Università degli Studi di Trieste

FACOLTÀ DI ECONOMIA
Corso di Laurea Magistrale in Scienze Statistiche e Attuariali

Tesi di laurea magistrale

Analisi dei riscatti in una gestione separata

Candidato:
Longo Marco
Matricola EC7100014

Relatore:
Prof. Ermanno Pitacco

Correlatori:
Prof.ssa Anna Rita Bacinello
Dott. Marco Vesentini

Anno Accademico 2011-2012

Alla mia famiglia.

Indice

Elenco delle figure

Elenco delle tabelle

Introduzione

Le assicurazioni rivalutabili offrono la partecipazione agli utili finanziari della particolare gestione interna separata in cui vengono investiti i premi versati e prevedono garanzie di rendimento minimo. La questione delicata è relativa al fatto che, solitamente, questi contratti permettono al contraente di riscattare con valori di riscatto che includono la quota di partecipazione agli utili accumulata fino a quel momento. Se le frequenze di riscatto aumentano quando il valore di mercato del portafoglio titoli della gestione separata diminuisce, allora la compagnia di assicurazione potrebbe essere costretta a subire perdite di mercato per affrontare il bisogno inatteso di liquidità per il pagamento delle prestazioni. Diversi studi empirici hanno dimostrato che un aumento dei tassi d'interesse può spingere i contraenti ad abbandonare i contratti assicurativi al fine di perseguire investimenti più profittevoli (non necessariamente nel mercato assicurativo). Questa situazione potrebbe provocare un pericoloso circolo vizioso: un considerevole aumento dei riscatti potrebbe obbligare l'assicuratore a subire perdite, dovute alla vendita di titoli minusvalenti per coprire l'ammontare dei valori di riscatto; le perdite impattano sul rendimento della gestione e potrebbero comprometterlo in una misura tale da non soddisfare il rendimento minimo garantito; in questo caso l'assicuratore è obbligato a integrare con capitale proprio gli impegni nei confronti degli assicurati, i quali potrebbero perdere la fiducia sulla solidità finanziaria della compagnia e come conseguenza si potrebbero innescare nuove richieste di riscatto.

Il presente lavoro di tesi ha appunto come oggetto l'analisi dell'opzione di riscatto associata alle assicurazioni miste rivalutabili. Lo studio si sviluppa sia in termini di ricerca dei fattori che possono influenzare la decisione del contraente di riscattare la propria polizza vita, che di valutazione dell'opzione di riscatto. La tesi è composta da quattro capitoli, di cui l'ultimo conclusivo, e un'appendice.

Nel *primo capitolo*, dopo una breve introduzione sull'importanza di considerare nelle principali valutazioni che caratterizzano il settore assicurativo vita il "comportamento dinamico dei contraenti", è proposta un'analisi descrittiva delle opzioni incorporate nei contratti di assicurazione sulla vita (opzione di liquidazione, opzione di riscatto, opzione di riduzione e riattivazione, opzione di differimento automatico di scadenza, opzione di trasformazione contrattuale, opzione di over-depositing e opzione di prestito garantito da polizza).

Il *secondo capitolo* è dedicato alla ricerca dei fattori che possono influenzare la decisione del contraente di riscattare la propria polizza. I dati su cui è basato lo studio sono relativi ai contratti di una gestione separata di una compagnia di Bancassicurazione. La ricerca è condotta attraverso il *modello logistico di regressione a tempo discreto*, a cui supporto è effettuata preliminarmente un'analisi non parametrica dei dati, mediante il *metodo attuariale*.

Il *terzo capitolo* è dedicato al *pricing* dell'opzione di riscatto di un'assicurazione mista rivalutabile a premio unico. A tal fine è utilizzato il metodo *Least Squares Monte Carlo* impiegato in ambito puramente finanziario per il *pricing* delle opzioni americane. L'obiettivo è quello di determinare il valore dell'opzione di riscatto in ipotesi di *perfetta* razionalità dei contraenti e un valore più realistico rilassando tale ipotesi. Il capitolo si conclude con un esempio numerico.

In *appendice* è presentato il metodo della massima verosimiglianza per la stima dei parametri del modello logistico di regressione a tempo discreto.

Capitolo 1

Opzioni incorporate nei contratti di assicurazione sulla vita

1.1 Premessa

L'introduzione di nuove regole di contabilizzazione e di valutazione dei contratti assicurativi (Progetto *Insurance contract* avviato dall'*International Accounting Standards Board*) ha reso necessario un aggiornamento dell'approccio valutativo nelle imprese di assicurazione. I criteri di valutazione devono essere coerenti con il mercato (*market consistent*) ovvero, in estrema sintesi, il concetto di valore deve essere riconducibile al prezzo di scambio in un mercato con specifiche caratteristiche (profondità, liquidità e trasparenza). Quindi, un valore *market consistent* deve rappresentare l'"importo al quale un attivo potrebbe essere scambiato, o una passività liquidata, tra parti ben informate che agiscono in condizioni di concorrenzialità". Per un attivo basta considerare, nella maggior parte dei casi, il suo prezzo di mercato. Mentre per un passivo, dato che la quasi totalità dei passivi non è trattata su mercati adeguati, è necessario far riferimento ad un modello di valutazione costruito sulla base di solidi princìpi finanziari e probabilistici.

L'idea alla base di una valutazione *market consistent* è quella di considerare e valorizzare i flussi assicurativi in modo coerente con l'informazione data dai mercati finanziari. L'approccio *market consistent* ha quindi come obiettivo quello di individuare un più realistico ed oggettivo valore delle passività. Si ha perciò un salto logico rispetto alla valutazione attuariale tradizionale basata su soggettive ipotesi fissate dal valutatore.

Un aggiornamento dei criteri di valutazione si è reso necessario anche in conseguenza del fatto che le imprese di assicurazione hanno sempre più consapevolezza di una sottostima del valore delle opzioni e garanzie incorporate nei contratti assicurativi emessi. L'aggiornamento riguarda, in particolare, la sostituzione dell'approccio deterministico con quello stocastico, nel quale si considerano un numero finito di scenari caratterizzati da diverse determinazioni simulate dei numeri aleatori che generano l'aleatorietà dei flussi assicurativi futuri. In realtà un'impostazione totalmente stocastica non è implementata ed è in funzione della tipologia del prodotto analizzato che alcune fonti di rischio sono considerate aleatorie mentre le rimanenti sono considerate deterministiche. Per attribuire un valore alle opzioni e garanzie legate ai contratti assicurativi vita si adotta per le variabili economico-finanziarie un approccio stocastico. Inoltre, per una corretta valutazione è opportuno analizzare come i contraenti siano più portati ad esercitare le opzioni in funzione dell'evoluzione dei mercati finanziari, delle politiche dell'assicuratore e delle condizioni normative del mercato. Questo fenomeno è indicato come "comportamento dinamico degli assicurati" (o più correttamente dei contraenti), volendo con la parola "dinamico" sottolineare la capacità degli assicurati (contraenti) di reagire a fattori esterni, solitamente di carattere economico, esercitando le opzioni incluse nei contratti. Infatti, studi empirici hanno dimostrato che è in funzione della situazione macroeconomica che il contraente esercita in modo più o meno opportunistico le opzioni, al fine di massimizzare i suoi profitti.

In generale, per un'impresa di assicurazione sulla vita è necessario disporre di modelli di valutazione che tengano in considerazione il comportamento dinamico dei contraenti. È opportuno utilizzare questi modelli principalmente per le valutazioni che caratterizzano: *Profit Test*, *European Embedded Value* (EEV), *Market Consistent Embedded Value* (MCEV), *Asset Liability Management* (ALM) e *Solvency II*. Concludiamo questa sezione preliminare con una breve descrizione di tali ambiti mettendo in evidenza l'importanza di considerare un comportamento dinamico per i contraenti.

Profit Test

Il *Profit Test* è una metodologia attuariale utilizzata principalmente per la progettazione di nuovi prodotti assicurativi attraverso l'analisi di redditività degli stessi. Un forte sviluppo dei modelli di *Profit Test* può essere ricondotto ai primi anni novanta, periodo caratterizzato dalla graduale riduzione dei tassi di mercato e dalla liberalizzazione tariffaria. Un contributo fondamentale alla diffusione di tali modelli è dovuto soprattutto a Compagnie appartenenti a gruppi non italiani, in quanto nei loro paesi di origine le condizioni di mercato meno favorevoli richiedevano strumenti sofisticati per la simulazione dei profitti futuri. L'evoluzione del contesto economico finanziario ha reso oggi indispensabile l'impiego di modelli avanzati che tengano conto dei vari rischi a cui un prodotto assicurativo è esposto, in modo da non comprometterne la redditività.

Il modello di *Profit Test* simula tutti i flussi economici che può generare un contratto assicurativo dall'emissione alla sua estinzione per effetto di un evento previsto contrattualmente. Il modello deve considerare le caratteristiche del contratto (tipo di premio, durata...), le caratteristiche dell'assicurato (età, sesso...), il volume dei premi, la mortalità, il comportamento degli assicurati (uscita anticipata dal contratto, interruzione del pagamento dei premi...), il rendimento derivante dagli investimenti degli attivi a copertura delle riserve matematiche e del margine di solvibilità, le spese di gestione e di acquisizione, il regime di tassazione, l'effetto della riassicurazione e il tasso di sconto dei flussi futuri. È utile osservare che tali elementi sono solo in parte direttamente controllabili dalla compagnia e sussistono tra essi delle relazioni di dipendenza che devono essere considerate nel modello. Risulta evidente che l'eventuale esercizio da parte del contraente di opzioni incorporate nel contratto di assicurazione modifica i flussi economici dello stesso. Quindi è necessario considerare il comportamento dei contraenti in fase di costruzione e determinazione del prezzo di un prodotto assicurativo. Inoltre, mentre per i rischi finanziari e biometrici è possibile ricorrere alla riassicurazione o implementare strategie di *hedging*, il "rischio di comportamento" è difficile da gestire e solitamente può essere ridotto attraverso una ponderata fase di disegno del prodotto assicurativo con l'obiettivo di minimizzarne l'esposizione.

EEV e MCEV

Gli *European Embedded Value Principles* consistono in un insieme di princìpi introdotti nel 2004 dal *Chief Financial Officer Forum* (CFO Forum) con lo scopo di definire nuovi standard contabili che riflettano in modo più realistico le informazioni sullo stato dell'impresa. Una delle valutazioni richieste riguarda il calcolo del *Time Value* delle opzioni e garanzie (TVOG) che è generato dalla possibilità che condizioni favorevoli o sfavorevoli nei mercati finanziari non implichino effetti uguali ma opposti sulle prestazioni riconosciute agli assicurati. Il comportamento dei contraenti può aumentare tale asimmetria e quindi influenzare il TVOG. Riassumendo il TVOG coglie la variabilità futura del valore intrinseco delle opzioni e delle garanzie, ovvero come tali opzioni e garanzie saranno a vantaggio o meno del contraente.

I *Market Consistent Embedded Value Principles* sono stati introdotti nel 2008 con l'obiettivo di sostituire i princìpi alla base del calcolo dell'EEV. Infatti, il MCEV dovrebbe esprimere in modo migliore, in termini di obiettività, consistenza con il mercato e comparabilità, le informazioni sullo stato dell'impresa. I *Market Consistent Embedded Value Principles* richiedono esplicitamente, a differenza degli *European Embedded Value Principles*, di considerare il comportamento dinamico dei contraenti (al variare delle condizioni economiche) nel calcolo del TVOG.

Inoltre, richiedono di tener presente che il contraente ha la possibilità di effettuare investimenti di natura diversa da quella assicurativa. Questo perché un assicuratore non deve limitarsi ad avere una strategia in linea con quella del mercato assicurativo vita, ma deve far riferimento all'intero mercato e quindi anche al mercato non assicurativo.

Asset Liability Management

I modelli di *Asset Liability Management* (traducibile come modelli per la gestione integrata di attivo e passivo) sono stati introdotti inizialmente negli Stati Uniti negli anni Settanta per far fronte e gestire il rischio di tasso di interesse. Successivamente hanno permesso di comprendere anche rischi diversi da quelli di tasso, trasformandosi in strumenti per la gestione dei rischi finanziari cui è esposta l'impresa. I modelli attuali, basati su metodi stocastici, hanno come obiettivo l'allineamento dei flussi di cassa e sono in grado di valutare diverse alternative strategiche finalizzate alla massimizzazione del rendimento per un dato livello di rischio. Quindi l'ALM è uno strumento per la gestione dell'impresa che permette al *manager* di effettuare scelte ottimali sulla base di una chiara percezione dei rischi e rendimenti.

Al fine di individuare un modello di ALM ottimale è opportuno tener conto delle possibili azioni che il contraente può intraprendere in seguito a variazioni della situazione di mercato. Ciò deve essere fatto anche nel calcolo della *duration* del passivo utilizzata nell'analisi di confronto con la *duration* dell'attivo.

Solvency II

Il progetto *Solvency II* è una Direttiva dell'Unione europea, pubblicata il 17 dicembre 2009, rivolta alle compagnie assicurative. La Direttiva riguarda un netto rinnovo nei princìpi che portano alla determinazione dei requisiti patrimoniali rispetto alla legislazione vigente e alla supervisione relativa. Il progetto ha come obiettivo quello di garantire la stabilità finanziaria del settore assicurativo attraverso una gestione integrata dei rischi per il mantenimento della solvibilità delle singole imprese.

Solvency II richiede in particolare di calcolare il valore *market consistent* delle riserve tecniche e il capitale richiesto ai fini di solvibilità (SCR, *Solvency Capital Requirement*).
Nel calcolo delle riserve tecniche le compagnie di assicurazione devono identificare tutte le opzioni e garanzie finanziarie offerte nei contratti e devono essere condotte attente analisi statistiche per individuare comportamenti dei contraenti che possono determinare variazioni nei flussi di cassa futuri.
Per il calcolo degli SCR è possibile utilizzare la "formula standard", cioè un modello semplificato definito dall'Autorità di vigilanza, nella quale non c'è un esplicito riferimento al comportamento dinamico dei contraenti nell'ambito delle valutazioni relative ai vari *shock* che la caratterizzano. Questo è conseguenza del fatto che la formula standard prevede di determinare gli SCR per ogni singola tipologia di rischio e in ultimo di aggregarli mediante una matrice di correlazione, arrivando così al capitale richiesto complessivo. In generale, le decisioni dei contraenti non dovrebbero essere assunte indipendenti dall'andamento dei mercati finanziari. Ciò suggerisce di adottare un "modello interno", previa autorizzazione dell'Autorità di vigilanza, per la determinazione degli SCR che permetta di non trascurare il comportamento dinamico dei contraenti in funzione almeno degli *shock* finanziari indicati dalla normativa.

1.2 Le opzioni incorporate

Nel tempo le imprese di assicurazione hanno sviluppato meccanismi per attribuire alle varie tipologie di prodotti assicurativi sulla vita maggiore flessibilità. Tali meccanismi costituiscono delle opzioni che permettono al contraente in corso di contratto di effettuare scelte legate al suo credito nei confronti dell'assicuratore, che possono avere conseguenze sia sulla durata contrattuale sia sull'entità delle prestazioni, alterando nella sostanza il rapporto assicurativo. Vi è perciò la possibilità che il rapporto contrattuale termini prima della sua naturale conclusione, con ciò intendendo: per assicurazioni con durata temporanea prefissata (ad esempio assicurazioni miste) la scadenza contrattuale o eventualmente il decesso dell'assicurato se avviene prima della scadenza medesima, mentre per assicurazioni con durata non temporanea (ad esempio assicurazioni caso morte a vita intera) l'istante di decesso dell'assicurato.
Per molti anni le compagnie di assicurazione hanno potuto trascurare le opzioni incorporate nelle loro polizze, data la scarsa attrattiva che esse esercitavano sui risparmiatori. Questa situazione diventò drammatica quando i contraenti negli ultimi due decenni del ventesimo secolo, come conseguenza delle turbolenze nei mercati finanziari, iniziarono ad esercitare le opzioni previste nei contratti più frequentemente e in modo più opportunistico. Infatti, molti assicuratori si trovarono a dover pagare benefici di cui non avevano tenuto conto al momento del calcolo del premio. Da qui la necessità di una maggiore attenzione nella costruzione del prodotto assicurativo, al fine di determinare esplicitamente un prezzo per tutti i benefici offerti o quantomeno essere consapevoli di ciò che si sta proponendo agli assicurati. Può essere utile sottolineare che l'esistenza di un'opzione è subordinata alla presenza di garanzie, fornite dall'assicuratore nel caso in cui sia esercitata l'opzione o nel caso in cui non sia esercitata.

Le principali opzioni incorporate (*embedded options*) nei contratti di assicurazione sulla vita sono:

- l'*opzione di liquidazione* che dà al contraente il diritto di scegliere la forma di pagamento alla scadenza del contratto: *opzione rendita* o *opzione capitale*;

- l'*opzione di riscatto* che offre al contraente la possibilità di chiedere la risoluzione anticipata del contratto assicurativo e di cessare il versamento dei premi;

- l'*opzione di riduzione* che dà al contraente la possibilità di interrompere il pagamento dei premi e l'*opzione di riattivazione* che permette al contraente, dopo l'interruzione, di proseguire con il versamento dei premi;

- l'*opzione di differimento automatico di scadenza* che consente al contraente di prorogare il rapporto assicurativo o di disdirlo alla scadenza dello stesso;

- l'*opzione di trasformazione contrattuale* che dà al contraente la possibilità di modificare uno o più parametri del contratto in essere;

- l'*opzione di over-depositing* che dà al contraente la possibilità di versare importi di premio più elevati rispetto a quanto stabilito, che verranno accreditati al tasso di interesse concordato al momento della sottoscrizione;

- l'*opzione di prestito garantito da polizza* che consente al contraente di contrarre un prestito con il capitale accumulato nella polizza di assicurazione.

Ulteriori opzioni che possono essere concesse sono: la cosiddetta *garanzia di assicurabilità* e l'*opzione di switch*. Con la prima il contraente ha la facoltà di richiedere l'incremento del capitale caso morte (solitamente entro un certo tetto di importo) nel caso in cui si verifichino specifici eventi (ad esempio la nascita di un figlio), provvedendo al pagamento di importi di premio maggiorati, ma senza la revisione della base tecnica sottostante la loro

determinazione (in particolare, non sono richiesti ulteriori accertamenti sanitari). Invece, con l'opzione di switch, tipica delle assicurazioni unit-linked, il contraente ha la possibilità di cambiare in corso di contratto il fondo di riferimento.
Queste opzioni possono essere classificate, tabella 1.1, come opzioni biometriche (*mortality options*) o come opzioni finanziarie (*investment options*), in funzione del fatto che esse abbiano un maggior impatto sul rischio di mortalità rispetto a quello finanziario, dove con rischio di mortalità[1] si intende ogni rischio causato dall'aleatorietà delle durate di vita degli assicurati, mentre con rischio finanziario si indica ogni rischio causato dagli investimenti che l'assicuratore effettua a fronte delle riserve matematiche e del capitale proprio.

Opzioni finanziarie	Opzioni biometriche
Opzione di riscatto	Opzione di liquidazione
Opzione di riduzione	Garanzia di assicurabilità
Opzione di riattivazione	Trasformazione contrattuale
Opzione di over-depositing	
Opzione di differimento automatico	
Opzione di prestito garantito	
Opzione di switch	

Tabella 1.1: Classificazione delle opzioni incorporate nelle assicurazioni vita

Nella parte che segue è data una descrizione dettagliata delle opzioni elencate sopra.

[1]Per assicurazioni con capitale sotto rischio positivo (ad esempio assicurazioni temporanee caso morte o assicurazioni miste) tale rischio ha conseguenze negative quando la mortalità osservata è maggiore di quella attesa (con riferimento alla base tecnica del secondo ordine). Viceversa, per assicurazioni con capitale sotto rischio negativo (ad esempio rendite vitalizie) il rischio di mortalità ha conseguenze negative quando la mortalità osservata è inferiore a quella attesa.

1.2.1 L'opzione di liquidazione

Nelle polizze che prevedono il pagamento di un capitale in caso di vita a scadenza, ad esempio assicurazioni miste o di capitale differito, può essere concesso al contraente di convertire l'importo maturato in una rendita (i parametri per la conversione possono essere fissati al momento della sottoscrizione o essere quelli prevalenti alla data di conversione). In modo analogo, in una assicurazione di rendita differita può essere concesso al contraente, al termine del differimento, di richiedere che il capitale destinato alla copertura della rendita sia liquidato. In ogni caso le prestazioni sono dovute al beneficiario designato dal contraente. In entrambi i casi è necessario valutare attentamente quale base tecnica utilizzare per effettuare la conversione, dato che si possono verificare fenomeni di autoselezione degli assicurati (l'esercizio o meno dell'opzione seleziona gli assicurati in base alla percezione che essi hanno del proprio stato di salute). Per limitare gli effetti dell'autoselezione è solitamente richiesto che l'opzione di conversione in rendita o in capitale sia eventualmente esercitata prima della scadenza contrattuale o prima della fine del differimento, rispettivamente.

Esempio 1.1 (Opzione di conversione in rendita)**.** In questo e nei successivi esempi sono presentate le opzioni nell'ambito dell'impostazione attuariale tradizionale.

Consideriamo un'assicurazione di capitale differito di importo S e durata n anni stipulata da un individuo di età x. La prestazione dell'assicuratore consiste nel pagamento del capitale S alla fine dell'anno n, se l'assicurato supera in vita l'età $x+n$. Supponiamo sia concesso al contraente la possibilità di esercitare l'opzione di conversione in rendita. Indichiamo con b la rata della rendita, δ il caricamento per anno e unità di rata per coprire le spese di gestione e di erogazione della rendita, w l'età estrema per gli assicurati, i il tasso tecnico e ${}_hp_x$ la probabilità che un individuo di età x sia in vita almeno fino all'età $x+h$.
Si possono distinguere diversi tipi di opzione di conversione in rendita:

- Opzione "rendita vitalizia" (annua, anticipata): erogazione della rendita fino al decesso dell'assicurato (all'inizio di ogni anno di vita dell'assicurato). L'importo della rata è definito dall'equazione

$$b(1+\delta)\ddot{a}_{x+n} = S\,,$$

dove

$$\ddot{a}_{x+n} = \sum_{h=0}^{w-(x+n)} (1+i)^{-h}\,{}_hp_{x+n} = \sum_{h=0}^{w-(x+n)} {}_hE_{x+n}\,.$$

- Opzione "rendita temporanea" (annua, anticipata): erogazione della rendita per m anni se l'assicurato è in vita. L'importo della rata è definito dall'equazione

$$b(1+\delta)\ddot{a}_{x+n:\overline{m}|} = S\,,$$

dove

$$\ddot{a}_{x+n:\overline{m}|} = \sum_{h=0}^{m-1} {}_hE_{x+n}\,.$$

- Opzione "rendita certa" (annua, anticipata): erogazione della rendita per m anni, indipendentemente dal fatto che l'assicurato sia in vita. L'importo della rata è definito dall'equazione

$$b(1+\delta)\ddot{a}_{\overline{m}|} = S\,,$$

dove

$$\ddot{a}_{\overline{m}|} = \sum_{h=0}^{m-1}(1+i)^{-h}\,.$$

- Opzione "rendita certa e poi vitalizia" (annua, anticipata): erogazione della rendita certa per k anni e successivamente di una rendita vitalizia. Supponendo per semplicità che la rata sia uguale per le due tipologie di rendita, il suo importo è definito da

$$b(1+\delta)(\ddot{a}_{\overline{k}|} + {}_{k|}\ddot{a}_{x+n}) = S\,,$$

dove

$${}_{k|}\ddot{a}_{x+n} = \sum_{h=k}^{w-(x+n)} {}_hE_{x+n}\,.$$

- Opzione "rendita reversibile" (annua, anticipata): erogazione di una rendita vitalizia fino al decesso dell'assicurato e successivamente il beneficio è pagato, in misura totale o parziale, ad una o più persone se queste soddisfano certe condizioni stabilite contrattualmente (ad esempio essere in vita). Supponendo per semplicità che l'importo della rata ai superstiti sia uguale a quella percepita dall'assicurato prima del suo decesso, si ha

$$b(1+\delta)\left(\sum_{h=0}^{w-(x+n)}(1+i)^{-h}\,{}_hp^1_{x+n}+\sum_{h=0}^{w^*-(x+n)}(1+i)^{-h}(1-{}_hp^1_{x+n})\,{}_hp^2_{x+n}\right)=S\,,$$

dove w^* indica l'età estrema per il nucleo superstite. Per le probabilità di sopravvivenza l'apice "1" si riferisce all'assicurato e l'apice "2" al nucleo superstite. In particolare, ${}_hp^2_{x+n}$ indica la probabilità che il nucleo superstite di età (convenzionale) $x+n$ sia in vita almeno fino all'età $x+n+h$.

$\diamond$

1.2.2 L'opzione di riscatto

In un contratto assicurativo sulla vita è solitamente concesso al contraente la facoltà di risolvere anticipatamente il contratto. Questo diritto unilaterale consente al contraente di sospendere il pagamento degli eventuali premi ancora da versare e in alcuni casi di ricevere un importo, detto valore di riscatto, da parte dell'assicuratore.
Il valore di riscatto è commisurato al debito dell'assicuratore nei confronti del contraente, quantificato in ogni istante dalla riserva matematica. Per alcune tipologie di assicurazioni non è previsto alcun valore di riscatto e si ha la semplice risoluzione o storno del contratto. Rientrano in questa categoria le assicurazioni temporanee caso morte (si tratta di assicurazioni di puro rischio nelle quali il profilo della riserva è trascurabile rispetto alla somma dei premi di tariffa versati) e le assicurazioni con prestazione esclusivamente in caso di vita dell'assicurato in una certa data futura, come la capitale differito e

la rendita vitalizia differita (non controassicurate). In questi ultimi due tipi di assicurazione, un assicurato che percepisce un aggravamento delle proprie condizioni di salute potrebbe ritenere non più vantaggioso la prosecuzione del rapporto assicurativo, quindi concedere il riscatto potrebbe sbilanciare l'equilibrio attuariale su cui è stato basato il calcolo del premio (i contratti per i quali non è stata esercitata l'opzione di riscatto potrebbero avere una mortalità effettiva molto più bassa di quella attesa).
Il riscatto è invece possibile qualora la prestazione dell'assicuratore sia certa, e sia incerto solamente il momento nel quale avverrà il pagamento, come nel caso dell'assicurazione mista, dell'assicurazione caso morte a vita intera e della capitale differito controassicurata. In questo modo si riduce la possibilità di fenomeni di autoselezione degli assicurati, i quali decideranno di esercitare l'opzione di riscatto incondizionatamente dalla percezione del proprio stato di salute, ma per esempio motivati dalla necessità di liquidità. Solitamente per le polizze a premio unico o a premio unico ricorrente il riscatto può essere richiesto dopo un anno dalla decorrenza del contratto, mentre per le polizze a premio annuo il riscatto è consentito dopo il pagamento di almeno tre annualità di premio. In alcuni casi è concessa la possibilità di richiedere riscatti parziali e possono essere presenti vincoli sul riscatto parziale minimo e massimo.
I criteri per la determinazione del valore di riscatto sono molteplici e spesso vengono considerati quelli più facilmente comprensibili dai contraenti. È prassi attuariale considerare come valore di riscatto di riferimento una aliquota crescente nel tempo della riserva zillmerata (effettivo credito del contraente), cioè della riserva matematica al netto della provvigione d'acquisto non ancora ammortizzata. Infatti, le spese di acquisizione sono sostenute dall'assicuratore alla stipulazione del contratto e, nel caso di premi annui, tale importo viene ammortizzato nel periodo di pagamento dei premi dal contraente (generando un'eccezione all'inversione del ciclo produttivo che caratterizza il settore assicurativo). Considerare un'aliquota della riserva zillmerata, e quindi penalizzare l'effettivo credito del contraente, trova giu-

stificazione nel fatto che l'assicuratore deve recuperare almeno parte degli utili finanziari e biometrici che avrebbe potuto realizzare se il contratto non si fosse estinto prima della sua conclusione naturale. Solitamente le penali di riscatto hanno un andamento decrescente nel tempo, come decrescenti sono gli utili attesi residui in funzione dell'antidurata di polizza. L'entità delle penali di riscatto applicate deve essere attentamente analizzata in fase di costruzione del prodotto assicurativo. Infatti, tenue penali di riscatto rendono il prodotto maggiormente appetibile ma espongono l'assicuratore alla possibilità di non realizzare utili attesi o peggio di subire perdite.

Esempio 1.2 (Opzione di riscatto)**.** Consideriamo un'assicurazione mista stipulata da un individuo di età x con durata m anni. Sia P il premio annuo costante pagabile per tutta la durata contrattuale, C il capitale caso morte (corrisposto alla fine dell'anno nel quale eventualmente decede l'assicurato) e S il capitale caso vita (corrisposto alla scadenza se l'assicurato è in vita). La riserva matematica pura in un generico anniversario di contratto, indicato con t, è data da:

$$V_t = C \,{}_{m-t}A_{x+t} + S \,{}_{m-t}E_{x+t} - P\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}\,,$$

dove

$$ {}_{m-t}A_{x+t} = \sum_{h=0}^{m-t-1} (1+i)^{-(h+1)} \,{}_{h|1}q_{x+t}\,,$$

mentre per gli altri simboli si faccia riferimento all'esempio 1.1. La riserva zillmerata (o di Zillmer), indicata con V_t^Z, è definita da:

$$V_t^Z = V_t + V_t^A\,, \tag{1.1}$$

$$V_t^A = -\lambda^A \ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}\,. \tag{1.2}$$

Nell'equazione (1.2) λ^A rappresenta la rata del piano d'ammortamento delle spese di acquisizione. V_t^A è detta "provvigione d'acquisto non ammortizzata" ed è un importo non positivo (uguale a zero, ad esempio, nel caso di premio unico).

Il valore di riscatto nell'anno t, R_t, può essere determinato nel seguente modo:

$$R_t = \begin{cases} 0 & t \leq 2 \\ \gamma(t) V_t^Z & t = 3, 4, .., m-1 \end{cases} .$$

Solitamente $\gamma(t)$ è prossimo a uno e crescente con t. Per alcuni prodotti già a partire dal quarto anno non è prevista alcuna penale di riscatto. Un modo semplice per determinare il valore di riscatto, noto come "regola proporzionale", è

$$R_t = S \frac{t}{m} (1+j)^{-(m-t)} .$$

Quindi il valore di riscatto è ottenuto come quota di S proporzionale al numero di premi versati, attualizzando tale importo in t al tasso j per il periodo intercorrente tra la data di richiesta del riscatto e quella della scadenza contrattuale. Il tasso j può essere maggiore del tasso tecnico i al fine di realizzare una penalizzazione. In generale è possibile che il valore di riscatto sia inferiore all'ammontare dei premi versati.

$\diamond$

1.2.3 L'opzione di riduzione e di riattivazione

Nella maggior parte dei contratti assicurativi sulla vita il contraente ha diritto ad interrompere il pagamento dei premi annui successivi al primo e può chiedere, come alternativa al riscatto, la riduzione delle prestazioni. Quindi il contratto, considerato in *paid-up*, rimane in vigore con la stessa struttura di quella concordata alla stipulazione, ma con un capitale assicurato oppure una rendita opportunamente ridotti. L'opzione di riduzione, a differenza dell'opzione di riscatto, può essere concessa anche ad assicurazioni di capitale differito non controassicurate, dato che il rapporto assicurativo non decade e l'eventuale sbilanciamento di portafoglio dovuto alla selezione avversa degli assicurati si può ritenere più contenuto. L'entità della riduzione delle prestazioni può essere determinata con riferimento ad una aliquota crescente nel tempo della riserva zillmerata, considerando tale importo come premio unico di inventario (dove il caricamento per spese è solo relativo a quelle di gestione) del “nuovo” contratto a benefici ridotti. Tuttavia vengono utilizzati spesso criteri per la determinazione delle prestazioni ridotte molto più semplici, solitamente di tipo proporzionale, dove il capitale ridotto è dato dal prodotto tra il capitale assicurato del contratto originale e il rapporto tra il numero di premi annui pagati ed il numero di premi annui pattuiti. Le penali applicate sono generalmente meno severe rispetto a quelle che caratterizzano la determinazione del valore di riscatto, dato che l'assicuratore non considera del tutto irrealizzati gli utili attesi.

In seguito alla sospensione del pagamento dei premi e quindi alla riduzione delle prestazioni, il contraente può avere diritto a riprendere il versamento dei premi annui. Per la riattivazione di norma è previsto il versamento delle rate di premio non pagate, aumentate degli interessi previsti contrattualmente. La riattivazione del contratto può quindi ripristinare i valori contrattuali delle prestazioni che si sarebbero ottenute qualora non si fosse verificata l'interruzione del pagamento dei premi.

Esempio 1.3 (Opzione di riduzione e di riattivazione)**.** Con riferimento alla tipologia di assicurazione introdotta nell'esempio 1.2, assumiamo che essa includa sia l'opzione di riduzione che di riattivazione.
Sia $\tau \in \{1, 2, ..., m-1\}$ l'istante in cui il contraente esercita l'opzione di riduzione. Le prestazioni ridotte indicate con C^τ e S^τ, possono essere determinate in modo da soddisfare l'uguaglianza seguente:

$$C^\tau {}_{m-\tau}A_{x+\tau} + S^\tau {}_{m-\tau}E_{x+\tau} + \lambda^G \, \ddot{a}_{x+\tau:\overline{m-\tau}|} = \lambda(\tau) V_\tau^Z \ ,$$

dove $\lambda(\tau)V_\tau^Z$, percentuale della riserva zillmerata, costituisce il premio unico del contratto ridotto. Il terzo addendo del primo membro rappresenta il caricamento per le spese di gestione (ricorrenti sulla durata residua del contratto).

L'opzione di riattivazione può essere esercitata a partire da $\tau + 1$. Sia $\nu \in \{\tau + 1, .., m - 1\}$ l'istante in cui il contraente riprende il pagamento dei premi. L'importo di premio puro P' richiesto al contraente per ripristinare le prestazioni originali deve soddisfare l'equazione seguente:

$$C_{m-\nu} A_{x+\nu} + S_{m-\nu} E_{x+\nu} = P' \, \ddot{a}_{x+\nu:\overline{m-\nu|}} + V_\nu \,,$$

dove V_ν rappresenta la riserva matematica pura del contratto ridotto. $\diamond$

1.2.4 L'opzione di differimento automatico di scadenza

I contratti che prevedono una prestazione in caso di vita alla scadenza possono includere l'opzione di differimento automatico di scadenza. L'esercizio di questa opzione comporta che la scadenza originaria del contratto sia prorogata automaticamente, solitamente di anno in anno, senza ulteriore corresponsione di premi, con conseguente differimento della riscossione del capitale maggiorato di interessi. E' facoltà del contraente chiedere, in qualsiasi momento, sia l'interruzione del differimento automatico della scadenza che l'immediata liquidazione dell'importo maturato.
L'esercizio dell'opzione permette al contraente di prolungare la copertura assicurativa oltre la durata contrattuale originaria, e di usufruire degli incrementi derivanti dall'applicazione della rivalutazione del capitale concordata alla stipulazione del contratto (in particolare, può essere previsto un tasso minimo garantito di rivalutazione). La prestazione maturata alla scadenza originale è considerata come premio unico per il "nuovo contratto monoannuale" (analogamente per ogni fine anno di differimento). Solitamente non è prevista una durata massima di differimento.

1.2.5 L'opzione di trasformazione contrattuale

La trasformazione del contratto consiste nella modifica di alcuni elementi del contratto in vigore come ad esempio la durata, la somma assicurata, la modalità di pagamento del premio o la forma assicurativa. Si può pensare alla trasformazione come al riscatto di un precedente contratto al fine di sottoscriverne un altro calibrato sulle nuove esigenze dell'assicurato. Quindi la struttura attuariale del contratto può essere oggetto di una completa revisione. La riduzione, la riattivazione e il differimento automatico di scadenza possono essere pensate come casi particolari della più generale trasformazione di un contratto. Nella costruzione del nuovo prodotto è considerato come premio unico (d'inventario) o eventualmente primo di premi futuri l'importo determinato in funzione della riserva del vecchio contratto. A differenza delle precedenti opzioni quella di trasformazione non è regolamentata nel contratto di assicurazione, pertanto le relative condizioni vengono concordate tra l'impresa ed il contraente una volta che quest'ultimo richiede la trasformazione del contratto in vigore.

1.2.6 L'opzione di over-depositing

L'opzione over-depositing permette al contraente di versare premi più elevati rispetto a quelli inizialmente richiesti mantenendo lo stesso tasso tecnico o in generale le stesse regole di rivalutazione predefinite. Solitamente è fissato da contratto un importo minimo per i premi aggiuntivi.

1.2.7 L'opzione di prestito garantito da polizza

Frequentemente i contratti assicurativi riscattabili prevedono la possibilità di richiedere all'impresa di assicurazione un prestito a titolo di anticipazione parziale temporanea del capitale maturato fino al momento della richiesta. Il prestito può essere erogato per un importo non superiore al valore di riscatto. Come l'opzione di trasformazione contrattuale anche l'opzione di prestito su polizza non è regolamentata nel contratto di assicurazione, pertanto le relative condizioni devono essere richieste direttamente all'impresa.

1.3 Ulteriori considerazioni

In un contratto di assicurazione sulla vita è possibile distinguere tra opzioni (diritti) e garanzie. Anche le garanzie possono essere considerate opzioni implicite nei contratti ma, a differenza di quelle elencate nel paragrafo precedente, il loro esercizio è indipendente dalla volontà del contraente e operano, in ogni caso, a favore dello stesso. Per esempio, una garanzia che caratterizza le polizze rivalutabili è la presenza di un tasso minimo garantito che può essere riconosciuto di anno in anno (garanzia *cliquet*) piuttosto che a scadenza (garanzia *point-to-point* o a termine).

Le garanzie e le opzioni vendute attraverso i contratti possono costituire un elevato rischio a carico dell'impresa emittente, se essa non ha effettuato preventive valutazioni mirate ad un'adeguata gestione del rischio intrinseco nella vendita di tali contratti. Come detto nel paragrafo precedente, in un solo contratto sono solitamente incluse più di un'opzione; ciò comporta un aumento della complessità legata alle valutazioni e un aumento del rischio associato al contratto, derivante dall'interazione che può esserci tra le opzioni e le garanzie.

Capitolo 2

Analisi dei fattori che possono influenzare l'andamento dei riscatti

Un'attenta analisi e comprensione dei fattori che influenzano l'andamento dei riscatti è fondamentale per le compagnie di assicurazione vita. Le possibili conseguenze dell'estinzione anticipata delle polizze riguardano principalmente:

- Perdite derivanti dall'impossibilità di recuperare l'ammontare totale delle spese di acquisizione (infatti, si tratta di spese sostenute in via anticipata dall'assicuratore che saranno ammortizzate nel tempo dal contraente mediante il pagamento dei premi).
- Mancato realizzo dei possibili profitti futuri delle polizze riscattate.
- Difficoltà dell'assicuratore di far fronte in un certo istante ad un ammontare elevato di valori di riscatto. L'assicuratore è quindi esposto al "rischio di liquidità", in particolare al cosiddetto "rischio di valore di vendita[1]", che è "originato da un bisogno inatteso di liquidità (...)

[1]Rientra, insieme al "rischio di mercato dei capitali", nella categoria "rischio di liquidità" della classificazione proposta dal *Solvency Working Party* dell'*International*

in condizioni di mercato che comportano bassi valori di realizzo degli investimenti" [OP(2005)].

- Effetto di antiselezione, in particolare con riferimento alla mortalità, che può comportare uno sbilanciamento del profilo biometrico del portafoglio, causando un aumento delle prestazioni caso morte rispetto a quelle attese. Infatti, assicurati che percepiscono un chiaro peggioramento delle proprie condizioni di salute saranno meno portati a riscattare contratti che includono una copertura caso morte, in quanto, molto probabilmente, non riusciranno ad acquistare una polizza analoga allo stesso livello di premio. L'effetto di selezione avversa delle polizze in portafoglio è molto più intenso per prodotti con beneficio o solo caso morte o solo caso vita.

Si noti che i riscatti non sempre costituiscono fonte di perdita per l'assicuratore ma possono anche comportare un guadagno, dato che il contraente, esercitando l'opzione di riscatto, rinuncia ad alcune garanzie.

Un corretto monitoraggio del rischio di estinzione anticipata dei contratti ed una adeguata gestione dello stesso sono richiesti dalle nuove regole di vigilanza Solvency II. Il quinto studio di impatto quantitativo (QIS 5) proposto dall'EIOPA su scala europea ha evidenziato che il requisito di capitale per il sub-rischio riscatto[2] costituisce circa il 40% del requisito patrimoniale per il modulo di rischio di sottoscrizione dell'assicurazione vita (il secondo sub-rischio più importante in questo modulo è stato quello di longevità). In termini di capitale richiesto tale modulo risulta essere il secondo subito dopo il modulo relativo al rischio mercato.

Actuarial Association.

[2]Il requisito di capitale per il rischio di estinzione anticipata è pari al maggiore tra: il requisito di capitale per il rischio di un istantaneo e permanente incremento dei tassi di esercizio dell'opzione di estinzione anticipata, il requisito di capitale per il rischio di un istantaneo e permanente decremento dei tassi di esercizio dell'opzione di estinzione anticipata e il requisito di capitale per il rischio di un'estinzione di massa anticipata.

2.1 Le macroclassi di fattori che possono influenzare i riscatti

I fattori che determinano l'estinzione anticipata di un contratto possono essere suddivisi in due principali insiemi. Il primo riguarda variabili macroeconomiche e il secondo le caratteristiche del prodotto, dell'assicurato e del contraente. Queste ultime informazioni sono trattate dalle compagnie in modo altamente confidenziale ed è per questo che la letteratura empirica esistente si basa principalmente sul primo insieme di fattori. Tali studi hanno tra gli obiettivi quello di verificare che l'andamento dei riscatti sia coerente con due ipotesi di base empirica:

1. *Ipotesi di tasso di interesse* secondo la quale il contraente sarà più propenso a riscattare la propria polizza quando il tasso di interesse di mercato aumenta, al fine di perseguire investimenti più profittevoli in un mercato diverso da quello assicurativo o nello stesso mercato assicurativo, acquistando una polizza analoga a quella riscattata ma con un premio inferiore (poiché sono aumentati i tassi di interesse di mercato);

2. *Ipotesi di finanziamento di emergenza* secondo la quale il contraente che si trova in una situazione di mancanza di liquidità riscatterà la propria polizza per poter accedere al valore di riscatto.

Per la verifica dell'ipotesi di tasso di interesse sono considerati i tassi di interesse di mercato, gli indici del mercato azionario e il tasso di rendimento riconosciuto dall'assicuratore al contratto, mentre l'ipotesi di finanziamento di emergenza è esaminata mediante il tasso di disoccupazione, il prodotto interno lordo e altri indicatori che valutano la crescita economica.
Tra i fattori macroeconomici è possibile far rientrare il trattamento fiscale a cui le polizze vita possono essere soggette. Infatti, variazioni della disciplina fiscale possono aumentare o diminuire la propensione al riscatto. L'ulti-

ma profonda variazione in Italia è stata introdotta con il decreto legislativo numero 47 del 18 febbraio 2000.

L'analisi dei riscatti, con riferimento al secondo insieme di fattori, si sviluppa sulle caratteristiche del contratto, quali la tipologia del prodotto assicurativo, il tipo di premio e l'antidurata di polizza, e sulle caratteristiche del contraente-assicurato come l'età e il sesso. Inoltre, è considerato il canale di vendita del contratto e l'eventuale presenza di garanzie accessorie.

Oltre a questi due principali insiemi possono essere considerate, come fattori determinanti le decisioni di riscatto, le caratteristiche della compagnia. In particolare, potrebbe essere interessante analizzare caratteristiche come il volume d'affari, l'età della compagnia, la forma giuridica della società e in futuro l'indice di solvibilità Solvency II.

2.2 I dati

L'analisi si basa sui contratti di ramo I e ramo V presenti ad ogni fine anno dal 2003 al 2010 nel portafoglio di una gestione separata di una compagnia di Bancassicurazione. Per lo stesso orizzonte temporale è specificato in che istante e per quale contratto si è verificato il riscatto totale[3]. Le informazioni a disposizione, elencate e descritte brevemente nella parte che segue, sono relative al contraente, all'assicurato, alla tariffa e ai parametri contrattuali.

- *Contraente:* è noto se il contraente è una azienda o una persona fisica.
- *Assicurato:* sono noti età e sesso dell'individuo assicurato. È ragionevole ritenere, nella maggior parte dei casi, che l'assicurato coincida con il contraente qualora quest'ultimo sia maggiorenne.
- *Tipologia di assicurazione:* i dati a disposizione riguardano assicurazioni rivalutabili principalmente di tipo misto, la parte residua consiste in prodotti strettamente finanziari e in piccola parte assicurazioni a vita intera e di capitale differito in caso di vita.

[3] I riscatti parziali non sono stati considerati nello studio.

- *Durata e antidurata:* per ogni contratto è indicata la durata contrattuale e l'antidurata[4]. La durata media delle assicurazioni miste e di pura capitalizzazione negli anni considerati è di circa sei anni.

- *Tipo di premio:* la soluzione di pagamento dei premi usata per le assicurazioni miste o a vita intera consiste prevalentemente nel versamento del premio unico o di premi unici ricorrenti. Le assicurazioni di pura capitalizzazione sono emesse solo a premio unico e le assicurazioni di capitale differito solo a premio annuo costante. Solitamente i contratti prevedono la possibilità di effettuare versamenti aggiuntivi.

  Osservazione 2.1. Nella pratica bancassicurativa le polizze a premio unico ricorrente sono maggiormente diffuse rispetto a quelle a premio annuo probabilmente perché più semplici da promuovere ai clienti degli sportelli bancari. ◊

- *Prestazione ultima:* per ogni contratto si dispone del valore del capitale rivalutato all'ultimo anniversario di polizza rispetto all'istante di osservazione.

- *Canale di vendita:* è noto se l'acquisizione del contratto è avvenuta mediante i promotori finanziari o attraverso gli sportelli bancari.

Per ogni polizza è inoltre disponibile la data di decorrenza del contratto e l'eventuale data di riscatto. Si è deciso di escludere dall'analisi informazioni come il tasso tecnico , il rendimento minimo garantito, il rendimento minimo trattenuto, l'aliquota di retrocessione e l'indicazione relativa alla rateizzazione dei premi. Queste informazioni, seppur potenziali fattori influenti sulle decisioni di riscatto, non sono state considerate perché praticamente costanti per ogni contratto o perché esistono delle relazioni di dipendenza che le rendono superflue[5] (come nel caso dell'indicazione relativa alla rateizzazio-

[4]Tempo trascorso dalla data di decorrenza all'istante considerato.

[5]Intendendo che la suddivisione dei dati secondo le determinazioni delle variabili escluse è già possibile grazie alle variabili considerate.

ne dei premi: se un contratto è stipulato a premio unico allora non ci sarà frazionamento dei premi).

Rispetto alle informazioni strettamente legate ai contratti in gestione separata, si è incluso nell'analisi il rendimento della gestione separata, il tasso interno di rendimento del Buono del Tesoro Poliennale con scadenza di cinque anni (BTP5), il tasso annuo di crescita del prodotto interno lordo reale, il tasso di disoccupazione e il tasso d'inflazione. Segue una breve descrizione di queste variabili economiche.

- *Tasso medio di rendimento della gestione separata:* il periodo di osservazione per la sua determinazione è annuale ed è fissato nel regolamento della gestione separata. Il tasso medio di rendimento è dato dal rapporto tra il risultato finanziario e la giacenza media delle attività della gestione separata nel periodo di osservazione. Il risultato della gestione separata è costituito dai proventi finanziari di competenza conseguiti dalla gestione stessa, che includono gli scarti di emissione, gli scarti di negoziazione, gli utili e le perdite realizzati nel periodo di osservazione. Questi ultimi sono determinati con riferimento al valore di iscrizione (valore di carico) delle relative attività nel "libro mastro" della gestione separata. Le plusvalenze e le minusvalenze sono prese in considerazione, nel calcolo del risultato finanziario, solo se effettivamente realizzate nel periodo di osservazione. È prevista solitamente la determinazione di ulteriori undici tassi di rendimento annuali (il dodicesimo è quello relativo al periodo fissato), calcolati con riferimento al periodo di tempo annuale dal mese in esame e dagli undici mesi consecutivi precedenti.

- *Tasso interno di rendimento del BTP5:* ovvero il tasso implicito di rendimento del titolo qualora non lo si venda prima della sua scadenza sul mercato secondario. È incluso nello studio in quanto ritenuto essere un'alternativa di investimento coerente con la durata media contrattuale dei prodotti assicurativi considerati. Nella figura 2.1 è messo a confronto il rendimento della gestione separata con il tasso interno di rendimento del BTP5.

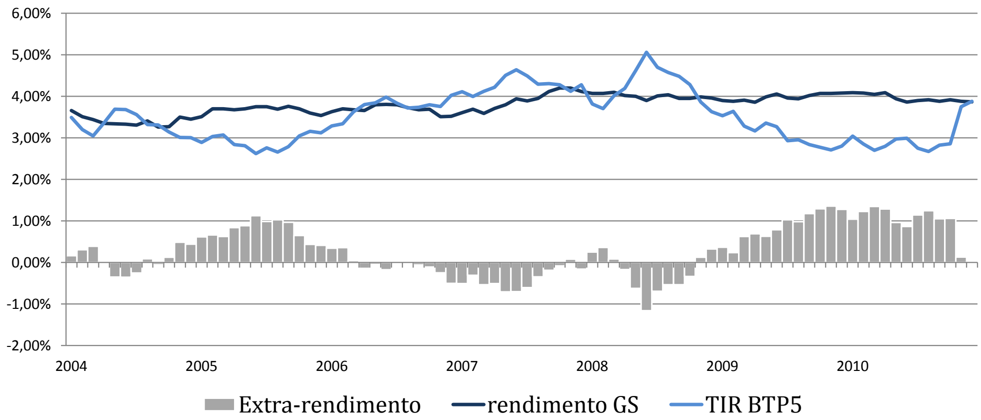

Figura 2.1: Rendimento di gestione e tasso interno di rendimento del BTP5

- *Tasso annuo di crescita del PIL reale:* è una misura della variazione percentuale del PIL reale su base annua. Il prodotto interno lordo è un indicatore dell'attività economica ed è definito come il valore complessivo dei beni e servizi prodotti all'interno del Paese al netto del valore di beni e servizi utilizzati per la loro creazione. Il PIL in termini reali è ottenuto neutralizzando le variazioni dei prezzi dei beni e servizi prodotti.

- *Tasso di disoccupazione:* esprime la percentuale di forze di lavoro che non trovano un'occupazione.

- *Tasso d'inflazione:* si tratta dell'inflazione basata sull'indice dei prezzi al consumo per le famiglie di operai e impiegati (FOI).

Come risulterà evidente nel paragrafo 2.3, l'analisi sarà effettuata su base annua, quindi le variabili economiche presentate saranno anch'esse considerate su base annua. In particolare, il rendimento della gestione separata in un dato anno si è scelto pari alla media dei dodici tassi di rendimento della gestione separata dell'anno in esame. Analogamente, il tasso interno di rendimento del BTP5 in un dato anno è ottenuto come media dei tassi interni di rendimento nei mesi dell'anno considerato.

Osservazione 2.2 (I prodotti di Bancassicurazione). Per una corretta comprensione dei dati e delle successive analisi è necessario tener presente la specificità dei prodotti di assicurazione sulla vita distribuiti attraverso il canale bancario.

Il fenomeno della Bancassicurazione in Italia ha avuto un forte sviluppo negli anni '90 ed è diventato una realtà chiave nel settore assicurativo vita. Tra le caratteristiche principali dei prodotti bancassicurativi vi è un livello provvigionale inferiore rispetto a quello delle reti di vendita tradizionali (agenti, *brokers*, promotori) con conseguenti minori caricamenti sui premi. Inoltre, si tratta di prodotti semplificati/standardizzati emessi solitamente a premio unico o a premio unico ricorrente e, quelli che prevedono una scadenza contrattuale, hanno durata breve (5 o 10 anni). Ulteriore caratteristica peculiare è la possibilità di riscattare agevolmente sia in termini di basse penali di riscatto che di limiti temporali. In sostanza, i prodotti bancassicurativi di ramo I risultano molto vicini ai contratti di capitalizzazione di ramo V. Infatti, la loro componente dominante è quella finanziaria, ovvero "le prestazioni assicurative non dipendono in modo significativo dalle durate aleatorie di vita".

$\diamondsuit$

2.3 Metodologia

L'analisi proposta si basa sul modello logistico di regressione, modello riconducibile alla classe dei modelli lineari generalizzati. Il principale obiettivo dell'analisi consiste nella ricerca delle determinanti, ovvero si tratta di una ricerca esplorativa di fattori che influenzano la decisione del contraente di riscattare la propria polizza. Più precisamente, è considerato il modello logistico di regressione a tempo discreto, il cui utilizzo è molto diffuso nell'epidemiologia e nella ricerca medica. Il problema sarà esaminato nell'ambito dell'analisi di sopravvivenza, quindi oggetto dell'analisi sarà l'antidurata di polizza fino al verificarsi dell'eventuale riscatto.

La base dati disponibile costituisce un cosiddetto *person-period data set*: ogni *record* rappresenta l'osservazione di un particolare contratto in uno specifico anno. Ognuno di questi *record* è composto dalla variabile risposta, ovvero il verificarsi o meno dell'evento riscatto, dalle variabili esplicative, ed inoltre, dall'antidurata che scandisce il tempo di vita della polizza. L'applicazione del modello scelto al *person-period data set* permette di considerare un modello di analisi della sopravvivenza per dati individuali. Il notevole pregio di questo modello è quello di poter includere facilmente nell'analisi variabili esplicative continue e variabili esplicative che dipendono dal tempo.

Osservazione 2.3. Le variabili esplicative considerate possono essere classificate come variabili fissate, ovvero non dipendenti dal tempo, e variabili dipendenti dal tempo. In questo ultimo caso è inoltre possibile distinguere tra variabili interne, i cui valori sono specifici della particolare unità sotto osservazione, e variabili esterne, i cui valori sono legati al contesto che caratterizza il periodo di osservazione (quindi il loro valore è uguale per tutte le unità in un dato anno). ♢

Indichiamo con $Y_{i,t}$ il numero aleatorio che descrive il verificarsi o meno dell'evento di interesse al tempo t per il contratto i. L'insieme delle sue possibili determinazioni è $\{0,1\}$: 1 se si verifica il riscatto e 0 altrimenti. Sia $\mathbf{X}_{i,t}$ la matrice delle determinazioni delle variabili esplicative.

Il modello è definito da:

$$\ln\left(\frac{q_{i,t}}{1-q_{i,t}}\right) = \alpha_t + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}_{i,t} = \alpha_t + \beta_1 x_{i,t,1} + ... + \beta_k x_{i,t,k}\,, \tag{2.1}$$

dove $q_{i,t}$ rappresenta la probabilità che l'individuo i riscatti al tempo t dato che non ha ancora riscattato la polizza al tempo $t-1$. L'equazione (2.1) ha come primo membro il *logit* o *log-odds* di $q_{i,t}$ e al secondo membro una funzione lineare delle variabili esplicative, più un termine α_t.
Nei modelli a tempo discreto la probabilità condizionata $q_{i,t}$ definisce la funzione di rischio (a tempo discreto). Per una fissata polizza i, indicato con T_i il numero aleatorio che descrive la durata aleatoria del contratto, si ha

$$q_{i,t} = Pr(T_i = t \mid T_i \geq t)\,.$$

Nel problema esaminato le possibili realizzazioni di T_i sono discrete e superiormente limitate. La generica polizza i contribuirà all'analisi con t_i osservazioni date da: $t_i - 1$ insuccessi, cioè $t_i - 1$ osservazioni per le quali non si è verificato l'evento di interesse, e un successo nel caso in cui in t_i la polizza i sia riscattata:

$$\begin{cases} y_{i,t} = 0 & t \leq t_i - 1 \\ y_{i,t} = 1 & t = t_i \end{cases}\,,$$

oppure da t_i insuccessi nel caso in cui non avvenga il riscatto della polizza, cioè in t_i la storia della polizza i è censurata a causa della scadenza contrattuale o del decesso dell'assicurato (l'evoluzione della variabile di interesse può essere vista come una particolare realizzazione di un processo bernoulliano).

Il modello utilizzato è un'estensione del modello caratterizzato da sole variabili esplicative non dipendenti dal tempo. Quest'ultimo modello è definito dall'equazione seguente, nella quale per le variabili esplicative non compare il pedice t:

$$\ln\left(\frac{q_{i,t}}{1-q_{i,t}}\right) = logit(q_{i,t}) = \alpha_t + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}_i\,. \tag{2.2}$$

Il modello definito dall'equazione (2.2) assume che vi sia proporzionalità tra gli *odds* ed è per questo che è anche noto in letteratura come modello a *odds* proporzionali. Al fine di evidenziare tale proprietà si osserva che il parametro α_t è indipendente dalle caratteristiche specifiche del contratto i-esimo e quindi può essere considerato come una "base" per il rischio a cui è soggetto al tempo t ogni contratto del portafoglio in esame. Posto $\alpha_t = logit(q_{0,t})$, dove $q_{0,t}$ rappresenta il rischio di base, l'equazione (2.2) può essere riscritta nelle due versioni equivalenti:

$$
\begin{aligned}
&logit(q_{i,t}) = logit(q_{0,t}) + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}_i \,, \\
&\ln\big(odds(q_{i,t})\big) = \ln\big(odds(q_{0,t})\big) + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}_i \,, \qquad\qquad odds(q_{\cdot,t}) = \frac{q_{\cdot,t}}{1-q_{\cdot,t}} \,.
\end{aligned}
$$

Dalla seconda equazione si ricava facilmente:

$$odds(q_{i,t}) = odds(q_{0,t}) \exp(\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}_i) \,.$$

Quindi l'*odds* di un fissato contratto i in un certo momento può essere scomposto in due fattori: il primo dipende solo dalla dimensione temporale ed è comune a tutti i contratti, mentre il secondo è specifico del contratto considerato. Così, qualunque sia l'unità temporale in esame, gli *odds* di diversi contratti risultano proporzionali ad un rischio di base (e quindi tra loro) secondo un fattore indipendente dal tempo. In altre parole, presi due qualsiasi contratti i e j, il rapporto tra gli *odds* non dipende dal tempo:

$$\frac{odds(q_{i,t})}{odds(q_{j,t})} = \frac{\exp(\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}_i)}{\exp(\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}_j)} \,.$$

Ad ogni modo, è comune nella pratica includere nello studio anche variabili dipendenti dal tempo, che rendono il modello più complesso da un punto di vista concettuale. L'introduzione di variabili tempo dipendenti implica che, presi due qualsiasi individui, il rapporto tra i relativi *odds* non è necessariamente costante nel tempo, dato che i valori delle variabili tempo dipendenti possono variare in istanti diversi per i diversi individui.

Prima di procedere con la stima del modello logistico di regressione a tempo discreto, consideriamo un'analisi descrittiva dei dati e inoltre verifichiamo l'ipotesi implicita nel modello presentata nel caso di variabili non dipendenti dal tempo.

2.4 Analisi non parametrica dei dati: il metodo attuariale

Prima di sviluppare l'analisi parametrica, ovvero la costruzione di un modello statistico che permetta di esplicitare la dipendenza dell'accadimento dell'evento di interesse da una serie di variabili esplicative, è utile condurre un'analisi esplorativa dei dati con metodi non parametrici. Quindi è possibile descrivere le caratteristiche del processo in esame senza effettuare ipotesi circa la distribuzione degli eventi. Inoltre, in questa sezione si definisce l'insieme dei dati su cui si basano le stime del modello logistico di regressione.

Il metodo utilizzato per l'analisi dell'esperienza di sopravvivenza nel tempo di un contratto assicurativo è il metodo attuariale. Tale metodo è una delle più antiche tecniche per l'analisi della sopravvivenza. Essa è stata sviluppata originariamente nel settore assicurativo per la costruzione delle tavole di sopravvivenza impiegate in fase di tariffazione.

Sia T il numero aleatorio che descrive la durata di una polizza, il suo supporto è $[0, +\infty)$. Mediante il metodo attuariale è possibile calcolare una stima non parametrica della distribuzione di probabilità di T. Tale calcolo non richiede che le polizze nel portafoglio considerato abbiano uguale decorrenza o che siano osservate per una uguale durata temporale. Infatti, l'analisi si basa sulla durata di vita del contratto a partire dalla sua emissione.

Il metodo attuariale richiede di individuare (in modo arbitrario) una partizione in intervalli del periodo di osservazione. Sia $[t_j, t_{j+1})$ il generico intervallo, dove $j = 1, .., s$ e $t_{s+1} = +\infty$ (ovvero l'ultimo intervallo ha lunghezza infinita). Indichiamo con:

t_j^m : il punto medio dell'intervallo j-esimo;

c_j : il numero di polizze censurate nel j-esimo intervallo (per decesso dell'assicurato o per scadenza contrattuale);

r_j : il numero di polizze riscattate nel j-esimo intervallo;

$n_j^{'}$: il numero totale di polizze presenti all'inizio del j-esimo intervallo. La numerosità del campione analizzato è data da $n_1^{'}$. Il numero di polizze all'inizio di un generico intervallo è uguale al numero di contratti presenti all'inizio dell'intervallo precedente meno quelle censurate o riscattate durante lo stesso, in simboli

$$n_j^{'} = n_{j-1}^{'} - c_{j-1} - r_{j-1} \,;$$

n_j : il numero di polizze esposte al rischio nel j-esimo intervallo, assunte (sotto l'ipotesi che le censure si verifichino uniformemente nell'intervallo) pari a

$$n_j = n_j^{'} - \frac{1}{2} c_j \,.$$

A partire da queste informazioni è possibile stimare le grandezze fondamentali per l'analisi della sopravvivenza del contratto assicurativo.

La stima della probabilità di riscatto nell'intervallo $[t_j, t_{j+1})$, condizionatamente al fatto che il contraente non ha riscattato nel periodo precedente, è definita da:

$$\hat{q}_j = \frac{r_j}{n_j} \,, \qquad j = 1, .., s-1 \,,$$
$$\hat{q}_s = 1 \,.$$

Mentre la stima della probabilità condizionata di non riscatto è data dal complemento a uno di $\hat{q}_j$: $\hat{p}_j = 1 - \hat{q}_j$.

Solitamente la distribuzione del tempo di sopravvivenza T è caratterizzata mediante tre funzioni: la funzione di sopravvivenza, la funzione di densità e la funzione di rischio. Data una delle tre funzioni è possibile derivare le altre due. Nella parte che segue è data la definizione di queste funzioni e delle loro stime ottenute attraverso il metodo attuariale.

Funzione di sopravvivenza

La funzione di sopravvivenza, indicata con $S(t)$, è definita come la probabilità che un individuo (contratto) sopravviva almeno fino a t:

$$S(t) = Pr(T > t) = 1 - Pr(T \leq t) = 1 - F(t) \,,$$

dove $F(t)$ rappresenta la funzione di ripartizione del numero aleatorio T. La stima della funzione di sopravvivenza in t_j è data da

$$\hat{S}(t_j) = \begin{cases} 1 & j = 1 \\ \prod_{k=1}^{j-1} \hat{p}_k & j = 2, .., s \end{cases} .$$

Infatti, per $j > 1$ si ha:

$$\begin{aligned} S(t_j) &= Pr(T > t_j) = \\ &= Pr(T > t_{j-1}) Pr(T > t_j \mid T > t_{j-1}) = \\ &= S(t_{j-1}) p_{j-1} = ... = \prod_{k=1}^{j-1} p_j . \end{aligned}$$

Funzione di densità

La funzione di densità può essere interpretata come la probabilità di sperimentare l'evento in un intervallo di brevissima durata rapportato all'ampiezza dell'intervallo stesso (e quindi normalizzata sull'unità di tempo), a meno di un termine d'errore infinitesimo rispetto a tale durata. Formalmente, è definita da:

$$f(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{Pr(t \leq T < t + \Delta t)}{\Delta t} .$$

La stima della funzione di densità nel punto medio dell'intervallo j-esimo è ottenuta come

$$\hat{f}(t_j^m) = \frac{\hat{S}(t_j) - \hat{S}(t_{j+1})}{t_{j+1} - t_j} = \frac{\hat{S}(t_j)\hat{q}_j}{t_{j+1} - t_j} , \qquad j = 1, .., s-1 .$$

Funzione di rischio

La funzione di rischio $h(t)$ misura il rischio istantaneo di sperimentare l'evento in t, ed è definito da

$$h(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{Pr(t \leq T < t + \Delta t \mid T \geq t)}{\Delta t} .$$

A partire da tale definizione e applicando il Teorema delle probabilità composte, si ottiene facilmente la nota relazione esistente tra $h(t)$, $S(t)$ e $f(t)$, dalla quale si ha che la stima della funzione di rischio nel punto medio dell'intervallo j-esimo è pari a

$$\begin{aligned}\hat{h}(t_j^m) &= \frac{\hat{f}(t_j^m)}{\hat{S}(t_j^m)} = \frac{\hat{S}(t_j)\hat{q}_j/(t_{j+1}-t_j)}{\big(\hat{S}(t_{j+1})+\hat{S}(t_j)\big)/2} = \\ &= \frac{\hat{S}(t_j)\hat{q}_j}{(t_{j+1}-t_j)}\frac{2}{\hat{S}(t_j)(1+\hat{p}_j)} = \\ &= \frac{2\hat{q}_j}{(t_{j+1}-t_j)(1+\hat{p}_j)}\,, \qquad j=1,..,s\,.\end{aligned}$$

2.4.1 Risultati

Il metodo non parametrico è applicato all'intero insieme di dati, eccetto le polizze con anno di decorrenza maggiore del 2008, e rispetto a quello presentato nel paragrafo precedente (*person-period data set*) è stato necessario per ogni polizza condensare i dati in un'unica riga (*person-level data set*). In questo modo la storia di ogni contratto è riassunta in un solo *record*, che contiene, oltre all'informazione sull'eventuale riscatto, le variabili esplicative e l'antidurata di polizza al riscatto o alla censura. È utile osservare che con questo approccio le variabili esplicative dipendenti dal tempo sono trascurate dall'analisi (a meno di considerare una qualche funzione che permetta di riassumere le diverse determinazioni delle variabili nel tempo in un unico valore).

Importanti informazioni statistiche possono essere fornite dal grafico della funzione di sopravvivenza e dal grafico della funzione di rischio. In particolare, picchi nel grafico della funzione di rischio, e quindi forti pendenze nel grafico della funzione di sopravvivenza, individuano periodi caratterizzati da un elevato rischio di riscatto. Viceversa, tratti costanti nella funzione di rischio, e quindi una debole pendenza della funzione di sopravvivenza, evidenziano periodi caratterizzati da un rischio di riscatto relativamente basso.

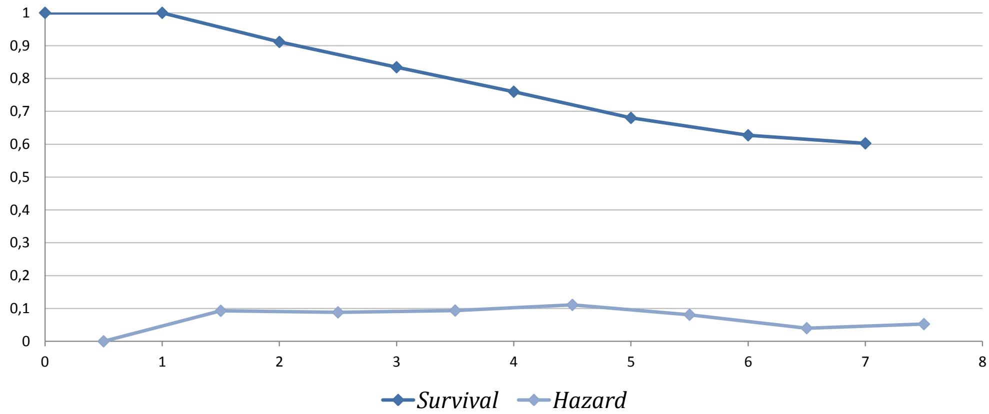

Figura 2.2: $\hat{S}(t)$ e $\hat{h}(t)$

La figura 2.2 riporta il grafico delle funzioni di sopravvivenza e di rischio stimate[6] sull'intero insieme di dati che è costituito da circa 57000 contratti, 15000 dei quali sono stati riscattati nel periodo di osservazione. Si osservi che per l'intervallo $[0, 1)$ la funzione di sopravvivenza è pari ad uno e nel suo punto medio la funzione di rischio è zero, dato che per tutti i contratti l'opzione di riscatto è concessa trascorso almeno un anno dalla decorrenza. Il grafico evidenzia un rischio di riscatto massimo per polizze con antidurata compresa nell'intervallo $[4, 5)$.

La figura 2.3 presenta le stime di $S(t)$ e $h(t)$ distinte per anno di decorrenza del contratto. La funzione di sopravvivenza stimata per i contratti con anno di decorrenza 2003 domina quella stimata per i contratti con anno di decorrenza 2004, e quest'ultima domina le altre funzioni di sopravvivenza. Quindi, mediamente, i contratti stipulati nel 2003 sono caratterizzati da una minore probabilità condizionata di riscatto rispetto a quelli stipulati negli anni seguenti.

Inoltre è possibile identificare dei valori massimi nelle funzioni di rischio stimate, in particolare per gli anni di decorrenza 2003 e 2004 nelle classi $[3, 4)$

[6]L'analisi è stata sviluppata in SAS attraverso la `proc lifetest`.

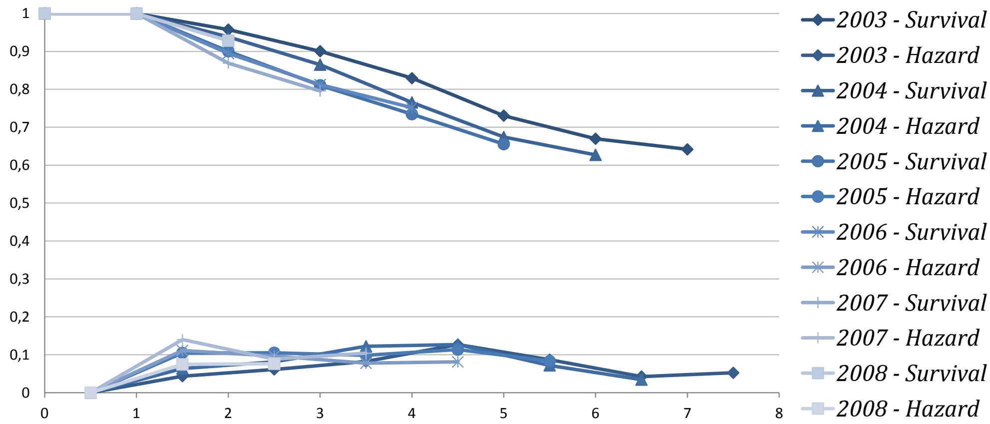

Figura 2.3: $\hat{S}(t)$ e $\hat{h}(t)$ per anno di decorrenza

e $[4, 5)$ e per l'anno di decorrenza 2007 nella classe $[1, 2)$. I grafici nella figura 2.4 sono relativi ai contratti con anno di decorrenza 2003 e 2004. Sull'asse delle ascisse sono indicati l'antidurata e l'anno solare relativo. I valori massimi delle funzioni di rischio si hanno nel periodo caratterizzato dalla crisi finanziaria globale che ha avuto origine nel 2007 nel mercato statunitense dei mutui *subprime*, crisi che si è aggravata notevolmente nella seconda metà del 2008 con il fallimento di Lehman Brothers. Quindi l'aumento dei riscatti potrebbe essere una conseguenza della crisi finanziaria. Una tale giustificazione è coerente con l'ipotesi di finanziamento di emergenza o potrebbe essere associata ad una generale perdita di fiducia nelle istituzioni finanziarie. In modo analogo può essere giustificato l'andamento della funzione di rischio per i contratti stipulati nel 2007.

Di seguito sono riportate alcune considerazioni circa l'andamento dei riscatti per le diverse determinazioni delle principali variabili che si ritiene possano rappresentare fattori esplicativi della sopravvivenza del contratto. Per valutare l'impatto di una variabile indipendente il *data set* è ripartito in sottogruppi di contratti caratterizzati da una particolare determinazione della variabile considerata. Il metodo attuariale è quindi applicato a ciascuno di questi sottogruppi.

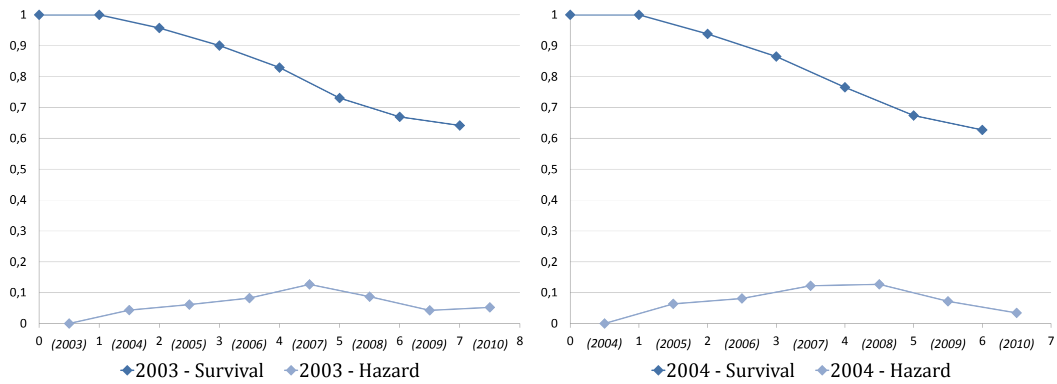

Figura 2.4: $\hat{S}(t)$ e $\hat{h}(t)$ per anno di decorrenza 2003 e 2004

Ramo ministeriale e tipologia di assicurazione

I dati a disposizione riguardano contratti di ramo I (assicurazioni sulla durata della vita umana) e ramo V (operazioni di capitalizzazione). Le assicurazioni miste costituiscono più del 90% del totale, i prodotti di capitalizzazione finanziaria circa il 5% e la restante parte è relativa ad assicurazioni a vita intera e di capitale differito.

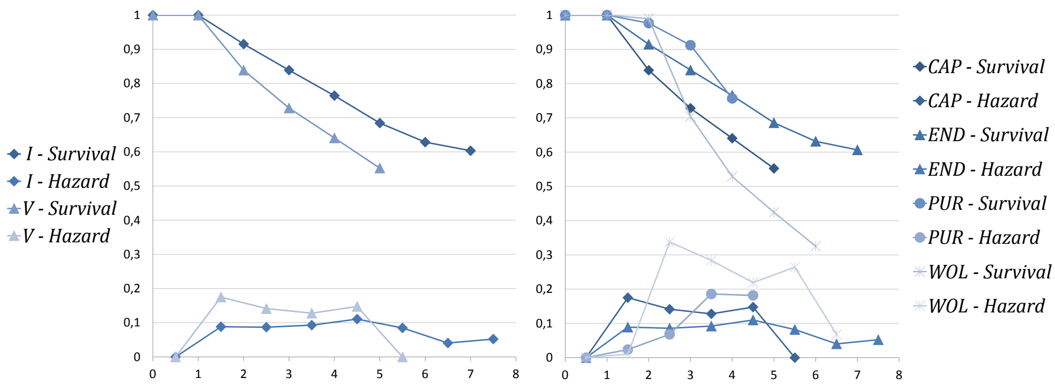

Figura 2.5: $\hat{S}(t)$ e $\hat{h}(t)$ per ramo ministeriale e tipologia di assicurazione

Le assicurazioni miste e quelle a vita intera hanno decorrenza maggiore o uguale all'anno 2003, i prodotti di capitalizzazione maggiore all'anno 2004 e le assicurazioni di capitale differito maggiore all'anno 2005. I grafici nella figura 2.5 riportano le stime della funzione di sopravvivenza e di rischio distinte per ramo e per tipologia di assicurazione. I contratti di assicurazione di tipo misto, capitale differito e vita intera costituiscono il gruppo dei contratti di ramo I, mentre solo i prodotti di capitalizzazione finanziaria costituiscono il gruppo dei contratti di ramo V. In particolare, dai grafici è possibile osservare che mediamente i prodotti di pura capitalizzazione sono più soggetti al riscatto rispetto alle assicurazioni miste. Data l'esigua numerosità dei dati a disposizione circa le assicurazioni di capitale differito, le assicurazioni a vita intera e i prodotti di pura capitalizzazione, nelle successive analisi si è ritenuto opportuno considerare solo le assicurazioni miste.

Contraente e assicurato

Dal grafico in figura 2.6 si può concludere che se il contraente è una azienda allora il contratto è più soggetto al riscatto. L'andamento della funzione di rischio stimata nel caso in cui il contraente sia un'azienda può essere spiegato dalla figura 2.7, che evidenzia un forte aumento dei riscatti nel 2008 per i contratti con anno di decorrenza 2007.

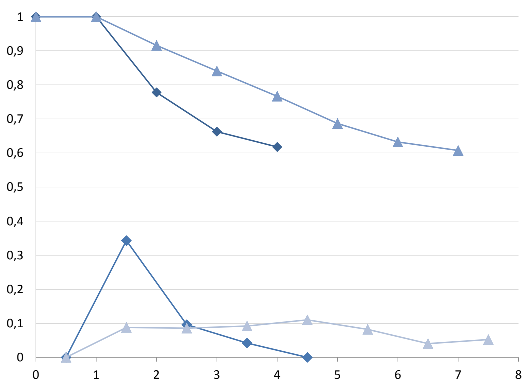

Figura 2.6: $\hat{S}(t)$ e $\hat{h}(t)$ al variare del contraente

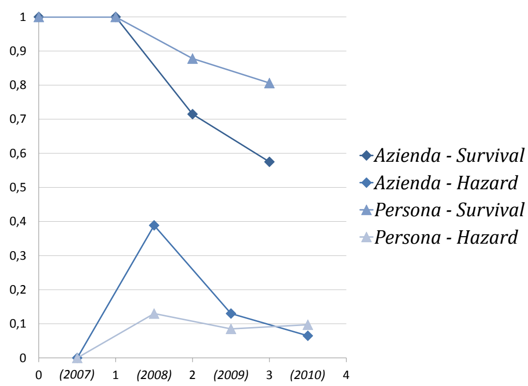

Figura 2.7: $\hat{S}(t)$ e $\hat{h}(t)$ al variare del contraente (anno di decorrenza 2007)

Dal grafico 2.6 è possibile concludere che per la variabile in esame l'ipotesi alla base del modello logistico di regressione non trova riscontro empirico. Infatti, le funzioni di rischio stimate per le diverse modalità di una variabile esplicativa dovrebbero essere parallele nel tempo o quantomeno non dovrebbero mai incrociarsi.

Nella figura 2.8 sono riportate le stime delle funzioni di rischio e di sopravvivenza al variare del sesso dell'assicurato. Generalmente, se l'assicurato è un maschio allora il contratto è maggiormente soggetto al rischio di riscatto. Infine, dalla figura 2.9 è possibile osservare che le funzioni di sopravvivenza stimate sono disposte in modo ordinato rispetto alle classi di età dell'assicurato al momento della sottoscrizione: minore è la classe di età e minore è il valore stimato per la funzione di sopravvivenza. Discorso analogo, anche se invertito, vale per le funzioni di rischio.

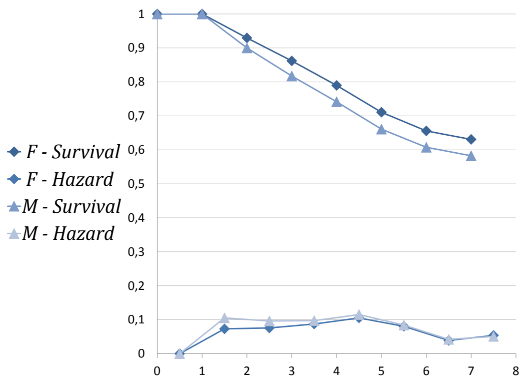

Figura 2.8: $\hat{S}(t)$ e $\hat{h}(t)$ al variare del sesso

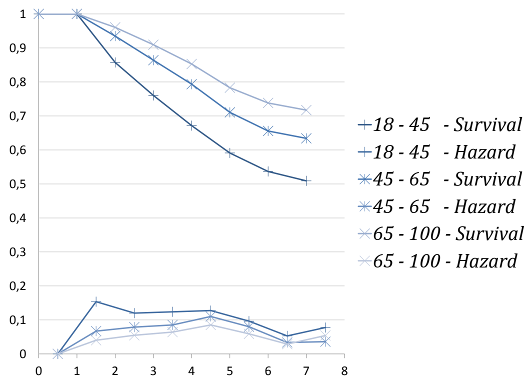

Figura 2.9: $\hat{S}(t)$ e $\hat{h}(t)$ al variare della classe di età

Tipo di premio

Le assicurazioni miste analizzate sono emesse o a premio unico o a premio unico ricorrente. La funzione di rischio stimata per i contratti a premio unico ricorrente è nella seconda classe di antidurata considerevolmente maggiore rispetto a quella stimata per i contratti a premio unico. Al crescere dell'antidurata la distanza tra le due funzioni stimate diminuisce (figura 2.10).

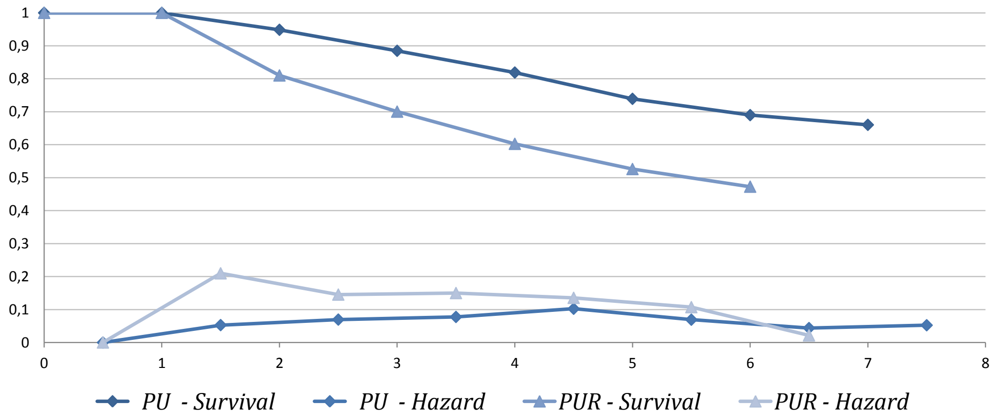

Figura 2.10: $\hat{S}(t)$ e $\hat{h}(t)$ al variare del tipo di premio

Prestazione ultima

Sono state individuate tre classi per l'importo di prestazione ultima ("<15", "15−75" e ">75" in migliaia di Euro). Il profilo di sopravvivenza per i contratti appartenenti alle ultime due classi di importo è molto simile. I contratti con prestazione ultima minore di 15000 Euro sono più soggetti al riscatto.

Canale di vendita

Nel portafoglio considerato il numero di contratti venduti dai promotori finanziari risulta essere molto contenuto. Tuttavia può essere interessante osservare dalla figura 2.12 come i contratti acquisiti mediante gli sportelli bancari abbiano una sopravvivenza, in termini di riscatto, maggiore rispetto a quelli acquisiti attraverso i promotori finanziari.

L'analisi non parametrica effettuata segnala che l'utilizzo di un modello a tempo discreto richiede ulteriori verifiche dell'ipotesi di proporzionalità tra gli *odds* ed, eventualmente, di considerare un'opportuna generalizzazione del modello per rilassare tale ipotesi.

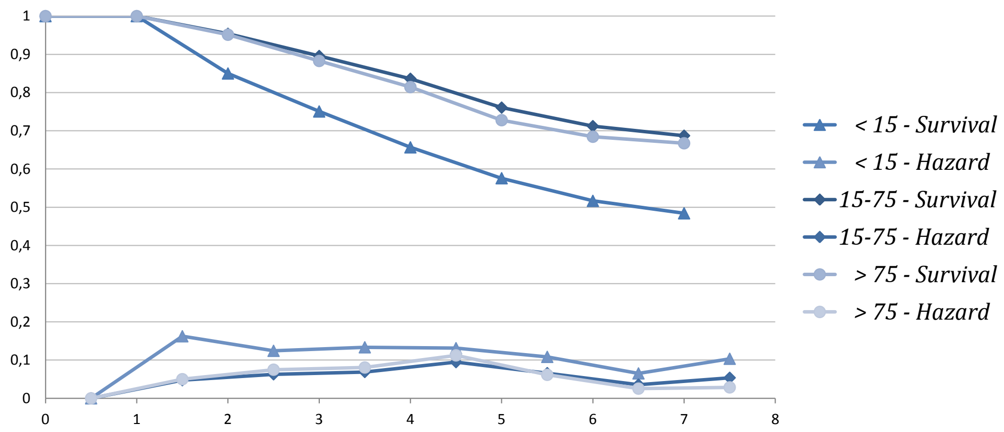

Figura 2.11: $\hat{S}(t)$ e $\hat{h}(t)$ al variare dell'importo di prestazione ultima

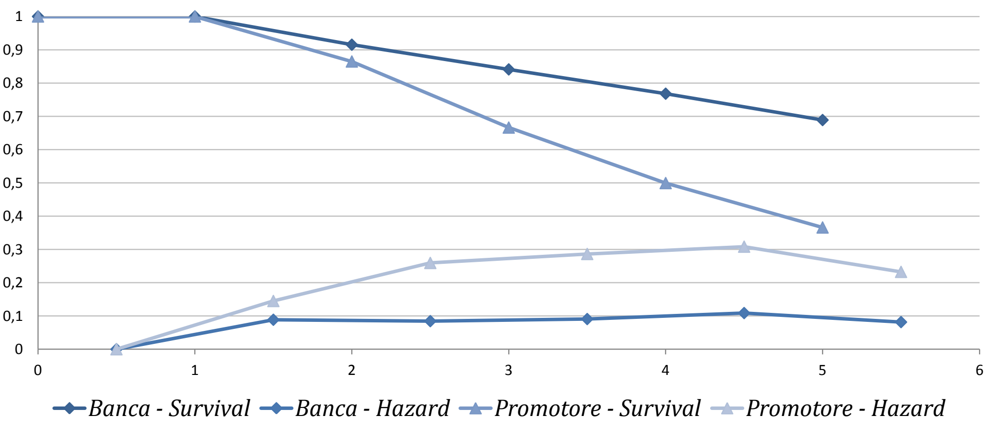

Figura 2.12: $\hat{S}(t)$ e $\hat{h}(t)$ al variare del canale di vendita

2.5 Modello logistico di regressione a tempo discreto

Dopo aver valutato separatamente l'effetto di alcune covariate sull'esercizio dell'opzione di riscatto del contratto, sarà analizzato l'effetto congiunto dei diversi fattori, tenendo conto della potenziale influenza degli altri. L'insieme di dati su cui sono basate le stime è il *person period data set*[7] costituito dalle sole polizze miste per le quali si è condotta anche l'ultima parte dell'analisi non parametrica. La sua dimensione è di circa 215000 anni-contratto. Nella tabella seguente sono elencate le variabili esplicative potenzialmente influenti presentate nella sezione 2.2.

Variabili esplicative	Descrizione
FISSATE	
Età	età (intera) dell'assicurato alla sottoscrizione
Sesso	sesso dell'assicurato: M=Maschio, F=Femmina
Contraente	categoria del soggetto di diritto
Premio	tipologia di premio: PU(R)=Premio Unico (Ricorrente)
Canale	canale di acquisizione del contratto
Decorrenza	anno di decorrenza della polizza
DIPENDENTI DAL TEMPO	
Prestazione ultima	capitale rivalutato all'ultimo anniversario di polizza
Extra-rendimento	differenza tra rendimento di gestione e TIR del BTP5
PIL	tasso annuo di crescita del PIL reale
Inflazione	tasso annuo di inflazione
Disoccupazione	tasso annuo di disoccupazione

Tabella 2.1: Variabili esplicative

[7]Per ogni contratto sono considerate solo le osservazioni successive al primo anno di antidurata dato che le tariffe in portafoglio consento il riscatto della polizza trascorso almeno un anno dalla decorrenza.

L'analisi non si è limitata agli effetti principali, ovvero alle variabili esplicative presentate sopra, ma sono stati considerati sia le interazioni che gli effetti polinomiali (ottenuti a partire dalle variabili numeriche). Riportiamo sotto l'equazione (2.1) che definisce il modello logistico di regressione a tempo discreto:

$$logit(q_{i,t}) = \ln\left(\frac{q_{i,t}}{1-q_{i,t}}\right) = \alpha_t + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}_{i,t} \, .$$

Il metodo utilizzato per la stima dei parametri è il metodo della massima verosimiglianza (Appendice A). Grazie a test statistici basati sulla normalità asintotica degli stimatori di massima verosimiglianza è possibile valutare quali variabili esplicative hanno una significativa influenza sulla variabile risposta. Per la selezione delle variabili esplicative da includere nel modello è stato adottato un procedimento *backward*: partendo dal modello con tutte le variabili potenzialmente influenti si escludono successivamente e in modo ordinato quelle non significative (partendo da quella meno significativa) finché tutte le rimanenti risultano esserlo ad un livello scelto dell'1%. L'obiettivo del procedimento è quello di costruire un modello con il miglior sottoinsieme di covariate, in modo che il modello stimato realizzi un buon adattamento ai dati, ma che sia parsimonioso nel numero di parametri.

I risultati[8] ottenuti sono riportati nella tabella 2.2. Per ogni variabile esplicativa è presente il coefficiente stimato, l'errore standard, il valore osservato della statistica di Wald e il *p-value* relativo.

Le variabili esplicative eliminate dal modello sono il tasso di disoccupazione e il tasso d'inflazione. Nella tabella 2.3 è riportato il valore del criterio statistico $-2logL$ (meno due volte il logaritmo del valore della funzione di verosimiglianza) per il modello senza variabili esplicative e per il modello selezionato. Inoltre, nella tabella 2.4 è indicato che l'ipotesi nulla globale dei 19 parametri è rifiutata (si tratta di test asintoticamente equivalenti).

[8]Le stime e i test sono stati ottenuti con l'utilizzo di SAS attraverso la `proc logistic`.

	Variabile Esplicativa	*Stima*	*Errore Standard*	*Chi Quadrato*	*p-value*
$\hat{\alpha}_0$	Intercetta	-2,6708	0,0932	821,6130	<0,0001
$\hat{\alpha}_1$	t	0,6563	0,0286	527,9360	<0,0001
$\hat{\alpha}_2$	t^2	-0,0696	0,0046	224,3778	<0,0001
$\hat{\beta}_1$	Extra-rendimento	-0,4691	0,0211	495,5732	<0,0001
$\hat{\beta}_2$	PIL	-0,0139	0,0040	12,3814	0,0004
$\hat{\beta}_3$	Prest.Ultima("15-75")	-0,0597	0,0262	5,1958	0,0226
$\hat{\beta}_4$	Prest.Ultima(">75")	0,2820	0,0339	69,0523	<0,0001
$\hat{\beta}_5$	Sesso(F)	-0,3725	0,0710	27,5564	<0,0001
$\hat{\beta}_6$	Età	-0,0333	0,0032	108,4240	<0,0001
$\hat{\beta}_7$	Età^2	1,41E-04	0,32E-04	19,3474	<0,0001
$\hat{\beta}_8$	Premio(PUR)	0,8728	0,0326	716,9205	<0,0001
$\hat{\beta}_9$	Contr.(Azienda)	1,1509	0,1248	85,0723	<0,0001
$\hat{\beta}_{10}$	Canale(Promotore)	0,8417	0,0690	148,6937	<0,0001
$\hat{\beta}_{11}$	Decorrenza(2004)	-0,0762	0,0326	5,4669	0,0194
$\hat{\beta}_{12}$	Decorrenza(2005)	0,0431	0,0310	1,9314	0,1646
$\hat{\beta}_{13}$	Decorrenza(2006)	0,1815	0,0337	29,0769	<0,0001
$\hat{\beta}_{14}$	Decorrenza(2007/08)	0,5202	0,0405	165,2680	<0,0001
$\hat{\beta}_{15}$	Decorrenza(2009)	0,3629	0,0643	31,8890	<0,0001
$\hat{\beta}_{16}$	Età$*$Sesso(F)	0,0048	0,0013	14,2177	0,0002
$\hat{\beta}_{17}$	Premio(PUR)$*$Sesso(F)	-0,1416	0,0402	12,4224	0,0004

Tabella 2.2: Stime del modello logistico di regressione a tempo discreto

Criterio	*Solo Intercetta*	*Intercetta e Covariate*
-2logL	105793,47	99855,68

Tabella 2.3: Statistica di adattamento del modello

Test	*Chi Quadrato*	*Gradi di Libertà*	*p-value*
Rapp.verosim.	5937,79	19	<0,0001
Score	6410,79	19	<0,0001
Wald	5775,21	19	<0,0001

Tabella 2.4: Test dell'ipotesi nulla globale

La tabella 2.5 presenta, limitatamente agli effetti principali, le variazioni della statistica di adattamento del modello ($-2logL$) nel caso in cui sia eliminata ad ogni passo una sola variabile esplicativa. È possibile concludere come l'extra-rendimento e il tipo di premio risultino essere i fattori più importanti.

Passo	*Variabile Cancellata*	*-2logL*
1	Sesso	27,71
2	Contraente	71,93
3	PIL	12,39
4	Età	93,35
5	Canale	126,43
6	Prestazione Ultima	139,89
7	Extra-rendimento	516,37
8	Premio	1275,62

Tabella 2.5: Variazioni nella statistica di adattamento del modello

2.5.1 Interpretazione dei parametri

La dipendenza del $logit(q_{i,t})$ dal tempo di attesa dell'evento riscatto, modellata nell'equazione (2.1) con i parametri α_t, è di tipo quadratico:

$$\alpha_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 \,.$$

Per comprendere meglio tale dipendenza può essere utile osservare la figura 2.13, che riporta sulle ascisse il tempo e sulle ordinate $\hat{\alpha}_t$. Il coefficiente stimato, $\hat{\alpha}_t$, cresce fino a $t = 5$ e poi decresce. Tale andamento caratterizza la probabilità condizionata di riscatto $q_{i,t}$. In particolare, l'andamento iniziale potrebbe essere giustificato dall'esistenza di penali sul valore di riscatto (trascurando $\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}_{i,t}$, minore è $\hat{\alpha}_t$ e minore sarà la probabilità di riscatto). Considerando una polizza mista di durata cinque anni, la probabilità condizionata di riscatto è crescente fino a scadenza. Mentre per una mista di durata maggiore a cinque anni, trascorsi cinque anni dalla stipulazione del contratto, la probabilità condizionata di riscatto diminuisce nel tempo. Quindi, il contraente che sceglie un investimento di breve durata è nel tempo maggiormente portato a riscattare la polizza. Una situazione diversa si ha per un contraente che sceglie un investimento di durata medio-lunga, cioè con il proposito (alla sottoscrizione del contratto) di impegnare il suo capitale per un periodo più lungo.

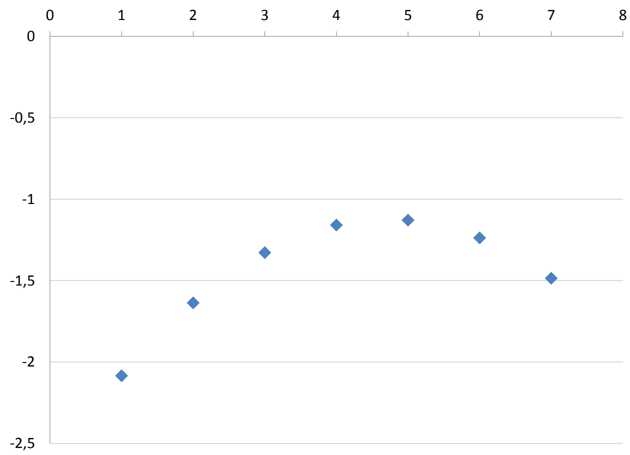

Figura 2.13: Dipendenza del $logit(q_{i,t})$ dal tempo di attesa dell'evento riscatto

Prima di procedere con l'interpretazione dei parametri è necessario osservare che le variabili di classificazione (variabili quantitative con determinazioni ripartite in livelli, o variabili qualitative) sono codificate mediante l'utilizzo di variabili indicatrici: una variabile di classificazione con l modalità può essere codificata con $l - 1$ variabili indicatrici. La modalità alla quale non è associata alcuna variabile indicatrice (identificata univocamente da una serie di valori nulli relative a tutte le altre indicatrici) è detta *modalità base* o di *riferimento*. Così le stime dei parametri relativi ad una variabile di classificazione devono essere interpretati in relazione alla modalità di riferimento scelta: un coefficiente stimato positivo associato ad una modalità, realizza un aggravamento per il rischio di riscatto rispetto alla modalità di riferimento.

Anno di decorrenza

L'anno di decorrenza di riferimento è il 2003. I coefficienti stimati per gli anni 2004 e 2005 non risultano essere significativamente diversi da zero, ovvero dalla modalità di riferimento. Inoltre, non è risultato significativo[9] mantenere separate le modalità relative agli anni 2007 e 2008. Per i contratti sottoscritti a partire dal 2006 si ha un rischio di riscatto maggiore rispetto a quelli sottoscritti negli anni precedenti (il coefficiente massimo stimato si ha per la modalità corrispondente agli anni 2007 e 2008).

Sesso dell'assicurato

Se l'assicurato è una donna la probabilità condizionata di riscatto nel tempo è inferiore, *ceteris paribus*, rispetto a quella di un uomo (modalità di riferimento).

Età dell'assicurato

Il coefficiente stimato per l'età è negativo, mentre quello per l'età al quadrato è positivo. Quindi, al crescere dell'età dell'assicurato al momento della stipulazione del contratto, si ha una diminuzione a tassi decrescenti della probabilità condizionata di riscatto. È possibile interpretare questo risultato

[9]Il test utilizzato per valutare se mantenere separati due livelli è il test di Wald (test eseguito mediante l'istruzione `contrast` nell'ambito della procedura `logistic`).

nell'ambito dell'ipotesi di finanziamento di emergenza, associando la maggior propensione al riscatto per i più giovani alla necessità di denaro per i "grandi acquisti" (e.g. la prima casa, l'automobile...).

Interazione tra sesso ed età dell'assicurato

Il coefficiente stimato è positivo, ciò implica che all'aumentare dell'età la differenza tra la propensione al riscatto tra i due sessi si riduce.

Contraente

Se il contraente è un'azienda la probabilità condizionata di riscatto è nel tempo molto maggiore rispetto al caso in cui sia stata una persona fisica ad aver stipulato il contratto assicurativo. Questo risultato può essere giustificato dal fatto che un'azienda è più attenta alla redditività del prodotto in cui investe, e sarà quindi portata a valutare l'offerta assicurativa con l'obiettivo di versare l'importo di premio minore a parità di prestazioni assicurative.

Prestazione ultima

Come livello di riferimento è stato scelto quello con prestazione ultima inferiore ai 15000 euro. Il coefficiente stimato per la classe di importo 15000 - 75000 euro è negativo (e non significativo ad un livello dell'1%), mentre quello relativo all'ultima classe è positivo e con un valore assoluto circa cinque volte superiore rispetto a quello della precedente classe. Per i contratti di importo molto elevato si ha una maggiore propensione al riscatto, che può essere dovuta ad una valutazione più attenta dell'investimento realizzato.

Canale

La probabilità condizionata di riscatto stimata dal modello è maggiore nel caso in cui il contratto sia acquisito mediante un promotore. Ciò può essere dovuto alla migliore consulenza offerta dal promotore al contraente (data dal diverso rapporto che lega contraente e promotore piuttosto che contraente e sportellista della banca) ed inoltre si possono innescare meccanismi di interesse reciproco nell'esercizio dell'opzione di riscatto finalizzata alla sottoscrizione di un nuovo contratto.

Tipo di premio

Rispetto ai contratti stipulati a premio unico (modalità di riferimento) i contratti a premio unico ricorrente sono soggetti ad un rischio maggiore di riscatto. Questa differenza tra le tipologie di premio è influenzata dalla seguente interazione con il sesso.

Interazione tra tipo di premio e sesso dell'assicurato

Il coefficiente stimato è negativo, ciò implica che la differenza sulla propensione al riscatto, al variare della tipologia di premio, si riduce se l'assicurato è di sesso femminile o, analogamente, la differenza sulla propensione al riscatto al variare del sesso dell'assicurato aumenta se il contratto è a premio unico ricorrente.

Extra-rendimento

Il coefficiente stimato è negativo, quindi all'aumentare dell'extra-rendimento di gestione rispetto al rendimento di un BTP a cinque anni si riduce (*ceteris paribus*) la probabilità condizionata di riscatto implicata dal modello. Questo risultato è coerente con l'ipotesi di tasso di interesse: il contraente che percepisce una redditività inferiore rispetto a quella che avrebbe mediante altri investimenti è maggiormente portato a terminare anticipatamente il rapporto assicurativo, in modo da incassare il valore di riscatto e poterlo così reinvestire altrove. È opportuno osservare come tale fenomeno sia molto più concreto nell'ambito della bancassicurazione piuttosto che presso la tradizionale rete agenziale.

Prodotto interno lordo

Il coefficiente stimato è negativo: all'aumentare del tasso annuo di crescita del prodotto interno lordo reale si riduce la probabilità condizionata di riscatto. Si ha così un risultato che sostiene l'ipotesi di finanziamento di emergenza: in periodi di buone condizioni economiche aumentano i risparmi dei privati e quindi si riduce la necessità di accedere al valore di riscatto.

Le stime ottenute possono essere interpretate anche sulla base degli *odds ratio*, prestando in ogni caso attenzione all'effetto delle interazioni. Ad esempio, si può osservare che l'impatto in termini di *odds ratio* è maggiore per l'extra-rendimento rispetto a quello del PIL. Infatti, l'aumento di una unità nell'extra-rendimento comporta una diminuzione del 37% circa nell'*odds ratio* di riscatto, mentre solo del 1% circa per il PIL.

Esempio 2.1 (Parte prima)**.** Per determinare le stime delle probabilità condizionate di riscatto implicate dal modello è sufficiente esplicitare $q_{i,t}$ dall'equazione (2.1):

$$\hat{q}_{i,t} = \frac{1}{1 + \exp(-\hat{\alpha}_t - \hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}_{i,t})}\,.$$

Consideriamo un'assicurazione mista rivalutabile con durata cinque anni e con le seguenti caratteristiche:
Decorrenza: 2003;
Contraente: Persona fisica;
Assicurato: Maschio con età 40;
Tipo di premio: Unico;
Prestazione ultima: "<15".
Per semplicità supponiamo che il premio unico pagato non modifichi nel tempo la classe di prestazione ultima e indichiamo con i tale contratto di assicurazione. Si noti che i livelli scelti per le variabili di classificazione sono quelli di riferimento. Inoltre, definiamo altri due contratti con caratteristiche uguali a quello i tranne per una variabile esplicativa: contratto j con classe

di prestazione ultima ">75" e contratto k con premio unico ricorrente. Nella tabella 2.6 sono riportate le stime delle probabilità condizionate di riscatto per i tre contratti.

Anno	*Extra-rend.*	*PIL*	*Antidurata*	t	$\hat{q}_{i,t}$	$\hat{q}_{j,t}$	$\hat{q}_{k,t}$
2003	0,0048	0,0	1	-	-	-	-
2004	0,0824	1,7	2	1	0,0372	0,0487	0,0847
2005	0,7716	0,9	3	2	0,0416	0,0554	0,0958
2006	-0,0457	2,2	4	3	0,0783	0,1032	0,1720
2007	-0,3807	1,7	5	4	0,1058	0,1384	0,2248

Tabella 2.6: Probabilità condizionate di riscatto

◇

2.6 Generalizzazione del modello logistico di regressione a tempo discreto

L'analisi non parametrica effettuata con il metodo attuariale suggerisce che l'effetto di alcune covariate sulla probabilità condizionata di riscatto potrebbe non essere costante nel tempo. Il modello del paragrafo precedente, che nel seguito indicheremo come modello ad effetti costanti, può essere generalizzato al fine di cogliere l'evoluzione nel tempo (antidurata di polizza) dell'effetto di tali covariate. Per fare ciò è sufficiente includere delle interazioni tra il tempo e le covariate. Se consideriamo un semplice modello con una sola covariata x e l'interazione della stessa con il tempo si avrà:

$$\begin{aligned} logit(q_{i,t}) &= \alpha_t + \gamma_1 x + \gamma_2 x t = \\ &= \alpha_t + (\gamma_1 + \gamma_2 t) x \,. \end{aligned}$$

Se $\hat{\gamma}_2$ è significativamente diverso da zero allora si ha evidenza che l'effetto di x sul $logit(q_{i,t})$ non può essere assunto costante. Quindi sarà opportuno includere la variabile tempo-dipendente $x \cdot t$ nel modello. Non includere interazioni significative tra il tempo e le covariate significa ottenere coefficienti stimati che rappresentano una sorta di "effetto medio" sul periodo di osservazione che caratterizza i dati.

Nella tabella 2.7 sono presentate le stime dei coefficienti del nuovo modello. L'approccio seguito per la sua costruzione è quello descritto nel paragrafo 2.5. Nella tabella 2.8 è riportato il valore della statistica di adattamento del modello ai dati.

Le interazioni significative con il tempo sono relative all'età e al sesso dell'assicurato, al tipo di premio e alla categoria del contraente. L'introduzione di queste nuove covariate ha reso statisticamente non significativa l'interazione tra il tipo di premio e il sesso dell'assicurato (interazione considerata nel modello ad effetti costanti).

2.6.1 Interpretazione dei parametri

Con riferimento ai parametri presenti sia nel modello a effetti costanti sia in questa sua versione generalizzata, i coefficienti stimati sono tra loro coerenti in termini di effetto sulla probabilità condizionata di riscatto. Analizziamo di seguito le variabili esplicative per le quali è risultata significativa l'interazione con il tempo.

Sesso dell'assicurato

Le stime ottenute per l'effetto principale e per l'interazione con il tempo indicano una differenza sulla propensione al riscatto per uomini e donne che si riduce linearmente con il tempo di vita della polizza. La consistenza numerica relativa all'effetto combinato dei due coefficienti è

$$\hat{\beta}_5 + \hat{\beta}_{17} t = \begin{cases} -0,5564 & t = 1 \\ ... & ... \\ -0,2366 & t = 7 \\ ... & ... \end{cases}$$

	Variabile Esplicativa	*Stima*	*Errore Standard*	*Chi Quadrato*	*p-value*
$\hat{\alpha}_0$	Intercetta	-2,8508	0,1165	598,2817	<0,0001
$\hat{\alpha}_1$	t	0,8528	0,0448	361,8023	<0,0001
$\hat{\alpha}_2$	t^2	-0,1176	0,0059	403,5064	<0,0001
$\hat{\beta}_1$	Extra-rendimento	-0,3733	0,0217	295,9815	<0,0001
$\hat{\beta}_2$	PIL	-0,0128	0,0040	10,2503	0,0014
$\hat{\beta}_3$	Prest.Ultima("15-75")	-0,0831	0,0265	9,8465	0,0017
$\hat{\beta}_4$	Prest.Ultima(">75")	0,2422	0,0342	50,1273	<0,0001
$\hat{\beta}_5$	Sesso(F)	-0,6097	0,0654	87,0466	<0,0001
$\hat{\beta}_6$	Età	-0,0390	0,0034	134,5958	<0,0001
$\hat{\beta}_7$	Età^2	1,09E-04	3,20E-05	11,3677	0,0007
$\hat{\beta}_8$	Premio(PUR)	2,1227	0,0808	690,6146	<0,0001
$\hat{\beta}_9$	Contr.(Azienda)	2,4990	0,3152	62,8688	<0,0001
$\hat{\beta}_{10}$	Canale(Promotore)	0,8387	0,0692	146,7817	<0,0001
$\hat{\beta}_{11}$	Decorrenza(2004)	-0,0197	0,0330	0,3576	0,5498
$\hat{\beta}_{12}$	Decorrenza(2005)	0,1060	0,0315	11,3471	0,0008
$\hat{\beta}_{13}$	Decorrenza(2006)	0,2026	0,0340	35,4988	<0,0001
$\hat{\beta}_{14}$	Decorrenza(2007/08)	0,5039	0,0412	149,7683	<0,0001
$\hat{\beta}_{15}$	Decorrenza(2009)	0,3359	0,0656	26,1877	<0,0001
$\hat{\beta}_{16}$	Età$*$Sesso(F)	0,0057	0,0012	24,8024	<0,0001
$\hat{\beta}_{17}$	Sesso(F)*t	0,0533	0,0140	14,5120	0,0001
$\hat{\beta}_{18}$	Età*t	0,0032	0,0005	40,3437	<0,0001
$\hat{\beta}_{19}$	Premio(PUR)*t	-0,8649	0,0591	214,3375	<0,0001
$\hat{\beta}_{20}$	Premio(PUR)*t^2	0,1058	0,0100	112,7408	<0,0001
$\hat{\beta}_{21}$	Contr.(Azienda)*t	-0,9699	0,2143	20,4867	<0,0001

Tabella 2.7: Stime del modello logistico di regressione a tempo discreto generalizzato

Criterio	*Solo Intercetta*	*Intercetta e Covariate*
-2logL	105793,47	99239,62

Tabella 2.8: Statistica di adattamento del modello

Età dell'assicurato

Come per il sesso dell'assicurato, anche per l'età si ha una riduzione lineare nel tempo del suo effetto complessivo stimato:

$$\hat{\beta}_6 + \hat{\beta}_{18} t = \begin{cases} -0,0358 & t = 1 \\ ... & ... \\ -0,0166 & t = 7 \\ ... & ... \end{cases}$$

Contraente

Il coefficiente stimato per l'interazione con il tempo è negativo. Ricordando che la modalità di riferimento è "Azienda" e osservando l'evoluzione dell'effetto complessivo, dato da

$$\hat{\beta}_9 + \hat{\beta}_{21} t = \begin{cases} +1,5291 & t = 1 \\ +0,5592 & t = 2 \\ -0,4107 & t = 3 \\ -1,3806 & t = 4 \\ ... & ... \end{cases}$$

si può concludere che se il contraente è un'azienda si ha una maggiore probabilità condizionata di riscatto per $t = 1$ e $t = 2$ rispetto a quella che si ha se il contraente è una persona fisica, viceversa se $t > 2$. Questo risultato può essere coerente con l'ipotesi che una azienda stipuli un contratto assicurativo, a ridotte penali di riscatto, come investimento di brevissimo termine.

Tipo di premio

Oltre all'interazione tra tempo e tipo di premio è significativa anche l'interazione con il tempo al quadrato. Nel grafico seguente riportiamo l'effetto complessivo stimato, dato da $\hat{\beta}_8 + \hat{\beta}_{19}t + \hat{\beta}_{20}t^2$, al variare di t. Se il tipo di

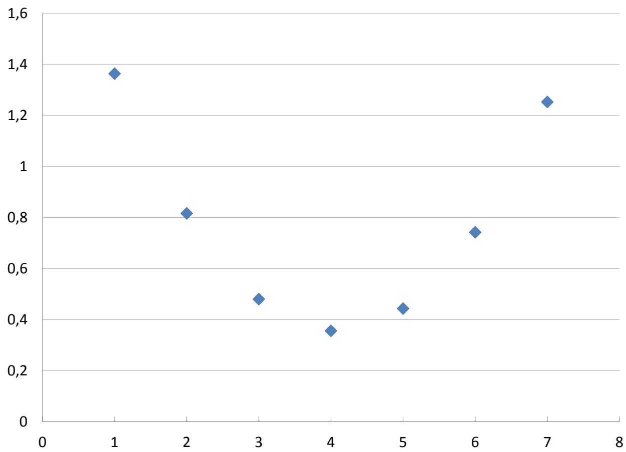

Figura 2.14: Effetto complessivo stimato per la tipologia di premio

premio è unico ricorrente il coefficiente stimato assume il suo valore minimo per $t = 4$. I contratti a premio unico ricorrente sono soggetti ad un rischio maggiore di riscatto rispetto ai contratti stipulati a premio unico (modalità di riferimento). Diversamente dal modello a effetti costanti, tale rischio è decrescente nei primi anni dalla decorrenza, con valore minimo nel quinto anno, e poi crescente. Nell'interpretare questo risultato si deve prestare attenzione al fatto che i contratti a premio unico hanno principalmente durata cinque anni, mentre la maggior parte dei contratti a premio unico ricorrente ha durata sette o dieci anni.

Esempio 2.2 (Parte seconda)**.** Consideriamo i contratti i, j e k come definiti nell'esempio 2.1. La tabella 2.9 riporta le stime delle probabilità condizionate di riscatto per i tre contratti mettendo a confronto quelle ottenute con il modello a effetti costanti ($\hat{q}_{i,t}$) e quelle ottenute con la sua versione generalizzata ($\hat{q}^*_{i,t}$).

Anno	*Antidurata*	*t*	$\hat{q}_{i,t}$	$\hat{q}^*_{i,t}$	$\hat{q}_{j,t}$	$\hat{q}^*_{j,t}$	$\hat{q}_{k,t}$	$\hat{q}^*_{k,t}$
2003	1	-	-	-	-	-	-	-
2004	2	1	0,0372	0,0315	0,0487	0,0398	0,0847	0,1128
2005	3	2	0,0416	0,0454	0,0554	0,0572	0,0958	0,0972
2006	4	3	0,0783	0,0860	0,1032	0,1070	0,1720	0,1320
2007	5	4	0,1058	0,1116	0,1384	0,1290	0,2248	0,1521

Tabella 2.9: Confronto tra le probabilità condizionate di riscatto

$\diamond$

2.7 Bontà di adattamento del modello ai dati

Per quanto riguarda la bontà di adattamento del modello ai dati, non è stato possibile effettuare un'analisi classica dei residui. Infatti, la variabile dipendente ha come possibili realizzazioni zero o uno, mentre le stime sono comprese nell'intervallo di estremi zero e uno. Ciò implica che tutti i residui ordinari associati alle osservazioni pari ad uno sono positivi e, viceversa, tutti quelli associati alle osservazioni pari a zero sono negativi. Una soluzione adottata per riuscire ad utilizzare l'analisi grafica dei residui è quella di passare dal modello per dati individuali ad un modello per dati raggruppati, a condizione che ciascun gruppo (individuato da una specifica combinazione delle determinazioni delle variabili esplicative) sia caratterizzato da un'adeguata numerosità. In questo modo il residuo non è necessariamente positivo o negativo in funzione della relativa osservazione, poiché è costruito a partire dalla proporzione di "successi" nell'ambito del gruppo e non più dalla singola realizzazione.

Tuttavia abbiamo ritenuto non accettabile considerare un modello per dati raggruppati, dato che sarebbe stato necessario escludere dall'analisi variabili esplicative interessanti, in modo da riuscire ad ottenere una numerosità nell'ambito dei gruppi soddisfacente. Ciò è conseguenza della complessa strut-

tura dei dati analizzati.
Anche test classici per la bontà complessiva di adattamento dei modelli logistici ordinari si sono rivelati inutilizzabili vista la diversa natura del modello analizzato. Una possibile indicazione complessiva di bontà del modello, fornita automaticamente dalla procedura SAS utilizzata, è definita come rapporto tra le *coppie concordanti* e tutte le possibili *coppie*, dove le possibili *coppie* sono costruite combinando un'osservazione che non sperimenta l'evento di interesse (intendendo una riga del *person-period data set* con determinazione della variabile risposta pari a zero) con una che lo sperimenta (intendendo una riga del *person-period data set* con determinazione della variabile risposta pari ad uno), e una *coppia concordante* è una *coppia* nella quale la probabilità stimata associata all'osservazione che non sperimenta l'evento di interesse è inferiore rispetto alla probabilità associata all'osservazione che sperimenta l'evento.
Per il modello a effetti costanti la percentuale di *coppie concordanti* è circa 68%, mentre per la sua versione generalizzata è circa 69% (il numero totale di *coppie* è pari a 3 miliardi circa).

Capitolo 3

Valutazione dell'opzione di riscatto

3.1 Introduzione

Storicamente molte delle opzioni incorporate nei contratti erano concesse ai contraenti senza un'esplicita valutazione del loro costo (*pricing*), in parte perché non erano considerate fonte di perdita e in parte perché i metodi attuariali tradizionali non prevedevano tali valutazioni. In particolare, per molti anni l'opzione di riscatto è stata concessa gratuitamente o comunque senza un adeguato caricamento implicito del premio. In realtà, l'esistenza di penali sul valore di riscatto può essere vista come una sorta di "*pricing* ex-post", cioè l'opzione offerta a tutti i contraenti è pagata solamente da quelli che decidono di esercitarla.
Come anticipato nei precedenti capitoli, l'evoluzione economico-finanziaria degli ultimi anni ha reso oggi indispensabile una valutazione appropriata del costo delle opzioni e dei rischi ad esse associati.

La valutazione *market consistent* dei contratti assicurativi, e quindi anche delle opzioni in essi incorporate, si rifà ai princìpi e alle metodologie su cui si basano le valutazioni che caratterizzano i mercati finanziari.
Nell'ambito degli strumenti finanziari derivati l'opzione di riscatto, concessa

in un contratto di assicurazione sulla vita, è classificata come un'opzione *put* americana scritta sul valore residuo del contratto e con prezzo di esercizio pari al valore di riscatto, con la peculiarità che la sua esistenza è legata alla sopravvivenza dell'assicurato (*knock-out american put option* [BBM(2009)]). Infatti, il contraente (possessore dell'opzione) ha il diritto di restituire (vendere) il contratto all'impresa di assicurazione, entro la naturale conclusione del contratto stesso (decesso dell'assicurato o scadenza), ricevendo in cambio il valore di riscatto. Quindi la valutazione può essere ricondotta a quella di un'opzione put americana che consideri in aggiunta ai fattori finanziari quelli biometrici: l'esercizio dell'opzione è subordinato alla sopravvivenza dell'assicurato.
Il quadro valutativo è quello classico finanziario del mercato perfetto, ovvero si tratta di un mercato caratterizzato da: assenza di attriti (non ci sono costi di transazione e imposte, le attività sono perfettamente divisibili e negoziabili), concorrenza perfetta, tutti i partecipanti sono *price takers*, efficienza informativa (le informazioni sono gratuite e disponibili contemporaneamente a tutti gli operatori), assenza di opportunità di arbitraggio (non è possibile realizzare un guadagno certo senza rischio), razionalità e non sazietà degli agenti. In una tale struttura valutativa la decisione di riscattare il contratto da parte del contraente è unicamente conseguenza di una scelta razionale, dipendente dall'evoluzione del contesto finanziario e biometrico.

Osservazione 3.1. Nelle valutazioni attuariali tradizionali il riscatto è trattato in modo analogo alla mortalità e costituisce pertanto una delle cause di uscita che caratterizza, insieme alla mortalità, le tavole a più cause di eliminazione utilizzate appunto in tali valutazioni. In questo modo l'andamento dei riscatti è "statico" (indipendente dall'evoluzione del contesto finanziario) ed è determinato sulla base dei dati storici che non necessariamente rispecchieranno l'andamento futuro. $\diamondsuit$

Sulla base dell'ipotesi di "massima razionalità" del contraente si può determinare il valore *market consistent* dell'opzione di riscatto. Tuttavia, così facendo si sovrastima il valore "effettivo" dell'opzione (può essere interpretato come valore "*worst-case*" dal punto di vista della compagnia), dato che l'evidenza empirica mostra come le decisioni di riscatto siano molto lontane dall'essere conseguenza di scelte perfettamente razionali. Ciò significa che una valutazione realistica dell'opzione di riscatto deve necessariamente considerare l'"irrazionalità", o più precisamente il "livello di razionalità", nel comportamento del contraente. Come dimostrato in diverse analisi sui riscatti, il livello di razionalità aumenta in circostanze macroeconomiche difficili, viceversa in circostanze favorevoli tende a diminuire. Allora variabili macroeconomiche, come ad esempio i tassi di mercato, il PIL e il tasso di disoccupazione, potrebbero essere utilizzati per stimare tale livello. Naturalmente ciò comporta un aumento della complessità nella metodologia di valutazione, che potrebbe anche spingere le imprese di assicurazione a concentrarsi principalmente sulla costruzione di un prodotto assicurativo in cui risulti poco appetibile l'opzione di riscatto.

Nella parte seguente del capitolo sarà presentata la metodologia di valutazione dell'opzione di riscatto basata su quanto sviluppato da Bacinello, Biffis e Millossovich [BBM(2009)], sia con l'obiettivo di determinare il valore dell'opzione in ipotesi di perfetta razionalità dei contraenti, che con quello di ottenere invece un valore più realistico della stessa introducendo, nell'algoritmo di valutazione, un modello in grado di cogliere il livello di razionalità, come proposto da De Giovanni [DeG(2010)].
Centrale nella valutazione è la determinazione della strategia di esercizio ottimale, problema che può essere letto in termini di *optimal stopping times*. Per determinare il prezzo dell'opzione di riscatto è utilizzato il metodo *Least Squares Monte Carlo* (LSMC) impiegato in ambito puramente finanziario per il *pricing* delle opzioni americane. L'idea alla base del metodo è quella di stimare il *valore di continuazione* del contratto con una regressione ai minimi quadrati, in modo da individuare, confrontando in ogni istante questo valore con il valore di riscatto, la data di esercizio ottimale.

3.2 Definizione del contratto con opzione di riscatto

Il contratto che include l'opzione di riscatto oggetto della valutazione è una polizza mista rivalutabile a premio unico di durata T anni. Questa assicurazione prevede una prestazione caso vita b_T^v, se l'assicurato è in vita alla scadenza contrattuale T, o un beneficio caso morte b_τ^d se l'assicurato decede al tempo $\tau \in (0, T]$. Oltre a queste prestazioni, il contraente ha il diritto di riscattare la polizza in un qualsiasi istante $\theta \in (t', T)$ ricevendo b_θ^r come valore di riscatto[1]. L'intervallo $(0, t']$ rappresenta invece il periodo di carenza del riscatto.

In $t = 0$, a fronte del premio unico versato dal contraente, l'impresa investe il capitale iniziale C_0 in una dedicata gestione separata, cioè un ben definito portafoglio di contratti finanziari (fondo di riferimento), il cui rendimento determina l'entità della rivalutazione delle prestazioni (e in generale anche l'entità dell'adeguamento dei premi). Indichiamo con I_ℓ il tasso medio di rendimento della gestione separata relativo all'anno $[\ell - 1, \ell]$, dove $\ell \in \{1, ..., T\}$.

In una generica ricorrenza anniversaria ℓ, il capitale assicurato rivalutato è definito dalla:

$$C_\ell = C_0 \prod_{k=1}^{\ell} (1 + \rho_k)\,, \tag{3.1}$$

dove ρ_k rappresenta il tasso di rivalutazione annuale, definito da:

$$\rho_k = \max\left\{ \frac{\min\{\beta I_k, I_k - \eta\} - i'}{1 + i'}, \rho_{min} \right\}, \tag{3.2}$$

con: i' tasso tecnico (relativo alla base tecnica del I ordine), $\beta \in (0, 1]$ aliquota di retrocessione, η rendimento annuo minimo trattenuto dalla compagnia e ρ_{min} tasso minimo garantito di rivalutazione annuale.

È utile osservare che:

[1] Le prestazioni b_T^v, b_τ^d e b_θ^r sono numeri aleatori dato che dipendono, oltre che dalla durata aleatoria di vita dell'assicurato, dal rendimento (aleatorio) conseguito dalla gestione separata.

- $\min\{\beta I_k, I_k - \eta\}$ costituisce la componente di rendimento retrocessa al contratto, ovvero se da I_k si toglie tale quantità si determina il rendimento trattenuto dall'impresa di assicurazione[2];

- il tasso tecnico i' è sottratto dal rendimento retrocesso in quanto è contrattualmente garantito ogni anno. Inoltre, è necessario dividere per $(1+i')$ dato che il tasso ρ_k opera sulla riserva di fine anno, ovvero sul valore attuariale delle prestazioni di fine anno non ancora rivalutate.

- Riscrivendo (3.2) come:

$$\rho_k = \frac{1 + \max\big\{ \min\{\beta I_k, I_k - \eta\}, \rho_{min}(1+i') + i' \big\}}{1+i'} - 1\,,$$

  è possibile evidenziare che il rendimento minimo complessivo riconosciuto al contratto è $\rho_{min}(1+i') + i' = (\rho_{min} + i'\rho_{min} + i')$. Quindi la presenza di un tasso minimo garantito di rivalutazione annuale positivo rappresenta un impegno ulteriore, oltre i', per l'assicuratore.

Osservazione 3.2. La regola di rivalutazione (3.2) corrisponde al *payoff* di un'opzione *cliquet*, in quanto il rendimento oltre i' è consolidato annualmente. Quindi la garanzia di minimo che caratterizza la polizza identifica un contratto di tipo strutturato con sottostante il rendimento del fondo. Questo contratto può essere scomposto come "investimento rischioso e un'opzione *put* (protettiva)" oppure come "investimento non rischioso e un'opzione *call* (che fornisce l'extra-rendimento oltre il minimo garantito)". ◇

La prestazione caso vita b_T^v coincide con il capitale rivalutato sino alla scadenza contrattuale T.
Il capitale rivalutato al momento del decesso dell'assicurato o al momento di richiesta del riscatto, e quindi in generale ad una data intermedia tra due ricorrenze annuali, è calcolato riducendo pro-quota, per la frazione d'anno intercorsa tra l'ultima ricorrenza annuale e la data di calcolo, il tasso di rivalutazione dell'ultima ricorrenza annuale.

[2]Ovviamente se esso risulta maggiore di $\rho_{min}(1+i') + i'$.

La prestazione in caso di decesso dell'assicurato prima della scadenza contrattuale, corrisposta al beneficiario, è pari al capitale assicurato rivalutato alla data del decesso, maggiorato di un importo determinato come percentuale ζ dello stesso:

$$b^d_\tau = (1+\zeta)C_\tau \,. \tag{3.3}$$

Il valore di riscatto al tempo θ è invece pari ad una percentuale $(1-\gamma_\theta)$, crescente con l'antidurata di polizza, del capitale rivalutato fino al momento della richiesta:

$$b^r_\theta = (1-\gamma_\theta)C_\theta \,. \tag{3.4}$$

Fissati $t \geq 0$ e un tempo di riscatto $\theta \geq 0$ (strategia di riscatto), le prestazioni possibili collegate al contratto, liquidate fino al tempo t, possono essere riassunte dalla seguente espressione:

$$B^A_t(\theta) = b^v_T \, \mathbb{I}_{T\leq \min\{t,\theta\},\, T<\tau} + b^d_\tau \, \mathbb{I}_{\tau \leq \min\{t,\theta,T\}} + b^r_\theta \, \mathbb{I}_{\theta<\min\{\tau,T\},\, t'<\theta\leq t} \,, \tag{3.5}$$

dove $\mathbb{I}_E$ rappresenta la variabile indicatrice dell'evento E e, per convenzione, $\theta \geq T$ oppure $\theta \geq \tau$ oppure ancora $\theta \leq t'$ sta ad indicare che l'opzione di riscatto non viene mai esercitata.
Gli addendi al secondo membro della (3.5) sono diversi da zero in relazione al verificarsi degli eventi (mutuamente esclusivi) che danno diritto all'erogazione di una prestazione da parte dell'impresa di assicurazione. Con riferimento all'opzione di riscatto, il contratto è detto essere di tipo americano. Nel caso in cui, invece, non sia presente tale opzione il contratto è detto essere di tipo europeo e le prestazioni fino al tempo $t \geq 0$ sono riassunte da:

$$B^E_t = b^v_T \, \mathbb{I}_{T\leq t,\, T<\tau} + b^d_\tau \, \mathbb{I}_{\tau\leq \min\{t,T\}} \,. \tag{3.6}$$

3.3 Definizione della struttura alla base della valutazione

Sia dato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$, dove Ω è lo spazio delle possibili realizzazioni per i numeri aleatori (finanziari e biometrici) che caratterizzano la valutazione, $\mathcal{F}$ è una σ-algebra (su Ω) e $\mathbb{Q}$ è una misura di probabilità neutrale al rischio, grazie alla quale il valore di mercato di un qualsiasi titolo è determinato come valore attuale atteso, condizionato all'informazione disponibile, dei suoi flussi di cassa futuri, utilizzando per l'attualizzazione il tasso privo di rischio e per il calcolo del valore atteso la misura $\mathbb{Q}$. Mentre l'esistenza di una misura di probabilità neutrale al rischio è garantita dall'assenza di opportunità di arbitraggio, la sua unicità non è verificata (infatti, il mercato in questione è incompleto). Pertanto la misura $\mathbb{Q}$ è da intendersi selezionata dall'assicuratore per il *pricing* del contratto, assumendo che la stessa misura sia alla base della valutazione effettuata dal contraente al fine di decidere se esercitare o meno l'opzione di riscatto[3].

Indichiamo con $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{Q})$ lo spazio di probabilità filtrato, ottenuto definendo su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ la filtrazione $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. $\mathbb{F}$ è costituita dalla famiglia crescente $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ di sotto-σ-algebre di $\mathcal{F}$, cioè tali che $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ per ogni $s, t \geq 0$, con $s \leq t$ e $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Intuitivamente la σ-algebra $\mathcal{F}_t$ rappresenta l'informazione fino all'istante t disponibile al contraente e all'impresa di assicurazione ($\mathcal{F}_t$ contiene gli eventi che possono essere conosciuti entro l'istante t, ovvero quelli per i quali al tempo t è possibile dire se si sono verificati oppure no). Inoltre, $\mathbb{F}$ goda delle proprietà standard di completezza e continuità a destra[4].

Infine, fissato t, sia X_t l'insieme dei numeri aleatori definiti sullo spazio di probabilità filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{Q})$. Intuitivamente, X_t dovrebbe racchiudere le cause di aleatorietà che influenzano il problema considerato (ad esempio, l'andamento dei mercati finanziari e le evoluzioni di carattere biometrico). Così, al variare di t, il processo stocastico $(X_t)_{t \geq 0}$ genera la filtrazione $\mathbb{F}$.

[3]Per un approfondimento circa l'impiego di misure di probabilità neutrali al rischio differenziate tra impresa di assicurazione e contraente si rimanda a [BBM(2010)].

[4]**Definizione**(Completezza e continuità a destra) Dato uno spazio di probabilità completo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$, cioè tale per cui $\mathcal{F}$ contiene tutti i sottoinsiemi degli eventi di probabilità nulla, una filtrazione $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ si dice *completa* se, per ogni $t \geq 0$, la σ-algebra $\mathcal{F}_t$ contiene tutti gli eventi di $\mathcal{F}$ di probabilità nulla. Una filtrazione $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ si dice invece *continua a destra* se verifica l'uguaglianza $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$ per ogni $t \geq 0$, dove, intuitivamente, $\mathcal{F}_{t+}$ contiene anche tutti gli eventi che possono essere noti immediatamente dopo l'istante t. Per una trattazione formale dell'argomento, si rimanda a [Car(2011)].

3.3.1 Il modello biometrico

Sia x (numero certo) l'età dell'assicurato in $t = 0$ e indichiamo con τ il numero aleatorio che descrive la durata residua di vita dell'assicurato ($x + \tau$ rappresenta l'età aleatoria al decesso). La filtrazione $\mathbb{F}$, definita precedentemente, è tale da includere l'informazione relativa all'istante di decesso dell'assicurato. Perciò, per ogni $t \geq 0$ l'informazione disponibile $\mathcal{F}_t$ permette di conoscere se l'istante τ è scoccato entro t, ovvero se l'assicurato è deceduto in τ o se è ancora vivo in t. Quindi, per definizione, τ è un *tempo d'arresto*[5] (*stopping time*).

Si assuma che il numero aleatorio τ abbia distribuzione di Weibull con parametro di forma $\gamma > 0$ e parametro di scala $\lambda > 0$. L'intensità di mortalità (funzione di rischio) è definita come:

$$h_x(t) = \frac{\gamma}{\lambda}\left(\frac{x+t}{\lambda}\right)^{\gamma-1}, \tag{3.7}$$

mentre la funzione di ripartizione[6] è:

$$F_x(t) = 1 - \exp\big\{ -\lambda^{-\gamma}\big[(x+t)^{\gamma} - x^{\gamma}\big]\big\}. \tag{3.8}$$

Osservazione 3.3. L'evoluzione dell'intensità di mortalità è assunta deterministica dato lo scarso rilievo di un'evoluzione stocastica per la tipologia di contratto esaminata e per la relativa distribuzione delle età degli assicurati e delle durate contrattuali. La quasi totalità delle polizze presumibilmente giungerà a scadenza (se non riscattate prima) e, inoltre, l'eventuale presenza di *longevity risk* andrebbe a favore, anziché a sfavore, dell'assicuratore. Non sempre tale semplificazione può essere ritenuta adeguata, in particolare

[5]**Definizione**(Tempo d'arresto) Dato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ su cui è definita la filtrazione $\mathbb{F}$, un *tempo d'arresto* è un numero aleatorio (esteso) $\tau : \Omega \to [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ tale che l'evento $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, per ogni $t \in [0, +\infty)$.

[6]Data la funzione di rischio, la funzione di ripartizione si ricava facilmente dalla nota relazione

$$F_x(t) = 1 - \exp\left\{ -\int_0^t h_x(u)\,\mathrm{d}u \right\}.$$

quando non si ritiene accettabile trascurare gli scarti sistematici della mortalità osservata dalla mortalità attesa prevista dal modello adottato (rischio aggregato di longevità) in quanto si ha a che fare, ad esempio, con contratti di rendite vitalizie. Per un'implementazione stocastica dell'evoluzione dell'intensità di mortalità si rimanda a [BBM(2009)]. $\diamondsuit$

Come risulterà chiaro nella sezione 3.5, la metodologia di valutazione richiede la simulazione stocastica di τ. Una determinazione simulata della durata aleatoria residua di vita τ è data da $F_x^{-1}(u)$, dove F_x^{-1} è l'inversa[7] della funzione di ripartizione F_x e u è un numero (pseudo-)casuale con distribuzione uniforme $\mathcal{U}(0,1)$.

3.3.2 Il modello finanziario

Per determinare il tasso di rivalutazione annuale (3.2) è necessario conoscere il tasso medio di rendimento della gestione separata I_k. Come indicato nel paragrafo 2.2, questo tasso è definito con "regole contabili", considerando come valori degli attivi nel fondo di riferimento il valore di carico e non il *valore di mercato*. Ciò complica la trattazione e un'adeguata approssimazione (proposta in [DeFM(2002)] e utilizzata in [AC(2003)] per il *pricing* dell'opzione di riscatto per un'assicurazione mista rivalutabile) è quella di assumere che il rendimento del fondo di riferimento nel periodo $[k-1,k]$ sia dato da:

$$I_k = \frac{F_k - F_{k-1}}{F_{k-1}}\,, \tag{3.9}$$

dove F_k rappresenta il *valore di mercato* in k (di una unità) di tale fondo, a sua volta definito, ipotizzando che sia composto da azioni ed obbligazioni, come combinazione convessa di un indice azionario A_k e di un indice obbligazionario O_k:

$$F_k = \alpha^A A_k + (1-\alpha^A) O_k\,, \qquad \alpha^A \in [0,1]\,. \tag{3.10}$$

[7]In generale, se non esiste la funzione inversa, è sempre possibile considerare la funzione inversa generalizzata. Ricordiamo che l'esistenza della funzione inversa è garantita dalla stretta monotónia della funzione di partenza.

L'ipotesi che la gestione separata abbia solo componenti obbligazionaria e azionaria costituisce una buona approssimazione dell'effettiva composizione del portafoglio titoli della particolare gestione collegata alla polizza rivalutabile in esame. Inoltre, è necessario definire adeguatamente la struttura degli indici di mercato A_t e O_t, in modo da riflettere approssimativamente la strategia gestionale del fondo di riferimento.

Perciò, per determinare la dinamica del fondo di riferimento si considera un modello continuo diffusivo bivariato, in base al quale i tassi d'interesse seguono un processo "*mean-reverting square root*", come proposto da Cox, Ingersoll e Ross, mentre la componente azionaria evolve come assunto da Black e Scholes. Qui di seguito sono descritte tali dinamiche.

Modello di Cox, Ingersoll e Ross Il modello di Cox, Ingersoll e Ross (CIR) è definito dalla seguente equazione differenziale stocastica per l'evoluzione del tasso di interesse istantaneo (*spot rate*) r_t:

$$\mathrm{d}r_t = \alpha(\mu - r_t)\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{r_t}\mathrm{d}Z_t^r \,, \tag{3.11}$$

dove α è il coefficiente di richiamo e determina la velocità di aggiustamento del tasso di interesse r_t verso la sua media di lungo periodo μ (tasso di lungo periodo), $\sigma\sqrt{r_t}$ è la volatilità che caratterizza le variazioni di r_t (al crescere del tasso di interesse la volatilità aumenta ed inoltre, se $2\alpha\mu/\sigma^2 \geq 1$, è garantita, quasi certamente, la stretta positività di r_t) e Z_t^r è un processo di Wiener standardizzato. Questo processo implica che la distribuzione dello *spot rate* sia di tipo chi-quadro non centrata. Il modello ipotizza che il prezzo di mercato del rischio sia pari a $\pi\sqrt{r_t}/\sigma$, dove π è una costante. Inoltre, è possibile ricavare[8], partendo dal processo (3.11), la dinamica neutrale al rischio del tasso di interesse istantaneo:

$$\mathrm{d}r_t = \alpha^*(\mu^* - r_t)\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{r_t}\mathrm{d}Z_t^{r*} \,, \tag{3.12}$$

dove Z_t^{r*} è un processo di Wiener standardizzato rispetto alla misura di probabilità neutrale al rischio, $\alpha^* = \alpha - \pi$ e $\mu^* = \alpha\mu/\alpha^*$ (π può essere

[8] Per una trattazione completa si rimanda a [BM(2006)].

considerato come il parametro che consente di passare dalla probabilità fisica alla probabilità neutrale al rischio).
Il modello CIR permette di calcolare con formule chiuse il prezzo dei titoli a cedola nulla, o *Zero-Coupon Bond* (ZCB). Posto, infatti:

$$\begin{aligned}
d &= \sqrt{\alpha^{*2} + 2\sigma^2}\,, \\
A(s,S) &= \left\{ \frac{2de^{\frac{1}{2}(\alpha^*+d)(S-s)}}{(\alpha^*+d)\big[e^{d(S-s)}-1\big]+2d} \right\}^{2\frac{\alpha\mu}{\sigma^2}}, \\
B(s,S) &= \frac{2\big[e^{d(S-s)}-1\big]}{(\alpha^*+d)\big[e^{d(S-s)}-1\big]+2d}\,,
\end{aligned}$$

il prezzo in s di un titolo a cedola nulla con scadenza $S > s$ è dato da:

$$P(s,S) = A(s,S)e^{-B(s,S)r_s}\,. \tag{3.13}$$

Per modellare l'indice obbligazionario O_t si considera una strategia di compra-vendita ([DeFM(2002)])[9], a intervalli prefissati di ampiezza δ, di ZCB con durata prefissata $D \geq \delta$. In altre parole, tale strategia consiste nell'acquistare un titolo a cedola nulla con durata D, per venderlo trascorse δ unità di tempo, riacquistando nello stesso istante un altro titolo a cedola nulla con durata D, per il quale si adotterà la stessa procedura. La scelta di D e δ influisce significativamente sulla volatilità dell'indice O_t. Ad esempio, se si considera $D = \delta = 3$ mesi (strategia di *roll-over* a tre mesi), allora O_t ha traiettorie con bassa dispersione locale ma elevata nel lungo periodo. Al contrario, con una strategia di compra-vendita trimestrale di titoli con durata medio-lunga si hanno traiettorie con volatilità locale più accentuata e dispersione nel lungo termine più contenuta. La figura 3.1 riporta alcuni esempi di traiettorie simulate al variare della strategia di compra-vendita su un orizzonte temporale di dieci anni (le traiettorie sono generate con i parametri neutrali al rischio del modello CIR).

[9]Tale strategia permette di mantenere la *duration* del portafoglio obbligazionario all'interno di un certo intervallo che contiene un fissato livello obiettivo.

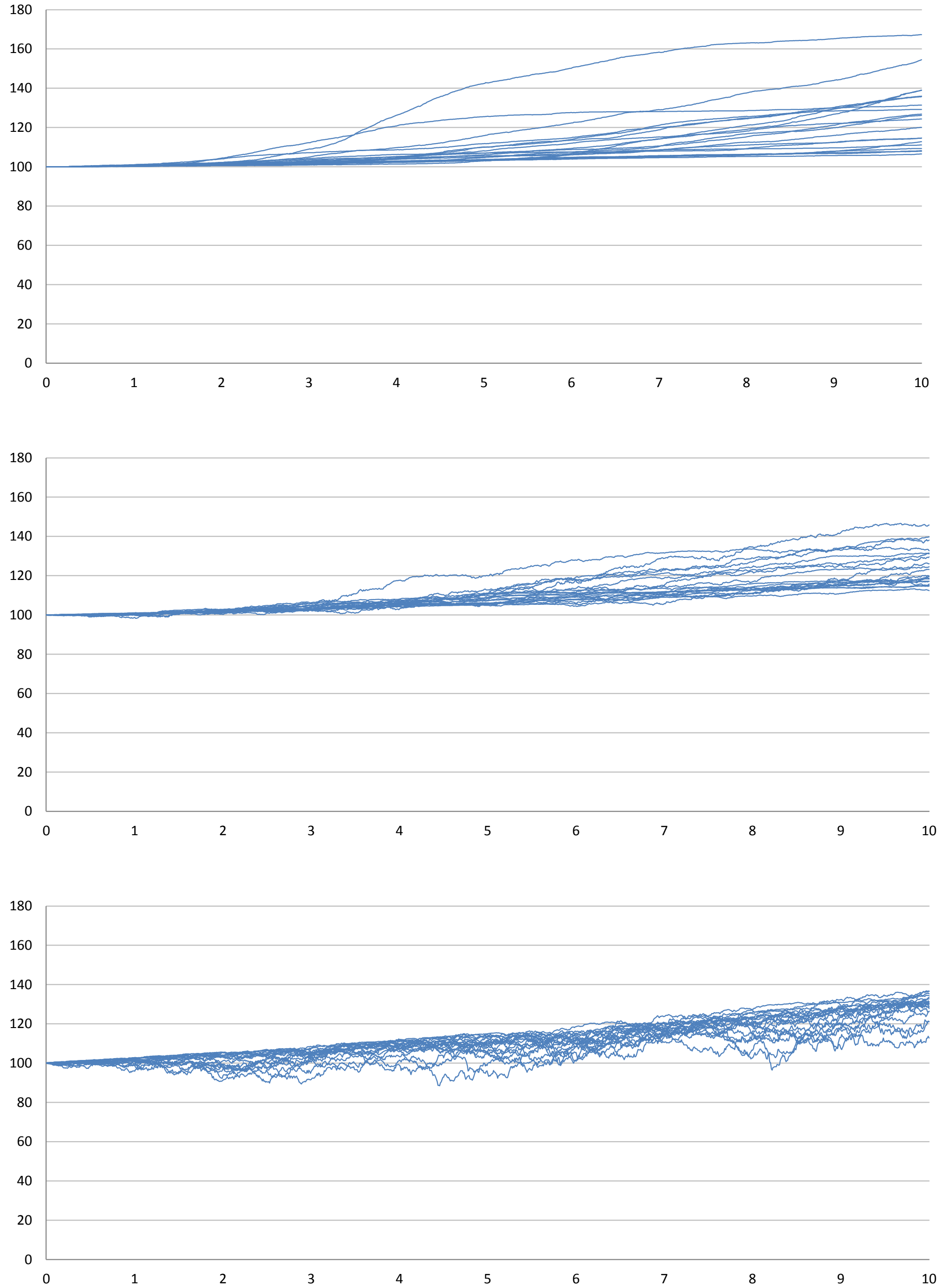

Figura 3.1: Traiettorie dell'indice obbligazionario: *roll-over a tre mesi*, $D = 1$ e $\delta = 0.25, D = 5$ e $\delta = 0.25$

Modello di Black e Scholes Per la dinamica dell'indice azionario si considera il modello di Black e Scholes (B&S):

$$\mathrm{d}A_t = \nu A_t \mathrm{d}t + \phi A_t \mathrm{d}Z_t^A \,, \tag{3.14}$$

dove ν e ϕ rappresentano il rendimento istantaneo atteso (*drift*) e la volatilità che caratterizza le variazioni dell'indice azionario, e Z_t^A è un processo di Wiener standardizzato. Il modello B&S assume una distribuzione lognormale per l'indice azionario e un prezzo di mercato del rischio pari a $(\nu - r_t)/\phi$.

L'evoluzione neutrale al rischio dell'indice azionario è descritta da:

$$\mathrm{d}A_t = r_t A_t \mathrm{d}t + \phi A_t \mathrm{d}Z_t^{A*} \,. \tag{3.15}$$

In particolare, si osserva che nell'ambito neutrale al rischio non è necessario specificare ν.

Si assume, inoltre, che i processi stocastici che determinano l'evoluzione del tasso d'interesse istantaneo r_t e dell'indice azionario A_t siano correlati:

$$Cov\big(\mathrm{d}Z_t^A, \mathrm{d}Z_t^r\big) = \rho^{Ar} dt \,, \tag{3.16}$$

dove ρ^{Ar} è il coefficiente di correlazione istantaneo.

3.3.3 Il valore del contratto

La struttura su cui è basata la valutazione è lo spazio di probabilità filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{Q})$, dove la filtrazione $\mathbb{F}$ è generata da $(X_t)_{t\geq 0} = (r_t, F_t, C_t)_{t\geq 0}$. Inoltre, è necessario introdurre il fattore di capitalizzazione stocastico (*money-market account*) per ogni $t \geq 0$, dato da $c_t = \exp\big(\int_0^t r_s \mathrm{d}s\big)$, costruito con una strategia di *roll-over* su investimenti con durata infinitesima e intensità istantanea di rendimento pari al tasso privo di rischio r_t.
Con riferimento alle prestazioni introdotte nella sezione 3.2, si ipotizza che i processi stocastici delle prestazioni siano predicibili[10], ovvero, intuitivamente,

[10]**Definizione**(Processo predicibile) Dato uno spazio di probabilità filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{Q})$, un processo stocastico (a tempo continuo) $(b_t^e)_{t\geq 0}$ è *predicibile* se il numero aleatorio b_t^e è $\mathcal{F}_{t^-}$-misurabile, per ogni $t \geq 0$.

il valore di una prestazione in un certo t dipende solo dall'informazione fino ad un istante subito precedente t (e non anche dall'informazione acquisita in t o successivamente).

Il valore (prezzo) al tempo $t \geq 0$ del contratto europeo è ottenuto come valore atteso condizionato, in ambiente neutrale al rischio, dei flussi futuri del contratto scontati in t; in formule:

$$V_t^E = c_t E^{\mathbb{Q}} \left[\int_t^{\infty} c_u^{-1} \mathrm{d}B_u^E \middle| \mathcal{F}_t \right], \tag{3.17}$$

dove B_u^E è definita dalla (3.6), che implica $\mathrm{d}B_u^E = 0$ per ogni $u > \min\{\tau, T\}$, cioè per ogni istante successivo all'epoca di conclusione naturale del contratto (ciò significa, naturalmente, che il valore del contratto è nullo per ogni istante successivo tale epoca). In particolare, il valore del contratto europeo per $t = 0$ è:

$$V_0^E = E^{\mathbb{Q}} \left[\int_0^{\infty} c_u^{-1} \mathrm{d}B_u^E \right]. \tag{3.18}$$

Per quanto riguarda il valore del contratto americano, si osserva preliminarmente che è naturale considerare l'istante di esercizio θ come un tempo d'arresto: la decisione di esercitare l'opzione di riscatto in un certo momento dipende solo dall'informazione disponibile fino a quel momento, cioè dalle condizioni finanziarie e biometriche che possono far percepire al contraente più o meno vantaggioso riscattare piuttosto che mantenere in essere il contratto. Il valore del contratto americano in $t \geq 0$, per una data strategia di riscatto θ, è definito dalla seguente formula di valutazione neutrale al rischio:

$$V_t^A(\theta) = c_t E^{\mathbb{Q}} \left[\int_t^{\infty} c_u^{-1} \mathrm{d}B_u^A(\theta) \middle| \mathcal{F}_t \right], \tag{3.19}$$

dove $B_u^A(\theta)$ è definita dalla (3.5), che implica $\mathrm{d}B_u^A(\theta) = 0$ per ogni $u > \min\{\theta, \tau, T\}$, cioè per ogni istante successivo all'epoca di riscatto o di conclusione naturale del contratto. Per determinare il prezzo all'emissione del contratto americano, come è naturale in ambito puramente finanziario per il *pricing* di un'opzione americana, è necessario individuare la strategia ottimale di esercizio dell'opzione stessa. Sia $\mathrm{T}_{\mathbb{F}}$ l'insieme dei possibili tempi d'arresto; allora il valore in $t = 0$ del contratto americano è dato da

$$V_0^A(\theta^*) = \sup_{\theta \in \mathrm{T}_{\mathbb{F}}} V_0^A(\theta) = \sup_{\theta \in \mathrm{T}_{\mathbb{F}}} \left\{ E^{\mathbb{Q}} \left[\int_0^\infty c_u^{-1} \mathrm{d}B_u^A(\theta) \right] \right\}, \tag{3.20}$$

dove θ^* è la soluzione del problema del tempo d'arresto ottimale, ed è tale da massimizzare il valore atteso all'emissione del contratto.

Osservazione 3.4. L'estremo superiore di integrazione degli integrali inclusi nelle espressioni precedenti può essere sostituito con il $\min\{\tau, T\}$, per la versione europea del contratto, e con il $\min\{\theta, \tau, T\}$, per il contratto americano, ricordando la convenzione $\theta \geq \min\{\tau, T\}$ se non avviene l'esercizio dell'opzione di riscatto.

Inoltre, le precedenti formule possono essere semplificate, in relazione alla particolare scelta di analizzare un'assicurazione di tipo misto come descritta in 3.2. Ad esempio, per il contratto di tipo americano, data una strategia di riscatto θ, si ha:

$$\begin{aligned} V_0^A(\theta) &= E^{\mathbb{Q}} \left[\int_0^\infty c_u^{-1} \mathrm{d}B_u^A(\theta) \right] = \\ &= E^{\mathbb{Q}} \left[c_T^{-1} b_T^v \, \mathbb{I}_{T \leq \theta, \, T < \tau} + c_\tau^{-1} b_\tau^d \, \mathbb{I}_{\tau \leq \min\{\theta, T\}} + c_\theta^{-1} b_\theta^r \, \mathbb{I}_{\theta < \min\{\tau, T\}, \, \theta > t'} \right]. \end{aligned}$$

Anche se in questa tesi ci occupiamo di assicurazioni miste rivalutabili, abbiamo deciso di mantenere l'impostazione, più generale, adottata in [BBM(2009)] per evidenziare che per qualsiasi scelta della tipologia del contratto, basta particolarizzare le funzioni integratrici per avere una formula di valutazione più specifica. ♢

3.4 Il metodo LSMC

Il metodo *Least Squares Monte Carlo* ha come obiettivo la risoluzione (approssimata) del problema (3.20), sfruttando la simulazione Monte Carlo e la regressione lineare ai minimi quadrati. Come evidenziato in [BBM(2009)], la sua implementazione comporta tre principali approssimazioni.

La prima approssimazione riguarda la discretizzazione temporale del problema (3.20), che porta alla valutazione di un contratto, non di tipo americano, ma di tipo Bermuda (attributo derivante dalla peculiarità dell'omonima opzione). Sia $\mathbf{T}$ una discretizzazione temporale ottenuta dividendo in n periodi l'intervallo $[0,T]$: $\mathbf{T}=\{t_0,t_1,...,t_n\}$ con $t_i=iT/n$, per $i=0,...,T$. Inoltre, sia $\mathrm{T}_{\mathbb{F},\mathbf{T}}$ l'insieme dei possibili tempi d'arresto sulla discretizzazione $\mathbf{T}$. Per quanto detto, il problema del tempo d'arresto ottimale (3.20) è approssimato da:

$$V_0^A(\theta^*)=\sup_{\theta\in\mathrm{T}_{\mathbb{F},\mathbf{T}}}V_0^A(\theta)=\sup_{\theta\in\mathrm{T}_{\mathbb{F},\mathbf{T}}}E^{\mathbb{Q}}\big[R_\theta\big]\,. \tag{3.21}$$

dove

$$R_\theta=\int_0^\theta c_u^{-1}\mathrm{d}B_u^A(\theta)\,.$$

Per determinare la soluzione del problema (3.21) si procede attraverso un'induzione all'indietro, tipica della programmazione dinamica, confrontando ad ogni passo temporale il valore di riscatto con il valore di continuazione del contratto, al fine di decidere se esercitare o meno l'opzione. Lo studio di questo tipo di ricorsione viene effettuato mediante l'inviluppo di Snell, definito a partire dal processo adattato $(R_\theta)_{\theta\in\mathrm{T}_{\mathbb{F},\mathbf{T}}}$[11]. Il metodo LSMC considera l'inviluppo di Snell in termini di tempi di arresto ottimali (la definizione classica si basa sui processi del *payoff* e del prezzo dell'opzione americana), cioè un tempo di arresto ottimale $\theta^*=\theta_0^*$ è definito dalla seguente ricorsione all'indietro:

$$\begin{cases}\theta_n^*=t_n=T\\ \theta_j^*=t_j\mathbb{I}_{R_{t_j}>U_j}+\theta_{j+1}^*\mathbb{I}_{R_{t_j}\le U_j}\,, \qquad j=n-1,...,0\,,\end{cases} \tag{3.22}$$

dove

$$U_j=E^{\mathbb{Q}}\big[R_{\theta_{j+1}^*}\big|\mathcal{F}_{t_j}\big]\,.$$

La complessità del problema (3.22) riguarda il fatto che U_j non è noto. Per ottenere una stima di U_j si sfrutta la proprietà di markovianità della struttura

[11]**Definizione**(Processo adattato) Un processo stocastico $(R_\theta)_{\theta\in\mathrm{T}_{\mathbb{F},\mathbf{T}}}$ definito su uno spazio di probabilità filtrato $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F},\mathbb{Q})$ si dice *adattato* se per ogni $\theta\in\mathrm{T}_{\mathbb{F},\mathbf{T}}$ la variabile R_θ è $\mathcal{F}_\theta$-misurabile.

introdotta[12], grazie alla quale risulta:

$$U_j = E^{\mathbb{Q}}\big[R_{\theta^*_{j+1}}\big|\mathcal{F}_{t_j}\big] = E^{\mathbb{Q}}\big[R_{\theta^*_{j+1}}\big|X_{t_j}\big]\,,$$

e quindi U_j può essere scritto come funzione di t_j e X_{t_j}.

La seconda approssimazione prevede di sostituire ogni U_j con una loro stima ottenuta da una combinazione lineare di H *funzioni*, tra loro linearmente indipendenti, appartenenti ad un'opportuna base (ad esempio data dai polinomi di potenze, o dai polinomi di Laguerre, Legendre, Hermite o Chebyshev)[13]:

$$\tilde{U}_j = \hat{\boldsymbol{\beta}}_j \mathbf{f}(X_{t_j}) = \sum_{h=1}^{H} \hat{\beta}_j^h\, f_h(X_{t_j})\,, \tag{3.23}$$

dove il vettore dei coefficienti $\hat{\boldsymbol{\beta}}_j$ è ottenuto grazie ad una regressione ai minimi quadrati.

Infine, la terza approssimazione è relativa all'utilizzo del metodo Monte Carlo per rendere operativa l'approssimazione precedente e risolvere il problema (3.21). Sia M il numero di simulazioni e $(X_t^m)_{t\in\mathbf{T}}$ l'm-esima traiettoria simulata del processo $(X_t)_{t\in\mathbf{T}}$ (in modo analogo per $(R_\theta^m)_{\theta\in\mathrm{T}_{\mathbb{F},\mathbf{T}}}$). Fissato j, la stima ai minimi quadrati di $\hat{\boldsymbol{\beta}}_j$ è data da:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_j = \arg\min_{\boldsymbol{\beta}_j\in\mathbb{R}^H} \sum_{m=1}^{M} \big[R^m_{\theta^*_{j+1}} - \boldsymbol{\beta}_j \mathbf{f}(X^m_{t_j})\big]^2\,. \tag{3.24}$$

Quindi, ricorsivamente, è possibile determinare, per ognuna delle M simulazioni, la strategia di esercizio ottimale e i relativi flussi di cassa generati dal contratto (in modo mutuamente esclusivo: valore di riscatto, prestazione caso vita a scadenza o prestazione caso morte). La soluzione approssimata del problema (3.20) è così ottenuta come media aritmetica dei valori attuali di tali flussi di cassa.

[12]Il processo adattato $(X_t)_{t\in\mathbf{T}}$ è per costruzione un processo markoviano.

[13]In altre parole, il generico U_j è approssimato dalla sua proiezione ortogonale dallo spazio delle funzioni quadrato sommabili $L^2(\Omega)$ sullo spazio vettoriale generato dall'insieme finito di *funzioni*, appartenenti alla base scelta.

3.5 L'algoritmo di valutazione nel caso di *perfetta* razionalità del contraente

In questo paragrafo è presentato l'algoritmo che permette di determinare il valore dell'opzione di riscatto nel caso di perfetta razionalità del contraente, come differenza tra il valore del contratto di tipo americano e il valore del contratto di tipo europeo. Le fasi per determinare il valore del contratto americano possono essere riassunte in: `Simulazione`, `Inizializzazione`, `Induzione all'indietro` e `Valutazione`.

1. `Simulazione`:
   Simulare M istanti di decesso τ e M traiettorie del processo $(X_t)_{t\in\mathbf{T}}$.

2. `Inizializzazione`:

   Per $m = 1, ..., M$:
   Se $\tau^m > T$ allora $\theta^{*,m} = T$ e $P^m_{\theta^{*,m}} = b^{v,m}_T$,
   altrimenti $\theta^{*,m} = \tau^m$ e $P^m_{\theta^{*,m}} = b^{d,m}_{\tau^m}$.

3. `Induzione all'indietro`:
   Per $j = n-1, ..., 1$ (o fino all'istante in cui è concesso al contraente di riscattare, cioè fino al più piccolo j tale per cui $t_j > t'$)

   (a) Sia $I_j = \{m \in \{1, ..., M\} : \tau^m > t_j\}$, ovvero l'insieme degli scenari in cui l'assicurato all'istante t_j è in vita. Inoltre, per ogni $m \in I_j$, sia $\mathcal{C}^m_j = c^m_{t_j}(c^m_{\theta^{*,m}})^{-1} P^m_{\theta^{*,m}}$.

   (b) Determinare la stima ai minimi quadrati dei coefficienti $\boldsymbol{\beta}_j$ della regressione lineare di $\{\mathcal{C}^m_j, m \in I_j\}$ su $\{f_h(X^m_{t_j}), m \in I_j\}_{h=1}^H$.

   (c) Per ogni $m \in I_j$, sia $\tilde{\mathcal{C}}^m_j = \hat{\boldsymbol{\beta}}_j \mathbf{f}(X^m_{t_j})$ il valore di continuazione stimato al tempo t_j nello scenario m-esimo.

   (d) (*Esercizio razionale*) Per ogni $m \in I_j$, se $b^{r,m}_{t_j} > \tilde{\mathcal{C}}^m_j$, allora $\theta^{*,m} = t_j$ e $P^m_{\theta^{*,m}} = b^{r,m}_{t_j}$.

4. `Valutazione`:

   Grazie alla fase precedente è definita la strategia di riscatto ottimale $\theta^{*,m}$ per ogni $m = 1, ..., M$. Quindi, il valore attuale in $t = 0$ del contratto americano è

$$V_0^A(\theta^*) = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}(c^m_{\theta^*,m})^{-1}P^m_{\theta^*,m}\,.$$

Osservazione 3.5. Nella fase `induzione all'indietro` si considerano al posto degli $\tilde{U}_j$, ottenuti risolvendo (3.24) e quindi (3.23), i valori $\tilde{\mathfrak{C}}_j$, ottenuti dai passi 3.(b) e quindi 3.(c). Ovviamente ciò non modifica la soluzione del problema del tempo d'arresto ottimale. ♢

Per determinare il valore attuale in $t = 0$ del contratto di tipo europeo si possono sfruttare le fasi precedenti, a meno della fase di induzione all'indietro. Così, con un'unica esecuzione dell'algoritmo si stimano $V_0^A(\theta^*)$ e V_0^E, da cui per differenza si determina il valore dell'opzione di riscatto.

3.6 Il modello per il comportamento dei contraenti

Fin qui è stato ipotizzato che l'esercizio dell'opzione di riscatto sia effettuato con massima razionalità da parte del contraente[14]. Come detto precedentemente, questa ipotesi risulta essere troppo forte rispetto all'evidenza empirica.

L'idea alla base della valutazione proposta in [DeG(2010)], nel caso di *imperfetta* razionalità del contraente, è quella di introdurre una probabilità di riscatto dipendente dalla scelta che il contraente perseguirebbe nel caso di *perfetta* razionalità e dalla situazione macroeconomica prevalente nei possibili istanti nei quali potrebbe decidere di riscattare. Quindi tale probabilità

[14]Sempre con riferimento all'assunzione di coincidenza tra la misura neutrale al rischio selezionata dalla compagnia (che in qualche modo rispecchia il suo grado di avversione al rischio) e quella selezionata dal contraente sulla cui base prende le sue decisioni di riscatto.

può essere interpretata come probabilità che avvenga l'esercizio dell'opzione di riscatto "con un certo grado di razionalità del contraente".
La probabilità che il contraente decida di riscattare la polizza nell'intervallo $[t, t + \mathrm{d}t]$ è definita da:

$$q_t^r = 1 - \exp\left\{ - \int_t^{t+\mathrm{d}t} h(u)\mathrm{d}u \right\}, \tag{3.25}$$

dove $h(\cdot)$ è la funzione di rischio.
Inoltre, sia definito sullo spazio di probabilità filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{Q})$ il processo stocastico $(\xi_t)_{t\geq 0}$, con $\xi_t \in \{0, 1\}$ per ogni $t \geq 0$. Fissato t, se il valore di riscatto è maggiore del valore di continuazione del contratto, ovvero se il contraente perfettamente razionale esercita in t l'opzione di riscatto, allora $\xi_t = 1$. Viceversa, se il contraente perfettamente razionale non esercita in t l'opzione di riscatto, allora $\xi_t = 0$. Nella realtà il contraente decide di riscattare o di non riscattare anche se la decisione perfettamente razionale è diversa.
Così, rilassando l'ipotesi di perfetta razionalità del contraente, sia

$$h(t \mid \xi_t = 0) = \eta^I, \tag{3.26}$$

dove $\eta^I \geq 0$ è il parametro che determina la probabilità che la decisione di riscatto sia presa dal contraente anche se non è razionale. η^I può essere interpretato come parametro per la scelta irrazionale di riscatto dovuta a fattori esogeni[15]. Per aumentare la capacità del modello di avvicinarsi alla realtà, il parametro η^I dovrebbe essere determinato almeno in funzione delle condizioni macroeconomiche prevalenti all'istante dell'eventuale decisione di riscatto (naturalmente altri fattori, non necessariamente legati alle condizioni macroeconomiche, potrebbero guidare la scelta del contraente). Con riferimento all'*ipotesi di finanziamento*, introdotta in 2.1, η^I potrebbe essere funzione, ad esempio, del tasso di disoccupazione, del prodotto interno lordo o di altri indicatori che valutano la crescita economica. Ad ogni modo, per

[15]Con il termine "fattori esogeni" si fa riferimento a quei fattori, diversi dal valore di riscatto e dal valore di continuazione, che influenzano la decisione di esercitare l'opzione.

non aumentare la complessità del modello, si suppone che η^I sia costante. Perciò, risolvendo la (3.25) con funzione di rischio data da (3.26), si può definire come *probabilità di riscatto irrazionale* la seguente:

$$q_t^{rI} = 1 - \exp\left\{ -\eta^I \mathrm{d}t \right\}, \tag{3.27}$$

mentre nel caso in cui $\xi_t = 1$, sia:

$$h(t \mid \xi_t = 1) = \eta^R + \eta^I . \tag{3.28}$$

Allora, analogamente a quanto fatto per (3.27), la *probabilità di riscatto razionale* è definita da:

$$q_t^{rR} = 1 - \exp\left\{ -(\eta^R + \eta^I)\mathrm{d}t \right\}, \tag{3.29}$$

dove $\eta^R \geq 0$ misura la "capacità" del contraente di riconoscere che la scelta ottimale è quella di riscattare il contratto. Il parametro η^I è presente in (3.28) in quanto l'influenza dei fattori esogeni sulla decisione di riscattare permane anche nel caso $\xi_t = 1$. L'evidenza empirica mostra che la sensibilità del contraente di riconoscere la strategia di esercizio ottimale aumenta in situazioni di stress del mercato e, viceversa, diminuisce in situazioni di stabilità. Così, intuitivamente, η^R dovrebbe dipendere dall'evoluzione del contesto economico. Ad esempio, η^R potrebbe essere determinato in funzione dei tassi di interesse di mercato e/o degli indici del mercato azionario/obbligazionario.
Un semplice modo di definire η^R, proposto in [DeG(2010)] e utilizzato nell'esempio numerico presentato a fine capitolo, è:

$$\eta^R = A^2 r_t^2 + B\,, \qquad A, B \in \mathbb{R}\,, \tag{3.30}$$

con $A > 0$ e $B \geq 0$ scelti opportunamente. La (3.30) è giustificata dal fatto che in periodi caratterizzati da alti tassi di interesse è più probabile che il contraente eserciti razionalmente l'opzione di riscatto.
Generalizzando la (3.30) con l'obiettivo di cogliere il grado maggiore di razionalità che può presentarsi anche nel caso di bassi tassi di interesse, è possibile definire η^R come:

$$\eta^R = a r_t^2 + b r_t + c\,, \tag{3.31}$$

con a, b e c scelti in modo opportuno, con il vincolo che la funzione di rischio si mantenga positiva. Un modo per fissare questi parametri è quello di decidere un valore per il tasso di interesse che intuitivamente rappresenti una situazione di stabilità del mercato (per esempio la media di lungo periodo del modello CIR), sia esso $\bar{r}_t$, e definire a e b in modo che l'asse di simmetria della parabola passi per $\bar{r}_t$, ovvero $\bar{r}_t = -b/(2a)$. Insieme ad a e b, si può definire c richiedendo un livello minimo di razionalità misurato dall'ordinata del vertice della parabola.

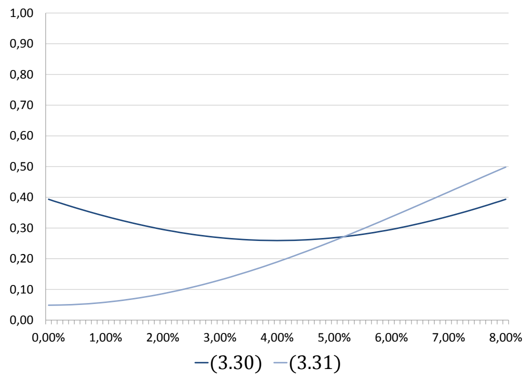

Figura 3.2: Probabilità razionale di riscatto al variare del tasso di interesse con $\eta^I = 0$, $A = 20$, $B = 0.20$, $a = 500$, $b = -40$ e $c = 2$

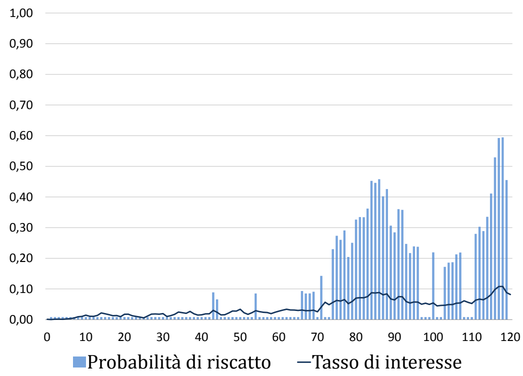

Figura 3.3: q_t^r nel caso di una particolare traiettoria simulata del processo del tasso di interesse, con $\eta^I = 0.1$, $A = 20$ e $B = 0.20$.

Un altro modo per definire η^R potrebbe essere quello di considerarlo funzione decrescente della differenza tra il tasso di rendimento della gestione separata e il tasso interno di rendimento di un titolo obbligazionario (analogamente a quanto proposto come variabile esplicativa nel capitolo 2).

Qualsiasi sia il modo per definire η^R, la funzione di rischio $h(\cdot)$ può essere riassunta da:

$$h(t) = \eta^I \mathbb{I}_{\xi_t=0} + \left(\eta^R + \eta^I\right)\mathbb{I}_{\xi_t=1} = \eta^I + \eta^R \mathbb{I}_{\xi_t=1} \,. \tag{3.32}$$

Osservazione 3.6. Per $\eta^I = 0$ ed $\eta^R = +\infty$ si ottiene per ogni t: $q_t^{rI} = 0$ e $q_t^{rR} = 1$. Ciò equivale ad assumere perfetta razionalità di esercizio da parte del contraente. $\diamondsuit$

3.7 L'algoritmo di valutazione nel caso di *imperfetta* razionalità del contraente

L'algoritmo è uguale a quello presentato nel caso di *perfetta* razionalità del contraente, a meno della fase di induzione all'indietro. Le modifiche riguardano il passo (d) e l'aggiunta di ulteriori passi:

⋮

3. `Induzione all'indietro`:

   ⋮

   (d) (*Esercizio razionale*) Se $b_{t_j}^{r,m} > \tilde{\mathfrak{C}}_j^m$, allora $\xi_{t_j}^m = 1$. Altrimenti $\xi_{t_j}^m = 0$.

   (e) Se $\xi_{t_j}^m = 0$, allora si simula il riscatto del contratto utilizzando come probabilità $q_{t_j}^{rI}$. Altrimenti la simulazione è effettuata utilizzando la probabilità $q_{t_j}^{rR}$.

   (f) In caso di riscatto $\theta^{*,m} = t_j$ e $P_{\theta^{*,m}}^m = b_{t_j}^{r,m}$.

⋮

Sia $\overline{V_0^A}$ il valore del contratto di tipo americano ottenuto dall'ultima fase dell'algoritmo. Sottraendo a $\overline{V_0^A}$ il valore del contratto europeo V_0^E (ottenuto come descritto in 3.5) si determina un valore dell'opzione di riscatto in ipotesi di *imperfetta* razionalità del contraente.

3.8 Esempio numerico

In questa sezione sono presentati alcuni risultati ottenuti dall'implementazione in ambiente MATLAB degli algoritmi proposti nei paragrafi precedenti.
Per l'implementazione, con l'obiettivo di ridurre il costo computazionale, pur mantenendo un grado di approssimazione soddisfacente, è stata utilizzata (come in [BBM(2009)]) una discretizzazione temporale distinta per la simulazione delle traiettorie di $(X_t)_{t\in\mathbf{T}}$ e per la fase di induzione all'indietro. Nel primo caso il numero di passi temporali in un anno si è scelto pari a 108 e, mediante il metodo di Eulero, si sono determinate le traiettorie simulate dei processi del tasso d'interesse istantaneo e dell'indice azionario (a partire da queste è possibile costruire le traiettorie simulate del processo $(X_t)_{t\in\mathbf{T}}$). La discretizzazione temporale per la fase di induzione all'indietro si è scelta pari a 12 passi in un anno, assumendo così che il contraente abbia diritto ad esercitare l'opzione di riscatto con cadenza mensile.
La base di funzioni scelta è quella dei polinomi di terzo grado e il numero di *funzioni* è $H = 20$ (ovvero, oltre alla costante, tutte le possibili combinazioni di prodotti delle variabili r_t, F_t, C_t e delle loro potenze, con grado complessivo dei monomi minore o uguale a tre).

3.8.1 La calibrazione

I parametri γ e λ della distribuzione di Weibull, sono stimati in accordo con [BBM(2009)], sulla base della mortalità osservata contenuta nella tavola di mortalità SIM 2001 (Figura 3.4). I valori stimati dei parametri sono $\hat{\gamma} = 8.3$ e $\hat{\lambda} = 83.7$.

Osservazione 3.7. La probabilità che un assicurato di età $x = 40$ deceda entro 10 anni è: $Pr(\tau \leq 10) = \hat{F}_x(10) = 1.16\%$. $\diamondsuit$

Per quanto riguarda il modello CIR, si considerano due date di valutazione distinte: 30 giugno 2011 e 31 marzo 2012. I parametri neutrali al rischio sono

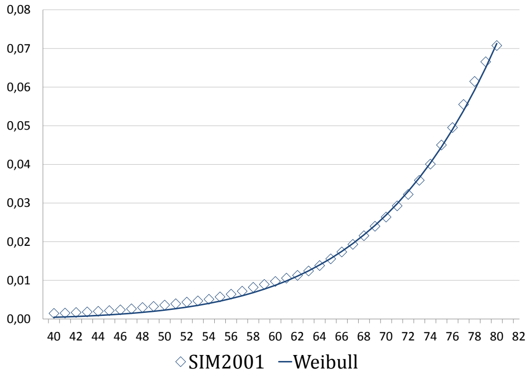

Figura 3.4: Intensità di mortalità di Weibull ($\hat{\gamma} = 8.3$, $\hat{\lambda} = 83.7$)

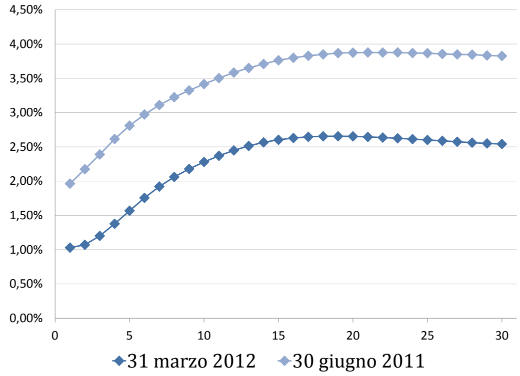

Figura 3.5: Tassi euro swap al 30 giugno 2011 e al 31 marzo 2012

stati stimati[16] a partire dalla struttura a termine dei tassi euro swap. I valori stimati per le due date di valutazione sono:

$$\textit{30 giugno 2011:}\quad \hat{\alpha}^* = 0.1938,\ \hat{\mu}^* = 0.0560,\ \hat{\sigma} = 0.1432,\ \hat{r}_0 = 0.0138 \tag{3.33}$$

$$\textit{31 marzo 2012:}\quad \hat{\alpha}^* = 0.2782,\ \hat{\mu}^* = 0.0356,\ \hat{\sigma} = 0.1254,\ \hat{r}_0 = 0.0012 \tag{3.34}$$

Come si può vedere dalla figura 3.5, le condizioni di mercato nelle due date di valutazione considerate sono molto diverse: i tassi di interesse al 31 marzo 2012 sono molto inferiori rispetto a quelli osservati nove mesi prima.

3.8.2 I risultati

L'esempio numerico è relativo all'assicurazione mista rivalutabile descritta nella sezione 3.2. Il capitale iniziale è $C_0 = 100$, la durata contrattuale è $T = 10$ e in $t = 0$ (emissione del contratto) l'età dell'individuo assicurato è $x = 40$. Di seguito saranno proposti diversi risultati al variare di alcuni parametri contrattuali e al variare della composizione del fondo di riferimento. Nella tabella 3.1 sono riportati i parametri che caratterizzano la metodologia

[16] La stima dei parametri neutrali al rischio è stata ottenuta minimizzando l'*errore quadratico medio relativo* tra i prezzi degli ZCB per scadenze, determinati dai tassi osservati sul mercato, e i prezzi degli ZCB implicati dal modello sulle medesime scadenze.

di valutazione descritta nei precedenti paragrafi. I parametri non valorizzati sono quelli per i quali si propone l'analisi di sensitività del valore dell'opzione di riscatto.

Riferimento	Parametri	
TARIFFA		
(3.2) *Tasso di rivalutazione*	i', η, ρ_{min}, β	$[i' = 0\,, \eta = 0]$
(3.3) *Prestazione caso morte*	ζ	$[\zeta = 0]$
(3.4) *Valore di riscatto*	γ_θ, t'	
MODELLO BIOMETRICO		
(3.7) *Modello di Weibull*	γ, λ	$[\hat{\gamma} = 8.3,\ \hat{\lambda} = 83.7]$
MODELLO FINANZIARIO		
(3.10) *Fondo di riferimento*	α^A	
(3.12) *Modello CIR*	α^*, μ^*, σ, r_0, ρ^{Ar}	$[\rho^{Ar} = -0.1]$
(3.13) *Indice obbligazionario*	D, δ	$[D = 5,\ \delta = 0.25]$
(3.15) *Indice azionario*	ϕ, ρ^{Ar}	$[\phi = 0.15,\ \rho^{Ar} = -0.1]$
MODELLO PER IL COMPORTAMENTO DEI CONTRAENTI		
(3.32) *Funzione di rischio*	η^I, $\eta^R(A, B)$	$[\eta^I = 0.1,\ A = 30,\ B = 0.2]$

Tabella 3.1: Elenco dei parametri

Nel seguito sarà indicato con O^* il valore dell'opzione di riscatto nel caso di perfetta razionalità del contraente:

$$O^* = V_0^A(\theta^*) - V_0^E\,,$$

e con O il valore dell'opzione di riscatto nel caso di imperfetta razionalità del contraente:

$$O = \overline{V_0^A} - V_0^E\,.$$

Per una fissata combinazione di parametri si è ripetuto dieci volte la procedura di valutazione, ognuna delle quali contestualmente porta alla determinazione di O^* e O ed è caratterizzata da $M = 10000$ simulazioni. I valori presentati nella parte seguente sono ottenuti come media aritmetica dei dieci valori risultanti dalle dieci ripetizioni.

Per la data di valutazione 31 marzo 2012, la tabella 3.2 riporta i valori del contratto americano, i valori dell'opzione di riscatto (nel caso di *perfetta* e *imperfetta* razionalità del contraente) e i valori del contratto europeo al variare di α^A e β, con $\rho_{min} = 0$, $t' = 0$ e $\gamma_\theta = 0$ per $\theta > 0$. I valori tra parentesi indicano lo scarto quadratico medio dei risultati. In linea con le aspettative, fissata la percentuale di componente azionaria nel fondo di riferimento α^A, per il contraente perfettamente razionale al diminuire dell'aliquota di retrocessione aumenta la propensione ad uscire anticipatamente dal contratto, ovvero il valore dell'opzione O^* diminuisce all'aumentare dell'aliquota di retrocessione β (per $\beta = 1$ il valore del contratto americano è prossimo al valore del contratto europeo, rendendo poco rilevante l'opzione di riscatto). In particolare, si noti che il valore del contratto americano rimane sempre sopra C_0.
Generalmente all'aumentare di α^A, fissato β, diminuisce O^* e aumentano sia $V_0^A(\theta^*)$ che V_0^E. Questo andamento è giustificato dal fatto che un aumento della percentuale di componente azionaria si traduce in un aumento del possibile rendimento e naturalmente anche del rischio. Tale rischio è solo parzialmente a carico del contraente, dato che esiste una garanzia di minimo

(seppur pari a zero). Per quanto detto, il contraente giudica l'opzione di riscatto meno preziosa di quanto lo sia nel caso di un investimento a basso livello di rischio/rendimento. Questo risultato è evidenziato nella tabella 3.6, dove si riportano i valore dell'opzione di riscatto al variare di α^A e ρ_{min}.
Per quanto riguarda i valori dell'opzione di riscatto nel caso di *imperfetta* razionalità del contraente le *sensitivities*, seppur con meno evidenza, sono coerenti con quanto risulta nel caso di *perfetta* razionalità. Come atteso, O è sempre inferiore a O^* e, a differenza di quest'ultimo, può essere negativo. Un valore negativo per O rappresenta l'incapacità del contraente di sfruttare l'opzione concessa dall'assicuratore, cioè il comportamento del contraente è vantaggioso per l'assicuratore (si notino in particolare i valori di O riportati nelle tabelle 3.6 e 3.7 all'aumentare di α^A e ρ_{min} o β e ρ_{min}).

Per la data di valutazione 31 marzo 2012, la tabella 3.3 riporta i valori del contratto americano, i valori dell'opzione di riscatto (nel caso di *perfetta* e *imperfetta* razionalità del contraente) e i valori del contratto europeo al variare di α^A e β, con $\rho_{min} = 0$, $t' = 18$ (mesi) e

$$\gamma_\theta = \begin{cases} 0.050 & 18 < \theta \leq 24 \\ 0.025 & 24 < \theta \leq 36 \\ 0.000 & 36 < \theta < 120 \end{cases}.$$

Rispetto ai risultati della tabella 3.2 e in linea con quanto atteso, i valori dell'opzione di riscatto O^* sono inferiori. Ciò è solo conseguenza della diminuzione dei valori del contratto americano $V_0^A(\theta^*)$. Il valore del contratto europeo è infatti indipendente da eventuali periodi di carenza e da penali sul valore di riscatto, e quindi i piccoli scarti visibili sono dovuti esclusivamente all'approssimazione numerica. Analogamente, per O si nota una diminuzione del *range* di variazione dei valori rispetto a quelli ottenuti nel caso di $t' = 0$ e $\gamma_\theta = 0$ per $\theta > 0$.

Nelle tabelle 3.4 e 3.5 sono proposte le *sensitivities* analoghe (e di andamento coerente) a quelle considerate per le tabelle 3.2 e 3.3, ma impostando come data di valutazione il 30 giugno 2011. Generalmente, per la data di valutazione 30 giugno 2011, fissato $\alpha^A = 0$, all'aumentare di β aumenta notevolmente il valore del contratto americano $V_0^A(\theta^*)$ rispetto alla data 31 marzo 2012 (e in modo meno evidente aumenta anche $\overline{V_0^A}$). Questo effetto si riduce all'aumentare della componente azionaria (infatti, si riduce in tal modo la componente obbligazionaria che è determinata a partire dal modello CIR calibrato sui parametri (3.33)). Per V_0^E si può osservare che il *range* di variazione dei valori aumenta (infatti, i tassi euro swap al 30 giugno 2011 sono più alti rispetto al 31 marzo 2012). Questi effetti in modo congiunto comportano un aumento dei valori dell'opzione di riscatto nel caso di *perfetta* razionalità del contraente (risultato che può essere osservato anche per i valori assoluti di O nel caso di *imperfetta* razionalità del contraente). Infine, si osserva che l'impatto del periodo di carenza e delle penali è più evidente sulla data di valutazione 30 giugno 2011.

Le ultime due tabelle 3.6 e 3.7 evidenziano, al variare del tasso minimo garantito ρ_{min}, quanto già commentato per i risultati della prima tabella proposta. All'aumentare di ρ_{min}, i valori dell'opzione di riscatto O^* e O si riducono, inoltre, i valori dell'opzione nel caso di *imperfetta* razionalità O sono quasi sempre negativi: con la situazione di mercato del 31 marzo 2012, un contraente che riscatta in modo non razionale una polizza che prevede un tasso minimo garantito produce un vantaggio per l'impresa di assicurazione.

α^A	β	$V_0^A(\theta^*)$	$\overline{V_0^A}$	V_0^E	O^*	O
0,00	0,50	100,652 (0,015)	99,499 (0,022)	92,733 (0,124)	7,919	6,766
	0,60	101,127 (0,027)	100,080 (0,026)	95,533 (0,084)	5,594	4,547
	0,70	102,038 (0,041)	100,896 (0,035)	98,470 (0,132)	3,568	2,426
	0,80	103,503 (0,076)	102,004 (0,081)	101,474 (0,120)	2,029	0,529
	0,90	105,650 (0,113)	103,381 (0,091)	104,520 (0,112)	1,130	-1,139
	1,00	108,428 (0,108)	105,065 (0,124)	107,793 (0,122)	0,635	-2,728
0,10	0,50	100,621 (0,021)	99,553 (0,024)	92,713 (0,088)	7,907	6,840
	0,60	101,090 (0,038)	100,144 (0,041)	95,502 (0,096)	4,487	3,515
	0,70	101,976 (0,062)	100,954 (0,065)	98,438 (0,127)	2,691	1,516
	0,80	103,446 (0,078)	102,055 (0,065)	101,465 (0,068)	1,440	-0,303
	0,90	105,591 (0,097)	103,434 (0,063)	104,590 (0,101)	0,761	-1,899
	1,00	108,246 (0,118)	105,065 (0,095)	107,648 (0,131)	0,598	-2,583
0,20	0,50	101,067 (0,029)	100,009 (0,039)	93,614 (0,094)	7,452	6,395
	0,60	101,833 (0,063)	100,764 (0,048)	96,562 (0,120)	5,271	4,202
	0,70	103,050 (0,072)	101,772 (0,056)	99,739 (0,138)	3,310	2,033
	0,80	104,797 (0,052)	103,025 (0,069)	102,915 (0,070)	1,882	0,110
	0,90	107,300 (0,110)	104,664 (0,045)	106,350 (0,124)	0,950	-1,686
	1,00	110,292 (0,159)	106,475 (0,085)	109,747 (0,156)	0,545	-3,272
0,30	0,50	101,818 (0,044)	100,726 (0,039)	95,140 (0,102)	6,678	5,587
	0,60	103,076 (0,058)	101,771 (0,054)	98,427 (0,125)	4,649	3,344
	0,70	104,838 (0,092)	103,100 (0,075)	101,965 (0,095)	2,873	1,135
	0,80	107,217 (0,100)	104,732 (0,105)	105,582 (0,131)	1,634	-0,851
	0,90	110,223 (0,089)	106,590 (0,093)	109,402 (0,138)	0,820	-2,812
	1,00	113,621 (0,155)	108,746 (0,116)	113,131 (0,167)	0,489	-4,385

Tabella 3.2: Valore del contratto americano, valore dell'opzione di riscatto (nel caso di *perfetta* e *imperfetta* razionalità del contraente) e valore del contratto europeo al variare di α^A e β, con $\rho_{min} = 0$, $t' = 0$ e $\gamma_\theta = 0$ per $\theta > 0$ (i valori tra parentesi indicano lo scarto quadratico medio dei risultati). Data di valutazione 31 marzo 2012.

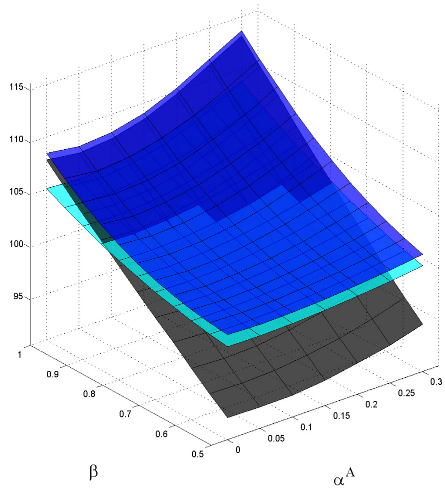

Figura 3.6: Valore del contratto americano, nel caso di *perfetta* (blu) e *imperfetta* (azzurro) razionalità del contraente, e valore del contratto europeo (grigio) al variare di α^A e β, con $\rho_{min} = 0$, $t' = 0$ e $\gamma_\theta = 0$ per $\theta > 0$. Data di valutazione 31 marzo 2012.

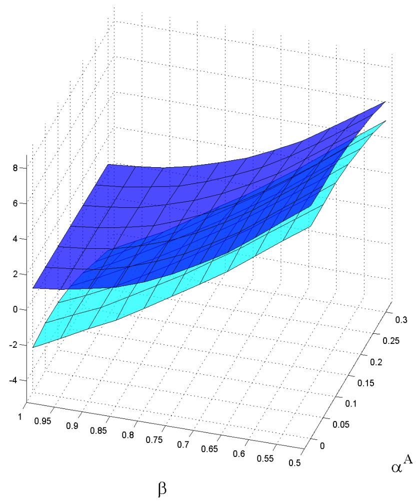

Figura 3.7: Valore dell'opzione di riscatto, nel caso di *perfetta* (blu) e *imperfetta* (azzurro) razionalità del contraente al variare di α^A e β, con $\rho_{min} = 0$, $t' = 0$ e $\gamma_\theta = 0$ per $\theta > 0$. Data di valutazione 31 marzo 2012.

α^A	β	$V_0^A(\theta^*)$	$\overline{V_0^A}$	V_0^E	O^*	O
0,00	0,50	100,275 (0,015)	98,821 (0,033)	92,720 (0,111)	7,555	6,101
	0,60	100,864 (0,032)	99,715 (0,062)	95,599 (0,093)	5,265	4,116
	0,70	101,916 (0,043)	100,861 (0,056)	98,578 (0,104)	3,338	2,283
	0,80	103,422 (0,076)	102,166 (0,066)	101,513 (0,145)	1,909	0,653
	0,90	105,646 (0,069)	103,810 (0,068)	104,568 (0,088)	1,078	-0,758
	1,00	108,350 (0,086)	105,659 (0,070)	107,693 (0,099)	0,657	-2,034
0,10	0,50	100,227 (0,019)	98,902 (0,042)	92,722 (0,147)	7,505	6,180
	0,60	100,843 (0,041)	99,787 (0,035)	95,512 (0,084)	5,331	4,275
	0,70	101,846 (0,043)	100,873 (0,044)	98,472 (0,119)	3,374	2,401
	0,80	103,343 (0,059)	102,188 (0,055)	101,444 (0,111)	1,898	0,744
	0,90	105,506 (0,109)	103,775 (0,094)	104,500 (0,119)	1,006	-0,725
	1,00	108,281 (0,149)	105,706 (0,100)	107,698 (0,166)	0,583	-1,992
0,20	0,50	100,682 (0,030)	99,444 (0,037)	93,517 (0,109)	7,165	5,927
	0,60	101,592 (0,043)	100,539 (0,035)	96,584 (0,099)	5,008	3,955
	0,70	102,951 (0,060)	101,856 (0,063)	99,742 (0,112)	3,210	2,114
	0,80	104,733 (0,092)	103,339 (0,095)	102,935 (0,142)	1,798	0,404
	0,90	107,214 (0,064)	105,153 (0,080)	106,279 (0,067)	0,936	-1,126
	1,00	110,291 (0,138)	107,287 (0,106)	109,745 (0,140)	0,546	-2,458
0,30	0,50	101,520 (0,039)	100,336 (0,066)	94,955 (0,116)	6,566	5,381
	0,60	102,883 (0,061)	101,727 (0,058)	98,482 (0,164)	4,402	3,245
	0,70	104,773 (0,070)	103,390 (0,052)	101,992 (0,156)	2,781	1,398
	0,80	107,226 (0,110)	105,238 (0,102)	105,626 (0,132)	1,600	-0,388
	0,90	110,304 (0,124)	107,487 (0,126)	109,461 (0,140)	0,843	-1,974
	1,00	113,702 (0,125)	109,869 (0,140)	113,218 (0,128)	0,484	-3,349

Tabella 3.3: Valore del contratto americano, valore dell'opzione di riscatto (nel caso di *perfetta* e *imperfetta* razionalità del contraente) e valore del contratto europeo al variare di α^A e β, con $\rho_{min} = 0$ e (in mesi) $t' = 18$, $\gamma_\theta = 5\%$ per $18 < \theta \leq 24$, $\gamma_\theta = 2.5\%$ per $24 < \theta \leq 36$ e $\gamma_\theta = 0$ per $\theta > 36$ (i valori tra parentesi indicano lo scarto quadratico medio dei risultati). Data di valutazione 31 marzo 2012.

α^A	β	$V_0^A(\theta^*)$	$\overline{V_0^A}$	V_0^E	O^*	O
0,00	0,50	101,196 (0,021)	99,919 (0,026)	90,158 (0,169)	11,038	9,761
	0,60	102,077 (0,027)	100,813 (0,045)	94,452 (0,159)	7,625	6,362
	0,70	103,692 (0,088)	102,133 (0,073)	99,121 (0,178)	4,570	3,011
	0,80	106,314 (0,124)	103,904 (0,090)	103,700 (0,150)	2,613	0,203
	0,90	109,995 (0,196)	106,175 (0,118)	108,669 (0,228)	1,327	-2,494
	1,00	114,558 (0,204)	108,885 (0,171)	113,742 (0,240)	0,816	-4,857
0,10	0,50	100,924 (0,024)	99,728 (0,028)	89,564 (0,110)	11,360	10,164
	0,60	101,678 (0,044)	100,528 (0,026)	93,682 (0,195)	7,997	6,846
	0,70	103,062 (0,066)	101,706 (0,071)	98,008 (0,150)	5,055	3,698
	0,80	105,386 (0,117)	103,305 (0,103)	102,579 (0,168)	2,807	0,726
	0,90	108,751 (0,142)	105,416 (0,113)	107,257 (0,195)	1,494	-1,841
	1,00	113,034 (0,205)	108,037 (0,159)	112,230 (0,196)	0,804	-4,192
0,20	0,50	101,046 (0,026)	99,835 (0,048)	89,485 (0,168)	11,561	10,350
	0,60	101,868 (0,042)	100,681 (0,034)	93,878 (0,160)	7,990	6,803
	0,70	103,227 (0,105)	101,827 (0,090)	97,978 (0,183)	5,249	3,849
	0,80	105,535 (0,141)	103,436 (0,081)	102,592 (0,216)	2,943	0,844
	0,90	108,858 (0,180)	105,578 (0,160)	107,372 (0,226)	1,486	-1,795
	1,00	113,011 (0,197)	108,048 (0,197)	112,180 (0,201)	0,830	-4,133
0,30	0,50	101,357 (0,024)	100,133 (0,031)	90,089 (0,108)	11,267	10,043
	0,60	102,389 (0,054)	101,145 (0,065)	94,577 (0,134)	7,812	6,568
	0,70	104,078 (0,084)	102,409 (0,077)	99,034 (0,225)	5,043	3,374
	0,80	106,674 (0,117)	104,248 (0,058)	103,755 (0,172)	2,919	0,492
	0,90	110,198 (0,210)	106,478 (0,155)	108,709 (0,238)	1,489	-2,231
	1,00	114,605 (0,172)	109,123 (0,127)	113,854 (0,163)	0,751	-4,731

Tabella 3.4: Valore del contratto americano, valore dell'opzione di riscatto (nel caso di *perfetta* e *imperfetta* razionalità del contraente) e valore del contratto europeo al variare di α^A e β, con $\rho_{min} = 0$, $t' = 0$ e $\gamma_\theta = 0$ per $\theta > 0$ (i valori tra parentesi indicano lo scarto quadratico medio dei risultati). Data di valutazione 30 giugno 2011.

α^A	β	$V_0^A(\theta^*)$	$\overline{V_0^A}$	V_0^E	O^*	O
0,00	0,50	100,169 (0,034)	98,708 (0,034)	90,222 (0,187)	9,948	8,486
	0,60	101,409 (0,053)	100,161 (0,075)	94,440 (0,107)	6,969	5,721
	0,70	103,394 (0,075)	102,038 (0,073)	99,029 (0,139)	4,365	3,009
	0,80	106,283 (0,140)	104,296 (0,129)	103,868 (0,171)	2,415	0,427
	0,90	109,938 (0,175)	106,914 (0,101)	108,630 (0,222)	1,307	-1,716
	1,00	114,587 (0,208)	110,056 (0,133)	113,721 (0,213)	0,866	-3,665
0,10	0,50	99,801 (0,048)	98,431 (0,047)	89,527 (0,185)	10,275	8,905
	0,60	100,965 (0,062)	99,812 (0,076)	93,716 (0,137)	7,249	6,096
	0,70	102,736 (0,098)	101,500 (0,128)	98,049 (0,183)	4,687	3,451
	0,80	105,269 (0,094)	103,556 (0,099)	102,659 (0,182)	2,610	0,897
	0,90	108,841 (0,121)	106,174 (0,098)	107,461 (0,151)	1,380	-1,287
	1,00	113,197 (0,102)	109,127 (0,119)	112,392 (0,111)	0,805	-3,265
0,20	0,50	99,943 (0,039)	98,574 (0,057)	89,554 (0,207)	10,388	9,020
	0,60	101,177 (0,055)	99,999 (0,065)	93,736 (0,170)	7,442	6,263
	0,70	102,945 (0,133)	101,677 (0,104)	98,158 (0,205)	4,787	3,519
	0,80	105,386 (0,100)	103,685 (0,077)	102,623 (0,135)	2,762	1,061
	0,90	108,788 (0,121)	106,168 (0,154)	107,385 (0,135)	1,402	-1,218
	1,00	113,094 (0,155)	109,189 (0,131)	112,266 (0,164)	0,828	-3,077
0,30	0,50	100,358 (0,062)	99,005 (0,101)	90,097 (0,179)	10,261	8,908
	0,60	101,776 (0,062)	100,545 (0,042)	94,549 (0,139)	7,227	5,995
	0,70	103,791 (0,124)	102,381 (0,129)	98,948 (0,246)	4,843	3,433
	0,80	106,454 (0,129)	104,564 (0,135)	103,671 (0,155)	2,784	0,893
	0,90	110,171 (0,146)	107,249 (0,162)	108,764 (0,160)	1,408	-1,515
	1,00	114,622 (0,154)	110,358 (0,155)	113,872 (0,178)	0,750	-3,514

Tabella 3.5: Valore del contratto americano, valore dell'opzione di riscatto (nel caso di *perfetta* e *imperfetta* razionalità del contraente) e valore del contratto europeo al variare di α^A e β, con $\rho_{min} = 0$ e (in mesi) $t' = 18$, $\gamma_\theta = 5\%$ per $18 < \theta \leq 24$, $\gamma_\theta = 2.5\%$ per $24 < \theta \leq 36$ e $\gamma_\theta = 0$ per $\theta > 36$ (i valori tra parentesi indicano lo scarto quadratico medio dei risultati). Data di valutazione 30 giugno 2011.

α^A	ρ_{min}	$V_0^A(\theta^*)$	$\overline{V_0^A}$	V_0^E	O^*	O
0,00	0,00	103,487 (0,071)	101,995 (0,055)	101,501 (0,102)	1,986	0,494
	0,01	106,044 (0,063)	103,813 (0,075)	104,589 (0,109)	1,455	-0,776
	0,02	110,425 (0,063)	106,807 (0,037)	109,359 (0,114)	1,066	-2,552
	0,03	116,880 (0,075)	111,121 (0,076)	116,102 (0,112)	0,779	-4,981
	0,04	125,139 (0,118)	116,510 (0,113)	124,540 (0,127)	0,599	-8,031
0,10	0,00	103,433 (0,067)	102,027 (0,037)	101,447 (0,119)	1,986	0,579
	0,01	106,275 (0,075)	104,036 (0,053)	104,791 (0,089)	1,484	-0,756
	0,02	110,772 (0,080)	107,120 (0,044)	109,661 (0,103)	1,111	-2,541
	0,03	117,147 (0,139)	111,324 (0,089)	116,302 (0,167)	0,845	-4,978
	0,04	125,355 (0,107)	116,608 (0,109)	124,723 (0,134)	0,631	-8,116
0,20	0,00	104,887 (0,072)	103,078 (0,060)	103,037 (0,155)	1,849	0,040
	0,01	108,139 (0,152)	105,370 (0,103)	106,741 (0,162)	1,398	-1,371
	0,02	112,928 (0,112)	108,583 (0,097)	111,846 (0,128)	1,082	-3,263
	0,03	119,215 (0,122)	112,690 (0,086)	118,404 (0,147)	0,811	-5,714
	0,04	127,068 (0,167)	117,685 (0,077)	126,466 (0,185)	0,602	-8,781
0,30	0,00	107,191 (0,143)	104,713 (0,132)	105,592 (0,187)	1,598	-0,880
	0,01	110,973 (0,121)	107,290 (0,094)	109,751 (0,149)	1,222	-2,461
	0,02	116,038 (0,069)	110,611 (0,064)	115,092 (0,088)	0,945	-4,482
	0,03	122,360 (0,125)	114,738 (0,164)	121,655 (0,149)	0,705	-6,917
	0,04	130,138 (0,165)	119,692 (0,085)	129,588 (0,179)	0,549	-9,897

Tabella 3.6: Valore del contratto americano, valore dell'opzione di riscatto (nel caso di *perfetta* e *imperfetta* razionalità del contraente) e valore del contratto europeo al variare di α^A e ρ_{min}, con $\beta = 0.80$, $t' = 0$ e $\gamma_\theta = 0$ per $\theta > 0$ (i valori tra parentesi indicano lo scarto quadratico medio dei risultati). Data di valutazione 31 marzo 2012.

β	ρ_{min}	$V_0^A(\theta^*)$	$\overline{V_0^A}$	V_0^E	O^*	O
0,80	0,00	103,487 (0,071)	101,995 (0,055)	101,501 (0,102)	1,986	0,494
	0,01	106,044 (0,063)	103,813 (0,075)	104,589 (0,109)	1,455	-0,776
	0,02	110,425 (0,063)	106,807 (0,037)	109,359 (0,114)	1,066	-2,552
	0,03	116,880 (0,075)	111,121 (0,076)	116,102 (0,112)	0,779	-4,981
	0,04	125,139 (0,118)	116,510 (0,113)	124,540 (0,127)	0,599	-8,031
0,90	0,00	105,651 (0,091)	103,394 (0,077)	104,544 (0,120)	1,107	-1,150
	0,01	108,540 (0,092)	105,332 (0,077)	107,709 (0,110)	0,831	-2,377
	0,02	112,895 (0,096)	108,236 (0,082)	112,253 (0,110)	0,643	-4,016
	0,03	119,213 (0,117)	112,419 (0,114)	118,721 (0,123)	0,493	-6,302
	0,04	127,292 (0,104)	117,645 (0,116)	126,905 (0,114)	0,387	-9,259
1,00	0,00	108,339 (0,083)	105,004 (0,092)	107,676 (0,101)	0,663	-2,673
	0,01	111,472 (0,095)	107,097 (0,120)	110,959 (0,103)	0,513	-3,862
	0,02	115,778 (0,146)	109,884 (0,111)	115,351 (0,148)	0,427	-5,467
	0,03	121,868 (0,095)	113,918 (0,083)	121,506 (0,101)	0,363	-7,587
	0,04	129,754 (0,131)	119,017 (0,169)	129,469 (0,139)	0,285	-10,452

Tabella 3.7: Valore del contratto americano, valore dell'opzione di riscatto (nel caso di *perfetta* e *imperfetta* razionalità del contraente) e valore del contratto europeo al variare di β e ρ_{min}, con $\alpha^A = 0$, $t' = 0$ e $\gamma_\theta = 0$ per $\theta > 0$ (i valori tra parentesi indicano lo scarto quadratico medio dei risultati). Data di valutazione 31 marzo 2012.

Conclusioni

Questo lavoro ha avuto come finalità l'analisi dei riscatti in una gestione separata di polizze sulla vita. Le due dimensioni che hanno caratterizzato l'analisi riguardano la ricerca dei fattori che possono influenzare l'andamento dei riscatti e la valutazione dell'opzione di riscatto.
Con riferimento alla prima parte del lavoro, la ricerca è stata sviluppata in base ai dati di una gestione separata di una compagnia di Bancassicurazione attraverso il modello logistico di regressione a tempo discreto, con una preliminare analisi non parametrica dei dati ottenuta con il metodo attuariale. La scelta del modello è stata effettuata, sulla base dei dati a disposizione, con l'obiettivo di includere nell'analisi sia le variabili macroeconomiche sia le caratteristiche del contratto, dell'assicurato e del contraente, e non trascurando a priori (per quanto possibile) variabili potenzialmente influenti sulle decisioni di riscatto. I risultati ottenuti confermano l'*ipotesi di tasso di interesse* e (con meno evidenza) l'*ipotesi di finanziamento di emergenza*. Inoltre, tutte le caratteristiche del contratto e del contraente-assicurato considerate hanno un impatto statisticamente significativo sulla propensione del contraente a riscattare la propria polizza.
Nella seconda parte della tesi è stata proposta la valutazione dell'opzione di riscatto associata ad un'assicurazione mista rivalutabile a premio unico. Tale valutazione ha carattere più generale ed è svincolata dalla particolare gestione separata su cui è basata la prima parte del lavoro. L'approccio seguito ha permesso di determinare sia un valore dell'opzione in ipotesi di *perfetta* razionalità dei contraenti, sia un valore più realistico rilassando tale ipotesi.

Questi valori potrebbero rappresentare un utile riferimento in sede di *Profit Test* del particolare contratto assicurativo in esame. I risultati ottenuti sono in linea con le aspettative e coerenti con quelli presenti in letteratura.
È opportuno evidenziare due punti particolarmente delicati della valutazione proposta che saranno oggetto di possibili approfondimenti futuri. Il primo è relativo all'ipotesi di determinare il rendimento del fondo di riferimento a partire dal solo *valore di mercato* degli attivi in portafoglio, trascurando le "regole contabili" che contraddistinguono la determinazione del rendimento delle gestioni separate. Il secondo è relativo invece alla difficoltà di calibrare il modello per il comportamento dei contraenti in modo da cogliere adeguatamente il "livello di razionalità" che essi hanno nell'esercizio dell'opzione di riscatto.

Appendice A

La stima dei parametri del modello logistico di regressione a tempo discreto

Il modello logistico di regressione a tempo discreto[1] può essere visto come un'estensione del modello logistico ordinario, il quale non prevede esplicitamente la variabile temporale tra i fattori che influenzano la probabilità del verificarsi di un evento di interesse. Come indicato dal nome stesso, si tratta di un modello che presuppone la ripartizione del tempo in unità discrete e può essere utilizzato qualora si voglia approssimare modelli a tempo continuo (per semplicità o per disponibilità dei dati) o perché il problema analizzato ha natura temporale discreta.
La stima del modello logistico di regressione a tempo discreto, con il metodo della massima verosimiglianza, non subisce variazioni formali rispetto alla

[1] Il modello logistico di regressione a tempo discreto è stato introdotto da Cox nel 1972 nell'ambito dell'analisi della sopravvivenza ed è la versione a tempo discreto del più famoso modello di Cox a rischi proporzionali (a tempo continuo). Rispetto a quest'ultimo modello, quello a tempo discreto permette di evitare distorsioni nelle stime dei parametri qualora siano presenti *ties* (eventi che accadono nello stesso istante). Infatti, nel modello di Cox a rischi proporzionali, e più in generale nei modelli a tempo continuo, la probabilità che si verifichino *ties* è zero, quindi la loro presenza può portare a distorsioni nelle stime.

stima del modello logistico ordinario. Nella parte seguente è presentata la costruzione della funzione di verosimiglianza.

Consideriamo un generico individuo (contratto) i e indichiamo con t_i l'unità temporale in cui tale individuo esce dall'osservazione, perché ha sperimentato l'evento di interesse (riscatto) o perché è stato censurato (scadenza del contratto o decesso dell'assicurato). La funzione di probabilità per l'individuo i, nel caso in cui non abbia ancora sperimentato l'evento di interesse, cioè $t \leq t_i$, è:

$$f(y_{i,t} \mid \mathbf{X}_{i,t}, Y_{i,1} = ... = Y_{i,t-1} = 0; \alpha_t, \boldsymbol{\beta}) = q_{i,t}^{y_{i,t}} (1 - q_{i,t})^{1-y_{i,t}} \,, \tag{A.1}$$

dove $y_{i,t}$ è il valore osservato del numero aleatorio $Y_{i,t}$.
L'evento di interesse può essere sperimentato dall'individuo i al tempo t solamente nel caso in cui non sia stato sperimentato precedentemente. Così, la verosimiglianza associata al vettore delle osservazioni relative all'individuo i fino al tempo t è:

$$\begin{aligned}
L_{i,t}(\alpha_t, \boldsymbol{\beta}) &= f(y_{i,1}, ..., y_{i,t} \mid \mathbf{X}_{i,t}; \alpha_t, \boldsymbol{\beta}) = \\
&= \big[Pr(T_i > t)\big]^{1-y_{i,t}} \big[Pr(T_i = t)\big]^{y_{i,t}} = \\
&= \left[\prod_{k=1}^{t} (1 - q_{i,k})\right]^{1-y_{i,t}} \left[q_{i,t} \prod_{k=1}^{t-1} (1 - q_{i,k})\right]^{y_{i,t}} = \\
&= \left[\prod_{k=1}^{t} (1 - q_{i,k})\right]^{1-y_{i,t}} \left[\frac{q_{i,t}}{1 - q_{i,t}} \prod_{k=1}^{t} (1 - q_{i,k})\right]^{y_{i,t}} = \\
&= \left(\frac{q_{i,t}}{1 - q_{i,t}}\right)^{y_{i,t}} \left[\prod_{k=1}^{t} (1 - q_{i,k})\right], \qquad t \leq t_i \,.
\end{aligned}$$

Da cui, avendo indicato con t_i l'unità temporale in cui l'individuo i esce dall'osservazione, il contributo alla funzione di verosimiglianza dato dall'i-esimo individuo è:

$$L_i(\alpha_{t_i}, \boldsymbol{\beta}) = L_{i,t_i}(\alpha_{t_i}, \boldsymbol{\beta}) = \left(\frac{q_{i,t_i}}{1 - q_{i,t_i}}\right)^{y_{i,t_i}} \left[\prod_{k=1}^{t_i} (1 - q_{i,k})\right], \tag{A.2}$$

dove per semplicità di notazione $q_{i,t} := q_{i,t}(\alpha_t, \boldsymbol{\beta})$.

Assumendo che gli individui siano stocasticamente indipendenti, la verosimiglianza complessiva è data dal prodotto dei contributi dei singoli individui:

$$L(\alpha_t, \boldsymbol{\beta}) = \prod_{i=1}^{N} L_i(\alpha_{t_i}, \boldsymbol{\beta}) = \prod_{i=1}^{N} \left\{ \left(\frac{q_{i,t_i}}{1 - q_{i,t_i}} \right)^{y_{i,t_i}} \left[\prod_{k=1}^{t_i} (1 - q_{i,k}) \right] \right\}, \qquad \text{(A.3)}$$

dove N è la numerosità campionaria.

Per ottenere le stime di massima verosimiglianza è necessario determinare α_t e $\boldsymbol{\beta}$ che rendono massima la precedente funzione o, equivalentemente, la log-verosimiglianza $l(\alpha_t, \boldsymbol{\beta}) = log\big(L(\alpha_t, \boldsymbol{\beta})\big)$. Quindi, le stime di massima verosimiglianza sono determinate come soluzione del sistema delle equazioni di verosimiglianza, ottenute uguagliando a zero le derivate parziali rispetto ad α_t e $\boldsymbol{\beta}$ della funzione $l(\alpha_t, \boldsymbol{\beta})$. Per la risoluzione si ricorre a metodi numerici[2].

[2]Il metodo numerico utilizzato dalla `proc logistic` è il metodo *scoring* di Fisher.

Bibliografia

[AC(2003)] G. Andreatta, S. Corradin. Valuing the surrender options embedded in a portfolio of italian life guaranteed participating policies: A least squares monte carlo approach. Technical report, RAS Pianificazione Redditività di Gruppo, 2003.

[AIAF(2005)] Gestioni separate assicurative. *Quaderno AIAF n. 123*, 2005.

[All(2010)] P.D. Allison. *Survival analysis using SAS: A practical guide.* SAS publishing, 2010.

[BBM(2009)] A.R. Bacinello, E. Biffis, P. Millossovich. Pricing life insurance contracts with early exercise features. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 233(1):27–35, 2009.

[BBM(2010)] A.R. Bacinello, E. Biffis, P. Millossovich. Regression-based algorithms for life insurance contracts with surrender guarantees. *Quantitative Finance*, 10(9):1077–1090, 2010.

[BM(2006)] D. Brigo, F. Mercurio. *Interest rate models: theory and practice: with smile, inflation, and credit.* Springer Verlag, 2006.

[Bac(2003)] A.R. Bacinello. Fair valuation of a guaranteed life insurance participating contract embedding a surrender option. *Journal of Risk and Insurance*, 70(3):461–487, 2003.

[CDeAMP(200)] S. Corsaro, P. De Angelis, Z. Marino, F. Perla. On software development for financial evaluation of participating life insurance policies. In *Communications to SIMAI Congress*, volume 2, 2007.

[CDeFMP(2007)] G. Castellani, M. De Felice, F. Moriconi, C. Pacati. Pricing formulae for financial options and guarantees embedded in profit sharing life insurance policies. Working paper, 2007.

[CEG(2009)] Cerchiara R. R., Gambini A., Edwards M. Generalized linear models in life insurance: Decretements and risk factor analysis under solvency II. *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari*, 2009.

[CEIOPS(2010)] CEIOPS. QIS5 Technical Specifications. *European Commission, Annex to Call for Advice from CEIOPS on QIS5*, 2010.

[Car(2011)] F. Caravenna. Moto browniano e analisi stocastica. 2011.

[DeF(2010)] M. De Felice. Il profit test (delle polizze rivalutabili) tra Regolamento 21 e Solvency II. Technical report, 2010.

[DeFM(2002)] M. De Felice, F. Moriconi. Finanza dell'assicurazione sulla vita. Principi per l'asset-liability management e per la misurazione dell'embedded value. *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari*, 65(1-2):13–89, 2002.

[DeFM(2011)] M. De Felice, F. Moriconi. *Una nuova finanza d'impresa. Le imprese di assicurazione, Solvency II, le autorità di vigilanza.* Itinerari: Economia. Il Mulino, 2011.

[DeG(2010)] D. De Giovanni. Lapse rate modeling: a rational expectation approach. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2010(1):56–67, 2010.

[Del(2011)] Ł. Delong. Practical and theoretical aspects of market-consistent valuation and hedging of insurance liabilities. *Bank i Kredyt*, 42(1):49–78, 2011.

[EK(2011)] M. Eling, D. Kiesenbauer. What policy features determine life insurance lapse? An analysis of the german market. Working Paper 95, Risk Management and Insurance, 2011.

[FL(1999)] L.D. Fisher, DY Lin. Time-dependent covariates in the cox proportional-hazards regression model. *Annual review of public health*, 20(1):145–157, 1999.

[GS(2006)] N. Gatzert, H. Schmeiser. Implicit options in life insurance: Valuation and risk management. *Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft, Ergänzungsband*, pages 111–128, 2006.

[HL(2008)] D.W. Hosmer, S. Lemeshow, S. May. *Applied Survival Analysis: Regression Modeling of Time-To-Event Data.* Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley-Interscience, 2008.

[KM(2008)] E. Morgan, J. Kent. Dynamic policyholder behaviour. *Paper presented to The Staple Inn Actuarial Society*, 18 November 2008.

[Kie(2012)] D. Kiesenbauer. Main determinants of lapse in the german life insurance industry. *North American Actuarial Journal*, 16(1):52, 2012.

[Kim(2005)] C. Kim. Modeling surrender and lapse rates with economic variables. *North American Actuarial Journal*, 9(4):56, 2005.

[LL(2008)] D. Lamberton, B. Lapeyre. *Introduction to stochastic calculus applied to finance.* Chapman & Hall, 2008.

[LS(2001)] F.A. Longstaff, E.S. Schwartz. Valuing american options by simulation: a simple least-squares approach. *Review of Financial Studies*, 14(1):113–147, 2001.

[LW(2003)] E.T. Lee, J.W. Wang. *Statistical methods for survival data analysis*, volume 364. Wiley-Interscience, 2003.

[LYL(1996)] L.S. Loi, W. Yuan, R.K.H. Lian. *A New Approach to Analyzing Persistency of Insurance Policy.* Nanyang Technological University, School of Accountancy and Business, 1996.

[OP(2005)] A. Olivieri, E. Pitacco. *La valutazione nelle assicurazioni vita. Profili attuariali.* CERAP - Centro di ricerche assicurative e previdenziali dell'Università Bocconi. EGEA, 2005.

[Pac(2000)] C. Pacati. *La valutazione dei Constant Maturity Bond.* Quaderni del Dipartimento di Economia Politica N.310. Università degli studi di Siena, 2000.

[Pac(2005)] C. Pacati. Appunti delle lezioni di istituzioni di matematica attuariale per le assicurazioni sulla vita, 2005-2006.

[Pac(2010)] C. Pacati. Short rate models. 30 May 2012.

[Pit(2002)] E. Pitacco. *Elementi di matematica delle assicurazioni.* Lint Editoriale, 2002.

[RH(1986)] A.E. Renshaw, S. Haberman. Statistical analysis of life assurance lapses. *Journal of the Institute of Actuaries*, 113(3):459–497, 1986.

[Sil(2008)] A. Silvestri. *La pianificazione finanziaria nelle imprese di assicurazione. Un approccio integrato alla gestione del portafoglio.* Economia - Ricerche. Franco Angeli, 2008.

Ringraziamenti

Desidero ringraziare il Prof. Pitacco, la Prof.ssa Bacinello e il Dott. Vesentini (CRO del Gruppo Cattolica Assicurazioni) per i preziosi insegnamenti e confronti durante la stesura di questo lavoro. Inoltre, ringrazio il Prof. Torelli per la disponibilità a dirimere i miei dubbi circa l'impiego del modello logistico di regressione a tempo discreto. Intendo poi ringraziare l'ufficio Risk Management del Gruppo Cattolica Assicurazioni per i numerosi consigli (e non solo relativi al lavoro di tesi).

Ringrazio la mia famiglia per il grandissimo aiuto e per quanto mi sia stata vicino nonostante troppo spesso sia stato di pochissime parole. Grazie alle nonne, agli zii e ai cugini per l'affetto e l'interessamento spesso dimostrato.
Grazie agli amici "universitari", in particolare Massimo con il quale ho condiviso la fondamentale "avventura triestina".
Grazie a Roberta, per la sua vicinanza ed enorme positività, e alla sua famiglia per avermi accolto.
Grazie a tutti gli amici per il loro aiuto spesso inconsapevole, in particolare Davide, Gabriele e Mirco.

Marco