullet}^{(M)} \right)' \quad (3.2.81)$$

gilt.

Beweis: Siehe Bühlmann und Gisler (2005), S. 182 f. □

Anmerkungen zum Credibility-Prädiktor $\widehat{\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)}^{\text{cred}}$:

- Um einen Beobachtungsvektor von der gleichen Dimension wie die Individual-Prämie $\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)$ zu erhalten, werden die Beobachtungen $\mathbf{X}_{i,1}, \dots, \mathbf{X}_{i,n}$ so komprimiert, dass keine Informationen verloren gehen. Jede Komponente des komprimierten Vektors

$$\mathbf{G}_i = \left(\sum_{j=1}^n \frac{w_{i,j}^{(1)}}{w_{i,\bullet}^{(1)}} X_{i,j}^{(1)}, \dots, \sum_{j=1}^n \frac{w_{i,j}^{(M)}}{w_{i,\bullet}^{(M)}} X_{i,j}^{(M)} \right)' \quad (3.2.82)$$

ist als gewichtetes Mittel der Beobachtungen des i -ten Risikos aus den n Perioden definiert. Aufgrund der Unabhängigkeitsannahme 3.2.14(c) zwischen den Risiken hängt der komprimierte Beobachtungsvektor und damit auch $\widehat{\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)}^{\text{cred}}$ nur von der Schadenvergangenheit des i -ten Risikos ab.

- Der M -dimensionale Credibility-Prädiktor (3.2.78) lässt sich auch als orthogonale Projektion der Individual-Prämie $\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)$ auf $L(\mathcal{D}_I^M, 1)$

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)}^{\text{cred}} = \boldsymbol{\mu}(\Theta_i)_{L(\mathcal{D}_I^M, 1)} \quad (3.2.83)$$

darstellen⁴⁴. Hierbei wird jede Komponente $\mu_m(\Theta_i)$ der Individual-Prämie $\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)$

⁴⁴Zwei Zufallsvektoren \mathbf{X} und \mathbf{Z} aus $L^{2,M}(\Omega, \mathcal{F}, P)$ werden als orthogonal zueinander bezeichnet, falls

auf den Unterraum

$$\left\{ \widehat{Z} \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P) \mid \widehat{Z} = \alpha_0 + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^M \alpha_{i,j}^{(m)} X_{i,j}^{(m)}, \alpha_0, \alpha_{i,j}^{(m)} \in \mathbb{R} \right\} \quad (3.2.84)$$

projiziert. Anschließend werden die resultierenden eindimensionalen Projektionen zur M -dimensionalen Projektion $\widehat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_i)^{\text{cred}}$ zusammengesetzt.

- $\widehat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_i)^{\text{cred}}$ ist erwartungstreu für die Kollektiv-Prämie $\boldsymbol{\mu} = E[\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)]$.
- $\widehat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_i)^{\text{cred}}$ ist ein optimal gewichtetes Mittel aus Kollektiv-Prämie $\boldsymbol{\mu}$ und individueller Schadenerfahrung \mathbf{G}_i . Die Gewichtungsmatrix C_i nennt man Credibility-Matrix.
- Die Interpretierbarkeit der Credibility-Matrix C_i gestaltet sich schwierig. Um sich anhand der Credibility-Matrix ein Bild vom Einfluß der m -ten Komponenten des Beobachtungsvektors auf die einzelnen Komponenten des Credibility-Prädiktors machen zu können, ist es hilfreich die Originalbeobachtungen $\mathbf{X}_{i,j}$ ($j = 1, \dots, n + 1$) zu normieren und die normierten Beobachtungen

$$Y_{i,j}^{(m)} = \frac{X_{i,j}^{(m)}}{\mu_m}, \quad \mu_m = E[X_{i,j}^{(m)}] \quad (3.2.85)$$

für $j = 1, \dots, n + 1$ und $m = 1, \dots, M$ zu betrachten. Ausgehend von den normierten Beobachtungen $Y_{i,j}^{(m)}$ erhält man für $i = 1, \dots, I$ den multidimensionalen Credibility-Prädiktor

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_i)^{\text{cred},y} = C_i^y \mathbf{G}_i^y + (I - C_i^y) \mathbf{1} \quad (3.2.86)$$

mit dem M -dimensionalen Vektor $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)'$.⁴⁵

- Zur konkreten Berechnung des multidimensionalen Credibility-Prädiktors (3.2.78) sind Schätzungen der Strukturparameter $\boldsymbol{\mu}$, S und T erforderlich.

Wie im eindimensionalen Fall erhält man den homogenen multidimensionalen Credibility-Prädiktor, in dem man den konstanten Term $\boldsymbol{\mu}$ (Kollektiv-Prämie) des inhomogenen Bühlmann-Straub-Prädiktors (3.2.78) durch seinen bestmöglichen Schätzer

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\mu}_{L(\mathcal{D}_I^M)} \quad (3.2.87)$$

$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Z} \rangle_M = \sum_{m=1}^M E[X_m Z_m] = 0$ gilt.
⁴⁵Vgl. dazu auch Bühlmann und Gisler (2005), S. 182.

aus dem Raum

$$L(\mathcal{D}_I^M) = \left\{ \widehat{\mathbf{Z}} \left| \widehat{Z}_k = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^M \alpha_{i,j}^{(m)} X_{i,j}^{(m)}, \alpha_{i,j}^{(m)} \in \mathbb{R}, E[\widehat{Z}_k] = \mu_k \right. \right\} \quad (3.2.88)$$

ersetzt⁴⁶. Insgesamt ist der homogene multidimensionale Credibility-Prädiktor als orthogonale Projektion der Individual-Prämie $\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)$ auf $L(\mathcal{D}_I^M)$

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)}^{\text{hom}} = \boldsymbol{\mu}(\Theta_i)_{L(\mathcal{D}_I^M)} \quad (3.2.89)$$

definiert⁴⁷ und hat die folgende Form:

Satz 3.2.16 (Homogener multivariater Bühlmann-Straub-Prädiktor)

Unter den Modellannahmen 3.2.14 ist der homogene multivariate Credibility-Prädiktor von $\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)$ für $i = 1, \dots, I$ durch

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)}^{\text{hom}} = C_i \mathbf{G}_i + (I - C_i) \widehat{\boldsymbol{\mu}} \quad (3.2.90)$$

gegeben, wobei

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}} = \left(\sum_{i=1}^I C_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^I C_i \mathbf{G}_i \quad (3.2.91)$$

gilt und C_i bzw. \mathbf{G}_i in (3.2.79) bzw. (3.2.80) gegeben sind.

Beweis: Siehe Bühlmann und Gisler (2005), S. 184. □

Die Erwartungstreue des homogenen Bühlmann-Straub-Prädiktors (3.2.90) für die Kollektiv-Prämie $\boldsymbol{\mu}$ ist im Gegensatz zur Unverzerrtheit des inhomogenen multivariaten Bühlmann-Straub-Prädiktors (3.2.78) durch die Definition (3.2.88) des Unterraumes $L(\mathcal{D}_I^M)$ erzwungen.

Die Gleichgewichtseigenschaft 3.2.12 des homogenen Credibility-Prädiktors aus dem eindimensionalen Bühlmann-Straub-Modell gilt auch für jede Komponente des mehrdimensionalen Modells.

Folgerung 3.2.17 (Gleichgewichtseigenschaft) *Unter den Modellannahmen 3.2.14 gilt für jede Komponente $\widehat{\mu}_m(\Theta_i)^{\text{hom}}$ des homogenen mehrdimensionalen Credibility-*

⁴⁶Vgl. Bühlmann und Gisler (2005), S. 173 ff.

⁴⁷Die Projektion ist hier wie die Projektion aus (3.2.83) komponentenweise zu verstehen.

Prädiktors

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^n w_{i,j}^{(m)} \cdot \widehat{\mu}_m(\Theta_i)^{hom} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^n w_{i,j}^{(m)} \cdot X_{i,j}^{(m)} \quad (3.2.92)$$

für alle $m = 1, \dots, M$.

Beweis: Siehe Bühlmann und Gisler (2005), S. 184 f. □

Damit stimmt für jede Komponente m die Credibility-Prämie für das gesamte Portfolio in den vergangenen n Perioden mit dem Gesamtschadenaufwand überein. Dies gilt unabhängig von der Wahl bzw. Schätzung der Strukturparameter S und T , welche für die Berechnung des homogenen Credibility-Schätzers $\widehat{\mu}(\Theta_i)^{hom}$ benötigt werden.

3.2.4.1 Der MSEP im multivariaten Bühlmann-Straub-Modell

Die Verallgemeinerung des MSEP aus den Abschnitten 3.2.1 und 3.2.3.1 auf mehrere Dimensionen ist eine MSEP-Matrix der folgenden Gestalt:

Satz 3.2.18 *Unter den Modellannahmen 3.2.14 des multivariaten Bühlmann-Straub-Modells ist die MSEP-Matrix des multivariaten inhomogenen und homogenen Credibility-Prädiktors für die Individual-Prämie $\mu(\Theta_i)$ für $i = 1, \dots, I$ gegeben durch*

$$E \left[\left(\widehat{\mu}(\Theta_i)^{cred} - \mu(\Theta_i) \right) \cdot \left(\widehat{\mu}(\Theta_i)^{cred} - \mu(\Theta_i) \right)' \right] = (I - C_i) T \quad (3.2.93)$$

$$E \left[\left(\widehat{\mu}(\Theta_i)^{hom} - \mu(\Theta_i) \right) \cdot \left(\widehat{\mu}(\Theta_i)^{hom} - \mu(\Theta_i) \right)' \right] = (I - C_i) T \quad (3.2.94)$$

$$\times \left[I + \left(\sum_{i=0}^I C_i' \right)^{-1} (I - C_i)' \right],$$

wobei I die M -dimensionale Einheitsmatrix bezeichnet und C_i in (3.2.79) gegeben ist.

Beweis: Siehe Bühlmann und Gisler (2005), S. 175 ff. □

Der MSEP (3.2.75) des multivariaten inhomogenen bzw. homogenen Credibility-Prädiktors für die Individual-Prämie $\mu(\Theta_i)$ ergibt sich aus der MSEP-Matrix (3.2.93) bzw. (3.2.94), in dem die Spur der jeweiligen Matrix gebildet wird. Bei den obigen Formeln für die MSEP-Matrix fällt die strukturelle Ähnlichkeit zu den entsprechenden Formeln für den MSEP im eindimensionalen Bühlmann-Straub-Modell auf.

3.2.4.2 Schätzung der Strukturparameter

Ein Schätzer für die Kollektiv-Prämie $\boldsymbol{\mu}$ wurde schon im Zusammenhang mit der Berechnung des homogenen multidimensionalen Credibility-Prädiktors angegeben. Dieser ist durch die Formel (3.2.91) gegeben. In diesem Abschnitt werden die Schätzer der Strukturparameter S und T vorgestellt. Die Diagonalelemente von S und T können auf die selbe Weise wie die Parameter des eindimensionalen Bühlmann-Straub-Modells geschätzt werden⁴⁸. Bezeichnet $\zeta_m^2 = E[\sigma_m^2(\Theta_i)]$ das m -te Diagonalelement von S , dann ist

$$\widehat{\zeta}_m^2 = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n w_{i,j}^{(m)} \left(X_{i,j}^{(m)} - G_i^{(m)} \right)^2 \quad (3.2.95)$$

ein geeigneter Schätzer für ζ_m^2 ($m = 1, \dots, M$) und

$$\widehat{S} = \mathbf{D} \left(\left(\widehat{\zeta}_1^2, \dots, \widehat{\zeta}_M^2 \right)' \right) \quad (3.2.96)$$

ein geeigneter Schätzer für S . Hierbei bezeichnet $G_i^{(m)}$ die m -te Komponente von \mathbf{G}_i . Für die alternative Annahme (3.2.74), in der $\Sigma(\Theta_i)$ keine Diagonalmatrix, sondern eine beliebige Varianz-Kovarianz-Matrix ist, ist die Angabe eines geeigneten Schätzers für S ohne weitere Annahmen nicht möglich.

Die Diagonalelemente $T_{m,m} = \text{Var}(\mu_m(\Theta_i))$ von T werden geschätzt durch

$$\widehat{T}_{m,m} = \max \left(\widehat{T}_{m,m}^\circ, 0 \right), \quad (3.2.97)$$

wobei

$$\widehat{T}_{m,m}^\circ = a \cdot \left(\sum_{i=1}^I \frac{w_{i,\bullet}^{(m)}}{w_{\bullet,\bullet}^{(m)}} \cdot \left(G_i^{(m)} - \sum_{k=1}^I \frac{w_{k,\bullet}^{(m)}}{w_{\bullet,\bullet}^{(m)}} G_k^{(m)} \right)^2 - \frac{(I-1) \cdot \widehat{\zeta}_m^2}{w_{\bullet,\bullet}^{(m)}} \right) \quad (3.2.98)$$

mit

$$w_{i,\bullet}^{(m)} = \sum_{j=1}^n w_{i,j}^{(m)}, \quad w_{\bullet,\bullet}^{(m)} = \sum_{i=1}^I w_{i,\bullet}^{(m)} \quad \text{und} \quad a = \left(\sum_{i=1}^I \frac{w_{i,\bullet}^{(m)}}{w_{\bullet,\bullet}^{(m)}} \left(1 - \frac{w_{i,\bullet}^{(m)}}{w_{\bullet,\bullet}^{(m)}} \right) \right)^{-1}$$

⁴⁸Vgl. Bühlmann und Gisler (2005), S. 185.

gilt. Ein Schätzer für die Nicht-Diagonalelemente $T_{n,m}$ ($n \neq m$) von T ist durch⁴⁹

$$\widehat{T}_{n,m} = \operatorname{sgn} \left(\frac{\widehat{T}_{n,m}^a + \widehat{T}_{n,m}^b}{2} \right) \cdot \min \left(\frac{|\widehat{T}_{n,m}^a + \widehat{T}_{n,m}^b|}{2}, \sqrt{\widehat{T}_{n,n} \cdot \widehat{T}_{m,m}} \right) \quad (3.2.99)$$

gegeben, wobei

$$\widehat{T}_{n,m}^a = c_a \cdot \left(\sum_{i=1}^I \frac{w_{i,\bullet}^{(n)}}{w_{\bullet,\bullet}^{(n)}} \cdot \left(G_i^{(n)} - \sum_{k=1}^I \frac{w_{k,\bullet}^{(n)}}{w_{\bullet,\bullet}^{(n)}} G_k^{(n)} \right) \cdot \left(G_i^{(m)} - \sum_{k=1}^I \frac{w_{k,\bullet}^{(m)}}{w_{\bullet,\bullet}^{(m)}} G_k^{(m)} \right) \right) \quad (3.2.100)$$

mit

$$c_a = \left(\sum_{i=1}^I \frac{w_{i,\bullet}^{(n)}}{w_{\bullet,\bullet}^{(n)}} \left(1 - \frac{w_{i,\bullet}^{(n)}}{w_{\bullet,\bullet}^{(n)}} \right) \right)^{-1}$$

und

$$\widehat{T}_{n,m}^b = c_b \cdot \left(\sum_{i=1}^I \frac{w_{i,\bullet}^{(m)}}{w_{\bullet,\bullet}^{(m)}} \cdot \left(G_i^{(n)} - \sum_{k=1}^I \frac{w_{k,\bullet}^{(n)}}{w_{\bullet,\bullet}^{(n)}} G_k^{(n)} \right) \cdot \left(G_i^{(m)} - \sum_{k=1}^I \frac{w_{k,\bullet}^{(m)}}{w_{\bullet,\bullet}^{(m)}} G_k^{(m)} \right) \right) \quad (3.2.101)$$

mit

$$c_b = \left(\sum_{i=1}^I \frac{w_{i,\bullet}^{(m)}}{w_{\bullet,\bullet}^{(m)}} \left(1 - \frac{w_{i,\bullet}^{(m)}}{w_{\bullet,\bullet}^{(m)}} \right) \right)^{-1}$$

gilt. Hierbei bezeichnet „sgn“ die Vorzeichenfunktion, welche das Vorzeichen ihres Arguments wiedergibt. Der Schätzer (3.2.99) nimmt den Wert Null an, wenn einer der beiden Schätzer $\widehat{T}_{n,n}$ oder $\widehat{T}_{m,m}$ Null ist. In diesem Fall ist der Schätzer von T , und damit auch der Schätzer von C_i , nicht mehr invertierbar. Alternativ zu (3.2.99) kann für die Nicht-Diagonalelemente von T auch der Schätzer

$$\widehat{T}_{n,m}^\circ = \frac{\widehat{T}_{n,m}^a + \widehat{T}_{n,m}^b}{2}. \quad (3.2.102)$$

verwendet werden. Sowohl die Matrix $\widehat{T} = (\widehat{T}_{n,m})_{n,m=1,\dots,M}$ als auch $\widehat{T}^\circ = (\widehat{T}_{n,m}^\circ)_{n,m=1,\dots,M}$ müssen für $M \geq 3$ nicht notwendigerweise positiv definit sein. Die positive Definitheit kann man mit Hilfe von sogenannten orthogonalen Transformationen sicherstellen. Näheres dazu findet man in Bühlmann und Gisler (2005, S. 186).

Die Schätzfunktionen $\widehat{\varsigma}_m^2$, $m = 1, \dots, M$, sind erwartungstreu für die Diagonalelemente von S . Auch die Schätzer $\widehat{T}_{m,m}^\circ$, $\widehat{T}_{n,m}^a$ und $\widehat{T}_{n,m}^b$ sind erwartungstreue Schätzfunktionen

⁴⁹Vgl. Bühlmann und Gisler (2005), S. 186.

für die Komponenten von T . Jedoch sind $\widehat{T}_{m,m}$ und $\widehat{T}_{n,m}$ nicht mehr erwartungstreu.

Ersetzt man schließlich die Strukturparameter S und T im homogenen Credibility-Prädiktor (3.2.90) durch ihre Schätzungen \widehat{S} und \widehat{T} , so erhält man für das i -te Risiko den *multidimensionalen empirischen Credibility-Prädiktor* des Bühlmann-Straub-Modells

$$\widehat{\widehat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_i)} = \widehat{C}_i \mathbf{G}_i + (I - \widehat{C}_i) \widehat{\boldsymbol{\mu}} \quad (3.2.103)$$

mit

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}} = \left(\sum_{i=1}^I \widehat{C}_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^I \widehat{C}_i \mathbf{G}_i$$

$$\widehat{C}_i = \widehat{T} \left(\widehat{T} + \mathbf{D}(\mathbf{w}_{i,\bullet})^{-1/2} \widehat{S} \mathbf{D}(\mathbf{w}_{i,\bullet})^{-1/2} \right)^{-1}.$$

3.2.5 Überblick über weitere Credibility-Modelle

In diesem Kapitel wurden lediglich das Bühlmann-Modell und das ein- und multidimensionale Bühlmann-Straub-Modell vorgestellt. Als das weitverbreitetste Modell in der Praxis ist das Bühlmann-Straub-Modell, aus dem sich als Spezialfall das Bühlmann-Modell ergibt, das bedeutsamste Credibility-Modell. Zudem wird auf das multivariate Bühlmann-Straub-Modell im nächsten Kapitel im Kontext der Schadenreservierung zurückgegriffen, wo es zur Schätzung von Schadenreserven eingesetzt wird. In der Credibility-Theorie gibt es eine Reihe von weiteren Modellen, von denen die bekanntesten an dieser Stelle kurz erwähnt werden sollen.

Speziell für kleine und mittelgroße Verträge ist in vielen Anwendungen der Credibility-Faktor ziemlich klein. Ist kein Großschaden in der Beobachtungsperiode aufgetreten, so unterscheiden sich in diesem Fall die Prämien für die einzelnen Verträge nur sehr wenig voneinander. Ein einzelner großer Schaden kann hingegen zu einem sprunghaften Anstieg der Prämien führen, was von den Versicherungsnehmern als unfair empfunden wird. Tatsächlich gibt ein Großschaden nicht viel Aufschluss über das wahre Risikoprofil und sollte nicht die gesamte Prämienberechnung dominieren. Um diesen Schwierigkeiten zu begegnen, werden die Beobachtungen geeignet transformiert (bzw. gestutzt). Der Credibility-Prädiktor wird dann auf die transformierten Beobachtungen angewendet⁵⁰. Die Idee, transformierte Beobachtungen anstelle der Originalgrößen zu betrach-

⁵⁰Vgl. dazu Bühlmann und Gisler (2005), S. 125.

ten, geht auf De Vylder (1976b)⁵¹ zurück. Er bezeichnete diese Methode als *Semilineare Credibility-Theorie*. Auch Gisler (1980) leistete mit seiner Arbeit einen wesentlichen Beitrag zur Semilinearen Credibility-Theorie.

In der Versicherungspraxis sind oft hierarchische Strukturen wiederzufinden. Versicherungskollektive sind oft in Klassen unterteilt, die jeweils aus mehreren Gruppen bestehen. Die Gruppen können sich wiederum aus verschiedenen (Risiko-)Untergruppen zusammensetzen, welche schließlich die einzelnen Risiken enthalten. Je nach Geschäftsbereich kann die Anzahl der Hierarchiestufen variieren. Dazu passend gibt es hierarchische Modelle, die für die Prämienberechnung verwendet werden. Die sogenannte *hierarchische Credibility* wurde von Jewell (1975) und Taylor (1979) eingeführt und von Sundt (1979, 1980) und Norberg (1986) weiterentwickelt. Wie in diesem Zusammenhang die Hilbert-Raum-Theorie eingesetzt wird, kann man beispielsweise in Bühlmann und Jewell (1987) nachlesen.

Oft ist in der Entwicklung der Höhe der Schadenvariablen und damit auch in der Höhe der Individual-Prämien ein zeitlicher Trend zu beobachten. Dieser konnte von den bisher vorgestellten Modellen aufgrund der zeitlichen Homogenitätsannahme bezüglich der Individual-Prämie nicht erfasst werden. Allein durch die oft starke Inflation in vielen Bereichen ist ein solcher Trend gerechtfertigt. Auch andere Gründe, wie beispielsweise in der Kfz-Haftpflichtversicherung, wo sich die Fahrfertigkeiten eines jungen Fahrers über die Zeit verbessern bzw. ab einem bestimmten Alter wieder verschlechtern⁵², sprechen für einen zeitlichen Trend in der Entwicklung der Schadenhöhen bzw. der Prämienhöhen. Hierfür sind *Credibility-Regressionsmodelle* geeignet. Das bekannteste Regressionsmodell ist das Modell von Hachemeister (1975), welches durch ein praktisches Problem, das Prognostizieren der durchschnittlichen Schadenhöhe für Körperschäden in der Auto-Haftpflichtversicherung für verschiedene US-Staaten, motiviert war. Eine Verbesserung, die zu einer höheren Akzeptanz des Modells in der Praxis führte, wurde über 20 Jahre später von Bühlmann und Gisler (1997) vorgenommen.

Um die Berechnungen von Credibility-Prädiktoren effizienter zu gestalten, bieten sich rekursive Formeln an. Denn sie beziehen beim Hinzukommen von neuen Beobachtungen die schon berechneten Prädiktoren aus der Vorperiode ein. Auf diese Weise ist das Abspeichern aller Werte aus der Vergangenheit nicht nötig. Auch viele aufwendige Berechnungen lassen sich damit vermeiden. Eine der ersten Arbeiten, die sich mit der

⁵¹Siehe auch De Vylder und Ballegeer (1979).

⁵²Vgl. Merz (2004), S. 94 f.

Bestimmung einer Rekursions-Formel für Credibility-Schätzer beschäftigt, ist die von Gerber und Jones (1975b). Es folgten viele weitere Beiträge auf diesem Gebiet. Siehe z.B. Sundt (1981, 1982), De Jong und Zehnwirth (1983), Mangold (1987), Merz (2004).

Die meisten Credibility-Modelle haben gemein, dass die Zeitindizierung der Beobachtungen bzw. Schadenvariablen als diskret und äquidistant angenommen wird. Tatsächlich kann ein Schaden in der Realität zu jedem beliebigen Zeitpunkt eintreten. Die Anzahl der möglichen Schadenszeitpunkte ist demnach weder endlich, noch sind die Schadenzeitpunkte äquidistant. Der Nachteil der diskreten Zeitindizierung wird durch die Credibility-Modelle mit einem stetigen Zeitparameter beseitigt. Siehe dazu Norberg (1992), Merz (2004, 2005) und Maier und Merz (2008).

Einen ausführlichen Überblick über die hier erwähnten diskreten Credibility-Modelle findet man z.B. in Bühlmann und Gisler (2005). Eine Übersicht weiterer Methoden zur Prämienberechnung, wie etwa Ausgleichsverfahren bei mehrfacher Klassifikation oder Bonus-Malus-Systeme, ist beispielsweise in Mack (2002), Kaas et al. (2008) oder Schmidt (2006b) zu finden.

Kapitel 4

Schadenreservierung

In der Nichtleben-Versicherung stellt das Reserverisiko oftmals den bedeutendsten Risikobereich dar. Allein aufgrund dessen, dass die Schadenreserven eines Nichtleben-Versicherers im Allgemeinen den größten Posten auf der Passivseite der Bilanz ausmachen, ist eine angemessene Quantifizierung des Reserverisikos von besonderer Relevanz für die Risikosituation des Unternehmens.

Das Kapitel beginnt mit einer Erläuterung der Grundlagen und der Bedeutung der Schadenreservierung. Im zweiten Abschnitt wird das multivariate Bühlmann-Straub-Modell auf das Schadenreservierungsproblem für abhängige Versicherungsportfolios angewendet. Dieses multivariate Modell erlaubt eine Prognose der zukünftigen Schadenszahlungen (Schadenreserven) sowie die Bestimmung der Schätzgenauigkeit in Form des bedingten mittleren quadratischen Fehlers (des bedingten MSEF) aller betrachteten Versicherungsportfolios. Die Resultate werden anhand eines Beispiels verdeutlicht und den Ergebnissen aus dem multivariaten Chain-Ladder-Modell und dem multivariaten Additive-Loss-Schadenreservierungsmodell¹ vergleichend gegenübergestellt.

Obwohl Credibility-Methoden äußerst nützlich bei der Betrachtung verschiedener abhängiger Versicherungsportfolios sind, gibt es keine Arbeiten, in denen multivariate Credibility-Modelle im Schadenreservierungs-Kontext verwendet werden. Diese Lücke wird durch den Beitrag von Maier und Merz (2009) geschlossen, der auch die Grundlage für die Ausführungen in diesem Kapitel ist.

¹ Für die beiden multivariaten Modelle siehe Wüthrich und Merz (2008), Kapitel 8.

4.1 Grundlagen und Bedeutung der Schadenreservierung

Bei Nichtleben-Versicherern liegt normalerweise eine mehr oder weniger große Zeitspanne zwischen der Prämieinnahme (und damit auch dem Schadeneintritt bzw. der Schadenverursachung) und der vollständigen Regulierung des Schadens. Diese Schadenabwicklungsdauer ist in vielen Branchen, wie z.B. Sachversicherung oder Kfz-Kasko, relativ kurz (ca. 1-3 Monate), sie kann aber in manchen Branchen, wie Kfz-Haftpflicht, allgemeine Haftpflicht oder Unfallversicherung, durchaus auch mehrere Jahrzehnte andauern. Es sind hauptsächlich zwei Ursachen, die zur langen Abwicklungsdauer beitragen²:

- Der Schaden ist eingetreten, wurde aber noch nicht gemeldet (IBNR: *incurred but not reported*). Solche Schäden werden oft erst viele Jahre nach ihrer Verursachung bemerkt. Gründe für die späte Manifestation dieser Schäden können bei Personenschäden Verletzungen sein, die erst später erkannt oder mit dem Unfall in Verbindung gebracht werden, wie z.B. Spätfolgen oder psychische Traumata. Bei Sachschäden können es Konstruktionsfehler sein, die sich z.B. erst nach einem Erdbeben zeigen.
- Der Schaden ist gemeldet, aber die endgültige Schadenhöhe steht zum Zeitpunkt des Schadeneintritts noch nicht fest (IBNER: *incurred but not enough reserved*). Dies kann z.B. am noch offenen Ausgang eines Gerichtsprozesses oder am ungewissen Verlauf einer Krankheit liegen.

Ein Versicherungsunternehmen, das erfahrungsgemäß mit IBNR-Schäden zu rechnen hat, muss eine Schadenrückstellung für diese Schäden, auch *IBNR-Reserve* genannt, bilden. Für jeden Schaden, der zwar gemeldet, dessen Höhe aber noch nicht definitiv bekannt ist, stellt ein Schadenbearbeiter, aufgrund seiner Erfahrung mit ähnlichen Schäden, eine *Einzelfallreserve* ein. Da die Einzelfallreserve unter Umständen nicht ausreichend ist, wird für diese Schäden ebenfalls eine Rückstellung gebildet, die als *IBNER-Reserve* bezeichnet wird. Beide Schadenarten werden zusammen als *Spätschäden* bezeichnet. Entsprechend dazu verwendet man für beide Reservearten den Begriff der *Spätschadenreserve*, deren Bestimmung Gegenstand der *Schadenreservierung* ist.

Die Spätschadenreservierungsproblematik ist in der *Schadenexzedenten-Rückversicherung*, welche häufig in Haftpflicht-Branchen anzutreffen ist, besonders stark ausgeprägt.

² Vgl. Wüthrich und Merz (2008), S. 3.

Hierbei wird pro Schadenfall eine Schadensgrenze (*Priorität*) vereinbart, bis zu deren Höhe der Erstversicherer den Schaden selber trägt, der übersteigende Schadenanteil wird vom Rückversicherer übernommen. Alle Schäden, bei denen zu erwarten ist, dass sie die Priorität übersteigen, müssen dem Rückversicherer gemeldet werden. Jedoch ist bei einem Schaden sehr oft lange nicht erkennbar, ob er die Priorität übersteigen wird, was zur Verstärkung der IBNR-Problematik beim Rückversicherer beiträgt. Denn Schäden, die zwar dem Erstversicherer bekannt sind, aber dem Rückversicherer nicht gemeldet werden, können letzten Endes doch die Priorität übersteigen³.

Eine wichtige Aufgabe der Schadenreservierung ist die Prognose der Spätschadenreserve bzw. des Endschadenstands. Diese wird für die Erstellung der Rechnungslegung sowie für die risikogerechte Prämienberechnung benötigt. Auch für Solvabilitätsbetrachtungen, insbesondere für die Bestimmung des ökonomischen Zielkapitals ist die Schätzung des Endschadenstands von Bedeutung⁴.

Die Quantifizierung des Reserverisiko anhand vom (bedingten) Prognosefehler ist eine weitere bedeutende Aufgabe der Schadenreservierung. Insbesondere die Messung des einjährigen Reserverisikos ist aufgrund moderner Solvenzanforderungen im Rahmen von Solvency II oder dem Swiss Solvency Test (SST) ein zentrales Thema für alle Nichtleben-Versicherer⁵. Des Weiteren kann der Schätzer des Prognosefehlers, zusammen mit einer möglichst genauen Prognose der Schadenreserve (Best Estimate Prognose), bei der Bestimmung des Marktwertes⁶ für die Schadenreserven verwendet werden⁷. Der Hintergrund hierfür ist die in Solvency II geforderte marktkonsistente Bewertung von Aktiva und Passiva. Die Quantifizierung der Unsicherheiten bei der Prognose der Spätschadenreserve ist auch im Hinblick auf die Vergleichbarkeit von Prognoseergebnissen verschiedener Schadenreservierungsverfahren unentbehrlich.

Wie am Anfang des Kapitels schon erwähnt, stellen die Schadenreserven im Allgemeinen den größten Passivposten in der Bilanz eines Nichtleben-Versicherers dar. Sie können die Prämien eines Geschäftsjahres weit übersteigen und auch das vorhandene Eigenkapital überschreiten. Eine kleine prozentuale Veränderung der Schadenrückstellung

³ Vgl. Mack (2002), S. 222.

⁴ Siehe dazu auch AISAM-ACME (2007).

⁵ Siehe dazu auch AISAM-ACME (2007), SST (2006) oder Wüthrich et al. (2008).

⁶ Der Marktwert setzt sich zusammen aus dem Best-Estimate Zeitwert (diskontierter bester Schätzwert) und einer Risikomarge, die mit Hilfe einer Schätzung des Prognosefehlers bestimmt werden kann.

⁷ Siehe dazu AISAM-ACME (2007).

kann somit einen beträchtlichen Einfluss auf den Gewinn haben. Oft waren in der Vergangenheit unzureichende Schadenreserven die Hauptursache von Insolvenzen von Versicherungsunternehmen. Dies alles zeigt die hohe Bedeutung der Schadenreservierung, für die eine gute Kenntnis der stochastischen bzw. aktuariellen Schadenreservierungsmethoden unerlässlich ist.

Alle Schadenreservierungsmodelle versuchen aus dem bisherigen Schadenverlauf ein Muster bzw. einen Trend zu erkennen und diesen auf die Zukunft zu übertragen. Falls während der betrachteten Jahre Trend- oder Strukturbrüche vorkommen, die beispielsweise durch Änderungen der Schadenregulierung oder Rechtsprechung verursacht werden, liefern sämtliche Modelle keine verlässlichen Ergebnisse⁸. Auch die Auswirkungen der Inflation auf die Resultate sind nur schwer abzuschätzen. Aus diesen Gründen sollten die Daten vor Anwendung eines Schadenreservierungsverfahrens von Trend- bzw. Strukturbrüchen und Inflation bereinigt werden. In den stochastischen Schadenreservierungs-Methoden wird stets davon ausgegangen, dass die Daten von solchen Änderungen bereinigt sind.

In der Schadenreservierung werden die Schadendaten eines Versicherungsportfolios meist in einem *Abwicklungsdreieck* (*run-off Dreieck*) dargestellt, das die Grundlage fast aller Reservierungsverfahren bildet. Ein Abwicklungsdreieck hat die in Abbildung 4.1 veranschaulichte Struktur.

Anfall- jahr i	Abwicklungsjahr j						
	0	1	...	j	...	$J-1$	J
0							
⋮							
$I-j$							
⋮							
I							

Abbildung 4.1: Abwicklungsdreieck

⁸ Vgl. hierzu Mack (2002), S. 223.

Hierbei werden die Schadendaten nach dem relativen Anfall- oder Zeichnungsjahr zeilenweise und nach der relativen Abwicklungsdauer spaltenweise in dem Abwicklungsdreieck eingetragen. Genauer, das erste betrachtete relative (Anfall-)Jahr ist das Jahr 0, das aktuelle Jahr ist das Jahr I , so dass man insgesamt $I + 1$ Anfalljahre ($i = 0, \dots, I$) hat. Die relativen Abwicklungsjahre $j = 0, \dots, J$ geben die Dauer vom Entstehungsjahr der Schäden bis zu den jeweiligen Schadenzahlungen wieder. Dementsprechend befinden sich auf den Diagonalen des Abwicklungsdreiecks die Schadendaten eines (Geschäfts-)Jahres. Mit $X_{i,j}$ bezeichnet man entweder die im Abwicklungsjahr j geleisteten Schadenzahlungen für Schäden aus dem Anfalljahr i oder die geleisteten Zahlungen zuzüglich dem Differenzbetrag aller Änderungen der Einzelfallreserven. Entsprechend dazu bezeichnet $C_{i,j}$ entweder die bis einschließlich zum j -ten Abwicklungsjahr kumulierten Schadenzahlungen für Schäden aus dem i -ten Anfalljahr oder die kumulierten Schadenaufwendungen (Schadenzahlungen zuzüglich Einzelfallreserven). Es gilt somit

$$C_{i,j} = \sum_{k=0}^j X_{i,k}. \quad (4.1.1)$$

Betrachtet man nur die Schadenzahlungen, ohne die Einzelfallreserven zu berücksichtigen, so spricht man von *Paid-Daten*, andernfalls spricht man von *Incurred-Daten*. Die Paid-Daten beinhalten keine Schätzungen, was die Prognose manchmal zuverlässiger erscheinen lässt. Außerdem können im Fall von Paid-Daten die Werte $X_{i,j}$ (Schadenzuwächse) als nichtnegativ angenommen werden. Im Hinblick auf die Modellwahl ist das oft von Vorteil, da viele Schadenreservierungsverfahren positive Zuwächse $X_{i,j}$ voraussetzen. Überdies kann man anhand des vervollständigten Paid-Abwicklungsdreiecks erkennen, wann die Spätschadenreserve voraussichtlich ausbezahlt werden muss. Bei Verwendung von Incurred-Daten kann man hingegen viel früher die endgültige Höhe des Schadens $C_{i,J}$ erkennen. Man kommt bei Incurred-Daten auch mit deutlich weniger Anfall- bzw. Abwicklungsjahren als bei Paid-Daten aus. Beides gilt allerdings nur, wenn die Einzelfallreserven angemessen angesetzt werden⁹.

Die Schadenvariablen (Schadenzahlungen oder -aufwendungen) sind Zufallsvariablen, für die durchweg vorausgesetzt wird, dass sie auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) definiert sind und eine endliche Varianz besitzen. Sie sind also Elemente des Hilbert-Raumes $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Weiterhin wird angenommen, dass das letzte Abwicklungsjahr J ist, d.h. es gilt $X_{i,j} = 0$ für alle $j > J$. Zur Vereinfachung der Notation und Formeln wird im Folgenden stets angenommen, dass $I = J$ gilt. Alle Ergebnisse dieses Kapitels

⁹ Vgl. hierzu Mack (2002), S. 225 f.

können jedoch auf den Fall $I > J$ verallgemeinert werden.

Das Ziel jedes Schadenreservierungsverfahrens ist es, aufgrund der vorhandenen Beobachtungen im oberen Abwicklungsdreieck

$$\mathcal{D}_I = \{X_{i,j} \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P); i + j \leq I\} \quad (4.1.2)$$

die zukünftigen Schadenvariablen $X_{i,j}$ ($i + j > I$) im unteren Abwicklungsdreieck zu prognostizieren. Daraus kann man eine Prognose des Endschadenstandes $C_{i,J}$ sowie der Spätschadenreserve

$$R_i = \sum_{j=I-i+1}^J X_{i,j} = C_{i,J} - C_{i,I-i} \quad (4.1.3)$$

für jedes Anfalljahr $i = 1, \dots, I$ bestimmen.

Welche Methode für welche Art von Daten die besten Ergebnisse liefert, kann nur von einem Aktuar mit viel Erfahrung beurteilt werden, der über eine gute Kenntnis des Geschäfts verfügt. Aus diesem Grund beschäftigt sich dieses Kapitel nicht mit der geeigneten Modellauswahl, sondern beschränkt sich auf die Entwicklung eines neuen stochastischen Schadenreservierungsverfahrens.

4.2 Das multivariate Bühlmann-Straub-Modell in der Schadenreservierung

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit der Schadenreservierungsproblematik im multivariaten Zusammenhang. Genauer gesagt, wird das multivariate Bühlmann-Straub-Modell für die simultane Prognose der Schadenreserven aus M verschiedenen, abhängigen Abwicklungsdreiecken verwendet. Im Rahmen dieses Modells erfolgt eine Prognose der Endschadenstände sowie eine Quantifizierung des Reserverisikos aller M Subportfolios in Form einer Schätzung des bedingten Mean Square Error of Prediction. Die analytischen Ergebnisse werden mit Hilfe eines Beispiels verdeutlicht und mit den Resultaten des multivariaten Chain-Ladder-Modells und des multivariaten Additive-Loss-Schadenreservierungsmodells¹⁰ verglichen. Dieser Abschnitt ist aus Gründen der Übersichtlichkeit so organisiert, dass zunächst die Ergebnisse ohne Beweise vorgestellt werden, zum Ende des Kapitels werden dann die Beweise geliefert. Die Ausführungen dieses Abschnittes folgen zum Großteil dem Artikel von Maier und Merz (2009). Dar-

¹⁰Für die beiden multivariaten Modelle wird auf Wüthrich und Merz (2008), Kapitel 8, verwiesen.

über hinaus werden noch einige ergänzende Resultate präsentiert, die den homogenen Credibility-Prädiktor betreffen.

Um ein möglichst homogenes Abwicklungsverhalten zu erhalten, werden die aus Schadendaten bestehenden Versicherungsportfolios (sogenannte *run-off Portfolios*) in Subportfolios aufgeteilt. Diese Segmentierung muss laut Solvency II zumindest nach Geschäftsfelder erfolgen¹¹. Im Hinblick auf die Homogenität des Abwicklungsverhaltens ist oft eine detailliertere Aufteilung, z.B. nach Abwicklungsdauer oder Schadenhöhe (Normal- und Großschäden), sinnvoll. Durch die simultane Betrachtung aller run-off Subportfolios werden Abhängigkeiten zwischen den Subportfolios berücksichtigt. Zudem wird dadurch die Schätzung der Schadenreserven und den damit verbundenen Unsicherheiten für das gesamte run-off Portfolio ermöglicht. Die Schätzung der Schadenreserve für das gesamte Portfolio ergibt sich bei multivariaten Verfahren durch Addition der Schätzungen für die Schadenreserven der Subportfolios. Dagegen stimmt die Summe der univariaten Schätzungen für die Schadenreserven der Subportfolios im Allgemeinen nicht mit der univariaten Schätzung der Schadenreserve des gesamten Portfolios überein¹². Holmberg (1994) war vermutlich der erste, der sich mit abhängigen run-off Portfolios beschäftigt hat. Später wurden von Halliwell (1999) und von Quarg und Mack (2004) bivariate Modelle vorgeschlagen, in denen der Zusammenhang zwischen Paid- und Incurred-Daten eines run-off Portfolios untersucht wurde. Multivariate Schadenreservierungsverfahren, die sich mit der Verallgemeinerung des in der Praxis weit verbreiteten Chain-Ladder Verfahrens¹³ befassen, wurden von Braun (2004), Pröhl und Schmidt (2005), Schmidt (2006a), Merz und Wüthrich (2007, 2008c) behandelt. Weitere multivariate Methoden in der Schadenreservierung wurden von Brehm (2002), Kirschner et al. (2002), Taylor und McGuire (2007), Hess et al. (2006), Mildenhall (2006), Merz und Wüthrich (2008a,b) vorgestellt.

Da zum einen mit Hilfe von Credibility-Verfahren externe Informationen¹⁴ mit internen Beobachtungen kombiniert werden können und zum anderen die Credibility-Prädiktoren intuitiv und einfach zu berechnen sind, also den Praxisanforderungen gerecht werden, sind Credibility-Modelle für Schadenreservierungsprobleme geeignet. Im univariaten Fall wurden schon Credibility-Methoden in der Schadenreservierung ver-

¹¹Siehe GDV (2008).

¹²Siehe z.B. Ajne (1994), Klemmt (2005) für das Chain-Ladder Verfahren.

¹³Siehe Mack 1993 für das stochastische, verteilungsfreie Chain-Ladder-Modell. Das wird auch als Mack-Modell bezeichnet.

¹⁴In der Credibility-Theorie sind die externen Informationen durch ein Risiko-/Strukturparameter gegeben.

wendet, siehe z.B. Benktander (1976), De Vylder (1982), Witting (1987), Neuhaus (1992), Mack (2000) und Gisler und Wüthrich (2008). Multivariate Credibility-Modelle kamen dagegen in der Schadenreservierung noch nicht zum Einsatz.

4.2.1 Abwicklungsdreieck und Notation

Im Folgenden wird angenommen, dass ein run-off Portfolio aus $M \geq 1$ Abwicklungsdreiecken der selben Größe besteht. Jedes Dreieck hat die in Abbildung 4.2 veranschaulichte Struktur.

Anfall- jahr i	Abwicklungsjahr j						
	0	1	...	j	...	$J-1$	J
0							
⋮							
$I-j$							
⋮							
I							

Abbildung 4.2: Das m -te Abwicklungsdreieck

Mit $X_{i,j}^{(m)} \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ werden die Schadenvariablen des Anfalljahres $i \in \{0, \dots, I\}$ und Abwicklungsjahres $j \in \{0, \dots, J\}$ für das run-off Subportfolio $m \in \{1, \dots, M\}$ bezeichnet. Die kumulierten Schäden des Abwicklungsdreiecks m für das Anfalljahr i bis zum Abwicklungsjahr j werden mit

$$C_{i,j}^{(m)} = \sum_{k=0}^j X_{i,k}^{(m)} \quad (4.2.1)$$

bezeichnet.

Zum Zeitpunkt I liegen üblicherweise die Beobachtungen

$$\mathcal{D}_I^{(m)} = \left\{ X_{i,j}^{(m)}; i+j \leq I \right\} \quad (4.2.2)$$

für das run-off Subportfolio $m \in \{1, \dots, M\}$ vor. Insgesamt kann im Jahr I auf die

Beobachtungen aus allen Subportfolios zurückgriffen werden, die durch

$$\mathcal{D}_I^M = \bigcup_{m=1}^M \mathcal{D}_I^{(m)} \quad (4.2.3)$$

gegeben sind. Die Beobachtungen der M run-off Subportfolios werden für die weiteren Betrachtungen in Vektorform geschrieben. Hierzu werden die M -dimensionalen Zufallsvektoren

$$\mathbf{X}_{i,j} = \left(X_{i,j}^{(1)}, \dots, X_{i,j}^{(M)} \right)' \in L^{2,M}(\Omega, \mathcal{F}, P) \quad (4.2.4)$$

und

$$\mathbf{C}_{i,j} = \left(C_{i,j}^{(1)}, \dots, C_{i,j}^{(M)} \right)' \in L^{2,M}(\Omega, \mathcal{F}, P) \quad (4.2.5)$$

definiert. Dabei bezeichnet $L^{2,M}(\Omega, \mathcal{F}, P)$ den Raum aller M -dimensionalen Zufallsvektoren, deren zweites Moment existiert. Der Vektor der Schadenreserven ist für die Anfalljahre $i = 1, \dots, I$ durch

$$\mathbf{R}_i = \left(R_i^{(1)}, \dots, R_i^{(M)} \right)' = \sum_{j=I-i+1}^J \mathbf{X}_{i,j} = \mathbf{C}_{i,J} - \mathbf{C}_{i,I-i} \quad (4.2.6)$$

definiert. Weiterhin wird der M -dimensionale Vektor bestehend aus Einsen mit $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)' \in \mathbb{R}^M$ und die $M \times M$ -dimensionale Einheitsmatrix mit I bezeichnet.

4.2.2 Modellbildung

Aufgabe von multivariaten Schadenreservierungsverfahren ist es, den Endschadenstand $\mathbf{C}_{i,J}$ (und damit auch die Schadenreserve \mathbf{R}_i) für jedes Anfalljahr $i \in \{1, \dots, I\}$ zu prognostizieren. Verwendet man in diesem Zusammenhang den Credibility-Ansatz, so bedeutet dies, dass der bestmögliche Prädiktor unter allen M -dimensionalen Prädiktoren, deren Komponenten affin-linear in den Komponenten der Beobachtungen $\mathbf{X}_{i,1}, \dots, \mathbf{X}_{i,I-i}$ sind, zu bestimmen ist. Diesem Problem geht man im Rahmen des multivariaten Bühlmann-Straub-Modells nach. Hierzu werden Zufallsvariablen Θ_i (Risiko-parameter, latente Variablen) eingeführt, die das Risiko der verschiedenen Anfalljahre $i = 0, \dots, I$ charakterisieren. D.h. sie geben an, ob ein Anfalljahr gut oder schlecht ist. Zusätzlich wird für jedes Abwicklungsdreieck $m \in \{1, \dots, M\}$ ein (unbekanntes) *Schadenabwicklungsmuster* $(\gamma_j^{(m)})_{j=0, \dots, J} \subset \mathbb{R}_+$ eingeführt, das die erwartete Schadenquote des jeweiligen Abwicklungsjahres j angibt, d.h. es gilt $\gamma_j^{(m)} = E \left[X_{i,j}^{(m)} / \mu_i^{(m)} \right]$. Hierbei bezeichnet $\mu_i^{(m)}$ den erwarteten Endschadenstand $E \left[C_{i,J}^{(m)} \right]$ des i -ten Anfalljahres, für den vorausgesetzt wird, dass er bekannt ist bzw. a priori Schätzungen für ihn vorliegen.

Die erwartete Schadenquote bis zum Abwicklungsjahr j wird mit $\beta_j^{(m)}$ bezeichnet. Es wird also

$$\gamma_0^{(m)} = \beta_0^{(m)} > 0 \quad \text{und} \quad \gamma_j^{(m)} = \beta_j^{(m)} - \beta_{j-1}^{(m)} > 0 \quad \text{für } j = 1, \dots, J$$

angenommen. Damit gilt

$$\mu_i^{(m)} = E \left[C_{i,J}^{(m)} \right] = E \left[X_{i,j}^{(m)} / \gamma_j^{(m)} \right] > 0$$

und

$$\beta_J^{(m)} = \sum_{j=0}^J \gamma_j^{(m)} = \sum_{j=0}^J E \left[X_{i,j}^{(m)} / \mu_i^{(m)} \right] = E \left[C_{i,j}^{(m)} \right] / \mu_i^{(m)} = 1$$

für alle $m = 1, \dots, M$. Gegenstand der weiteren Betrachtungen sind nun die normierten Beobachtungen

$$Y_{i,j}^{(m)} = \frac{X_{i,j}^{(m)}}{\gamma_j^{(m)} \mu_i^{(m)}}, \quad (4.2.7)$$

$i = 0, \dots, I, j = 0, \dots, J$. In Vektorform hat man also

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma}_j &= \left(\gamma_j^{(1)}, \dots, \gamma_j^{(M)} \right)' \\ \boldsymbol{\beta}_j &= \left(\beta_j^{(1)}, \dots, \beta_j^{(M)} \right)' \\ \boldsymbol{\mu}_i &= \left(\mu_i^{(1)}, \dots, \mu_i^{(M)} \right)' \\ \mathbf{Y}_{i,j} &= \left(Y_{i,j}^{(1)}, \dots, Y_{i,j}^{(M)} \right)'. \end{aligned}$$

Für die normierten Beobachtungen gilt somit für alle $i = 0, \dots, I$ und $j = 0, \dots, J$

$$\mathbf{Y}_{i,j} = \mathbf{D}(\mathbf{w}_{i,j})^{-1} \mathbf{X}_{i,j}, \quad (4.2.8)$$

wobei $\mathbf{w}_{i,j} = \left(w_{i,j}^{(1)}, \dots, w_{i,j}^{(M)} \right)'$ mit $w_{i,j}^{(m)} = \gamma_j^{(m)} \mu_i^{(m)}$ für alle $m = 1, \dots, M$ gilt und die Diagonalmatrix $\mathbf{D}(\mathbf{w}_{i,j})^{-1}$ in (3.2.71) definiert ist. Mit diesen Angaben kann man die Modellannahmen des Bühlmann-Straub-Modells für die normierten Beobachtungen formulieren.

Modellannahmen 4.2.1 (Multivariates Bühlmann-Straub-Modell in der Schadenreservierung)

(a) Bedingt gegeben Θ_i sind $\mathbf{Y}_{i,0}, \dots, \mathbf{Y}_{i,J}$ unabhängig mit

$$E[\mathbf{Y}_{i,j} | \Theta_i] = \boldsymbol{\mu}(\Theta_i) \quad (4.2.9)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(\mathbf{Y}_{i,j} | \Theta_i) &= \mathbf{D}(\mathbf{w}_{i,j,\xi,\delta})^{-1/2} \cdot \Sigma(\Theta_i) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{w}_{i,j,\xi,\delta})^{-1/2} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sigma_1^2(\Theta_i)}{w_{i,j,\xi,\delta}^{(1)}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\sigma_M^2(\Theta_i)}{w_{i,j,\xi,\delta}^{(M)}} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

wobei $w_{i,j,\xi,\delta}^{(m)} = \gamma_j^{(m)\xi} \mu_i^{(m)\delta}$ für geeignete Exponenten $\xi \in [0, 2]$ und $\delta \geq 0$ gilt. $\Sigma(\Theta_i)$ ist die $M \times M$ -Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen $(\sigma_1^2(\Theta_i), \dots, \sigma_M^2(\Theta_i))'$.

(b) Die Zufallsvektoren $(\Theta_i, \mathbf{Y}'_{i,0}, \dots, \mathbf{Y}'_{i,J})$, $i = 0, \dots, I$ sind unabhängig und die latenten Variablen $\Theta_0, \dots, \Theta_I$ sind unabhängig und identisch verteilt.

Die Gleichung (4.2.9) impliziert, dass alle erwarteten (bedingten) Schadenquoten des i -ten Anfalljahres,

$$E\left[X_{i,j}^{(m)} / \mu_i^{(m)} \mid \Theta_i\right] = \mu_m(\Theta_i) \cdot \gamma_j^{(m)},$$

aufgrund des Terms $\mu_m(\Theta_i)$ stets größer oder kleiner als die eines anderen Anfalljahres k sind, d.h. es gibt Anfalljahre die systematisch besser oder schlechter als andere sind¹⁵.

Aus Annahme (4.2.10) folgt

$$\text{Var}\left(X_{i,j}^{(m)} \mid \Theta_i\right) = \gamma_j^{(m)2-\xi} \mu_i^{(m)2-\delta} \sigma_m^2(\Theta_i) \quad (4.2.11)$$

für alle $i = 0, \dots, I$, $j = 0, \dots, J$ und $m = 1, \dots, M$. Durch eine entsprechende Wahl des Parameters ξ kann beispielsweise eine Verringerung der Varianz der Schäden mit steigendem j (Abwicklungsjahr) berücksichtigt werden. Außerdem wird in (4.2.10) die bedingte Unkorreliertheit der Komponenten von $\mathbf{Y}_{i,j}$, gegeben Θ_i , angenommen.

¹⁵Vgl. dazu auch Mack (2002), S. 237.

Aus den Modellannahmen 4.2.1 folgt für die normierten Beobachtungen

$$E[\mathbf{Y}_{i,j}] = E[\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)] = \mathbf{1} \quad (4.2.12)$$

und für die kumulierten Schäden

$$E[\mathbf{C}_{i,j} | \Theta_i] = \mathbf{D}(\boldsymbol{\beta}_j) \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_i) \boldsymbol{\mu}(\Theta_i) \quad (4.2.13)$$

$$E[\mathbf{C}_{i,j}] = \mathbf{D}(\boldsymbol{\beta}_j) \boldsymbol{\mu}_i \quad (4.2.14)$$

für alle $i = 0, \dots, I$ und $j = 0, \dots, J$. Daraus erhält man für die Schadenreserven

$$E[\mathbf{R}_i | \Theta_i] = (\mathbf{D}(\boldsymbol{\beta}_J) - \mathbf{D}(\boldsymbol{\beta}_{I-i})) \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_i) \boldsymbol{\mu}(\Theta_i) \quad (4.2.15)$$

$$E[\mathbf{R}_i] = (\mathbf{D}(\boldsymbol{\beta}_J) - \mathbf{D}(\boldsymbol{\beta}_{I-i})) \boldsymbol{\mu}_i \quad (4.2.16)$$

für alle $i = 0, \dots, I$.

Den M -dimensionalen Credibility-Prädiktor $\widehat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_i)^{\text{cred}}$ von $\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)$ erhält man durch das Minimieren des MSEP (3.2.75) unter allen M -dimensionalen Prädiktoren $\widehat{\mathbf{Z}} = (\widehat{Z}_1, \dots, \widehat{Z}_M)'$, deren Komponenten \widehat{Z}_k affin-linear in den Komponenten der Beobachtungen $\mathbf{X}_{i,0}, \dots, \mathbf{X}_{i,I-i}$ sind¹⁶. Es ist also das Minimierungsproblem

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_i)^{\text{cred}} = \underset{\widehat{\mathbf{Z}} \in L(\mathcal{D}_I^M, 1)}{\text{argmin}} \text{mse}_{\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)}(\widehat{\mathbf{Z}}) \quad (4.2.17)$$

mit

$$L(\mathcal{D}_I^M, 1) = \left\{ \widehat{\mathbf{Z}} \left| \widehat{Z}_k = \alpha_0 + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{I-i} \sum_{m=1}^M \alpha_{i,j}^{(m)} X_{i,j}^{(m)}, \alpha_0, \alpha_{i,j}^{(m)} \in \mathbb{R} \right. \right\}. \quad (4.2.18)$$

zu lösen. Mit den Strukturparametern

$$S = E[\boldsymbol{\Sigma}(\Theta_i)]$$

$$T = \text{Var}(\boldsymbol{\mu}(\Theta_i))$$

und durch das Ersetzen der Gewichte $w_{i,j}^{(m)}$ und der Beobachtungen $X_{i,j}^{(m)}$ in Satz 3.2.15 durch die neuen Gewichte $w_{i,j,\xi,\delta}^{(m)}$ bzw. durch die normierten Beobachtungen $Y_{i,j}^{(m)}$ für alle $m = 1, \dots, M$ erhält man den folgenden Credibility-Prädiktor:

¹⁶Siehe auch Abschnitt 3.2.4, S. 45.

Satz 4.2.2 (Inhomogener multivariater Bühlmann-Straub-Prädiktor in der Schadenreservierung)

Unter den Modellannahmen 4.2.1 ist der inhomogene multivariate Credibility-Prädiktor von $\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)$ für $i = 1, \dots, I$ durch

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)}^{cred} = C_i \mathbf{G}_i + (I - C_i) \mathbf{1} \quad (4.2.19)$$

gegeben, wobei

$$\mathbf{G}_i = \left(\sum_{j=0}^{I-i} \frac{\gamma_j^{(1)\xi-1}}{\beta_{I-i,\xi}^{(1)} \mu_i^{(1)}} X_{i,j}^{(1)}, \dots, \sum_{j=0}^{I-i} \frac{\gamma_j^{(M)\xi-1}}{\beta_{I-i,\xi}^{(M)} \mu_i^{(M)}} X_{i,j}^{(M)} \right)' \quad (4.2.20)$$

$$C_i = T \left(T + \mathbf{D}(\boldsymbol{\beta}_{I-i,\xi})^{-1/2} \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_i)^{-\delta/2} S \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_i)^{-\delta/2} \mathbf{D}(\boldsymbol{\beta}_{I-i,\xi})^{-1/2} \right)^{-1} \quad (4.2.21)$$

$$\beta_{I-i,\xi}^{(m)} = \sum_{j=0}^{I-i} \gamma_j^{(m)\xi} \quad (4.2.22)$$

$$\boldsymbol{\beta}_{I-i,\xi} = \left(\beta_{I-i,\xi}^{(1)}, \dots, \beta_{I-i,\xi}^{(M)} \right)' \quad (4.2.23)$$

gilt.

Der komprimierte Beobachtungsvektor \mathbf{G}_i ist hier als gewichtetes Mittel der normierten Beobachtungen des i -ten Anfalljahres über alle Abwicklungsjahre $j = 0, \dots, I - i$ definiert, d.h. es gilt

$$\mathbf{G}_i = \left(\sum_{j=0}^{I-i} \frac{w_{i,j,\xi,\delta}^{(1)}}{\sum_{j=0}^{I-i} w_{i,j,\xi,\delta}^{(1)}} Y_{i,j}^{(1)}, \dots, \sum_{j=0}^{I-i} \frac{w_{i,j,\xi,\delta}^{(M)}}{\sum_{j=0}^{I-i} w_{i,j,\xi,\delta}^{(M)}} Y_{i,j}^{(M)} \right)'.$$

Aufgrund der Unabhängigkeitsannahme 4.2.1(b) zwischen den Anfalljahren hängt \mathbf{G}_i nur von den Beobachtungen des i -ten Anfalljahres ab.

Des Weiteren ist der Credibility-Prädiktor (4.2.19) erwartungstreu für $E[\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)] = \mathbf{1}$. Außerdem gilt für den gemischten Term aus (4.2.21) die Gleichheit

$$\mathbf{D}(\boldsymbol{\beta}_{I-i,\xi})^{-1/2} \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_i)^{-\delta/2} S \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_i)^{-\delta/2} \mathbf{D}(\boldsymbol{\beta}_{I-i,\xi})^{-1/2} = \begin{pmatrix} \frac{s_1^2}{\beta_{I-i,\xi}^{(1)} \mu_i^{(1)\delta}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{s_M^2}{\beta_{I-i,\xi}^{(M)} \mu_i^{(M)\delta}} \end{pmatrix}$$

mit $\varsigma_m^2 = E[\sigma_m^2(\Theta_i)]$.

Der homogene multivariate Credibility-Prädiktor in der Schadenreservierung lautet wie folgt (siehe dazu auch Satz 3.2.16):

Satz 4.2.3 (Homogener multivariater Bühlmann-Straub-Prädiktor in der Schadenreservierung)

Unter den Modellannahmen 4.2.1 ist der homogene multivariate Credibility-Prädiktor von $\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)$ für $i = 1, \dots, I$ durch

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)}^{\text{hom}} = C_i \mathbf{G}_i + (I - C_i) \widehat{\boldsymbol{\mu}} \quad (4.2.24)$$

gegeben, wobei

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}} = \left(\sum_{i=1}^I C_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^I C_i \mathbf{G}_i \quad (4.2.25)$$

gilt und C_i sowie \mathbf{G}_i in Satz 4.2.2 gegeben sind.

Anmerkungen zum Credibility-Prädiktor $\widehat{\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)}^{\text{hom}}$:

- Den homogenen Credibility-Prädiktor (4.2.24) verwendet man vor allem dann, wenn der Erwartungswert $E[\mathbf{Y}_{i,j}]$ aus den Daten geschätzt werden soll. In diesem Fall ist der Raum der zulässigen Prädiktoren durch

$$L(\mathcal{D}_I^M) = \left\{ \widehat{\mathbf{Z}} \mid \widehat{Z}_k = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{I-i} \sum_{m=1}^M \alpha_{i,j}^{(m)} X_{i,j}^{(m)}, \alpha_{i,j}^{(m)} \in \mathbb{R}, E[\widehat{Z}_k] = 1 \right\} \quad (4.2.26)$$

gegeben. Der Prädiktor $\widehat{\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)}^{\text{hom}}$ minimiert nun den MSEF unter allen Prädiktoren aus $L(\mathcal{D}_I^M)$, d.h. es gilt

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)}^{\text{hom}} = \underset{\widehat{\mathbf{Y}} \in L(\mathcal{D}_I^M)}{\operatorname{argmin}} \operatorname{msef}_{\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)}(\widehat{\mathbf{Y}}) \quad (4.2.27)$$

(siehe dazu auch Abschnitt 3.2.4).

- Der homogene Credibility-Prädiktor (4.2.24) ist aufgrund der Definition des Raumes $L(\mathcal{D}_I^M)$ erwartungstreu für $E[\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)] = \mathbf{1}$.
- Für den Schätzer $\widehat{\boldsymbol{\mu}}$ werden im Gegensatz zu \mathbf{G}_i die Beobachtungen aller Anfalljahre benötigt.

Für eindimensionale Beobachtungen und $\xi = 1$ vereinfachen sich die Prädiktoren (4.2.19) und (4.2.24) zu eindimensionalen Prädiktoren, die schon in der Schadenreservierung verwendet wurden. Siehe dazu Wüthrich und Merz (2008, Kapitel 4.5).

Im Falle, dass die a priori Erwartungswerte $\boldsymbol{\mu}_0, \dots, \boldsymbol{\mu}_I$ für alle Anfalljahre identisch sind ($\boldsymbol{\mu}_0 = \dots = \boldsymbol{\mu}_I = \boldsymbol{\mu}$), werden anstelle der normierten Beobachtungen (4.2.8) die Zufallsvektoren

$$\mathbf{Y}_{i,j} = \mathbf{D}(\gamma_j)^{-1} \mathbf{X}_{i,j}$$

betrachtet. Die Modellannahmen (4.2.9) und (4.2.10) werden entsprechend in

$$E[\mathbf{Y}_{i,j} | \Theta_i] = \boldsymbol{\mu}(\Theta_i) \quad (4.2.28)$$

$$\text{Var}(\mathbf{Y}_{i,j} | \Theta_i) = \mathbf{D}(\gamma_j)^{-\xi/2} \Sigma(\Theta_i) \mathbf{D}(\gamma_j)^{-\xi/2}. \quad (4.2.29)$$

modifiziert. In diesem Fall gilt $E[\mathbf{Y}_{i,j}] = E[\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)] = \boldsymbol{\mu}$ und

$$E[\mathbf{C}_{i,j} | \Theta_i] = \mathbf{D}(\boldsymbol{\beta}_j) \boldsymbol{\mu}(\Theta_i)$$

$$E[\mathbf{C}_{i,j}] = \mathbf{D}(\boldsymbol{\beta}_j) \boldsymbol{\mu}$$

$$E[\mathbf{R}_i | \Theta_i] = (\mathbf{D}(\boldsymbol{\beta}_J) - \mathbf{D}(\boldsymbol{\beta}_{I-i})) \boldsymbol{\mu}(\Theta_i)$$

$$E[\mathbf{R}_i] = (\mathbf{D}(\boldsymbol{\beta}_J) - \mathbf{D}(\boldsymbol{\beta}_{I-i})) \boldsymbol{\mu}.$$

Der inhomogene und der homogene Credibility-Prädiktor sind dann durch

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)}^{\text{cred}} = C_i \mathbf{G}_i + (I - C_i) \boldsymbol{\mu} \quad (4.2.30)$$

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)}^{\text{hom}} = C_i \mathbf{G}_i + (I - C_i) \widehat{\boldsymbol{\mu}}, \quad (4.2.31)$$

gegeben, wobei

$$\mathbf{G}_i = \left(\frac{\sum_{j=0}^{I-i} \gamma_j^{(1)\xi-1}}{\beta_{I-i,\xi}^{(1)}} X_{i,j}^{(1)}, \dots, \frac{\sum_{j=0}^{I-i} \gamma_j^{(M)\xi-1}}{\beta_{I-i,\xi}^{(M)}} X_{i,j}^{(M)} \right) \quad (4.2.32)$$

$$C_i = T \left(T + \mathbf{D}(\boldsymbol{\beta}_{I-i,\xi})^{-1/2} S \mathbf{D}(\boldsymbol{\beta}_{I-i,\xi})^{-1/2} \right)^{-1} \quad (4.2.33)$$

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}} = \left(\sum_{i=1}^I C_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^I C_i \mathbf{G}_i \quad (4.2.34)$$

gilt. Ist der a priori Erwartungswert $\boldsymbol{\mu}$ bekannt, dann verwendet man den inhomogenen Prädiktor (4.2.30). Bei unbekanntem $\boldsymbol{\mu}$ geht man zum homogenen Credibility-Prädiktor (4.2.31) über, in dem ein Schätzer für den erwarteten Endschadenstand $\boldsymbol{\mu}$ eingebaut ist.

Für die weiteren Betrachtungen wird von unterschiedlichen a priori Erwartungswerten $\boldsymbol{\mu}_0, \dots, \boldsymbol{\mu}_I$ ausgegangen. Für die Bestimmung eines Schätzers für die Spätschadenreserve werden noch Schätzungen für die Parameter $\boldsymbol{\gamma}_j$ bzw. $\boldsymbol{\beta}_j$ (siehe (4.2.15)) benötigt. Ein unverzerrter Schätzer für $\boldsymbol{\gamma}_j$ ist für alle $j = 0, \dots, J$ durch

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}_j = \mathbf{D} \left(\sum_{i=0}^{I-j} \boldsymbol{\mu}_i \right)^{-1} \sum_{i=0}^{I-j} \mathbf{X}_{i,j} \quad (4.2.35)$$

gegeben. Demzufolge ist

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_j = \sum_{k=0}^j \hat{\boldsymbol{\gamma}}_k \quad (4.2.36)$$

für alle $j = 0, \dots, J$ ein unverzerrter Schätzer für $\boldsymbol{\beta}_j$. Für $M = 1$ vereinfachen sich die Formeln (4.2.35) und (4.2.36) zu

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}_j = \sum_{i=0}^{I-j} X_{i,j} / \sum_{i=0}^{I-j} \mu_i \quad \text{und} \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_j = \sum_{k=0}^j \hat{\boldsymbol{\gamma}}_k,$$

die von Mack (2002) vorgeschlagen wurden.

Mit diesen Schätzungen erhält man die folgenden Prädiktoren für die Endschadenstände und für die Spätschadenreserven:

Theorem 4.2.4 *Unter den Modellannahmen 4.2.1 erhält man für den Endschadenstand des Anfalljahres $i = 1, \dots, I$ die folgenden Prädiktoren:*

$$\widehat{\mathbf{C}}_{i,J}^{cred} = \mathbf{C}_{i,I-i} + \mathbf{D}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_J - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{I-i}) \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_i) \widehat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_i)^{cred} \quad (4.2.37)$$

$$\widehat{\mathbf{C}}_{i,J}^{hom} = \mathbf{C}_{i,I-i} + \mathbf{D}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_J - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{I-i}) \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_i) \widehat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_i)^{hom}. \quad (4.2.38)$$

Zur konkreten Berechnung der Prädiktoren (4.2.37) und (4.2.38) sind Schätzungen der Strukturparameter S und T erforderlich. Diese werden in Abschnitt 4.2.4 angegeben. Mit Hilfe der Prädiktoren $\widehat{\mathbf{C}}_{i,J}^{cred}$ und $\widehat{\mathbf{C}}_{i,J}^{hom}$ für die Endschadenstände kann man Prädiktoren für die Spätschadenreserven angeben.

Folgerung 4.2.5 *Unter den Modellannahmen 4.2.1 sind die Prädiktoren der Spätschadenreserve für alle $i = 1, \dots, I$ durch*

$$\widehat{\mathbf{R}}_i^{cred} = \left(\widehat{R}_i^{(1)cred}, \dots, \widehat{R}_i^{(M)cred} \right)' = \mathbf{D}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_J - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{I-i}) \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_i) \widehat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_i)^{cred} \quad (4.2.39)$$

$$\widehat{\mathbf{R}}_i^{hom} = \left(\widehat{R}_i^{(1)hom}, \dots, \widehat{R}_i^{(M)hom} \right)' = \mathbf{D}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_J - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{I-i}) \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_i) \widehat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_i)^{hom} \quad (4.2.40)$$

gegeben.

4.2.3 Der bedingte Mean Square Error of Prediction

In diesem Abschnitt werden die Prognoseunsicherheiten der im letzten Abschnitt vorgestellten Prädiktoren für einzelne und für aggregierte Anfalljahre mit Hilfe des bedingten MSEP quantifiziert. Da man bei der Prognose der Spätschadenreserve ausschließlich an der Größe des Prognosefehlers für zukünftige Schadenszahlungen interessiert ist, wäre der unbedingte MSEP, der auch die Variabilität der vergangenen Schadenszahlungen misst, zur Quantifizierung des Reserverisikos ungeeignet.

Das Ziel dieses Paragraphen ist es, einen Schätzer für den bedingten MSEP der prognostizierten Spätschadenreserven für einzelne Jahre

$$\sum_{m=1}^M \widehat{R}_i^{(m)cred} = \mathbf{1}' \widehat{\mathbf{R}}_i^{cred} \quad \text{und} \quad \sum_{m=1}^M \widehat{R}_i^{(m)hom} = \mathbf{1}' \widehat{\mathbf{R}}_i^{hom} \quad (4.2.41)$$

sowie für aggregierte Anfalljahre

$$\sum_{i=1}^I \sum_{m=1}^M \widehat{R}_i^{(m)cred} = \sum_{i=1}^I \mathbf{1}' \widehat{\mathbf{R}}_i^{cred} \quad (4.2.42)$$

zu bestimmen. Im Folgenden werden die Berechnungen nur für den in Satz 4.2.2 angegebenen inhomogenen multivariaten Credibility-Prädiktor durchgeführt. Ähnliche Ergebnisse können auch für den homogenen multivariaten Credibility-Prädiktor aus Satz 4.2.3 hergeleitet werden. Um die Notation zu vereinfachen wird auf die obere Indizierung „cred“ verzichtet.

4.2.3.1 Einzelne Anfalljahre

Der bedingte MSEP für das Anfalljahr $i \in \{1, \dots, I\}$, gegeben \mathcal{D}_I^M , ist als

$$\begin{aligned} \text{mseP}_{\sum_m R_i^{(m)} | \mathcal{D}_I^M} \left(\sum_{m=1}^M \widehat{R}_i^{(m)} \right) &= E \left[\left(\sum_{m=1}^M \widehat{R}_i^{(m)} - \sum_{m=1}^M R_i^{(m)} \right)^2 \middle| \mathcal{D}_I^M \right] \\ &= \mathbf{1}' E \left[\left(\widehat{\mathbf{R}}_i - \mathbf{R}_i \right) \left(\widehat{\mathbf{R}}_i - \mathbf{R}_i \right)' \middle| \mathcal{D}_I^M \right] \mathbf{1} \end{aligned} \quad (4.2.43)$$

definiert und kann in die beiden Komponenten *bedingte Prozessvarianz* und *bedingter Schätzfehler* zerlegt werden:

$$\begin{aligned} \text{mseP}_{\sum_m R_i^{(m)} | \mathcal{D}_I^M} \left(\sum_{m=1}^M \widehat{R}_i^{(m)} \right) &= \underbrace{\mathbf{1}' \text{Var}(\mathbf{R}_i | \mathcal{D}_I^M) \mathbf{1}}_{\text{Bedingte Prozessvarianz}} \\ &\quad + \underbrace{\mathbf{1}' \left(\widehat{\mathbf{R}}_i - E[\mathbf{R}_i | \mathcal{D}_I^M] \right) \left(\widehat{\mathbf{R}}_i - E[\mathbf{R}_i | \mathcal{D}_I^M] \right)' \mathbf{1}}_{\text{Bedingter Schätzfehler}}. \end{aligned} \quad (4.2.44)$$

Für das Aufspalten des bedingten MSEP wurde die Tatsache verwendet, dass $\widehat{\mathbf{R}}_i$ im Jahr I bekannt/beobachtbar ist (d.h. $\widehat{\mathbf{R}}_i$ ist \mathcal{D}_I^M -messbar). Die bedingte Prozessvarianz beschreibt die Varianz innerhalb des Modells. Sie entsteht durch die Stochastizität von \mathbf{R}_i und lässt sich wie folgt berechnen:

Lemma 4.2.6 *Unter den Modellannahmen 4.2.1 ist die bedingte Prozessvarianz des Anfalljahres $i \in \{1, \dots, I\}$ gegeben durch*

$$\begin{aligned} \mathbf{1}' \text{Var}(\mathbf{R}_i | \mathcal{D}_I^M) \mathbf{1} &= \mathbf{1}' \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_i)^{2-\delta} E[\Sigma(\Theta_i) | \mathcal{D}_I^M] \sum_{j=I-i+1}^J \mathbf{D}(\boldsymbol{\gamma}_j)^{2-\xi} \mathbf{1} \\ &\quad + \mathbf{1}' \mathbf{D}(\boldsymbol{\beta}_J - \boldsymbol{\beta}_{I-i}) \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_i) \text{Var}(\boldsymbol{\mu}(\Theta_i) | \mathcal{D}_I^M) \mathbf{D}(\boldsymbol{\beta}_J - \boldsymbol{\beta}_{I-i}) \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_i) \mathbf{1}. \end{aligned} \quad (4.2.45)$$

Beweis: Siehe Abschnitt 4.2.6.1. □

Werden $E[\Sigma(\Theta_i) | \mathcal{D}_I^M]$ und $\text{Var}(\boldsymbol{\mu}(\Theta_i) | \mathcal{D}_I^M)$ durch S bzw. T approximiert und werden anschließend das Schadenabwicklungsmuster $\boldsymbol{\gamma}_j$ sowie die Strukturparameter S und T durch ihre Schätzungen ersetzt (siehe dazu Abschnitt 4.2.4), so ergibt sich der folgende Schätzer für die bedingte Prozessvarianz:

Schätzer 4.2.7 (Bedingte Prozessvarianz für ein einzelnes Anfalljahr)

Unter den Modellannahmen 4.2.1 erhält man für die bedingte Prozessvarianz des Anfalljahres $i \in \{1, \dots, I\}$ den folgenden Schätzer:

$$\begin{aligned} \mathbf{1}' \widehat{\text{Var}}(\mathbf{R}_i | \mathcal{D}_I^M) \mathbf{1} &= \mathbf{1}' \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_i)^{2-\delta} \widehat{S} \sum_{j=I-i+1}^J \mathbf{D}(\widehat{\gamma}_j)^{2-\xi} \mathbf{1} \\ &\quad + \mathbf{1}' \mathbf{D}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_J - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{I-i}) \widehat{T} \mathbf{D}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_J - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{I-i}) \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_i) \mathbf{1} \end{aligned} \quad (4.2.46)$$

(siehe Abschnitt 4.2.4 für die Schätzer der Strukturparameter S und T).

Der bedingte Schätzfehler beschreibt die Unsicherheit bei der Prognose der bedingten Erwartung $E[\mathbf{R}_i | \mathcal{D}_I^M]$ durch $\widehat{\mathbf{R}}_i$ und kann auf folgender Weise geschätzt werden:

Schätzer 4.2.8 (Bedingter Schätzfehler für ein einzelnes Anfalljahr)

Unter den Modellannahmen 4.2.1 erhält man für den bedingten Schätzfehler des Anfalljahres $i \in \{1, \dots, I\}$ den folgenden Schätzer:

$$\begin{aligned} \mathbf{1}' \widehat{\text{Var}}(\widehat{\mathbf{R}}_i | \mathcal{D}_I^M) \mathbf{1} &= -\mathbf{1} \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_i) \mathbf{D}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_J - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{I-i}) \widehat{C}_i \widehat{T} \mathbf{D}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_J - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{I-i}) \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_i) \mathbf{1} \\ &\quad + \mathbf{1}' \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_i) \mathbf{D}(\widehat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_i)^{\text{cred}}) \widehat{\text{Var}}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_J - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{I-i}) \mathbf{D}(\widehat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_i)^{\text{cred}}) \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_i) \mathbf{1}, \end{aligned} \quad (4.2.47)$$

wobei

$$\begin{aligned} \widehat{\text{Var}}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_J - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{I-i}) &= \sum_{j,l>I-i} \mathbf{D}\left(\sum_{m=0}^{I-j} \boldsymbol{\mu}_m\right)^{-1} \left[\delta_{jl} \mathbf{D}(\widehat{\gamma}_j)^{2-\xi} \cdot \sum_{k=0}^{I-j} \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_k)^{2-\delta} \widehat{S} \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{D}(\widehat{\gamma}_j) \sum_{k=0}^{I-\max\{j,l\}} \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_k) \widehat{T} \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_k) \mathbf{D}(\widehat{\gamma}_l) \right] \mathbf{D}\left(\sum_{m=0}^{I-l} \boldsymbol{\mu}_m\right)^{-1} \end{aligned} \quad (4.2.48)$$

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_i)^{\text{cred}} = \widehat{C}_i \widehat{\mathbf{G}}_i + (I - \widehat{C}_i) \mathbf{1} \quad (4.2.49)$$

$$\widehat{\mathbf{G}}_i = \left(\sum_{j=0}^{I-i} \frac{(\widehat{\gamma}_j^{(1)})^{\xi-1}}{\widehat{\beta}_{I-i,\xi}^{(1)} \mu_i^{(1)}} X_{i,j}^{(1)}, \dots, \sum_{j=0}^{I-i} \frac{(\widehat{\gamma}_j^{(M)})^{\xi-1}}{\widehat{\beta}_{I-i,\xi}^{(M)} \mu_i^{(M)}} X_{i,j}^{(M)} \right)' \quad (4.2.50)$$

$$\widehat{C}_i = \widehat{T} \left(\widehat{T} + \mathbf{D}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{I-i,\xi})^{-1/2} \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_i)^{-\delta/2} \widehat{S} \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_i)^{-\delta/2} \mathbf{D}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{I-i,\xi})^{-1/2} \right)^{-1} \quad (4.2.51)$$

und $\delta_{jl} = \begin{cases} 1, & j = l \\ 0, & j \neq l \end{cases}$ gilt (siehe Abschnitt 4.2.4 für die Schätzer der Strukturparameter S und T).

Aus den Schätzern 4.2.7 und 4.2.8 ergibt sich der folgende Schätzer für den bedingten MSEP des Prädiktors $\sum_{m=1}^M \widehat{R}_i^{(m)cred}$ für die Schadenreserve $\sum_{m=1}^M R_i^{(m)}$ eines einzelnen Anfalljahres:

Schätzer 4.2.9 (Bedingter MSEP für ein einzelnes Anfalljahr)

Unter den Modellannahmen 4.2.1 erhält man für den bedingten MSEP des Anfalljahres $i \in \{1, \dots, I\}$ den folgenden Schätzer:

$$\widehat{\text{mseP}}_{\sum_m R_i^{(m)} | \mathcal{D}_I^M} \left(\sum_{m=1}^M \widehat{R}_i^{(m)cred} \right) = \mathbf{1}' \widehat{\text{Var}}(\mathbf{R}_i | \mathcal{D}_I^M) \mathbf{1} + \mathbf{1}' \widehat{\text{Var}}(\widehat{\mathbf{R}}_i | \mathcal{D}_I^M) \mathbf{1}, \quad (4.2.52)$$

wobei die zwei Terme auf der rechten Seite von (4.2.52) durch (4.2.46) und (4.2.47) gegeben sind.

Der Prädiktor (4.2.49) ist der multidimensionale empirische inhomogene Credibility-Prädiktor des Bühlmann-Straub-Modells und resultiert aus dem inhomogenen Credibility-Prädiktor (4.2.19), in dem man die Strukturparameter durch ihre Schätzer ersetzt. Analog dazu erhält man auch den multidimensionalen empirischen homogenen Credibility-Prädiktor $\widehat{\widehat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_i)}^{\text{hom}}$ aus (4.2.24) (vgl. dazu auch $\widehat{\widehat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_i)}$ aus (3.2.103)).

Wird der homogene Credibility-Prädiktor aus Satz 4.2.3 zum Prognostizieren der Spätschadenreserve verwendet, so muss der Schätzer 4.2.8 für den bedingten Schätzfehler entsprechend abgeändert werden. Denn bei der Herleitung des Schätzers für den bedingten Schätzfehler (vgl. (4.2.78)) ist die MSEP-Matrix des multivariaten homogenen Credibility-Prädiktors aus (3.2.94) anstatt die des multivariaten inhomogenen Credibility-Prädiktors aus (3.2.93) zu benutzen. Dies führt zum folgenden Schätzer für den bedingten Schätzfehler:

$$\begin{aligned} & \mathbf{1}' \widehat{\text{Var}}(\widehat{\mathbf{R}}_i | \mathcal{D}_I^M) \mathbf{1} \\ &= -\mathbf{1} \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_i) \mathbf{D}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_J - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{I-i}) \left[\widehat{C}_i \widehat{T} - (I - \widehat{C}_i) \widehat{T} \left(\sum_{i=0}^I \widehat{C}_i' \right)^{-1} (I - \widehat{C}_i') \right] \\ & \quad \times \mathbf{D}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_J - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{I-i}) \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_i) \mathbf{1} \\ & \quad + \mathbf{1}' \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_i) \mathbf{D}(\widehat{\widehat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_i)}^{\text{hom}}) \widehat{\text{Var}}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_J - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{I-i}) \mathbf{D}(\widehat{\widehat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_i)}^{\text{hom}}) \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_i) \mathbf{1}, \end{aligned}$$

wobei $\widehat{\text{Var}}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_J - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{I-i})$ und \widehat{C}_i in (4.2.48) bzw. (4.2.51) gegeben sind.

Für $M = 1$ (d.h. nur ein run-off Portfolio) vereinfacht sich der Schätzer (4.2.52) zum folgenden eindimensionalen Schätzer:

$$\widehat{\text{mse}}_{R_i | \mathcal{D}_I^{(1)}} \left(\widehat{R}_i^{\text{cred}} \right) = \underbrace{\mu_i^{2-\delta} \widehat{\varsigma}^2 \sum_{j=I-i+1}^J \widehat{\gamma}_j^{2-\xi} + \mu_i^2 \left(\sum_{j=I-i+1}^J \widehat{\gamma}_j \right)^2}_{\text{Bedingte Prozessvarianz}} \widehat{T} \quad (4.2.53)$$

$$- \underbrace{\mu_i^2 \left(\sum_{j=I-i+1}^J \widehat{\gamma}_j \right)^2 \widehat{c}_i \widehat{T} + \mu_i^2 \left(\widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{cred}} \right)^2 \widehat{\text{Var}} \left(\sum_{j=I-i+1}^J \widehat{\gamma}_j \right)}_{\text{Bedingter Schätzfehler}},$$

wobei

$$\widehat{\text{Var}} \left(\sum_{j=I-i+1}^J \widehat{\gamma}_j \right) = \sum_{j,l > I-i} \left(\sum_{n=0}^{I-j} \mu_n \right)^{-1} \left(\sum_{n=0}^{I-l} \mu_n \right)^{-1} \left[\delta_{jl} \widehat{\gamma}_j^{2-\xi} \sum_{k=0}^{I-j} \mu_k^{2-\xi} \widehat{\varsigma}^2 \right. \quad (4.2.54)$$

$$\left. + \widehat{\gamma}_j \widehat{\gamma}_l \widehat{T} \sum_{k=0}^{I-\max\{j,l\}} \mu_k^2 \right]$$

und

$$\widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{cred}} = \widehat{c}_i \widehat{G}_i + (1 - \widehat{c}_i) 1 \quad (4.2.55)$$

mit

$$\widehat{G}_i = \frac{\sum_{j=0}^{I-i} \widehat{\gamma}_j^{\xi-1}}{\widehat{\beta}_{I-i,\xi} \mu_i} \cdot X_{i,j} \quad \text{und} \quad \widehat{c}_i = \frac{\widehat{\beta}_{I-i,\xi}}{\widehat{\beta}_{I-i,\xi} + \frac{\widehat{\varsigma}^2}{\mu_i^\delta \widehat{T}}}$$

gilt (vgl. dazu auch den eindimensionalen empirischen Bühlmann-Straub-Prädiktor (3.2.62), Seite 40).

4.2.3.2 Aggregierte Anfalljahre

In diesem Abschnitt wird ein Schätzer für den bedingten MSEP der prognostizierten Schadenreserven für alle aggregierte Anfalljahre ermittelt. Im Folgenden werden zunächst zwei Anfalljahre i und k mit $1 \leq i < k \leq I$ betrachtet. Bei der Aggregation der Schätzer $\widehat{\mathbf{R}}_i$ und $\widehat{\mathbf{R}}_k$ ist Vorsicht geboten, denn sie verwenden beide die gleichen Beobachtungen für die Schätzung der Parameter γ_j bzw. β_j . Demnach sind sie also nicht mehr unabhängig.

Der bedingte MSEP des Prädiktors $\sum_{m=1}^M \widehat{R}_i^{(m)} + \sum_{m=1}^M \widehat{R}_k^{(m)}$ für die Spätschadenreserve $\sum_m R_i^{(m)} + \sum_m R_k^{(m)}$ zweier aggregierter Anfalljahre i und k wird durch

$$\begin{aligned} \text{mse}_{\text{p}}(\sum_m R_i^{(m)} + \sum_m R_k^{(m)}) | \mathcal{D}_I^M & \left(\sum_{m=1}^M \widehat{R}_i^{(m)} + \sum_{m=1}^M \widehat{R}_k^{(m)} \right) & (4.2.56) \\ & = E \left[\left(\sum_{m=1}^M (\widehat{R}_i^{(m)} + \widehat{R}_k^{(m)}) - \sum_{m=1}^M (R_i^{(m)} + R_k^{(m)}) \right)^2 \middle| \mathcal{D}_I^M \right]. \end{aligned}$$

definiert. Wie für ein einzelnes Anfalljahr erhält man auch hier die Zerlegung

$$\begin{aligned} \text{mse}_{\text{p}}(\sum_m R_i^{(m)} + \sum_m R_k^{(m)}) | \mathcal{D}_I^M & \left(\sum_{m=1}^M \widehat{R}_i^{(m)} + \sum_{m=1}^M \widehat{R}_k^{(m)} \right) = \mathbf{1}' \text{Var}(\mathbf{R}_i + \mathbf{R}_k | \mathcal{D}_I^M) \mathbf{1} \\ & + \mathbf{1}' \left(\widehat{\mathbf{R}}_i + \widehat{\mathbf{R}}_k - E[\mathbf{R}_i + \mathbf{R}_k | \mathcal{D}_I^M] \right) \left(\widehat{\mathbf{R}}_i + \widehat{\mathbf{R}}_k - E[\mathbf{R}_i + \mathbf{R}_k | \mathcal{D}_I^M] \right)' \mathbf{1}. \quad (4.2.57) \end{aligned}$$

Wenn die Unabhängigkeit der verschiedenen Anfalljahre ausgenutzt wird, kann der bedingte MSEP (4.2.56) wie folgt dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \text{mse}_{\text{p}}(\sum_m R_i^{(m)} + \sum_m R_k^{(m)}) | \mathcal{D}_I^M & \left(\sum_{m=1}^M \widehat{R}_i^{(m)} + \sum_{m=1}^M \widehat{R}_k^{(m)} \right) = \text{mse}_{\text{p}}_{\sum_m R_i^{(m)}} | \mathcal{D}_I^M \left(\sum_{m=1}^M \widehat{R}_i^{(m)} \right) \\ & + \text{mse}_{\text{p}}_{\sum_m R_k^{(m)}} | \mathcal{D}_I^M \left(\sum_{m=1}^M \widehat{R}_k^{(m)} \right) \\ & + 2 \cdot \mathbf{1}' \left(\widehat{\mathbf{R}}_i - E[\mathbf{R}_i | \mathcal{D}_I^M] \right) \left(\widehat{\mathbf{R}}_k - E[\mathbf{R}_k | \mathcal{D}_I^M] \right)' \mathbf{1}. \quad (4.2.58) \end{aligned}$$

Um einen Schätzer des obigen MSEP zu erhalten, muss somit nur noch der dritte Term auf der rechten Seite von (4.2.58) geschätzt werden.

In Analogie zu (4.2.58) kann der bedingte MSEP des Prädiktors $\sum_{i=1}^I \sum_{m=1}^M \widehat{R}_i^{(m)\text{cred}}$ für die Spätschadenreserve $\sum_{i=1}^I \sum_{m=1}^M R_i^{(m)}$ aller Anfalljahre mit Hilfe der Formel

$$\begin{aligned} \text{mse}_{\text{p}}_{\sum_i \sum_m R_i^{(m)}} | \mathcal{D}_I^M & \left(\sum_{i=1}^I \sum_{m=1}^M \widehat{R}_i^{(m)} \right) = \sum_{i=1}^I \text{mse}_{\text{p}}_{\sum_m R_i^{(m)}} | \mathcal{D}_I^M \left(\sum_{m=1}^M \widehat{R}_i^{(m)} \right) \\ & + 2 \sum_{1 \leq i < k \leq I} \mathbf{1}' \left(\widehat{\mathbf{R}}_i - E[\mathbf{R}_i | \mathcal{D}_I^M] \right) \left(\widehat{\mathbf{R}}_k - E[\mathbf{R}_k | \mathcal{D}_I^M] \right)' \mathbf{1}. \quad (4.2.59) \end{aligned}$$

berechnet werden. Um einen Schätzer für (4.2.59) zu erhalten, sind zum einen die

bedingten MSEP für die einzelnen Anfalljahre und zum anderen alle Mischterme zu schätzen. Es resultiert das folgende Ergebnis:

Schätzer 4.2.10 (Bedingter MSEP für aggregierte Anfalljahre)

Unter den Modellannahmen 4.2.1 erhält man den folgenden Schätzer für den bedingten MSEP bei aggregierten Anfalljahren:

$$\begin{aligned} \widehat{\text{mse}}_{\sum_i \sum_n R_i^{(m)} | \mathcal{D}_I^M} \left(\sum_{i=1}^I \sum_{m=1}^M \widehat{R}_i^{(m) \text{ cred}} \right) &= \sum_{i=1}^I \widehat{\text{mse}}_{\sum_m R_i^{(m)} | \mathcal{D}_I^M} \left(\sum_{m=1}^M \widehat{R}_i^{(m)} \right) \\ &+ 2 \sum_{1 \leq i < k \leq I} \mathbf{1}' \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_i) \mathbf{D} \left(\widehat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_i)^{\text{cred}} \right) \widehat{\text{Cov}} \left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_J - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{I-i}, \widehat{\boldsymbol{\beta}}_J - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{I-k} \right) \mathbf{D} \left(\widehat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_k)^{\text{cred}} \right) \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_k) \mathbf{1}, \end{aligned} \quad (4.2.60)$$

wobei

$$\begin{aligned} \widehat{\text{Cov}} \left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_J - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{I-i}, \widehat{\boldsymbol{\beta}}_J - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{I-k} \right) &= \widehat{\text{Var}} \left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_J - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{I-i} \right) \\ &+ \sum_{\substack{I-i < j \\ I-k < l \leq I-i}} \mathbf{D} \left(\sum_{n=0}^{I-j} \boldsymbol{\mu}_n \right)^{-1} \mathbf{D}(\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_j) \sum_{s=0}^{I-\max\{j,l\}} \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_s) T \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_s) \mathbf{D}(\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_l) \mathbf{D} \left(\sum_{n=0}^{I-l} \boldsymbol{\mu}_n \right)^{-1} \end{aligned} \quad (4.2.61)$$

gilt und $\widehat{\text{Var}} \left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_J - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{I-i} \right)$ in (4.2.48) gegeben ist.

Einen Schätzer für die bedingte Prozessvarianz bei aggregierten Anfalljahren erhält man aufgrund der Unabhängigkeit der Anfalljahre durch Summation der Schätzer für die bedingte Prozessvarianz (4.2.46) der einzelnen Anfalljahre. Der Schätzer für den bedingten Schätzfehler bei aggregierten Anfalljahren ergibt sich hingegen durch Summation der Schätzer für den bedingten Schätzfehler (4.2.47) der einzelnen Anfalljahre zuzüglich dem Mischterm (zweiter Term) auf der rechten Seite von (4.2.60).

Ist $M = 1$, d.h. man hat nur ein run-off Portfolio, so ergibt sich folgender Schätzer für den bedingten MSEP des Prädiktors $\sum_{i=1}^I \widehat{R}_i^{\text{cred}}$ für die Spätschadenreserve $\sum_{i=1}^I R_i$ aller Anfalljahre:

$$\begin{aligned} \widehat{\text{mse}}_{\sum_i R_i | \mathcal{D}_I^{(1)}} \left(\sum_{i=1}^I \widehat{R}_i^{\text{cred}} \right) &= \sum_{i=1}^I \widehat{\text{mse}}_{R_i | \mathcal{D}_I^{(1)}} \left(\widehat{R}_i^{\text{cred}} \right) \\ &+ 2 \sum_{1 \leq i < k \leq I} \mu_i \mu_k \widehat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_i)^{\text{cred}} \widehat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_k)^{\text{cred}} \widehat{\text{Cov}} \left(\sum_{j=I-i+1}^J \widehat{\boldsymbol{\gamma}}_j, \sum_{j=I-k+1}^J \widehat{\boldsymbol{\gamma}}_j \right), \end{aligned} \quad (4.2.62)$$

wobei $\widehat{\text{mse}}_{R_i|\mathcal{D}_I^{(1)}}(\widehat{R}_i^{\text{cred}})$ in (4.2.53) gegeben ist,

$$\begin{aligned} \widehat{\text{Cov}}\left(\sum_{j=I-i+1}^J \widehat{\gamma}_j, \sum_{j=I-k+1}^J \widehat{\gamma}_j\right) &= \widehat{\text{Var}}\left(\sum_{j=I-i+1}^J \widehat{\gamma}_j\right) \\ &+ \sum_{\substack{I-i < j \\ I-k < l \leq I-i}} \left(\sum_{n=0}^{I-j} \mu_n\right)^{-1} \left(\sum_{n=0}^{I-l} \mu_n\right)^{-1} \widehat{\gamma}_j \widehat{\gamma}_l \widehat{T} \sum_{s=0}^{I-\max\{j,l\}} \mu_s^2, \end{aligned} \quad (4.2.63)$$

gilt und $\widehat{\text{Var}}\left(\sum_{j=I-i+1}^J \widehat{\gamma}_j\right)$ in (4.2.54) gegeben ist.

4.2.4 Schätzung der Strukturparameter

Die Schätzer für das Schadenabwicklungsmuster γ_j und β_j sind schon in (4.2.35) und (4.2.36) angegeben worden. In diesem Abschnitt werden zuerst Schätzer für die Strukturparameter S und T für bekannte μ_i und γ_j bzw. β_j angegeben. Um die endgültigen Schätzer zu erhalten, werden anschließend γ_j bzw. β_j durch ihre Schätzer ersetzt. Unter den Modellannahmen 4.2.1 ist S eine Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen $\varsigma_m^2 = E[\sigma_m^2(\Theta_i)]$, $m = 1, \dots, M$, für die nun ein Schätzer angegeben wird. Setzt man in (3.2.95) die normierten Beobachtungen $Y_{i,j}^{(m)}$ und die Gewichte $w_{i,j,\xi,\delta}^{(m)}$ für $X_{i,j}^{(m)}$ bzw. $w_{i,j}^{(m)}$ ein, so erhält man den folgenden Schätzer für ς_m^2 :

$$\begin{aligned} \widehat{\varsigma}_m^{2*} &= \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} \frac{1}{I-1} \sum_{j=0}^{I-i} w_{i,j,\xi,\delta}^{(m)} \left(Y_{i,j}^{(m)} - G_i^{(m)}\right)^2 \\ &= \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} \frac{1}{I-i} \sum_{j=0}^{I-i} \gamma_j^{(m)\xi} \mu_i^{(m)\delta} \left(\frac{X_{i,j}^{(m)}}{\gamma_j^{(m)} \mu_i^{(m)}} - G_i^{(m)}\right)^2. \end{aligned} \quad (4.2.64)$$

Die Parameter $\gamma_j^{(m)}$ werden jetzt durch $\widehat{\gamma}_j^{(m)}$ ersetzt und der neue Schätzer wird mit $\widehat{\varsigma}_m^2$ bezeichnet. Damit ist der Schätzer des Strukturparameters S durch

$$\widehat{S} = \begin{pmatrix} \widehat{\varsigma}_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \widehat{\varsigma}_M^2 \end{pmatrix} \quad (4.2.65)$$

gegeben. Der Schätzer (3.2.97) für das m -te Diagonalelement ($\widehat{m} = 1, \dots, M$) von T ist in diesem Fall wie folgt definiert:

$$\widehat{T}_{m,m}^* = \max \left(\widehat{T}_{m,m}^\circ, 0 \right), \quad (4.2.66)$$

wobei

$$\widehat{T}_{m,m}^\circ = a \cdot \left(\sum_{i=0}^I \frac{\beta_{\xi, I-i}^{(m)} \mu_i^{(m)\delta}}{\sum_k \beta_{\xi, I-k}^{(m)} \mu_k^{(m)\delta}} \cdot \left(G_i^{(m)} - \overline{G}^{(m)} \right)^2 - \frac{I \cdot \widehat{\xi}_m^{2*}}{\sum_k \beta_{\xi, I-k}^{(m)} \mu_k^{(m)\delta}} \right) \quad (4.2.67)$$

mit

$$a = \left(\sum_{i=0}^I \frac{\beta_{\xi, I-i}^{(m)} \mu_i^{(m)\delta}}{\sum_k \beta_{\xi, I-k}^{(m)} \mu_k^{(m)\delta}} \cdot \left(1 - \frac{\beta_{\xi, I-i}^{(m)} \mu_i^{(m)\delta}}{\sum_k \beta_{\xi, I-k}^{(m)} \mu_k^{(m)\delta}} \right) \right)^{-1}$$

und

$$\overline{G}^{(m)} = \sum_{i=0}^I \frac{\beta_{\xi, I-i}^{(m)} \mu_i^{(m)\delta}}{\sum_k \beta_{\xi, I-k}^{(m)} \mu_k^{(m)\delta}} \cdot G_i^{(m)} = \sum_{i=0}^I \frac{\mu_i^{(m)\delta-1} \sum_{j \leq I-1} \gamma_j^{(m)\xi-1} X_{i, I-i}^{(m)}}{\sum_k \beta_{\xi, I-k}^{(m)} \mu_k^{(m)\delta}}$$

gilt. Ist $\delta = 1$, so gilt $\overline{G}^{(m)} = 1$ für alle $m = 1, \dots, M$. Der Schätzer (3.2.99) für die Nicht-Diagonalelemente $T_{n,m}$ ($n \neq m$) von T sieht in diesem Fall folgendermaßen aus:

$$\widehat{T}_{n,m}^* = \operatorname{sgn} \left(\frac{\widehat{T}_{n,m}^a + \widehat{T}_{n,m}^b}{2} \right) \cdot \min \left(\frac{|\widehat{T}_{n,m}^a + \widehat{T}_{n,m}^b|}{2}, \sqrt{\widehat{T}_{n,n}^* \cdot \widehat{T}_{m,m}^*} \right), \quad (4.2.68)$$

wobei

$$\widehat{T}_{n,m}^a = c_a \cdot \left(\sum_{i=0}^I \frac{\beta_{\xi, I-i}^{(n)} \mu_i^{(n)\delta}}{\sum_k \beta_{\xi, I-k}^{(n)} \mu_k^{(n)\delta}} \cdot \left(G_i^{(n)} - \overline{G}^{(n)} \right) \cdot \left(G_i^{(m)} - \overline{G}^{(m)} \right) \right) \quad (4.2.69)$$

mit

$$c_a = \left(\sum_{i=0}^I \frac{\beta_{\xi, I-i}^{(n)} \mu_i^{(n)\delta}}{\sum_k \beta_{\xi, I-k}^{(n)} \mu_k^{(n)\delta}} \cdot \left(1 - \frac{\beta_{\xi, I-i}^{(n)} \mu_i^{(n)\delta}}{\sum_k \beta_{\xi, I-k}^{(n)} \mu_k^{(n)\delta}} \right) \right)^{-1}$$

und

$$\widehat{T}_{n,m}^b = c_b \cdot \left(\sum_{i=0}^I \frac{\beta_{\xi, I-i}^{(m)} \mu_i^{(m)\delta}}{\sum_k \beta_{\xi, I-k}^{(m)} \mu_k^{(m)\delta}} \cdot \left(G_i^{(n)} - \overline{G}^{(n)} \right) \cdot \left(G_i^{(m)} - \overline{G}^{(m)} \right) \right) \quad (4.2.70)$$

mit

$$c_b = \left(\sum_{i=0}^I \frac{\beta_{\xi, I-i}^{(m)} \mu_i^{(m)\delta}}{\sum_k \beta_{\xi, I-k}^{(m)} \mu_k^{(m)\delta}} \cdot \left(1 - \frac{\beta_{\xi, I-i}^{(m)} \mu_i^{(m)\delta}}{\sum_k \beta_{\xi, I-k}^{(m)} \mu_k^{(m)\delta}} \right) \right)^{-1}$$

gilt. Der Schätzer (4.2.68) wird Null, wenn einer der beiden Schätzer $\widehat{T}_{n,n}^*$ oder $\widehat{T}_{m,m}^*$ den Wert Null annimmt. In diesem Fall ist der Schätzer von T , und damit auch der Schätzer von C_i , nicht mehr invertierbar. Alternativ zu (4.2.68) kann man für die Nicht-Diagonalelemente von T auch den Schätzer

$$\widehat{T}_{n,m}^{\circ} = \frac{\widehat{T}_{n,m}^a + \widehat{T}_{n,m}^b}{2}. \quad (4.2.71)$$

verwenden. Nach Austausch der $\beta_{I-i}^{(n)}$ in (4.2.66) und (4.2.68) (oder (4.2.71)) durch ihre Schätzer erhält man einen Schätzer für T , der mit $\widehat{T} = (\widehat{T}_{n,m})_{n,m=1,\dots,N}$ bezeichnet wird. Die Schätzfunktionen $\widehat{\varsigma}_m^{2*}$, $m = 1, \dots, M$, sind erwartungstreu für die Diagonalelemente von S . Auch die Schätzer $\widehat{T}_{m,m}^{\circ}$, $\widehat{T}_{n,m}^a$ und $\widehat{T}_{n,m}^b$ sind erwartungstreu für die Komponenten von T . Die Schätzer $\widehat{T}_{m,m}^*$ und $\widehat{T}_{n,m}^*$ sind jedoch nicht mehr erwartungstreu (siehe auch Abschnitt 3.2.4.2). Davon abgesehen kann man über die Unverzerrtheit von \widehat{S} und \widehat{T} keine Aussage treffen.

Im Falle, dass die a priori Erwartungswerte μ_i für alle Anfalljahre identisch sind, müssen die Schätzer leicht abgeändert werden (siehe dazu die Ausführungen auf Seite 69).

4.2.5 Beispiel

Es werden zwei Portfolios A und B (d.h. $M = 2$) betrachtet, welche Daten der selben Versicherungssparte aus zwei verschiedenen Regionen beinhalten. Es liegen Abwicklungsdreiecke/-trapeze ($I > J$) vor, in denen die kumulierten Schäden aus 16 Anfalljahren enthalten sind. Diese sind in Tabelle 4.1 und 4.2 gegeben. Beide Portfolios erfüllen die Modellannahme $\widehat{\gamma}_j^{(m)} > 0$ für alle Abwicklungsjahre $j = 0, \dots, 10$ (vgl. Tabelle 4.4).

Für die a priori Erwartungswerte μ_i wird angenommen, dass sie unterschiedlich sind für die einzelnen Anfalljahre $i \in \{0, \dots, 16\}$ (vgl. Tabelle 4.3). Zum Schätzen der Spätschadenreserven (4.2.39) wird der inhomogene multivariate Credibility-Prädiktor (4.2.19) verwendet.

Wählt man $\xi = 1$, so erhält man die folgenden Schätzer für S :

$$\begin{pmatrix} 0,0311 & 0 \\ 0 & 0,0196 \end{pmatrix} (\delta = 0), \quad \begin{pmatrix} 1,449,21 & 0 \\ 0 & 692,81 \end{pmatrix} (\delta = 1), \quad \begin{pmatrix} 70.091,184 & 0 \\ 0 & 24.989,766 \end{pmatrix} (\delta = 2)$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	14.492	22.238	23.187	23.654	24.468	24.702	26.420	26.524	26.538	26.587	26.591
1	17.017	26.268	27.213	27.963	27.995	28.191	29.335	29.353	29.363	29.364	29.375
2	19.563	31.828	33.130	34.228	35.195	36.432	38.270	39.363	39.638	40.281	40.281
3	21.632	34.881	35.844	35.980	36.005	36.177	36.203	36.242	36.249	36.249	36.249
4	22.672	32.349	34.128	34.281	34.377	35.641	35.672	35.673	35.718	35.718	35.725
5	23.062	36.437	38.637	38.964	41.237	41.257	41.280	41.280	41.280	41.282	41.282
6	23.588	35.302	36.962	41.531	43.193	43.450	43.450	43.489	43.489	43.521	43.523
7	21.758	34.058	35.744	37.009	36.981	36.940	36.891	36.846	36.820	36.820	
8	20.233	29.430	30.362	31.006	31.760	34.212	34.373	34.408	34.408		
9	24.984	37.617	39.547	39.962	41.692	41.855	41.968	42.002			
10	24.260	37.815	39.400	41.078	41.202	41.349	41.381				
11	20.616	32.045	34.978	35.493	36.051	36.088					
12	18.814	30.313	33.676	35.387	35.484						
13	18.563	32.055	48.425	51.129							
14	18.457	29.546	31.611								
15	19.533	29.366									
16	17.620										

Tabelle 4.1: Beobachtete kumulierte Schäden $C_{i,j}^{(1)}$ in Portfolio A.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	16.651	24.857	24.389	24.237	24.242	24.246	24.252	24.252	24.254	24.254	24.254
1	16.292	24.421	26.134	26.329	26.755	26.789	26.857	26.907	26.962	26.962	26.973
2	16.658	27.224	28.960	29.578	30.850	31.292	31.865	31.879	31.917	32.666	32.668
3	19.715	30.405	31.373	33.471	33.625	33.823	33.923	33.986	37.505	37.529	37.679
4	21.220	30.035	33.004	33.900	34.051	35.197	35.223	35.243	35.243	35.243	35.245
5	21.302	31.884	34.121	35.073	35.080	36.263	36.277	36.277	36.303	36.373	36.364
6	17.201	24.693	26.267	26.785	28.470	28.495	28.497	28.554	28.546	28.616	28.624
7	15.835	27.503	29.231	29.353	29.846	29.836	29.840	29.841	29.842	29.842	
8	17.560	26.110	28.483	29.391	30.554	30.943	31.069	31.570	31.573		
9	21.051	33.330	35.717	36.408	36.780	38.804	38.817	38.817			
10	20.368	30.200	31.485	31.945	31.988	32.174	32.174				
11	18.623	29.783	30.725	31.617	31.625	31.653					
12	18.112	30.151	31.813	37.467	38.447						
13	17.744	28.090	30.225	30.824							
14	17.993	26.949	27.818								
15	19.082	30.485									
16	17.809										

Tabelle 4.2: Beobachtete kumulierte Schäden $C_{i,j}^{(2)}$ in Portfolio B.

i	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$\mu_i^{(1)}$	36.824	34.498	42.154	41.681	36.807	36.708	53.947	34.469	34.721	32.377
$\mu_i^{(2)}$	29.864	31.711	39.496	32.810	32.365	39.905	32.526	30.360	35.155	31.751

Tabelle 4.3: A priori Erwartungswerte $\mu_i^{(m)}$.

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\hat{\gamma}_j^{(1)}$	0,54435	0,30141	0,07132	0,03068	0,01890	0,01379	0,01234	0,00359	0,00100	0,00251	0,00010
$\hat{\gamma}_j^{(2)}$	0,56160	0,30554	0,04912	0,03138	0,01579	0,01456	0,00262	0,00219	0,01283	0,00363	0,00073

Tabelle 4.4: Geschätztes Abwicklungsmuster $\hat{\gamma}_j^{(m)}$ für Portfolio A und B.

Für $\xi = 1$ sind die Diagonalelemente von \widehat{T} Null für alle $\delta \geq 0$. Das bedeutet, dass in beiden Portfolios kein statistisch signifikanter Unterschied zwischen den Anfalljahren erkennbar ist (Anfalljahrqualität gleichbleibend). Um Schätzer für die Nicht-Diagonalelemente zu bestimmen, wird die Formel (4.2.71) verwendet. Die Schätzwerte für die Nicht-Diagonalelemente sind sehr klein, $\widehat{T}_{1,2} = 1,32425\text{E-}09$ ($\delta = 0$), $\widehat{T}_{1,2} = 1,21626\text{E-}09$ ($\delta = 1$) und $\widehat{T}_{1,2} = 1,10166\text{E-}09$ ($\delta = 2$). Damit sind die Komponenten der Credibility-Matrix \widehat{C}_i sehr nahe bei Null. Dies führt zu einem multivariaten Credibility-Prädiktor, dessen Komponenten sehr nahe bei 1 liegen. Die Schätzungen der aggregierten Schadenreserven $\sum_{i=7}^{16} (R_i^{(1)\text{cred}} + R_i^{(2)\text{cred}})$ verändern sich somit für verschiedene Werte von δ (fast) nicht, wie man der Tabelle 4.6 entnehmen kann.

Für $\xi = 0$ sind die Schätzungen der Strukturparameter S und T in Tabelle 4.5 zu finden. Die Diagonalelemente von \widehat{T} sind jetzt deutlich größer als Null, d.h. die Varianz zwischen den Anfalljahren ist in beiden Portfolios relativ hoch. Dies führt zu unterschiedlichen Reserven im Gegensatz zu $\xi = 1$ (vgl. Tabelle 4.6).

	$\delta = 0$	$\delta = 1$	$\delta = 2$
\widehat{S}	$\begin{pmatrix} 1,3132 & 0 \\ 0 & 1,4378 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 51,575 & 0 \\ 0 & 49,728 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2,098.244.687 & 0 \\ 0 & 1.738.769.009 \end{pmatrix}$
\widehat{T}	$\begin{pmatrix} 0,2823 & 0,1447 \\ 0,1447 & 0,1393 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,3074 & 0,1552 \\ 0,1552 & 0,1243 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,3260 & 0,1618 \\ 0,1618 & 0,1091 \end{pmatrix}$

Tabelle 4.5: Schätzer der Strukturparameter S and T ($\xi = 0$).

Die Schätzergebnisse für die aggregierten Schadenreserven, für die (bedingte Prozessvarianz)^{1/2}, für den (bedingten Schätzfehler)^{1/2} und für den (bedingten MSE)^{1/2} der prognostizierten aggregierten Schadenreserven des gesamten Portfolios, bestehend aus den zwei run-off Subportfolios A und B, für alle Anfalljahre i , sind in Tabelle 4.6 angegeben. Sie wurden für das multivariate Bühlmann-Straub-Modell, das multivariate Chain-Ladder-Modell¹⁷ (CL-Modell) und das multivariate Additive-Loss-Schadenreservierungsmodell¹⁸ (ALR-Modell) berechnet. Die letzten zwei Spalten der Tabelle 4.6 enthalten die Resultate des multivariaten CL- bzw. ALR-Modells aus der vierten Iteration.

Im Bühlmann-Straub-Modell steigen die Schätzwerte für die (bedingte Prozessvarianz)^{1/2}, für den (bedingten Schätzfehler)^{1/2} und für den (bedingten MSE)^{1/2} mit steigendem δ . Insgesamt sind die Ergebnisse für die verschiedenen Modelle ziemlich

¹⁷Siehe Wüthrich und Merz (2008), Kapitel 8.2.

¹⁸Siehe Wüthrich und Merz (2008), Kapitel 8.3.

	Bühlmann-Straub-Modell						CL-Modell	ALR-Modell
	$\xi = 1$			$\xi = 0$				
	$\delta = 0$	$\delta = 1$	$\delta = 2$	$\delta = 0$	$\delta = 1$	$\delta = 2$		
Schadenreserven	54.738	54.738	54.738	55.741	56.099	56.431	52.734	54.042
Prozessvarianz ^{1/2}	6.959	7.701	8.778	21.951	23.081	24.444	9.697	7.539
Schätzfehler ^{1/2}	3.830	4.147	4.617	4.777	5.161	5.797	5.549	4.749
$\widehat{\text{mse}}^{1/2}$	7.943	8.747	9.918	22.464	23.651	25.122	11.172	8.910

Tabelle 4.6: Ergebnisse für das gesamte Portfolio für aggregierte Anfalljahre.

unterschiedlich. Die Schätzungen für die (bedingte Prozessvarianz)^{1/2} im Bühlmann-Straub-Modell mit $\xi = 0$ sind auffallend groß. Sie führen zu hohen Schätzwerten für den (bedingten MSEP)^{1/2} im Bühlmann-Straub-Modell mit $\xi = 0$. Die hohen Schätzwerte für die (bedingte Prozessvarianz)^{1/2} werden hauptsächlich durch die hohen Schätzungen der (bedingten Prozessvarianz)^{1/2} im letzten Anfalljahr¹⁹ verursacht.

Wählt man $\xi = 2$, so bedeutet dies, dass die Varianz der Schadenzuwächse $X_{i,j}^{(m)}$ mit steigendem Abwicklungsjahr j konstant bleibt. Da dieser Sachverhalt in der Praxis im Allgemeinen nicht zu beobachten ist, wird er in dieser Arbeit nicht betrachtet.

4.2.6 Beweise und Herleitungen

4.2.6.1 Beweis von Lemma 4.2.6

Für alle $i \in \{1, \dots, I\}$ hat man die Zerlegung²⁰

$$\mathbf{1}' \text{Var}(\mathbf{R}_i | \mathcal{D}_I^M) \mathbf{1} = \mathbf{1}' E [\text{Var}(\mathbf{R}_i | \Theta_i) | \mathcal{D}_I^M] \mathbf{1} + \mathbf{1}' \text{Var} (E[\mathbf{R}_i | \Theta_i] | \mathcal{D}_I^M) \mathbf{1}. \quad (4.2.72)$$

Unter Verwendung von (4.2.15) erhält man für den zweiten Term auf der rechten Seite von (4.2.72)

$$\begin{aligned} & \mathbf{1}' \text{Var} (E[\mathbf{R}_i | \Theta_i] | \mathcal{D}_I^M) \mathbf{1} \\ &= \mathbf{1}' \text{Var}(\mathbf{D}(\boldsymbol{\beta}_J - \boldsymbol{\beta}_{I-i}) \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_i) \boldsymbol{\mu}(\Theta_i) | \mathcal{D}_I^M) \mathbf{1} \\ &= \mathbf{1}' \mathbf{D}(\boldsymbol{\beta}_J - \boldsymbol{\beta}_{I-i}) \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_i) \text{Var}(\boldsymbol{\mu}(\Theta_i) | \mathcal{D}_I^M) \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_i) \mathbf{D}(\boldsymbol{\beta}_J - \boldsymbol{\beta}_{I-i}) \mathbf{1}. \end{aligned} \quad (4.2.73)$$

¹⁹Die Schätzungen für die (bedingte Prozessvarianz)^{1/2} im 16. Anfalljahr lauten: 20.452 ($\delta = 0$), 21.644 ($\delta = 1$) and 23.114 ($\delta = 2$).

²⁰Siehe dazu die Eigenschaften der bedingten Erwartung in Anhang A.1.

Wird die bedingte Unabhängigkeit der normierten Beobachtungen $\mathbf{Y}_{i,I-i+1}, \dots, \mathbf{Y}_{i,J}$, gegeben Θ_i , und (4.2.10) ausgenutzt, so erhält man für den ersten Term auf der rechten Seite von (4.2.72)

$$\begin{aligned}
& \mathbf{1}' E [\text{Var}(\mathbf{R}_i | \Theta_i) | \mathcal{D}_I^M] \mathbf{1} \\
&= \mathbf{1}' E \left[\sum_{j=I-i+1}^J \mathbf{D}(\mathbf{w}_{i,j}) \text{Var}(\mathbf{Y}_{i,j} | \Theta_i) \mathbf{D}(\mathbf{w}_{i,j}) \middle| \mathcal{D}_I^M \right] \mathbf{1} \quad (4.2.74) \\
&= \mathbf{1}' E \left[\sum_{j=I-i+1}^J \mathbf{D}(\mathbf{w}_{i,j}) \mathbf{D}(\mathbf{w}_{i,j,\xi,\delta})^{-1/2} \Sigma(\Theta_i) \mathbf{D}(\mathbf{w}_{i,j,\xi,\delta})^{-1/2} \mathbf{D}(\mathbf{w}_{i,j}) \middle| \mathcal{D}_I^M \right] \mathbf{1} \\
&= \mathbf{1}' \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_i)^{2-\delta} E \left[\sum_{j=I-i+1}^J \mathbf{D}(\gamma_j)^{2-\xi} \Sigma(\Theta_i) \middle| \mathcal{D}_I^M \right] \mathbf{1}.
\end{aligned}$$

Damit ist der Beweis von Lemma 4.2.6 beendet. □

4.2.6.2 Herleitung des bedingten Schätzfehlers für ein einzelnes Anfalljahr

Unter Verwendung der bedingten Unabhängigkeit der normierten Beobachtungen $\mathbf{Y}_{i,I-i+1}, \dots, \mathbf{Y}_{i,J}$, gegeben Θ_i , erhält man²¹

$$\begin{aligned}
E[\mathbf{R}_i | \mathcal{D}_I^M] &= \sum_{j=I-i+1}^J E [E[\mathbf{X}_{i,j} | \Theta_i, \mathcal{D}_I^M] | \mathcal{D}_I^M] \\
&= \sum_{j=I-i+1}^J E [\mathbf{D}(\mathbf{w}_{i,j}) E[\mathbf{Y}_{i,j} | \Theta_i] | \mathcal{D}_I^M] \quad (4.2.75) \\
&= \mathbf{D} \left(\sum_{j>I-i} \gamma_j \right) \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_i) E[\boldsymbol{\mu}(\Theta_i) | \mathcal{D}_I^M].
\end{aligned}$$

Für $\widehat{\mathbf{R}}_i$ gilt (siehe (4.2.39))

$$\widehat{\mathbf{R}}_i = \mathbf{D} \left(\sum_{j>I-i} \widehat{\gamma}_j \right) \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_i) \widehat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_i).$$

²¹Siehe Anhang A.1 für die Eigenschaften der bedingten Erwartung.

Dies führt zur folgenden Darstellung:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{R}}_i - E[\mathbf{R}_i | \mathcal{D}_I^M] & \quad (4.2.76) \\ &= \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_i) \mathbf{D} \left(\sum_{j>I-i} \gamma_j \right) \left(\widehat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_i) - E[\boldsymbol{\mu}(\Theta_i) | \mathcal{D}_I^M] \right) - \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_i) \mathbf{D} \left(\sum_{j>I-i} (\gamma_j - \widehat{\gamma}_j) \right) \widehat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_i). \end{aligned}$$

Damit erhält man die folgende Formel für den bedingten Schätzfehler

$$\begin{aligned} & \mathbf{1}' \left(\widehat{\mathbf{R}}_i - E[\mathbf{R}_i | \mathcal{D}_I^M] \right) \left(\widehat{\mathbf{R}}_i - E[\mathbf{R}_i | \mathcal{D}_I^M] \right)' \mathbf{1} \\ &= \mathbf{1}' \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_i) \mathbf{D} \left(\sum_{j>I-i} \gamma_j \right) \left(\widehat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_i) - E[\boldsymbol{\mu}(\Theta_i) | \mathcal{D}_I^M] \right) \\ & \quad \left(\widehat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_i) - E[\boldsymbol{\mu}(\Theta_i) | \mathcal{D}_I^M] \right)' \mathbf{D} \left(\sum_{j>I-i} \gamma_j \right) \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_i) \mathbf{1} \quad (4.2.77) \\ & - \mathbf{1}' \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_i) \mathbf{D} \left(\sum_{j>I-i} (\gamma_j - \widehat{\gamma}_j) \right) \widehat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_i) \left(\widehat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_i) - E[\boldsymbol{\mu}(\Theta_i) | \mathcal{D}_I^M] \right)' \mathbf{D} \left(\sum_{j>I-i} \gamma_j \right) \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_i) \mathbf{1} \\ & - \mathbf{1}' \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_i) \mathbf{D} \left(\sum_{j>I-i} \gamma_j \right) \left(\widehat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_i) - E[\boldsymbol{\mu}(\Theta_i) | \mathcal{D}_I^M] \right) \widehat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_i)' \mathbf{D} \left(\sum_{j>I-i} (\gamma_j - \widehat{\gamma}_j) \right) \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_i) \mathbf{1} \\ & + \mathbf{1}' \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_i) \mathbf{D} \left(\sum_{j>I-i} (\gamma_j - \widehat{\gamma}_j) \right) \widehat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_i) \widehat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_i)' \mathbf{D} \left(\sum_{j>I-i} (\gamma_j - \widehat{\gamma}_j) \right) \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_i) \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Um einen Schätzer für den bedingten Schätzfehler zu erhalten, muss für jeden Term auf der rechten Seite von (4.2.77) ein Schätzer bestimmt werden. Mit (3.2.93) und der Approximation $E[\text{Var}(\boldsymbol{\mu}(\Theta_i) | \mathcal{D}_I^M)] \approx T$ ergibt sich die Approximation

$$\begin{aligned} & E \left[\left(\widehat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_i) - E[\boldsymbol{\mu}(\Theta_i) | \mathcal{D}_I^M] \right) \left(\widehat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_i) - E[\boldsymbol{\mu}(\Theta_i) | \mathcal{D}_I^M] \right)' \right] \quad (4.2.78) \\ &= E \left[E \left[\left(\boldsymbol{\mu}(\Theta_i) - \widehat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_i) \right) \left(\boldsymbol{\mu}(\Theta_i) - \widehat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_i) \right)' \middle| \mathcal{D}_I^M \right] - \text{Var}(\boldsymbol{\mu}(\Theta_i) | \mathcal{D}_I^M) \right] \\ &\approx (I - C_i) T - T \\ &= -C_i T. \end{aligned}$$

Die Approximation des ersten Terms sieht damit folgendermaßen aus:

$$-\mathbf{1}' \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_i) \mathbf{D} \left(\sum_{j>I-i} \gamma_j \right) C_i T \mathbf{D} \left(\sum_{j>I-i} \gamma_j \right) \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_i) \mathbf{1}. \quad (4.2.79)$$

Da unterschiedliche Anfalljahre unabhängig voneinander sind und der Credibility-Prädiktor erwartungstreu ist, verschwindet der Erwartungswert des zweiten und dritten

Terms. Unter Verwendung der Tatsache, dass

$$\mathbf{D}(\mathbf{b}) \mathbf{a} \mathbf{c}' \mathbf{D}(\mathbf{d}) = \mathbf{D}(\mathbf{a}) \mathbf{b} \mathbf{d}' \mathbf{D}(\mathbf{c}) \quad (4.2.80)$$

für alle M -dimensionalen Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ und \mathbf{d} gilt, erhält man für den vierten Term auf der rechten Seite von (4.2.77)

$$\mathbf{1}' \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_i) \mathbf{D}(\widehat{\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)}) \sum_{j>I-i} (\gamma_j - \hat{\gamma}_j) \sum_{j>I-i} (\gamma_j - \hat{\gamma}_j)' \mathbf{D}(\widehat{\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)}) \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_i) \mathbf{1}. \quad (4.2.81)$$

Im Folgenden wird (4.2.81) durch

$$\begin{aligned} & \mathbf{1}' \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_i) \mathbf{D}(\widehat{\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)}) E \left[\sum_{j>I-i} (\gamma_j - \hat{\gamma}_j) \sum_{j>I-i} (\gamma_j - \hat{\gamma}_j)' \right] \mathbf{D}(\widehat{\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)}) \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_i) \mathbf{1} \\ &= \mathbf{1}' \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_i) \mathbf{D}(\widehat{\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)}) \text{Var} \left(\sum_{j>I-i} \hat{\gamma}_j \right) \mathbf{D}(\widehat{\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)}) \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_i) \mathbf{1} \end{aligned} \quad (4.2.82)$$

approximiert. Hierfür muss jedoch

$$\text{Var} \left(\sum_{j>I-i} \hat{\gamma}_j \right) = E \left[\text{Var} \left(\sum_{j>I-i} \hat{\gamma}_j \middle| \Theta \right) \right] + \text{Var} \left(E \left[\sum_{j>I-i} \hat{\gamma}_j \middle| \Theta \right] \right), \quad (4.2.83)$$

berechnet werden, wobei $\Theta = (\Theta_0, \dots, \Theta_I)$ gilt. Mit Hilfe der Unabhängigkeit der Anfalljahre und der bedingten Unabhängigkeit der normierten Beobachtungen $\mathbf{Y}_{k,0}, \dots, \mathbf{Y}_{k,J}$ unter Θ_k ergibt sich für den ersten Term auf der rechten Seite von (4.2.83)

$$\begin{aligned} E \left[\text{Var} \left(\sum_{j>I-i} \hat{\gamma}_j \middle| \Theta \right) \right] &= \sum_{j>I-i} E \left[\text{Var}(\hat{\gamma}_j | \Theta) \right] \quad (4.2.84) \\ &= \sum_{j>I-i} E \left[\mathbf{D} \left(\sum_{n=0}^{I-j} \boldsymbol{\mu}_n \right)^{-1} \sum_{k=0}^{I-j} \text{Var}(\mathbf{D}(\mathbf{w}_{i,j}) \mathbf{Y}_{k,j} | \Theta_k) \mathbf{D} \left(\sum_{n=0}^{I-j} \boldsymbol{\mu}_n \right)^{-1} \right] \\ &= \sum_{j>I-i} E \left[\mathbf{D} \left(\sum_{n=0}^{I-j} \boldsymbol{\mu}_n \right)^{-1} \sum_{k=0}^{I-j} \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_k)^{2-\delta} \mathbf{D}(\gamma_j)^{2-\xi} \Sigma(\Theta_k) \mathbf{D} \left(\sum_{n=0}^{I-j} \boldsymbol{\mu}_n \right)^{-1} \right] \\ &= \sum_{j>I-i} \mathbf{D} \left(\sum_{n=0}^{I-j} \boldsymbol{\mu}_n \right)^{-1} \mathbf{D}(\gamma_j)^{2-\xi} \sum_{k=0}^{I-j} \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_k)^{2-\delta} S \mathbf{D} \left(\sum_{n=0}^{I-j} \boldsymbol{\mu}_n \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Für den zweiten Term auf der rechten Seite von (4.2.83) hat man

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(E\left[\sum_{j>I-i}\hat{\gamma}_j\middle|\Theta\right]\right) &= \text{Var}\left(\sum_{j>I-i}E\left[\mathbf{D}\left(\sum_{n=0}^{I-j}\boldsymbol{\mu}_n\right)^{-1}\sum_{k=0}^{I-j}\mathbf{X}_{k,j}\middle|\Theta\right]\right) \\ &= \text{Var}\left(\sum_{j>I-i}\mathbf{D}\left(\sum_{n=0}^{I-j}\boldsymbol{\mu}_n\right)^{-1}\mathbf{D}(\gamma_j)\sum_{k=0}^{I-j}\mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_k)\boldsymbol{\mu}(\Theta_k)\right). \end{aligned} \quad (4.2.85)$$

Zur Vereinfachung der Notation wird die Zufallsvariable

$$\mathbf{Z}_j = \mathbf{D}\left(\sum_{n=0}^{I-j}\boldsymbol{\mu}_n\right)^{-1}\mathbf{D}(\gamma_j)\sum_{k=0}^{I-j}\mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_k)\boldsymbol{\mu}(\Theta_k) \quad (4.2.86)$$

definiert. Die Unabhängigkeit der $\Theta_0, \dots, \Theta_I$ impliziert für (4.2.85)

$$\begin{aligned} &= \sum_{j>I-i}\text{Var}(\mathbf{Z}_j) + 2\sum_{I-i<j<l}\text{Cov}(\mathbf{Z}_j, \mathbf{Z}_l) \\ &= \sum_{j>I-i}\mathbf{D}\left(\sum_{n=0}^{I-j}\boldsymbol{\mu}_n\right)^{-1}\mathbf{D}(\gamma_j)\sum_{k=0}^{I-j}\mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_k)T\mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_k)\mathbf{D}(\gamma_j)\mathbf{D}\left(\sum_{n=0}^{I-j}\boldsymbol{\mu}_n\right)^{-1} \\ &\quad + 2\sum_{I-i<j<l}\mathbf{D}\left(\sum_{n=0}^{I-j}\boldsymbol{\mu}_n\right)^{-1}\mathbf{D}(\gamma_j)\sum_{k=0}^{I-\max\{j,l\}}\mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_k)T\mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_k)\mathbf{D}(\gamma_l)\mathbf{D}\left(\sum_{n=0}^{I-l}\boldsymbol{\mu}_n\right)^{-1}. \end{aligned} \quad (4.2.87)$$

Insgesamt erhält man

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(\sum_{j>I-i}\hat{\gamma}_j\right) &= \sum_{j,l>I-i}\mathbf{D}\left(\sum_{n=0}^{I-j}\boldsymbol{\mu}_n\right)^{-1}\left(\delta_{jl}\mathbf{D}(\gamma_j)^{2-\xi}\cdot\sum_{k=0}^{I-j}\mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_k)^{2-\delta}S\right. \\ &\quad \left.+\mathbf{D}(\gamma_j)\sum_{k=0}^{I-\max\{j,l\}}\mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_k)T\mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_k)\mathbf{D}(\gamma_l)\right)\mathbf{D}\left(\sum_{n=0}^{I-l}\boldsymbol{\mu}_n\right)^{-1}, \end{aligned} \quad (4.2.88)$$

wobei $\delta_{jl} = \begin{cases} 1, & j = l \\ 0, & j \neq l \end{cases}$ gilt.

Fasst man (4.2.79), (4.2.82) und (4.2.88) zusammen und ersetzt alle Parameter durch ihre Schätzer, so erhält man den Schätzer 4.2.8.

4.2.6.3 Herleitung des Schätzers für den bedingten MSEF bei zwei aggregierten Anfalljahren

Um einen Schätzer für den bedingten MSEF für zwei aggregierte Anfalljahre i und k zu erhalten, muss nur noch ein Schätzer für den dritten Term auf der rechten Seite der

Gleichung (4.2.58) bestimmt werden. Analog zu (4.2.77) hat man für $1 \leq i < k \leq I$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{1}' \left(\widehat{\mathbf{R}}_i - E[\mathbf{R}_i | \mathcal{D}_I^M] \right) \left(\widehat{\mathbf{R}}_k - E[\mathbf{R}_k | \mathcal{D}_I^M] \right)' \mathbf{1} \\
&= \mathbf{1}' \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_i) \mathbf{D} \left(\sum_{j>I-i} \gamma_j \right) \left(\widehat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_i) - E[\boldsymbol{\mu}(\Theta_i) | \mathcal{D}_I^M] \right) \\
&\quad \left(\widehat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_k) - E[\boldsymbol{\mu}(\Theta_k) | \mathcal{D}_I^M] \right)' \mathbf{D} \left(\sum_{j>I-k} \gamma_j \right) \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_k) \mathbf{1} \tag{4.2.89} \\
&- \mathbf{1}' \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_i) \mathbf{D} \left(\sum_{j>I-i} (\gamma_j - \hat{\gamma}_j) \right) \widehat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_i) \left(\widehat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_k) - E[\boldsymbol{\mu}(\Theta_k) | \mathcal{D}_I^M] \right)' \mathbf{D} \left(\sum_{j>I-k} \gamma_j \right) \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_k) \mathbf{1} \\
&- \mathbf{1}' \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_i) \mathbf{D} \left(\sum_{j>I-i} \gamma_j \right) \left(\widehat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_i) - E[\boldsymbol{\mu}(\Theta_i) | \mathcal{D}_I^M] \right) \widehat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_k)' \mathbf{D} \left(\sum_{j>I-k} (\gamma_j - \hat{\gamma}_j) \right) \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_k) \mathbf{1} \\
&+ \mathbf{1}' \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_i) \mathbf{D} \left(\widehat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_i) \right) \sum_{j>I-i} (\gamma_j - \hat{\gamma}_j) \sum_{j>I-k} (\gamma_j - \hat{\gamma}_j)' \mathbf{D} \left(\widehat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_k) \right) \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_k) \mathbf{1}.
\end{aligned}$$

Wie für einzelne Anfalljahre wird nun für jeden Term auf der rechten Seite von (4.2.89) ein Schätzer bestimmt. Der Erwartungswert der ersten zwei Terme verschwindet aufgrund der Unabhängigkeit von verschiedenen Anfalljahren. Verwendet man wieder die Unabhängigkeit der Anfalljahre, so gilt die folgende Gleichheit:

$$\begin{aligned}
& E \left[\left(\widehat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_i) - E[\boldsymbol{\mu}(\Theta_i) | \mathcal{D}_I^M] \right) \widehat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_k)' \mathbf{D} \left(\sum_{j>I-k} (\gamma_j - \hat{\gamma}_j) \right) \right] \\
&= E \left[\left(\widehat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_i) - E[\boldsymbol{\mu}(\Theta_i) | \mathcal{D}_I^M] \right) \sum_{I-k < j \leq I-i} (\gamma_j - \hat{\gamma}_j)' \mathbf{D} \left(\widehat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_k) \right) \right] \\
&= -E \left[\left(\widehat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_i) - E[\boldsymbol{\mu}(\Theta_i) | \mathcal{D}_I^M] \right) \sum_{I-k < j \leq I-i} \hat{\gamma}_j' \right] \cdot E \left[\mathbf{D} \left(\widehat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_k) \right) \right]. \tag{4.2.90}
\end{aligned}$$

Wie schon in den Anmerkungen zum inhomogenen Bühlmann-Straub-Prädiktor (3.2.78) erwähnt, lässt sich der inhomogene Credibility-Prädiktor $\widehat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_i)$ als orthogonale Projektion von $\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)$ auf $L(\mathcal{D}_I^M, 1)$ darstellen (siehe (3.2.83) auf Seite 46). Aufgrund der Iterationseigenschaft (3.2.26) von orthogonalen Projektionen ist $\widehat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_i)$ auch als orthogonale Projektion des multidimensionalen Bayes-Schätzers $E[\boldsymbol{\mu}(\Theta_i) | \mathcal{D}_I^M]$ auf den Unterraum $L(\mathcal{D}_I^M, 1)$ darstellbar²². Der Credibility-Prädiktor $\widehat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_i)$ erfüllt daher die Orthogonalitätsbedingung

$$E \left[\left(\widehat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_i) - E[\boldsymbol{\mu}(\Theta_i) | \mathcal{D}_I^M] \right) \cdot \mathbf{X}'_{l,n} \right] = 0 \tag{4.2.91}$$

²²Vgl. dazu (3.2.29). Die orthogonale Projektion ist auch hier, wie die Projektion in (3.2.83), komponentenweise zu verstehen. Vgl. hierzu die Ausführungen auf Seite 46.

für alle l, n . Damit ist der Erwartungswert aus (4.2.90) gleich Null, so dass die Approximation des dritten Terms auf der rechten Seite von (4.2.89) auch Null ist. Der vierte Term wird durch

$$\begin{aligned} & \mathbf{1}' \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_i) \mathbf{D}(\widehat{\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)}) E \left[\sum_{j>I-i} (\gamma_j - \hat{\gamma}_j) \sum_{j>I-k} (\gamma_j - \hat{\gamma}_j)' \right] \mathbf{D}(\widehat{\boldsymbol{\mu}(\Theta_k)}) \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_k) \mathbf{1} \\ &= \mathbf{1}' \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_i) \mathbf{D}(\widehat{\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)}) \text{Cov} \left(\sum_{j>I-i} \hat{\gamma}_j, \sum_{j>I-k} \hat{\gamma}_j \right) \mathbf{D}(\widehat{\boldsymbol{\mu}(\Theta_k)}) \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_k) \mathbf{1} \end{aligned} \quad (4.2.92)$$

approximiert. Es muss also noch die Kovarianz

$$\begin{aligned} \text{Cov} \left(\sum_{j>I-i} \hat{\gamma}_j, \sum_{j>I-k} \hat{\gamma}_j \right) &= E \left[\text{Cov} \left(\sum_{j>I-i} \hat{\gamma}_j, \sum_{j>I-k} \hat{\gamma}_j \middle| \Theta \right) \right] \\ &+ \text{Cov} \left(E \left[\sum_{j>I-i} \hat{\gamma}_j \middle| \Theta \right], E \left[\sum_{j>I-k} \hat{\gamma}_j \middle| \Theta \right] \right) \end{aligned} \quad (4.2.93)$$

berechnet werden, wobei $\Theta = (\Theta_0, \dots, \Theta_I)$ ist. Wegen der Unabhängigkeit der Anfalljahre und der bedingten Unabhängigkeit der normierten Beobachtungen $\mathbf{Y}_{k,0}, \dots, \mathbf{Y}_{k,J}$ unter Θ_k ergibt sich für den ersten Term auf der rechten Seite von (4.2.93)

$$E \left[\text{Cov} \left(\sum_{j>I-i} \hat{\gamma}_j, \sum_{j>I-k} \hat{\gamma}_j \middle| \Theta \right) \right] = E \left[\sum_{j>I-i} \text{Var}(\hat{\gamma}_j | \Theta) \right] = E \left[\text{Var} \left(\sum_{j>I-i} \hat{\gamma}_j \middle| \Theta \right) \right], \quad (4.2.94)$$

was schon in Gleichung (4.2.84) angegeben wurde. Für die Berechnung des zweiten Summanden auf der rechten Seite von (4.2.93) werden die Zufallsvariablen \mathbf{Z}_j verwendet, die in (4.2.86) definiert sind. Damit hat man

$$\begin{aligned} & \text{Cov} \left(E \left[\sum_{j>I-i} \hat{\gamma}_j \middle| \Theta \right], E \left[\sum_{j>I-k} \hat{\gamma}_j \middle| \Theta \right] \right) = \text{Cov} \left(\sum_{j>I-i} \mathbf{Z}_j, \sum_{j>I-k} \mathbf{Z}_j \right) \\ &= \sum_{j>I-i} \text{Var}(\mathbf{Z}_j) + 2 \sum_{I-i < j < l} \text{Cov}(\mathbf{Z}_j, \mathbf{Z}_l) + \sum_{\substack{I-i < j \\ I-k < l \leq I-i}} \text{Cov}(\mathbf{Z}_j, \mathbf{Z}_l) \\ &= \text{Var} \left(E \left[\sum_{j>I-i} \hat{\gamma}_j \middle| \Theta \right] \right) \\ &+ \sum_{\substack{I-i < j \\ I-k < l \leq I-i}} \mathbf{D} \left(\sum_{n=0}^{I-j} \boldsymbol{\mu}_n \right)^{-1} \mathbf{D}(\boldsymbol{\gamma}_j) \sum_{s=0}^{I-\max\{j,l\}} \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_s) T \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_s) \mathbf{D}(\boldsymbol{\gamma}_l) \mathbf{D} \left(\sum_{n=0}^{I-l} \boldsymbol{\mu}_n \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (4.2.95)$$

wobei $\text{Var}\left(E\left[\sum_{j>I-i}\hat{\gamma}_j\middle|\Theta\right]\right)$ in (4.2.87) gegeben ist. Schließlich erhält man den Gesamtausdruck

$$\begin{aligned} \text{Cov}\left(\sum_{j>I-i}\hat{\gamma}_j, \sum_{j>I-k}\hat{\gamma}_j\right) &= \text{Var}\left(\sum_{j>I-i}\hat{\gamma}_j\right) \\ &+ \sum_{\substack{I-i<j \\ I-k<l\leq I-i}} \mathbf{D}\left(\sum_{n=0}^{I-j}\boldsymbol{\mu}_n\right)^{-1} \mathbf{D}(\gamma_j) \sum_{s=0}^{I-\max\{j,l\}} \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_s) T \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}_s) \mathbf{D}(\gamma_l) \mathbf{D}\left(\sum_{n=0}^{I-l}\boldsymbol{\mu}_n\right)^{-1}, \end{aligned} \quad (4.2.96)$$

wobei $\text{Var}\left(\sum_{j>I-i}\hat{\gamma}_j\right)$ in (4.2.88) gegeben ist.

Werden (4.2.92) und (4.2.96) zusammengefasst und alle Parameter durch ihre Schätzer ersetzt, so erhält man den noch fehlenden Schätzer des Mischterms (4.2.89).

Kapitel 5

Modellierung und Analyse von abhängigen Risiken

Bei der Quantifizierung der Gesamtrisikos eines Versicherungsunternehmens werden die verschiedenen Risiken innerhalb eines Geschäftsbereichs und bereichsübergreifend zusammengeführt. Dabei ist die Berücksichtigung von Abhängigkeiten zwischen den Risiken von zentraler Bedeutung. Denn eine falsche oder unzureichende Berücksichtigung der Abhängigkeiten bei der Modellierung kann zu erheblichen Fehleinschätzungen des Solvenzkapitals führen.

Obwohl man nur in seltenen Fällen von unabhängigen Risiken ausgehen kann, war stochastische Unabhängigkeit lange Zeit die Standardannahme im Risikomanagement. Dies ist hauptsächlich in der Einfachheit der damit verbundenen Berechnungen begründet. Mittlerweile ist das Interesse an Modellierung von abhängigen Risiken stark angewachsen, was sich in den zahlreichen Beiträgen auf diesem Gebiet widerspiegelt¹. Die Korrelation wird oft zur Beschreibung der Interdependenzen zwischen Risiken verwendet. Sie ist für multivariat normalverteilte Risiken ein natürliches Maß für Abhängigkeit, da der Erwartungswert-Vektor und die Varianz-Kovarianz-Matrix die gemeinsame Verteilung eindeutig bestimmen. Dies gilt allerdings nicht mehr außerhalb der „normalen“ Welt. Denn für zwei Verteilungen und einen gegebenen Korrelationskoeffizienten können beliebig viele gemeinsame Verteilungsfunktionen konstruiert werden, die sich mitunter in ihrer Abhängigkeitsstruktur sehr stark voneinander unterscheiden. Dies kann sich beispielsweise in der Tatsache ausdrücken, dass die Wahrscheinlichkeiten für das gemeinsame Auftreten von hohen Werten (große Verluste bzw. Schäden) sehr unterschiedlich sind. Gerade jedoch diese Wahrscheinlichkeiten spielen im Risiko-

¹ Einen guten Überblick über die verschiedenen Modelle zur Modellierung von abhängigen Risiken findet man z.B. Denuit et al. (2005).

management eine entscheidende Rolle und sollten durch das verwendete Modell nicht unterschätzt werden. Da die Korrelation ein skalares und lineares Abhängigkeitsmaß ist, kann sie bei weitem nicht alles, was man über die Abhängigkeitsbeziehungen zweier Risiken wissen möchte, beschreiben². Das Konzept der *Copulas* bietet hierfür eine sehr leistungsfähige Alternative. Mit Hilfe von Copulas lassen sich auch komplexe Abhängigkeitsstrukturen modellieren.

Anders als in den vorhergehenden beiden Kapiteln liegt der Fokus in diesem Kapitel nicht auf dem Schätzen der ersten zwei (bedingten) Momente, sondern auf der Modellierung und Analyse von Abhängigkeitsstrukturen zwischen Risiken. In diesem Zusammenhang ist oft die Verteilung des Gesamtrisikos (z.B. Gesamtschaden) eines Portfolios von Interesse. Dieser Verteilung kann man beispielsweise Informationen über die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von Extremereignissen entnehmen. Extremereignisse, wie etwa ein Hundertschaden in der Sachversicherung oder der Ausfall vieler Risiken bei einem Kreditportfolio, sind von großer Bedeutung für das Risikomanagement eines Versicherungsunternehmens.

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels werden Copula-Funktionen eingeführt und näher erläutert. Gegenstand des zweiten Abschnitts ist die Untersuchung der mathematischen Struktur von Portfolios bestehend aus Einzelrisiken, deren Abhängigkeitsstruktur durch eine spezielle Familie von Copulas beschrieben werden kann. Es wird eine asymptotische Verteilung für das durchschnittliche Portfolio-Risiko bestimmt. Mit ihrer Hilfe kann die Verteilung des Gesamtrisikos in großen Portfolios angenähert werden. Darüber hinaus werden weitere asymptotische Resultate vorgestellt, die der genaueren Charakterisierung von Wahrscheinlichkeiten seltener Ereignisse, dienen³.

Da für einige englische Fachausdrücke dieses Kapitels keine adäquaten deutschen Übersetzungen existieren, werden die englischen Originalausdrücke beibehalten.

5.1 Copulas

Skalare Abhängigkeitsmaße wie der Korrelationskoeffizient bieten nur einen sehr beschränkten Einblick in die Abhängigkeitsstruktur von Zufallsvariablen. Im Gegensatz dazu können mittels Copulas auch sehr allgemeine und komplexe Abhängigkeitsbe-

² Für ausführlichere Informationen dazu siehe Embrechts et al. (2002) und die Referenzen darin.

³ Die Ergebnisse dieses Abschnitts basieren auf dem Artikel Maier und Wüthrich (2009).

ziehungen beschrieben werden. Die Idee hinter dem Copula-Ansatz ist die Zerlegung von multivariaten Verteilungsfunktionen in einen Bestandteil, der die Abhängigkeitsstruktur zwischen den einzelnen Zufallsvariablen beschreibt und in Bestandteile, die das Randverhalten der einzelnen Zufallsvariablen charakterisieren. Dadurch wird die Abhängigkeitsstruktur von den einzelnen Randverteilungen separiert und via Copulas analytisch darstellbar.

Die Definition einer n -dimensionalen Copula kann auf zwei verschiedene (äquivalente) Arten erfolgen.

Definition 5.1.1 *Eine n -dimensionale Copula ist eine Verteilungsfunktion (eingeschränkt auf $[0, 1]^n$) eines n -dimensionalen Zufallsvektors, dessen Randverteilungsfunktionen $(0, 1)$ -gleichverteilt sind.*

Alternativ kann man eine Copula wie folgt definieren: Eine Copula ist eine Funktion $C : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ mit folgenden Eigenschaften:

- $C(u_1, \dots, u_n)$ ist bezüglich jedes Arguments u_k ($k = 1, \dots, n$) monoton steigend;
- $C(1, \dots, 1, u_k, 1, \dots, 1) = u_k$ für alle $k \in \{1, \dots, n\}$, $u_k \in [0, 1]$;
- Für alle $(a_1, \dots, a_n)'$ und $(b_1, \dots, b_n)' \in [0, 1]^n$ mit $a_k \leq b_k$ für alle $k = 1, \dots, n$ gilt

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_n=1}^2 (-1)^{i_1+\dots+i_n} C(u_{1i_1}, \dots, u_{ni_n}) \geq 0 \quad (5.1.1)$$

mit $u_{k1} = a_k$ und $u_{k2} = b_k$ für alle $k \in \{1, \dots, n\}$.

Hierbei bezeichnet $[0, 1]^n$ den n -dimensionalen Einheitsquader, der durch $[0, 1]^n = [0, 1] \times \dots \times [0, 1]$ definiert ist. Alle k -dimensionalen ($k = 2, \dots, n - 1$) Randverteilungen von C sind auch k -dimensionale Copulas⁴.

Mit Hilfe des nächsten Theorems wird deutlich, warum eine Copula auch als Abhängigkeitsstruktur bezeichnet werden kann.

Satz 5.1.2 (Sklar (1959)) *Bezeichnet G die Verteilungsfunktion eines n -dimensionalen Zufallsvektors mit den Randverteilungsfunktionen F_1, \dots, F_n , dann existiert eine Copula C derart, dass für alle $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$*

$$G(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \quad (5.1.2)$$

⁴ Vgl. Nelsen (1999), S. 40.

gilt. Sind F_1, \dots, F_n stetig, dann ist C eindeutig.

Umgekehrt, ist C eine n -dimensionale Copula und F_1, \dots, F_n univariate Verteilungsfunktionen, dann ist die durch (5.1.2) definierte Funktion G eine n -dimensionale Verteilungsfunktion mit den Randverteilungen F_1, \dots, F_n .

Beweis: Siehe Moore und Spruill (1975), Deheuvels (1978) oder Sklar (1996), die jeweils durch verschiedene Ansätze diesen Satz bewiesen haben. \square

Eine Copula beschreibt, wie die Randverteilungen F_i zu einer multivariaten Verteilungsfunktion verbunden werden. Dementsprechend wurde vom englischen Verb „couple“ („verbinden“) die Bezeichnung „Copula“ für diese Art von Funktionen gewählt. Folglich kann man eine multivariate Verteilungsfunktion konstruieren, in dem man beliebige Ränder F_1, \dots, F_n in eine Copula, welche eine den eigenen Bedürfnissen angepasste Abhängigkeitsstruktur darstellt, einsetzt.

Copulas lassen sich wiederum aus jeder multivariaten Verteilungsfunktion G mit stetigen Rändern F_1, \dots, F_n unter Verwendung der Formel

$$C(u_1, \dots, u_n) = G\left(F_1^{(-1)}(u_1), \dots, F_n^{(-1)}(u_n)\right), \quad (5.1.3)$$

$u_1, \dots, u_n \in [0, 1]$, konstruieren. Hierbei bezeichnet $F_k^{(-1)}$ die verallgemeinerte Inverse (Quantilsfunktion) von F_k , die als

$$F_k^{(-1)}(u) = \inf\{v \mid F_k(v) \geq u\} \quad (5.1.4)$$

definiert ist. Ist F_k stetig, so gilt $F_k\left(F_k^{(-1)}(u)\right) = u$.⁵ Die Gleichung (5.1.3) erhält man für stetige F_1, \dots, F_n unmittelbar aus (5.1.2). Auf diese Weise ergeben sich beispielsweise die Gauß- und t -Copula aus der multivariaten Gauß- bzw. t -Verteilung. Weitere Methoden für die Konstruktion von Copulas findet man in Joe (1997) oder Nelsen (1999).

Betrachtet man die bivariate Standardnormalverteilung mit dem Korrelationskoeffizienten $\rho \in (-1, 1)$, so ist die Gauß-Copula C_ρ^{Ga} durch

$$C_\rho^{Ga}(u_1, u_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \exp\left\{\frac{-(y_1^2 - 2\rho y_1 y_2 + y_2^2)}{2(1-\rho^2)}\right\} dy_1 dy_2 \quad (5.1.5)$$

⁵ Siehe dazu McNeil et al. (2005), S. 494 f.

gegeben, wobei Φ die univariate Standardnormal-Verteilungsfunktion bezeichnet. Zwei standardnormalverteilte Zufallsvariablen mit einer Abhängigkeitsstruktur, die durch C_ρ^{Ga} beschrieben wird, sind bivariat standardnormalverteilt. Sie haben also $C_\rho^{Ga}(\Phi(x_1), \Phi(x_2))$ als gemeinsame Verteilungsfunktion.

Für stetige, stochastisch unabhängige Zufallsvariablen besitzt die dazugehörige Copula die Gestalt

$$\Pi(u_1, \dots, u_n) = u_1 \cdot \dots \cdot u_n. \quad (5.1.6)$$

Die Umkehrung gilt offensichtlich auch, stetige Zufallsvariablen mit Π als Abhängigkeitsstruktur sind stochastisch unabhängig.

Eine wichtige Eigenschaft von Copulas ist ihre Invarianz unter streng monoton steigenden Transformationen. So ändert sich beispielsweise die Copula eines Zufallsvektors nicht, wenn man seine Komponenten logarithmiert.

Lemma 5.1.3 *Sei $(X_1, \dots, X_n)'$ ein Zufallsvektor mit stetigen Randverteilungsfunktionen und der dazugehörigen Copula C . Sind T_1, \dots, T_n streng monoton steigende Transformationen, dann besitzt $(T_1(X_1), \dots, T_n(X_n))'$ ebenfalls die Copula C .*

Beweis: Siehe McNeil et al. (2005), S. 188. □

Sind nicht alle Randverteilungsfunktionen stetig, so gilt die Aussage in Lemma 5.1.3 immer noch, wenn alle Transformationen stetig und streng monoton steigend sind⁶.

Bei stochastischer Unabhängigkeit von Zufallsvariablen, hat die dazugehörige Copula die Form (5.1.6). Welche Form nimmt sie an, wenn die Zufallsvariablen perfekt abhängig sind? Dieser Frage wird nun nachgegangen. Die sogenannten *Fréchet-Höfding Schranken*⁷ geben die Extremwerte an, die Copulas annehmen können.

Satz 5.1.4 (Fréchet-Höfding Schranken) *Für jede n -dimensionale Copula C gilt*

$$\max \left\{ \sum_{k=1}^n u_k + 1 - n, 1 \right\} \leq C(u_1, \dots, u_n) \leq \min \{u_1, \dots, u_n\}$$

für alle $(u_1, \dots, u_n)' \in [0, 1]^n$.

Beweis: Siehe McNeil et al. (2005), S. 189. □

⁶ Siehe dazu Embrechts et al. (2002).

⁷ Siehe Fréchet (1951) und Höfding (1940).

Die obere Schranke ist in jeder Dimension eine Copula und wird oft mit

$$M(u_1, \dots, u_n) = \min\{u_1, \dots, u_n\}$$

bezeichnet. Repräsentiert M die Abhängigkeitsstruktur der Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n , dann nennt man sie *komonoton*. Sind X_1, \dots, X_n stetig, dann sind sie genau dann komonoton, wenn jede der n Zufallsvariablen (fast sicher) als streng monoton steigende Transformation jeder anderen Zufallsvariablen dargestellt werden kann, d.h. es gilt $X_i = T_{ij}(X_j)$ (fast sicher) für alle Paare (i, j) .⁸ Die Copula M beschreibt also die perfekte positive Abhängigkeit zwischen Zufallsvariablen. Eine solche perfekte positive Abhängigkeit zwischen zwei Zufallsvariablen X_1 und X_2 kann sogar vorliegen, wenn der Korrelationskoeffizient von X_1 und X_2 nahe bei Null ist⁹. Eine kleine Korrelation impliziert somit nicht notwendigerweise eine schwache Abhängigkeit - eine Tatsache, die gegen die Verwendung der Korrelation spricht.

Die Fréchet-Höfding Untergrenze wird mit $W(u_1, \dots, u_n)$ bezeichnet. Sie ist nur für $n = 2$ eine Copula und beschreibt in diesem Fall die perfekte negative Abhängigkeit. Mit anderen Worten, zwei stetige Zufallsvariablen haben genau dann W als Copula, wenn die eine (fast sicher) eine streng monoton fallende Funktion der anderen ist¹⁰. Man nennt sie dann *kontramomonoton*. Auch hier gilt, selbst wenn die Korrelation zweier Zufallsvariablen X_1 und X_2 nahe bei Null ist, können X_1 und X_2 perfekt negativ abhängig sein¹¹. Eine Verallgemeinerung der Kontramonotonie auf $n > 2$ Dimensionen ist nicht möglich¹².

Im Falle der Gauß-Copula (5.1.5) hingegen, ergeben sich für $\rho = -1$ und $\rho = 1$ die Copulas W und M . Außerdem erhält man für $\rho = 0$ die Unabhängigkeits-Copula Π , so dass das Ausmaß der Abhängigkeit durch den Korrelationskoeffizienten ρ repräsentiert wird.

Eine wichtige Klasse von Copulas bilden die Archimedischen Copulas. Sie sind aufgrund ihrer einfachen Form leicht zu konstruieren. Außerdem sind sie im Allgemeinen in einer geschlossenen Form darstellbar¹³. Diese Klasse von Copulas ist zudem äußerst

⁸ Für den Beweis siehe McNeil et al. (2005), S. 199 f.

⁹ Siehe dazu das Beispiel 5.26 in McNeil et al. (2005), S. 205 f.

¹⁰ Für den Beweis siehe Embrechts et al. (2002).

¹¹ Siehe dazu das Beispiel 5.26 in McNeil et al. (2005), S. 205 f.

¹² Siehe McNeil et al. (2005), S. 200 f.

¹³ Im Gegensatz dazu besitzt die Gauß-Copula keine geschlossene Form. Sie gehört der *elliptischen Familie* von Copulas an. Siehe dazu z.B. Embrechts et al. (2002).

umfangreich und vielfältig. Sie ermöglicht die Modellierung von sehr unterschiedlichen Abhängigkeitsstrukturen.

Eine Archimedische Copula ist eine Copula, die für eine geeignete Funktion $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ in der Form

$$C_\varphi(u_1, \dots, u_n) = \varphi^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \varphi(u_i) \right) \quad (5.1.7)$$

geschrieben werden kann. Man bezeichnet φ als *Generator* von C_φ . Der folgende Satz gibt notwendige und hinreichende Bedingungen für φ an, die sicherstellen, dass die in (5.1.7) definierte Funktion C_φ eine Copula ist.

Satz 5.1.5 *Es sei $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ eine stetige und streng monoton fallende Funktion mit $\varphi(0) = \infty$ und $\varphi(1) = 0$. Dann ist C_φ für alle $n \geq 2$ genau dann eine Copula, wenn die Inverse φ^{-1} beliebig oft differenzierbar ist und*

$$(-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \varphi^{-1}(x) \geq 0 \quad \text{für alle } k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.1.8)$$

und alle $x \in [0, \infty)$ gilt.

Beweis: Siehe Kimberling (1974). □

Für die Dimension $n = 2$ lassen sich die notwendigen und hinreichenden Bedingungen an φ auf die folgenden Eigenschaften abschwächen: $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ erzeugt genau dann eine bivariate Archimedische Copula, wenn φ eine stetige, streng monoton fallende und konvexe Funktion mit $\varphi(1) = 0$ ist. Für die Definition (5.1.7) einer bivariaten Archimedischen Copula wird die verallgemeinerte Inverse $\varphi^{(-1)}$ von φ verwendet (siehe (5.1.4))¹⁴.

Des Weiteren ist die Bedingung (5.1.8) zum Erzeugen einer Copula in einer gegebenen, festen Dimension n nicht notwendig. McNeil und Nešlehová (2007) haben gezeigt, dass die sogenannte n -Monotonie der Inversen φ^{-1} auf $[0, \infty)$ notwendig und hinreichend zur Erzeugung einer n -dimensionalen Copula ist. Man nennt die Funktion φ^{-1} n -monoton auf $[0, \infty)$, wenn sie $(n - 2)$ -mal differenzierbar ist, die Ableitungen für alle $x \in [0, \infty)$ die Bedingung

$$(-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \varphi^{-1}(x) \geq 0, \quad k = 0, 1, \dots, n - 2,$$

¹⁴Für den Beweis siehe z.B Nelsen (1999), S. 91 f.

erfüllen und $(-1)^{n-2} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} \varphi^{-1}(x)$ monoton steigend und konvex auf $[0, \infty)$ ist.

Eine gute Quelle von Generatoren für Archimedische Copulas stellen die Inversen der *Laplace-Transformationen*

$$\psi(t) = E[\exp(-t\Theta)], \quad t \geq 0, \quad (5.1.9)$$

von Zufallsvariablen Θ dar, deren Verteilungsfunktion $F_\Theta(0) = 0$ erfüllt. Eine Funktion ψ auf $[0, \infty)$ ist nämlich genau dann die Laplace-Transformation einer solchen Zufallsvariablen Θ , wenn ψ beliebig oft differenzierbar ist, die Bedingung (5.1.8) erfüllt und $\psi(0) = 1$ gilt¹⁵. Die Inverse ψ^{-1} erzeugt also eine Archimedische Copula

$$C_{\psi^{-1}}(u_1, \dots, u_n) = \psi \left(\sum_{i=1}^n \psi^{-1}(u_i) \right). \quad (5.1.10)$$

Setzt man univariate Verteilungsfunktionen F_1, \dots, F_n in (5.1.10) ein, so erhält man eine n -dimensionale Verteilungsfunktion, die durch

$$\begin{aligned} G(x_1, \dots, x_n) &= \psi \left(\sum_{i=1}^n \psi^{-1}(F_i(x_i)) \right) \\ &= \int_0^\infty \exp \left(- \sum_{i=1}^n \psi^{-1}(F_i(x_i)) \theta \right) dF_\Theta(\theta) \\ &= \int_0^\infty \prod_{i=1}^n \exp(-\theta \psi^{-1}(F_i(x_i))) dF_\Theta(\theta) \end{aligned} \quad (5.1.11)$$

gegeben ist. Hierbei bezeichnet $\int_0^\infty g(\theta) dF_\Theta(\theta)$ das *Riemann-Stieltjes* Integral von g bezüglich F_Θ . Dieses Integral nimmt für eine diskrete Zufallsvariable mit den Realisationen $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$ und der Wahrscheinlichkeitsfunktion f_Θ die Form

$$\sum_{i \geq 1} g(\theta_i) f_\Theta(\theta_i)$$

an. Für eine stetige Zufallsvariable mit der Dichtefunktion f_Θ besitzt es die Form

$$\int_0^\infty g(\theta) f_\Theta(\theta) d\theta.$$

Mit dieser vereinfachten Notation lässt sich die mühsame Unterscheidung in diskrete

¹⁵Zum Beweis siehe Feller (1971), S. 439 f.

und stetige Zufallsvariablen vermeiden. Detailliertere Informationen zum Riemann-Stieltjes Integral findet man z.B. in Carter und Van Brunt (2000) oder Rudin (2005).

Die multivariate Verteilung (5.1.11) ist eine sogenannte *Mischverteilung*, die unter anderem von Marshall und Olkin (1988), Schönbucher (2004) oder McNeil et al. (2005) untersucht wurde. Solche Mischverteilungen werden oft durch einen anderen, von Marshall und Olkin (1988) vorgeschlagenen Ansatz, konstruiert und führen wiederum zu einer Archimedischen Copula der Form (5.1.10). Dieser Zugang erlaubt eine ökonomische Interpretation des multivariaten Modells (5.1.11) und wird im Folgenden beschrieben.

Es wird ein Portfolio mit n Risiken X_1, \dots, X_n betrachtet. Ihre Verteilungen werden mit F_1, \dots, F_n bezeichnet. Eine latente Variable Θ , deren Verteilungsfunktion $F_\Theta(0) = 0$ erfüllt, übernimmt die Rolle der externen ökonomischen Faktoren (systematisches Risiko), die das gesamte Portfolio beeinflussen¹⁶. Bei gegebenem Wert θ des externen Parameters Θ sind die Risiken bedingt unabhängig. Die Laplace-Transformation von Θ wird mit ψ bezeichnet. Weiterhin wird angenommen, dass die bedingte Verteilung von X_i ($i = 1, \dots, n$), gegeben θ , als

$$P(X_i \leq x_i | \Theta = \theta) = (H_i(x_i))^\theta \quad (5.1.12)$$

geschrieben werden kann, wobei H_i eine weitere Verteilungsfunktion ist, die weiter unten spezifiziert wird. Damit ergibt sich für die (unbedingte) Verteilung von X_i

$$\begin{aligned} F_i(x_i) &= \int_0^\infty P(X_i \leq x_i | \Theta = \theta) dF_\Theta(\theta) = \int_0^\infty \exp(\theta \ln H_i(x_i)) dF_\Theta(\theta) \\ &= \psi(-\ln H_i(x_i)), \end{aligned} \quad (5.1.13)$$

so dass

$$H_i(x_i) = \exp(-\psi^{-1}(F_i(x_i))) \quad (5.1.14)$$

gilt. Für jede Kombination von Verteilungen F_i und F_Θ existiert also immer eine Verteilungsfunktion H_i , so dass die Darstellung (5.1.12) gilt. Diese ist in (5.1.14) definiert. Die gemeinsame Verteilung von X_1, \dots, X_n ist folglich durch

$$G(x_1, \dots, x_n) = \int_0^\infty \prod_{i=1}^n \exp(-\theta \psi^{-1}(F_i(x_i))) dF_\Theta(\theta) \quad (5.1.15)$$

¹⁶Die Risiken X_1, \dots, X_n sowie die latente Variable Θ sind auch in diesem Kapitel als Zufallsvariablen auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) definiert.

gegeben, welche genau die Mischverteilung aus (5.1.11) ist. Ihre Abhängigkeitsstruktur wird durch die Archimedische Copula (5.1.10) beschrieben. Mischverteilungen dieser Art sind die Grundlage der Betrachtungen im nächsten Abschnitt.

Als Beispiel einer Archimedischen Copula wird im Folgenden die *Clayton Copula* angeführt. Sie wird durch die Inverse der Laplace-Transformation einer Gamma-verteilten Zufallsvariablen erzeugt. Genauer, die latente Variable Θ ist Gamma-verteilt mit Parametern 1 und $1/\alpha$, $\alpha > 0$. Die Laplace-Transformation von Θ lautet¹⁷

$$\psi(t) = E[e^{-t\Theta}] = (1+t)^{-1/\alpha}. \quad (5.1.16)$$

Für die Inverse gilt somit

$$\psi^{-1}(t) = (t^{-\alpha} - 1), \quad (5.1.17)$$

was zur Clayton Copula

$$C_{\psi^{-1}}(u_1, \dots, u_n) = (1 + u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} + \dots + u_n^{-\alpha} - n)^{-1/\alpha} \quad (5.1.18)$$

führt. Wählt man für die Risiken X_1, \dots, X_n die Verteilungsfunktionen F_1, \dots, F_n und die Clayton Copula (5.1.18) als Abhängigkeitsstruktur, so lautet die gemeinsame Verteilung von X_1, \dots, X_n

$$G(x_1, \dots, x_n) = (1 + F_1(x_1)^{-\alpha} + \dots + F_n(x_n)^{-\alpha} - n)^{-1/\alpha}.$$

Da diese multivariate Verteilung eine Mischverteilung der Form (5.1.15) ist, sind die einzelnen Risiken bedingt unabhängig. Die bedingte Verteilung von X_i ($i = 1, \dots, n$), gegeben θ , ist durch

$$P(X_i \leq x_i | \Theta = \theta) = \exp(-\theta (F_i(x_i)^{-\alpha} - 1))$$

gegeben. Mehr Beispiele zu Archimedischen Copulas findet man beispielsweise in Nelsen (1999), Joe (1997) oder Frees und Valdez (1998).

Archimedische Copulas werden aufgrund ihrer Form oft zum Modellieren von Abhängigkeiten zwischen *austauschbaren Zufallsvariablen* verwendet. Man nennt X_1, \dots, X_n austauschbar, wenn für jede Permutation $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ die gemeinsame Verteilungsfunktion von $X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}$ mit der von X_1, \dots, X_n übereinstimmt. Da-

¹⁷Vgl. z.B. Frees und Valdez (1998).

mit sind austauschbare Zufallsvariablen insbesondere identisch verteilt. In dieser Arbeit werden im Abschnitt 5.2 austauschbare Risiken betrachtet, deren verbundene Verteilung mit Hilfe einer Mischverteilung dargestellt wird. Ausfallrisiken im Kreditrisikobereich werden beispielsweise oft anhand von austauschbaren Zufallsvariablen modelliert und sind in der Literatur im Zusammenhang mit Mischverteilungen bzw. Archimedischen Copulas oft anzutreffen. Zahlreiche Referenzen dazu findet man in McNeil et al. (2005, Abschnitt 8.4).

Bei der Untersuchung der Eigenschaften von Archimedischen Copulas, insbesondere der Abhängigkeitseigenschaften, kann man sich in der Regel auf die Untersuchung der Eigenschaften ihres Generators beschränken. Dies ist ein wesentlicher Vorteil von Archimedischen Copulas, der ihre Handhabung sehr erleichtert. Einzelheiten dazu kann man z.B. in Joe (1997), Nelsen (1999), Müller und Scarsini (2005) oder McNeil und Nešlehová (2007) nachlesen. Siehe dazu auch Abschnitt 5.2.4

Die meisten Archimedischen Copulas hängen nur von einem oder zwei Parametern ab und sind somit relativ unflexibel beim Anpassen an Datenbestände. Außerdem sind sie per Definition invariant unter Permutationen ihrer Komponenten. Damit sind alle k -dimensionalen Randverteilungen Archimedischer Copulas identisch. Dementsprechend ist beispielsweise die Stärke der Abhängigkeit zwischen jeweils zwei Risiken immer gleich, was die Einsatzmöglichkeiten von Archimedischen Copulas einschränkt. Für weitere kritische Anmerkungen zu Copulas im Allgemeinen wird auf Mikosch (2006) verwiesen.

Die Problematik der Erzeugung von Zufallszahlen (sampling) aus Archimedischen Copulas wird unter anderem in Whelan (2004), McNeil und Nešlehová (2007), McNeil (2008) und Hofert (2008) behandelt, für das Sampling aus allgemeinen Copulas siehe z.B. Embrechts et al. (2002). Zum Schätzen von Copulas gibt es eine Fülle von parametrischen, semi-parametrischen oder nicht-parametrischen Methoden. Eine gut lesbare Einführung zur Inferenz in Copula-Modellen findet man in Genest und Favre (2007). In Kim et al. (2007) werden parametrische Schätzmethoden mit der semi-parametrischen Methode von Genest et al. (1995) verglichen. Dabei stellt sich die Überlegenheit der semi-parametrischen Methode heraus. Schätzverfahren für Archimedische Copulas sind beispielsweise in Genest und Rivest (1993), Lambert (2007) oder Dimitrova et al. (2008) zu finden.

Die Modellierung von Abhängigkeiten zwischen diskreten Zufallsvariablen mit Hilfe von Copulas gestaltet sich schwierig, weil die Eindeutigkeit der zugehörigen Copula nicht gegeben ist (siehe Satz von Sklar 5.1.2). Ein empfehlenswerter Beitrag dazu, in dem auch das Problem der Inferenz in diskreten Copula-Modellen behandelt wird, haben Genest und Nešlehová (2007) verfasst. Darin finden sich auch zahlreiche Referenzen, die für dieses Thema relevant sind.

5.2 Ein zentraler Grenzwertsatz und „Large-Deviations“ für abhängige Risiken

In diesem Abschnitt wird die mathematische Struktur von Mischungsmodellen der Art (5.1.15) analysiert, die zum Modellieren von Abhängigkeitsstrukturen in großen Portfolios bestehend aus abhängigen Risiken verwendet werden. Diese multivariaten Modelle sind dadurch gekennzeichnet, dass ein externer Mechanismus (systematisches Risiko), beschrieben durch eine latente Zufallsvariable Θ , sämtliche Risiken beeinflusst und so die Abhängigkeit im Portfolio hervorruft¹⁸.

Im ersten Teil dieses Paragraphen wird die asymptotische Verteilung des durchschnittlichen Portfolio-Risikos mit Hilfe eines zentralen Grenzwertsatzes bestimmt. Diese Verteilung kann für große Portfolios zur Approximation der Verteilung des aggregierten Risikos herangezogen werden. Anschließend wird anhand asymptotischer Untersuchungen das stochastische Verhalten im Portfolio charakterisiert. Dabei stellt sich heraus, dass das stochastische Verhalten der Risiken innerhalb des Portfolios stark variieren kann, wenn der latente Faktor Θ einen beschränkten Wertebereich besitzt. Es gibt einen Teilbereich, auf den das systematische Risiko Einfluß hat. Dies führt beispielsweise zu hohen Portfolio-Verlusten oder simultanen Kreditausfällen. Außerhalb dieses Bereichs wirken die externen Faktoren nicht mehr. Hier verhalten sich die Risiken wie unabhängige Zufallsvariablen, für die man die typischen Diversifikationseffekte beobachten kann. Insbesondere fallen hier die Wahrscheinlichkeiten exponentiell mit der Anzahl der Risiken n im Portfolio ab. Dies bezeichnet man als „Large-Deviations“¹⁹-Verhalten, da die Werte aus solchen Bereichen üblicherweise große Abweichungen zu ihrem Mittelwert aufweisen²⁰. Das Large-Deviations-Verhalten wird zunächst für Bernoulli-verteilte

¹⁸Siehe auch die Erläuterungen auf S. 99.

¹⁹Englisch für „große Abweichungen“.

²⁰Man nennt diese Werte auch Extremwerte. Für die genaue Erläuterung des *Large-Deviations-Prinzips* siehe Definition 5.2.3.

Risiken und dann für beliebig verteilte Risiken gezeigt. Anhand von Beispielen werden die Anwendungsmöglichkeiten der Ergebnisse aufgezeigt. Es werden unter anderem *Collateralised Debt Obligations (CDOs)*²¹ betrachtet, Wertpapiere, die in den vergangenen Jahren stark an Popularität gewonnen haben. Im Anschluss daran werden die verschiedenen Möglichkeiten zur Auswahl der Verteilung von Θ diskutiert. Dies erfolgt im Zusammenhang mit dem sogenannten *Tail-Dependence*²²-Koeffizienten, der ein asymptotisches Maß für die Stärke der Abhängigkeit zweier Zufallsvariablen ist. Im abschließenden Paragraphen werden die Beweise für die Resultate geliefert. Die Ausführungen dieses Abschnitts folgen dem Artikel von Maier und Wüthrich (2009).

Das oben beschriebene stochastische Verhalten von Zufallsvariablen ist auch in anderen Gebieten der Wahrscheinlichkeitstheorie, wie beispielsweise der statistischen Physik, bekannt. Siehe dazu z.B. Dinwoodie und Zabell (1992).

Im Folgenden werden identisch verteilte Risiken X_1, \dots, X_n betrachtet, deren verbundene Verteilungsfunktion durch eine Mischverteilung der Art (5.1.15) gegeben ist. Die Randverteilungsfunktion der einzelnen X_i , $i = 1, \dots, n$, wird mit F bezeichnet. Weiterhin wird angenommen, dass der latente Faktor Θ eine Verteilungsfunktion F_Θ besitzt, für die $F_\Theta(0) = 0$ gilt. Mit ψ wird die Laplace-Transformation von Θ bezeichnet, welche streng monoton fallend ist und $\psi(0) = 1$ sowie $\psi(\infty) = 0$ erfüllt²³. Damit gilt für alle $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$G(x_1, \dots, x_n) = \int_0^\infty \prod_{i=1}^n \exp(-\psi^{-1}(F(x_i)))^\theta dF_\Theta(\theta). \quad (5.2.1)$$

Die Risiken X_1, \dots, X_n sind unter der Bedingung $\Theta = \theta$ unabhängig und identisch verteilt. Die bedingten Randverteilungen sind durch

$$P(X_i \leq x_i | \Theta = \theta) = \exp(-\theta \psi^{-1}(F(x_i))) \quad (5.2.2)$$

gegeben. Aus formalen Gründen wird zusätzlich angenommen, dass die Risiken X_i nicht-negativ sind.

Wie im letzten Abschnitt gezeigt wurde, können multivariate Verteilungsfunktionen der Form (5.2.1) mit Hilfe von Archimedischen Copulas dargestellt werden. Diese werden

²¹Englisch für „forderungsbesicherte Schuldverschreibungen“. Siehe dazu Beispiel 5.2.10.

²²Englisch für „Abhängigkeit in den Enden (Tails) der Verteilung“.

²³Siehe dazu die Definition (5.1.9) der Laplace-Transformation.

durch ψ^{-1} erzeugt und haben die Gestalt (5.1.10).

5.2.1 Zentraler Grenzwertsatz

Den Erwartungswert einer nicht-negativen Zufallsvariablen X_1 kann man unter Verwendung ihrer Verteilungsfunktion F als

$$E[X_1] = \int_0^{\infty} (1 - F(x)) \, dx$$

darstellen²⁴. Für den bedingten Erwartungswert von X_1 gegeben $\Theta = \theta$ gilt dann

$$E[X_1 | \Theta = \theta] = \int_0^{\infty} 1 - \exp(-\theta \cdot \psi^{-1}(F(x))) \, dx.$$

Dies führt zur folgenden Darstellung für die bedingte Erwartung von X_1 unter Θ , welche im Folgenden mit $A(\Theta)$ bezeichnet wird:

$$A(\Theta) = E[X_1 | \Theta] = \int_0^{\infty} 1 - \exp(-\Theta \cdot \psi^{-1}(F(x))) \, dx. \quad (5.2.3)$$

Die Funktion $A(\cdot)$ ist stetig und streng monoton steigend. Damit ist sie auch invertierbar. Nun kann der zentrale Grenzwertsatz für das Portfolio-Risiko formuliert werden.

Satz 5.2.1 (Zentraler Grenzwertsatz) *Die multivariate Verteilungsfunktion von X_1, \dots, X_n ($n \geq 1$) sei durch (5.2.1) gegeben und die Randverteilungsfunktion F habe ein endliches erstes Moment. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \leq x \right] = P[A(\Theta) \leq x] = F_{\Theta}(A^{-1}(x)), \quad (5.2.4)$$

wobei F_{Θ} die Verteilungsfunktion der latenten Variablen Θ bezeichnet.

Beweis: Siehe Abschnitt 5.2.5.1. □

Um die asymptotische Verteilung aus (5.2.4) für eine konkrete Verteilung von Θ bzw. für eine konkrete Archimedische Copula zu erhalten, muss die Inverse A^{-1} berechnet und entsprechend in die Verteilungsfunktion von Θ eingesetzt werden. Diese Verteilung kann beispielsweise zur Approximation der Gesamtschadenverteilung für große Kreditrisiko- und Versicherungs-Portfolios herangezogen werden.

²⁴Zum Beweis siehe z.B. Denuit et al. (2005), S. 24.

Der Satz 5.2.1 verallgemeinert ein Ergebnis aus Schönbucher (2004) zu Kreditrisiko-Portfolios. Schönbucher betrachtet einen Spezialfall der Mischverteilung (5.2.1). Er nimmt an, dass die Ränder der Mischverteilung Bernoulli-verteilt sind. Auch in McNeil et al. (2005, Abschnitt 8.4.3) wird eine Grenzverteilung für den durchschnittlichen Portfolioverlust bestimmt. McNeil et al. gehen allerdings von einem Bernoulli-Mischungsmodell aus, das von dem hier betrachteten Mischungsmodell abweicht.

Im Folgenden wird die rechte Seite von (5.2.4) analysiert. Hierzu wird das Supremum des Trägers²⁵ von Θ durch

$$\Theta_M = \sup\{\theta \in \mathbb{R} \mid F_\Theta(\theta) < 1\} \quad (5.2.5)$$

definiert. Analog wird das Infimum des Trägers von Θ durch Θ_m bezeichnet. Es ist gegeben durch

$$\Theta_m = \inf\{\theta \in \mathbb{R} \mid F_\Theta(\theta) > 0\}. \quad (5.2.6)$$

Unter Verwendung des Lemmas A.0.16 in Anhang A erhält man

$$x \geq A(\Theta_M) \iff A^{-1}(x) \geq \Theta_M \iff F_\Theta(A^{-1}(x)) = 1 \quad (5.2.7)$$

und

$$x < A(\Theta_m) \iff A^{-1}(x) < \Theta_m \implies F_\Theta(A^{-1}(x)) = 0. \quad (5.2.8)$$

Das bedeutet, dass der Träger des latenten Faktors Θ den Träger der Grenzverteilung aus Satz 5.2.1 bestimmt. Ist $\Theta_m > 0$ oder $\Theta_M < \infty$, so verschiebt sich der Träger der Grenzverteilung gemäß (5.2.7) bzw. (5.2.8). Diese Beobachtung wird in den nächsten Paragraphen näher erläutert (siehe Abschnitt 5.2.2 und 5.2.3).

Beispiel 5.2.2 (Kreditrisiko-Ausfälle für große Portfolios)

Gegenstand der Betrachtung ist ein Kreditrisiko-Portfolio bestehend aus n Risiken. Das Ausfallrisiko X_i jedes Schuldners $i = 1, \dots, n$ wird mit Hilfe einer Bernoulli Verteilung modelliert, die den Wert 1 mit der Wahrscheinlichkeit p und den Wert 0 mit der Wahrscheinlichkeit $1 - p$ annimmt. $X_i = 1$ bedeutet, dass das Risiko i ausfällt. Demnach gibt $\sum_{i=1}^n X_i$ die Anzahl der Ausfälle innerhalb des Portfolios an. Die latente Variable Θ übernimmt die Rolle der externen ökonomischen Faktoren, die das gesamte Portfolio

²⁵Man bezeichnet oft den Wertebereich einer Zufallsvariablen Θ als Träger von Θ . Er ist definiert als $\text{supp}(\Theta) = \{\theta : f_\Theta(\theta) > 0\}$, wobei f_Θ die Wahrscheinlichkeits- bzw. Dichtefunktion von Θ ist.

beeinflussen. Nach (5.2.3) ist die bedingte Erwartung von X_1 unter Θ durch

$$A(\Theta) = E[X_1 | \Theta] = 1 - \exp(-\Theta \cdot \psi^{-1}(1-p)) \quad (5.2.9)$$

gegeben. Damit gilt für alle $x \in [1 - \exp(-\Theta_M \cdot \psi^{-1}(1-p)), 1]$

$$F_{\Theta}(A^{-1}(x)) = F_{\Theta}\left(-\frac{\log(1-x)}{\psi^{-1}(1-p)}\right) = 1. \quad (5.2.10)$$

Für alle $x \in [0, 1 - \exp(-\Theta_m \cdot \psi^{-1}(1-p))]$ ergibt sich analog

$$F_{\Theta}(A^{-1}(x)) = F_{\Theta}\left(-\frac{\log(1-x)}{\psi^{-1}(1-p)}\right) = 0. \quad (5.2.11)$$

Der Wertebereich von $\sum_{i=1}^n X_i/n \in [0, 1]$ kann also in drei disjunkte Mengen unterteilt werden. Das sind

$$\begin{aligned} D_1 &= [0, A(\Theta_m)) = [0, 1 - \exp(-\Theta_m \cdot \psi^{-1}(1-p))], \\ D_2 &= [1 - \exp(-\Theta_m \cdot \psi^{-1}(1-p)), 1 - \exp(-\Theta_M \cdot \psi^{-1}(1-p))], \\ D_3 &= [A(\Theta_M), 1] = [1 - \exp(-\Theta_M \cdot \psi^{-1}(1-p)), 1], \end{aligned} \quad (5.2.12)$$

mit $D_1 \cup D_2 \cup D_3 = [0, 1]$. Auf dem Bereich D_2 wird das stochastische Verhalten des Anteils $\sum_{i=1}^n X_i/n$ der Kreditausfälle durch den zentralen Grenzwertsatz 5.2.1 sowie (5.2.7) und (5.2.8) beschrieben. Auf $D_1 \cup D_3$ erhält man ein Large-Deviations-Verhalten (siehe Abschnitt 5.2.2).

Nun wird für die Verteilung des latenten Faktors Θ eine explizite Wahl getroffen. F_{Θ} sei die Gleichverteilung auf $(1, 2)$. Die Laplace-Transformation lautet dann

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \frac{1}{t}(e^{-t} - e^{-2t}) \quad \text{für } t > 0, \\ \psi(0) &= 1. \end{aligned} \quad (5.2.13)$$

Da die Inverse ψ^{-1} analytisch nicht in einer geschlossenen Form darstellbar ist, wählt man $\psi^{-1}(1-p) = t = 0,02$ und erhält somit die Ausfallwahrscheinlichkeit

$$p = 1 - \psi(0,02) = 1 - (e^{-0,02} - e^{-0,04}) / 0,02 = 0,00295, \quad (5.2.14)$$

also 2,95%, und die drei Bereiche

$$\begin{aligned} D_1 &= [0, 1 - \exp(-0,02)) = [0\%, 1,98\%), \\ D_2 &= [1 - \exp(-0,02), 1 - \exp(-0,04)) = [1,98\%, 3,92\%), \\ D_3 &= [1 - \exp(-0,04), 1] = [3,92\%, 100\%). \end{aligned} \quad (5.2.15)$$

Wird davon ausgegangen, dass ein Kreditrisiko-Portfolio mit einem Rating vorliegt, das einer Ausfallwahrscheinlichkeit von $p = 2,95\%$ entspricht, so kann heuristisch Folgendes abgeleitet werden: Auf dem Bereich $D_2 = [1,98\%, 3,92\%)$ sind Marktbewegungen zu beobachten. Hier wirken externe Faktoren, welche die Ausfallwahrscheinlichkeit des gesamten Portfolios verändern können.

In diesem Beispiel wurden nur Bernoulli-verteilte Ränder betrachtet. Der Grenzwertsatz 5.2.1 kann natürlich auch auf beliebige nicht-negative Schadenhöhenverteilungen angewendet werden. Allerdings ist die Berechnung der bedingten Erwartung von X_1 unter Θ im Allgemeinen nur mit numerischen Verfahren möglich. Da das Ziel dieser Arbeit die Ermittlung analytischer Ergebnisse ist, wird auf numerische Beispiele verzichtet. Ein weiteres, anwendungsbezogenes Beispiel zu Collateralised Debt Obligations (CDOs) wird im nächsten Abschnitt angeführt.

5.2.2 Large-Deviations-Verhalten für Bernoulli-verteilte Ränder

Im letzten Abschnitt wurde gezeigt, dass unter bestimmten Bedingungen an Θ , der Wertebereich des Anteils $\sum_{i=1}^n X_i/n$ der Kreditausfälle in drei verschiedene Bereiche unterteilt werden kann. Auf dem Bereich $D_2 = [A(\Theta_m), A(\Theta_M))$ verhalten sich die Risiken gemäß dem Zentralen Grenzwertsatz 5.2.1. Hier kann man den Einfluss der externen Faktoren beobachten. Auf den Bereichen D_1 und D_3 verschwinden die Wahrscheinlichkeiten für $n \rightarrow \infty$. Da diese Wahrscheinlichkeiten Auskunft über das Eintreten von seltenen Ereignissen geben, sind sie für das Risikomanagement von großem Interesse. In diesem Abschnitt werden sie anhand probabilistischer Abschätzungen näher untersucht. Unter Verwendung des Gärtner-Ellis-Theorems²⁶, wird das Large-Deviations-Prinzip (kurz LDP) auf D_1 und D_3 nachgewiesen. Das LDP charakterisiert die logarithmische Konvergenzrate von Wahrscheinlichkeiten durch Angabe von Unter- und Oberschranken mit Hilfe einer sogenannten *Rate-Function*. Das Gärtner-Ellis-Theorem gibt hin-

²⁶Siehe Theorem 5.2.6 weiter unten.

reichende Bedingungen für die Existenz einer Unter- und Obergrenze an. Existieren beide Schranken, so ist das LDP erfüllt und man spricht von einem Large-Deviations-Verhalten der Wahrscheinlichkeiten. Mit Hilfe zweier Beispiele werden die Ergebnisse dieses Abschnitts verdeutlicht.

Die genaue Definition des Large-Deviations-Prinzips lautet wie folgt (siehe Dembo und Zeitouni (1998, Abschnitt 1.2)):

Definition 5.2.3 *Eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf \mathbb{R} erfüllt das LDP mit der Rate-Function Γ , falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(a) *Für alle abgeschlossenen Mengen $A \subset \mathbb{R}$ gilt*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \log P_n(A) \leq - \inf_{x \in A} \Gamma(x). \quad (5.2.16)$$

(b) *Für alle offenen Mengen $B \subset \mathbb{R}$ gilt*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \log P_n(B) \geq - \inf_{x \in B} \Gamma(x). \quad (5.2.17)$$

Erfüllt eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ das LDP auf einem Bereich $D \subset \mathbb{R}$, dann besitzen die Wahrscheinlichkeiten $P_n(A)$ für alle $A \subset D$ asymptotische, exponentielle Ober- und Untergrenzen. Dies bedeutet insbesondere, dass die Wahrscheinlichkeiten auf D asymptotisch exponentiell abfallen. Außerdem können sie bei Kenntnis der Rate-Function Γ mit Hilfe der Schranken sehr genau abgeschätzt werden, was für die Eintrittswahrscheinlichkeiten von seltenen Ereignissen überaus wichtig ist. Sollte der Spezialfall

$$\inf_{x \in (a,b)} \Gamma(x) = \inf_{x \in [a,b]} \Gamma(x) \quad (5.2.18)$$

eintreten, so hat man ein LDP mit einem konkreten Grenzwert, d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P_n([a, b]) = - \inf_{x \in [a,b]} \Gamma(x). \quad (5.2.19)$$

Dieses ermöglicht für große n die Approximation der Wahrscheinlichkeiten $P_n([a, b])$ durch $\exp\left(-n \cdot \inf_{x \in [a,b]} \Gamma(x)\right)$.

Um das Gärtner-Ellis-Theorem vorstellen zu können, müssen noch einige Notationen eingeführt werden.

Für eine Folge von reellwertigen Zufallsvariablen $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist die sogenannte *kumulantenerzeugende Funktion* durch

$$\Lambda_n(\lambda) = \log E[\exp(\lambda \cdot Z_n)], \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (5.2.20)$$

definiert. Die zu $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gehörenden Wahrscheinlichkeitsmaße werden mit $P_n(A) = P(Z_n \in A)$ ($A \subseteq \mathbb{R}$) bezeichnet. Die Existenz eines Grenzwerts für die Folge der passend skalierten kumulantenerzeugenden Funktionen ist die wichtigste Voraussetzung im Gärtner-Ellis-Theorem. Für die Anwendbarkeit des Gärtner-Ellis-Theorems ist die folgende Annahme zentral:

Annahme 5.2.4 *Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert der Grenzwert*

$$\Lambda(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \Lambda_n(n\lambda) \quad (5.2.21)$$

als erweiterte reelle Zahl²⁷. Weiterhin gehört Null zum Inneren²⁸ der Menge $\mathcal{D}_\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \Lambda(\lambda) < \infty\}$.

Die *Fenchel-Legendre-Transformation* von Λ ist definiert durch

$$\Lambda^*(x) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} (\lambda \cdot x - \Lambda(\lambda)). \quad (5.2.22)$$

Eine letzte Definition ist nunmehr nötig, bevor das Gärtner-Ellis-Theorem formuliert werden kann (siehe Definition 2.3.3 aus Dembo und Zeitouni (1998)).

Definition 5.2.5 *Ein Punkt $y \in \mathbb{R}$ heißt exponierter Punkt von $\Lambda^*(x)$, wenn ein $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert, so dass für alle $x \neq y$*

$$\lambda \cdot y - \Lambda^*(y) > \lambda \cdot x - \Lambda^*(x) \quad (5.2.23)$$

gilt. Ein $\lambda \in \mathbb{R}$, das (5.2.23) erfüllt, nennt man exponierende Hyperebene für y .

Da diese Definition relativ technisch ist, wird ein anderes etwas anschaulicheres Kriterium für exponierte Punkte und exponierende Hyperebenen angegeben: Falls $y = \Lambda'(\eta)$ für ein η aus dem Inneren von \mathcal{D}_Λ gilt, dann ist y ein exponierter Punkt und η ist die

²⁷Die erweiterten reellen Zahlen sind durch $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ definiert. Damit werden Folgen, für die $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ bzw. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ gilt, als konvergent angesehen.

²⁸Das Innere einer Menge A ist die größte offene Teilmenge, die in A enthalten ist. Z.B. ist das Innere des Intervalls $[a, b) \subset \mathbb{R}$ das offene Intervall (a, b) . Mehr dazu findet man beispielsweise in Hairer und Wanner (1996), S. 278 ff.

exponierende Hyperebene für y . Außerdem nimmt dann Λ^* die folgende einfache Form an²⁹:

$$\Lambda^*(y) = \eta y - \Lambda(\eta) \quad (5.2.24)$$

Dies bedeutet, dass für ein solches y das Supremum in (5.2.22) für $\lambda = \eta$ angenommen wird.

Das Gärtner-Ellis-Theorem kann nun wie folgt präsentiert werden.

Theorem 5.2.6 (Gärtner-Ellis) *Die Annahme 5.2.4 sei erfüllt. Dann gelten folgende Aussagen:*

(a) *Für alle abgeschlossenen Mengen $A \subset \mathbb{R}$ gilt*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \log P_n(A) \leq - \inf_{x \in A} \Lambda^*(x). \quad (5.2.25)$$

(b) *Für alle offenen Mengen $B \subset \mathbb{R}$ gilt*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \log P_n(B) \geq - \inf_{x \in B \cap \mathcal{F}} \Lambda^*(x), \quad (5.2.26)$$

wobei \mathcal{F} die Menge aller exponierten Punkte von Λ^* bezeichnet, deren exponierende Hyperebene zum Inneren von \mathcal{D}_Λ gehört.

Beweis: Siehe Dembo und Zeitouni (1998), S. 48 ff. □

Wird die Voraussetzung des Gärtner-Ellis-Theorems von einer Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen erfüllt, dann erfüllt sie auch das LDP, falls $B \cap \mathcal{F} = B$ für alle offenen Mengen B gilt.

Im Folgenden werden Ausfallrisiken X_i ($i = 1, \dots, n$) betrachtet, die Bernoulli-verteilt sind (siehe Beispiel 5.2.2) und deren gemeinsame Verteilungsfunktion durch die Mischverteilung (5.2.1) gegeben ist. Den Anteil der Kreditausfälle definiert man als

$$Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i. \quad (5.2.27)$$

Zur Vereinfachung der Notation wird zudem

$$h_\lambda(\theta) = e^{-\theta \cdot \psi^{-1}(1-p)} + e^\lambda \left(1 - e^{-\theta \cdot \psi^{-1}(1-p)} \right) \quad (5.2.28)$$

²⁹Zum Beweis siehe Dembo und Zeitouni (1998), S. 46.

definiert³⁰. Wie man dem nachfolgenden Lemma entnehmen kann, erfüllt die durch (5.2.27) definierte Folge von Zufallsvariablen die Annahme 5.2.4 des Gärtner-Ellis-Theorems.

Lemma 5.2.7 *Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Für die in (5.2.27) definierte Folge von Zufallsvariablen existiert der Grenzwert*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \Lambda_n(n\lambda) = \sup_{\theta \in \text{supp}(\Theta)} \log h_\lambda(\theta) = \Lambda(\lambda) \quad (5.2.29)$$

und ist endlich. Hierbei bezeichnet $\text{supp}(\Theta)$ den Träger des latenten Faktors Θ .

Beweis: Siehe Abschnitt 5.2.5.2, S. 124 f. □

Die Fenchel-Legendre-Transformation von Λ nimmt nun die Gestalt

$$\Lambda^*(x) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \left(\lambda \cdot x - \sup_{\theta \in \text{supp}(\Theta)} \log h_\lambda(\theta) \right) \quad (5.2.30)$$

an. Das Gärtner-Ellis-Theorem 5.2.6 kann jetzt auf die beschriebene Situation angewendet werden:

Satz 5.2.8 *Die multivariate Verteilungsfunktion des Zufallsvektors (X_1, \dots, X_n) sei durch die Mischverteilung (5.2.1) mit Bernoulli-verteilten Rändern definiert. Dann gelten folgende Aussagen:*

(a) *Für alle abgeschlossenen Mengen $A \subset [0, 1]$ gilt*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \log P \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \in A \right] \leq - \inf_{x \in A} \Lambda^*(x). \quad (5.2.31)$$

(b) *Für alle offenen Mengen $B \subset [0, 1]$ gilt*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \log P \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \in B \right] \geq - \inf_{x \in B \cap \mathcal{F}} \Lambda^*(x), \quad (5.2.32)$$

wobei \mathcal{F} die Menge der exponierten Punkte von Λ^* bezeichnet.

Damit ist das LDP noch nicht erfüllt. Um Aussagen über exponierte Punkte und exponierende Hyperebenen treffen zu können, muss die Differenzierbarkeit von Λ untersucht werden. Hierzu noch ein paar Bemerkungen:

³⁰ $h_\lambda(\theta)$ entspricht dem bedingten Erwartungswert $E[e^{\lambda X_1} | \Theta = \theta]$.

- Aus der weiter unten stehenden Gleichung (5.2.67) erhält man

$$\sup_{\theta \in \text{supp}(\Theta)} h_\lambda(\theta) = \begin{cases} h_\lambda(\Theta_M) & \lambda > 0, \\ 0 & \lambda = 0, \\ h_\lambda(\Theta_m) & \lambda < 0. \end{cases} \quad (5.2.33)$$

Demzufolge ist die Funktion Λ im Falle von $\Theta_M \neq \Theta_m$ in 0 nicht differenzierbar.

- Ist $\Theta_M = \Theta_m$, dann sind die Ausfallrisiken X_i stochastisch unabhängig. Auf dem gesamten Intervall $[0, 1]$ gilt das klassische Large-Deviation-Prinzip für unabhängige Zufallsvariablen. Die Rate-Function lautet in diesem Fall

$$\Lambda^*(x) = x \log \left(\frac{x}{p} \right) + (1-x) \log \left(\frac{1-x}{1-p} \right) \quad (5.2.34)$$

für $x \in [0, 1]$.³¹

- Ist $\Theta_M = \infty$, dann gilt (siehe (5.2.68))

$$\Lambda(\lambda) = \begin{cases} \lambda & \lambda \geq 0, \\ \log h_\lambda(\Theta_m) & \lambda < 0. \end{cases} \quad (5.2.35)$$

- Ist $\Theta_m = 0$, dann gilt (siehe (5.2.68))

$$\Lambda(\lambda) = \begin{cases} \log h_\lambda(\Theta_M) & \lambda > 0, \\ 0 & \lambda \leq 0. \end{cases} \quad (5.2.36)$$

Mit diesen Vorbereitungen kann die Menge der exponierten Punkte und die Rate-Function Λ^* berechnet werden. Alle $x \in [0, A(\Theta_m))$ und $x \in [A(\Theta_M), 1]$ erweisen sich als exponierte Punkte (siehe Folgerung 5.2.9). Dies führt zu einem Large-Deviations-Verhalten auf D_1 und D_3 . In diesem speziellen Fall liegt sogar ein LDP mit einem konkreten Grenzwert vor (siehe auch (5.2.19)).

Folgerung 5.2.9 *Die multivariate Verteilungsfunktion des Zufallsvektors (X_1, \dots, X_n) sei durch die Mischverteilung (5.2.1) mit Bernoulli-verteilten Rändern definiert. Dann gelten folgende Aussagen:*

³¹Siehe Theorem 2.3.6 (c) und Aufgabe 2.2.23 in Dembo und Zeitouni (1998).

(a) Sei $\Theta_M < \infty$. Für alle $x \in (A(\Theta_M), 1]$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \geq x \right) = -\Lambda^*(x) \quad (5.2.37)$$

mit

$$\Lambda^*(x) = x \log \left(\frac{x}{1 - e^{-\Theta_M \cdot \psi^{-1}(1-p)}} \right) + (1-x) \cdot \log \left(\frac{1-x}{e^{-\Theta_M \cdot \psi^{-1}(1-p)}} \right). \quad (5.2.38)$$

(b) Sei $\Theta_m > 0$. Für alle $x \in [0, A(\Theta_m))$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \leq x \right) = -\Lambda^*(x) \quad (5.2.39)$$

mit

$$\Lambda^*(x) = x \log \left(\frac{x}{1 - e^{-\Theta_m \cdot \psi^{-1}(1-p)}} \right) + (1-x) \cdot \log \left(\frac{1-x}{e^{-\Theta_m \cdot \psi^{-1}(1-p)}} \right). \quad (5.2.40)$$

Beweis: Siehe Abschnitt 5.2.5.2, S. 126 f. □

Die Rate-Function Λ^* sieht der Rate-Function aus dem unabhängigen Fall (siehe (5.2.34)) sehr ähnlich. Man muss lediglich p in (5.2.34) durch

$$1 - e^{-\Theta_M \cdot \psi^{-1}(1-p)} \quad \text{bzw.} \quad 1 - e^{-\Theta_m \cdot \psi^{-1}(1-p)} \quad (5.2.41)$$

ersetzen.

Um die Resultate zu veranschaulichen wird das Kreditrisiko-Beispiel aufgenommen und ein weiteres Beispiel zu CDOs angeführt, das dem Modell von Li (2000) folgt.

Beispiel 5.2.2 - Fortsetzung

Laut zentralem Grenzwertsatz 5.2.1 gilt für $x \in [0\%, 1.98\%)$ und $y \in (3.92\%, 100\%]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \leq x \right) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \geq y \right) = 0. \quad (5.2.42)$$

Mit Hilfe der Theorie der Large-Deviations kann das asymptotische Verhalten dieser Wahrscheinlichkeiten genauer charakterisiert werden. Auf den Bereichen D_1 und D_3

kann man ein Large-Deviations-Verhalten beobachten. Wird z.B. ein

$$x \in D_1 = [0\%, 1.98\%) \quad (5.2.43)$$

gewählt, so erhält man das asymptotische Verhalten

$$P \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \leq x \right) \approx \exp(-n \cdot \Lambda^*(x)) \quad (5.2.44)$$

mit

$$\Lambda^*(x) = x \log \left(\frac{x}{1.98\%} \right) + (1-x) \cdot \log \left(\frac{1-x}{98.02\%} \right). \quad (5.2.45)$$

Außerhalb von D_2 fallen also die Wahrscheinlichkeiten exponentiell mit n ab. Heuristisch bedeutet dies, dass für große n auf D_1 und D_3 Diversifikationseffekte, entsprechend denen für unabhängige Zufallsvariablen, vorliegen. Diese Regionen werden somit für große Portfolios nicht mehr von systematischen Risiken beeinflusst.

Beispiel 5.2.10 (Verlustverteilung für große CDO-Portfolios)

Collateralised Debt Obligations³² (CDO) gehören zu den forderungsbesicherten Wertpapieren (Asset Backed Securities), die durch ein Referenzportfolio bestehend aus Assets (z.B. Darlehen, Anleihen, Credit Default Swaps) gedeckt sind. Das Referenzportfolio wird an eine Zweckgesellschaft (Special Purpose Vehicle) verkauft, die das Portfolio in mehrere Tranchen, in der Regel Senior-Tranche, Mezzanine-Tranche und Equity-Tranche, mit unterschiedlichen Ausfallrisiken und Zinssätzen zerlegt. Diese werden dann als CDO-Wertpapiere mit einer bestimmten Laufzeit verkauft. Der Besitz eines CDO-Wertpapiers berechtigt zum Bezug des Cashflows (Zins, Tilgung) aus dem Referenzportfolio. Die Verteilung erfolgt entsprechend ihrer Rangfolge, zuerst wird die Senior-Tranche, dann die Mezzanine-Tranche und zum Schluss die Equity-Tranche bedient. Verluste bzw. Ausfälle werden in umgekehrter Reihenfolge von den Tranchen getragen. Die ersten Verluste treffen nur die Equity-Tranche. Erst wenn die Portfolio-Verluste eine festgelegte Grenze übersteigen, erleidet auch die Mezzanine-Tranche einen Schaden. Nur bei sehr hohen Verlusten, wird schließlich auch die Senior-Tranche getroffen. Die Equity-Tranche trägt das höchste Ausfallrisiko. Das wird mit dem höchsten Zinskupon ausgeglichen³³.

³²Auf Deutsch: forderungsbesicherte Schuldverschreibungen

³³Siehe beispielsweise Schönbucher (2003), S. 46 ff. oder Hull (2009), S. 538 ff.

Mit Hilfe der CDOs kann das Risiko des Referenzportfolios auf Investoren umverteilt werden. Sie dienen auf diese Weise der Refinanzierung der Kreditinstitute. Von Vorteil ist, dass CDOs so konstruiert werden können, dass die jeweiligen Risikoneigungen der Investoren befriedigt werden. Selbst wenn das Referenzportfolio eine hohe Ausfallwahrscheinlichkeit aufwies, war es in den vergangenen Jahren möglich, durch Konzentration des Ausfallrisikos in einer kleinen, untersten Tranche, einen hohen Anteil an CDO-Wertpapieren zu schaffen, die von Rating-Agenturen als erstklassig eingestuft wurden. Eine gut gegliederte CDO konnte teilweise einen Gesamtpreis erzielen, der höher als die Summe der Marktpreise der Referenz-Assets war³⁴. Die hohe Verzinsung und die guten Ratings ließen die Nachfrage nach CDOs in den letzten Jahren rasant ansteigen. Es wurden CDOs geschaffen, die wiederum CDO-Tranchen als Referenz-Assets hatten. Auf diese Weise entstanden regelrechte Verbriefungsketten, die sehr unübersichtlich und komplex waren und oft auf Portfolios mit Krediten bonitätsschwacher Schuldner basierten. Seit Mitte 2007, als sich die Finanzkrise schon abzeichnete, kam es zu Herabstufungen von CDO-Tranchen um mehrere Ratingstufen. Dies führte zu einem hohen Preisverfall innerhalb kurzer Zeit und zu einer globalen Vertrauenserschütterung, so dass die Papiere unverkäuflich wurden. Dies zeigt, dass die Risiken dieser Papiere nicht adäquat beurteilt worden sind³⁵. Das Ausfallrisiko der CDO-Tranchen ist direkt an das Ausfallrisiko des Referenzportfolios gekoppelt. Durch eine geeignete Messung des Portfolio-Risikos unter Berücksichtigung von Ausfall-Abhängigkeiten der Referenz-Assets kann das Risiko der CDO-Wertpapiere angemessen eingeschätzt werden und beim Rating berücksichtigt werden. Die Quantifizierung des Portfolio-Risikos in Form einer Verlustverteilung ist Gegenstand dieses Beispiels.

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine CDO-Tranche bzw. ein CDO-Wertpapier einen Verlust erleidet oder ganz ausfällt hängt von der Verlustverteilung des Referenzportfolios ab. Für die Bestimmung der Verlustverteilung wird das Modell von Li (2000) herangezogen. Li modelliert die Abhängigkeiten zwischen den Ausfallzeiten der Referenz-Assets mit Hilfe einer Gauß-Copula. Hier wird jedoch eine Archimedische Copula verwendet. Es wird eine CDO mit der Laufzeit T betrachtet. Das Referenzportfolio bestehe aus n Referenz-Assets mit identischen Nominalwerten N , identischen Laufzeiten T sowie identischen Recovery-Raten π .

Die Ausfallzeit des Referenz-Assets i wird mit Hilfe einer Zufallsvariablen Y_i ($i = 1, \dots, n$) modelliert. Die Ausfallzeiten Y_i werden als identisch verteilt und bezüglich einer latenten Variablen Θ als bedingt unabhängig angenommen. Mit F sei die Verteilung

³⁴Vgl. dazu Schönbucher (2003), S. 46.

³⁵Vgl. Hamerle und Plank (2008).

der einzelnen Ausfallzeiten Y_i bezeichnet. Die verbundene n -dimensionale Verteilungsfunktion der Ausfallzeiten wird mittels einer Archimedischen Copula $C_{\psi^{-1}}$ definiert:

$$P(Y_1 \leq t_1, \dots, Y_n \leq t_n) = C_{\psi^{-1}}(F(t_1), \dots, F(t_n)).$$

Weiterhin wird für jedes i die Indikatorvariable $X_i = \mathbb{1}_{\{Y_i > t\}}$ eingeführt, die 0 ist, falls Asset i bis zum Zeitpunkt t ausfällt. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine gegebene Teilmenge von Referenz-Assets $I_D \subseteq \{1, \dots, n\}$ bis zum Zeitpunkt t ausfällt, ist daher durch

$$C_{\psi^{-1}}(F(t_1), \dots, F(t_n))$$

mit $t_i = t$ für $i \in I_D$ und $t_i = 1$ für $i \notin I_D$, gegeben. Bei gegebenem Wert $\Theta = \theta$ sind die einzelnen Ausfallzeiten unabhängig und deren Wahrscheinlichkeit ist durch

$$P(X_1 = 0 | \theta) = P(Y_1 \leq t | \theta) = \exp\{-\theta \cdot \psi^{-1}(F(t))\}$$

gegeben. Damit erhält man für die bedingte Erwartung von X_1 unter Θ

$$A(\Theta) = 1 - \exp\{-\Theta \cdot \psi^{-1}(F(t))\},$$

was zur folgenden Grenzverteilung für den Anteil der Ausfälle $1 - \sum_{i=1}^n X_i/n$ im Portfolio zum Zeitpunkt t führt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \leq x\right) = 1 - P(A(\Theta) < 1 - x) = 1 - P\left(\Theta < -\frac{\log x}{\psi^{-1}(F(t))}\right)$$

für allgemeines Θ und

$$1 - F_{\Theta}\left(-\frac{\log x}{\psi^{-1}(F(t))}\right)$$

für stetiges Θ .

Aufgrund der identischen Nominalwerte und Recovery-Raten ergibt sich der Verlust im Referenzportfolio zum Zeitpunkt t direkt aus dem Anteil der Ausfälle zum Zeitpunkt t . Demnach genügt es, wenn sich die Betrachtungen auf den Anteil der Ausfälle im Referenzportfolio zum Zeitpunkt t beschränken.

Auch hier kann der Wertebereich in drei Bereiche mit unterschiedlichem stochastischem Verhalten unterteilt werden. Auf dem Bereich

$$D_1(t) \cup D_3(t) = [0, \exp \{-\Theta_M \cdot \psi^{-1}(F(t))\}] \cup (\exp \{-\Theta_m \cdot \psi^{-1}(F(t))\}, 1] \quad (5.2.46)$$

kann man ein Large-Deviations-Verhalten mit exponentiellen Abfall der Wahrscheinlichkeiten mit wachsendem n beobachten. Auf

$$D_2(t) = (\exp \{-\Theta_M \cdot \psi^{-1}(F(t))\}, \exp \{-\Theta_m \cdot \psi^{-1}(F(t))\}] \quad (5.2.47)$$

wirken die systematischen Risiken und beeinflussen die Ausfallwahrscheinlichkeiten im Referenzportfolio.

Schließlich werden für die Ausfallzeiten Y_i und für die latente Variable Θ explizite Verteilungen gewählt. Die Laufzeit der CDO wird auf $T = 5$ festgelegt. Wird für Θ wieder die Gleichverteilung auf $(1, 2)$ und für die Ausfallzeiten die Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda = 0,05$ gewählt, so erhält man die individuelle Ausfallwahrscheinlichkeit $P(X_1 = 0) = G(2) = 1 - \exp(-0,05 \cdot 2) = 0,095$ zum Zeitpunkt $t = 2$ und die drei Bereiche

$$D_1(2) = [0\%, 3,75\%]; \quad D_2(2) = (3,75\%, 19,4\%]; \quad D_3(2) = (19,4\%, 100\%].$$

Für $x \in (19,4\%, 100\%]$ ergibt sich beispielsweise das asymptotische Verhalten

$$P\left(1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \geq x\right) \approx \exp(-n \cdot \Lambda^*(x))$$

mit der Rate-Function

$$\Lambda^*(x) = (1 - x) \log\left(\frac{1 - x}{80,6\%}\right) + x \cdot \log\left(\frac{x}{19,4\%}\right). \quad (5.2.48)$$

Außerhalb von $D_2(2)$ hat man das typische Large-Deviations-Verhalten. Auf diesen Bereichen verhalten sich die Risiken wie unabhängige Zufallsvariablen, d.h. die Ausfälle erfolgen unabhängig voneinander.

Aus (5.2.47) kann man erkennen, dass der Bereich $D_2(t)$ größer wird, wenn t ansteigt. Das bedeutet, dass der Einfluss des externen Faktors Θ auf das Portfolio im Laufe der Zeit anwächst. Dies wird in Abbildung 5.1 veranschaulicht, in der die Grenzverteilung des Anteils der Ausfälle für verschiedene Werte von t dargestellt wird. Dem Schaubild

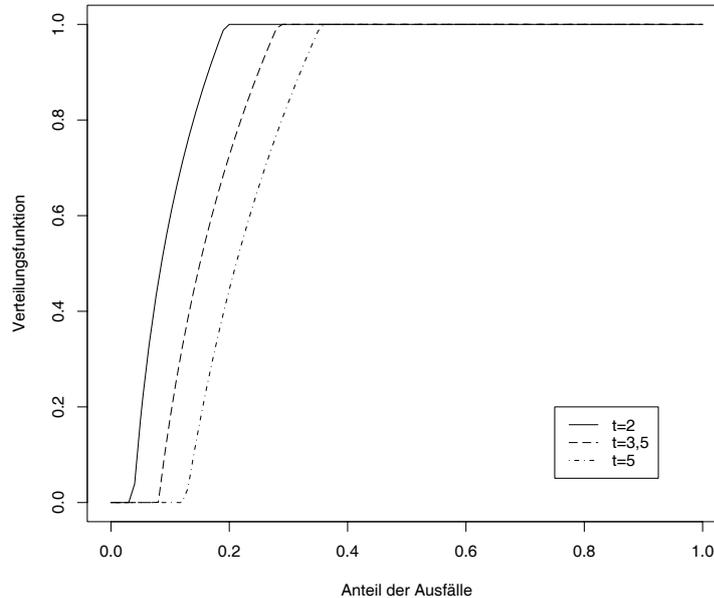


Abbildung 5.1: Verteilungsfunktion des Anteils der Ausfälle zu den Zeitpunkten $t = 2$, $t = 3,5$ und $t = 5$.

kann man beispielsweise entnehmen, dass am Ende der Laufzeit die untere Grenze von $D_2(5)$ bei ca. 13% und die obere Grenze bei ca. 36% liegt.

5.2.3 Large-Deviations-Verhalten für beliebig verteilte Ränder

In diesem Abschnitt wird von beliebig verteilten, nicht-negativen Risiken X_1, \dots, X_n ausgegangen. Ihre gemeinsame Verteilungsfunktion ist durch die Mischverteilung (5.2.1) gegeben. Auch für diese beliebig, aber identisch verteilten Risiken (z.B. Schadenhöhen) gilt das Large-Deviations-Prinzip. Wie im letzten Abschnitt muss hierfür die Annahme 5.2.4 des Gärtner-Ellis-Theorems überprüft werden.

Gegenstand der Betrachtungen ist wieder $Z_n = \sum_{i=1}^n X_i/n$. Aufgrund der bedingten Unabhängigkeit der X_i unter Θ , erfüllt die kumulantenerzeugende Funktion von Z_n (sofern existent) für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \Lambda_n(n\lambda) &= \log E[\exp(\lambda \cdot Z_n)] \\ &= \log E[\exp(n \cdot \log E[\exp(\lambda \cdot X_1) | \Theta])]. \end{aligned} \quad (5.2.49)$$

Damit kann das folgende Lemma gezeigt werden:

Lemma 5.2.11 *Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert der Grenzwert*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \Lambda_n(n\lambda) = \Lambda(\lambda) = \begin{cases} \log E [\exp(\lambda \cdot X_1) | \Theta_M] & \lambda > 0, \\ 0 & \lambda = 0, \\ \log E [\exp(\lambda \cdot X_1) | \Theta_m] & \lambda < 0. \end{cases} \quad (5.2.50)$$

als erweiterte reelle Zahl.

Beweis: Siehe Abschnitt 5.2.5.3, S. 127 f. □

Falls zusätzlich gilt, dass Null zum Inneren von $\mathcal{D}_\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \Lambda(\lambda) < \infty\}$ gehört, kann das Gärtner-Ellis-Theorem 5.2.6 auf Z_n angewendet werden.

Folgerung 5.2.12 *Unter den Voraussetzungen des Grenzwertsatzes 5.2.1 und wenn die Null zum Inneren von \mathcal{D}_Λ gehört, kann das Gärtner-Ellis-Theorem 5.2.6 mit der Fenchel-Legendre-Transformation Λ^* der Funktion Λ aus (5.2.50) auf Z_n angewendet werden.*

Schlussfolgerungen. Unter der Annahme, dass $A(\Theta_M) < \infty$ (Θ hat einen beschränkten Träger) gilt, folgt aus Satz 5.2.1 für alle $x > A(\Theta_M)$

$$P[Z_n \geq x] \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \quad (5.2.51)$$

Weiterhin gilt $\lim_{\lambda \downarrow 0} \Lambda'(\lambda) = A(\Theta_M)$. Wird die Konvexität von Λ verwendet, so ergibt sich für alle $\lambda > 0$

$$\Lambda'(\lambda) \geq A(\Theta_M). \quad (5.2.52)$$

Andererseits hat man

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \Lambda'(\lambda) = \sup \{x \in \text{supp}(X_1)\} \leq \infty, \quad (5.2.53)$$

wobei $\text{supp}(X_1)$ den Träger von X_1 bezeichnet. Zur Vereinfachung der Notation wird die Bezeichnung $x_M = \sup \{x \in \text{supp}(X_1)\}$ eingeführt. Damit sind alle $x \in (A(\Theta_M), x_M)$ exponierte Punkte der Fenchel-Legendre-Transformation Λ^* (siehe dazu auch die Erläuterung auf S. 110). Folglich ist das LDP auf $(A(\Theta_M), x_M)$ erfüllt und die Wahrscheinlichkeiten für Portfolio-Verluste aus diesem Bereich fallen exponentiell mit n ab.

5.2.4 Tail-Dependence-Koeffizienten

In diesem Paragraphen wird der Zusammenhang zwischen Tail-Dependence-Koeffizienten und Mischungsmodellen, in denen die latente Variable Θ einen beschränkten Träger

besitzt, herausgearbeitet. Dies ist im Hinblick auf die Entscheidung über die Wahl der Verteilung von Θ von Bedeutung. Tail-Dependence-Koeffizienten machen eine Aussage über die Stärke der asymptotischen Abhängigkeit zweier Risiken. Sie werden vor allem zur Untersuchung der Abhängigkeiten von Extremwerten zweier Zufallsvariablen verwendet.

Es stellt sich heraus, dass ein beschränkter Träger von Θ zu einem Tail-Dependence-Koeffizienten von Null führt. Die Risiken sind damit paarweise asymptotisch unabhängig. Intuitiv bedeutet dies, dass große Werte dazu tendieren, unabhängig voneinander aufzutreten. Die Umkehrung dieser Aussage gilt allerdings nicht (siehe Beispiel 5.2.13). Auch wenn Θ keinen beschränkten Träger besitzt, kann der Tail-Dependence-Koeffizient verschwinden. Zusätzlich wird gezeigt, dass der Tail-Dependence-Koeffizient sogar auf einer Log-Skala (siehe (5.2.59)) verschwindet. Sehr schwache Abhängigkeit in den Enden (bzw. Tails) der Verteilung deckt sich in diesem Fall mit einem Large-Deviations-Verhalten der Risiken. Daraus kann man schließen, dass ein latenter Faktor mit beschränktem Träger gewählt werden sollte, wenn der Einfluß der systematischen Risiken auf das Portfolio über kurz oder lang ausstirbt und sich die Risiken unabhängig voneinander verhalten.

Der obere Tail-Dependence-Koeffizient zweier identisch verteilter Zufallsvariablen (X_1, X_2) (mit Randverteilungsfunktion F) ist durch

$$\lambda = \lim_{q \rightarrow 1} P [X_2 > F^{-1}(q) | X_1 > F^{-1}(q)] \quad (5.2.54)$$

definiert, falls ein Grenzwert $\lambda \in [0, 1]$ existiert. Wenn die Abhängigkeitsstruktur durch die Mischverteilung (5.2.1) beschrieben wird, lässt sich der obere Tail-Dependence-Koeffizient λ für alle Paare (X_i, X_j) mit $i \neq j$ als

$$\lambda = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{1 - 2q + \psi(2\psi^{-1}(q))}{1 - q} \quad (5.2.55)$$

darstellen³⁶. Dabei bezeichnet ψ^{-1} den Generator der zugehörigen Archimedischen Copula $C_{\psi^{-1}}$, der mit der Inversen der Laplace-Transformation von Θ übereinstimmt.

³⁶Siehe dazu Embrechts et al. (2002). Für diese Darstellung muss die Stetigkeit von F vorausgesetzt werden.

Beispiel 5.2.13 (Clayton Copula)

Ist F_Θ die Gamma-Verteilung mit den Parametern 1 und $1/\alpha$, dann ist ihre Laplace-Transformation durch $\psi(t) = (1+t)^{-1/\alpha}$ (siehe auch (5.1.16)) gegeben. Obwohl der Träger dieser Verteilung nicht beschränkt ist (d.h. $\Theta_M = \infty$), gilt für den oberen Tail-Dependence-Koeffizienten $\lambda = 0$. In diesem Fall hat man schwache Abhängigkeit in den Tails ($\lambda = 0$), aber kein Large-Deviations-Verhalten im oberen Wertebereich (da $\Theta_M = \infty$).

Beispiel 5.2.14 (Latenter Faktor Θ mit beschränktem Träger)

Der latente Faktor Θ habe nun einen beschränkten Träger, d.h. es gelte $\Theta_M < \infty$. Wählt man $v > 0$, dann gilt für alle $\theta \leq \Theta_M$

$$1 + 2v\theta \leq \exp\{2v\theta\} \quad \text{und} \quad \exp\{v\theta\} \leq 1 + v\theta + o(v) \quad \text{für } v \rightarrow 0. \quad (5.2.56)$$

Hierbei bezeichnet $o(v)$ das *Landau-Symbol*, welches zum Ausdruck bringt, dass der jeweilige Term schneller als v gegen 0 konvergiert. Genauer gilt

$$f(v) = o(v) \iff \frac{f(v)}{v} \rightarrow 0 \quad \text{für } v \rightarrow 0.$$

Aus (5.2.56) folgt

$$\liminf_{v \rightarrow 0} \frac{E[\exp(2v\Theta)] - 1}{E[\exp(v\Theta)] - 1} \geq \liminf_{v \rightarrow 0} \frac{2v \cdot E[\Theta]}{v \cdot E[\Theta] + o(v)} = 2. \quad (5.2.57)$$

Damit ergibt sich für den oberen Tail-Dependence-Koeffizienten

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lambda = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{1 - 2q + \psi(2\psi^{-1}(q))}{1 - q} = 2 - \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\psi(2v) - 1}{\psi(v) - 1} \\ &\leq 2 - \liminf_{v \rightarrow 0} \frac{E[\exp\{2v\Theta\}] - 1}{E[\exp\{v\Theta\}] - 1} = 0. \end{aligned} \quad (5.2.58)$$

Der Tail-Dependence-Koeffizient λ ist also 0, wenn der latente Faktor einen beschränkten Träger hat. In den Fällen, in denen ein Large-Deviations-Verhalten zu beobachten ist, liegt eine schwache Abhängigkeit in den Tails vor.

Bei einem Tail-Dependence-Koeffizienten von $\lambda = 0$, wird der Tail-Dependence-Koeffi-

zient oft auf der folgenden Log-Skala³⁷ untersucht:

$$\chi = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{2 \log(1 - q)}{\log(1 - 2q + \psi(2\psi^{-1}(q)))} - 1. \quad (5.2.59)$$

Es ist durchaus möglich, dass χ ungleich Null ist, wenn $\lambda = 0$ ist. Es gilt nämlich³⁸

$$\begin{cases} \lambda \geq 0 & \text{falls } \chi = 1, \\ \lambda = 0 & \text{falls } \chi < 1. \end{cases} \quad (5.2.60)$$

Dieser Fall tritt beispielsweise für die Gauß-Copula C_ρ^{Ga} (siehe (5.1.5)) ein. Für diese gilt $\lambda = 0$ und $\chi = \rho$.³⁹ Die Gauß-Copula weist also eine Art von Abhängigkeit in den Tails auf.

Für das Mischungsmodell (5.2.1) mit einer latenten Variablen Θ mit beschränktem Träger verschwindet der Koeffizient χ für alle Paare (X_i, X_j) mit $i \neq j$. Geht man analog wie in (5.2.58) vor, so ergibt sich für χ

$$\chi = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{2 \log(v E[\Theta] + o(v))}{\log(4v^2 E[\Theta^2] + o(v^2))} - 1 = 0. \quad (5.2.61)$$

Selbst auf dieser Log-Skala ist keine Abhängigkeit in den Tails zu beobachten.

Unter Verwendung des multivariaten Mischungsmodells (5.2.1) können unterschiedliche Abhängigkeitsstrukturen zwischen Risiken modelliert werden. Hat die latente Variable des Modells einen endlichen Wertebereich, dann wirken die externen Faktoren (systematische Risiken) nur auf einen Teilbereich, auf dem es beispielsweise zu Veränderungen der Ausfallwahrscheinlichkeit in einem Kreditrisiko-Portfolio kommen kann. Außerhalb dieses Bereiches kann man Diversifikationseffekte wie für unabhängige Risiken beobachten. Hier können die systematischen Risiken nicht mehr das gesamte Portfolio beeinflussen.

Es wurde außerdem gezeigt, dass Mischungsmodelle, deren latente Variable einen beschränkten Träger besitzt, sehr schwache Tail-Abhängigkeiten aufweisen. Aufbauend auf diesen Erkenntnissen, kann man von Fall zu Fall entscheiden, ob ein Mischungsmodell, in dem die latente Variable einen beschränkten Träger besitzt, geeignet ist.

³⁷Siehe dazu z.B. Juri und Wüthrich (2003).

³⁸Siehe z.B. Coles et al. (1999) oder Heffernan (2000).

³⁹Siehe dazu Juri und Wüthrich (2003). Da die Gauß-Copula nicht Archimedisch ist, sieht die Definition von χ in diesem Fall anders aus, siehe z.B. (61) in Juri und Wüthrich (2003).

5.2.5 Beweise

5.2.5.1 Beweis des Zentralen Grenzwertsatzes 5.2.1

Zuerst wird gezeigt, dass $A(\Theta)$ (fast sicher) endlich ist. Für $n = 1$ gilt

$$G(x_1) = \int_0^\infty \exp(-\psi^{-1}(F(x_1)))^\theta dF_\Theta(\theta) = \psi\{\psi^{-1}(F(x_1))\} = F(x_1).$$

Die bedingte Verteilung von X_1 , gegeben $\Theta = \theta$, ist somit durch $P(X_1 \leq x_1 | \Theta = \theta) = \exp(-\theta \cdot \psi^{-1}(F(x_1)))$ gegeben. Benutzt man die Voraussetzung, dass X_1 einen endlichen Erwartungswert besitzt, erhält man

$$E[X_1] = \int_0^\infty E[X_1 | \Theta = \theta] dF_\Theta(\theta) = \int_0^\infty A(\theta) dF_\Theta(\theta) < \infty,$$

woraus sich $A(\Theta) < \infty$ (fast sicher) ergibt.

Da die Risiken X_1, \dots, X_n unter Θ bedingt unabhängig und identisch verteilt sind und ihr erstes Moment $A(\Theta)$ ist, kann das *Starke Gesetz der Großen Zahlen*⁴⁰ herangezogen werden, das die fast sichere Konvergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = E[X_1 | \Theta]$$

impliziert. Aufgrund der Tatsache, dass fast sichere Konvergenz, schwache Konvergenz impliziert⁴¹, erhält man für alle $x \geq 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \leq x \mid \Theta \right] = \mathbf{1}_{\{E[X_1 | \Theta] \leq x\}}, \quad (5.2.62)$$

wobei $\mathbf{1}_{\{E[X_1 | \Theta] \leq x\}}$ die Indikatorvariable bezeichnet, welche den Wert 1 annimmt, falls $E[X_1 | \Theta] \leq x$ gilt und sonst 0 ist. Weil die bedingte Wahrscheinlichkeit in (5.2.62) nach oben gleichmäßig durch 1 beschränkt ist und 1 bezüglich $dF_\Theta(\theta)$ integrierbar ist, erhält man durch Verwendung des *Satzes von der majorisierten Konvergenz* A.2.1 in Anhang A

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \leq x \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[P \left[\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \leq x \mid \Theta \right] \right] = E \left[\mathbf{1}_{\{E[X_1 | \Theta] \leq x\}} \right] \\ &= P[E[X_1 | \Theta] \leq x] = P[A(\Theta) \leq x]. \end{aligned}$$

⁴⁰Für das Starke Gesetz der Großen Zahlen siehe z.B. Schaich und Münnich (2001), S. 179.

⁴¹Siehe dazu z.B. Schaich und Münnich (2001), S. 171 ff. und die Referenzen darin.

Damit ist der Beweis des Grenzwertsatzes 5.2.1 abgeschlossen. □

5.2.5.2 Beweise für die Resultate aus Abschnitt 5.2.2

Als Vorbereitung für den Beweis von Lemma 5.2.7 wird die nachfolgende Aussage bewiesen.

Lemma 5.2.15 *Die multivariate Verteilungsfunktion des Zufallsvektors (X_1, \dots, X_n) sei durch die Mischverteilung (5.2.1) mit Bernoulli-verteilten Rändern definiert. Dann gilt für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $n \geq 1$*

$$\Lambda_n(\lambda) = \log E \left[\exp \left\{ n \cdot \log h_{\lambda/n}(\Theta) \right\} \right].$$

Beweis: Wähle $\tilde{\lambda} = \lambda/n$. Die Risiken X_i sind unter Θ bedingt unabhängig und identisch verteilt mit Randverteilung $\exp(-\Theta \cdot \psi^{-1}(F(\cdot)))$. Folglich erhält man

$$\begin{aligned} E \left[\exp \left(\tilde{\lambda} \cdot \sum_{i=1}^n X_i \right) \right] &= E \left[E \left[\exp \left(\tilde{\lambda} \cdot \sum_{i=1}^n X_i \right) \middle| \Theta \right] \right] \\ &= E \left[\prod_{i=1}^n E \left[\exp \left(\tilde{\lambda} \cdot X_i \right) \middle| \Theta \right] \right] \\ &= E \left[\prod_{i=1}^n \left(e^{-\Theta \cdot \psi^{-1}(1-p)} + e^{\tilde{\lambda}} \left(1 - e^{-\Theta \cdot \psi^{-1}(1-p)} \right) \right) \right] \tag{5.2.63} \\ &= E \left[\exp \left\{ n \cdot \log \left(e^{-\Theta \cdot \psi^{-1}(1-p)} + e^{\tilde{\lambda}} \left(1 - e^{-\Theta \cdot \psi^{-1}(1-p)} \right) \right) \right\} \right] \\ &= E \left[\exp \left\{ n \cdot \log h_{\tilde{\lambda}}(\Theta) \right\} \right]. \end{aligned}$$

Durch das Logarithmieren beider Seiten in (5.2.63) folgt die Behauptung. □

Beweis von Lemma 5.2.7: Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ fest. Für $h_\lambda(\theta)$ (siehe (5.2.28)) gilt $h_\lambda(\theta) > 0$ für $\theta \geq 0$. Zusammen mit der Annahme $F_\Theta(0) = 0$ gilt somit

$$h_\lambda(\Theta) > 0$$

(fast sicher). Für $h > 0$ wird nun

$$\Omega_h^\lambda = \{\Theta \geq 0; h_\lambda(\Theta) > h\}$$

definiert. Man wählt $h > 0$, so dass

$$P [\Omega_h^\lambda] > 0 \quad (5.2.64)$$

gilt.

Für alle solche h gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \Lambda_n(n\lambda) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log E [\exp (n \cdot \log h_\lambda(\Theta)) | \Omega_h^\lambda \cup (\Omega_h^\lambda)^c] \quad (5.2.65) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log (P [(\Omega_h^\lambda)^c] \cdot \exp (n \cdot \log h) + E [\exp (n \cdot \log h_\lambda(\Theta)) | \Omega_h^\lambda]) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(P [(\Omega_h^\lambda)^c] \cdot E [\exp (n \cdot \log h_\lambda(\Theta)) | \Omega_h^\lambda] \right. \\ &\quad \left. + P [\Omega_h^\lambda] \cdot E [\exp (n \cdot \log h_\lambda(\Theta)) | \Omega_h^\lambda] \right) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log E [\exp (n \cdot \log h_\lambda(\Theta)) | \Omega_h^\lambda]. \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log E [\exp (n \cdot \log h_\lambda(\Theta)) | \Omega_h^\lambda] \leq \sup_{\theta \in \text{supp}(\Theta)} \log h_\lambda(\theta). \quad (5.2.66)$$

Andererseits erhält man für den \liminf eine analoge Abschätzung:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \Lambda_n(n\lambda) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log E [\exp (n \cdot \log h_\lambda(\Theta)) | \Omega_h^\lambda] \geq \log h$$

für alle h mit (5.2.64). Die Behauptung folgt aus der Tatsache, dass

$$\log \sup \{h : P [\Omega_h^\lambda] > 0\} = \sup_{\theta \in \text{supp}(\Theta)} \log h_\lambda(\theta)$$

gilt. Damit ist die Gleichheit in (5.2.29) bewiesen.

Es bleibt zu zeigen, dass $\Lambda(\lambda)$ endlich ist. Hierfür betrachtet man die Ableitung

$$\frac{d}{d\theta} h_\lambda(\theta) = \psi^{-1} (1 - p) \cdot e^{-\theta \cdot \psi^{-1}(1-p)} \cdot (e^\lambda - 1). \quad (5.2.67)$$

Aus ihr wird ersichtlich, dass $\log h_\lambda(\theta)$ streng monoton fallend in θ ist mit

$$\log h_\lambda(0) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\theta \rightarrow \infty} \log h_\lambda(\theta) = \lambda. \quad (5.2.68)$$

Damit ist $\log h_\lambda(\theta)$ endlich für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und alle $\theta \geq 0$. Dies wiederum impliziert, dass $\Lambda(\lambda)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ endlich ist. Lemma 5.2.7 ist somit bewiesen. \square

Beweis der Folgerung 5.2.9: Für alle y mit $y = \Lambda'(\eta)$ für ein $\eta \neq 0$ kann man die Fenchel-Legendre-Transformation von Λ als

$$\Lambda^*(y) = \eta y - \Lambda(\eta) \quad (5.2.69)$$

darstellen. Außerdem ist y damit ein exponierter Punkt von Λ^* (siehe dazu auch die Erläuterung auf S. 110). Weiterhin gilt

$$\Lambda'(\lambda) \in \begin{cases} [1 - e^{-\Theta_M \psi^{-1}(1-p)}, 1] = [A(\Theta_M), 1] & \lambda > 0, \\ [0, 1 - e^{-\Theta_m \psi^{-1}(1-p)}] = [0, A(\Theta_m)] & \lambda < 0. \end{cases}$$

Beweis von (b): Sei $\Theta_m > 0$ und $x \in [0, A(\Theta_m))$. Dann ist $\Lambda'(\eta) = x$ nur für

$$\eta = \log \left(\frac{x \cdot e^{-\Theta_m \psi^{-1}(1-p)}}{(1-x) \cdot (1 - e^{-\Theta_m \psi^{-1}(1-p)})} \right). \quad (5.2.70)$$

Damit sind alle Punkte $x \in [0, A(\Theta_m))$ exponierte Punkte von Λ^* . Wenn man (5.2.70) in die Gleichung (5.2.24) einsetzt, ergibt sich für alle $x \in [0, A(\Theta_m))$

$$\Lambda^*(x) = x \log \left(\frac{x}{1 - e^{-\Theta_m \psi^{-1}(1-p)}} \right) + (1-x) \log \left(\frac{1-x}{e^{-\Theta_m \psi^{-1}(1-p)}} \right).$$

Aus Satz 5.2.8(a) folgt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \leq x \right) \leq - \inf_{y \in [0, x]} \Lambda^*(y) = -\Lambda^*(x),$$

da $\Lambda^*(x)$ streng monoton fallend auf $[0, A(\Theta_m))$ ist. Andererseits gilt wegen Satz 5.2.8(b) für alle $\varepsilon \in (0, x/2)$

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \leq x \right) &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P \left(\varepsilon < \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \leq x - \varepsilon \right) \\ &\geq - \inf_{y \in (\varepsilon, x-\varepsilon)} \Lambda^*(y) = -\Lambda^*(x - \varepsilon). \end{aligned}$$

Die Behauptung (b) folgt nun aus der Stetigkeit von Λ^* auf $[0, A(\Theta_m))$ und aus der Tatsache, dass man $\varepsilon > 0$ beliebig klein wählen kann.

Beweis von (a): Der Beweis erfolgt analog zum Beweis von (b). Der einzige Unterschied besteht darin, dass $\Lambda^*(x)$ streng monoton steigend auf $(A(\Theta_M), 1]$ ist.

□

5.2.5.3 Beweis von Lemma 5.2.11

Da $\Lambda_n(0) = 0$ für alle $n \geq 1$ gilt, muss die Behauptung nur noch für $\lambda \neq 0$ bewiesen werden.

Sei $\lambda > 0$. Wegen $F_\Theta(0) = 0$ gilt

$$E [\exp (\lambda \cdot X_1) | \Theta] > 1$$

(fast sicher). Für $h > 1$ wird

$$\Omega_h^\lambda = \{\Theta \geq 0; E [\exp (\lambda \cdot X_1) | \Theta] > h\} \quad (5.2.71)$$

definiert. Es sei nun $h > 1$, so dass

$$P [\Omega_h^\lambda] > 0 \quad (5.2.72)$$

gilt. Wie in (5.2.65) erhält man für alle solche h

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \Lambda_n(n\lambda) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log E [\exp \{n \cdot \log E [\exp \{\lambda \cdot X_1\} | \Theta]\} | \Omega_h^\lambda]. \quad (5.2.73)$$

Andererseits gilt für alle $h > 1$ mit (5.2.72)

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \Lambda_n(n\lambda) \geq \log h. \quad (5.2.74)$$

Des Weiteren gilt für die bedingte Erwartung

$$\begin{aligned} E [\exp (\lambda \cdot X_1) | \Theta] &= \int_1^\infty P [\exp (\lambda \cdot X_1) > y | \Theta] dy \\ &= \int_1^\infty 1 - \exp \{-\Theta \cdot \psi^{-1}(F(\log y / \lambda))\} dy, \end{aligned}$$

welche streng monoton steigend in Θ ist. Folglich erhält man

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log E [\exp \{n \cdot \log E [\exp \{\lambda \cdot X_1\} | \Theta]\} | \Omega_h^\lambda] \\ \leq \log E [\exp \{\lambda \cdot X_1\} | \Theta_M]. \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung für $\lambda > 0$.

Für $\lambda < 0$ gilt

$$E [\exp (\lambda \cdot X_1) | \Theta] < 1$$

(fast sicher). Für alle $h \in (0, 1)$ mit (5.2.72) erhält man wiederum (5.2.73) und (5.2.74). Diesmal ist $E [\exp (\lambda \cdot X_1) | \Theta]$ streng monoton fallend in Θ , was die Behauptung impliziert.

□

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

Für jedes Versicherungsunternehmen ist das Management von Risiken eine unabdingbare Aufgabe, welche die Grundlage für den wirtschaftlichen Erfolg und die langfristige Erhaltung des Unternehmens bildet. Ein gutes Risikomanagement dient dem Schutz der Versicherungsnehmer und stärkt zudem die Wettbewerbssituation des Unternehmens. Nicht nur zum Schutz der Kunden, sondern auch um die Stabilität der Versicherungsbranche zu gewährleisten, hat die EU das Projekt „Solvency II“ ins Leben gerufen. Mit Solvency II soll ein risikobasiertes Aufsichtssystem für Versicherungsunternehmen geschaffen werden, welches die bestehenden Aufsichtsregeln harmonisiert. Die Anforderungen von Solvency II an ein qualitatives und quantitatives Risikomanagement sind nach dem sogenannten 3-Säulen-Ansatz gegliedert. Die erste Säule enthält Solvabilitätsrichtlinien für die Eigenmittelausstattung von Versicherungsunternehmen und stellt den Kern der Betrachtung dar. Ziel ist die Bestimmung der erforderlichen Kapitalausstattung eines Unternehmens, die zur Bewältigung der eingegangenen Risiken benötigt wird. Hierfür ist die Quantifizierung des Gesamtrisikos unter Einbeziehung aller relevanter Risiken sowie unter Berücksichtigung von Abhängigkeitsbeziehungen zwischen verschiedenen Risikokategorien erforderlich. Die quantitativen Vorgaben der ersten Säule werden durch qualitative Bestimmungen zum aufsichtsrechtlichen Überprüfungsverfahren in der zweiten Säule und Richtlinien zur Offenlegung und Markttransparenz in der dritten Säule ergänzt.

In der vorliegenden Arbeit werden Methoden zur Quantifizierung und Modellierung von Risiken von Nichtleben-Versicherern vorgestellt. Für das Prämien- und Reserverisiko werden Modelle zur Bestimmung von Prädiktoren für die zukünftigen Prämien bzw. für die benötigten Schadenreserven, sowie zur Messung der Genauigkeit dieser Prognosen, präsentiert. In diesem Kontext werden auch multivariate Modelle betrachtet. Sie erlauben die Berücksichtigung von Interdependenzen zwischen verschiedenen Portfolios.

Des Weiteren beschäftigt sich die Arbeit mit der Modellierung von Abhängigkeiten zwischen beliebigen Risiken. Die darauf aufbauende Quantifizierung des Gesamtrisikos für Portfolios, die aus abhängigen Risiken bestehen, nimmt einen großen Teil der Arbeit ein.

Zur Schätzung von zukünftigen Prämien bietet sich die Verwendung der individuellen und der kollektiven Schadenerfahrung an. Die Credibility-Theorie beschreibt, wie die individuelle mit der kollektiven Schadenerfahrung in einem gewissen mathematischen Sinn optimal zu verknüpfen ist, um den besten affin-linearen Prädiktor für die risikogerechte Prämie zu erhalten. Dieser Prädiktor wird Credibility-Prädiktor genannt. Mit Hilfe der Credibility Modelle von Bühlmann und Bühlmann-Straub werden die dazugehörigen Credibility-Prädiktoren, die mittlere quadratische Abweichung zur risikogerechten Individual-Prämie und weitere Eigenschaften der Prädiktoren bestimmt. Darüber hinaus wird auch erläutert, wie das anschauliche, aus der Hilbert-Raum-Theorie bekannte Konzept der orthogonalen Projektion zur Bestimmung der Credibility-Prädiktoren verwendet werden kann. Analoge Ergebnisse werden auch für die multidimensionale Verallgemeinerung des klassischen Bühlmann-Straub-Modells vorgestellt. Hier werden mehrere Portfolios simultan betrachtet, um die möglichen Abhängigkeiten zwischen den Portfolios berücksichtigen zu können. Für alle betrachteten Credibility-Modelle werden Schätzungen der benötigten Strukturparameter angegeben. Diese sind für die konkrete Berechnung der Credibility-Prädiktoren und ihre Prognosefehler erforderlich.

Da multivariate Credibility-Methoden äußerst nützlich bei der Betrachtung verschiedener, abhängiger Versicherungsportfolios sind, empfiehlt sich eine Anwendung des multidimensionalen Bühlmann-Straub-Modells auf Schadenreservierungsprobleme. Unter Verwendung dieses Modells werden Prädiktoren für die ausstehenden Schadenzahlungen (Schadenreserven) für bereits eingetretene bzw. verursachte, aber nicht abschließend regulierte Schäden aus mehreren, abhängigen Portfolios ermittelt. Außerdem wird der (bedingte) Prognosefehler, der beim Prognostizieren der benötigten Schadenreserven aller betrachteten Portfolios entsteht, zuerst für einzelne Schadenanfalljahre, dann für alle aggregierten Anfalljahre, ermittelt. Unter Einbeziehung der Schätzungen für die Strukturparameter kann ein Schätzer für diesen Prognosefehler bestimmt werden. Dieser quantifiziert das gesamte Reserverisiko der betrachteten Portfolios. Die Resultate werden anhand eines Beispiels verdeutlicht und mit den Ergebnissen aus dem multivariaten Chain-Ladder-Modell und dem multivariaten Additive-

Loss-Schadenreservierungsmodell verglichen. Dabei werden zwei Portfolios betrachtet, welche Schadendaten derselben Versicherungssparte aus zwei verschiedenen Regionen beinhalten. Das Bühlmann-Straub-Modell zeigt sich dabei aufgrund der freien Wahlmöglichkeiten zweier Modellparameter flexibel bei der Anpassung des Modells an die vorhandenen Daten. Mit dem auf dem multivariaten Bühlmann-Straub-Modell basierenden Verfahren wurde eine zusätzliche Alternative zu den bisher bekannten multivariaten Verfahren entwickelt.

Bei diesen Betrachtungen bleibt die Quantifizierung des einjährigen Reserverisikos im Rahmen des Bühlmann-Straub-Modells offen. Beim einjährigen Reserverisiko wird lediglich die Unsicherheit im sogenannten Abwicklungsergebnis für das nächste Kalenderjahr gemessen. Das Abwicklungsergebnis ergibt sich als Differenz der Prognosen für den Endschadenstand (aktueller Schadenstand zuzüglich allen Schadenreserven) am Anfang und am Ende des kommenden Kalenderjahres. Aufgrund des einjährigen Zeithorizonts von Solvency II oder des schweizerischen Pendants, des Swiss Solvency Tests, ist die Quantifizierung des einjährigen Reserverisikos für jede Nichtleben-Versicherung ein aktuelles Thema. Aufbauend auf den Überlegungen in dieser Arbeit, kann dies im Rahmen des (multivariaten) Bühlmann-Straub-Modells erfolgen.

Im Hinblick auf die Quantifizierung des Gesamtrisikos eines Versicherungsunternehmens ist die Aggregation von Einzelrisiken und Risikokategorien unter Berücksichtigung von Abhängigkeiten nötig. Für große Portfolios mit abhängigen Risiken ist in diesem Zusammenhang die Verteilung des Gesamtrisikos von Interesse. Hierfür ist eine adäquate Modellierung der Abhängigkeitsstrukturen zwischen den Risiken erforderlich. Das Konzept der Copulas, welches eine geeignete Methode dafür darstellt, wird näher erläutert. Darüber hinaus werden sogenannte Mischungsmodelle, die mit Hilfe Archimedischer Copulas dargestellt werden können, näher untersucht. Mischungsmodelle dieser Art sind dadurch gekennzeichnet, dass externe ökonomische Faktoren (systematische Risiken), beschrieben durch eine Zufallsvariable Θ , das Portfolio beeinflussen und so Abhängigkeiten im Portfolio hervorrufen. Ausgehend von diesen Modellen wird für das durchschnittliche Portfolio-Risiko die asymptotische Verteilung bestimmt. Diese kann zur Approximation der Gesamtschadenverteilung für große Portfolios herangezogen werden. Weiterhin wird das stochastische Verhalten der Risiken innerhalb des Portfolios analysiert. Es stellt sich heraus, dass die externen Faktoren nur einen beschränkten Wirkungsbereich haben, wenn die latente Variable Θ einen endlichen Wertebereich besitzt. Außerhalb dieses Bereiches kann man Diversifikationseffekte wie

für unabhängige Risiken beobachten. Hier können die systematischen Risiken nicht mehr das gesamte Portfolio beeinflussen. Dies äußert sich in der Tatsache, dass die Wahrscheinlichkeiten auf diesem Teilbereich exponentiell mit der Anzahl der Risiken n im Portfolio abfallen. Diesen Effekt nennt man Large-Deviations-Verhalten, das typische Verhalten von unabhängigen Zufallsvariablen. Die Anwendungsmöglichkeiten der Ergebnisse werden anhand von Beispielen aufgezeigt. Es wird unter anderem ein Beispiel zur Quantifizierung des Risikos von sogenannten Collateralised Debt Obligations (CDOs) angeführt. CDOs gehören zu den forderungsbesicherten Wertpapieren, die in den letzten Jahren stark an Popularität gewonnen haben und im Zusammenhang mit der aktuellen Finanzkrise viel Aufmerksamkeit auf sich gezogen haben. Schließlich wird gezeigt, dass Mischungsmodelle, deren latente Variable einen beschränkten Träger besitzt, sehr schwache Tail-Abhängigkeiten aufweisen. Dies ist vor allem im Hinblick auf die Entscheidung über die Wahl der Verteilung von Θ relevant.

Für weitere praktische und auch theoretische Anwendungen dürfte in diesem Zusammenhang interessant sein, mit welcher Geschwindigkeit die Verteilung des durchschnittlichen Portfolio-Risikos für wachsendes n gegen die Grenzverteilung konvergiert. Damit hätte man allgemeine Informationen über die Qualität der Approximation auch auf dem Bereich, auf dem kein Large-Deviations-Verhalten zu beobachten ist.

Anhang A

Hilfsmittel aus der Wahrscheinlichkeitstheorie

In diesem Paragraphen werden die für die Arbeit benötigten Hilfsmittel aus der Wahrscheinlichkeitstheorie bereitgestellt. Sie werden lediglich in der hier erforderlichen Allgemeinheit angegeben. Detailliertere und allgemeinere Erläuterungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie kann man beispielsweise in Bauer (1992, 2002), Schürger (1998), Shiryaev (1996) oder Feller (1968, 1971) finden.

Sei X eine reellwertige Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) . Dann ist die Verteilungsfunktion F der Zufallsvariablen X als

$$F(x) = P(X^{-1}((-\infty, x])) = P(X \leq x)$$

definiert. Eine verallgemeinerte Inverse von F kann man auf die folgenden zwei Arten definieren:

$$F^{(-1)}(p) = \inf\{x \mid F(x) \geq p\} = \sup\{x \mid F(x) < p\},$$
$$F^{(-1)+}(p) = \inf\{x \mid F(x) > p\} = \sup\{x \mid F(x) \leq p\}$$

für $p \in [0, 1]$. Hierbei werden die Konventionen $\inf \emptyset = +\infty$ und $\sup \emptyset = -\infty$ verwendet. Mit Hilfe dieser Definitionen kann man nun das folgende Lemma formulieren.

Lemma A.0.16 *Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $p \in [0, 1]$ gelten die folgenden Aussagen:*

$$(a) \quad F^{(-1)}(p) \leq x \iff p \leq F(x);$$

$$(b) \quad x \leq F^{(-1)+}(p) \iff P(X < x) \leq p;$$

$$(c) \quad x < F^{(-1)+}(p) \implies F(x) \leq p.$$

Beweis: Zum Beweis von (a) und (b) siehe Denuit et al. (2005), S. 19. Die Aussage aus (c) ergibt sich unmittelbar aus der Definition von $F^{(-1)+}$.

□

Alle Aussagen (Gleichungen, Ungleichungen), die Zufallsvariablen einschließen, sind als *fast sicher* zu verstehen. Das bedeutet, dass eine Menge $A \in \mathcal{F}$ mit $P(A) = 1$ existiert, so dass die jeweilige Aussage für alle $\omega \in A$ gilt. Zwei Zufallsvariablen X und Y auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) sind beispielsweise fast sicher identisch, falls $P(X = Y) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = Y(\omega)\}) = 1$ gilt. Man schreibt dann $X = Y$.

A.1 Bedingte Erwartungen

Es seien X und Y zwei stetige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) . Ihre verbundene Dichtefunktion wird mit $f(x, y)$, die Randdichten werden mit $f(x)$ bzw. $f(y)$ bezeichnet. Dann ist die *bedingte Dichte* von X unter der Bedingung $Y = y$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$ mit $f(y) > 0$ als

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{f(y)}$$

definiert. Nun kann man den *bedingten Erwartungswert* von X unter der Bedingung $Y = y$ definieren:

$$E[X|Y = y] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x|y) \, dx. \quad (\text{A.1.1})$$

Für diskrete Zufallsvariablen X und Y wird die *bedingte Wahrscheinlichkeitsfunktion* und der *bedingte Erwartungswert* von X unter der Bedingung $Y = y$ auf analoge Weise definiert¹.

Der Wert des bedingten Erwartungswertes (A.1.1) hängt von der Ausprägung y der Zufallsvariablen Y ab. Er kann selbst als Ausprägung einer Zufallsvariablen, die mit $E[X|Y]$ bezeichnet wird, aufgefasst werden. Man nennt $E[X|Y]$ die *bedingte Erwartung* von X unter Y .²

¹ Siehe z.B. Schaich und Münnich (2001), S. 52 und 74.

² Für die Wohldefiniertheit der bedingten Erwartung ist die Voraussetzung der Nichtnegativität von X oder die der Integrierbarkeit von X , d.h. $E[|X|] < \infty$, notwendig. Siehe dazu z.B. Bauer (2002), S. 117 f.

Die verbundene Dichtefunktion der Zufallsvektoren $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ und $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)'$ wird für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ mit $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ bezeichnet. Die Dichte von \mathbf{X} wird mit $f(\mathbf{x})$, die von \mathbf{Y} wird mit $f(\mathbf{y})$ bezeichnet. Die bedingte Dichte von \mathbf{X} unter der Bedingung $\mathbf{Y} = \mathbf{y}$ ist für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ mit $f(\mathbf{y}) > 0$ als

$$f(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \frac{f(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{f(\mathbf{y})}$$

definiert. Die bedingte Erwartung $E[\mathbf{X}|\mathbf{Y}]$ von \mathbf{X} unter \mathbf{Y} definiert man komponentenweise als

$$E[\mathbf{X}|\mathbf{Y}] = (E[X_1|\mathbf{Y}], \dots, E[X_n|\mathbf{Y}])'$$

Jede Komponente $E[X_i|\mathbf{Y}]$, $i = 1, \dots, n$, ist eine Funktion von \mathbf{Y} und hat für alle $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ mit $f(\mathbf{y}) > 0$ die Ausprägungen

$$E[X_i|\mathbf{Y} = \mathbf{y}] = \frac{1}{f(\mathbf{y})} \int_{-\infty}^{+\infty} x_i \cdot f(x_i, \mathbf{y}) dx_i,$$

wobei $f(x_i, \mathbf{y})$ die verbundene Dichtefunktion von X_i, Y_1, \dots, Y_m bezeichnet. Für eine Funktion $g: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$ ist die bedingte Erwartung von $g(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ unter \mathbf{Y} , die man mit $E[g(\mathbf{X}, \mathbf{Y})|\mathbf{Y}]$ bezeichnet, eine Funktion des Zufallsvektors \mathbf{Y} , welche die Ausprägungen

$$E[g(\mathbf{X}, \mathbf{Y})|\mathbf{Y} = \mathbf{y}] = \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot f(\mathbf{x}|\mathbf{y}) d\mathbf{x}$$

besitzt (vorausgesetzt das Integral existiert).

Um sicherzustellen, dass alle Ausdrücke existieren wird im Folgenden angenommen, dass das zweite Moment der Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m$ existiert. $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_l)'$ sei ein weiterer l -dimensionaler Zufallsvektor.

Die *bedingte* ($n \times m$)-*Kovarianz-Matrix* von \mathbf{X} und \mathbf{Y} unter \mathbf{Z} ist durch

$$\text{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}|\mathbf{Z}) = E[(\mathbf{X} - E[\mathbf{X}|\mathbf{Z}]) \cdot (\mathbf{Y} - E[\mathbf{Y}|\mathbf{Z}])' | \mathbf{Z}]$$

definiert. Für $n = m = l = 1$ vereinfacht sich die Formel auf

$$\text{Cov}(X, Y|Z) = E[(X - E[X|Z]) \cdot (Y - E[Y|Z]) | Z].$$

Das ist die *bedingte Kovarianz* von X und Y unter Z , aus der sich für den Spezialfall

$X = Y$, die *bedingte Varianz* von X unter Z ,

$$\text{Var}(X|Z) = E[(X - E[X|Z])^2 | Z],$$

ergibt.

Im folgenden Satz werden einige Eigenschaften von bedingten Erwartungen zusammengestellt.

Satz A.1.1 *Ist Z eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) und sind X und Y zwei Zufallsvariablen auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum, deren zweites Moment existiert, dann gelten folgende Aussagen:*

- (a) $E[E[X|Y]] = E[X]$;
- (b) $E[\alpha \cdot X + \beta \cdot Y|Z] = \alpha \cdot E[X|Z] + \beta \cdot E[Y|Z]$;
- (c) $E[E[X|Y, Z]|Y] = E[X|Y]$;
- (d) $E[X \cdot g(Y)|Y] = g(Y) \cdot E[X|Y]$ für eine Funktion g von Y . Insbesondere gilt $E[g(Y)|Y] = g(Y)$;
- (e) $E[X|Y] = E[X]$, falls X und Y unabhängig;
- (f) $E[E[X|Z]|Y] = E[X|Y]$, falls X und Y bzgl. Z bedingt unabhängig sind;
- (g) $E[Y \cdot X|Y, Z] = Y \cdot E[X|Y, Z]$;
- (h) $\text{Cov}(X, Y) = E[\text{Cov}(X, Y|Z)] + \text{Cov}(E[X|Z], E[Y|Z])$.

Beweis: Siehe z.B. Shiryaev (1996), Kapitel II, Abschnitt 7 oder Schürger (1998), Abschnitt 6.1. □

Aus (h) ergeben sich die folgenden zwei Spezialfälle:

$$\text{Var}(X) = E[\text{Var}(X|Z)] + \text{Var}(E[X|Z]), \tag{A.1.2}$$

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(E[X|Z], E[Y|Z]), \text{ falls } X \text{ und } Y \text{ bzgl. } Z \text{ bedingt unabhängig sind.} \tag{A.1.3}$$

Die Eigenschaften aus Satz A.1.1 sowie (A.1.2) und (A.1.3) lassen sich direkt auf Zufallsvektoren \mathbf{X} , \mathbf{Y} und \mathbf{Z} übertragen.

A.2 Satz von der majorisierten Konvergenz

An dieser Stelle wird der Satz von der majorisierten Konvergenz (H. Lebesgue) nur in der hier benötigten Ausführlichkeit vorgestellt. Eine allgemeinere Version kann man beispielsweise in Bauer (1992) auf S. 95 finden.

Satz A.2.1 (Satz von der majorisierten Konvergenz (H. Lebesgue))

Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen, die fast sicher gegen eine Zufallsvariable X konvergiert. Außerdem existiere eine integrierbare Zufallsvariable Y , so dass $|X_n| \leq Y$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dann ist auch X integrierbar und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n] = E[X].$$

Beweis: Siehe Bauer (1992), S. 96.

□

Anhang B

Hilbert-Räume

Dieser Teil des Anhangs beinhaltet eine kurze Einführung in die Hilbert-Raum-Theorie. Sie enthält alle Begriffe und Eigenschaften von Hilbert-Räumen, die für das Verständnis der in der Arbeit vorgestellten Methoden notwendig sind. Ausführlichere und allgemeinere Erläuterungen zu diesem Thema sind beispielsweise in Brockwell und Davis (1991) oder Werner (2007) zu finden.

B.1 Vektorräume und normierte Räume

Der Begriff des *Vektorraums* bildet die Grundlage für die Definition eines Hilbertraums. Er ist wie folgt definiert (siehe Jänich (2008), S. 22 f.):

Definition B.1.1 *Ein Tripel $(V, +, \cdot)$ bestehend aus einer Menge V , einer Addition*

$$+ : V \times V \longrightarrow V, \quad (x, y) \mapsto x + y$$

und einer Skalarmultiplikation

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V, \quad (\lambda, y) \mapsto \lambda \cdot y$$

heißt reeller Vektorraum, falls die Abbildungen $+$ und \cdot die folgenden Bedingungen erfüllen:

- (a) $(x + y) + z = x + (y + z)$ für alle $x, y, z \in V$;
- (b) $x + y = y + x$ für alle $x, y \in V$;
- (c) Es gibt ein Element $0 \in V$, genannt „Null“ oder „Nullvektor“, mit $x + 0 = x$ für alle $x \in V$;

(d) Zu jedem $x \in V$ gibt es ein Element $-x \in V$ mit $x + (-x) = 0$;

(e) $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \cdot \mu) \cdot x$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $x \in V$;

(f) $1 \cdot x = x$ für alle $x \in V$;

(g) $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x, y \in V$;

(h) $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $x \in V$.

Die Elemente eines Vektorraums nennt man *Vektoren*.

Ein Beispiel für einen reellen Vektorraum ist der Raum \mathbb{R}^n mit der üblichen Addition

$$(x_1, \dots, x_n)' + (y_1, \dots, y_n)' = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)'$$

und Multiplikation

$$\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n)' = (\lambda \cdot x_1, \dots, \lambda \cdot x_n)'$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $(x_1, \dots, x_n)', (y_1, \dots, y_n)' \in \mathbb{R}^n$. Die Summe zweier Vektoren und das Produkt eines Vektors mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ liegen dabei wieder in \mathbb{R}^n . Außerdem erfüllen die Addition und die Multiplikation offensichtlich die Bedingungen (a)-(h).

Ein weiteres Beispiel für einen reellen Vektorraum ist der in der Arbeit häufig verwendete Raum aller reellwertigen Zufallsvariablen auf einen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) , deren zweites Moment existiert,

$$L^2(\Omega, \mathcal{F}, P) = \{X \mid X \text{ ist eine Zufallsvariable auf } (\Omega, \mathcal{F}, P) \text{ mit } E[X^2] < \infty\}.$$

Die Addition ist hier durch $(X + Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$, die Multiplikation durch $(\lambda \cdot X)(\omega) = \lambda \cdot X(\omega)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}, X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und $\omega \in \Omega$, definiert. Den Nachweis, dass $X + Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ für $X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, findet man beispielsweise in Werner (2007, S. 14 f.). Die restlichen Eigenschaften sind leicht nachzuprüfen.

Nun wird eine zusätzliche Struktur auf einem Vektorraum eingeführt, das sogenannte *Skalarprodukt* oder *innere Produkt*.

Definition B.1.2 Sei V ein reeller Vektorraum. Eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *Skalarprodukt*, falls sie die folgenden Bedingungen erfüllt:

(a) $\langle \lambda \cdot x + \mu \cdot y, z \rangle = \lambda \cdot \langle x, z \rangle + \mu \cdot \langle y, z \rangle$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $x, y, z \in V$;

- (b) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ für alle $x, y \in V$;
- (c) $\langle x, x \rangle \geq 0$ für alle $x \in V$;
- (d) $\langle x, x \rangle = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.

Damit ist das Skalarprodukt symmetrisch und linear in beiden Komponenten. Hinzu kommt die Eigenschaft der *positiven Definitheit*, die durch (c) und (d) beschrieben wird.

Das Skalarprodukt stellt die Verallgemeinerung des *Euklidischen* Skalarprodukts zweier Vektoren aus dem \mathbb{R}^n dar. Das Euklidische Skalarprodukt ist durch

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)'$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)' \in \mathbb{R}^n$, definiert. Mit Hilfe dieses Skalarprodukts kann man auf dem \mathbb{R}^n leicht nachprüfen, ob zwei Vektoren orthogonal zueinander sind. Hier gilt, dass zwei von Null verschiedene Vektoren \mathbf{x} und \mathbf{y} genau dann orthogonal zueinander sind, wenn $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbb{R}^n} = 0$ gilt¹. Auf allgemeinen Vektorräumen V mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ werden zwei Vektoren x und y ebenfalls als orthogonal zueinander bezeichnet, falls $\langle x, y \rangle = 0$ gilt.

Ein weiteres Beispiel eines Skalarprodukts ist das durch $\langle X, Y \rangle = E[X \cdot Y]$ definierte Skalarprodukt auf dem Raum $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.²

Als nächstes wird der Begriff der *Norm* auf einem Vektorraum eingeführt, der den Begriff der *Länge* eines Vektors aus dem \mathbb{R}^n verallgemeinert.

Definition B.1.3 Sei V ein reeller Vektorraum. Eine Abbildung $\| \cdot \| : V \longrightarrow [0, \infty)$ heißt *Norm*, falls sie die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (a) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ für alle $x, y \in V$;
- (b) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x, y \in V$;
- (c) $\|x\| \geq 0$ für alle $x \in V$;
- (d) $\|x\| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.

¹ Siehe dazu Brockwell und Davis (1991), S. 43 f.

² Siehe dazu Brockwell und Davis (1991), S. 47.

Man nennt einen Vektorraum V , auf dem eine Norm $\|\cdot\|$ definiert ist, einen *normierten Raum* $(V, \|\cdot\|)$. Auf jedem Vektorraum V mit einem Skalarprodukt lässt sich durch

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \quad x \in V \quad (\text{B.1.1})$$

eine Norm definieren³.

Auf diese Weise erhält man beispielsweise auf dem \mathbb{R}^n die vom Euklidischen Skalarprodukt induzierten Norm. Auch $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ist mit $\|x\| = \sqrt{E[X \cdot Y]}$ ein normierter Raum.

Sind x und y orthogonale Vektoren eines Vektorraums V , der mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ versehen ist, dann gilt für sie der *Satz von Pythagoras*⁴

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2. \quad (\text{B.1.2})$$

Hierbei bezeichnet $\|\cdot\|$ die vom Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierte Norm (B.1.1).

B.2 Hilbert-Räume

Besitzt ein Vektorraum, auf dem ein Skalarprodukt definiert ist, die Eigenschaft der *Vollständigkeit*, dann spricht man von einem *Hilbert-Raum*. Um den Begriff der Vollständigkeit einführen zu können, muss zuerst der Begriff einer *Cauchy-Folge* geklärt werden.

Definition B.2.1 Sei V ein normierter Raum. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus V heißt *Cauchy-Folge*, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ für alle $n, m > N$ gilt.

Für eine Cauchy-Folge gilt also $\|x_n - x_m\| \rightarrow 0$ für $n, m \rightarrow \infty$. Einen normierten Raum $(V, \|\cdot\|)$ nennt man *vollständig*, falls jede Cauchy-Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|$ gegen ein $x \in V$ konvergiert, d.h. es gilt $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

Definition B.2.2 Ein Vektorraum V mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ heißt *Hilbert-Raum*, wenn jede Cauchy-Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus V bezüglich der vom Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierten Norm gegen ein Element $x \in V$ konvergiert.

³ Zum Nachweis, dass die in (B.1.1) definierte Funktion die Normeigenschaften (a)-(d) aus der Definition B.1.3 erfüllt, siehe z.B. Werner (2007), S. 202.

⁴ Den Nachweis findet man beispielsweise in Brockwell und Davis (1991), S. 44.

Der Raum \mathbb{R}^n mit dem Skalarprodukt $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbb{R}^n}$ ist vollständig⁵. Auch $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ist ein Hilbert-Raum, wie man dem nachfolgenden Beispiel entnehmen kann.

Beispiel B.2.3

Der Raum $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, versehen mit dem Skalarprodukt $\langle X, Y \rangle = E[X \cdot Y]$, ist vollständig.

Beweis: Siehe z.B. Bauer (1992) S. 97 ff. oder Brockwell und Davis (1991), S. 68 f. \square

Für die in der Arbeit verwendeten Methoden sind *abgeschlossene Unterräume* von Hilbert-Räumen von Bedeutung. Ein *Unterraum* eines Vektorraums ist eine nichtleere Teilmenge, die selbst wieder ein Vektorraum ist. Der Begriff der Abgeschlossenheit eines Unterraums wird in der folgenden Definition erläutert.

Definition B.2.4 *Ein Unterraum U eines normierten Raumes $(V, \|\cdot\|)$ heißt abgeschlossen, wenn der Grenzwert aller konvergenten Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq U$ ebenfalls in U liegt.*

Beispiele für abgeschlossene Unterräume eines Hilbert-Raums sind die für die Credibility-Theorie wichtigen Unterräume $L(\mathbf{X}_i, 1)$, $L(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_I)$, $L(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_I, 1)$ und $\mathcal{M}(\mathbf{X}_i)$ des Hilbert-Raums $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.⁶

⁵ Siehe dazu Brockwell und Davis (1991), S. 46.

⁶ Vgl. dazu Brockwell und Davis (1991), S. 55 und 63 f. Die Definitionen der Räume $L(\mathbf{X}_i, 1)$, $L(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_I)$, $L(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_I, 1)$ und $\mathcal{M}(\mathbf{X}_i)$ findet man auf S. 28 f. und 33.

Symbolverzeichnis

$\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{R}_+$	Menge natürlichen Zahlen, der reellen Zahlen und der positiven reellen Zahlen
$A \subseteq B$	A ist Teilmenge von B
$a \in A$	a ist ein Element von A
X	Reellwertige Zufallsvariable
$E[X], \text{Var}(X)$	Erwartungswert bzw. Varianz der Zufallsvariablen X
$\text{Cov}(X, Y)$	Kovarianz von X und Y
\mathbf{X}	Reellwertiger Zufallsvektor
$\text{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$	Kovarianz-Matrix von \mathbf{X} und \mathbf{Y}
$\text{Var}(\mathbf{X})$	Varianz-Kovarianz Matrix von \mathbf{X} ($= \text{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{X})$)
\mathbf{c}, C	Spaltenvektor, Matrix
\mathbf{c}', C'	Transponierter Spaltenvektor bzw. transponierte Matrix
I	Einheitsmatrix
$\mathbf{1}$	Einsen-Vektor ($= (1, \dots, 1)'$)
\square	Ende eines Beweises
Θ_i	Risikoparameter (Strukturparameter), S. 18, 32, 63
F^*	Verteilung der Risikoparameter Θ_i , S. 18
μ	Kollektiv-Prämie, S. 19, 24
ζ^2, τ^2	Strukturparameter, S. 22, 33
msep	Mean Square Error of Prediction, S. 22, 45, 72, 76
c	Credibility-Faktor im Bühlmann-Modell, S. 23
$X_{i,j}$	Schadenvariablen bzw. Beobachtungen, S. 24, 59
$\mu(\Theta_i)$	Individual-Prämie des i -ten Risikos für die zukünftige Periode, S. 24
$\widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{cred}}$	(Inhomogener) Credibility-Prädiktor für $\mu(\Theta_i)$, S. 24, 29, 34
$\bar{X}_{i,n}$	Durchschnittlicher Schadenaufwand des i -ten Risikos, S. 24
\bar{X}_n	Durchschnittlicher Schadenaufwand aller Risiken, S. 24
$\widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{hom}}$	Homogener Credibility-Prädiktor für $\mu(\Theta_i)$, S. 25, 29, 36
(Ω, \mathcal{F}, P)	Wahrscheinlichkeitsraum, S. 27

$L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$	Raum aller reellwertigen Zufallsvariablen auf (Ω, \mathcal{F}, P) , deren zweites Moment existiert, S. 27
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Skalarprodukt auf $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, S. 27
$\ \cdot \ $	Die vom Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierte Norm auf $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, S. 27
$L(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_I)$	Unterraum von $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, S. 28
$L(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_I, 1)$	Unterraum von $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, S. 33
X_U	Orthogonale Projektion von $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ auf den Unterraum $U \subseteq L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, S. 28
$w_{i,j}$	Gewichtungs-/Normierungsfaktoren im Bühlmann-Straub-Modell, S. 33
c_i	Credibility-Faktor im Bühlmann-Straub-Modell, S. 34
G_i	Mit $w_{i,j}$ gewichtetes Mittel der Schadenvariablen des i -ten Risikos, S. 36
$\hat{\mu}, \hat{\zeta}^2, \hat{\tau}^2$	Schätzer der Strukturparameter μ, ζ^2, τ^2 , S. 36, 38, 39
$w_{i,\bullet}, w_{\bullet,\bullet}$	Kurznotation für die Summation über einen Index bzw. beide Indizes, S. 39
$\mathbf{X}_{i,j}$	Zufallsvektor bestehend aus Schadenvariablen, S. 43, 63
$\mathbf{w}_{i,j}, \mathbf{w}_{i,j,\xi,\delta}$	Vektor der Gewichtungs-/Normierungsfaktoren, S. 43, 64, 65
$L^{2,M}(\Omega, \mathcal{F}, P)$	Raum aller M -dimensionalen Zufallsvektoren auf (Ω, \mathcal{F}, P) , deren zweites Moment existiert, S. 43
$\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)$	Zu prognostizierender Zufallsvektor im multivariaten Bühlmann-Straub-Modell (mehrdimensionale Individual-Prämie), S. 44, 65
$\mathbf{D}(\mathbf{a}), \mathbf{D}(\mathbf{a})^b$	Quadratische Diagonalmatrizen, S. 44.
$L(\mathcal{D}_I^M, 1), L(\mathcal{D}_I^M)$	Unterräume von $L^{2,M}(\Omega, \mathcal{F}, P)$, S. 45, 48, 66, 68
$\boldsymbol{\mu}, S, T$	Strukturparameter, S. 45, 66
$\widehat{\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)}^{\text{cred}}$	Multidimensionaler (inhomogener) Credibility-Prädiktor für $\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)$, S. 46, 67
\mathbf{G}_i	Komprimierter Beobachtungsvektor, S. 46, 67
C_i	Credibility-Matrix, S. 46, 67
$\widehat{\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)}^{\text{hom}}$	Multidimensionaler homogener Credibility-Prädiktor für $\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)$, S. 48, 68
$\hat{\boldsymbol{\mu}}$	Schätzer für $\boldsymbol{\mu}$, S. 48, 68
\hat{S}	Schätzer für S , 50, 78
\hat{T}	Schätzer für T , 51, 80
\hat{C}_i	Schätzer für C_i , 52, 73
$\mathcal{D}_I^{(m)}$	Menge der Beobachtungen im m -ten run-off Subportfolio, S. 62

\mathcal{D}_I^M	Menge der Beobachtungen aus allen (bzw. M) run-off Subportfolios, S. 63
$\mathbf{C}_{i,j}$	Zufallsvektor der kumulierten Schäden, S. 63
\mathbf{R}_i	Zufallsvektor der Spätschadenreserven des i -ten Anfalljahres, S. 63
γ_j, β_j	Schadenabwicklungsmuster, S. 64
μ_i	A priori Erwartungswerte für den Endschadenstand $\mathbf{C}_{i,J}$, S. 64
$\mathbf{Y}_{i,j}$	Vektor der normierten Beobachtungen, S. 64
$\beta_{I-i,\xi}$	Parametervektor, S. 67
$\hat{\gamma}_j, \hat{\beta}_j$	Schätzer für γ_j bzw. β_j , S. 70
$\widehat{\mathbf{R}}_i^{\text{cred}}, \widehat{\mathbf{R}}_i^{\text{hom}}$	Prädiktoren für die Spätschadenreserve \mathbf{R}_i , S. 71
$\widehat{\text{mse}}_p$	Schätzer für den bedingten MSEP, S. 74, 77
C	Copula, S. 93
C_ρ^{Ga}	Gauß-Copula, S. 94
C_φ	Archimedische Copula mit Generator φ , S. 97
ψ	Laplace-Transformation einer Zufallsvariablen Θ , S. 98
Θ	Latente Variable (systematisches Risiko), S. 99, 103
F_Θ	Verteilungsfunktion von Θ , S. 99, 103
$A(\Theta)$	Bedingte Erwartung $E[X_1 \Theta]$, S. 104, 106
$\text{supp}(\Theta)$	Träger bzw. Wertebereich von Θ , S. 105
Θ_M	Supremum des Trägers von Θ , S. 105
Θ_m	Infimum des Trägers von Θ , S. 105
Λ_n	Kumulantenerzeugende Funktionen einer Folge von Zufallsvariablen, S. 109
Λ	Grenzwert für die Folge der passend skalierten kumulantenerzeugenden Funktionen, S. 109, 111, 119
Λ^*	Fenchel-Legendre-Transformation der Funktion Λ , S. 109, 111
Z_n	Arithmetisches Mittel der Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n , S. 110, 118

Tabellenverzeichnis

4.1	Beobachtete kumulierte Schäden $C_{i,j}^{(1)}$ in Portfolio A.	81
4.2	Beobachtete kumulierte Schäden $C_{i,j}^{(2)}$ in Portfolio B.	81
4.3	A priori Erwartungswerte $\mu_i^{(m)}$	81
4.4	Geschätztes Abwicklungsmuster $\hat{\gamma}_j^{(m)}$ für Portfolio A und B.	81
4.5	Schätzer der Strukturparameter S and T ($\xi = 0$).	82
4.6	Ergebnisse für das gesamte Portfolio für aggregierte Anfalljahre.	83

Abbildungsverzeichnis

2.1	3-Säulen-Modell	9
4.1	Abwicklungsdreieck	58
4.2	Das m -te Abwicklungsdreieck	62
5.1	Verteilungsfunktion des Anteils der Ausfälle zu den Zeitpunkten $t =$ $2, t = 3,5$ und $t = 5$	118

Literaturverzeichnis

- AISAM-ACME (2007). *AISAM-ACME study on non-life long tail liabilities: Reserve risk and risk margin assessment under Solvency II*. Association Internationale des Sociétés d'Assurance Mutuelle, Association of European Cooperative and Mutual Insurers. http://www.aisam.org/upload/documents/AISAM-ACME_Study_non-life_long_tail_2007-10-17.pdf.
- Ajne, B. (1994). Additivity of chain-ladder projections. *ASTIN-Bulletin*, 24: 311–318.
- Albrecht, P. und Lippe, S. (1988). Prämie, mathematische und wirtschaftliche Fragen. In Farny, D., Helten, E., Koch, P., und Schmidt, R. (Hrsg.), *Handwörterbuch der Versicherung*, S. 525–532. VVW, Karlsruhe.
- Altenähr, V., Nguyen, T., und Romeike, F. (2009). *Risikomanagement kompakt*. VVW, Karlsruhe.
- Bailey, A. L. (1945). A generalized theory of credibility. *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, 32: 13–20.
- Bailey, A. L. (1950). Credibility procedures, laplace's generalization of bayes's rule and the combination of collateral knowledge with observed data. *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, 37: 7–23.
- Bauer, H. (1992). *Maß- und Integrationstheorie*. de Gruyter, Berlin New York, 2. überarbeitete Auflage.
- Bauer, H. (2002). *Wahrscheinlichkeitstheorie*. de Gruyter, Berlin New York, 5. Auflage.
- Benktander, G. (1976). An approach to credibility in calculating IBNR for casualty excess reinsurance. *The Actuarial Review, April 1976*, 3: 7.
- Bühlmann, H. (1967). Experience rating and credibility. *ASTIN-Bulletin*, 4: 199–207.
- Bühlmann, H. (1969). Experience rating and credibility. *ASTIN-Bulletin*, 5: 157–165.

- Bühlmann, H. und Gisler, A. (1997). Credibility in the regression case revisited. *ASTIN-Bulletin*, 27: 83–98.
- Bühlmann, H. und Gisler, A. (2005). *A Course in Credibility Theory and its Applications*. Springer, Berlin Heidelberg New York.
- Bühlmann, H., Gisler, A., und Kollöffel, D. (2003). Multidimensional credibility applied to estimating the frequency of big claims. *ASTIN Colloquium International Actuarial Association*, http://www.actuaries.org/ASTIN/Colloquia/Berlin/Buhlmann_Gisler_Kolloffel.pdf.
- Bühlmann, H. und Jewell, W. S. (1987). Hierarchical credibility revisited. *Bulletin of Swiss Association of Actuaries*, S. 35–54.
- Bühlmann, H., Shevchenko, P. V., und Wüthrich, M. V. (2007). A "toy" model for operational risk quantification using credibility theory. *Journal of Operational Risk*, 2: 3–19.
- Bühlmann, H. und Straub, E. (1970). Glaubwürdigkeit für Schadensätze. *Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker*, 70: 111–133.
- BIS (2005). *International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards - A Revised Framework*. Basel Committee on Banking Supervision, Bank for International Settlements. <http://www.bis.org/publ/bcbs118.pdf?noframes=1>.
- Bolstad, W. M. (2004). *Introduction to Bayesian Statistics*. John Wiley & Sons Ltd, Hoboken, New Jersey.
- Braun, C. (2004). The prediction error of the chain ladder method applied to correlated run-off triangles. *ASTIN-Bulletin*, 34: 399–432.
- Brehm, P. J. (2002). Correlation and the aggregation of unpaid loss distributions. *CAS Forum (Fall)*, S. 1–24.
- Brockwell, P. J. und Davis, R. A. (1991). *Time Series: Theory and Methods*. Springer, Berlin Heidelberg New York, Second Edition.
- Carter, M. und Van Brunt, B. (2000). *The Lebesgue-Stieltjes Integral. A practical Introduction*. Springer, New York.
- Clemens, K. (2006). Enterprise Risk Management - Bedeutung im Ratingprozess von Standard & Poor's. In *RISIKO MANAGER*. Ausgabe 22/2006: 16-18.

- Coles, S., Heffernan, J. E., und Tawn, J. (1999). Dependence measures for extreme value analyses. *Extremes*, 2: 339–365.
- De Jong, P. und Zehnwirth, B. (1983). Credibility theory and the Kalman filter. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2: 281–286.
- De Vylder, F. (1976a). Geometrical credibility. *Scandinavian Actuarial Journal*, S. 121–149.
- De Vylder, F. (1976b). Optimal semilinear credibility. *Bulletin of Swiss Association of Actuaries*, S. 27–40.
- De Vylder, F. (1982). Estimation of IBNR claims by credibility theory. *Insurance: Mathematics and Economics*, 1: 35–40.
- De Vylder, F. und Ballegeer, Y. (1979). A numerical illustration of optimal semilinear credibility. *ASTIN-Bulletin*, 10: 131–148.
- De Vylder, F. und Goovaerts, M. J. (1992). A summary of new results on optimal parameter estimation under zero-excess assumptions. *Insurance: Mathematics and Economics*, 11: 153–161.
- Deheuvels, P. (1978). Caractérisation complète des lois extrêmes multivariées et de la convergence des types extrêmes. *Publications de l'Institut de Statistique de L'Université de Paris*, 23: 1–37.
- Dembo, A. und Zeitouni, O. (1998). *Large Deviations Techniques and Applications*. Springer, New York Berlin Heidelberg, Second Edition.
- Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M. J., und Kaas, R. (2005). *Actuarial Theory for Dependent Risks: Measures, Orders and Models*. John Wiley & Sons Ltd.
- Dimitrova, D. S., Kaishev, V. K., und Penev, S. I. (2008). GeD spline estimation of multivariate Archimedean copulas. *Computational Statistics & Data Analysis*, 52: 3570–3582.
- Dinwoodie, I. H. und Zabell, S. L. (1992). Large deviations for exchangeable random vectors. *Annals of Probability*, 20: 1147–1166.
- Dubey, A. und Gisler, A. (1981). On parameter estimators in credibility. *Bulletin of Swiss Association of Actuaries*, 2: 187–212.

- Embrechts, P., McNeil, A. J., und Straumann, D. (2002). Correlation and dependence in risk management: Properties and pitfalls. In Dempster, M. (Hrsg.), *Risk Management: Value at Risk and Beyond*, S. 176–223. Cambridge University Press, Cambridge.
- Farny, D. (2000). *Versicherungsbetriebslehre*. VVW, Karlsruhe, 3. überarbeitete Auflage.
- Feller, W. (1968). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol I*. John Wiley & Sons Inc., Third Edition.
- Feller, W. (1971). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol II*. John Wiley & Sons Inc., Second Edition.
- Fréchet, M. (1951). Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données. *Annales de l'Université de Lyon, Sect. A*, 14: 53–77.
- Frees, E. W. und Valdez, E. A. (1998). Understanding relationships using copulas. *North American Actuarial Journal*, 2: 1–25.
- GDV (2005). Diskussionsbeitrag für einen Solvency II kompatiblen Standardansatz (Säule I). *Gesamtverband der Deutschen Versicherungswirtschaft e.V.*, http://www.gdv.de/Downloads/Themen/Solvency2_Doku.pdf.
- GDV (2008). Methoden zur Schätzung von Schaden- und Prämienrückstellungen. *Gesamtverband der Deutschen Versicherungswirtschaft e.V.*, https://secure.gdv.de/gdv-veroeffentlichungen/upload_img/145_dwl.pdf.
- Genest, C. und Favre, A.-C. (2007). Everything you always wanted to know about copula modeling but were afraid to ask. *Journal of Hydrologic Engineering*, 12: 347–368.
- Genest, C., Ghoudi, K., und Rivest, L.-P. (1995). A semiparametric estimation procedure of dependence parameters in multivariate families of distributions. *Biometrika*, 82: 543–552.
- Genest, C. und Nešlehová, J. (2007). A primer on copulas for count data. *ASTIN Bulletin*, 37: 475–515.
- Genest, C. und Rivest, L.-P. (1993). Statistical inference procedures for bivariate Archimedean copulas. *Journal of the American Statistical Association*, 88: 1034–1043.

- Gerber, H. U. und Jones, D. A. (1975a). Credibility formulas of the updating type. *Transaction of the Society of Actuaries*, 27: 31–46.
- Gerber, H. U. und Jones, D. A. (1975b). Credibility formulas of the updating type. In Kahn, P. M. (Hrsg.), *Credibility: Theory and Applications*, S. 89–105. Academic Press, Inc., New York.
- Gilks, W. R., Richardson, S., und Spiegelhalter, D. J. (1996). *Markov Chain Monte Carlo in Practice*. Chapman & Hall/CRC.
- Gisler, A. (1980). Optimum trimming of data in the credibility model. *Bulletin of Swiss Association of Actuaries*, S. 313–325.
- Gisler, A. und Wüthrich, M. V. (2008). Credibility for the chain ladder reserving method. *ASTIN-Bulletin*, 38: 565–600.
- Goulet, V. (1998). A note on optimal parameter estimation under zero-excess assumptions. *Insurance: Mathematics and Economics*, 23: 111–117.
- Grießmann, G., Krüger, U., und Oehlenberg, L. (2005). Diskussionsbeitrag für ein mit Solvency II kompatibles Standardmodell. In Gründl, H. und Perlet, H. (Hrsg.), *Solvency II & Risikomanagement: Umbruch in der Versicherungswirtschaft*, S. 223–238. Gabler Verlag.
- Hachemeister, C. A. (1975). Credibility for regression models with application to trend. In Kahn, P. M. (Hrsg.), *Credibility: Theory and Applications*, S. 129–163. Academic Press, Inc., New York.
- Hairer, E. und Wanner, G. (1996). *Analysis by Its History*. Springer, New York Berlin Heidelberg.
- Halliwell, L. J. (1999). Conjoint prediction of paid and incurred losses. *CAS Forum (Summer)*, 1: 241–379.
- Hamerle, A. und Plank, K. (2008). Rating von ABS-CDOs. ABS-CDOs mit Subprime Exposure: „Hochgiftig“ trotz AAA-Rating? In *RISIKO MANAGER*. Ausgabe 25/26/2008: 1,8-10.
- Hartung, T. (2005). Überprüfungsverfahren und Marktdisziplin als Instrument der Versicherungsaufsicht. In Gründl, H. und Perlet, H. (Hrsg.), *Solvency II & Risikomanagement: Umbruch in der Versicherungswirtschaft*, S. 53–70. Gabler Verlag.

- Heffernan, J. E. (2000). A directory of coefficients of tail dependence. *Extremes*, 3: 279–290.
- Hess, K. T. und Schmidt, K. D. (1994). *Convergence of Bayes and credibility premiums in the Bühlmann-Straub model*. Dresdner Schriften zur Versicherungsmathematik.
- Hess, K. T., Schmidt, K. D., und Zocher, M. (2006). Multivariate loss prediction in the multivariate additive model. *Insurance: Mathematics and Economics*, 39: 185–191.
- Höfding, W. (1940). Masstabinvariante Korrelationstheorie. *Schriften des Mathematischen Instituts und des Instituts für Angewandte Mathematik der Universität Berlin*, 5: 179–233.
- Hofert, M. (2008). Sampling Archimedean copulas. *Computational Statistics & Data Analysis*, 52: 5163–5174.
- Holmberg, R. D. (1994). Correlation and the measurement of loss reserve variability. *CAS Forum (Spring)*, 1: 247–278.
- Huergo, L. A. (2009). *Multiple-Imputationsmodelle für Knowledge Economy Indicators: Theorie, Implementierung und Verbesserungsvorschläge*. PhD thesis, Universität Tübingen.
- Hull, J. C. (2009). *Options, Futures, and Other Derivatives*. Prentice Hall International, Seventh Edition.
- IAA (2004). *A Global Framework for Insurer Solvency Assessment*. International Actuarial Association. http://www.actuaries.org/LIBRARY/papers/global_framework_insurer_solvency_assessment-public.pdf.
- Jewell, W. S. (1973). Multi-dimensional credibility. Technical Report 73-7, Operations Research Center, Berkeley.
- Jewell, W. S. (1974). Credibility means are exact bayesian für exponential families. *ASTIN-Bulletin*, 8: 77–90.
- Jewell, W. S. (1975). The use of collateral data in credibility theory: a hierarchical model. *Giornale dell’Istituto Italiano degli Attuari*, 38: 1–16.
- Jänich, K. (2008). *Lineare Algebra*. Springer, Berlin Heidelberg Ney York, 11. Auflage.
- Joe, H. (1997). *Multivariate Models and Dependence Concepts*. Chapman & Hall, London.

- Johansson, B. und Ohlsson, E. (2006). Exact credibility and tweedie models. *ASTIN-Bulletin*, 36: 121–133.
- Juri, A. und Wüthrich, M. V. (2003). Tail dependence from a distributional point of view. *Extremes*, 6: 213–246.
- Kaas, R., Dannenburg, D., und Goovaerts, M. J. (1997). Exact credibility for weighted observations. *ASTIN-Bulletin*, 27: 287–295.
- Kaas, R., Goovaerts, M. J., Dhaene, J., und Denuit, M. (2008). *Modern Actuarial Risk Theory: Using R*. Springer, Berlin Heidelberg New York, Second Edition.
- Kim, G., Silvapulle, M. J., und Silvapulle, P. (2007). Comparison of semiparametric and parametric methods for estimating copulas. *Computational Statistics & Data Analysis*, 51: 2836–2850.
- Kimberling, C. H. (1974). A probabilistic interpretation of complete monotonicity. *Aequationes Mathematicae*, 10: 152–164.
- Kirschner, G. S., Kerley, C., und Isaacs, B. (2002). Two approaches to calculating correlated reserve indications across multiple lines of business. *CAS Forum (Fall)*, S. 211–246.
- Klemmt, H.-J. (2005). Separierung von Abwicklungsdreiecken nach Basisschäden und Großschäden. *Blätter der deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik*, 27: 49–58.
- KOM(2007) (Juli 2007). Vorschlag für eine Richtlinie des europäischen Parlaments und des Rates betreffend die Aufnahme und Ausübung der Versicherungs- und der Rückversicherungstätigkeit (Solvabilität II). <http://eur-lex.europa.eu/lexuriserv/lexuriserv.do?uri=com:2007:0361:fin:de:pdf>.
- KOM(2008) (Februar 2008). Geänderter Vorschlag für eine Richtlinie des europäischen Parlaments und des Rates betreffend die Aufnahme und Ausübung der Versicherungs- und der Rückversicherungstätigkeit (Solvabilität II). http://ec.europa.eu/internal_market/insurance/docs/solvency/proposal_de.pdf.
- KPMG Deutsche Treuhand-Gesellschaft (Hrsg.) (2004). *International Financial Reporting Standards: Eine Einführung in die Rechnungslegung nach den Grundsätzen des IASB*. Schäffer-Poeschel, Stuttgart, 3. überarbeitete Auflage.

- Lambert, P. (2007). Archimedean copula estimation using Bayesian splines smoothing techniques. *Computational Statistics & Data Analysis*, 51: 6307–6320.
- Li, D. X. (2000). On default correlation: A copula function approach. *Journal of Fixed Income*, 9: 43–54.
- Lundberg, O. (1940). On random processes and their application to sickness and accident statistics. In *University of Stockholm Thesis*. Almquist & Wiksells, Uppsala, 2. Auflage, Almquist & Wiksells, Uppsala, 1964.
- Mack, T. (2000). Credible claims reserves: the Benktander method. *ASTIN-Bulletin*, 30: 333–347.
- Mack, T. (2002). *Schadenversicherungsmathematik*. VVW, Karlsruhe, 2. Auflage.
- Maier, R. und Merz, M. (2008). Credibility theory and filter theory in discrete and continuous time. *Tübinger Diskussionsbeiträge*, <http://w210.ub.uni-tuebingen.de/volltexte/2008/3610/pdf/318.pdf>.
- Maier, R. und Merz, M. (2009). Multivariate Bühlmann-Straub credibility model applied to claims reserving for dependent lines of business. Submitted preprint.
- Maier, R. und Wüthrich, M. V. (2009). Law of large numbers and large deviations for dependent risks. *Quantitative Finance*, 9: 207–215.
- Mangold, K.-P. (1987). Recursive Schätzverfahren in der Kreditabilitätstheorie. *Blätter der deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik*, S. 27–43.
- MARKT/2539/03 (September 2003). Solvency II – Reflections on the general outline of a framework directive and mandates for further technical work. http://ec.europa.eu/internal_market/insurance/docs/markt-2539-03/markt-2539-03_en.pdf.
- Marshall, A. W. und Olkin, I. (1988). Families of multivariate distributions. *Journal of the American Statistical Association*, 83: 834–841.
- McNeil, A. J. (2008). Sampling nested Archimedean copulas. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 78: 567–581.
- McNeil, A. J., Frey, R., und Embrechts, P. (2005). *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques, Tools*. Princeton University Press, Princeton.
- McNeil, A. J. und Nešlehová, J. (2007). Multivariate archimedean copulas, d -monotone functions and l_1 -norm symmetric distributions. Forthcoming in *Annals of Statistics*.

- Merz, M. (2004). *Das Konzept der orthogonalen Projektion zur Bestimmung von Credibility-Schätzern in diskreter und kontinuierlicher Zeit*. Peter Lang.
- Merz, M. (2005). *Risikogerechte Prämienberechnung in stetiger Zeit*. VVW, Karlsruhe.
- Merz, M. und Wüthrich, M. V. (2007). Prediction error of the chain ladder reserving method applied to correlated run off triangles. *Annals of Actuarial Science*, 2: 25–50.
- Merz, M. und Wüthrich, M. V. (2008a). Combining chain-ladder and additive loss reserving method for dependent lines of business. Submitted preprint.
- Merz, M. und Wüthrich, M. V. (2008b). Prediction error of the multivariate additive loss reserving method for dependent lines of business. Forthcoming in *Variance*.
- Merz, M. und Wüthrich, M. V. (2008c). Prediction error of the multivariate chain ladder reserving method. *North American Actuarial Journal*, 12: 175–197.
- Meyer, L. (2005). Implikationen von IFRS für Solvency II. In Gründl, H. und Perlet, H. (Hrsg.), *Solvency II & Risikomanagement: Umbruch in der Versicherungswirtschaft*, S. 99–118. Gabler Verlag.
- Mikosch, T. (2006). Copulas: Tales and facts. *Extremes*, 9: 3–20.
- Mildenhall, S. J. (2006). A multivariate Bayesian claim count development model with closed form posterior and predictive distributions. *CAS Forum (Winter)*, S. 451–493.
- Müller, A. und Scarsini, M. (2005). Archimedean copulae and positive dependence. *Journal of Multivariate Analysis*, 93: 434–445.
- Moore, D. S. und Spruill, M. C. (1975). Unified large-sample theory of general chi-squared statistics for tests of fit. *Annals of Statistics*, 3: 599–616.
- Mowbray, A. H. (1914). How extensive a payroll exposure is necessary to give a dependable pure premium? *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, 1: 24–30.
- Nelsen, R. B. (1999). *An Introduction to Copulas*. Springer, New York.
- Neuhaus, W. (1992). Another pragmatic loss reserving method or Bornhuetter/Ferguson revisited. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2: 151–162.
- Norberg, R. (1982). On optimal parameter estimation in credibility. *Insurance: Mathematics and Economics*, 1: 73–89.

- Norberg, R. (1986). Hierarchical credibility: Analysis of a random effect linear model with nested classification. *Scandinavian Actuarial Journal*, S. 204–222.
- Norberg, R. (1992). Linear estimation and credibility in continuous time. *ASTIN-Bulletin*, 22: 149–165.
- Pröhl, C. und Schmidt, K. D. (2005). Multivariate chain-ladder. *Dresdner Schriften zur Versicherungsmathematik*, 3.
- Quarg, G. und Mack, T. (2004). Munich chain ladder: A reserving method that reduces the gap between ibnr projections based on paid losses and ibnr projections based on incurred losses. *Blätter der deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik*, 26: 597–630.
- Richtlinie 2002/13/EG (März 2002). Richtlinie 2002/13/EG des europäischen Parlaments und des Rates vom 5. März 2002 zur Änderung der Richtlinie 73/239/EWG des Rates hinsichtlich der Bestimmungen über die Solvabilitätsspanne für Schadenversicherungsunternehmen. *Amtsblatt der Europäischen Gemeinschaften 20.03.2002*, L 77: 17–22.
- Richtlinie 2002/83/EG (November 2002). Richtlinie 2002/83/EG des europäischen Parlaments und des Rates vom 5. November 2002 über Lebensversicherungen. *Amtsblatt der Europäischen Gemeinschaften 19.12.2002*, L 345: 1–51.
- Romeike, F. und Hein, T. (2006). Die Assekuranz am Scheideweg - Ergebnisse der ersten Benchmark-Studie zu Solvency II. In *Zeitschrift für Versicherungswesen*. Ausgabe 10/2006: 316–321.
- Rudin, W. (2005). *Analysis*. Oldenburg, München, 3. Auflage.
- Sandström, A. (2006). *Solvency: Models, Assessment and Regulation*. Chapman & Hall/CRC.
- Schaich, E. und Münnich, R. (2001). *Mathematische Statistik für Ökonomen*. Verlag Vahlen, München.
- Schanté, D. und Caudet, L. (2005). Wer entscheidet über zukünftige Solvabilitätsregeln für europäische Versicherer? In Gründl, H. und Perlet, H. (Hrsg.), *Solvency II & Risikomanagement: Umbruch in der Versicherungswirtschaft*, S. 71–84. Gabler Verlag.

- Schmidt, K. D. (1990). Convergence of bayes and credibility premiums. *ASTIN-Bulletin*, 20: 167–172.
- Schmidt, K. D. (2006a). Optimal and additive loss reserving for dependent lines of businessq. *CAS Forum (Fall)*, S. 319–351.
- Schmidt, K. D. (2006b). *Versicherungsmathematik*. Springer, Berlin Heidelberg New York, 2. durchgesehene Auflage.
- Schönbucher, P. J. (2003). *Credit Derivatives Pricing Models: Models, Pricing and Implementation*. John Wiley & Sons Ltd.
- Schönbucher, P. J. (2004). Taken to the limit: simple and not-so-simple loan loss distributions. In Wilmott, P. (Hrsg.), *The Best of Wilmott 1: Incorporating the Quantitative Finance Review*, S. 143–160. John Wiley & Sons Ltd.
- Schradin, H. R. (2003). Entwicklungen der Versicherungsaufsicht. In *Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft*. Heft 4, 2003: 611-664.
- Schürger, K. (1998). *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Oldenburg, München Wien.
- Shiryayev, A. N. (1996). *Probability*. Springer, New York Berlin Heidelberg, Second Edition (Übersetzung: Boas, R.P.).
- Sklar, A. (1959). Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. *Publications de l'Institut de Statistique de L'Université de Paris*, 8: 229–231.
- Sklar, A. (1996). Random variables, distribution functions, and copulas - a personal look backward and forward. In Rüschendorf, L., Schweizer, B., und Taylor, M. D. (Hrsg.), *Distributions with Fixed Marginals and Related Topics*, S. 1–14. Institute of Mathematical Statistics, Hayward, CA.
- SST (2006). *Technisches Dokument zum Swiss Solvency Test*. Bundesamt für Privatversicherungen. http://www.finma.ch/archiv/bpv/download/d/SST_technischesDokument_061002.pdf.
- Standard & Poor's (2005). *Evaluating The Enterprise Risk Management Practices Of Insurance Companies*. Standard & Poor's, RatingsDirect, http://www2.standardandpoors.com/spf/pdf/media/ERM_Article_05_17_09.pdf.
- Sundt, B. (1979). A hierarchical regression credibility model. *Scandinavian Actuarial Journal*, S. 107–114.

- Sundt, B. (1980). A multi-level hierarchical credibility regression model. *Scandinavian Actuarial Journal*, S. 25–32.
- Sundt, B. (1981). Recursive credibility estimation. *Scandinavian Actuarial Journal*, S. 3–21.
- Sundt, B. (1982). Invariantly recursive credibility estimation. *Insurance: Mathematics and Economics*, 1: 185–195.
- Taylor, G. und McGuire, G. (2007). A synchronous bootstrap to account for dependencies between lines of business in the estimation of loss reserve prediction error. *North American Actuarial Journal*, 11: 70–88.
- Taylor, G. C. (1977). Abstract credibility. *Scandinavian Actuarial Journal*, S. 149–168.
- Taylor, G. C. (1979). Credibility analysis of a general hierarchical model. *Scandinavian Actuarial Journal*, S. 1–12.
- Wagner, C. (2005). Das interne Risikokapitalmodell der Allianz-Gruppe. In Gründl, H. und Perlet, H. (Hrsg.), *Solvency II & Risikomanagement: Umbruch in der Versicherungswirtschaft*, S. 265–282. Gabler Verlag.
- Werner, D. (2007). *Funktionalanalysis*. Springer, Berlin Heidelberg New York, 6. korrigierte Auflage.
- Whelan, N. (2004). Sampling from Archimedean copulas. *Quantitative Finance*, 4: 339–352.
- Whitney, A. W. (1918). The theory of experience rating. *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, 4: 274–292.
- Witting, T. (1987). Kreditabilitätsschätzungen für die Anzahl IBNR-Schäden. *Blätter der deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik*, 18: 45–58.
- Wüthrich, M. V. und Merz, M. (2008). *Stochastic Claims Reserving Methods in Insurance*. John Wiley & Sons Ltd.
- Wüthrich, M. V., Merz, M., und Lysenko, N. (2008). Uncertainty in the claims development result in the chain ladder method. *Scandinavian Actuarial Journal*, S. 1–22.