



Universität Ulm
Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften

**Analyse von Lifecycle- und Mischfonds
unter Verwendung der Prospect Theory
in einem stochastischen Volatilitätsmodell**

Masterarbeit

in Wirtschaftsmathematik

vorgelegt von

B.Sc. Stefan Schelling

am 20. Januar 2014

Gutachter

Prof. Dr. Jochen Ruß

Prof. Dr. Hans-Joachim Zwiesler

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	v
Tabellenverzeichnis	vii
Abkürzungsverzeichnis	viii
1 Einleitung	1
1.1 Motivation und Ziel der Arbeit	1
1.2 Aufbau der Arbeit	5
2 Stochastische und finanzmathematische Grundlagen	8
2.1 Stochastische Grundlagen	8
2.1.1 Stochastische Prozesse	8
2.1.2 Stochastische Differentialgleichungen - Itô-Prozesse	10
2.2 Kapitalmarktmodelle	16
2.2.1 Zero-Coupon Bonds und Zinsstrukturmodelle - CIR-Modell	17
2.2.2 Betrachtete Kapitalmarktmodelle	21
3 Grundlagen der Entscheidungstheorie	25
3.1 Erwartungsnutzentheorie	27
3.2 Prospect Theorie	31
3.2.1 Ursprüngliche Prospect Theorie	32
3.2.2 Kumulative Prospect Theorie	34
3.2.3 Wahl der Funktionen	36
3.2.4 Multi-Kumulative Prospect Theorie	42
3.2.5 Gedächtniserweiterung der Wertefunktion	45

4	Modellierung und numerische Methoden	50
4.1	Konstruktion und Kalibrierung der Lifecycle- und Mischfonds	51
4.1.1	Einmalbeitrag	52
4.1.2	Laufender Beitrag	56
4.2	Numerische Simulation der Kapitalmarktmodelle	71
4.2.1	Erzeugung von gleichverteilten Zufallsvariablen - Mersenne-Twister	71
4.2.2	Erzeugung von normalverteilten Zufallsvariablen - Box-Muller . .	73
4.2.3	Euler-Maruyama Approximation	75
4.2.4	Kalibrierung der Kapitalmarktmodelle	80
4.2.5	Simulation der Fondsinvestments	81
4.3	Monte-Carlo-Simulation	82
5	Vorbereitende Analysen	84
5.1	Analyse der betrachteten Anlagen	85
5.1.1	Einmalbeitrag	86
5.1.2	Laufender Beitrag	89
5.2	Erwartungsnutzentheorie Analyse	92
5.2.1	Einmalbeitrag	93
5.2.2	Laufender Beitrag	94
5.3	Analyse der Wertschwankungen	96
5.3.1	Einmalbeitrag	97
5.3.2	Laufender Beitrag	100
6	MCPT Analyse im Einmalbeitragsfall	104
6.1	Sensitivitätsanalysen	105
6.1.1	α - λ - Sensitivität	106
6.1.2	Entwicklung des MCPT ^w -Nutzen α -Sensitivität	113
6.1.3	Vergleich zum Mischfonds+	120
6.1.4	Überblick im Einmalbeitragsfall	122
6.2	Analyse ausgewählter MCPT ^w Investoren	123
6.3	Analyse im Gedächtnisfall	127
7	MCPT Analyse im laufenden Beitragsfall	130
7.1	Sensitivitätsanalysen im laufenden Beitragsfall	130
7.1.1	α - λ - Sensitivität	131

Inhaltsverzeichnis

7.1.2	Entwicklung des MCPT ^w -Nutzen α -Sensitivität	135
7.1.3	Vergleich zum Mischfonds+	141
7.1.4	Überblick im laufenden Beitragsfall	142
7.2	Analyse ausgewählter MCPT ^w Investoren	144
7.3	Analyse im Gedächtnisfall	148
8	Zusammenfassung	151
	Literaturverzeichnis	157
	Ehrenwörtliche Erklärung	165

Abbildungsverzeichnis

3.1	Nutzenfunktionen	31
3.2	Wertefunktionen.	38
3.3	Wahrscheinlichkeitsgewichtsfunktionen.	41
3.4	Dynamischer Referenzpunkt.	48
5.1	Mittlere jährliche Renditen im CIR-BSM und CIR-SV bei Einmalbeitrag	88
5.2	Mittlere jährliche Rendite im CIR-BSM und CIR-SV bei laufendem Beitrag	91
5.3	Vergleich des Erwartungsnutzen im CIR-SV bei Einmalbeitrag.	94
5.4	Vergleich des Erwartungsnutzen im CIR-SV bei laufendem Beitrag.	95
5.5	Wertschwankungen und Renditen im CIR-SV bei Einmalbeitrag.	98
6.1	Power MCPT ^w -Nutzen Diff. zwischen LC- und Mischfonds bei $\rho = 1$	107
6.2	Expo MCPT ^w -Nutzen Diff. zwischen LC- und Mischfonds bei $\rho = 1$	109
6.3	Quad. MCPT ^w -Nutzen Diff. zwischen LC- und Mischfonds bei $\rho = 1$	111
6.4	Power MCPT ^w -Nutzen Diff. zwischen LC- und Mischfonds.	113
6.5	$\lambda - \alpha$ -Sensitivität Einfluss von λ auf die α Sensitivität der Power MCPT ^w - Nutzen Entwicklung.	114
6.6	Power MCPT ^w -Nutzen Entwicklung LC- und Mischfonds bei $\gamma = 1$	116
6.7	Einfluss der Wahrscheinlichkeitsgewichtsfunktion auf die Power MCPT ^w - Nutzen Entwicklung bei $\rho = 1$	117
6.8	MCPT ^w -Nutzen Entwicklung für LC- und Mischfonds für verschiedene Funktionskombinationen im Fall $\lambda = 2, 5$	119
6.9	MCPT ^w -Nutzen Entwicklung für LC- und Mischfonds für verschiedene Funktionskombinationen im Fall $\lambda = 0, 4$	120
6.10	Power MCPT ^w -Nutzen Diff. zwischen LC- und Mischfonds+ bzw. Misch- fonds bei $\rho = 1$ und TK.	121
6.11	Verteilung der MCPT ^w -Nutzen Diff. zwischen LC- und Mischfonds.	124

6.12	Verteilung der MCPT ^w -Nutzen des LC- und Mischfonds für $\gamma = 1$	126
6.13	Verteilung der MCPT ^w -Nutzen des LC- und Mischfonds für $\gamma = 0.8$	126
6.14	MCPT ^w -Nutzen Diff. mit Gedächtnis zwischen LC- und Mischfonds bei $\rho = 1$	128
7.1	Power MCPT ^w -Nutzen Diff. zwischen LC- und Mischfonds bei $\rho = 1$	131
7.2	Expo MCPT ^w -Nutzen Diff. zwischen LC- und Mischfonds bei $\rho = 1$	133
7.3	Quad. MCPT ^w -Nutzen Diff. zwischen LC- und Mischfonds bei $\rho = 1$	133
7.4	Power MCPT ^w -Nutzen Diff. zwischen LC- und Mischfonds.	135
7.5	$\lambda - \alpha$ -Sensitivität der Power MCPT ^w -Nutzen Entwicklung.	136
7.6	Power MCPT ^w -Nutzen Entwicklung LC- und Mischfonds bei $\gamma = 1$	138
7.7	Einfluss der Wahrscheinlichkeitsgewichtsfunktion auf Power MCPT ^w -Nutzen Entwicklung bei $\rho = 1$	139
7.8	MCPT ^w -Nutzen Entwicklung für LC- und Mischfonds für verschiedene Funktionskombinationen im Fall $\lambda = 2, 5$	140
7.9	MCPT ^w -Nutzen Entwicklung für LC- und Mischfonds für verschiedene Funktionskombinationen im Fall $\lambda = 0, 4$	141
7.10	Power MCPT ^w -Nutzen Diff. zwischen LC- und Mischfonds+ bzw. Misch- fonds bei $\rho = 1$ und TK.	142
7.11	Verteilung der MCPT ^w -Nutzen Diff. zwischen LC- und Mischfonds	145
7.12	Verteilung der MCPT ^w -Nutzen des LC- und Mischfonds für $\gamma = 1$	146
7.13	Verteilung der MCPT ^w -Nutzen des LC- und Mischfonds für $\gamma = 0.8$	147
7.14	MCPT ^w -Nutzen Diff. mit Gedächtnis zwischen LC- und Mischfonds bei $\rho = 1$	149

Tabellenverzeichnis

3.1	Eigenschaften bestimmter HARA-Nutzenfunktionen.	30
3.2	Eigenschaften der Wertefunktionen.	37
3.3	Dynamischer Referenzpunkt Beispielentwicklung für unterschiedliche η . . .	48
5.1	Endwert Quantile der Aktien- und Rentenfonds.	86
5.2	Fonds- und Investmentdaten bei Einmalbeitrag.	87
5.3	Endwert Quantile von Lifecycle- und Mischfonds(+) bei Einmalbeitrag. . .	87
5.4	Kolmogorow-Smirnow Zweistichprobenmodell Test bei Einmalbeitrag . . .	89
5.5	Fonds- und Investmentdaten bei laufendem Beitrag.	90
5.6	Endwert Quantile von Lifecycle- und Mischfonds(+) bei laufendem Beitrag.	90
5.7	Kolmogorow-Smirnow Zweistichprobenmodell Test bei laufendem Beitrag.	92
5.8	Quantile der Lifecycle Schwankungen im CIR-SV bei Einmalbeitrag.	99
5.9	Quantile der Mischfonds Schwankungen im CIR-SV bei Einmalbeitrag.	99
5.10	Quantile der Lifecycle Schwankungen im CIR-SV bei laufendem Beitrag . . .	101
5.11	Quantile der Mischfonds Schwankungen im CIR-SV bei laufendem Beitrag.	101
5.12	Quantile der prozentualen Lifecycle Schwankungen im CIR-SV bei laufendem Beitrag im Verhältnis zur Beitragshöhe.	102
5.13	Quantile der prozentualen Mischfonds Schwankungen im CIR-SV bei laufendem Beitrag im Verhältnis zur Beitragshöhe.	102
6.1	Übersicht der Ergebnisse im Einmalbeitragsfall.	122
7.1	Übersicht der Ergebnisse im laufenden Beitragsfall.	143

Abkürzungsverzeichnis

α	Risikoaversionsparameter
η	Gedächtnisfaktor
γ	Wahrscheinlichkeitsgewichtungsfaktor
λ	Verlustaversionsparameter
ρ	Zeitdiskontierungsfaktor in der MCPT Korrelationsfaktor im CIR-BSM bzw. CIR-SV
c, c^L, c^B	Managementgebühren
$CPT(A)$	Kumulativer Prospect Theorie Nutzen
$ENT(A)$	Erwartungsnutzen in der ENT
$MCPT(A)$	Multi-Kumulativer Prospect Theorie Nutzen
$MCPT^w(A)$	Multi-Kumulativer Prospect Theorie Nutzen mit Wahrscheinlichkeitsgewichtung
$PT(A)$	Prospect Theorie Nutzen
r_t	Short Rate zur Zeit t
S_t	Aktien Spot Preis zur Zeit t
$u(x)$	(ENT-) Nutzenfunktion
$v(x)$	(PT-) Wertefunktion
V_t^B	Spot Preis des Mischfonds im Einmalbeitragsfall zur Zeit t
V_t^L	Spot Preis des Lifecycle Fonds im Einmalbeitragsfall zur Zeit t
V_t	Lokale Varianz des Spot Preises der Aktien zur Zeit t
$w(p), w(F(s))$	(PT-) Wahrscheinlichkeitsgewichtsfunktion
W_t	Wiener-Prozess zur Zeit t
Y_t^B	Guthaben des Mischfonds im laufenden Beitragsfall zur Zeit t
Y_t^L	Guthaben des Lifecycle Fonds im laufenden Beitragsfall zur Zeit t
BSM-Modell	Black-Scholes-Merton Modell
CIR Modell	Cox Ingersoll Ross Modell
CIR-BSM	Black-Scholes-Merton Modell und Cox Ingersoll Ross Modell

Abkürzungsverzeichnis

CIR-SV	Heston Modell und Cox-Ingersoll-Ross Modell
CPT	Kumulative Prospect Theorie
ENT	Erwartungsnutzentheorie
FRV	Fondsgebundene Rentenversicherung
HWZ	(Gedächtnis-) Halbwertszeit
LC	Lifecycle Fonds
MCPT	Multi-Kumulative Prospect Theorie
PT	Prospect Theorie
SDGL	Stochastische Differentialgleichung
TK	Tversky und Kahneman (Wahrscheinlichkeitsgewichtung)

1 Einleitung

1.1 Motivation und Ziel der Arbeit

Mit Beginn des 20. Jahrhunderts wurden in allen Industrienationen verschiedene Rentensysteme eingeführt, um die soziale Sicherheit im Alter zu erhöhen. Auch wenn die Rolle der staatlichen Altersvorsorge in den verschiedenen Nationen unterschiedlich ausgelegt war und ist, so eint sie der Gedanke, dass die junge arbeitende Generation, die alte Generation vor Altersarmut schützt. Durch die Anwendung des Umlageverfahrens ist in Deutschland die Rolle der staatlichen und kollektivorientierten Altersvorsorge traditionell besonders hoch. Im Gegensatz zu angelsächsischen Ländern soll die staatliche Altersvorsorge nicht nur vor absoluter Armut schützen, sondern den vorherigen Lebensstandard erhalten¹. Aufgrund dieser Unterschiede besteht in den angelsächsischen Ländern seit jeher die Notwendigkeit einer zusätzlichen privaten Altersvorsorge. Seit einigen Jahren nimmt allerdings auch in Deutschland, bedingt durch den demographischen Wandel, die Bedeutung der privaten Altersvorsorge zu. Einen wichtigen Baustein stellen hierbei die privaten Rentenversicherungen dar. Die Höhe der Rente, die aus einer solchen Versicherung bezogen werden kann, hängt dabei direkt von dem entsprechenden Vertragsguthaben am Ende der Ansparphase² der Versicherung ab. Daher und aufgrund der langen Laufzeit dieser Produkte bieten sich insbesondere fondsgebundene Rentenversicherungen (FRV) zur Altersvorsorge an. Dabei handelt es sich um Rentenversicherungen, welche die Sparbeiträge³ in der Ansparphase in Fonds investieren und dementsprechend von Kapitalmarktentwicklungen beeinflusst werden. Auch im deutschen Markt nehmen

¹Während in Deutschland die staatliche Rente im Jahr 2000 78% (2010, 70%) des Einkommensmix im Alter ausmachte, waren es in den Vereinigten Staaten von Amerika nur 49,1% (47,3%) und in Großbritannien sogar lediglich 38% (37,7%). Vgl. (2013,[All13]).

²Die Höhe ist u.a. abhängig von der Vertragslaufzeit (bzw. der Ansparphase), der Höhe der regelmäßig eingezahlten Beiträge, der Kostenstruktur und der zugrunde liegenden Kapitalanlage.

³Unter dem Sparbeitrag (auch Nettobeitrag genannt) wird der Versicherungsbeitrag abzüglich der Kosten verstanden.

fondsgebundene Rentenversicherungen einen immer größeren Anteil ein. So stieg der Anteil an fondsgebundenen Kapital- und Rentenversicherungen gemessen an den Beiträgen von Lebensversicherungen von 5,7% im Jahr 2000 auf 14,5% im Jahr 2011 und machten in 2011 einen Anteil von 14,9% des Neuzugangs aus⁴. Mit Hinblick auf die Kapitalmarktrisiken und die oftmals hohe Volatilität der Kapitalmärkte, bedarf es bei dieser Art der Altersvorsorge einer gezielten und sorgfältigen Auswahl der Fonds und der Strategien. Eine seit den 1990ern im angelsächsischen Raum weitverbreitete und beliebte Form ist der sogenannte Lifecycle Fonds (auch Target Date Fonds oder Lebenszyklus Fonds genannt). Die Idee des Lifecycle Fonds besteht darin, mit zunehmender Laufzeit den risikoreichen Anteil der Kapitalanlage zu verringern und im Gegenzug den risikoarmen zu erhöhen⁵. Hierdurch wird das Ziel verfolgt, zu Beginn der Laufzeit von den Chancen am Kapitalmarkt zu profitieren, solange Verluste in der verbleibenden Laufzeit wieder kompensiert werden können, und gegen Ende der Laufzeit das vorhandene Kapital abzusichern. Im US-amerikanischen Markt waren nach Schätzungen im Jahr 2009 bereits über 227 Milliarden US-Dollar⁶ und Ende 2011 sogar 378 Milliarden US-Dollar⁷ in diese Art von Fonds investiert. In Deutschland nimmt ihre Bedeutung zwar ebenfalls zu, aber mit einem Volumen von 1,958 Milliarden Euro⁸ ist ihre Stellung noch nicht zu vergleichen mit der im US-amerikanischen Raum. Die Ursachen dafür liegen neben der in Deutschland erst entstehenden Akzeptanz innovativer privater Altersvorsorgeprodukte auf der Anlegerseite, auch in der Vermarktung und im Angebot der Produkte auf der Anbieterseite. So sind von den knapp 7500 im Jahr 2013 in Deutschland angebotenen Publikumsfonds lediglich 70 Lifecycle Fonds⁹.

Zahlreiche wissenschaftliche Arbeiten, insbesondere aus dem angelsächsischen Raum, beschäftigen sich mit dieser Art von Altersvorsorge im Allgemeinen und mit Lifecycle

⁴Daten aus dem Statistischen Taschenbuch der Versicherungswirtschaft (GDV) (2012, [Ges12]).

⁵Typische risikoreiche Anlagen stellen beispielsweise Aktienfonds dar. Diese unterliegen den Kapitalmarktrisiken und besitzen oftmals eine höhere Volatilität. Im Gegensatz dazu stellen Rentenfonds eine risikoarme Anlageform dar. Sie investieren in verzinsliche Wertpapiere, wie Staatsanleihen, Pfandbriefe oder Unternehmensanleihen, die regelmäßig Zinsen abwerfen.

⁶Vgl. (2010, [BCDP10]).

⁷Vgl. (2012, [CPF+12]).

⁸Berücksichtigt sind nur Publikumsfonds. Zum Vergleich, Mischfonds erzielen ein Volumen von 129 Milliarden Euro. Insgesamt beläuft sich die Summe der Publikumsfonds in Deutschland auf ein Volumen von 687 Milliarden Euro (Spezialfonds 1.011 Milliarden Euro). Daten stammen aus der BVI Investmentstatistik zum 31.03.2013 (2013, [BVI13]).

⁹Vgl. (2013, [BVI13]).

Fonds im Speziellen. Neben der Suche nach optimalen Strategien und Ausgestaltungen für Lifecycle Fonds¹⁰, konzentrieren sich diese Arbeiten hauptsächlich auf den Vergleich von Lifecycle- und Mischfonds. Die Arbeiten legen dabei ihren Schwerpunkt auf die Untersuchung von Vertragsguthaben am Ende der Ansparphase bzw. den daraus resultierenden Erwartungsnutzen oder das Shortfallrisiko, welches die Wahrscheinlichkeit ein bestimmtes Vertragsguthaben am Ende der Ansparphase nicht zu erreichen beschreibt. Die Ergebnisse dieser Arbeiten fallen sehr unterschiedlich aus. So kommt beispielsweise Pfau (2009, [Pfa09]) mit Hilfe eines erwartungsnutzentheoretischen Ansatzes zu dem Ergebnis, dass Lifecycle Fonds für risikoaverse Anleger oftmals von Vorteil sind. Schleef und Eisinger (2007, [SE07]) können dagegen in ihren Ergebnissen keinen eindeutigen Vorteil für einen der Fondstypen ausmachen und Spitzer und Singh (2008, [SS08]) sehen Lifecycle Fonds im Hinblick auf das Shortfallrisiko sogar im Nachteil gegenüber Mischfonds. Von den letztgenannten wird die Popularität und der hohe Marktanteil der Lifecycle Fonds im US-amerikanischen Markt dadurch erklärt, dass Lifecycle Fonds inzwischen eine der häufigsten Default Optionen für Altersvorsorgeprodukte sind. Doch laut statistischen Auswertungen haben sich nur 16% der US-amerikanischer Lifecycle Fonds Anleger für diese Form der Anlage aufgrund der Default Option entschieden, während in erster Linie andere Faktoren als ausschlaggebend genannt werden. Zum einen werden demnach Lifecycle Fonds als vergleichbar sichere Anlage für die Altersvorsorge betrachtet (41%), die zudem eine breite Diversifikation zwischen verschiedenen Anlageklassen bieten (40%). Darüber hinaus spielt die Tatsache, dass Lifecycle Fonds aufgrund ihrer vorgegebenen Anlagestrategien als sehr bequeme und einfache Anlageform betrachtet werden, die keinen Stress verursachen (35%), eine wichtige Rolle¹¹.

Im Gegensatz zu den bisher erwähnten Arbeiten, die eine eher zufällige Auswahl der betrachteten Lifecycle- und Mischfonds vornehmen, werden von Graf in *Life-cycle Funds: Much Ado about Nothing?* (2013, [Gra13]) Methoden vorgestellt, die es ermöglichen, sowohl im Einmal- als auch im laufenden Beitragsfall, zu einem beliebigen deterministischen Lifecycle Fonds einen Mischfonds zu konstruieren, der selbst in komplexeren Kapitalmarktmodellen eine vergleichbare Verteilung der Vertragsguthaben am Ende der Ansparphase besitzt. Wenn allerdings die Verteilung der Vertragsguthaben am Ende

¹⁰Beispielsweise in Cairns (2006, [CBD06]) oder Bruder, Culerier und Roncalli (2012, [BCR12]), die Ansätze der stochastischen Kontrolltheorie verwenden, um optimale Lifecycle Strategien unter Verwendung des Erwartungsnutzen zu beschreiben.

¹¹Daten entstammen einer Auswertung von Siegel und Gale (2012, [Sie12]), basierend auf einer Befragung von 1000 Anlegern.

der Ansparphase jedes beliebigen deterministischen Lifecycle Fonds beinahe exakt auch durch einen Mischfonds erzielt werden kann, stellt sich die Frage nach dem Zweck bzw. Nutzen einer solchen Anlage.

Die oben genannten sowie zahlreiche weitere Arbeiten verwenden klassische Ansätze, die insbesondere auf Beobachtungen zum Ende des Investitionshorizontes, wie Vertragsguthaben am Ende der Ansparphase, mittlere jährliche Renditen, Shortfallrisiken, etc. und rationale Anleger ausgerichtet sind. Allerdings sind die bereits genannten Faktoren, die einen großen Einfluss auf die Fondsauswahl haben, nicht nur von diesen Endwerten abhängig. Insbesondere bei langfristigen Altersvorsorgeprodukten, wie einer FRV, spielt die Planungssicherheit eine wichtige Rolle. So können mögliche hohe Wertverluste, die ein Anleger beispielweise jährlich bei der Jahresabrechnung wahrnimmt, extrem schmerzhaft sein und Unsicherheiten sowie ein hohes Stresspotenzial verursachen, was sich auch auf den subjektiven Nutzen einer Anlage auswirkt. Reine Endwertbetrachtungen blenden diese Eigenschaften allerdings vollkommen aus und hängen maximal von der Volatilität des Endwertes ab, ohne jedoch eine Aussage über den Verlauf des Fondswertes zu treffen. Darüber hinaus wird die in der klassischen Entscheidungstheorie sehr beliebte Annahme eines rationalen Anlegers durch eine Vielzahl von Arbeiten, die sich vor allem auf psychologische Untersuchungen stützen, in Frage gestellt¹².

Das erste Ziel dieser Arbeit ist daher einen wissenschaftlich fundierten Ansatz zu beschreiben, der es zum einen ermöglicht die Auswirkungen der Wertentwicklungen von Fonds auf den Nutzen für einen Anleger zu erfassen und der zum anderen auch weitere Eigenschaften, die aus psychologischer Sichtweise auf den subjektiven Nutzen einwirken, berücksichtigt.

Neben einer Analyse der Sensitivität auf unterschiedliche Modellparameter, sollen mit Hilfe dieses Ansatzes anschließend bestimmte Lifecycle- und Mischfonds mit Monte-Carlo Methoden untersucht und verglichen werden. Als Grundlage hierfür dienen die von Graf in *Life-cycle Funds: Much Ado about Nothing?* (2013, [Gra13]) beschriebenen Methoden zur Modellierung von Lifecycle- und Mischfonds mit vergleichbaren Verteilungen der Vertragsguthaben am Ende der Ansparphase, die es ermöglichen die Auswirkungen der Wertverläufe auf den Nutzen möglichst unverzerrt zu analysieren.

¹²Vgl. (1982, [KST82]), (1990, [TJ90]), (1995, [Cam95]), (1998, [Rab98]), (2000, [KT00]) oder (2000, [Sta00]).

Abschließend soll mit den Ergebnissen ein Überblick gegeben werden, inwiefern unterschiedliche Anlegertypen (risikoavers, -affin, -neutral) einen Nutzenvorteil aus dem Wertverlauf durch den Lifecycle- bzw. den Mischfonds erhalten.

1.2 Aufbau der Arbeit

Nach dem einführenden Kapitel 1 werden in Kapitel 2 die benötigten stochastischen und finanzmathematischen Grundlagen eingeführt. Der Schwerpunkt liegt dabei auf der Einführung von stochastischen Differentialgleichungen und ihren Einsatz zur Modellierung von Kapitalmarktmodellen. Es werden insbesondere die in dieser Arbeit betrachteten Kapitalmarktmodelle und die benötigte Preisbestimmung von Zero-Coupon Bonds in diesen Modellen beschrieben. Bei den Kapitalmarktmodellen handelt es sich um ein Black-Scholes-Merton Modell (CIR-BSM) und ein Heston Modell (CIR-SV), jeweils erweitert um ein stochastisches Zinsmodell mittels des sogenannten Cox-Ingersoll-Ross (CIR) Modells.

In Kapitel 3 werden die in dieser Arbeit untersuchten Ansätze der Entscheidungstheorie formuliert. Zuerst findet eine Betrachtung der klassischen Erwartungsnutzentheorie statt. Neben einer kurzen Einführung in die wesentlichen Definitionen werden drei unterschiedliche Nutzenfunktionen vorgestellt, die in den späteren Analysen verwendet werden. Dabei handelt es sich um eine CRRA (Constant Relative Risk Aversion), eine CARA (Constant Absolute Risk Aversion) und eine Nutzenfunktion, die lediglich HARA (Hyperbolic Absolute Risk Aversion) ist. Der zweite Abschnitt dieses Kapitels beinhaltet die theoretischen Grundlagen der Prospect Theorie, auf welchen der Großteil der späteren Analysen basiert. Im Gegensatz zur Erwartungsnutzentheorie berücksichtigt die Prospect Theorie psychologische Ansätze, wie beispielsweise kognitive Verzerrungen der Wahrscheinlichkeitsgewichtung, die sich in der Übergewichtung von seltenen und der Untergewichtung von häufigen Ereignissen widerspiegelt. Darüberhinaus ermöglicht sie unterschiedliche Sensitivitätsausprägungen im Hinblick auf Gewinne und Verluste. Zuerst wird die ursprüngliche Prospect Theorie, wie von Tversky und Kahneman in (1979, [KT79]) eingeführt, vorgestellt. Dabei werden die Konzepte der Wahrscheinlichkeitsgewichtung und der Definition des Nutzens über Gewinne und Verluste anstatt über absolute Werte ausführlich beschrieben. Anschließend wird die kumulative Prospect Theorie

(1992, [TK92]) betrachtet, die in vielen Anwendungen durch eine modifizierte Modellierung des Nutzens von Vorteil ist. Es werden drei häufig verwendete Wertefunktionen und mit der Tversky Kahneman und der Prelec Version zwei unterschiedliche Wahrscheinlichkeitsgewichtsfunktionen definiert. Auf diesen Ideen aufbauend wird die Multi-Kumulative Prospect Theorie eingeführt, welche es mit Hilfe der Arbeit von Barberis, Huang und Santos (2001, [BHS01]) ermöglicht einen Prospect Theorie Nutzen über die jährlichen Wertschwankungen einer Kapitalanlage zu definieren. Der auf diese Weise definierte Nutzen bildet die Grundlage der späteren Analysen und vereint Prospect Theorie Ansätze mit der Möglichkeit, den Wertverlauf in den Nutzen einzubeziehen. Als Erweiterung wird abschließend noch ein Modell vorgestellt (2001, [BHS01]), das es in einem speziellen Fall erlaubt ein „Anlegergedächtnis“ zu modellieren und damit die Risikoaversion des Anlegers von den Veränderungen in den vorherigen Zeitperioden abhängen zu lassen.

Kapitel 4 beinhaltet die Modellierung und die numerischen Methoden, die zur Simulation der Kapitalmarktmodelle und der Fonds verwendet werden. Im ersten Teil werden die von Graf (2013, [Gra13]) formulierten Verfahren beschrieben, die es ermöglichen, zu einem beliebigen Lifecycle Fonds in einem Black-Scholes-Merton Framework einen Mischfonds zu konstruieren, der eine identische Verteilung (Einmalbeitrag) bzw. identische erste und zweite Momente (laufender Beitrag) der Vertragsguthaben am Ende der Ansparphase besitzt. Im zweiten Abschnitt werden die numerischen Konzepte, vor allem das Euler-Maruyama Verfahren, zur Simulation der Kapitalmarktmodelle und der Fondsinvestments erläutert und die verwendete Kapitalmarktkalibrierung gegeben.

Die ersten Auswertungen werden in Kapitel 5 präsentiert. Dabei handelt es sich um vorbereitende Analysen, welche die Motivation der Verwendung des Multi-Kumulativen Prospect Theorie Nutzens verdeutlichen. Zuerst werden die Verteilungen der Vertragsguthaben am Ende der Ansparphase der betrachteten Fonds in den verwendeten Kapitalmarktmodellen verglichen. Neben der Betrachtung von Histogrammen und Quantilen, wird hierzu auch ein statistischer Test zur Überprüfung der Übereinstimmung der Verteilungen durchgeführt. Anschließend findet eine Untersuchung des klassischen Erwartungsnutzens statt, bevor abschließend der Unterschied in den jährlichen Wertschwankungen von Lifecycle- und Mischfonds über die Laufzeit untersucht wird.

Aufbauend auf den vorherigen Kapiteln findet in Kapitel 6 (Einmalbeitrag) und 7 (laufender Beitrag) eine Analyse der betrachteten Fonds mit der Multi-Kumulativen Prospect Theorie statt. Es werden hierbei zahlreiche Sensitivitätsanalysen bezüglich der Parameter durchgeführt, um einen möglichst vollständigen Eindruck über die Auswirkungen zu erhalten. Neben den Parametern werden Funktionenkombinationen der in Kapitel 3 eingeführten Werte- und Wahrscheinlichkeitsgewichtsfunktionen untersucht. Die Analysen fokussieren sich dabei stets auf die Nutzenunterschiede zwischen Lifecycle- und Mischfonds. In beiden Fällen (Einmal- und laufender Beitrag) wird ein Überblick über den zu bevorzugenden Fonds für unterschiedliche Anleger (Parameterkombinationen) gegeben. Darüber hinaus werden die Nutzenverteilungen von drei speziellen Anlegern (risikoaffin, -avers, -neutral) genauer analysiert. Abschließend findet in beiden Fällen eine Betrachtung des in Abschnitt 3.2.5 beschriebenen Anlegers mit Gedächtnis statt.

2 Stochastische und finanzmathematische Grundlagen

In diesem Kapitel werden die notwendigen stochastischen und finanzmathematischen Grundlagen und Notationen eingeführt. Es gibt eine Vielzahl an Literatur, welche die in dieser Arbeit benötigten Grundlagen ausführlich behandeln, weshalb hier nur auf die wesentlichen Aspekte eingegangen werden soll und für weitere Einzelheiten auf die Literatur verwiesen wird.

Im ersten Abschnitt werden zuerst stochastische Prozesse und insbesondere der Wiener Prozess definiert. Darauf aufbauend wird eine kurze Einführung zu stochastischen Differentialgleichungen und neben den Definitionen ein kurzer Überblick über Lösungs- und Eindeutigkeitsbegriffe gegeben.

Im zweiten Abschnitt des Kapitels werden die Ergebnisse des ersten Abschnittes verwendet, um die in dieser Arbeit notwendigen Kapitalmarktmodelle einzuführen. Im Vordergrund steht dabei die Modellierung von Aktienpreiskursen und Zinsstrukturkurven und die damit verbundene Preisbestimmung von Zero Bonds. Diese ist notwendig, um die in dieser Arbeit betrachteten Aktien- und Rentenfonds zu beschreiben und zu simulieren.

2.1 Stochastische Grundlagen

2.1.1 Stochastische Prozesse

Bevor die Grundlagen der stochastischen Differentialgleichungen beschrieben werden können, die neben einer deterministischen Komponente durch einen Diffusionsterm, der von einem Wiener-Prozess getrieben wird, bestimmt werden, muss der Begriff des stochastischen Prozesses im Allgemeinen und der des Wiener-Prozesses im Speziellen geklärt werden. Eine ausführliche Einführung zu Wiener-Prozessen findet sich beispielsweise in *Brownian Motion and Stochastic Calculus* von Karatzas und Shreve (1991, [KS91]).

Sei im Folgenden stets $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit $\Omega \neq \emptyset$, der so gewählt ist, dass alle betrachteten Zufallsvariablen und stochastischen Prozesse definiert werden können.

Definition 2.1.1 (Filtration).

Sei $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}$. Eine Familie $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ von σ -Algebren heißt *Filtration*, wenn

- $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F} \quad \forall t \in \mathbb{T}$ und
- $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \quad \forall s, t \in \mathbb{T}, \quad s \leq t$.

Dann wird $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ ein *filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum* genannt.

Definition 2.1.2 (Stochastischer Prozess (in stetiger Zeit)).

Sei $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}$. Eine Familie $X = \{X_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ von Zufallsvariablen $X_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definiert auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ heißt *stochastischer Prozess*.

Definition 2.1.3 (Pfad).

Für $\omega \in \Omega$ wird die Abbildung $t \mapsto X_t(\omega)$ als ein *Pfad* von X bezeichnet und *Pfade* werden *stetig* genannt, falls $t \mapsto X_t(\omega)$ \mathbb{P} -fast sicher stetig ist.

Definition 2.1.4 (\mathbb{F} -adaptiert).

Sei $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}$ und $\{X_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ ein stochastischer Prozess auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dann heißt $\{X_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ \mathbb{F} -adaptiert, falls X_t \mathcal{F}_t -messbar für alle $t \in \mathbb{T}$ ist.

Einer der bekanntesten und meist verwendeten stochastischen Prozesse ist der Wiener-Prozess (auch Brownsche Bewegung), dessen wahrscheinlichkeitstheoretische Existenz 1923 von Norbert Wiener erstmals gezeigt werden konnte. Der Wiener-Prozess spielt auch bei der Definition der stochastischen Integrale und Differentialgleichungen eine zentrale Rolle.

Definition 2.1.5 (Wiener-Prozess).

Ein stochastischer Prozess W mit $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ heißt *Standard Wiener-Prozess*, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- $W_0 = 0$ fast sicher.
- W besitzt unabhängige Zuwächse, d.h. $W_{t+s} - W_t$ ist unabhängig von $\sigma(W_u; u < t)$ für $s \in \mathbb{R}_+$ und $t \in \mathbb{T}$.

- W besitzt stationäre Zuwächse, d.h. die Verteilung von $W_{t+s} - W_t$ ist nur von $s \in \mathbb{R}_+$ und nicht von t abhängig.
- W besitzt normalverteilte Zuwächse, d.h. $W_{t+s} - W_t \sim \mathcal{N}(0, s)$ für $s \in \mathbb{R}_+$ und $t \in \mathbb{T}$.
- W besitzt stetige Pfade.

Bemerkung 2.1.6.

Der Wiener-Prozess kann auf verschiedene äquivalente Weisen definiert werden.

Für den Wiener-Prozess gilt stets:

- $\mathbb{E}(W_t) = 0$,
- $\text{Var}(W_t) = t$,
- $\text{Cov}(W_t, W_s) = \min(t, s)$.

Sind W^1, \dots, W^d d unabhängige Standard Wiener-Prozesse, dann wird $W = (W^1, \dots, W^d)^T$ ein d -dimensionaler Wiener-Prozess genannt.

2.1.2 Stochastische Differentialgleichungen - Itô-Prozesse

Analog zu gewöhnlichen oder partiellen Differentialgleichungen, mit deren Hilfe deterministische Änderungsverhalten verschiedener Größen zueinander modelliert werden können, bieten stochastische Differentialgleichungen (SDGL) die Möglichkeit Änderungsverhalten mit einer Zufallskomponente mathematisch zu formulieren. Stochastische Differentialgleichungen spielen daher bei der Modellierung von Kapitalmarktmodellen eine zentrale Rolle. Da in dieser Arbeit insbesondere ein stochastisches Volatilitätsmodell betrachtet wird, das 2 korrelierte Wiener-Prozesse beinhaltet, ist es an dieser Stelle sinnvoll eine kurze Beschreibung d -dimensionaler stochastischer Differentialgleichungen zu geben.

Ausführliche Einführungen in die sogenannte stochastische Analysis werden unter anderem in (1991, [KS91]) oder in *Stochastic differential equations: an introduction with applications* von Øksendal (2010, [Øks10]) gegeben, auf denen auch dieser Abschnitt basiert.

Eine d -dimensionale stochastische Differentialgleichung hat folgende Gestalt:

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum mit σ -Algebra \mathcal{F} , o.B.d.A. vollständig unter \mathbb{P} , d.h. jede Teilmenge einer Nullmenge bzgl. \mathbb{P} aus \mathcal{F} liegt wieder in \mathcal{F} , und mit Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, eine wie in Definition 2.1.1 definierte Filtration. Dann wird mit den folgenden Gleichungen die SDGL beschrieben,

$$\begin{aligned} dX_t &= b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t, \\ X_0 &= x_0 \in \mathbb{R}^d, \end{aligned} \tag{2.1}$$

bzw. in äquivalenter Integraldarstellung

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s, \tag{2.2}$$

mit

- W r -dimensionaler Wiener-Prozess,
- b d -dimensionaler Drift-Vektor,
- σ $d \times r$ dimensionale Diffusions-Matrix,
- $b_i(t, x)$ und $\sigma_{ij} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ Borel-messbare Funktionen.

Hierbei ist es wichtig zu erwähnen, dass die in (2.1) benutzte Notation in Differential-schreibweise häufig benutzt wird, obwohl es sich bei der stochastischen Differentialgleichung richtigerweise um eine Integralgleichung handelt und somit die Notation nicht die übliche Bedeutung analog zur gewöhnlichen Differentialgleichung besitzt.

Darüber hinaus ist noch nicht geklärt, was unter einem Integral der Form,

$$\int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s,$$

zu verstehen ist. Die Herleitung und die exakte Definition benötigt einiges an Vorarbeit und wird üblicherweise in mehrere Schritte unterteilt. Eine genaue Beschreibung findet sich in der oben genannten Literatur. Die wesentliche Idee besteht darin, das stochastische Integral für eine geeignete Klasse von Integranden als stochastischen Prozess über den Grenzwert unabhängiger Wiener-Prozess Zuwächse zu definieren und dabei die so-

genannte Itô-Isometrie auszunützen¹.

Da die stochastischen Differentialgleichungen eine Zufallskomponente besitzen, müssen dementsprechende Lösungsbegriffe definiert werden. Im Wesentlichen werden zwei verschiedene Lösungsbegriffe unterschieden:

Definition 2.1.7 (Schwache Lösung).

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P}, W, X)$ wird eine schwache Lösung von (2.1) genannt, falls

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum ist, der die üblichen Bedingungen erfüllt, d.h. rechtsstetig und vollständig²,
- W ist ein r -dimensionaler \mathbb{F} -Wiener-Prozess, d.h. W ist \mathbb{F} -adaptiert,
- X ist ein d -dimensionaler, \mathbb{F} -adaptierter stochastischer Prozess der (2.1) erfüllt und
- $\int_0^t (b_i(s, X_s) + \sigma_{ij}^2(s, X_s)) ds < \infty$ fast sicher $\forall i, j$ und $t \geq 0$.

Definition 2.1.8 (Starke Lösung).

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und W ein r -dimensionaler Wiener-Prozess gegeben. Des Weiteren sei \mathbb{F}^W die vom Wiener-Prozess erzeugte Filtration, d.h. $\mathbb{F}^W = (\mathcal{F}_t^W)_{t \geq 0}$ mit $\mathcal{F}_t^W = \sigma(W_s; s < t)$.

Dann ist ein stochastischer Prozess X eine starke Lösung von (2.1), falls $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}^W, \mathbb{P}, W, X)$ eine schwache Lösung von (2.1) ist.

Bemerkung 2.1.9.

Die beiden Lösungsbegriffe haben folgenden essentiellen Unterschied:

- Schwache Lösung: Es wird nach einem geeigneten filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum und einem dazu passendem Paar (W, X) gesucht, d.h. insbesondere ist der Wiener-Prozess nicht festgelegt und die Filtration \mathbb{F} kann größer sein als \mathbb{F}^W ³.

¹Diese Herleitung des stochastischen Integrals geht auf den japanischen Mathematiker Itô Kiyoshi (1915-2008) zurück. Dieser gilt als Begründer der stochastischen Analysis. Seine Arbeiten, „On the probability distribution on a compact group“ (1940, [KI40]) und „On stochastic processes (Infinitely divisible laws of probability)“ (1942, [Itô42]), aus den Jahren 1940 und 1942 legten dabei den Grundstein.

²d.h. es gilt $\mathcal{F}_t = \bigcap_{\epsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\epsilon} \forall t \geq 0$ und $\{A \subseteq \Omega : \exists B \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(B) = 0, A \subseteq B\} \subseteq \mathcal{F}_0$.

³ \mathbb{F} ist mindestens so groß wie \mathbb{F}^W , da W \mathbb{F} -adaptiert sein muss.

- Starke Lösung: Es wird für einen vorgegebenen Wiener-Prozess und entsprechenden filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum eine \mathbb{F}^W -adaptierte Lösung X gesucht.
- Es gilt stets, dass wenn X eine starke Lösung von (2.1) ist, dass dann X auch eine schwache Lösung von (2.1) ist.
- Es existieren stochastische Differentialgleichungen die schwache Lösungen aber keine starken Lösungen besitzen. Ein Beispiel hierfür ist die eindimensionale SDGL von Tanaka mit $\sigma(t, x) = \mathbb{1}_{x>0} - \mathbb{1}_{x\leq 0}$, $b(t, x) = 0$, $x_0 = 0$ (vgl. z.B. (2010, [Øks10])).

Neben der Definition, der Lösung einer SDGL, ist es insbesondere im Hinblick auf spätere Anwendungen wichtig, dass die Lösungen bestimmte Arten von Eindeutigkeiten erfüllen. Auch hier wird meistens in zwei verschiedene Eindeutigkeitsbegriffe unterschieden.

Definition 2.1.10 (Pfadweise Eindeutig).

Die SDGL (2.1) wird pfadweise eindeutig lösbar genannt, falls für alle schwachen Lösungen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P}, W, X)$ und $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P}, W, \tilde{X})$ gilt, dass X und \tilde{X} ununterscheidbar sind, d.h. $\mathbb{P}(\forall t \geq 0 : X_t = \tilde{X}_t) = 1$.

Definition 2.1.11 (Eindeutig in Verteilung).

Die SDGL (2.1) wird eindeutig in Verteilung lösbar genannt, falls für alle schwachen Lösungen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P}, W, X)$ und $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{F}}, \tilde{\mathbb{P}}, \tilde{W}, \tilde{X})$ gilt, dass $X \stackrel{d}{=} \tilde{X}$.

Bemerkung 2.1.12.

Es gilt stets, dass aus (2.1) pfadweise eindeutig lösbar auch (2.1) eindeutig in Verteilung lösbar folgt (Yamada, Watanabe (1971, [YW71])).

Ein Beispiel für eine eindeutig in Verteilung lösbare aber nicht pfadweise eindeutig lösbare SDGL ist wieder die SDGL von Tanaka.

Bemerkung 2.1.13 (Existenz- und Eindeutigkeitsätze).

Es gibt zahlreiche Sätze, die Bedingungen nennen, welche die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen gewährleisten. Bekannte und oftmals verwendete Resultate werden u.a. von Itô, Yamada und Watanabe sowie Engelbert und Schmidt oder auch Zvonkin formuliert (vgl. z.B. (1991, [KS91])).

Eine besondere Klasse von stochastischen Differentialgleichungen bilden die sogenannten Itô-Prozesse:

Definition 2.1.14 (Itô-Prozess).

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und W ein r -dimensionaler \mathbb{F} -Wiener-Prozess.

Mit den oben eingeführten Notationen wird der d -dimensionale Itô-Prozess X_t als stochastischer Prozess mit der Gestalt (2.2) definiert, wenn

- $x_0 \in \mathbb{R}$ und b, σ \mathbb{F} -adaptierte stochastische Prozesse,
- $\int_0^t |b_i(s, X_s)| ds < \infty$ und
- $\mathbb{E} \left[\int_0^t \sigma_{ij}^2(s, X_s) ds \right] < \infty$ fast sicher $\forall i, j$ und $t \geq 0$.

Bemerkung 2.1.15 (Erwartungswert und Varianz (1-dim)).

Erwartungswert und Varianz eines eindimensionalen Itô-Prozesses lassen sich mit Hilfe der Eigenschaften des Wiener-Prozesses auf folgende Art darstellen:

$$\mathbb{E}[X_t] = X_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds, \quad (2.3)$$

$$\text{Var}(X_t) = \int_0^t \sigma^2(s, X_s) ds. \quad (2.4)$$

Satz 2.1.16 (Itô-Lemma).

Sei X ein d -dimensionaler Itô-Prozess und $f \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$. Dann ist auch $(f(t, X_t))_{t \geq 0}$ ein Itô-Prozess und es gilt

$$df(t, X_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) dt + \nabla f(t, X_t) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(t, X_t) d[X^i, X^j]_t, \quad (2.5)$$

wobei ∇ der Nabla-Operator ist und $[\cdot, \cdot]$ die quadratische Variation⁴ darstellt, die für einen Itô-Prozess folgende Darstellung besitzt

$$[X^i, X^j]_t = \int_0^t b_i(s, X_s) b_j(s, X_s) ds.$$

Bemerkung 2.1.17.

Dieses Lemma wird auch als das stochastische Gegenstück zur Taylor-Entwicklung betrachtet. Es existiert eine Vielzahl von Verallgemeinerungen des Itô-Lemmas, so lässt

⁴Die quadratische Variation ist ein Maß für das Schwankungsverhalten des stochastischen Prozesses. Eine ausführliche Beschreibung findet sich in der oben genannten Literatur.

es sich beispielsweise auch für allgemeinere Semimartingale (siehe z.B. (2005, [Pro05])) definieren, welche bei der Betrachtung von Sprung-Diffusions Modellen in Form von Levy-Prozessen benötigt werden. Auch die Voraussetzung $f \in \mathcal{C}^{1,2}$ kann in vielen Fällen abgeschwächt werden.

Beispiel 2.1.18.

Zum Abschluss der theoretischen Einführung werden ein paar Beispiele gegeben, die bei der Modellierung von Kapitalmärkten häufig verwendet werden:

Es sei stets $X_0 = x_0 > 0$ und $\sigma > 0, \mu > 0, \kappa > 0$.

(i) Homogene lineare (geometrische) SDGL:

$$dX_t = X_t (\mu dt + \sigma dW_t) \tag{2.6}$$

Diese Art von SDGL besitzt die explizite Lösung:

$$X_t = x_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t} \tag{2.7}$$

(ii) Wurzel-Diffusions Prozess:

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma \sqrt{X_t} dW_t \tag{2.8}$$

(iii) Mean-Reversion (Ornstein-Uhlenbeck) Prozess:

$$dX_t = \kappa (\mu - X_t) dt + \sigma X_t dW_t \tag{2.9}$$

(iv) Mean-Reversion Wurzel-Diffusions Prozess:

$$dX_t = \kappa (\mu - X_t) dt + \sigma \sqrt{X_t} dW_t \tag{2.10}$$

2.2 Kapitalmarktmodelle

Nachdem im vorherigen Abschnitt die stochastischen Grundlagen, insbesondere zu stochastischen Differentialgleichungen, eingeführt wurden, werden in diesem Abschnitt die in dieser Arbeit verwendeten finanzmathematischen Voraussetzungen und Kapitalmarktmodelle beschrieben.

Zuerst wird ein geeignetes Modell für die Zinsstrukturkurve (CIR-Modell, 1985, [CIR85]) betrachtet und auf die entsprechende Modellierung von Zero-Coupon Bonds eingegangen. Anschließend wird das Black-Scholes-Merton Modell (BSM-Modell, 1973, [BS73], [Mer73]) in seiner ursprünglichen Form eingeführt und um eine stochastische Modellierung der Zinsen erweitert.

Im nächsten Schritt wird eine erweiterte Version des Heston Modells ((CIR-SV), 1993, [Hes93]) formuliert, die es erlaubt, eine stochastische Volatilität für den Aktienpreis und eine stochastische Modellierung der Zinsen zu berücksichtigen.

Im Folgenden sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ stets ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und $t \in [0, T]$ mit endlichem Zeithorizont $T \in (0, \infty)$. Das Maß \mathbb{P} ist das objektive bzw. historische Wahrscheinlichkeitsmaß, unter dem die Marktdaten in der realen Welt zu beobachten sind. Es sei darauf hingewiesen, dass nur zeitstetige Modelle betrachtet werden.

Des Weiteren sind W^S, W^V, W^r \mathbb{F} -adaptierte \mathbb{P} -Wiener Prozesse, wobei die dazugehörige Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t \vee \mathcal{N})_{t \in [0, T]}$ ⁵, vervollständigt mit allen \mathbb{P} -Nullmengen \mathcal{N} , jeweils auf folgende Weise erzeugt wird:

Für alle $t \in [0, T]$ setze

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_t^{CIR} &:= \sigma(W_s^r; s < t), & \mathcal{F}_t^{BSM} &:= \sigma(W_s^S; s < t), \\ \mathcal{F}_t^{CIR-BSM} &:= \sigma((W_s^S, W_s^r); s < t), & \mathcal{F}_t^{CIR-SV} &:= \sigma((W_s^S, W_s^V, W_s^r); s < t). \end{aligned}$$

Die Filtrationen sind somit vollständig. Weiter werden sie als rechtsstetig angenommen⁶, d.h. sie erfüllen die üblichen Bedingungen.

⁵ $\mathcal{F}_t \vee \mathcal{N} = \sigma(\mathcal{F}_t \cup \mathcal{N})$.

⁶ Dies kann o.B.d.A. angenommen werden, da andernfalls lediglich eine Anpassung über entsprechende Schnittmengen vorgenommen werden muss, d.h. $\mathcal{F}_t^c = \bigcap_{\epsilon > 0} \sigma(\mathcal{F}_{t+\epsilon} \cup \mathcal{N})$.

2.2.1 Zero-Coupon Bonds und Zinsstrukturmodelle - CIR-Modell

Bevor mit dem Cox-Ingersoll-Ross Modell, im Folgenden stets als CIR-Modell bezeichnet, eine mögliche Modellierung der sogenannten Short Rate formuliert wird, werden im ersten Teil dieses Abschnittes die dazu nötigen Definitionen gegeben und die Bedeutung der Short Rate geklärt, denn nur durch die Verknüpfung der Short Rate zu einem handelbaren Gut (Bonds) ist die Modellierung der Short Rate Dynamiken in Kapitalmarktmodellen interessant.

Ausführliche Beschreibungen von Zinsstrukturmodellen und risikoneutralen Bewertungsmethoden finden sich beispielsweise in *Risk Neutral Valuation* von Bingham und Kiesel (2009, [BK09]) oder in *Interest Rate Models* von Brigo und Mercurio (2007, [Bri07]), die auch als Grundlage für diesen Abschnitt dienen.

Zero-Coupon Bonds und Short Rate

In diesem Abschnitt sind die zentralen Objekte herkömmliche festverzinsliche Wertpapiere, die sogenannten Zero-Coupon Bonds (auch Zero Bonds oder Null-Kupon Anleihen genannt).

Definition 2.2.1 (Zero Bond).

Ein Zero Bond mit Laufzeit $d \in \mathbb{N}$ ist ein festverzinsliches Wertpapier, das dem Besitzer die Zahlung in Höhe einer Geldeinheit zur Zeit $d + t_0$ garantiert ($t_0, d + t_0 \in [0, T]$)⁷.

Es finden zudem keine Zahlungen während der Laufzeit statt.

Der Wert eines Zero Bond zum Zeitpunkt $t \leq d$ wird mit $P(t, d)$ bezeichnet und es gilt für alle d : $P(d, d) := 1$.

Um die Dynamiken von Zero Bonds, die zur Modellierung risikoloser Anlagen verwendet werden, zu beschreiben, wird die Idee der Short Rate eingeführt.

Die Idee dabei ist, dass es mit No-Arbitrage Argumenten einen festen Zinssatz R geben muss, so dass in einem Zeitintervall $[d_1, d_2]$ für $t \leq d_1 \leq d_2$ die Gleichung

$$e^{R(d_2-d_1)} = \frac{P(t, d_1)}{P(t, d_2)} \tag{2.11}$$

gilt.

⁷Zur einfacheren Darstellung sei im Folgenden stets $t_0 = 0$.

Definition 2.2.2.

Auf der obigen Idee basieren nun folgende Definitionen:

(i) Die Forward Rate in der Periode $[d_1, d_2]$ zur Zeit t ist definiert als

$$R(t, d_1, d_2) := \frac{\log P(t, d_1) - \log P(t, d_2)}{d_2 - d_1}. \quad (2.12)$$

(ii) Die Spot Rate in der Periode $[d_1, d_2]$ ist definiert als

$$R(d_1, d_2) := -\frac{\log P(d_1, d_2)}{d_2 - d_1}. \quad (2.13)$$

(iii) Die Forward Intensität zur Zeit t mit Restlaufzeit d ist definiert als

$$f(t, d) := -\frac{\partial \log P}{\partial d}(t, d). \quad (2.14)$$

(iv) Die Short Rate zur Zeit t ist definiert über

$$r_t := f(t, t). \quad (2.15)$$

Mit Hilfe der Short Rate kann nun die Dynamik einer risikolosen Anlage modelliert werden.

Definition 2.2.3 (Risikolose Anlage).

B_t wird definiert als der Wert einer risikolosen Anlage zum Zeitpunkt t .

Für $B_0 = 1$ folgt der Wert der risikolosen Anlage der DGL

$$dB_t = r_t B_t dt. \quad (2.16)$$

Als Konsequenz ergibt sich damit

$$B_t = \exp\left(\int_0^t r_s ds\right). \quad (2.17)$$

Diese Darstellung ist insbesondere für eine deterministische Short Rate r_t sehr hilfreich,

da sich damit der Zero Bond Preis darstellen lässt durch

$$P(t, d) = \exp\left(-\int_t^d r_s ds\right). \quad (2.18)$$

Ein Problem ergibt sich aber sobald r stochastisch modelliert wird, da in diesem Fall natürlich auch B stochastisch ist und die Darstellung des Preises mit (2.18) somit nicht mehr möglich ist. In diesem Fall wird der Martingal-Ansatz⁸ verwendet und die Berechnung des Preises wird (sofern existent) mittels einem äquivalenten risikoneutralen Maß $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}^9$ durchgeführt. Dieses spiegelt die Sichtweise eines risikoneutralen Beobachters wieder. Dabei dient B als Numeraire, d.h. der Prozess

$$\left\{ \frac{P(t, d)}{B_t} \right\}_{t \in [0, d]}$$

ist ein (lokales) \mathbb{Q} -Martingal. Damit folgt mit dem bedingten Erwartungswert unter \mathbb{Q} die risikoneutrale Bewertungsformel

$$P(t, d) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^d r_s ds} \mid \mathcal{F}_t \right]. \quad (2.19)$$

Dieser Ansatz ist notwendig bei der Zero Bond Preisbestimmung im Fall des später betrachteten CIR-Modells für die Short Rate. Dies ist auch der Grund weshalb die Short Rate oftmals direkt unter \mathbb{Q} formuliert wird und nicht unter \mathbb{P} . Der Nachteil dieser Modellierung ist allerdings, dass Parameter unter \mathbb{Q} nicht beobachtbar sind und daher zur Kalibration des Modells die \mathbb{P} -Dynamiken hergeleitet werden müssen.

Cox-Ingersoll-Ross Modell

Im CIR-Modell (1985, [CIR85])) wird die Short Rate r_t durch die SDGL

$$\begin{aligned} dr_t &= \kappa_r(\Theta_r - r_t)dt + \sigma_r \sqrt{r_t} dW_t^r, \\ r_0 &> 0, \end{aligned} \quad (2.20)$$

⁸Ein Martingal bezüglich einer Filtration \mathbb{F} ist ein \mathbb{F} -adaptierter stochastischer Prozess $\{M_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ mit $\mathbb{E}(|M_t|) < \infty \quad \forall t \in \mathbb{T}$ und $\mathbb{E}(M_t | \mathcal{F}_s) = M_s \quad \forall s, t \in \mathbb{T}$ mit $s \leq t$.

⁹Beim Übergang von \mathbb{P} zum risikoneutralen Maß \mathbb{Q} im Speziellen sind insbesondere die Sätze von Radon-Nikodym (vgl. z.B. (2007, [Els07])) und Girsanov (1944, [CM44]) bzw. (1960, [Gir60]) hilfreich.

beschrieben.

Der CIR-Prozess ist also ein Mean-Reversion Wurzel-Diffusions Prozess. Die Parameter sind dabei

- $\kappa_r > 0$, der Speed of Mean-Reversion Parameter, der die Rückstellkraft zum Mean-Reversion-Niveau Θ_r beeinflusst,
- $\Theta_r > 0$, das Mean-Reversion-Niveau, ist das langfristige Mittel um das die Short Rate pendelt und
- $\sigma_r > 0$, die sogenannte Vol of Rate, welche die Volatilität der Short Rate beeinflusst.

Die Annahmen $2\kappa_r\Theta_r \geq \sigma_r^2$ (Feller-Bedingung) und $r_0 > 0$ garantieren, dass fast sicher nur positive Werte für r_t auftreten. Gilt diese Bedingung nicht, so kann die Short Rate auch verschwinden, bzw. es gilt dann sogar, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein Zeitpunkt mit $r_t = 0$ existiert, gleich eins ist. Neben der Eigenschaft der Positivität ist für ein Short Rate Modell auch die Eigenschaft der Rückkehr zu einem Langzeitmittel wünschenswert. Durch die Verwendung eines Mean-Reversion Wurzel-Diffusion Prozesses sind beide Eigenschaften im CIR-Modell erfüllt.

Es lässt sich nun mit Hilfe des Satzes von Girsanov zeigen, dass im CIR-Modell ein risikoneutrales Maß \mathbb{Q} existiert¹⁰, unter welchem die \mathbb{Q} -Dynamiken der Short Rate gegeben sind durch

$$dr_t = (\kappa_r + \lambda_r\sigma_r) \left(\frac{\kappa_r\Theta_r}{\kappa_r + \lambda_r\sigma_r} - r_t \right) dt + \sigma_r\sqrt{r_t}d\widetilde{W}_t^r \quad (2.21)$$

$$= \widetilde{\kappa}_r \left(\widetilde{\Theta}_r - r_t \right) dt + \sigma_r\sqrt{r_t}d\widetilde{W}_t^r, \quad (2.22)$$

wobei \widetilde{W}^r mit

$$\widetilde{W}_t^r = W_t + \int_0^t \lambda_s ds$$

¹⁰Dies gilt auch nach der späteren Einbettung in entsprechende Kapitalmarktmodelle. Zu bemerken ist allerdings, dass \mathbb{Q} in den hier betrachteten Fällen nicht eindeutig ist, d.h. der Markt ist nicht vollständig. Dies wird verursacht durch die Tatsache, dass die Short Rate keinen Preis eines handelbaren Gutes darstellt.

ein entsprechender \mathbb{Q} -Wiener-Prozess ist mit dem Marktpreis des Zinsrisikos λ_r ¹¹. Des Weiteren werden folgende Größen verwendet:

$$\tilde{\kappa}_r = \kappa_r + \lambda_r \sigma_r, \quad \tilde{\Theta}_r = \frac{\kappa_r \Theta_r}{\kappa_r + \lambda_r \sigma_r}.$$

Wichtig zu erwähnen ist, dass λ_r nicht von der Laufzeit der Zero Bonds abhängig ist, d.h. für alle Zero Bond Preise gilt der gleiche Marktpreis für das Zinsrisiko¹². Dies stellt eine innere Konsistenzbedingung an den Bondmarkt dar.

Mit (2.19) folgt nun für den Zero Bond Preis zum Zeitpunkt t mit Laufzeit d und Restlaufzeit $(d - t)$ im CIR-Modell die Darstellung:

$$P(t, d) = A(t, d)e^{-B(t, d)r_t}, \tag{2.23}$$

wobei

$$A(t, d) = \left(\frac{2he^{(\tilde{\kappa}_r + h)(d-t)/2}}{(\tilde{\kappa}_r + h)(e^{h(d-t)} - 1) + 2h} \right)^{\frac{2\tilde{\kappa}_r \tilde{\Theta}_r}{\sigma_r^2}}, \quad B(t, d) = \frac{2e^{h(d-t)} - 1}{(\tilde{\kappa}_r + h)(e^{h(d-t)} - 1) + 2h}$$

mit

$$h = \sqrt{\tilde{\kappa}_r^2 + 2\sigma_r^2}.$$

2.2.2 Betrachtete Kapitalmarktmodelle

In allen im Folgenden betrachteten Kapitalmarktmodellen wird ein Bond Markt (zur Simulation der Rentenfonds) und ein Aktienmarkt (Aktienfonds) modelliert. Dabei bezeichnet S_t stets den Aktienpreis zum Zeitpunkt t , welcher erneut durch eine SDGL modelliert wird. S_0 ist stets ein positiver deterministischer Startwert. Der Bond Markt wird wie in Definition (2.2.3) über die Short Rate definiert.

Black-Scholes-Merton Modell

Das von Black und Scholes sowie Merton entwickelte und 1973 erstmals veröffentlichte Black-Scholes-Merton Modell (BSM-Modell, 1973, [BS73], [Mer73])) genießt trotz bzw.

¹¹ λ_r kann mit Hilfe des Itô-Lemmas über die Bond Preis Dynamiken bestimmt werden.

¹²Eine ausführliche Betrachtung findet sich beispielsweise in (2010, [Hau]).

oftmals auch gerade wegen seiner vereinfachenden Annahmen eine hohe Popularität. Im Gegensatz zu vielen anderen Kapitalmarktmodellen lässt sich eine explizite Lösung der Preisdynamik formulieren, was einen Vorteil sowohl für Anwendungszwecke als auch bei analytischen Fragestellungen darstellt. Viele Kapitalmarktmodelle können als Modifikationen bzw. Weiterentwicklungen des BSM-Modells betrachtet werden, weshalb das BSM-Modell auch als ausschlaggebend für die Entwicklung komplexerer Modelle gilt. 1997 wurden Merton und Scholes für die Entwicklung dieses Modells mit dem Nobelpreis für Ökonomie geehrt. Im Folgenden wird zuerst das klassische BSM-Modell und anschließend ein BSM-Modell erweitert mit einer CIR-Zinsstruktur formuliert.

Standard Black-Scholes-Merton Modell

Im BSM-Modell wird die Short Rate positiv und konstant angenommen, d.h. $r_t = r \geq 0$ für alle $t \geq 0$. Damit ergibt sich für den Zero Bond der in (2.18) gegebene Preis. Der Aktienpreis im BSM-Modell ist getrieben von der linearen stochastischen Differentialgleichung

$$dS_t = S_t \left((r + \lambda_s)dt + \sigma_s dW_t^S \right), \quad (2.24)$$

wobei $\lambda_s > 0$ die Risikoprämie der Aktie und $\sigma_s > 0$ die konstante annualisierte Volatilität der Aktie ist.

Der große Vorteil in diesem Modell ist es, dass die Lösung von (2.24) explizit bekannt ist und aufgrund der Eigenschaften des Wiener-Prozesses darüber hinaus für die Verteilung von S_t gilt:

$$S_t \sim \mathcal{LN} \left(\log(S_0) + \left(r + \lambda_s - \frac{1}{2}\sigma_s^2 \right) t, \sigma_s^2 t \right) \text{ und somit} \quad (2.25)$$

$$\log \left(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t} \right) \sim \mathcal{N} \left(\left(r + \lambda_s - \frac{1}{2}\sigma_s^2 \right) \Delta t, \sigma_s^2 \Delta t \right). \quad (2.26)$$

Dies ist insbesondere für analytische Fragestellungen sehr hilfreich. Diese Eigenschaft wirkt aber andererseits auch nachteilig, da die Annahme von normalverteilten Log>Returns die Modellierung sehr einschränkt, z.B. aufgrund der Symmetrie, da im Allgemeinen diese Annahme nicht mit den Marktbeobachtungen übereinstimmt.

CIR-Black-Scholes-Merton Modell

Eine erste Erweiterung des BSM-Modells ist das im Folgenden als CIR-BSM bezeichnete Kapitalmarktmodell. Im CIR-BSM wird das BSM-Modell um eine CIR-Short Rate erweitert, wodurch sich die Dynamiken des CIR-BSM zu

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t \left((r_t + \lambda_s)dt + \sigma_s dW_t^S \right), \\ dr_t &= \kappa_r (\Theta_r - r_t)dt + \sigma_r \sqrt{r_t} dW_t^r, \end{aligned} \quad (2.27)$$

ergeben, wobei die Parameter wie oben eingeführt zu wählen sind. Des Weiteren wird angenommen, dass W^S und W^r unabhängig sind, d.h. die Zufallskomponenten der Short Rate und des Aktienkurses sind unkorreliert.

Aufgrund der CIR Short Rate ergeben sich die Bond Preise in diesem Modell zu (2.23).

Stochastisches Volatilitätsmodell (Heston Modell - CIR-SV)

Es existiert eine Vielzahl von Erweiterungen des BSM-Modells, die eine realistischere Modellierung der Volatilität der Aktien ermöglichen. Hier wird ein erweitertes Heston Modell (CIR-SV, 1993, [Hes93]) betrachtet, das es erlaubt, das CIR-BSM um eine stochastische CIR-Volatilität V zu erweitern. Die Dynamiken ergeben sich hierbei zu

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t \left((r_t + \lambda_s)dt + \sqrt{V_t} dW_t^S \right), \\ dV_t &= \kappa_v (\Theta_v - V_t)dt + \sigma_v \sqrt{V_t} dW_t^V, \\ dr_t &= \kappa_r (\Theta_r - r_t)dt + \sigma_r \sqrt{r_t} dW_t^r, \end{aligned} \quad (2.28)$$

wobei V_t als die lokale Varianz des Spot-Preises S_t der Aktie zum Zeitpunkt t interpretiert werden kann. Die Volatilität wird also, wie die Short Rate, durch einen Mean-Reversion Wurzel-Diffusions Prozess beschrieben. Die zusätzlichen Parameter sind

- $\kappa_v > 0$, der Speed Mean-Reversion Parameter, der für den Drift zur durchschnittlichen Langzeitvolatilität steht,
- $\Theta_v > 0$, das Mean-Reversion-Niveau, welches die durchschnittliche Langzeitvolatilität beschreibt und
- $\sigma_v > 0$, die Vol of Vol, welche die Volatilität der Varianz darstellt.

Weiter wird für die Korrelationen der Wiener Prozesse angenommen, dass

$$dW_t^S dW_t^r = dW_t^V dW_t^r = 0, \quad dW_t^S dW_t^V = \rho$$

mit Korrelationskoeffizient $\rho \in [-1, 1]$ zwischen Spot Preis S_t und aktueller Varianz V_t . Dies erlaubt es, den gegenseitigen Einfluss von aktuellem Aktienpreis und Varianz anzugeben. So bewirkt $\rho < 0$, dass die Volatilität tendenziell steigt, wenn der Kurs fällt und umgekehrt. Im Gegensatz zum BSM-Modell ergeben sich im CIR-SV Modell schiefe Verteilungen für S_t . Mit der Bedingung $2\kappa_v\Theta_v \geq \sigma_v^2$ wird sichergestellt, dass der Varianzprozess fast sicher positiv ist.

Die Herleitung eines risikoneutralen Maßes \mathbb{Q} in einem Heston Modell findet sich zum Beispiel in (2006, [WH06]). Unter diesem ergibt sich erneut der in (2.23) beschriebene Wert für einen Zero Bond.

Bemerkung 2.2.4.

Wird im CIR-SV $\sigma_v = 0$ gesetzt, d.h. die Volatilität ist nicht mehr stochastisch sondern deterministisch, und $V_0 = \Theta_v = \sigma_s^2$, dann ist dieses identisch mit dem CIR-BSM Modell. Denn unter der Annahme von $\sigma_v = 0$ gilt für die SDGL der Volatilität die vereinfachte Darstellung:

$$dV_t = \kappa_v(\Theta_v - V_t)dt$$

und somit unter der Annahme $V_0 = \Theta_v (= \sigma_s^2)$:

$$V_t = \Theta_v (= \sigma_s^2).$$

3 Grundlagen der Entscheidungstheorie

In diesem Kapitel werden die Grundlagen der Entscheidungstheorie beschrieben, welche die Basis für die späteren quantitativen Analysen bilden. Die entscheidende Frage hierbei ist, welche Merkmale einer Anlage berücksichtigt werden müssen, um den Nutzen und damit die Präferenzen von Anlegern zu modellieren. Der Großteil dieser Modelle basiert auf der Erwartungsnutzentheorie, die einen rationalen Anleger unterstellt, der in erster Linie den Nutzen des Endvermögens maximieren möchte. Ihren modernen Ursprung hat sie in den Arbeiten von Von Neumann und Morgenstern (1945, [VNM45]), die Präferenzen unter bestimmten Axiomen mit Hilfe von Nutzenfunktionen beschreiben. Diese Art von Modellen wird im ersten Abschnitt genauer betrachtet. Empirische Untersuchungen widerlegen jedoch die Annahme eines rationalen Anlegers und zeigen, dass Anleger bei der Wahl von Anlagen systematisch die Erwartungsnutzentheorie verletzen¹. Insbesondere psychologische Aspekte, wie z.B. kognitive Verzerrungen, die in zahlreichen Arbeiten untersucht und belegt wurden, wie beispielsweise in (1982, [KST82]), (1990, [TJ90]), (1995, [Cam95]), (1998, [Rab98]), (2000, [KT00]) oder (2000, [Sta00]) werden nicht berücksichtigt. Aufgrund dieser Beobachtungen entwickelte sich ein neues Forschungsfeld, das heute im Allgemeinen als Behavioral Economics bzw. Verhaltensökonomie bezeichnet wird und im Speziellen die Behavioral Finance als Teilgebiet umfasst. Es ist inzwischen eine Vielzahl an Modellen und Theorien entwickelt worden, die versuchen die Schwächen der Erwartungsnutzentheorie zu beheben bzw. den Nutzen aus einer anderen Sichtweise zu beschreiben. Die aussichtsreichste Theorie im finanzwirtschaftlichen Bereich ist die Prospect Theorie, die von Tversky und Kahneman 1979 in *Prospect Theory: An analysis of decision under risk* (1979, [KT79]) erstmals in dieser Form beschrieben wurde. Da-

¹Vergleiche dazu auch Allais (1953, [All53]).

niel Kahneman² wurde im Jahr 2002 für diese Ideen mit dem Nobelpreis für Ökonomie ausgezeichnet. Die grundlegendsten Unterschiede der Prospect Theorie zur Erwartungsnutzentheorie liegen darin, dass zum einen der Nutzen über Gewinne und Verluste³ definiert wird anstatt über den Endwert des Vermögens. Des Weiteren werden subjektive Merkmale des Anlegers modelliert, wie eine subjektive Wahrscheinlichkeitsgewichtung. Aufgrund dieser und weiterer Modellierungsmöglichkeiten bietet die Prospect Theorie einen Erklärungsansatz, warum sich ein Anleger bei gleichem Endvermögen für eine bestimmte Anlage und gegen eine andere Anlage entscheidet und bietet daher eine ideale Grundlage zur Untersuchung von verschiedenen Finanzprodukten und deren optimalen Zusammenstellung aus einem weiteren Blickwinkel⁴. Aktuelle Arbeiten, wie beispielsweise *Prospect theory around the world* von Rieger, Wang und Hens (2011, [RWH11]), untermauern zudem die Aussagekraft dieser Theorie, indem sie zeigen, dass Anleger bei ihren Entscheidungen, den von der Prospect Theorie berücksichtigten Faktoren folgen, d.h. Risikoaversion bei Gewinnen, Risikoaffinität bei Verlusten, Übergewichtung von kleinen und Untergewichtung von großen Wahrscheinlichkeiten sowie Verlustaversion. Diese Theorie wird im zweiten Abschnitt dieses Kapitels ausführlich betrachtet und in einer für diese Arbeit geeigneten Form aufbereiten. Ausführliche Einführungen in die Behavioral Finance und die Prospect Theorie finden sich z.B. in den Arbeiten von Barberis und Thaler: *A survey of behavioral finance* (2003, [BT03]), Hens und Rieger: *Financial Economics: A Concise Introduction to Classical and Behavioral Finance* (2010, [HR10]) sowie Wakker: *Prospect theory: For risk and ambiguity* (2010, [Wak10]), auf denen die Grundlagen dieses Kapitels basieren.

²Eine ausführliche Autobiografie findet sich unter:

http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/2002/kahneman.html.

³Diese Idee wurde erstmals von Markowitz in (1952, [Mar52b]) eingeführt.

⁴Vgl. hierzu z.B. die Untersuchungen von Dichtl und Drobetz zum optimalen Design von Finanzprodukten im Hinblick auf Prospect Theorie Anleger in (2011, [DD11]), die den Nutzen von Portfolioversicherungen erklären oder auch die Arbeit von Døskeland und Nordahl zur optimalen Lebens- und Rentenversicherung (2008, [DN08]), die zeigt, dass der Nutzen einer Garantie bei traditionellen Verträgen erst unter der Annahme der kumulativen Prospect Theorie erklärt werden kann, unter welcher ein Vertrag mit Garantie optimal ist, während unter dem herkömmlichen Erwartungsnutzenansatz stets ein Vertrag ohne Garantie optimal ist. Ebert, Koos und Schneider untersuchen diese Effekte für kumulative Prospect Theorie Anleger in (2012, [EKS12]) ausführlich.

3.1 Erwartungsnutzentheorie

Die Erwartungsnutzentheorie (ENT) hat ihren historischen Ursprung im 18. Jahrhundert in den Arbeiten von Nicholas und Daniel Bernoulli (1738, [Ber38]). Trotzdem wurde sie erst in der Mitte des 20. Jahrhunderts, insbesondere aufgrund der Arbeit von Von Neumann und Morgenstern (1945, [VNM45]), die eine axiomatische Herleitung der ENT beschreiben, voll akzeptiert. Die Axiome der ENT, welche die Betrachtung eines rationalen Anlegers sinnvoll ermöglichen, sind demnach Vollständigkeit, Transitivität, Unabhängigkeit und Stetigkeit⁵. Auf diese Herleitung soll im Folgenden nicht näher eingegangen werden, stattdessen werden direkt die daraus resultierenden und für diese Arbeit interessanten Ergebnisse betrachtet.

Definition 3.1.1 (Lotterie).

Eine Lotterie A definiert eine Menge an möglichen Ereignissen mit den zugehörigen Endwerten und Wahrscheinlichkeiten, d.h. A ist definiert über eine Zufallsvariable $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, welche die möglichen Endwerte der Lotterie A über Wahrscheinlichkeiten beschreibt.

Definition 3.1.2 (Nutzenfunktion).

Eine stetige Funktion $u : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ($\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$) wird Nutzenfunktion genannt, falls u strikt monoton wachsend ist.

Definition 3.1.3 ((Von Neumann, Morgenstern) Erwartungsnutzen).

Sei A eine Lotterie und μ_X das entsprechende Wahrscheinlichkeitsmaß der Endwerte X auf \mathbb{R} sowie u eine Nutzenfunktion (o.B.d.A. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$), dann ist der Erwartungsnutzen definiert über

$$ENT(A) := \mathbb{E}[u(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) d\mu_X. \quad (3.1)$$

Wahl der Nutzenfunktion

Wie bereits oben eingeführt muss eine Nutzenfunktion in der ENT monoton wachsend und stetig sein. Diese Bedingungen sind aber nur die Grundvoraussetzungen. Um bestimmte Eigenschaften von Anlegern zu modellieren, müssen weitere mögliche Eigenschaften einer Nutzenfunktion beschrieben werden.

⁵Eine derartige axiomatische Theorie wird auch normativ genannt.

Eine entscheidende Eigenschaft eines Anlegers ist seine Risikoaversion bzw. Risikoaffinität, die auf folgende Weise modelliert wird:

Definition 3.1.4 (Konkavität).

Eine Nutzenfunktion $u \in \mathcal{C}^2$ ist (strikt) konkav, wenn $u''(<) \leq 0$.

Definition 3.1.5 (Konvexität).

Eine Nutzenfunktion $u \in \mathcal{C}^2$ ist (strikt) konvex, wenn $u''(>) \geq 0$.

Definition 3.1.6 (Risikoaversion).

Wenn u strikt konkav ist, dann heißt ein Anleger mit der Nutzenfunktion u in der ENT risikoavers.

Definition 3.1.7 (Risikoaffinität).

Wenn u strikt konvex ist, dann heißt ein Anleger mit der Nutzenfunktion u in der ENT risikoaffin.

Definition 3.1.8 (Risikoneutral).

Wenn u konvex und konkav für alle x ist, dann heißt ein Anleger mit der Nutzenfunktion u in der ENT risikoneutral.

Ein Maß das die Risikoaversion eines Anlegers misst wurde von Pratt in (1964, [Pra64]) beschrieben:

Definition 3.1.9 (Risikoaversionsmaß).

Sei u eine Nutzenfunktion, dann ist das Risikoaversionsmaß $r(x)$ definiert durch

$$r(x) := -\frac{u''(x)}{u'(x)}. \quad (3.2)$$

Bemerkung 3.1.10.

Die zweite Ableitung der Nutzenfunktion reicht als Maß für die Risikoaversion nicht aus, da eine affine Transformation der Nutzenfunktion keinen Einfluss auf das Maß haben darf. Es gilt, dass $r < 0$ risikoaffine Anleger und $r > 0$ risikoaverse Anleger beschreibt und außerdem, je größer r desto risikoaverser der Anleger ist.

Mit Hilfe des Risikoaversionsmaßes können Nutzenfunktionen in bestimmte Klassen unterteilt werden:

Definition 3.1.11 (CARA Nutzenfunktion).

Eine Nutzenfunktion heißt CARA (Constant Absolute Risk Aversion), falls das Risikoaversionsmaß $r(x)$ konstant für alle x ist.

Eine CARA Nutzenfunktion unterstellt also, dass die Risikoeinstellung unabhängig von der Höhe des Endwertes bzw. Vermögens ist. Eine etwas realistischere Annahme ist, dass die Risikoeinstellung sich proportional zum Endwert verändert. Genau diese Eigenschaft lässt sich mit Hilfe von CRRA Nutzenfunktionen beschreiben.

Definition 3.1.12 (CRRA Nutzenfunktion).

Eine Nutzenfunktion heißt CRRA (Constant Relative Risk Aversion), falls das relative Risikoaversionsmaß

$$rr(x) := xr(x) \tag{3.3}$$

konstant für alle x ist.

Eine Verallgemeinerung dieser Nutzenfunktionen wird durch die HARA (Hyperbolic Absolute Risk Aversion) Nutzenfunktionen, die CRRA und CARA Nutzenfunktionen beinhalten, gegeben:

Definition 3.1.13 (HARA Nutzenfunktion).

Eine Nutzenfunktion heißt HARA (Hyperbolic Absolute Risk Aversion), falls Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ existieren, sodass

$$\frac{1}{r(x)} = a + bx \tag{3.4}$$

gilt, d.h. $\frac{1}{r(x)}$ ist eine affine Funktion in x .

Bemerkung 3.1.14 (HARA-Charakterisierung durch Merton (1990, [MS90])).

Eine Nutzenfunktion $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist HARA genau dann, wenn sie durch eine affine Transformation einer der folgenden Funktionen darstellbar ist:

$$u_1(x) := \log(x + a), \quad u_2(x) := -a \exp\left(-\frac{x}{a}\right), \quad u_3(x) := \frac{(a + bx)^{\frac{b-1}{b}}}{b-1}, \tag{3.5}$$

wobei $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ beliebige Konstanten sind ($b \notin \{0, 1\}$ für u_3 und $a \neq 0$ für u_2).

Alle Nutzenfunktionen, die im Weiteren betrachtet werden, gehören zu diesen Klassen von Nutzenfunktionen, insbesondere sind sie stets HARA. Es werden nun ein paar Beispiele gegeben, die in den späteren Analysen angewendet werden. Diese beinhalten, um ein möglichst vollständigen Eindruck zu erhalten, eine CARA, eine CRRA und eine Nutzenfunktion, die lediglich HARA ist:

Beispiel 3.1.15 (Nutzenfunktionen).

- Power Nutzenfunktion:

$$u(x) := \frac{1}{\alpha} x^\alpha, \quad \alpha > 0 \tag{3.6}$$

- Exponential Nutzenfunktion:

$$u(x) := \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha x}), \quad \alpha > 0 \tag{3.7}$$

- Quadratische Nutzenfunktion:

$$u(x) := x - \frac{1}{\alpha} x^2, \quad \alpha > 0, \quad x \leq \frac{\alpha}{2}. \tag{3.8}$$

Der Parameter α ist maßgebend für die Risikoaversion bzw. -affinität des Anlegers. So ist für $\alpha < 1$ in der Power Nutzenfunktion der Anleger risikoavers und für $\alpha > 1$ risikoaffin (vgl. auch mit Definition 3.1.9). Die Exponential und die Quadratische Nutzenfunktion modellieren in den hier verwendeten Formulierungen für alle $\alpha > 0$ risikoaverse Anleger. Anhand der Eigenschaften in Tabelle 3.1 ist erkennbar, dass die Power Nut-

Klasse	ARA $r(x)$	RRA $rr(x)$	weitere Eigenschaften
Power	↘	konstant	risikoavers für $\alpha < 1$, risikoaffin für $\alpha > 1$
Expo	konstant	↗	beschränkt durch $1 : \alpha$
Quad	↗	↗	beschränkt durch $\alpha : 4$

Tabelle 3.1: Eigenschaften bestimmter HARA-Nutzenfunktionen.

zenfunktion CRRA und die Exponential Nutzenfunktion CARA ist. Die Quadratische Nutzenfunktion gehört zu keiner der beiden Klassen und ist somit lediglich HARA. Im

Gegensatz zu der Power Nutzenfunktion sind die Exponential und die Quadratische Nutzenfunktion nach oben beschränkt. Während die Exponential Nutzenfunktion trotzdem auf ganz \mathbb{R}_+ die strenge Monotonie erfüllt, ist die Quadratische Nutzenfunktion nur bis zum Maximum der verwendeten Parabel monoton wachsend. In Abbildung 3.1 werden diese Charakteristiken der drei Nutzenfunktion nochmals veranschaulicht. Die Quadratische Nutzenfunktion wird zur Verwendung auf ganz \mathbb{R}_+ ab dem Maximum konstant gesetzt.

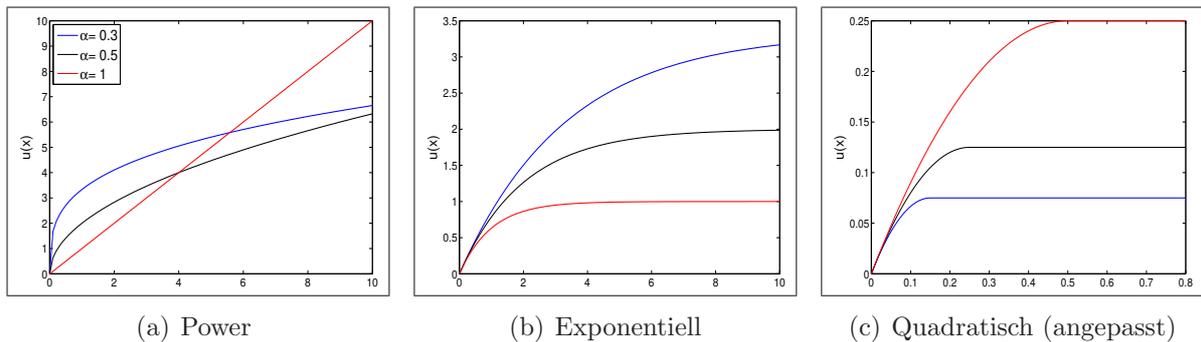


Abbildung 3.1: Nutzenfunktionen für unterschiedliche α .

Um in den späteren Analysen in Kapitel 5.2 einen möglichst vollständigen Eindruck zu erhalten, werden alle hier vorgestellten Nutzenfunktionen für verschiedene Parameter betrachtet.

3.2 Prospect Theorie

Die Prospect Theorie (PT) ist durch vier entscheidende Unterschiede zur Erwartungsnutzentheorie charakterisiert⁶:

- Der Nutzen ist über Gewinne und Verluste mit Bezug zu einem Referenzpunkt, den sogenannten „Prospects“, und nicht über Endwerte definiert.

⁶vgl. z.B. (2011, [RWH11]). Oftmals wird die Prospect Theorie in eine Editing- und eine Evaluierungsphase unterteilt. In dieser Arbeit werden hauptsächlich die Komponenten der Evaluierungsphase beschrieben. In die Editingphase lässt sich beispielsweise die Auswahl eines geeigneten neutralen Referenzpunktes (auch Coding genannt) und die darauf aufbauende Bestimmung der Gewinne und Verluste zum Referenzpunkt (Framing) einordnen.

- Die Sensitivität im Bezug auf Gewinne und Verluste unterscheidet sich, was sich im Allgemeinen in einer geknickten „S-förmigen“ Wertefunktion v ausdrückt.
- Verluste wirken stärker als Gewinne, d.h. es wird ein Verlustaversionsparameter λ eingeführt.
- Geringe bzw. hohe Wahrscheinlichkeiten werden tendenziell über- bzw. unterschätzt, was durch eine nicht-lineare Wahrscheinlichkeitsgewichtsfunktion w erreicht wird.

3.2.1 Ursprüngliche Prospect Theorie

Die von Tversky und Kahneman 1979 eingeführte Prospect Theorie in ihrer ursprünglichen Form verwendet die Idee, den subjektiven Nutzen einer Lotterie A mit n möglichen Ereignissen e_1, \dots, e_n und zugehörigen Wahrscheinlichkeiten p_1, \dots, p_n durch eine bestimmte Art von Nutzenfunktion v , die den Nutzen über Gewinne und Verluste und nicht über Endwerte definiert, und einer Wahrscheinlichkeitsgewichtsfunktion w , die reale Wahrscheinlichkeiten in subjektive Wahrscheinlichkeiten transformiert, zu bestimmen.

Im Folgenden seien x_1, \dots, x_n die entstehenden Gewinne und Verluste bezüglich eines Referenzpunktes zu den möglichen Lotterie Ereignissen.

Definition 3.2.1 ((PT-) Wertefunktion).

Eine stetige Funktion $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wird Wertefunktion genannt, falls

1. *v strikt monoton wachsend ist und*
2. *$v(0) = 0$ (Referenzpunkt).*

Gilt zusätzlich, dass

3. *$v(x)$ strikt konvex ist für $x < 0$ (abnehmende Verlustsensitivität),*
4. *$v(x)$ strikt konkav für $x > 0$ (abnehmende Gewinnsensitivität) und*
5. *$|v(-x)| > -v(x)$ (Verlustaversion),*

so wird sie PT-Wertefunktion genannt.

Die Bedingungen 3.- 5. in Definition 3.2.1 spiegeln die ursprünglichen Ideen der Prospect Theorie wider und sind in der analytischen Betrachtung der Theorie sehr wichtig. Empirische Untersuchungen, z.B. in (2011, [RWH11]), untermauern diese Bedingungen im Allgemeinen und belegen in der durchschnittlichen Betrachtung eine klare Tendenz zur Risikoaversion von Anlegern. Da in dieser Arbeit aber auch der Frage nachgegangen werden soll, welche Anleger sich für welche Art von Anlagen entscheiden würden, wird in dieser Arbeit die Klasse von möglichen Präferenzen von Anlegern erweitert, um sowohl einen Eindruck von risikoaversen als auch risikoaffinen Investoren zu erhalten. Es werden deshalb auch Parameter betrachtet, für welche eine ursprüngliche PT-Wertefunktion nicht mehr alle Bedingungen in Definition 3.2.1 erfüllt.

Definition 3.2.2 (PT-Wahrscheinlichkeitsgewichtsfunktion).

Eine stetige Funktion $w : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ wird Wahrscheinlichkeitsgewichtsfunktion genannt, falls

1. *w strikt monoton wachsend,*
2. *$w(0) = 0$ und $w(1) = 1$,*
3. *$w(p) > p$ für $0 < p \ll 1$ und $w(p) < p$ für $0 \ll p < 1$.*

Die dritte Bedingung an die PT-Wahrscheinlichkeitsgewichtsfunktion bewirkt die subjektive Verzerrung der realen Wahrscheinlichkeiten. Dabei verursacht $w(p) > p$ für $0 < p \ll 1$ die Übergewichtung seltener Ereignisse und $w(p) < p$ für $0 \ll p < 1$ die Untergewichtung häufiger Ereignisse.

Definition 3.2.3 (PT-Nutzen).

Der Prospect Theorie Nutzen einer Lotterie A mit n möglichen Ereignissen e_1, \dots, e_n und zugehörigen Gewinnen und Verlusten x_1, \dots, x_n sowie Wahrscheinlichkeiten p_1, \dots, p_n mit $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ ist definiert durch

$$PT(A) := \sum_{i=1}^n v(x_i)w(p_i), \tag{3.9}$$

wobei $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Wertefunktion und $w : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ die Wahrscheinlichkeitsgewichtsfunktion ist.

Ein großer Nachteil der ursprünglichen Prospect Theorie ist, dass durch eine starke Übergewichtung von kleinen Wahrscheinlichkeiten viele Probleme entstehen können, so kann sich der subjektive Nutzen von sehr ähnlichen Lotterien sehr stark unterscheiden und dadurch die Aussagekraft einschränken. Außerdem sind in diesem Modell auch keine stetigen Verteilungen der Lotteriereignisse möglich. Um dieses Problem zu beseitigen erarbeiteten Tversky und Kahneman (1992, [TK92]) eine Modifikation der ursprünglichen Prospect Theorie.

3.2.2 Kumulative Prospect Theorie

In der (diskreten) kumulativen Prospect Theorie (CPT) werden in der Definition des subjektiven Nutzen einer Lotterie A mit n möglichen Gewinnen und Verlusten $x_1 < \dots < x_n$ und Wahrscheinlichkeiten p_1, \dots, p_n , die Wahrscheinlichkeiten p_1, \dots, p_n durch die Differenzen von kumulierten Wahrscheinlichkeiten ersetzt. Im Einzelnen wird im Fall von Verlusten ($x_i < 0$) anstatt p_i , $F_i - F_{i-1}$ verwendet, wobei $F_i := \sum_{j=1}^i p_j$ die kumulierte Wahrscheinlichkeit darstellt und im Fall von Gewinnen ($x_i \geq 0$) anstatt p_i , $\bar{F}_i - \bar{F}_{i-1}$ verwendet, wobei $\bar{F}_i := \sum_{j=i+1}^n p_j = 1 - F_i$ die „dekumulierte“ Wahrscheinlichkeit darstellt. Der subjektive (D)CPT-Nutzen wird nun im diskreten Fall durch

$$(D)CPT(A) := \sum_{i=1}^n v(x_i) \left((w(F_i) - w(F_{i-1})) \mathbb{1}_{x_i < 0} + (-(w(\bar{F}_i) - w(\bar{F}_{i-1}))) \mathbb{1}_{x_i \geq 0} \right),$$

definiert, wobei wieder $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Wertefunktion und $w : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ die Wahrscheinlichkeitsgewichtsfunktion ist.

Aufbauend auf dieser Idee kann nun auch für beliebige Verteilungen der kumulative Prospect Theorie Nutzen definiert werden.

Definition 3.2.4 (CPT-Nutzen).

Sei μ ein beliebiges Wahrscheinlichkeitsmaß, w und v wie oben, dann ist der subjektive Nutzen in der kumulativen Prospect Theorie über

$$CPT(\mu) := \int_{-\infty}^0 v(x) d(w(F(x))) + \int_0^{\infty} v(x) d(-w(1 - F(x))), \quad (3.10)$$

mit $F(s) = \int_{-\infty}^s d\mu$ definiert.

Dies ist die natürliche Verallgemeinerung des diskreten Falles⁷, da diese durch die Wahl von Diracmaßen wieder auf die oben eingeführte Form reduziert werden kann.

Bemerkung 3.2.5.

Der CPT-Nutzen aus Definition 3.2.4 besitzt einige Spezialfälle:

1. Falls w und F differenzierbar sind, gilt die äquivalente Darstellung:

$$\begin{aligned} CPT(\mu) &= \int_{-\infty}^0 v(x) \left(\frac{d}{ds} w(F(s)) \Big|_{s=x} \right) dx \\ &\quad + \int_0^{\infty} v(x) \left(\frac{d}{ds} (-w(1 - F(s))) \Big|_{s=x} \right) dx. \end{aligned}$$

2. Wird $w(p) = p$ gewählt, wird also keine Wahrscheinlichkeitsgewichtung vorgenommen, dann ist der CPT-Nutzen genau der Erwartungswert einer Zufallsvariable X mit entsprechender Verteilung unter v , d.h.

$$CPT(\mu_X) = \int_{-\infty}^{\infty} v(x) dF(s) = \mathbb{E}[v(X)].$$

3. Für eine Lotterie A , deren mögliche Verluste und Gewinne durch eine Zufallsvariable $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dargestellt werden kann, wird im Weiteren stets die Notation $CPT(X)$ oder $CPT(A)$ für $CPT(\mu_X)$ verwendet.

Die auf diese Weise definierte CPT, bietet nicht nur die oben bereits beschriebene Möglichkeit stetige Verteilungen zu betrachten, sondern ist auch bezüglich der theoretischen Eigenschaften interessant. So verletzt die CPT das Konzept der stochastischen Dominanz nicht, d.h. dominiert Lotterie A stochastisch Lotterie B so gilt auch $CPT(A) \geq CPT(B)$ ⁸. Des Weiteren ist sie nicht mehr so extrem von einzelnen Ereignissen abhängig wie die ursprüngliche PT. Es lässt sich sogar zeigen, dass unter der Voraussetzung, dass w stetig differenzierbar und v stetig ist, gilt, dass der CPT-Nutzen eine speziell definierte Stetigkeit bezüglich der Lotterie besitzt⁹. Dies bedeutet, dass die Sensitivität des CPT-Nutzen auf einzelne extreme Ausreißer nicht besonders hoch ist.

⁷Vgl. z.B. auch (2008, [BH08]).

⁸Eine Lotterie A dominiert eine Lotterie B stochastisch (erster Ordnung), wenn für jeden möglichen Endwert die Wahrscheinlichkeit, dass A mindestens diesen Endwert erreicht größer oder gleich der Wahrscheinlichkeit ist, dass B mindestens diesen Endwert erzielt. Siehe z.B. in (2006, [Lev06]).

⁹Eine genaue Beschreibung findet sich in (2010, [HR10]).

3.2.3 Wahl der Funktionen

Wahl der Wertefunktion

Die Auswahl der Wertefunktionen ist entscheidend für die Ergebnisse und sollte dementsprechend sorgfältig angegangen werden. Bei der Wahl der Wertefunktionen werden typischerweise leicht abgeänderte Funktionen aus der Erwartungsnutzentheorie angewendet. Eine Beschreibung und Untersuchung zahlreicher Wertefunktionen wird z.B. von Stott in (2006, [Sto06]) gegeben. Aufgrund unterschiedlicher Arbeiten von u.a. Tversky und Kahneman (1979, [KT79]), De Georgi und Hens (2006, [DGH06]) oder Hens und Rieger (2009, [HR09]) werden die folgenden drei oft verwendeten Wertefunktionen im Bereich Finance im Weiteren betrachtet:

- Power Wertefunktion:

$$v(x) := \begin{cases} x^\alpha, & x \geq 0 \\ -\lambda|x|^\beta, & x < 0 \end{cases}, \quad (3.11)$$

- Exponential Wertefunktion:

$$v(x) := \begin{cases} \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha x}), & x \geq 0 \\ -\frac{\lambda}{\beta}(1 - e^{\beta x}), & x < 0 \end{cases}, \quad (3.12)$$

- Quadratische Wertefunktion:

$$v(x) := \begin{cases} \frac{\alpha}{4}, & x \geq \frac{\alpha}{2} \\ x - \frac{1}{\alpha}x^2, & 0 \leq x < \frac{\alpha}{2} \\ \lambda(x + \frac{1}{\beta}x^2), & -\frac{\beta}{2} < x < 0 \\ -\lambda\frac{\beta}{4}, & x \leq -\frac{\beta}{2} \end{cases}, \quad (3.13)$$

wobei $\lambda > 0$, der Verlustavversionsparameter, der einen Teil der Risikoaversion ($\lambda > 1$, in der PT üblich) bzw. der Risikoaffinität ($\lambda < 1$) des Anlegers ausdrückt ist und $\alpha \in \mathbb{R}_+$ sowie $\beta \in \mathbb{R}_+$, welche die unterschiedliche Sensitivität (Konvexität bzw. Konkavität) auf Verluste und Gewinne bestimmen. In der PT wird für die Power Nutzenfunktion (3.11) üblicherweise $\alpha, \beta \leq 1$ gewählt. Oftmals wird $\alpha = \beta$ gesetzt, was bedeutet, dass

Funktion	PT-Werte -funktion für	Nutzen		sonstige Eigenschaften
		Verluste	Gewinne	
Power	$\alpha \in (0, 1)$ $\lambda > 1$	- unbeschränkt - Sensitivität \searrow für $\alpha \in (0, 1)$ - Sensitivität \nearrow für $\alpha > 1$	- unbeschränkt - Sensitivität \searrow für $\alpha \in (0, 1)$ - Sensitivität \nearrow für $\alpha > 1$	hohe Auswirkung extremer Ereignisse
Expo	$\alpha > 0$ $\lambda > 1$	- beschränkt durch $-\frac{\lambda}{\alpha}$ - Sensitivität \searrow	- beschränkt durch $\frac{1}{\alpha}$ - Sensitivität \searrow	
Quad	$(\alpha > 0$ $\lambda > 1)$	- beschränkt durch $-\lambda\frac{\alpha}{2}$ - Sensitivität \searrow	- beschränkt durch $\frac{\alpha}{2}$ - Sensitivität \searrow	konstant für $x \leq -\frac{\alpha}{2}$ und $x \geq \frac{\alpha}{2}$

Tabelle 3.2: Eigenschaften der Wertefunktionen ($\alpha = \beta$).

Die Quadratische Wertefunktion erfüllt nie die Voraussetzung der strikten Monotonie und Krümmung auf ganz \mathbb{R} , weswegen sie im engeren Sinn nicht zu den PT-Wertefunktionen gezählt werden kann. Bis auf diese Einschränkung erfüllt sie allerdings die Bedingungen unter geeigneter Parameterwahl.

die Gewinn- und Verlustsensitivität identisch ist und der Unterschied zwischen Gewinnen und Verlusten lediglich durch den Verlustaversionsparameter λ beschrieben wird. Dies erleichtert die Parametersensitivitätsanalysen und wird aufgrund experimenteller Ergebnisse z.B. für die Power Wertefunktion in (1992, [TK92]), (1994, [CH94]) oder (1995, [TF95]) oftmals angenommen (vgl. z.B. auch (2006, [Sto06]), (2007, [HW07]) oder (2008, [BH08]))¹⁰.

Die Power Wertefunktion ist die ursprünglich von Tversky und Kahneman betrachtete Wertefunktion, die jedoch aufgrund der Unbeschränktheit den „Nachteil“ hat¹¹, dass extreme Ereignisse sehr hohe Auswirkungen haben können. Die Exponential Wertefunktion, die insbesondere aufgrund ihrer analytischen Vorteile häufig verwendet wird, ist dagegen beschränkt und berücksichtigt dadurch extreme Ereignisse schwächer. Eine weitere interessante Wertefunktion ist die in (2007, [DS07]), (2009, [HR09]) und (2009,

¹⁰Neben dem Vorteil, dass in den Analysen ein Parameter weniger betrachtet werden muss, wird dadurch auch der Quotient zwischen α und β auf eins festgelegt. Das ist von Bedeutung, da λ teilweise sehr sensitiv auf der Quotient zwischen α und β reagiert (vgl. (2011, [RWH11])). Durch das Fixieren des Quotienten kann diese Sensitivität in den Analysen vernachlässigt werden.

¹¹vgl. (2010, [HR10]).

[ZK09]) verwendete Quadratische Wertefunktion¹², mit der auch eine Verbindung zur Mean-Variance Theorie¹³ (vgl. (2010, [HR10])) hergestellt werden kann.

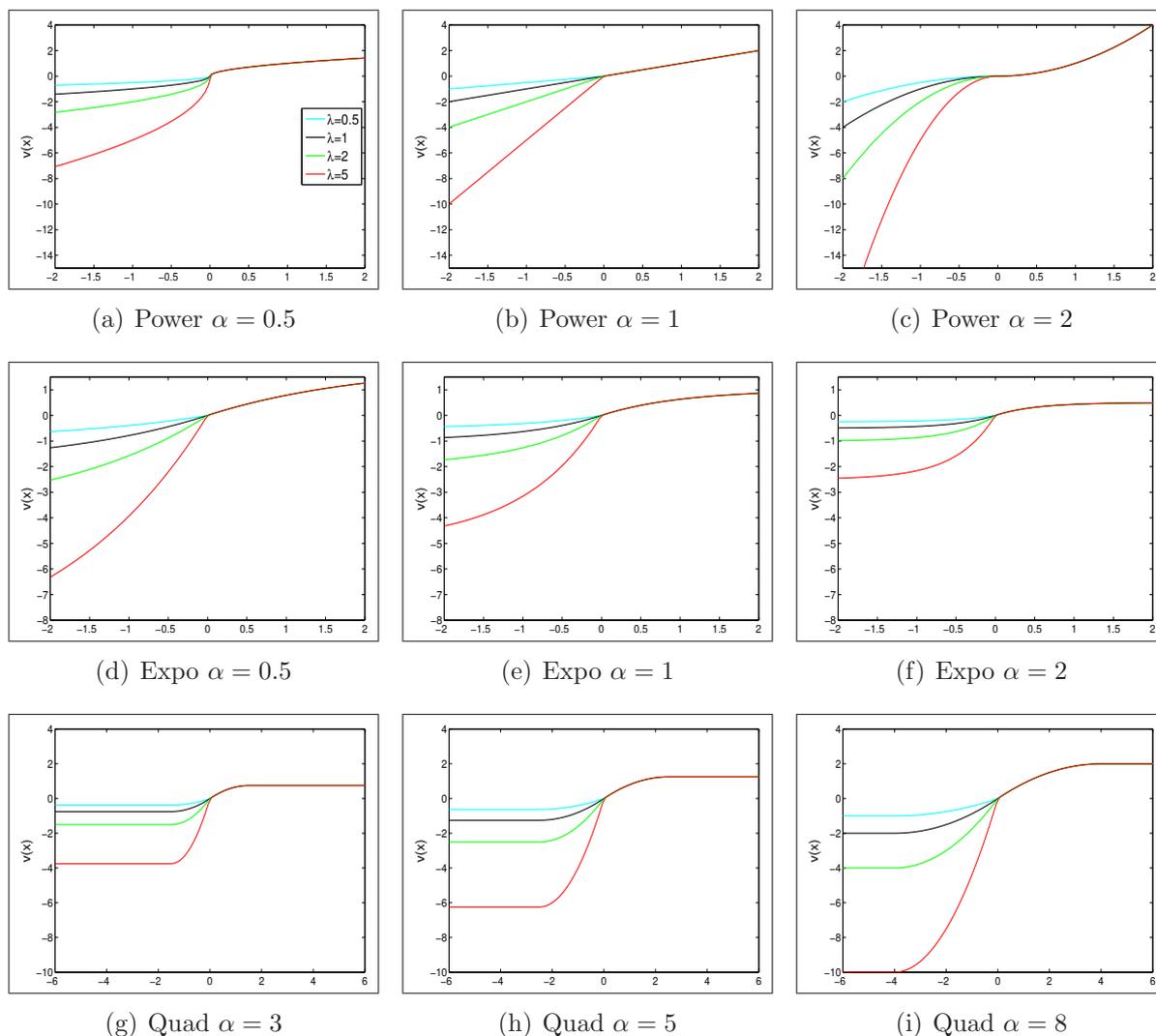


Abbildung 3.2: Wertefunktionen für unterschiedliche λ und α .

¹²Es wird eine Modifikation betrachtet, die konstant ist ab einem bestimmten Wert. Anderenfalls würde der Nutzen ab einem bestimmten positiven bzw. negativen Wert wieder abnehmen bzw. zunehmen.

¹³Die Mean-Variance Theorie oder Portfoliotheorie, die auf den Arbeiten von Markowitz (1952, [Mar52a]) basiert, ist neben der Erwartungsnutzentheorie eine der gängigsten Entscheidungstheorien im finanzwirtschaftlichen Bereich. Für eine Mean-Variance Modellierung müssen die Parameter $\alpha < 0$ und $\beta > 0$ gewählt werden. Es ist allerdings zu bemerken, dass unter einer Mean-Variance Modellierung diese für keine Parameterwahl gleichzeitig eine PT-Wertefunktion darstellt, da die Verlustsensitivität stets zunehmend ist.

Einen Überblick über die Eigenschaften der vorgestellten Wertefunktionen gibt die Tabelle 3.2. Die Abbildung 3.2 veranschaulicht diese zudem für einige Parameter. Die Wahl der Parameter ist mit Unsicherheiten behaftet, weshalb in den späteren Untersuchungen Parameteranalysen durchgeführt werden, die die Sensitivität und Stabilität des CPT-Nutzen bezüglich verschiedener Parameter untersucht. Oftmals werden für die Power Nutzenfunktion im Fall $\alpha = \beta$ für α Werte zwischen 0,65 und 0,85¹⁴ verwendet und für λ wird von Tversky und Kahneman ein Wert in der Größenordnung von 2,25 vorgeschlagen. Diese Größenordnungen sind für die späteren Analysen nicht ausschlaggebend, da nicht nur durchschnittliche Anleger betrachtet werden sollen, sondern bestimmte Typen von Anlegern mit unterschiedlichen Risikocharakteristiken. Allerdings geben sie ein erstes Gefühl für plausible Größenordnungen, die in den späteren Analysen untersucht werden sollten. Empirische Untersuchungen¹⁵ zeigen des Weiteren, dass die Parameter auch von den kulturellen und ökonomischen Faktoren in verschiedenen Ländern abhängen, was die Notwendigkeit einer möglichst ausführlichen Parameteranalyse unterstreicht.

Wahl der Wahrscheinlichkeitsgewichtsfunktion

Die *Wahrscheinlichkeitsgewichtsfunktion* $w : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ermöglicht es reale Wahrscheinlichkeiten in subjektive Wahrscheinlichkeiten zu transformieren. Dies wird insbesondere dazu genutzt, seltene Ereignisse zu übergewichten, d.h. es wird eine überproportionale Sensitivität bezüglich seltener Ereignisse modelliert. Diese Modellierung ist begründet durch psychologische Untersuchungen z.B. von Tversky und Kahneman in (1979, [KT79]), die belegen, dass Anleger bzw. Personen in verschiedenen Situationen dazu tendieren die Wahrscheinlichkeiten von seltenen Ereignissen stärker zu berücksichtigen.

Bei der Form der Wahrscheinlichkeitsgewichtsfunktion gibt es eine Vielzahl von verschiedenen Ausgestaltungen. Eine ausführliche Beschreibung und Untersuchung zahlreicher Wahrscheinlichkeitsgewichtsfunktionen kann in Stott (2006, [Sto06]) gefunden werden. In der vorliegenden Arbeit werden exemplarisch zwei häufig verwendete einparametrische Möglichkeiten genauer betrachtet. Die erste ist die klassische Wahrscheinlichkeits-

¹⁴Vgl. hierzu auch die Ausführungen in (2010, [HR10]) und die Angaben in (2006, [Sto06]).

¹⁵Siehe z.B. (2007, [HW07]) oder (2011, [RWH11]).

gewichtsfunktion die Tversky und Kahneman in (1992, [TK92])¹⁶ verwenden.

- Tversky Kahneman Wahrscheinlichkeitsgewichtsfunktion:

$$w(p) := \frac{p^\gamma}{(p^\gamma + (1-p)^\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}} \text{ mit } \gamma \in (0.28, 1] \quad (3.14)$$

in der PT bzw.

$$w(F(s)) := \frac{F(s)^\gamma}{(F(s)^\gamma + (1-F(s))^\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}} \text{ mit } \gamma \in (0.28, 1],$$

in der CPT,

wobei die untere Grenze für γ so gewählt ist, dass $w(p)$ streng monoton wachsend für $p \in [0, 1]$ ist.

Die erste Ableitung ergibt sich dann zu

$$\frac{d}{dp} w(p) = \frac{p^\gamma}{(p^\gamma + (1-p)^\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}} \left(\frac{\gamma}{p} - \frac{(p^{\gamma-1} - (1-p)^{\gamma-1})}{((1-p)^\gamma + p^\gamma)} \right).$$

Eine weitere oft verwendete Möglichkeit wird von Prelec in (1998, [Pre98]) beschrieben.

- Prelec Wahrscheinlichkeitsgewichtsfunktion:

$$w(p) := e^{-(-\log(p))^\gamma} \text{ mit } \gamma \in (0, 1] \quad (3.15)$$

in der PT bzw.

$$w(F(s)) := e^{-(-\log(F(s)))^\gamma}$$

in der CPT.

¹⁶Untersuchungen u.a. der von Tversky und Kahneman vorgeschlagenen Wahrscheinlichkeitsgewichtsfunktion finden sich auch z.B. in (1996, [WG96]) oder (1999, [GW99]).

Die erste Ableitung ergibt sich hier zu

$$\frac{d}{dp}w(p) = \frac{1}{p} (\gamma e^{-(-\log(p))^\gamma} (-\log(p))^{\gamma-1}).$$

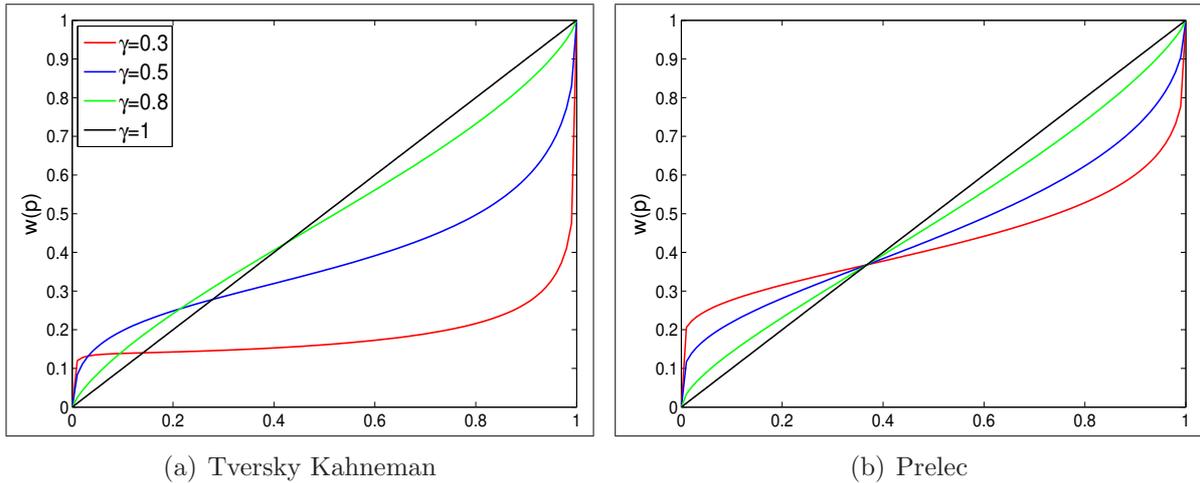


Abbildung 3.3: Wahrscheinlichkeitsgewichtsfunktionen für unterschiedliche γ .

Die Abbildung 3.3 zeigt die unterschiedlichen Verläufe der beiden Wahrscheinlichkeitsgewichtsfunktionen für unterschiedliche Werte für γ . Die Prelec Version schneidet die Diagonale im Gegensatz zur Tversky Kahneman Version stets bei circa 0,37. Beide nähern sich mit abnehmendem γ einer Treppenfunktion an, die nur noch zwischen sicheren und unsicheren Ereignissen unterscheidet. Wie bereits bei der Wertefunktion kann auch die Wahrscheinlichkeitsgewichtsfunktion für positive und negative Argumente mit unterschiedlichen Parametern γ definiert werden. Analog zu den Parametern α und β in der Wertefunktion wird auch hier oftmals, begründet durch empirische Untersuchungen und zum Zweck die Anzahl der Parameter gering zu halten¹⁷, der Parameter γ in beiden Fällen identisch angenommen. In Kombination mit der Power Wertefunktion wird z.B. für γ in der Tversky Kahneman Wahrscheinlichkeitsgewichtsfunktion häufig ein Wert zwischen 0,50 und 0,96 und für die Prelec Version Werte zwischen 0,53 und 0,94 angegeben¹⁸. Dies zeigt, dass auch hier eine genauere Auswertung der Sensitivität des

¹⁷Vgl. z.B. (1992, [TK92]), (1994, [CH94]), (1995, [TW95]), (1995, [TF95]) und (2011, [RWH11]).

¹⁸Vgl. hierzu insbesondere (2006, [Sto06]) und (2010, [HR10]).

CPT-Nutzen bezüglich des Parameters γ durchgeführt werden sollte um aussagekräftige Ergebnisse zu erhalten.

3.2.4 Multi-Kumulative Prospect Theorie

Bisher wurde in allen vorgestellten Modellen lediglich eine Kennzahl zur Bestimmung des Nutzens berücksichtigt, in der ENT ist der absolute Endwert entscheidend und in der PT und CPT die absolute Wertschwankung über die gesamte Laufzeit. Doch insbesondere bei langfristigen Kapitalanlagen informiert sich ein Anleger üblicherweise regelmäßig (z.B. jährlich bei der Jahresabrechnung) über den aktuellen Stand seiner Anlage und bewertet nicht nur die Gesamtentwicklung nach 30 oder mehr Jahren. Die Vermögensveränderung, die der Anleger jährlich erfährt, führt zwangsläufig zu einem positiven oder negativen Nutzen, d.h. der Anleger bezieht seinen Nutzen nicht nur aus dem Endergebnis, sondern aus dem gesamten Verlauf (Pfad) der Anlage über die Laufzeit. Dieser Ansatz, der im Folgenden als Multi-Kumulative Prospect Theorie bezeichnet wird, wird beispielweise von Barberis, Huang und Santos in *Prospect Theorie and Asset pricing* (2001, [BHS01]) verwendet. Der subjektive Nutzen, den ein Investor zu jedem Zeitpunkt innerhalb der Laufzeit aus einer Anlage A erhält, wird hierbei durch eine CPT-Wertefunktion bestimmt, wobei Barberis, Huang und Santos lediglich einen Spezialfall ohne Wahrscheinlichkeitsgewichtung beschreiben¹⁹. Der Unterschied liegt nun darin, dass der Nutzen der Anlage über viele Schwankungen während der Laufzeit definiert wird und nicht nur über die Gesamtschwankung. Diese Herangehensweise ermöglicht es außerdem die Risikoaversion des Anlegers flexibler zu modellieren, so kann z.B. die Tatsache, dass hintereinander auftretende Verluste schmerzhafter sind als ein Verlust nach einem hohen Gewinn, berücksichtigt werden. Dies entspricht den Arbeiten von z.B. Thaler und Johnson (1990, [TJ90]), welche die Auswirkung von vorherigen Gewinnen und Verlusten auf die Risikoaversion untersuchen.

Mit Hilfe der zuvor beschriebenen CPT wird in diesem Abschnitt aufbauend auf dem in (2001, [BHS01]) gegebenen Spezialfall, der Ansatz der Multi-Kumulativen Prospect Theorie für beliebige Wertefunktionen und Wahrscheinlichkeitsgewichtsfunktionen beschrieben.

¹⁹Des Weiteren beschränken sich Barberis, Huang und Santos in den Analysen auf eine lineare Wertefunktion, da diese insbesondere eine einfache Einbindung eines Anlegergedächtnisses (vgl. Abschnitt 3.2.5) ermöglicht.

Zunächst wird eine vereinfachte Version betrachtet:

In diesem Fall versucht der Investor den erwarteten Nutzen über einen endlichen Anlagehorizont $[0, T]$, $T \in \mathbb{N}$ bzgl. einer Wertefunktion zu maximieren, d.h. Wahrscheinlichkeitsgewichtung und Anlegergedächtnis werden zuerst ausgeblendet.

Definition 3.2.6 (Wertschwankung).

Für alle $t \in \{0, \dots, T - 1\}$ definiert die Zufallsvariable

$$X_{t+1} := S_{t+1}^A - S_t^A = S_t^A R_{t+1}^A, \quad (3.16)$$

die Wertschwankung der Anlage A zwischen t und $t + 1$, wobei die Zufallsvariable S_t^A der Wert der Anlage A zum Zeitpunkt t und die Zufallsvariable R_{t+1}^A der Return der Anlage A im Zeitraum $[t, t + 1]$ ist, also

$$R_{t+1}^A := \frac{(S_{t+1}^A - S_t^A)}{S_t^A}. \quad (3.17)$$

Bemerkung 3.2.7 (Wertschwankungen bei laufenden Beiträgen).

Bei der Betrachtung von Anlagen, die zu den Zeitpunkten $t \in \{1, \dots, T - 1\}$ Zuzahlungen erfahren, also einen laufenden Beitrag besitzen, wird folgende Definition verwendet:

$$X_{t+1} := S_{t+1}^{A^-} - S_t^A = S_t^A R_{t+1}^{A^-}, \quad (3.18)$$

$\forall t \in \{0, \dots, T - 1\}$ wobei die Zufallsvariable $S_{t+1}^{A^-}$ der Wert der Anlage zum Zeitpunkt $t + 1$ vor der Zuzahlung in $t + 1$ und die Zufallsvariable $R_{t+1}^{A^-}$ der dementsprechende Return ist.

Bemerkung 3.2.8.

Jede Wertschwankung X_t stellt dementsprechend eine Lotterie nach Definition 3.1.1 dar.

Die in Definition 3.2.1 und Abschnitt 3.2.3 für die CPT eingeführten Wertefunktionen v können analog auch für die Wertschwankungen X_t verwendet werden. Mit den eingeführten Wertschwankungen kann jetzt der Multi-Kumulative Prospect Theorie-Nutzen (MCPT-Nutzen), wie von Barberis, Huang und Santos in (2001, [BHS01]) beschrieben²⁰, definiert werden:

²⁰Im Gegensatz zu (2001, [BHS01]) wird hier jedoch ein endlicher Zeithorizont unterstellt.

Definition 3.2.9 (MCPT-Nutzen).

Sei A eine Anlage mit endlichem Zeithorizont $[0, T]$, $T \in \mathbb{N}$.

Dann ist der MCPT-Nutzen der Anlage A definiert durch

$$MCPT(A) = \mathbb{E} \left[\sum_{t=0}^{T-1} \rho^{t+1} v(X_{t+1}) \right], \quad (3.19)$$

wobei $\rho \in \mathbb{R}_+$ der Zeitdiskontierungsfaktor, v eine Wertefunktion und X_{t+1} die Wertschwankung der Anlage A zwischen t und $t + 1$ mit $t \in \mathbb{N}$, $t < T$ ist.

Der Diskontierungsfaktor ρ kann, aufgrund des hier betrachteten endlichen Zeithorizonts, in verschiedener Weise eingesetzt werden, um unterschiedliche Effekte widerzuspiegeln. So kann er, wie in (2001, [BHS01]) verwendet, die klassische Diskontierung verkörpern, welche die Tatsache beschreibt, dass ein Geldbetrag zu einem früheren Zeitpunkt einen höheren Wert als zu einem späteren Zeitpunkt hat. Darüber hinaus bietet ρ allerdings auch eine Möglichkeit den Effekt zu modellieren, dass Wertschwankungen gegen Ende des festgelegten Anlagehorizontes subjektiv schmerzhafter sein können als zu Beginn der Laufzeit, da sie schwerer wieder ausgeglichen werden können. Dementsprechend werden in den späteren Analysen drei Fälle, negative, positive und keine Diskontierung, betrachtet.

Erweiterung um Wahrscheinlichkeitsgewichtsfunktion

Die Idee einer Wahrscheinlichkeitsgewichtsfunktion wie in der ursprünglichen PT und der CPT kann nun auch im Multi-Kumulativen Fall modelliert werden. Dafür wird der CPT Nutzen einer Wertschwankung analog zu dem in Definition 3.2.4 eingeführten CPT-Nutzen formuliert:

$$\begin{aligned} CPT(X_{t+1}) = & \int_{-\infty}^0 v(x) \left(\frac{d}{ds} w(F(s)) \Big|_{s=x} \right) dx \\ & + \int_0^{\infty} v(x) \left(\frac{d}{ds} (-w(1 - F(s))) \Big|_{s=x} \right) dx, \end{aligned}$$

mit $F(s) = \mathbb{P}(X_{t+1} < s)$.

Darauf aufbauend lässt sich nun der Multi-Kumulative Prospect Theorie Nutzen mit Wahrscheinlichkeitsgewichtung definieren:

Definition 3.2.10 (MCPT^w-Nutzen).

Der Multi-Kumulative Prospect Theorie Nutzen mit Wahrscheinlichkeitsgewichtung ist für eine Anlage A mit endlichem Zeithorizont $[0, T]$, $T \in \mathbb{N}$ definiert durch

$$MCPT^w(A) := \int_{-\infty}^0 \left[\sum_{t=0}^{T-1} \rho^{t+1} v(x_{t+1}) \left(\frac{d}{ds} w(F_{t+1}^A(s)) \Big|_{s=x_{t+1}} \right) \right] dx_{t+1} \\ + \int_0^{\infty} \left[\sum_{t=0}^{T-1} \rho^{t+1} v(x_{t+1}) \left(\frac{d}{ds} (-w(1 - F_{t+1}^A(s))) \Big|_{s=x_{t+1}} \right) \right] dx_{t+1},$$

wobei ρ , X_{t+1} und v wie in Definition 3.2.9 sowie w eine Wahrscheinlichkeitsgewichtsfunktion und $F_{t+1}^A(s) := \mathbb{P}(X_{t+1} < s)$ sind.

Der hier definierte MCPT^w-Nutzen²¹ bildet die Grundlage der späteren Analysen, da er am besten dazu geeignet ist, Anlagen, die auf der einen Seite nahezu identische Endwertverteilungen besitzen, auf der anderen Seite allerdings unterschiedlich zusammengesetzt sind und somit auch unterschiedliche Verläufe während der Laufzeit aufweisen, aus einem prospecttheoretischen Blickwinkel zu untersuchen und dabei den gesamten Anlagehorizont einzubeziehen.

3.2.5 Gedächtniserweiterung der Wertefunktion

In der bisher eingeführten MCPT ist die Risikoaversion eines Anlegers über die gesamte Laufzeit identisch. Wie zu Beginn des Abschnittes bereits angedeutet, bietet die Multi-Kumulative Modellierung die Möglichkeit der Berücksichtigung von vorherigen Veränderungen, d.h. die aktuelle Risikoaversion und somit der aktuelle Nutzen hängt nicht nur von der aktuellen Veränderung ab, sondern auch von den Veränderungen in den vorherigen Zeitperioden. Barberis, Huang und Santos beschreiben in (2001, [BHS01]) eine Methode, die es ermöglicht, diesen Aspekt in den MCPT-Nutzen einzubeziehen. Im Folgenden wird dieser Ansatz, der sich jedoch auf eine lineare Wertefunktion, d.h. Power Wertefunktion mit $\alpha = 1$, beschränkt²², beschrieben.

²¹Da die CPT das Konzept der stochastischen Dominanz erfüllt (vgl. Abschnitt 3.2.2), gilt dieses auch für die MCPT in der Form, dass wenn für eine Anlage A und eine Anlage B gilt, dass für alle $t \in \{0, \dots, T-1\}$ die Wertschwankung X_t der Anlage A die Wertschwankung \tilde{X}_t der Anlage B stochastisch dominiert, dann gilt auch $MCPT^w(A) \geq MCPT^w(B)$.

²²Die Betrachtung einer linearen Wertefunktion ermöglicht eine einfache und intuitive Berücksichtigung einer Referenzgröße, die vom Anlegergedächtnis abhängig ist. Diese Modellierung ist in dieser Form nicht direkt auf den nicht-linearen Fall übertragbar.

Annahmen zum Anlegergedächtnis

Die in (2001, [BHS01]) eingeführte und hier beschriebene Methode der Modellierung eines Anlegergedächtnisses an Wertschwankungen, verwendet die Annahme eines exponentiell abnehmenden Gedächtnisses:

Definition 3.2.11 (Exponentiell abnehmendes Gedächtnis).

Das exponentiell abnehmende Gedächtnis (an Wertschwankungen) G_t eines Anlegers zu jedem Zeitpunkt t ist definiert durch die DGL mit Startwert $G_0 \in \mathbb{R}_+$,

$$dG_t = \log(\eta)G_t dt,$$

welche die Lösung $G_t = G_0 e^{\log(\eta)t} = G_0 \eta^t$ besitzt, wobei $-\log(\eta)$ die Zerfallskonstante mit dem Gedächtnisfaktor $\eta \in (0, 1)$ ist.

Der Gedächtnisfaktor η steuert demnach, wie lange der Anleger vergangene Wertschwankungen merkbar im Gedächtnis behält. Eine intuitiv bessere Vergleichsgröße der Stärke des Gedächtnisses lässt sich jedoch mit der Halbwertszeit (HWZ) eines exponentiellen Anlegergedächtnisses beschreiben.

Definition 3.2.12 (Halbwertszeit (HWZ)).

Die Halbwertszeit ist definiert als die Zeitdauer $\tau \in \mathbb{R}_+$, in der sich eine exponentiell in der Zeit abnehmende Funktion im Wert halbiert.

Lemma 3.2.13.

Für die Halbwertszeit τ des Anlegergedächtnisses aus Definition 3.2.11 gilt:

$$\tau = -\frac{\log(2)}{\log(\eta)}.$$

Beweis.

Für die Halbwertszeit τ gilt:

$$G_\tau = G_0 e^{\log(\eta)\tau} \Leftrightarrow \frac{G_0}{2} = G_0 e^{\log(\eta)\tau} \Leftrightarrow \log\left(\frac{1}{2}\right) = \log(\eta)\tau \Leftrightarrow -\frac{\log(2)}{\log(\eta)} = \tau.$$

□

Es gilt somit, dass je kleiner η desto kürzer ist die Gedächtnishalbwertszeit, so ist sie für

$\eta = 0.9$ noch 6,6 Jahre und für $\eta = 0.8$ nur noch 3,1 Jahre.

Dynamischer Referenzpunkt

Bis jetzt wurde stets eine Rendite von 0% im Zeitraum $[t, t+1]$, $0 \leq t < T$, als Referenzpunkt in den betrachteten Wertefunktionen verwendet²³. Um vergangene Wertschwankungen in den Nutzen einzubeziehen, wird ein dynamischer Referenzpunkt definiert. Das Ziel ist es, mit Hilfe eines dynamischen Referenzpunktes den Effekt zu modellieren, dass Wertverluste nach vorherigen Gewinnen weniger schmerzhaft sind, da sie durch die vorherigen Gewinne ausgeglichen werden können, d.h. die Risikoaversion abnimmt und umgekehrt Verluste nach vorherigen Verlusten schmerzhafter sind, d.h. die Risikoaversion zunimmt.

Definition 3.2.14 (Dynamischer Referenzpunkt (2001, [BHS01])).

Der dynamische Referenzpunkt²⁴ einer Anlage A ist für alle $t \in \{1, \dots, T-1\}$ definiert durch

$$z_{t+1} := \eta \frac{z_t}{R_{t+1} + 1} + (1 - \eta) \text{ und } z_1 = 1,$$

wobei R_{t+1} die Rendite der Anlage A zwischen t und $t+1$ und $\eta \in [0, 1]$ für $\eta \in (0, 1)$ der Gedächtnisfaktor aus Definition 3.2.11 ist²⁵. Dabei steht $z_t > 1$ für vorherige Verluste und $z_t < 1$ für vorherige Gewinne²⁶.

Tabelle 3.3 und Abbildung 3.4 zeigen den Einfluss des Gedächtnisfaktors η anhand einer Beispielsentwicklung von z_t für unterschiedliche η .

²³Dies bedeutet, dass absolute Gewinne und Verluste, auch in der Wertefunktion als Gewinne und Verluste gewertet werden. Alternativ könnten auch andere Benchmark Fonds (z.B. ein Rentenfonds) oder Größen, wie z.B. der risikolose Zins, zur Bestimmung des Referenzpunktes verwendet werden. In diesem Fall wird beispielsweise ein Zuwachs, der niedriger als der der Vergleichsgröße ist, in der Wertefunktion als Verlust betrachtet.

²⁴Hier wird eine vereinfachte Version des in (2001, [BHS01]) beschriebenen dynamischen Referenzpunktes betrachtet, welche keine Benchmark, wie z.B. den historischen durchschnittlichen Return, berücksichtigt.

²⁵Für $\eta = 0$ ist $z_t = 1$ für alle $t \in \{1, \dots, T\}$. Dies ist äquivalent zum Fall ohne Gedächtnis.

Der Fall $\eta = 1$ ist dagegen identisch mit einem Gedächtnis, welches nicht mit der Zeit abnimmt, d.h. Wertschwankungen bleiben unabhängig vom Zeitpunkt gleich stark im Gedächtnis.

²⁶Es ist anzumerken, dass $z_t = 1$ den gleichen Referenzpunkt darstellt, wie eine Rendite von 0%.

t	Anlagewert S_t^A	Rendite R_t	dynamischer Referenzpunkt z_{t+1} für $\eta =$				
			1	0,9	0,8	0,5	0,1
0	1,000		1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
1	1,044	4,4%	0,958	0,962	0,966	0,979	0,996
2	1,067	2,2%	0,937	0,947	0,956	0,979	0,997
3	1,035	-3,0%	0,966	0,978	0,988	1,004	1,003
4	1,064	2,8%	0,940	0,957	0,969	0,989	0,998
5	1,078	1,3%	0,927	0,950	0,965	0,988	0,998
6	1,141	5,8%	0,876	0,908	0,930	0,967	0,994
7	1,171	2,7%	0,854	0,896	0,925	0,971	0,997
8	1,081	-6,7%	0,925	0,974	1,002	1,026	1,008
9	1,012	-6,4%	0,988	1,036	1,056	1,048	1,008
10	0,987	-2,5%	1,013	1,056	1,066	1,037	1,003
11	0,956	-3,1%	1,046	1,081	1,080	1,035	1,004

Tabelle 3.3: Dynamischer Referenzpunkt Beispielentwicklung für unterschiedliche η .

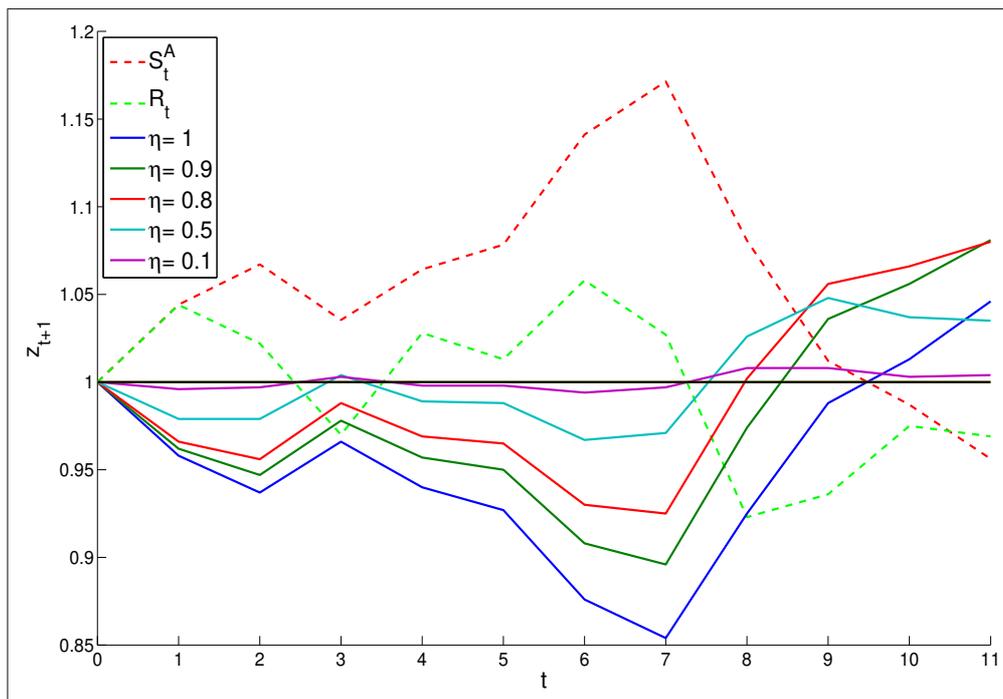


Abbildung 3.4: Dynamischer Referenzpunkt für unterschiedliche η .

Gedächtniswertefunktion

Die Wertefunktion v , mit deren Hilfe das Anlegergedächtnis beschrieben wird, muss in zwei Fälle, vorherige Gewinne ($z_t < 1$) und Verluste ($z_t > 1$), unterschieden werden.

- Fall 1 vorherige Gewinne ($z_t < 1$): Im Fall von vorherigen Gewinnen verschiebt sich der Referenzpunkt von seinem Ausgangspunkt zum aktuellen dynamischen Referenzpunkt z_t , das bedeutet, dass der Anleger sich bis zu einem gewissen Grad an den vorherigen Gewinnen orientiert und einen im Vergleich zu den vorherigen Gewinnen niedrigeren Gewinn als weniger positiv bewertet. Im Fall eines Verlustes unterscheidet der Anleger diesen in zwei Teile. Der erste Teil des Verlustes kann durch die vorherigen Gewinne kompensiert werden und schmerzt dementsprechend weniger, der zweite Teil ist der Wert, der die vorherigen Gewinne überschreitet und ist daher deutlich schmerzhafter. Dies lässt sich auf folgende Weise in der Wertefunktion modellieren:

$$v(X_{t+1}, R_{t+1}, S_t^A, z_t) := \begin{cases} X_{t+1}, & R_{t+1} + 1 \geq z_t \\ S_t^A (\lambda(R_{t+1} + 1 - z_t) + (z_t - 1)), & R_{t+1} + 1 < z_t. \end{cases}$$

- Fall 2 vorherige Verluste ($z_t > 1$): Im Fall von vorherigen Verlusten wird der Referenzpunkt auf eine Rendite von 0% gesetzt, da keine Gewinne im Gedächtnis des Anlegers vorhanden sind, die Verluste kompensieren könnten. Der dynamische Referenzpunkt wird hier genutzt um den Grad zu bestimmen, mit welchem weitere Wertverluste zusätzlich schmerzen. In der Modellierung wird hierzu ein von z_t abhängiger Risikoaversionsparameter $\lambda(z_t)$ definiert, mit dessen Hilfe die Wertefunktion in diesem Fall beschrieben werden kann:

$$v(X_{t+1}, R_{t+1}, S_t^A, z_t) := \begin{cases} X_{t+1}, & X_{t+1} \geq 0 \\ \lambda(z_t)X_{t+1}, & X_{t+1} < 0 \end{cases} \text{ mit } \lambda(z_t) = \lambda + \kappa(z_t - 1),$$

wobei $\kappa \geq 0$ die Stärke des zusätzlichen Schmerzes eines weiteren Verlustes bestimmt. In (2001, [BHS01]) wird $\kappa = 50$ vorgeschlagen.

Mit der in (2001, [BHS01]) eingeführten und hier beschriebenen speziellen Gedächtniswertefunktion kann jetzt unter Anwendung von Definition 3.2.10 der MCPT^w-Nutzen einer Anlage unter der Berücksichtigung eines Anlegergedächtnisses bestimmt werden.

4 Modellierung und numerische Methoden

Nachdem in den vorherigen Kapiteln die theoretischen Grundlagen eingeführt und beschrieben wurden, thematisiert Kapitel 4, die in dieser Arbeit erfolgte Modellierung und die dazu benötigten numerischen Methoden. Insbesondere werden die Methoden vorgestellt, mit denen die in den späteren Analysen betrachteten Fonds erzeugt werden können.

Dementsprechend werden in Abschnitt 4.1 die von Graf in *Life-cycle Funds: Much Ado about Nothing?* (2013, [Gra13]) beschriebenen Methoden aufgezeigt, welche es ermöglichen, zu einem beliebigen Lifecycle Fonds einen in Hinblick auf die mittleren jährlichen Renditen vergleichbaren Mischfonds in einem BSM-Modell zu konstruieren. Hierbei wird in Einmalbeitragsfall und laufenden Beitragsfall unterschieden, da in beiden Fällen unterschiedliche analytische Ergebnisse verwendet werden müssen. In Kapitel 5.1 werden die so konstruierten Fonds in den beiden komplexeren Kapitalmarktmodellen (CIR-BSM und CIR-SV) auf die Eigenschaft der vergleichbaren Endwertverteilungen untersucht, um auch in diesen Modellen eine hinreichende Übereinstimmung zu gewährleisten.

Abschnitt 4.2 behandelt die numerischen Methoden zur Simulation der in Kapitel 2 eingeführten Kapitalmarktmodelle. Hierbei ist insbesondere das Euler-Maruyama Verfahren zur Simulation von stochastischen Differentialgleichungen wichtig. Dieses wird anhand der benötigten Kapitalmarktmodelle erläutert. Des Weiteren werden die verwendete Kapitalmarktkalibrierung und die Simulation der Fondsinvestments beschrieben.

Im letzten Abschnitt wird aufgezeigt, wie mit Hilfe der in den vorherigen Abschnitten formulierten numerischen Methoden die Monte-Carlo-Methode zur Bestimmung der gewünschten Größen angewendet werden kann.

4.1 Konstruktion und Kalibrierung der Lifecycle- und Mischfonds

In diesem Abschnitt wird beschrieben, wie zu einem beliebigen gegebenen Lifecycle Fonds ein Mischfonds konstruiert werden kann, der mit dem Lifecycle Fonds in Hinsicht auf die Endwerte in Wahrscheinlichkeit nahezu übereinstimmt. Dabei werden die in (2013, [Gra13]) vorgestellten Methoden beschrieben. Die Idee ist dabei, die analytischen Verteilungen in einem BSM-Modell (2.25) auszunutzen, um analytische Bedingungen zu beschreiben, die garantieren, dass die Verteilungen (Einmalbeitrag) bzw. die Momente (laufender Beitrag) der Endwerte übereinstimmen. Diese Ergebnisse werden in den Analysen dann sowohl im CIR-BSM (2.27) als auch im CIR-SV (2.28) verwendet. Dass die im BSM-Modell hergeleiteten Bedingungen auch in diesen erweiterten Modellen ausreichend gute Konstruktionen ermöglichen, wird anschließend in Kapitel 5 diskutiert.

Bevor die Kalibrierung betrachtet wird, müssen die beiden verwendeten Fondstypen, in der hier benötigten Form definiert werden. Dabei wird stets von folgenden Grundannahmen ausgegangen.

Grundannahmen:

1. Es wird ein Anlagezeitraum von $T \in \mathbb{N}$ Jahren betrachtet.
2. Es existiert genau eine sicherheitsorientierte Anlage R (Rentenfonds) und eine riskante Anlage S (Aktienfonds).
3. Es werden Managementgebühren in Höhe von $c \geq 0$ p.a. berücksichtigt.

Definition 4.1.1 (Mischfonds).

Ein Mischfonds B investiert zu jedem Zeitpunkt t^1 einen festen Anteil $x \in [0, 1]$ in die riskante Anlage S und den Anteil $(1 - x)$ in die sicherheitsorientierte Anlage R . Die Gebühren werden mit c^B bezeichnet.

Definition 4.1.2 (Lifecycle Fonds).

Ein Lifecycle Fonds L investiert zu jedem Zeitpunkt $t \in [0, T]$ einen zeitabhängigen variablen Anteil $x_t \in [0, 1]$ in die riskante Anlage S und $(1 - x_t)$ in die sicherheitsorientierte Anlage R . Die Gebühren werden mit c^L bezeichnet.

¹Dies bedeutet, dass unabhängig von der Entwicklung des Fondsvermögens die Anlageaufteilung stets gleich bleibt und dementsprechend eine dynamische Umschichtung (Reallokation) stattfindet.

Bemerkung 4.1.3.

Es sei darauf hingewiesen, dass der Anteil x_t zeitabhängig aber deterministisch ist, d.h. insbesondere nicht pfadabhängig.

Beispiel 4.1.4 (Lifecycle Fonds mit linearer Risikominderung).

Oft werden Strategien auf jährlicher Basis betrachtet, z.B. ist die Methode der lineare Risikominderung eine beliebte und naheliegende Anlagestrategie für einen Lifecycle Fonds. Hierbei ist $x_0 = 1$ und $x_T = 0$ sowie $x_t = 1 - \frac{|t|}{T-1}$ für $t \in (0, T)$.

Auch wenn in den späteren Analysen stets ein Lifecycle Fonds mit jährlich linear abnehmenden Aktienfondsanteil betrachtet wird, so ist die im Folgenden beschriebene theoretische Anpassung der Verteilungen nicht auf diesen Fall beschränkt, sondern für beliebige Lifecycle Strategien anwendbar.

Definition 4.1.5 (Einmalbeitrag).

Im Einmalbeitragsfall investiert der Anleger einen festgelegten Anfangsbeitrag in einen Lifecycle- oder Mischfonds, welche in einen Aktien- und einen Rentenfonds investieren. Es finden keine weiteren Einzahlungen in den Fonds statt.

Definition 4.1.6 (Laufender Beitrag).

Im laufenden Beitragsfall investiert der Anleger einen festgelegten Anfangsbeitrag in einen Lifecycle- oder Mischfonds, welche in einen Aktien- und einen Rentenfonds investieren. Darüber hinaus investiert der Anleger in regelmäßigen Abständen (monatlich, jährlich, etc.) festgelegte (deterministischer) Beiträge in den Lifecycle- oder Mischfonds.

Bemerkung 4.1.7.

In beiden Fällen sind Sonderbeiträge und Ähnliches ausgeschlossen.

Damit sind alle nötigen Grundbegriffe definiert, um die Konstruktion der angepassten Fonds im Weiteren zu beschreiben.

4.1.1 Einmalbeitrag

Zuerst wird die Kalibrierung im Fall eines Einmalbeitrages betrachtet. Hierzu wird stets das BSM-Modell (2.24) aus Kapitel 2 angenommen, was den oben bereits erwähnten Vorteil hat, dass eine geschlossene Darstellung der analytischen Lösungen der Verteilung zur Verfügung stehen.

Im BSM-Modell ergeben sich für die Spot-Preise zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ des Lifecycle Fonds V_t^L bzw. des Mischfonds V_t^B mit Einmalbeiträgen $V_0^L > 0$ und $V_0^B > 0$, die Darstellungen,

$$dV_t^L = V_t^L \left((x_t(r + \lambda_s) + (1 - x_t)r - c^L)dt + x_t\sigma_s dW_t^S \right), \quad (4.1)$$

bzw.

$$dV_t^B = V_t^B \left((x(r + \lambda_s) + (1 - x)r - c^B)dt + x\sigma_s dW_t^S \right), \quad (4.2)$$

wobei $c^L \geq 0$ und $c^B \geq 0$ die entsprechenden Managementgebühren sind und $\lambda_s \geq 0$, $\sigma_s \geq 0$ die Parameter und W_t^S der Wiener-Prozess aus dem BSM-Modell. Das Ziel ist nun, zu einem gegebenen Lifecycle Fonds einen Mischfonds mit identischer Verteilung der Endwerte zu erhalten, daher wird c_B und x gesucht, sodass $V_T^L \stackrel{d}{=} V_T^B$ gilt. Hierzu wird folgender Satz formuliert:

Satz 4.1.8 (2013, [Gra13]).

Seien V_t^L und V_t^B gegeben durch (4.1) und (4.2). Des Weiteren sei der Lifecycle Fonds vorgegeben, d.h. c^L und x_t sind für alle $t \in [0, T]$ gegeben, und $V_0^L = V_0^B$. Dann gilt

$$V_T^L \stackrel{d}{=} V_T^B \quad \iff \quad x^* = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x_u^2 du}, \quad (4.3)$$

$$c^{B*} = c^L + \lambda_s \left(x^* - \frac{1}{T} \int_0^T x_u du \right), \quad (4.4)$$

wobei x^* und c^{B*} , die entsprechenden Parameter des Mischfonds B darstellen.

Es gilt außerdem $x^* \in [0, 1]$ und $c^{B*} \geq 0$, d.h. es wird ein zulässiger Mischfonds beschrieben.

Beweis.

O.B.d.A. sei $V_0^L = V_0^B = 1$. Als lineare stochastische Differentialgleichungen besitzen (4.1) und (4.2) nach (2.7) die Lösungen

$$V_t^L = V_0^L \exp \left(\int_0^t \left(x_u(r + \lambda_s) + (1 - x_u)r - c^L - \frac{1}{2}(x_u\sigma_s)^2 \right) du + \int_0^t x_u\sigma_s dW_u^S \right)$$

bzw.

$$V_t^B = V_0^B \exp \left(t \left(x(r + \lambda_s) + (1 - x)r - c^B - \frac{1}{2}(x\sigma_s)^2 \right) + tx\sigma_s W_t^S \right).$$

Analog zu (2.25) gilt zudem, dass $V_t^L \sim \mathcal{LN}(\mu_{L,t}, \sigma_{L,t}^2)$ und $V_t^B \sim \mathcal{LN}(\mu_{B,t}, \sigma_{B,t}^2)$ mit

$$\mu_{L,t} = \int_0^t \left(x_u(r + \lambda_s) + (1 - x_u)r - c^L - \frac{1}{2}(x_u\sigma_s)^2 \right) du,$$

$$\sigma_{L,t}^2 = \int_0^t (x_u\sigma_s)^2 du,$$

und

$$\mu_{B,t} = t \left(x(r + \lambda_s) + (1 - x)r - c^B - \frac{1}{2}(x\sigma_s)^2 \right),$$

$$\sigma_{B,t}^2 = t(x\sigma_s)^2.$$

Es gilt nun

$$\begin{aligned} V_T^L \stackrel{d}{=} V_T^B &\Leftrightarrow \mathbb{E}[V_T^L] = \mathbb{E}[V_T^B] \text{ und } \text{Var}(V_T^L) = \text{Var}(V_T^B) \\ &\Leftrightarrow \sigma_{L,T}^2 = \sigma_{B,T}^2 \text{ und } \mu_{L,T} = \mu_{B,T}. \end{aligned}$$

Durch das Auflösen der letzten beiden Gleichungen folgt

$$\begin{aligned} x^* &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x_u^2 du} \text{ und} \\ c^{B*} &= c^L + \lambda_s \left(x^* - \frac{1}{T} \int_0^T x_u du \right). \end{aligned}$$

Es wurde also x und c^B derart bestimmt, dass $V_T^L \stackrel{d}{=} V_T^B$ gilt.

Es bleibt zu zeigen, dass $x^* \in [0, 1]$ und $c^{B*} \geq 0$ gilt, da nur dann ein zulässiger Mischfonds beschrieben wird.

- $x^* \in [0, 1]$:

$$\text{Da } x_t \in [0, 1] \Rightarrow x^* = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x_u^2 du} \in [0, 1].$$

- $c^{B*} \geq 0$:

Nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung² gilt:

$$x^* = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x_u^2 du} = \sqrt{\int_0^T \frac{1}{T^2} du} \sqrt{\int_0^T x_u^2 du} \stackrel{C-S}{\geq} \int_0^T \frac{1}{T} x_u du$$

und daher

$$x^* - \frac{1}{T} \int_0^T x_u du \geq 0.$$

Daraus folgt für $\lambda_s \geq 0$, dass

$$c^{B^*} = c^L + \lambda_s \left(x^* - \frac{1}{T} \int_0^T x_u du \right) \geq 0$$

gilt und somit die Behauptung. □

Bemerkung 4.1.9 (Stochastische Dominanz im BSM-Modell).

Aus Satz 4.1.8 folgt, dass für den im BSM-Modell hergeleiteten Mischfonds mit identischer Endwertverteilung zum Lifecycle Fonds stets $c^B \geq c^L$ gilt, d.h. die Managementgebühren des Mischfonds sind für $\lambda_s > 0$ stets größer als die des Lifecycle Fonds.

Wird des Weiteren ein beliebiger Lifecycle Fonds L und ein Mischfonds $B+$ mit $x = x^*$ und $c^{B^+} = c^L$ betrachtet, so ergibt sich für die Varianz und den Erwartungswert:

$$\begin{aligned} \text{Var}(V_T^{B^+}) &= \text{Var}(V_T^L), \\ \mathbb{E}[V_T^{B^+}] &\geq \mathbb{E}[V_T^L]. \end{aligned}$$

Wobei letztere Ungleichung gilt, da

$$\begin{aligned} \log(\mathbb{E}[V_T^{B^+}]) &= \mu_{B^+,T} + \frac{1}{2}\sigma_{B^+,T}^2 = T(x^*(r + \lambda_s) + (1 - x^*)r) = Tx^*\lambda_s + Tr \\ &\stackrel{C-S}{\geq} T \int_0^T \frac{1}{T} x_u du \lambda_s + Tr = \int_0^T (x_u(r + \lambda_s) + (1 - x_u)r) du = \mu_{L,T} + \frac{1}{2}\sigma_{L,T}^2 \\ &= \log(\mathbb{E}[V_T^L]) \end{aligned}$$

²Vgl. z.B. in (2011, [Wer11]).

Daraus folgt, dass bei gleicher Varianz, der so konstruierte Mischfonds in einem BSM-Modell stets einen gleichen oder sogar besseren Erwartungswert der Endwertverteilung aufweist.

Wie Bemerkung 4.1.9 zeigt, lässt sich im Einmalbeitragsfall ein Mischfonds finden, der bei gleicher Varianz einen höheren erwarteten Endwert, bei ansonsten vergleichbarer Verteilung, besitzt. In den späteren Analysen wird daher auch ein Mischfonds+ betrachtet, der diesem Fonds entspricht, um aufzuzeigen, welche Auswirkungen diese Konstruktion in der Erwartungsnutzentheorie und insbesondere in der Prospect Theorie hat.

4.1.2 Laufender Beitrag

Im Fall eines laufenden Beitrages ist die Situation selbst im BSM-Modell deutlich komplizierter als im Fall eines Einmalbeitrages. Dies liegt insbesondere daran, dass die analytische Darstellung der Verteilung von Summen von Lognormalverteilten Zufallsvariablen nicht bekannt ist (siehe z.B. (2004, [Duf04])), d.h. insbesondere auch, dass es nicht möglich ist, mittels der Anpassung von Erwartungswert und Varianz die Verteilung der Endwerte exakt anzupassen. Dennoch bietet die Momentenmethode, d.h. die Anpassung der Momente, hier die der ersten beiden, einen geeigneten Ansatz, um zumindest entscheidende Charakteristiken der Verteilungen der Endwerte der beiden Fonds anzugleichen.

Im Weiteren bezeichnet Y_t^L bzw. Y_t^B das Guthaben eines Lifecycle- bzw. Mischfonds mit laufendem Beitrag zum Zeitpunkt t und V_t^L bzw. V_t^B weiterhin den Spot Preis des Lifecycle- bzw. Mischfonds mit Einmalbeitrag (vgl. (4.1) und (4.2)). Zur einfacheren Darstellung werden folgende Annahmen o.B.d.A. vorausgesetzt:

- $t \in \{1, \dots, T\}$, wobei die Zeiteinheit als jährlich betrachtet werden kann.
- $V_0^L = V_0^B = 1$.
- Jährlicher laufender Beitrag in Höhe von 1 GE.

Im Folgenden werden mit

$$Z_t^L := \frac{V_t^L}{V_{t-1}^L} \text{ und } Z_t^B := \frac{V_t^B}{V_{t-1}^B}, \quad (4.5)$$

die jährlichen relativen Zuwächse eines Lifecycle- bzw. eines Mischfonds bezeichnet.

Lemma 4.1.10 (2013, [Gra13]).

Für Z^L und Z^B aus (4.5) gilt:

- (i) $(Z_t^L)_{t \in \{1, \dots, T\}}$ ist eine Folge von unabhängig verteilten Zufallsvariablen mit $Z_t^L \sim \mathcal{LN}(\tilde{\mu}_{L,t}, \tilde{\sigma}_{L,t}^2)$, wobei

$$\tilde{\mu}_{L,t} = \int_{t-1}^t \left(x_u(r + \lambda_s) + (1 - x_u)r - c^L - \frac{1}{2}(x_u\sigma_s)^2 \right) du \quad \text{und} \quad (4.6)$$

$$\tilde{\sigma}_{L,t}^2 = \int_{t-1}^t (x_u\sigma_s)^2 du \quad (4.7)$$

gilt.

- (ii) $(Z_t^B)_{t \in \{1, \dots, T\}}$ ist eine Folge von identisch und unabhängig verteilten Zufallsvariablen mit $Z_t^B \sim \mathcal{LN}(\tilde{\mu}_B, \tilde{\sigma}_B^2)$, wobei

$$\tilde{\mu}_B = x(r + \lambda_s) + (1 - x)r - c^B - \frac{1}{2}(x\sigma_s)^2 \quad \text{und} \quad (4.8)$$

$$\tilde{\sigma}_B^2 = (x\sigma_s)^2 \quad (4.9)$$

gilt.

Beweis.

Beide Teile werden mit den gleichen Argumenten, wie für den Beweis von Satz (4.1.8) verwendet, bewiesen:

- (i) Mit $\mu_{L,t}$ wie im Beweis von Satz (4.1.8) folgt die Darstellung

$$Z_t^L = \frac{V_t^L}{V_{t-1}^L} = \frac{e^{\mu_{L,t} + \int_0^t x_u \sigma_s dW_u^S}}{e^{\mu_{L,t-1} + \int_0^{t-1} x_u \sigma_s dW_u^S}} = e^{\tilde{\mu}_{L,t} + \int_{t-1}^t x_u \sigma_s dW_u^S} \quad \forall t \in \{1, \dots, T\},$$

da $\mu_{L,t} - \mu_{L,t-1} = \tilde{\mu}_{L,t}$ und somit $Z_t^L \sim \mathcal{LN}(\tilde{\mu}_{L,t}, \tilde{\sigma}_{L,t}^2)$.

Des Weiteren folgt aufgrund der Unabhängigkeit der Zuwächse des Wiener-Prozesses, dass $\int_0^1 x_u \sigma_s dW_u^S, \int_1^2 x_u \sigma_s dW_u^S, \dots, \int_{T-1}^T x_u \sigma_s dW_u^S$ stochastisch unabhängig sind und dementsprechend auch Z_1^L, \dots, Z_T^L .

- (ii) Analog zu (i) gilt

$$Z_t^B = \frac{V_t^B}{V_{t-1}^B} = \frac{e^{\mu_{B,t} + x\sigma_s W_t^S}}{e^{\mu_{B,t-1} + x\sigma_s W_{t-1}^S}} = e^{\tilde{\mu}_B + x\sigma_s (W_t^S - W_{t-1}^S)} \quad \forall t \in \{1, \dots, T\},$$

da $\mu_{B,t} - \mu_{B,t-1} = \tilde{\mu}_B$.

Aufgrund der stationären Zuwächse des Wiener-Prozesses gilt zudem $W_t^S - W_{t-1}^S \sim \mathcal{N}(0, 1)$, weshalb Z_1^B, \dots, Z_T^B unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $Z_t^B \sim \mathcal{LN}(\tilde{\mu}_B, \tilde{\sigma}_B^2)$ sind. □

Bemerkung 4.1.11.

Gilt für die Lifecycle Strategie, dass sich x_u nur jährlich ändert, d.h. keine unterjährigen Änderungen in der Zusammensetzung der Fonds vorgenommen werden bzw. x_u konstant gehalten wird für $u \in [t, t+1)$, dann lassen sich (4.6) und (4.7) vereinfachen zu

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_{L,t} &= x_{t-1}(r + \lambda_s) + (1 - x_{t-1})r - c^L - \frac{1}{2}(x_{t-1}\sigma_s)^2 \text{ und} \\ \tilde{\sigma}_{L,t}^2 &= (x_{t-1}\sigma_s)^2. \end{aligned}$$

Mit den eingeführten Bezeichnungen lassen sich nun die Guthaben eines Lifecycle- bzw. Mischfonds mit laufendem Beitrag in folgender Form für $t \in \{2, \dots, T\}$ darstellen:

$$Y_t^L = \sum_{k=0}^{t-1} \frac{V_t^L}{V_k^L} = Z_t^L (1 + Y_{t-1}^L) \quad \text{und} \quad (4.10)$$

$$Y_t^B = \sum_{k=0}^{t-1} \frac{V_t^B}{V_k^B} = Z_t^B (1 + Y_{t-1}^B) \stackrel{d}{=} Z_t^B (1 + Y_{t-1}^L), \quad (4.11)$$

wobei $Z^B \sim \mathcal{LN}(\tilde{\mu}_B, \tilde{\sigma}_B^2)$ unabhängig von $(1 + Y_{t-1}^B)$ ist, d.h. $Z^B \stackrel{d}{=} Z_t^B$ für alle $t \in \{1, \dots, T\}$.

Bemerkung 4.1.12.

Folgende Eigenschaften sind für die weiteren Schritte wichtig:

- (i) Da $Y_1^L = Z_1^L$ und $Y_1^B = Z_1^B$, können Y_t^L und Y_t^B mit diesen Darstellungen rekursiv bestimmt werden.

(ii) Mit den gleichen Argumenten wie im Beweis zu Lemma (4.1.10) folgt, dass in (4.10) Z_t^L und $(1 + Y_{t-1}^L)$ und in (4.11) Z_t^B und $(1 + Y_{t-1}^B)$ stochastisch unabhängig sind und somit Z^B auch unabhängig von $(1 + Y_{t-1}^B)$ gewählt werden kann.

Lemma 4.1.13 (2013, [Gra13]).

Sei $p := \mathbb{E} [Z^B] = e^{\tilde{\mu}_B + 0.5\tilde{\sigma}_B^2}$ und $q := \mathbb{E} [(Z^B)^2] = e^{2\tilde{\mu}_B + 2\tilde{\sigma}_B^2}$. Dann gilt

(i)

$$\mathbb{E} [Y_T^B] = \sum_{k=1}^T p^k \quad (4.12)$$

und

(ii)

$$\mathbb{E} [(Y_T^B)^2] = q^T + \sum_{k=1}^{T-1} \left(2 \sum_{j=1}^{T-k} p^j + 1 \right) q^k. \quad (4.13)$$

Beweis.

Der Beweis wird per vollständiger Induktion geführt.

(i) $t = 1$:

$$\mathbb{E} [Y_1^B] = \mathbb{E} [Z^B] = \sum_{k=1}^1 p^k$$

IH:

$$\exists t \in \{1, \dots, T-1\} : \mathbb{E} [Y_t^B] = \sum_{k=1}^t p^k.$$

$t \rightarrow t+1$:

Mit (4.11) und der Unabhängigkeitseigenschaft folgt mit der Induktionshypothese:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [Y_{t+1}^B] &= \mathbb{E} [Z^B (1 + Y_t^B)] \\ &= \mathbb{E} [Z^B] \mathbb{E} [(1 + Y_t^B)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= p \left(1 + \sum_{k=1}^t p^k \right) \\
 &= \sum_{k=1}^{t+1} p^k
 \end{aligned}$$

(ii) $t = 1$:

$$\mathbb{E} \left[(Y_1^B)^2 \right] = \mathbb{E} \left[(Z^B)^2 \right] = \sum_{k=1}^1 q^k$$

IH:

$$\exists t \in \{1, \dots, T-1\} : \quad E \left[(Y_t^B)^2 \right] = q^t + \sum_{k=1}^{t-1} \left(2 \sum_{j=1}^{t-k} p^j + 1 \right) q^k.$$

$t \rightarrow t+1$:

Es folgt mit Hilfe von (4.11) und der Unabhängigkeitseigenschaft sowie mit Teil (i) durch die Induktionshypothese:

$$\begin{aligned}
 E \left[(Y_{t+1}^B)^2 \right] &= \mathbb{E} \left[(Z^B (1 + Y_t^B))^2 \right] = \mathbb{E} \left[(Z^B)^2 (1 + Y_t^B)^2 \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[(Z^B)^2 \right] \mathbb{E} \left[1 + 2Y_t^B + (Y_t^B)^2 \right] \\
 &= q \left(1 + 2 \sum_{k=1}^t p^k + q^t + \sum_{k=1}^{t-1} \left(2 \sum_{j=1}^{t-k} p^j + 1 \right) q^k \right) \\
 &= q \left(1 + 2 \sum_{k=1}^t p^k \right) + q^{t+1} + \sum_{k=1}^{t-1} \left(2 \sum_{j=1}^{t-k} p^j + 1 \right) q^{k+1} \\
 &= q \left(1 + 2 \sum_{k=1}^t p^k \right) + q^{t+1} + \sum_{k=2}^t \left(2 \sum_{j=1}^{t+1-k} p^j + 1 \right) q^k \\
 &= q^T + \sum_{k=1}^{t+1-1} \left(2 \sum_{j=1}^{t+1-k} p^j + 1 \right) q^k.
 \end{aligned}$$

Insbesondere gilt diese Aussage dann für $t+1 = T$.

□

Wird nun

$$f_T(p) := \sum_{k=1}^T p^k - \mathbb{E}[Y_T^L] \quad \text{und} \quad (4.14)$$

$$g_{p,T}(q) := q^T + \sum_{k=1}^{T-1} \left(2 \sum_{j=1}^{T-k} p^j + 1 \right) q^k - \mathbb{E}[(Y_T^L)^2], \quad (4.15)$$

definiert, dann folgt mit dem Lemma 4.1.13, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_T^B] = \mathbb{E}[Y_T^L] &\iff p_0, q_0 \text{ s.d.:} & f_T(p_0) = 0 \\ \mathbb{E}[(Y_T^B)^2] = \mathbb{E}[(Y_T^L)^2] & & g_{p_0,T}(q_0) = 0 \end{aligned}$$

Lemma 4.1.14 (2013, [Gra13]).

Seien $f_T(p)$ und $g_{p,T}(q)$ gegeben durch (4.14) bzw. (4.15). Dann existieren eindeutige positive Nullstellen p_0 und q_0 , d.h. $f_T(p_0) = 0$ und $g_{p_0,T}(q_0) = 0$.

Beweis.

Es wird zuerst die Existenz einer positiven Lösung und anschließend deren Eindeutigkeit gezeigt.

- Existenz: Zunächst wird

$$\mathbb{E}[Y_T^L] > 0 \quad \text{und} \quad \mathbb{E}[(Y_T^L)^2] > 0$$

gezeigt. Nach Lemma (4.1.10) gilt, $\mathbb{E}[Z_t^L] > 0$ für alle $t \in \{1, \dots, T\}$ und somit folgt mit (4.10), dass auch $\mathbb{E}[Y_T^L] > 0$.

Denn es gilt für $T > 1$, aufgrund der Unabhängigkeit,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_T^L] &= \mathbb{E}[Z_T^L (1 + \mathbb{E}[Y_{T-1}^L])] \\ &= \mathbb{E}[Z_T^L (1 + \mathbb{E}[Z_{T-1}^L (1 + \mathbb{E}[Y_{T-2}^L])])] \\ &= \dots \\ &= \mathbb{E}[Z_T^L (1 + \mathbb{E}[Z_{T-1}^L (1 + \dots \mathbb{E}[Z_2^L (1 + \mathbb{E}[Z_1^L]) \dots])])] \\ &> 0. \end{aligned}$$

Der Fall $T = 1$ ist mit Bemerkung 4.1.12 (i) sofort klar.

Mit den gleichen Argumenten folgt auch, dass $\mathbb{E} \left[(Y_T^L)^2 \right] > 0$.
 Denn erneut ist für $T > 1$, aufgrund der Unabhängigkeit,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[(Y_T^L)^2 \right] &= \mathbb{E} \left[(Z_T^L)^2 \right] \left(1 + 2\mathbb{E} \left[Y_{T-1}^L \right] + \mathbb{E} \left[(Y_{T-1}^L)^2 \right] \right) \\ &= \dots \\ &= \mathbb{E} \left[(Z_T^L)^2 \right] \left(1 + 2\mathbb{E} \left[Y_{T-1}^L \right] + \mathbb{E} \left[(Z_{T-1}^L)^2 \right] \right) \\ &\quad \left(1 + 2\mathbb{E} \left[Y_{T-2}^L \right] + \mathbb{E} \left[(Z_{T-2}^L)^2 \right] \right) \dots \\ &\quad \mathbb{E} \left[(Z_2^L)^2 \right] \left(1 + 2\mathbb{E} \left[Y_1^L \right] + \mathbb{E} \left[(Z_1^L)^2 \right] \right) \dots \Big) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Daher gilt $f_T(0) = -\mathbb{E} \left[Y_T^L \right] < 0$ und $g_{p,T}(0) = -\mathbb{E} \left[(Y_T^L)^2 \right] < 0$.

Auf der anderen Seite gilt aber auch, dass $\lim_{p \rightarrow \infty} f_T(p) = \infty$ und $\lim_{q \rightarrow \infty} g_{p,T}(q) = \infty$.

Da beide Funktionen als Polynome in p bzw. q stetig sind, folgt aus dem Zwischenwertsatz der Analysis direkt, dass es Nullstellen p_0 und q_0 geben muss.

- Eindeutigkeit: Die Eindeutigkeit folgt aus der Vorzeichenregel von Descartes, einem klassischen Satz der Analysis.

Hilfslemma (*Vorzeichenregel von Descartes*) (vgl. z.B. (1998, [AJS98]))

Die Anzahl aller positiven Nullstellen eines reellen Polynoms ist gleich der Zahl der Vorzeichenwechsel seiner Koeffizientenfolge oder um eine gerade natürliche Zahl kleiner als diese. Wobei jede Nullstelle ihrer Vielfachheit entsprechend gezählt wird.

Da $f_T(p)$ und $g_{p,T}(q)$ je genau einen Vorzeichenwechsel besitzen, folgt damit die Eindeutigkeit. □

Bemerkung 4.1.15.

Zu beachten ist:

- (i) *Mit Lemma (4.1.14) folgt also, dass eindeutige Lösungen p_0 und q_0 von (4.14) bzw. (4.15) existieren. Mit der Definition von p, q folgt dann, dass*

$$\tilde{\sigma}_B = \log(q_0) - 2 \log(p_0) \quad \text{und} \quad \tilde{\mu}_B = \log(p_0) - \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_B^2$$

gelten muss.

(ii) Noch ist allerdings nicht sicher, dass sich zu den gefundenen Lösungen ein zulässiger Mischfonds beschreiben lässt, d.h. es muss noch gewährleistet werden, dass $x \in [0, 1]$ und $c_B > 0$ gilt. Des Weiteren muss $\tilde{\sigma}_B^2 > 0$ gelten, da andernfalls Z_t^B nicht lognormalverteilt sein kann. Die letzte Bedingung ist jedoch im Normalfall immer erfüllt, was im folgenden Lemma gezeigt wird.

Lemma 4.1.16 (2013, [Gra13]).

Sind p_0 und q_0 Nullstellen von (4.14) bzw. (4.15) d.h. $f_T(p_0) = 0$ und $g_{p_0, T}(q_0) = 0$ und ist $\text{Var}(Y_T^L) > 0$, dann gilt stets

$$\tilde{\sigma}_B^2 > 0.$$

Beweis.

Es gilt

$$\tilde{\sigma}_B^2 = \text{Var}(Z_B) = \mathbb{E}[(Z^B)^2] - (\mathbb{E}[Z^B])^2 = q_0 - p_0^2 \stackrel{!}{>} 0 \iff q_0 \stackrel{!}{>} p_0^2.$$

Daher genügt es zu zeigen, dass $q_0 > p_0^2$ gilt.

Hierzu werden folgende Funktionen betrachtet:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_T(p) &:= \sum_{k=1}^T p^k \quad \text{und} \\ \tilde{g}_{p, T}(q) &:= q^T + \sum_{k=1}^{T-1} \left(2 \sum_{j=1}^{T-k} p^j + 1 \right) q^k. \end{aligned}$$

$\tilde{g}_{p, T}(q)$ ist für $p > 0$ strikt monoton wachsend in q , weshalb

$$q_0 > p_0^2 \iff \tilde{g}_{p, T}(q_0) > \tilde{g}_{p_0, T}(p_0^2).$$

Da $\text{Var}(Y_T^L) > 0$, gilt

$$\tilde{g}_{p_0, T}(q_0) = \mathbb{E}[(Y_T^L)^2] > (\mathbb{E}[Y_T^L])^2 = \tilde{f}_T^2(p_0).$$

Zu zeigen bleibt nun lediglich $\tilde{f}_T^2(p_0) = \tilde{g}_{p_0, T}(p_0^2)$ für $T \in \mathbb{N}$.

Diese Aussage lässt sich per vollständiger Induktion beweisen:

$T = 1$:

$$\tilde{f}_1^2(p) = p^2 = \tilde{g}_{p,1}(p^2)$$

IH:

$$\exists T - 1 \in \mathbb{N} \text{ mit } \tilde{f}_{T-1}^2(p) = \tilde{g}_{p,T-1}(p^2)$$

$T - 1 \rightarrow T$:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_T^2(p) &= \left(\sum_{k=1}^T p^k \right)^2 = \left(p^T + \sum_{k=1}^{T-1} p^k \right)^2 \\ &= p^{2T} + 2p^T \sum_{k=1}^{T-1} p^k + \left(\sum_{k=1}^{T-1} p^k \right)^2 \\ &\stackrel{IH}{=} p^{2T} + 2p^T \sum_{k=1}^{T-1} p^k + p^{2(T-1)} + \sum_{k=1}^{T-2} \left(2 \sum_{j=1}^{T-1-k} p^j + 1 \right) p^{2k} \\ &= p^{2T} + 2p^T \sum_{k=1}^{T-1} p^k + p^{2(T-1)} + 2 \sum_{k=1}^{T-2} p^{2k} \sum_{j=1}^{T-1-k} p^j + \sum_{k=1}^{T-2} p^{2k} \\ &= p^{2T} + \sum_{k=1}^{T-1} p^{2k} + 2p^T \sum_{k=1}^{T-1} p^k + 2 \sum_{k=1}^{T-2} p^{2k} \sum_{j=1}^{T-1-k} p^j \\ &= p^{2T} + \sum_{k=1}^{T-1} p^{2k} + 2 \sum_{k=1}^{T-1} p^{2k} p^{T-k} + 2 \sum_{k=1}^{T-2} p^{2k} \sum_{j=1}^{T-1-k} p^j \\ &= p^{2T} + \sum_{k=1}^{T-1} p^{2k} + 2 \sum_{k=1}^{T-1} p^{2k} \sum_{j=1}^{T-k} p^j \\ &= p^{2T} + \sum_{k=1}^{T-1} \left(2 \sum_{j=1}^{T-k} p^j + 1 \right) p^{2k} \\ &= \tilde{g}_{p,T}(p^2) \end{aligned}$$

Daher folgt $\tilde{f}_T^2(p_0) = \tilde{g}_{p_0,T}(p_0^2)$ für $T \in \mathbb{N}$ und somit die Behauptung. \square

Bemerkung 4.1.17.

Die Bedingung $\text{Var}(Y_T^L) > 0$ ist stets erfüllt, sofern der Lifecycle Fonds nicht aus-

schließlich in die sicherheitsorientierte Anlage R investiert.

Mit Hilfe der bis hierher beschriebenen Ergebnisse lässt sich nun der wesentliche Satz formulieren und beweisen, auf welchem der Algorithmus zur Konstruktion der entsprechenden Fonds basiert.

Satz 4.1.18 (2013, [Gra13]).

Seien p_0 und q_0 Nullstellen von (4.14) bzw. (4.15) aus Lemma (4.1.14) und gilt zusätzlich, dass

$$(a) \text{Var}(Y_T^L) > 0,$$

$$(b) q_0 \leq p_0^2 e^{\sigma_s^2} \text{ und}$$

$$(c) p_0 \leq e^{r + \lambda_s} \sqrt{\frac{\tilde{\sigma}_B^2}{\sigma_s^2}}.$$

Dann folgt, dass mit $x = x_0 := \sqrt{\frac{\tilde{\sigma}_B^2}{\sigma_s^2}}$ und $c^B = c^{B_0} := r + \lambda_s x_s - \log(p_0)$ ein zulässiger Mischfonds B_0 beschrieben wird mit

$$\mathbb{E}[Y_T^{B_0}] = \mathbb{E}[Y_T^L] \text{ und } \mathbb{E}[(Y_T^{B_0})^2] = \mathbb{E}[(Y_T^L)^2].$$

Beweis.

Aus Bemerkung (4.1.15) ist ersichtlich

$$\tilde{\sigma}_B = \log(q_0) - 2 \log(p_0) \text{ und } \tilde{\mu}_B = \log(p_0) - \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_B^2.$$

Aus (a) folgt mit Lemma (4.1.16), dass $\tilde{\sigma}_B^2 > 0$. Damit ist $\mathcal{LN}(\tilde{\mu}_B, \tilde{\sigma}_B^2)$ eine zulässige Lognormalverteilung und aufgrund der Definitionen von p und q in Lemma (4.1.13) kann nun $Z_B \sim \mathcal{LN}(\tilde{\mu}_B, \tilde{\sigma}_B^2)$ gesetzt werden.

Mit Lemma (4.1.10) und der Definition von p und q gilt,

$$\tilde{\sigma}_B^2 = \log(q_0) - 2 \log(p_0) \stackrel{!}{=} (x \sigma_s)^2 \text{ und } x \geq 0 \iff x = \sqrt{\frac{\tilde{\sigma}_B^2}{\sigma_s^2}} = x_0$$

und

$$\tilde{\mu}_B = \log(p_0) - \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_B^2 \stackrel{!}{=} \left(x(r + \lambda_s) + (1 - x)r - c^B - \frac{1}{2} (x_0 \sigma_s)^2 \right)$$

$$\iff c^B = r + \lambda_s x_0 - \log(p_0) = c^{B_0}.$$

Noch zu zeigen bleibt, dass dieser Mischfonds zulässig ist, d.h. $x_0 \in [0, 1]$ und $c^{B_0} \geq 0$ gilt.

- $x_0 \in [0, 1]$:

Diese Aussage folgt direkt aus Bedingung (b) und der Definition von q_0 und p_0 , da

$$\begin{aligned} q_0 \leq p_0^2 e^{\sigma_s^2} &\iff e^{2\tilde{\mu}_B + 2\tilde{\sigma}_B^2} \leq e^{2\tilde{\mu}_B + \tilde{\sigma}_B^2 + \sigma_s^2} \\ &\iff e^{\tilde{\sigma}_B^2 - \sigma_s^2} \leq 1 \\ &\iff e^{\sigma_s^2(x_0^2 - 1)} \leq 1 \\ &\iff x_0^2 \leq 1 \\ &\implies x_0 \in [0, 1], \text{ da } x_0 \geq 0 \text{ nach Definition von } x_0. \end{aligned}$$

- $c^{B_0} \geq 0$:

Diese Aussage folgt direkt aus Bedingung (c), da

$$\begin{aligned} c^{B_0} \geq 0 &\iff r + \lambda_s x_0 - \log(p_0) \geq 0 \\ &\iff e^{r + \lambda_s x_0} \geq p_0 \\ &\iff e^{r + \lambda_s \sqrt{\frac{\tilde{\sigma}_B^2}{\sigma_s^2}}} \geq p_0. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 4.1.19.

Nach Graf (2013, [Gra13]) ist davon auszugehen, dass die Bedingungen (b) und (c) stets erfüllt sind. Während bei (c) numerische Analysen diese Vermutung bekräftigen, kann für (b) auch eine intuitive Begründung gegeben werden:

Die in (b) formulierte Bedingung bedeutet, dass x , d.h. der Anteil des Mischfonds, der in die riskante Anlage S investiert, maximal 1 ist. Wird angenommen, dass der Anteil größer als 1 ist, folgt direkt aus der Definition, dass $\tilde{\sigma}_B^2 > \tilde{\sigma}_{L,t}^2$ für alle $t \in \{1, \dots, T\}$ gilt, da $x_t \in [0, 1]$ für alle $t \in \{1, \dots, T\}$. Da sich die Fonds nach den Rekursionsformeln aber gewissermaßen aus Z_L bzw. Z_B analog zusammensetzen und stets nur positive Werte annehmen, folgt damit „intuitiv“, dass die Varianz des Mischfonds zu jedem Zeitpunkt

höher sein muss als die des Lifecycle Fonds, was allerdings im Widerspruch zu dem in Satz 4.1.18 erhaltenen Resultat, dass die ersten beiden Momente übereinstimmen, steht.³ Daher ist höchstens ein riskanter Anteil x von 1 nötig, um einen Mischfonds mit identischen ersten zwei Momenten zu einem gegebenen Lifecycle Fonds zu bestimmen.

Basierend auf den Resultaten in diesem Abschnitt ist es nun möglich einen Algorithmus zu beschreiben, der zu einem gegebenen Lifecycle Fonds L mit laufendem jährlichen Beiträgen unter den in diesem Abschnitt gemachten Annahmen (u.a. jährlicher Beitrag von 1GE) einen Mischfonds B (d.h. $x \in [0, 1]$ und $c_B \geq 0$) bestimmt, dessen erstes und zweites Moment mit denen des Lifecycle Fonds übereinstimmen.

Der in 4.1.20 beschriebene Algorithmus wird dabei in zwei Abschnitte unterteilt:

Der erste Abschnitt, der zur besseren Übersicht wiederum in zwei Teile aufgegliedert wird⁴, behandelt die Bestimmung der Momente von L , d.h. $\mathbb{E}[Y_T^L]$ und $\mathbb{E}[(Y_T^L)^2]$. Im zweiten Abschnitt wird mit den Ergebnissen des ersten Abschnittes die Bestimmung von B formuliert.

³Insbesondere sei darauf hingewiesen, dass der zweite angepasste Parameter c_B keinen Einfluss auf die Varianz hat, da dieser lediglich den Drift-Term beeinflusst.

⁴Es ist sinnvoll Teil 1 und 2 parallel zu implementieren.

Algorithmus 4.1.20 (2013, [Gra13]).

1: Bestimmung der Momente von L , d.h. $\mathbb{E}[Y_T^L]$ und $\mathbb{E}[(Y_T^L)^2]$:

Algorithm 1: Teil 1 der Bestimmung der Momente von L

Data: $r, \lambda_s, \sigma_s^2, T, x_t, c_L$

Result: $E = \mathbb{E}[Y_T^L]$

begin

 Berechne für alle $t \in \{1, \dots, T\}$ mit $\tilde{\mu}_{L,t}$ aus (4.6) und $\tilde{\sigma}_L^2$ aus (4.7);
 Setze

$$m_t = \mathbb{E}[Z_t^L] = e^{\tilde{\mu}_{L,t} + 0.5\tilde{\sigma}_L^2} \text{ und}$$

$$s_t = \mathbb{E}[(Z_t^L)^2] = e^{2\tilde{\mu}_{L,t} + 2\tilde{\sigma}_L^2}$$

if $T = 1$ **then**

$E = m_1$;

else

 Setze $E = 1 + m_1$;

$i = 2$;

while $i < T$ **do**

$E = 1 + m_i E$;

$i++$;

end

if $i = T$ **then**

$E = m_T E$;

end

end

 RETURN E ;

end

Algorithm 2: Teil 2 der Bestimmung der Momente von L

Data: $r, \lambda_s, \sigma_s^2, T, x_t, c_L$ **Result:** $S = \mathbb{E} \left[(Y_T^L)^2 \right]$ **begin** Setze m_t und s_t analog zu Algorithmus 1; **if** $T = 1$ **then** | $S = s_1$; **else** Setze $S = 1 + 2m_1 + s_1$; $i = 2$; **while** $i < T$ **do** | Bestimme $E_i = \mathbb{E} [Y_i^L]$ mit Algorithmus 1; | $S = 1 + 2E_i + s_i S$; | $i ++$; **end** **if** $i = T$ **then** | $S = s_T S$; **end** **end** RETURN S ;**end**

2: Bestimmung von B , d.h. $x \in [0, 1]$ und $c_B \geq 0$:

Algorithm 3: Bestimmung von B

Data: $E, S, r, \lambda_s, \sigma_s^2, T$

Result: B (x und c_B)

begin

Bestimme positive Nullstellen von p_0 und q_0 von $f_T(p)$ und $g_{p,T}(q)$ aus (4.14) bzw. (4.15), d.h.

$$f_T(p) = \sum_{k=1}^T p^k - E \stackrel{!}{=} 0 \text{ und}$$

$$g_{p,T}(q) = q^T + \sum_{k=1}^{T-1} \left(2 \sum_{j=1}^{T-k} p^j + 1 \right) q^k - S \stackrel{!}{=} 0$$

mit einem Standard Verfahren für Polynome;

if Bedingungen (a) und (b) aus Satz (4.1.18) erfüllt **then**

$$\tilde{\sigma}_B = \log(q_0) - 2 \log(p_0);$$

$$\tilde{\mu}_B = \log(p_0) - \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_B^2;$$

$$x = \sqrt{\frac{\tilde{\sigma}_B^2}{\sigma_s^2}};$$

$$c_B = r + \lambda_s x_s - \log(p_0);$$

RETURN x und c_B ;

else

RETURN "Keine Lösung";

end

end

4.2 Numerische Simulation der Kapitalmarktmodelle

In diesem Abschnitt werden die numerischen Verfahren zur Simulation von Pfaden von Kapitalmarktmodellen beschrieben. Da diese stochastisch sind, ein Computer allerdings stets deterministisch rechnet, müssen Pseudo-(oder Quasi-) Zufallszahlen erzeugt werden, mit deren Hilfe der Diffusionsterm in der stochastischen Differentialgleichung simuliert werden kann. Mit dieser Technik lassen sich einzelne Pfade der Lösung simulieren⁵. Diese kann verwendet werden, um mit Hilfe von Monte-Carlo-Methoden aussagekräftige Analysen durchzuführen. Eine Einführung in diese Methoden bieten zum Beispiel Seydel in *Tools for computational finance* (2012, [Sey12]) oder auch Günther und Jünger in *Finanzderivate mit MATLAB: Mathematische Modellierung und numerische Simulation* (2010, [GJ10]).

4.2.1 Erzeugung von gleichverteilten Zufallsvariablen - Mersenne-Twister

Der Mersenne-Twister (MT19937), (1997, [MN98]), ist ein Pseudozufallszahlengenerator, der 1997 von Makoto Matsumoto und Takuji Nishimura entwickelt wurde. Er ermöglicht eine effiziente Erzeugung von Folgen von gleichverteilten Pseudozufallszahlen und vermeidet dabei Probleme älterer Methoden, beispielweise Hyperebenenbildung oder kurze Periodenlängen bei linearen Kongruenzmethoden⁶. Der Name Mersenne kommt von der Periodenlänge $M_n = 2^n - 1$, eine sogenannte Mersenne-Primzahl, wobei $n = 199937$. Die Periodenlänge beträgt damit $2^{199937} - 1 \approx 4,3 \cdot 10^{6001}$.

Der Algorithmus ist definiert durch

$$x_{k+n} = x_{k+m} \oplus (x_k^u | x_{k+1}^l)A, \text{ für } k \in \mathbb{N}, \quad (4.16)$$

wobei $n = 624$ der Grad der Rekurrenz, $m = 397$ die Anzahl der parallelen Sequenzen

⁵Zur Simulation und der Aussagekraft der darauf aufbauenden Auswertungen ist es hierbei wichtig, die in Kapitel 2.1.2 beschriebenen Eindeutigkeitseigenschaften der Lösung der SDGL zu kennen. Nur wenn die Eigenschaft der pfadweisen Eindeutigkeit für die SDGL gilt, ist eine pfadweise Betrachtung sinnvoll. Ist man lediglich an Verteilungen interessiert, so ist die Eindeutigkeit in Verteilung ausreichend. Besitzt die SDGL keine der beiden Eindeutigkeitseigenschaften, ist sie für praktische Zwecke im Normalfall nicht anwendbar.

⁶Vgl. z.B. (2012, [Urb12]).

und $u = 11$ sowie $l = 18$ zusätzliche Tempering Bit Shifts sind.

Des Weiteren ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I_{623} \\ a_{624} & (a_{623}, \dots, a_0) \end{pmatrix}$$

mit I_{623} , eine (623)-dimensionale Identitätsmatrix, und

$$a = (a_{624}, \dots, a_0) = 9908B0DF_{16}.$$

Für $x = (x_{31}, \dots, x_0)$ gilt,

$$xA := \begin{cases} x \gg 1, & \text{wenn } x_0 = 0, \\ (x \gg 1) \oplus a, & \text{wenn } x_0 = 1, \end{cases}$$

wobei $x \gg 1$ für einen 1-bit Rechtsshift steht. Außerdem ist

$$x^u := x_{31}$$

$$x^l := (x_{30}, \dots, x_0)$$

und $(x^u|x^l)$ die entsprechende Verknüpfung.

Der zweite Schritt ist das sogenannte *Tempering*, das die 623-dimensional Gleichverteilung sicherstellt und durch folgende sukzessive Transformationen realisiert wird:

$$y := x \oplus (x \gg 11)$$

$$y := x \oplus ((x \gg 7) \text{ AND } 9D2C5680_{16})$$

$$y := x \oplus ((x \gg 15) \text{ AND } EFC60000_{16})$$

$$y := x \oplus (x \gg 18).$$

Eine ausführliche Beschreibung und zahlreiche Realisierungen in unterschiedlichen Programmiersprachen findet sich auf der Mersenne-Twister Homepage von M. Matsumoto <http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~m-mat/MT/VERSIONS/eversions.html>.

4.2.2 Erzeugung von normalverteilten Zufallsvariablen - Box-Muller

Zur Erzeugung von normalverteilten Zufallsvariablen werden gleichverteilte Zufallsvariablen transformiert. Eine beliebige Transformationsmethode ist die von Box-Muller, (1958, [BM58]), die auf folgendem Satz beruht:

Satz 4.2.1.

Sei X ein Zufallsvektor auf \mathbb{R}^n mit Dichtefunktion f . Des Weiteren sei $h : S \rightarrow B$ eine stetige und invertierbare Funktion, wobei $S, B \subset \mathbb{R}^n$ und S den Träger von f darstellt, d.h.

$$S := \text{supp}f := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}.$$

Falls h^{-1} stetig differenzierbar auf B ist, so besitzt der transformierte Zufallsvektor $Y := h(X)$ die Dichtefunktion

$$f(h^{-1}(y)) |\det \mathcal{J}h^{-1}(y)|, \quad y \in B,$$

wobei $\mathcal{J}h^{-1}(y)$ die Jacobi-Matrix von h^{-1} ist.

Mit Hilfe dieses Satzes kann nun die Methode von Box-Muller beschrieben werden. Zunächst definiere $h : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch

$$\begin{aligned} h_1(x_1, x_2) &:= y_1 := \sqrt{-2 \log x_1} \cos(2\pi x_2) \\ h_2(x_1, x_2) &:= y_2 := \sqrt{-2 \log x_1} \sin(2\pi x_2). \end{aligned}$$

Es lässt sich nun zeigen, dass

$$\det \mathcal{J}h^{-1}(y) = - \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5y_1^2} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5y_2^2} \right)$$

gilt. Dies ist gerade die Dichtefunktion der 2-dimensionalen Standardnormalverteilung. Daher folgt für einen auf $[0, 1]^2$ gleichverteilten Zufallsvektor X , dass $h(X)$ standardnormalverteilt ist.

Der Algorithmus lässt sich nun wie folgt definieren:

Algorithmus 4.2.2 (Box-Muller - Simulation von unabhängigen $\mathcal{N}(0, 1)$ -Zufallsvariablen).

1. Generiere zwei auf $(0, 1)$ gleichverteilte Zufallsvariablen U_1 und U_2 .

2. Setze $\Theta := 2\pi U_2$ und $\rho := \sqrt{-2 \log U_1}$.

3. Bestimme mit $Z_1 := \rho \cos \Theta$ und $Z_2 := \rho \sin \Theta$ zwei Realisationen von unabhängig standardnormalverteilten Zufallsvariablen.

Die damit erzeugten standardnormalverteilten Zufallsvariablen lassen sich nun auch durch eine einfache Transformation zu normalverteilten Zufallsvariablen mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 transformieren.

Algorithmus 4.2.3 (Simulation einer $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ -Zufallsvariablen).

Sei Z eine Realisation einer $\mathcal{N}(0, 1)$ -Zufallsvariablen.

Setze

$$\tilde{Z} = \mu + \sigma Z. \tag{4.17}$$

Dann ist \tilde{Z} eine Realisation einer $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ -Zufallsvariablen.

Bisher wurde lediglich ein Verfahren zur Erzeugung von unabhängigen normalverteilten Zufallsvariablen beschrieben, oftmals werden aber auch korrelierte Zufallsvariablen benötigt, beispielsweise im Heston-Modell um eine Korrelation zwischen Volatilität und Aktienkurs zu simulieren. Die Idee besteht darin, dass durch eine passende Kombination zweier unabhängig normalverteilter Zufallsvariablen zwei korrelierte normalverteilte Zufallsvariablen erzeugt werden.

Algorithmus 4.2.4 (Simulation zweier korrelierter $\mathcal{N}(0, 1)$ -Zufallsvariablen).

Seien Z_1, Z_2 Realisationen zweier unabhängiger $\mathcal{N}(0, 1)$ -Zufallsvariablen und sei $\rho \in [-1, 1]$ die angestrebte Korrelation.

Setze

$$\widehat{Z}_1 = Z_1 \tag{4.18}$$

$$\widehat{Z}_2 = \rho Z_1 + \sqrt{1 - \rho^2} Z_2. \tag{4.19}$$

Dann sind \widehat{Z}_1 und \widehat{Z}_2 die Realisationen zweier $\mathcal{N}(0, 1)$ -Zufallsvariablen mit dem Korrelationsfaktor ρ .

Die Aussage in Algorithmus (4.2.4) folgt direkt aus den Eigenschaften der Normalverteilung und kann mit Hilfe der Cholesky-Zerlegung auch verallgemeinert werden.

Algorithmus (4.2.3) kann nun auch auf die mit Algorithmus (4.2.4) simulierten korre-

lierten standardnormalverteilten Zufallsvariablen angewendet werden, um entsprechende korrelierte $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ -Zufallsvariablen zu erhalten.

4.2.3 Euler-Maruyama Approximation

Zur Simulation der Kapitalmarktmodelle bietet sich das Euler-Maruyama-Schema⁷, ein weitverbreitetes Diskretisierungsverfahren für stochastische Differentialgleichungen, an. Dabei werden einzelne Pfade der stochastischen Differentialgleichungen approximiert. Im Unterschied zum Euler-Verfahren für deterministische Differentialgleichungen ist hierbei eine zusätzliche Diskretisierung der Wahrscheinlichkeitsachse notwendig. Das Euler-Maruyama Verfahren bietet den Vorteil, dass es in vielen Fällen leicht anwendbar ist. In einigen Spezialfällen lassen sich natürlich auch effizientere Verfahren beschreiben. Existiert eine geschlossene Formel, wie z.B. im Standard-BSM Modell, so können die Pfade direkt simuliert werden. Außerdem kann z.B. auch die Dichte bzw. Übergangswahrscheinlichkeit eines Prozesses, falls diese bekannt ist, zur Simulation einzelner Pfade verwendet werden. So können Wurzel-Diffusionsprozesse mit Hilfe der Nichtzentralen- χ^2 Verteilung simuliert werden. Dies gilt damit insbesondere für den CIR-Prozess und auch für den Volatilitätsprozess V im Heston-Modell. Allerdings stellt die Korrelation der beiden Wiener-Prozesse im Heston-Modell eine weitere Herausforderung dar. Eine Methode zur Simulation von Pfaden des Heston-Modells, die die Nichtzentralen- χ^2 Verteilung ausnützt, wird von Broadie und Kaya in (2006, [BK06]) beschrieben. Im Gegensatz zum Euler-Maruyama Verfahren ist diese Methode erwartungstreu. Allerdings liegt ihr Nachteil in der zeitintensiven Verwendung der numerischen Fourier Inversen der charakteristischen Funktion.

In den im Folgenden betrachteten Fällen besitzt das Euler-Maruyama Verfahren die starke Konvergenz der Ordnung 0,5 und die schwache Konvergenz der Ordnung 1⁸. Stabilität liegt vor, sobald eine pfadweise eindeutige starke Lösung der stochastischen Differentialgleichung existiert. Diese Bedingungen werden in den hier betrachteten Fällen erfüllt. Es existieren auch Diskretisierungsverfahren höherer Ordnung, basierend auf der stochastischen Taylor-Entwicklung nach dem Itô Lemma 2.1.16, wie das Milstein Schema oder das

⁷Eine ausführliche Beschreibung von numerischen Methoden für stochastische Differentialgleichungen findet sich z.B. in Klöden und Platen: *Numerical solution of stochastic differential equations* (2011, [KP11]).

⁸Im Allgemeinen ist diese Konvergenzordnung unter bestimmten Regularitätsanforderungen an den Drift- und Volatilitätsterm gültig (etwas mehr als \mathcal{C}^2). Siehe (2011, [KP11]).

HOS-1.5. Diese Verfahren haben aber in der Anwendung von mehreren stochastischen Prozessen, wie im Heston-Modell, den Nachteil, dass sie sehr kompliziert werden.

Black-Scholes-Merton Modell

Für das Standard-Black-Scholes Modell ist eine geschlossene Lösung der stochastischen Differentialgleichung wohlbekannt, weshalb die Pfade direkt simuliert werden können. Diese einfache Möglichkeit der Simulation wird im Folgenden als einführendes Beispiel betrachtet, bevor das Euler-Maruyama Verfahren und damit die Modellierung der komplexen Kapitalmarktmodelle beschrieben wird.

Sei dazu $\mathcal{T} = \{t_i\}_{i=0}^M$ ein beliebiges diskretes Zeitgitter mit $t_i < t_{i+1} \forall i$. Es wird o.B.d.A. $t_0 = 0$ und äquidistante Gitterpunkte angenommen, d.h. für eine vorgegebene Schrittweite Δt gilt $\mathcal{T} = \{i\Delta t \mid 0 \leq i \leq M\}$.

Seien nun Z_1, \dots, Z_M Realisationen von unabhängigen standardnormalverteilten Zufallsvariablen und sei $S_i = S_{t_i}$, dann wird ein Pfad S des BSM-Modells bis zum Zeitpunkt t_M auf folgende Weise simuliert:

Setze

$$\begin{aligned} \tilde{S}_0 &= S_0 \quad \text{und} \\ \tilde{S}_{i+1} &= \tilde{S}_i \exp \left(\left(\mu_s - \frac{1}{2} \sigma_s^2 \right) \Delta t + \sigma_s \sqrt{\Delta t} Z_{i+1} \right) \quad \forall t_i \in \mathcal{T}. \end{aligned}$$

Damit ist $\tilde{S} = \left(\tilde{S}_{t_i} \right)_{0 \leq i \leq M}$ die Simulation eines Pfades des BSM Modells.

Hierbei werden die unabhängigen und normalverteilten Zuwächse des Wiener-Prozesses ausgenützt, nach denen gilt, dass eine Realisation eines Zuwachses sich mit

$$W_{t_{i+1}} - W_{t_i} = \sqrt{\Delta t} Z_i \quad \forall t_i, t_{i+1} \in \mathcal{T},$$

simulieren lässt und dementsprechend

$$W_{t_{i+1}} = \sum_{k=1}^{i+1} \sqrt{\Delta t} Z_k \quad \forall t_{i+1} \in \mathcal{T}.$$

Heston Modell

Im Gegensatz zum BSM Modell ist für das Heston Modell, das im CIR-SV Modell verwendet wird, keine geschlossene Lösungsformel bekannt. Es wird zunächst das Heston Modell in seiner ursprünglichen Form betrachtet und ein fester Zinssatz $r > 0$ unterstellt. Aufgrund der Unabhängigkeit des Zinsprozesses zum Kursprozess und Volatilitätsprozess im CIR-SV, können die Ergebnisse anschließend direkt auf das CIR-SV Modell angewendet werden.

Bei der numerischen Betrachtung dieses Modells ist es sinnvoll zu bemerken, dass S_t trotz einiger Unterschiede in vielen Fällen relativ nahe an einer geometrischen Brownschen Bewegung liegt, weshalb die Betrachtung des logarithmierten Prozesses naheliegend ist. Mit dem Itô Lemma 2.1.16 kann leicht gezeigt werden, dass das in Kapitel 2 vorgestellte Heston Modell,

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t \left((r + \lambda_s) dt + \sqrt{V_t} dW_t^S \right), \\ dV_t &= \kappa_v (\Theta_v - V_t) dt + \sigma_v \sqrt{V_t} dW_t^V, \end{aligned}$$

äquivalent ist zu

$$\begin{aligned} d \log(S_t) &= \left((r + \lambda_s) - \frac{1}{2} V_t \right) dt + \sqrt{V_t} dW_t^S, \\ dV_t &= \kappa_v (\Theta_v - V_t) dt + \sigma_v \sqrt{V_t} dW_t^V. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Denn nach dem Itô Lemma 2.1.16 gilt mit $f(x) = \log(x)$:

$$\begin{aligned} \log(S_t) &= \log(S_0) + \int_0^t \frac{1}{S_u} dS_u - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{S_u^2} d[S, S]_u \\ &= \log(S_0) + \int_0^t (r + \lambda_s) du + \int_0^t \sqrt{V_u} dW_u^S - \frac{1}{2} \int_0^t V_u du \\ &= \log(S_0) + \int_0^t \left((r + \lambda_s) - \frac{1}{2} V_u \right) du + \int_0^t \sqrt{V_u} dW_u^S \end{aligned}$$

Basierend auf dieser Darstellung wird nun das Verfahren zur Simulation von Pfaden des Heston Modells beschrieben.

Sei dazu $\mathcal{T} = \{t_i\}_{i=0}^M$ ein, wie bereits für das im BSM Modell verwendete, diskretes o.B.d.A. äquidistantes Zeitgitter mit $t_0 = 0$ und $t_i < t_{i+1} \forall i < M$ mit einer vorgegebe-

nen Schrittweite Δt .

Das Ziel ist nun, Pfade des Paares (S, V) durch $(\tilde{S}_t, \tilde{V}_t)_{t \in \mathcal{T}}$ zu simulieren. Es wird wieder die Notation $S_i = S_{t_i}$ bzw. $V_i = V_{t_i}$ benutzt.

Zunächst wird der Volatilitätsprozess V diskretisiert, wodurch folgendes Schema entsteht:

$$\begin{aligned} \tilde{V}_0 &= V_0 \\ \text{und} \\ \tilde{V}_{i+1} &= \tilde{V}_i + \kappa_v(\Theta_v - \tilde{V}_i)\Delta t + \sigma_v \sqrt{\tilde{V}_i \Delta t} Z_i \quad \forall t_i \in \mathcal{T}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

wobei Z_1, \dots, Z_M wieder Realisationen von unabhängigen standardnormalverteilten Zufallsvariablen sind.

Dieses Schema hat aber einen entscheidenden Nachteil (siehe z.B. in (2007, [And07]) oder (2010, [LKVD10])): Die Approximation des Volatilitätsprozesses \tilde{V} kann negativ werden. Im Detail gilt für (4.21), dass unter der Bedingung $\tilde{V}_i > 0$, die Wahrscheinlichkeit, dass $\tilde{V}_{i+1} < 0$, gegeben ist durch

$$\mathbb{P}(\tilde{V}_{i+1} < 0 \mid \tilde{V}_i > 0) = \Phi\left(\frac{-(1 - \kappa_v \Delta t) \tilde{V}_i - \kappa_v \Theta_v \Delta t}{\sigma_v \sqrt{\tilde{V}_i \Delta t}}\right) > 0, \quad (4.22)$$

wobei $\Phi(x)$ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist. Auch wenn diese Wahrscheinlichkeit eine fallende Funktion in Δt ist, so gilt dennoch, dass für jede beliebige feste Schrittweite Δt die Wahrscheinlichkeit strikt positiv ist. In der Literatur gibt es eine Vielzahl an möglichen Auswegen, um dieses Problem zu beheben. Diese können durch folgende allgemeine Darstellung repräsentiert werden:

$$\begin{aligned} \tilde{V}_0 &= V_0, \quad \hat{V}_0 = V_0 \\ \text{und} \\ \hat{V}_{i+1} &= f_1(\hat{V}_i) - \kappa_v \Delta t (f_2(\hat{V}_i) - \Theta_v) + \sigma_v \sqrt{f_3(\hat{V}_i) \Delta t} Z_i, \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\tilde{V}_{i+1} = f_3(\hat{V}_{i+1}) \quad \forall t_i \in \mathcal{T} \quad (4.24)$$

mit

$$f_j(x) = x \text{ für } x \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (4.25)$$

$$f_j(x) \geq 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (4.26)$$

das bedeutet, dass die Volatilität genau dann fixiert wird, falls sie negativ wird. Die in dieser Arbeit verwendeten Version ist die Full Truncation Methode, bei welcher $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^+ = \max(x, 0)$ und $f_3(x) = x^+$ ist.

Für die Simulation des Aktienkurses wird die hergeleitete logarithmierte Darstellung aus (4.20) verwendet. Des Weiteren muss die Korrelation der beiden Prozesse berücksichtigt werden. Es wird dazu die in Algorithmus (4.2.4) eingeführte Methode zur Simulation von zwei korrelierten standardnormalverteilten Zufallsvariablen angewendet und die Diskretisierung $(\tilde{S}_t, \tilde{V}_t)_{t \in \mathcal{T}}$ von (S, V) dementsprechend $\forall t_i \in \mathcal{T}$ wie folgt gesetzt:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_0 &= S_0, \quad \tilde{V}_0 = V_0, \quad \hat{V}_0 = V_0, \\ \log(\tilde{S}_{i+1}) &= \log(\tilde{S}_i) + \left((r + \lambda_s) - \frac{1}{2}\tilde{V}_i \right) \Delta t + \sqrt{\tilde{V}_i \Delta t} Z_i^1, \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\hat{V}_{i+1} = \hat{V}_i - \kappa_v \Delta t (\tilde{V}_i - \Theta_v) + \sigma_v \sqrt{\tilde{V}_i \Delta t} (\rho Z_i^1 + \sqrt{1 - \rho^2} Z_i^2), \quad (4.28)$$

$$\tilde{V}_{i+1} = \hat{V}_{i+1}^+, \quad (4.29)$$

wobei $Z_1^1, \dots, Z_N^1, Z_1^2, \dots, Z_N^2$ Realisationen unabhängiger $\mathcal{N}(0, 1)$ -verteilter Zufallsvariablen sind und $\rho \in [-1, 1]$ der Korrelationsfaktor ist.

CIR-Prozess

Als Wurzel-Diffusionsprozess kann für den CIR-Prozess die gleiche Diskretisierung wie für den Volatilitätsprozess im Heston-Modell verwendet werden. Auch wenn typischerweise die Volatilität des Zinsprozesses σ_r^2 deutlich geringer ist als die des Volatilitätsprozesses σ_v^2 , wodurch die Wahrscheinlichkeit einer negativen Realisation (vgl. (4.22)) geringer ist, so ist es auch hier sinnvoll die Full Truncation Methode anzuwenden, d.h. mit den üblichen Notationen

$$\tilde{r}_0 = r_0, \quad \hat{r}_0 = r_0,$$

$$\widehat{r}_{i+1} = \widehat{r}_i - \kappa_r \Delta t (\widehat{r}_i - \Theta_r) + \sigma_r \sqrt{\widehat{r}_i \Delta t} Z_1, \quad (4.30)$$

$$\widetilde{r}_{i+1} = \widehat{r}_{i+1}^+, \quad \forall t_i \in \mathcal{T}. \quad (4.31)$$

CIR-SV Modell

Mit den Ergebnissen für das Heston Modell und für das CIR Modell kann direkt die Euler-Maruyama Diskretisierung für das CIR-SV Modell beschrieben werden. Mit den oben eingeführten Notationen ergibt sich die Diskretisierung $(\widetilde{S}_t, \widetilde{V}_t, \widetilde{r}_t)_{t \in \mathcal{T}}$ von (S, V, r) dementsprechend $\forall t_i \in \mathcal{T}$ zu:

$$\begin{aligned} \widetilde{S}_0 &= S_0, \quad \widetilde{V}_0 = V_0, \quad \widehat{V}_0 = V_0, \quad \widetilde{r}_0 = r_0, \quad \widehat{r}_0 = r_0, \\ \log(\widetilde{S}_{i+1}) &= \log(\widetilde{S}_i) + \left((r + \lambda_s) - \frac{1}{2} \widetilde{V}_i \right) \Delta t + \sqrt{\widetilde{V}_i \Delta t} Z_i^1, \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\widehat{V}_{i+1} = \widehat{V}_i - \kappa_v \Delta t (\widehat{V}_i - \Theta_v) + \sigma_v \sqrt{\widehat{V}_i \Delta t} \left(\rho Z_i^1 + \sqrt{1 - \rho^2} Z_i^2 \right), \quad (4.33)$$

$$\widetilde{V}_{i+1} = \widehat{V}_{i+1}^+, \quad (4.34)$$

$$\widehat{r}_{i+1} = \widehat{r}_i - \kappa_r \Delta t (\widehat{r}_i - \Theta_r) + \sigma_r \sqrt{\widehat{r}_i \Delta t} Z_1^3, \quad (4.35)$$

$$\widetilde{r}_{i+1} = \widehat{r}_{i+1}^+, \quad (4.36)$$

wobei $Z_1^1, \dots, Z_N^1, Z_1^2, \dots, Z_N^2, Z_1^3, \dots, Z_N^3$ Realisationen unabhängiger $\mathcal{N}(0, 1)$ -verteilter Zufallsvariablen sind und $\rho \in [-1, 1]$ der Korrelationsfaktor ist.

4.2.4 Kalibrierung der Kapitalmarktmodelle

Im vorherigen Abschnitt wurde beschrieben, wie die in dieser Arbeit betrachteten Kapitalmarktmodelle simuliert werden. Um aussagekräftige Ergebnisse in den Analysen zu erhalten, ist es neben einer guten numerischen Approximation der stochastischen Pfade natürlich auch entscheidend, welche Werte die freien Parameter in den Modellen haben. Bei der Auswahl der Parameterwerte wird sich an die in (2013, [Gra13]) verwendeten Werte gehalten.

In den folgenden quantitativen Analysen wird dazu die Risikoprämie der Aktien auf $\lambda_s = 3\%$ gesetzt. Dieser Wert stammt aus Forschungsarbeiten der Europäischen Zentralbank, (2008, [CLDM08]), die verwendeten Schätzungen basieren auf Zeitreihenanalysen in einem CAPM (Capital Asset Pricing Model), die wöchentliche, stetig hergeleitete Ak-

tienrenditen von 1991 bis 2008 aus dem Euro-Raum verwenden.

Die Parameter der CIR Short-Rate sind so gewählt, dass die entsprechenden Zero Bonds in ihrem Preis und Variabilität 1-jährigen und 10-jährigen Bundesanleihen entsprechen (vgl. (2013, [Gra13])), wobei die Datensätze der Bundesbank als Basis dienen. Damit ergeben sich die CIR Parameter zu

$$\kappa_r = 20\%, \Theta_r = r_0 = 4,5\%, \sigma_r = 7,5\% \text{ und } \lambda_r = 0\%.$$

Für die Parameter der stochastischen Volatilität werden die von Eraker in (2004, [Era04]), anhand von historischen Zeitreihen- und Optionsmarktanalysen, geschätzten Werte verwendet. Diese sind in annualisierter Form beispielsweise von Poulson (2007, [EPSH07]) formuliert:

$$\kappa_v = 475\%, \Theta_v = (22\%)^2, \sigma_v = 55\%, \rho = -57\% \text{ und } V_0 = (22\%)^2.$$

Aufgrund der Konsistenz und Vergleichbarkeit wird zudem im CIR-BSM Modell $\sigma_s^2 = \Theta_v$ und im CIR-SV $V_0 = \Theta_v$ gesetzt.

4.2.5 Simulation der Fondsinvestments

Alle Fondsinvestments bestehen aus einem Aktienfondsanteil und einem Rentenfondsanteil sowie einem Gebührenfaktor⁹. In dieser Arbeit werden stets Investitionen in die entsprechenden Fonds mit einer Laufzeit von 35 Jahren betrachtet, wobei jeder Monat mit 21 Handelstagen simuliert wird. Zur höheren Genauigkeit werden die Kapitalmarktmodelle mit fünf Intradaywerten bestimmt, d.h. die in Abschnitt 4.2.3 beschriebene Fortschreibung des Kapitalmarktes wird für einen Handelstag fünf Mal durchgeführt¹⁰. Die Aktien- und Rentenfondsanteile werden darauf aufbauend täglich fortgeschrieben und angepasst (tägliches Rebalancing). Dadurch werden täglich die durch die unterschiedliche Wertentwicklung von Aktien- und Rentenfonds verursachten Anteilsverschiebungen ausgeglichen. Der Aktienfonds wird über die jeweilige Kursentwicklung (S_t) des ver-

⁹Es werden keine weiteren Faktoren, wie Überschussbeteiligung, Garantien oder weitere einzelne Kostenfaktoren, z.B. Abschlusskosten (alpha-Kosten), berücksichtigt.

¹⁰Also $\Delta t = 1/(\text{Anzahl Handelstage pro Jahr} \times 5)$. Beispielsweise werden für die Fortschreibung des Aktienkurses vom Tag d zum Tag $d+1$ die Werte $S_{d+\Delta t}, S_{d+2\Delta t}, S_{d+3\Delta t}, S_{d+4\Delta t}, S_{d+5\Delta t} = S_{(d+1)}$ simuliert.

wendeten Kapitalmarktmodelles (CIR-BSM bzw. CIR-SV, vgl. Kapitel 2.2) bestimmt und mit den in Abschnitt 4.2.3 beschriebenen Methoden simuliert. Der Rentenfonds wird dagegen mit Hilfe der Short Rate r über die tägliche Preisentwicklung von Zero Bonds mit einer Laufzeit von 5 Jahren über ein sogenanntes rollierendes Bondinvestment dargestellt¹¹. Die Gebühren werden ebenfalls auf täglicher Basis berücksichtigt und dementsprechend abgezogen. Es werden zwei Typen von Fondsinvestitionen simuliert. Eine Investition auf Einmalbeitragsbasis (vgl. Definition 4.1.5) und eine mit laufendem jährlichen Beitrag (vgl. Definition 4.1.6)¹². Im Fall eines laufenden Beitrages wird neben dem ersten Beitrag zu Beginn der Laufzeit jeweils am Ende des zwölften Monats der laufende Beitrag gutgeschrieben.

4.3 Monte-Carlo-Simulation

Die quantitativen Untersuchungen in den folgenden Kapiteln basieren stets auf Monte-Carlo-Methoden, welche die in Abschnitt 4.2 vorgestellten numerischen Methoden für die Kapitalmarktmodelle und Fondsinvestments verwenden. Um eine aussagekräftige Analyse durchführen zu können, werden 20.000 Kapitalmarktszenarien simuliert, welche für die weiteren Auswertungen verwendet werden. So wird beispielsweise der MCPT^w-Nutzen aus Definition 3.2.10 bestimmt über die Approximation:

$$\widehat{MCPT}^w(A) := \frac{1}{20000} \sum_{k \in \mathcal{M}_1} \left[\sum_{t=0}^{34} \rho^{t+1} v(x_{t+1}^k) \left(\frac{d}{ds} w \left(\widehat{F}_{t+1}^A(s) \right) \Big|_{s=x_{t+1}^k} \right) \right] \\ + \frac{1}{20000} \sum_{k \in \mathcal{M}_2} \left[\sum_{t=0}^{34} \rho^{t+1} v(x_{t+1}^k) \left(\frac{d}{ds} \left(-w \left(1 - \widehat{F}_{t+1}^A(s) \right) \right) \Big|_{s=x_{t+1}^k} \right) \right],$$

wobei \mathcal{M}_1 die Indexmenge mit den negativen Wertschwankungen und \mathcal{M}_2 die mit den positiven Wertschwankungen mit $|\mathcal{M}_1| + |\mathcal{M}_2| = 20000$ darstellen sowie $\widehat{F}_{t+1}^A(s)$ die entsprechende empirische Verteilungsfunktion der simulierten Wertschwankungen im Jahr

¹¹Dies bedeutet, dass analog zur täglichen Aktienfondsfortschreibung, die über den Quotienten $\frac{S_{(d+1)}}{S_d}$ bestimmt wird (wobei d für den entsprechenden Tag steht), der Rentenfonds mit Hilfe des Quotienten der Zero Bond Preise $\frac{P(1,5 \text{ Jahre})}{P(0,5 \text{ Jahre})}$ mit $t_0 = d$ fortgeschrieben wird. Der Quotient entspricht gerade der Preisänderung eines Zero Bonds innerhalb eines Tages, der dem Besitzer einen Euro zum Zeitpunkt $d + (5 \text{ Jahre})$ garantiert. Vergleiche hierzu auch Definition 2.2.1 und 2.23.

¹²Es wird stets ein Euro als Beitrag verwendet. Andernfalls ist eine modifizierte Form der in Kapitel 4.1 beschriebenen Fondsmodellierung nötig.

$t + 1$. Die empirischen Verteilungsfunktionen beginnen dabei bei $\frac{1}{20000}$ und enden bei $\frac{19999}{20000}$, um zu vermeiden, dass die empirischen Verteilungen für die kleinste Schwankung 0 und für die größte 1 beträgt.

Eine ausführliche Beschreibung von Monte-Carlo Methoden findet sich in *Monte Carlo Concepts, Algorithms and Applications* von Fishman (1996, [Fis96]) oder mit Schwerpunkt auf Financial Engineering in *Monte Carlo methods in financial engineering* von Glasserman (2003, [Gla03]).

5 Vorbereitende Anlaysen

In diesem Kapitel werden erste Analysen, der in Kapitel 4 theoretisch eingeführten Lifecycle- und Mischfonds durchgeführt. Wie bereits in der theoretischen Modellierung wird erneut stets zwischen dem Einmalbeitragsfall und dem laufenden Beitragsfall unterschieden. Zuerst wird in beiden Fällen zu einem gegebenen Lifecycle Fonds (mit linear abnehmendem Aktienfondsanteil) mit den in Kapitel 4 beschriebenen Methoden ein entsprechender Mischfonds erzeugt, der in der Betrachtung der mittleren jährlichen Renditen mit dem Lifecycle Fonds vergleichbar ist. Da die analytischen Methoden zur theoretischen Modellierung der Fonds jedoch auf einem Standard BSM-Modell beruhen, werden im ersten Abschnitt die mittleren jährlichen Renditen der Fonds unter Verwendung der in dieser Arbeit betrachteten komplexeren Kapitalmarktmodelle (CIR-BSM und CIR-SV, vgl. Kapitel 2.2 und Kapitel 4.2) untersucht.

Im zweiten Abschnitt werden die auf dem Endwert basierenden Erwartungsnutzen (ENT, Kapitel 3.1) der Fonds bestimmt. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen zeigen, ob die Nutzen der beiden Fonds in der ENT eine Begründung liefern, weshalb sich ein Anleger für einen Lifecycle- und gegen einen Mischfonds oder umgekehrt entscheidet bzw. entscheiden sollte oder ob beide Fonds einen vergleichbaren Nutzen in der ENT aufweisen.

Abschließend werden in Abschnitt 5.3 die Unterschiede in den Wertverläufen der Fonds genauer beschrieben und untersucht. Diese Unterschiede in den Wertschwankungen während der Laufzeit, die von der ENT nicht berücksichtigt werden, führen direkt zu der in Kapitel 3.2 vorgestellten Prospect Theorie, die über Gewinne und Verluste definiert ist, und insbesondere zu dem darauf aufbauendem MCPT^w-Nutzen, der in den späteren Kapiteln 6 und 7 ausführlich analysiert wird.

5.1 Analyse der betrachteten Anlagen

In diesem Abschnitt werden zuerst im Einmalbeitragsfall und anschließend im laufenden Beitragsfall die Fondsdaten, d.h. Aktien- und Rentenfondsanteile, Gebühren, Laufzeit und Beitrag der in den weiteren Untersuchungen verwendeten Fonds gegeben. Es wird in beiden Fällen ein Lifecycle Fonds, wie in (4.1.4) beschrieben, mit einem jährlich linear abnehmenden Aktienfondsanteil betrachtet, d.h. der Aktienfondsanteil ist definiert durch $x_0 = 1$ und $x_T = 0$ sowie $x_t = 1 - \frac{|t|}{T-1}$ für $t \in (0, T)$. Des Weiteren wird der Gebührenfaktor des Lifecycle Fonds auf 0 gesetzt¹. Bei der Modellierung der Mischfonds wird auf die in Kapitel 4.1 beschriebenen Methoden zurückgegriffen. Es wird stets ein Aktienfonds und ein Rentenfonds auf die in Kapitel 4.2 und insbesondere in Abschnitt 4.2.5 beschriebene Weise simuliert und zur Zusammensetzung der betrachteten Lifecycle- und Mischfonds verwendet.

Anschließend werden die Ergebnisse der numerischen Simulation, mit den in Kapitel 4.3 aufgezeigten Eckdaten, im Hinblick auf die Endwertverteilungen bzw. der Verteilungen der mittleren jährlichen Renditen in den beiden Kapitalmarktmodellen (CIR-BSM und CIR-SV) interpretiert². Es zeigt sich, dass die so modellierten Fonds in beiden Modellen eine vergleichbare Struktur der Endwertverteilung aufweisen und dass der Unterschied der beiden Kapitalmarktmodelle im Hinblick auf die Endwertverteilung auf die späteren Analysen einen vernachlässigbaren Einfluss besitzt.

Bevor die Lifecycle- und Mischfonds betrachtet werden, gibt Tabelle 5.1 einen Überblick über die Endwertverteilungen der simulierten Aktien- und Rentenfonds, in welche Lifecycle- und Mischfonds investieren, für ein Startwert von einem Euro und einem Zeithorizont von 35 Jahren. Während der Rentenfonds in beiden Kapitalmarktmodellen identisch auf Basis einer CIR-Zinsstruktur modelliert wird, unterscheidet sich die Modellierung der Aktienfonds durch die stochastische Volatilität im CIR-SV. Tabelle 5.1 zeigt die Auswirkung dieser unterschiedlichen Modellierung auf den so simulierten Aktien-

¹Die Ausblendung der Lifecycle Fonds Gebühren ist nicht entscheidend für die späteren Ergebnisse. Der Einfluss beschränkt sich, unter der Annahme von realistischen Gebühren, auf einen kleinen Unterschied in den absolut erzielten Nutzenwerten. Dieser ist insbesondere beim Vergleich der beiden Fonds sehr gering, da bei Lifecycle Fonds Gebühren > 0 auch die Mischfonds Gebühren, nach den Ergebnissen in Kapitel 4.1, steigen.

²Neben den Kapitalmarktmodellen verursacht auch die Monte-Carlo Simulation Abweichungen, da die Verteilungen nur approximiert werden und dementsprechend Fehler beinhalten.

fonds. Neben dem Vergleich des Aktienfonds in den beiden Kapitalmarktmodellen, zeigt Tabelle 5.1 auch den Unterschied der beiden modellierten Fondstypen auf. Während der Aktienfonds im Mittelwert und Median sowie in den oberen Quantilen bessere Ergebnisse als der Rentenfonds erzielt, besitzt der Rentenfonds ein deutlich geringeres Risiko, was sich in den deutlich besseren unteren Quantilen ausdrückt. Durch eine Kombination der beiden Fondstypen möchten Lifecycle- und Mischfonds von beiden Komponenten (Chance und Risiko) profitieren.

Fondstyp	Modell	Mittelwert	0,005	0,05	0,25	Median	0,75	0,95	0,995
Aktien	SV	15,41	0,12	0,55	2,36	6,14	15,64	58,18	192,66
	BSM	15,22	0,18	0,62	2,37	5,90	14,90	57,00	204,77
Renten		4,67	3,39	3,76	4,19	4,56	5,03	5,96	7,34

Tabelle 5.1: Endwert Quantile der Aktien- und Rentenfonds.

5.1.1 Einmalbeitrag

Im Einmalbeitragsfall wird mit Hilfe des Satzes 4.1.8 ein Mischfonds zu dem gegebenen Lifecycle Fonds erzeugt. Tabelle 5.2 gibt einen Überblick über die Eckdaten der betrachteten Fonds. Es zeigt sich, dass zu dem gegebenen Lifecycle Fonds ein Mischfonds mit einem Aktienfondsanteil von 58,16% und Gebühren p.a. von 0,244% bestimmt wird. Neben dem Lifecycle- und Mischfonds sind auch die Eckdaten des Mischfonds+ aufgelistet, welcher wie in Bemerkung 4.1.9 beschrieben, den gleichen Aktienfondsanteil wie der Mischfonds besitzt, allerdings in der Höhe der Gebühren dem Lifecycle Fonds entspricht. In den späteren Analysen wird der Schwerpunkt auf den Vergleich des Lifecycle- und Mischfonds gelegt. Daneben findet in Kapitel 6.1.3 eine Analyse des zusätzlichen Mischfonds+ statt. Die Betrachtung dieses Fonds ist insofern wichtig, da dieser identische Gebühren wie der Lifecycle Fonds aufweist und daher die Ergebnisse nicht durch unterschiedlich hohe Gebühren verzerrt werden bzw. der Einfluss der Gebühren auf die Ergebnisse im Vergleich von Lifecycle- und Mischfonds eingeschätzt werden kann.

Abbildung 5.1 zeigt mit Hilfe von Histogrammen die Verteilungen der mittleren jährlichen Renditen des Lifecycle- und Mischfonds im CIR-BSM und CIR-SV. Im Vergleich der beiden Kapitalmarktmodelle wird ersichtlich, dass die Struktur der Verteilungen in beiden Fällen nahezu übereinstimmt. So treten für den Mischfonds im CIR-BSM in 1,2% der Fälle Renditen von höchstens 0,5% ein und im CIR-SV in 1,7% der Fälle, bei Rendi-

Fondstyp	Laufzeit T	Beitrag	Fondsgebühren p.a. c	Aktienfonds Anteil x
Lifecycle	35 Jahre	1	0,000%	linear abnehmend
Mischfonds	35 Jahre	1	0,244%	0,5816
Mischfonds+	35 Jahre	1	0,000%	0,5816

Tabelle 5.2: Fonds- und Investmentdaten bei Einmalbeitrag.

ten zwischen 0,5% und 2,5% (7,4% und 7,5%) sowie 5,5% und 8,5% (41,1% und 41,2%) liegen die Werte lediglich um 0,1% auseinander und bei Renditen zwischen 2,5% und 5,5% ebenfalls nur um 1,3% (36,6% und 35,3%). Vergleichbare Übereinstimmungen lassen sich auch bei den Renditen des Lifecycle Fonds feststellen. Neben Abbildung 5.1 gibt auch Tabelle 5.3 einen Überblick über die Verteilungen der erzielten Endwerte der unterschiedlichen Fonds in den betrachteten Kapitalmarktmodellen. Hier lässt sich der durch die unterschiedliche Modellierung des Aktienkurses verursachte Effekt, dass im CIR-SV der Mittelwert und der Median der Fonds etwas höher ist als im CIR-BSM, erkennen. Ein wesentliches Ziel dieses Abschnittes ist es, die Übereinstimmung der Endwertverteilungen der modellierten Lifecycle- und Mischfonds in komplexeren Kapitalmarktmodellen zu beschreiben. Abbildung 5.1 zeigt, dass im Einmalbeitragsfall die Verteilungen der beiden Fonds sehr ähnlich sind, so ist beispielsweise im CIR-SV der Anteil an Renditen von höchstens 0,5% für den Mischfonds bei 1,7% und für den Lifecycle Fonds bei 2%, bei Renditen zwischen 0,5% und 2,5% bei 7,5% bzw. 7,6%, bei Renditen zwischen 2,5% und 5,5% bei 35,3% bzw. 35,0%, bei Renditen zwischen 5,5% und 8,5% bei 41,2% bzw. 41,0% und bei Renditen größer als 8,5% ist der Anteil sogar identisch in beiden Fällen bei 14,3%. Wie Abbildung 5.1 zeigt, ist auch im CIR-BSM Fall eine vergleichbare Übereinstimmung gegeben.

Fondstyp	Modell	Mittelwert	0,005	0,05	0,25	Median	0,75	0,95	0,995
Lifecycle	SV	8,54	0,59	1,44	3,52	6,18	10,80	23,14	47,65
	BSM	8,47	0,73	1,55	3,48	6,03	10,55	23,39	49,96
Mischfonds	SV	8,57	0,64	1,52	3,53	6,20	10,73	23,45	48,58
	BSM	8,51	0,77	1,60	3,53	6,06	10,56	23,37	51,86
Mischfonds+	SV	9,33	0,70	1,66	3,85	6,75	11,69	25,55	52,92
	BSM	9,28	0,83	1,74	3,84	6,60	11,51	25,46	56,50

Tabelle 5.3: Endwert Quantile von Lifecycle- und Mischfonds(+) bei Einmalbeitrag.

5 Vorbereitende Analysen

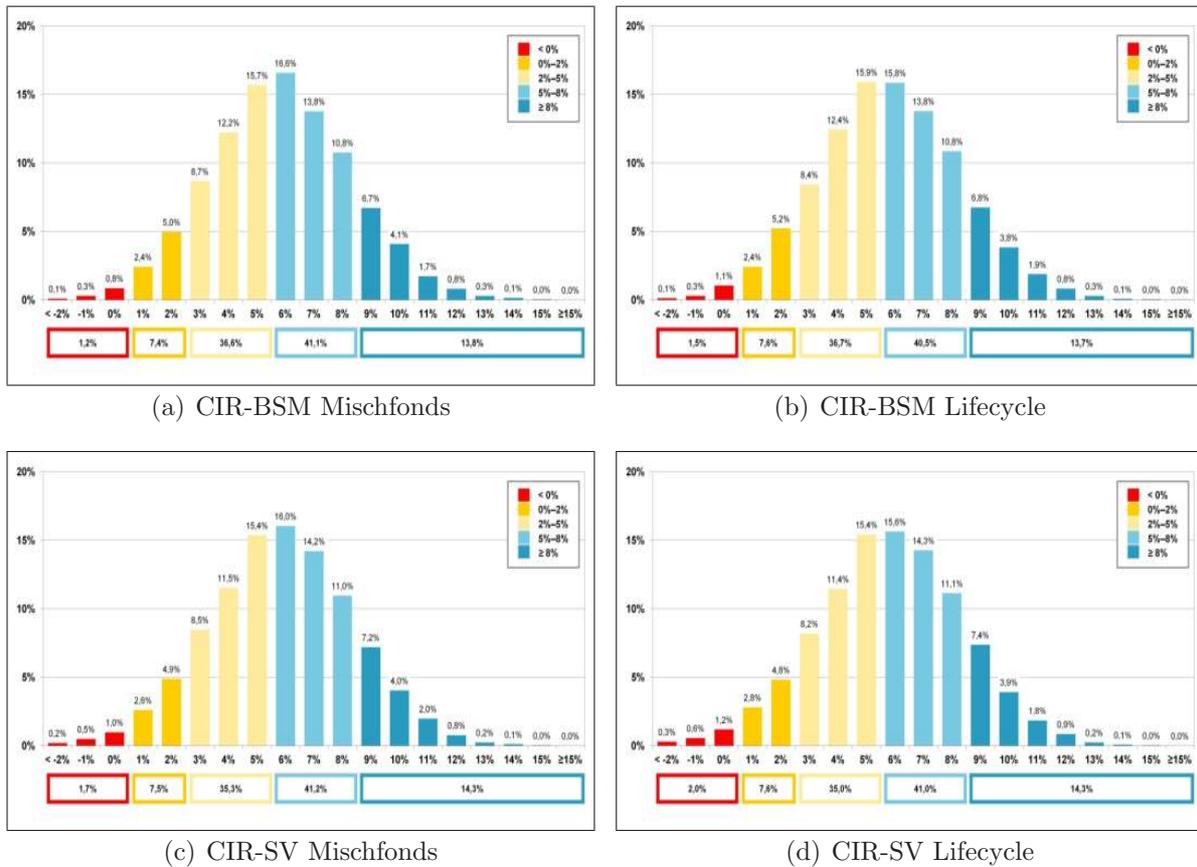


Abbildung 5.1: Mittlere jährliche Renditen im CIR-BSM und -SV bei Einmalbeitrag

In Tabelle 5.3 wird diese Übereinstimmung der beiden Fonds nochmals verdeutlicht. So stimmen die verschiedenen Quantile, wie auch die Mittelwerte und Mediane nahezu überein. Insbesondere im Bereich der inneren Quantile ist eine hohe Übereinstimmung gegeben. An den äußeren Quantilen nimmt diese Übereinstimmung leicht ab. Bis auf diese kleine Einschränkung ist die Übereinstimmung in beiden Modell jedoch sehr hoch, sodass im Einmalbeitragsfall von zwei im Endwert vergleichbaren Fondsinvestments gesprochen werden kann. Analog zu Graf (2013, [Gra13]) lässt sich auch in dem hier betrachteten Fall dieses Ergebnis zusätzlich noch durch den Kolmogorow-Smirnow Zweistichprobenmodell Test bekräftigen³. Die Ergebnisse dieses Tests werden in Tabelle 5.4 gegeben und zeigen, dass in beiden betrachteten Kapitalmarktmodellen bei einem

³Durchgeführt in MATLAB. Eine ausführliche Beschreibung des Kolmogorow-Smirnow Zweistichprobenmodell Tests findet sich z.B. in (1981, [PG81]).

Modell	Kolmogorow-Smirnow		
	$H_0 : F_{\hat{V}_T^L}(x) = F_{\hat{V}_T^B}(x)$	Teststatistik	P-Wert
CIR-BSM	nicht verworfen	0,00865	0,441
CIR-SV	nicht verworfen	0,00660	0,75

Tabelle 5.4: Kolmogorow-Smirnow Test bei Einmalbeitrag.

angenommenen Signifikanzniveau von 5% die Nullhypothese H_0 , dass beide empirischen Verteilungen $F_{\hat{V}_T^L}(x)$ und $F_{\hat{V}_T^B}(x)$ von der gleichen Verteilung stammen, nicht verworfen wird.

Des Weiteren zeigt Tabelle 5.3 die Auswirkung des Gebührenfaktors des Mischfonds im Vergleich zum Mischfonds+. So sind die Endwerte des Mischfonds+ im Durchschnitt um ca. 9% höher im Vergleich zum Mischfonds. Die übrige Verteilungsstruktur des Mischfonds+ ist vergleichbar mit der des Mischfonds.

5.1.2 Laufender Beitrag

Im laufenden Beitragsfall wird mit Hilfe des Algorithmus 4.1.20 der Mischfonds zu dem gegebenen Lifecycle Fonds erzeugt. In Tabelle 5.5 wird ein Überblick über die Eckdaten der betrachteten Fonds in diesem Fall gegeben. Zu dem gegebenen Lifecycle Fonds wird ein Mischfonds mit einem Aktienfondsanteil von 41,73% und Gebühren p.a. von 0,094% bestimmt. Im Vergleich zum Einmalbeitragsfall ist somit zum einen der Aktienfondsanteil geringer als 50% und zum anderen ist der Gebührenunterschied zwischen Lifecycle- und Mischfonds deutlich geringer als im Einmalbeitragsfall. Neben dem Lifecycle- und Mischfonds werden erneut auch die Eckdaten des Mischfonds+, dessen Eigenschaften zwar lediglich in Bemerkung 4.1.9 für den Einmalbeitragsfall beschrieben wurde, dessen Betrachtung, insbesondere im Hinblick auf die Auswirkung des Gebührenfaktors, aber auch im laufenden Beitragsfall sinnvoll ist, gegeben. Auch im laufenden Beitragsfall wird in den späteren Analysen der Schwerpunkt auf den Vergleich des Lifecycle- und Mischfonds gelegt. Außerdem wird in Kapitel 7.1.3 auch eine Analyse des Mischfonds+ im laufenden Beitragsfall durchgeführt.

In Abbildung 5.2 werden die Verteilungen der mittleren jährlichen Renditen des Lifecycle- und Mischfonds im CIR-BSM und CIR-SV dargestellt. Wie im Einmalbeitragsfall zeigt sich auch hier im Vergleich der beiden Kapitalmarktmodelle, dass die Struktur der Ver-

Fondstyp	Laufzeit T	Zahlweise	Beitrag	Fondsgebühren p.a. c	Aktienfonds Anteil x
Lifecycle	35 Jahre	jährlich	1	0,000%	linear abnehmend
Mischfonds	35 Jahre	jährlich	1	0,094%	0,4173
Mischfonds+	35 Jahre	jährlich	1	0,000%	0,4173

Tabelle 5.5: Fonds- und Investmentdaten bei laufendem Beitrag.

teilungen in beiden Fällen nahezu übereinstimmt. So gilt für den Mischfonds im CIR-BSM, dass in 0,2% der Fälle die Rendite höchstens 0,5% beträgt und im CIR-SV in 0,4% der Fälle, bei Renditen zwischen 0,5% und 2,5% weichen die Werte um 0,2% voneinander ab, bei Renditen zwischen 2,5% und 5,5% um 1,4% und bei Renditen zwischen 5,5% und 8,5% sowie Renditen über 8% stimmen CIR-SV und CIR-BSM sogar überein. Für den Lifecycle Fonds ergeben sich, wie in Abbildung 5.2 ersichtlich, vergleichbare Übereinstimmungen.

Fondstyp	Modell	Mittelwert	0,005	0,05	0,25	Median	0,75	0,95	0,995
Lifecycle	SV	117,1	41,8	55,9	79,5	104,1	139,6	220,7	365,7
	BSM	116,7	43,8	56,6	79,0	103,0	138,1	222,3	376,6
Mischfonds	SV	116,6	36,2	52,6	79,3	105,0	141,0	219,9	339,3
	BSM	116,4	38,4	53,7	78,8	104,1	139,7	221,1	348,8
Mischfonds+	SV	119,2	36,9	53,6	80,9	107,3	144,1	225,1	347,6
	BSM	119,0	39,1	54,8	80,4	106,4	142,8	226,2	357,5

Tabelle 5.6: Endwert Quantile von Lifecycle- und Mischfonds(+) bei laufendem Beitrag.

In Tabelle 5.6 wird diese Übereinstimmung der beiden Fonds anhand von Quantilen nochmals beschrieben. Es wird deutlich, dass das Ziel der in Algorithmus 4.1.20 beschriebenen Modellierung, die Momente der beiden Fonds aneinander anzupassen auch in den komplexeren Kapitalmodellen erreicht wird. So stimmen die Mittelwerte und Mediane nahezu perfekt überein. Auch die inneren Quantile, vor allem die 25% bis 95% Quantile, liegen sehr nahe beieinander und bestätigen die vergleichbaren Verteilungsstrukturen. Allerdings ist im Bereich der äußeren Quantile, insbesondere beim 0,5%, 5% und 99,5% Quantil, die Übereinstimmung, auch im Vergleich zu den Ergebnissen im Einmalbeitragsfall, deutlich schlechter. Diese Abweichungen sorgen auch dafür, dass genau wie bei den von Graf (2013, [Gra13]) betrachteten Fonds, auch bei den hier simulierten

5 Vorbereitende Analysen

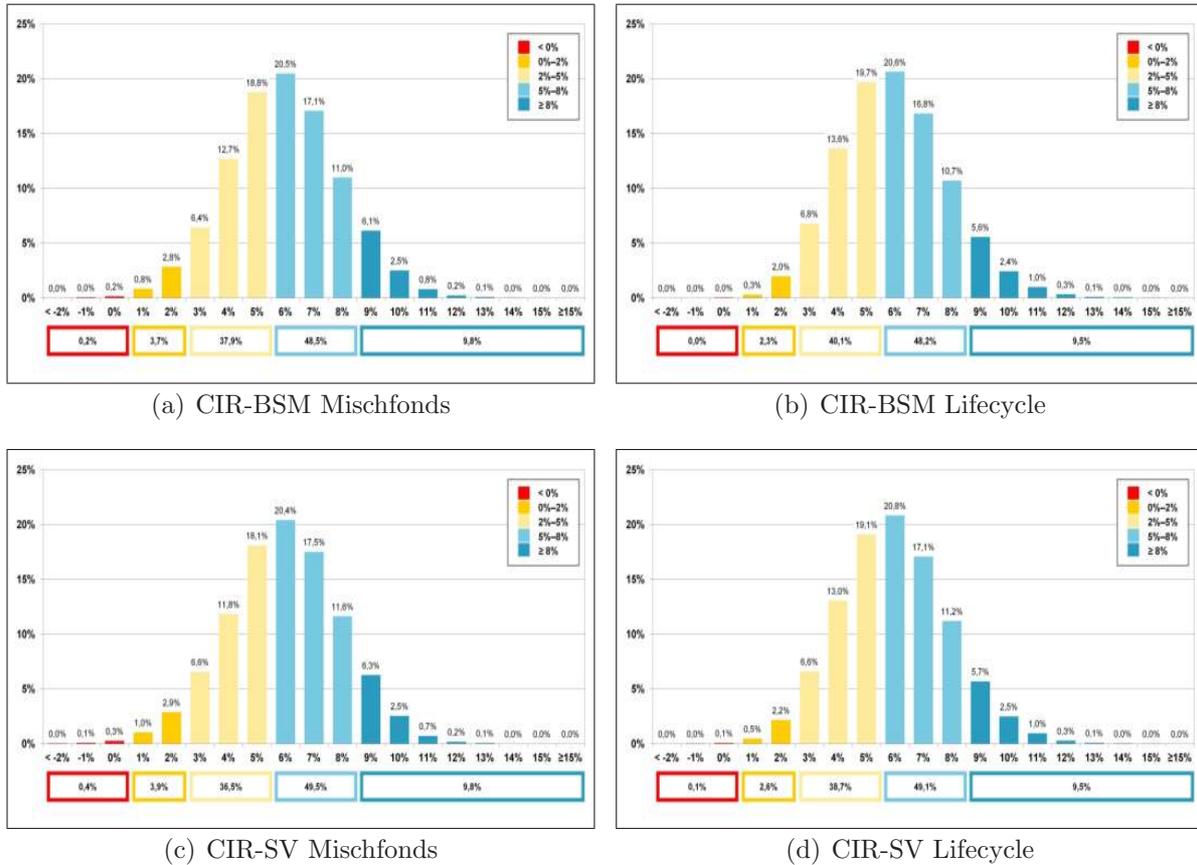


Abbildung 5.2: Mittlere jährliche Rendite im CIR-BSM und -SV bei laufendem Beitrag

Fonds die Nullhypothese $H_0 : F_{\hat{Y}_T^L}(x) = F_{\hat{Y}_T^B}(x)$ im Kolmogorow-Smirnow Zweistichprobenmodell Test, bei einem angenommenen Signifikanzniveau von 5%, im Gegensatz zum Einmalbeitragsfall, verworfen wird. Die Ergebnisse dieser Tests sind in Tabelle 5.7 aufgeführt. Trotz der verworfenen Nullhypothese zeigen die Ergebnisse der simulierten Lifecycle- und Mischfonds insgesamt, dass auch im laufenden Beitragsfall sehr vergleichbare Endwertverteilungen mit den beiden Fonds erzielt werden.

In Tabelle 5.6 werden des Weiteren die Auswirkungen des Gebührenfaktors des Mischfonds im Vergleich zum Mischfonds+ bei laufenden Beiträgen aufgezeigt. Im Vergleich zum Einmalbeitragsfall ist die Auswirkung, aufgrund des geringeren Gebührenfaktors im laufenden Beitragsfall, mit einem im Durchschnitt um ca. 2% höheren Endwert beim Mischfonds+ im Vergleich zum Mischfonds, deutlich geringer. Die Struktur der Vertei-

lung des Mischfonds+ ist vergleichbar mit der des Mischfonds.

Modell	Kolmogorow-Smirnow		
	$H_0 : F_{\hat{Y}_T^L}(x) = F_{\hat{Y}_T^B}(x)$	Teststatistik	P-Wert
CIR-BSM	verworfen	0,0167	0,00746
CIR-SV	verworfen	0,0188	0,00161

Tabelle 5.7: Kolmogorow-Smirnow Test bei laufendem Beitrag.

5.2 Erwartungsnutzentheorie Analyse

In Abschnitt 5.1 wurde gezeigt, dass die betrachteten Fonds im Hinblick auf ihre Endwerte vergleichbare Verteilungen besitzen. Allerdings stimmen diese, aufgrund der Modellierung und/oder der verwendeten komplexeren Kapitalmarktmodelle nicht vollkommen überein. Insbesondere an den Tails der Verteilungen treten kleinere Unterschiede auf, weshalb in diesem Abschnitt untersucht wird, ob die Erwartungsnutzentheorie unterschiedliche Ergebnisse für die beiden betrachteten Fonds hervorbringt.

Bei den Untersuchungen werden die in Kapitel 3.1 eingeführten Methoden und Funktionen verwendet. Es werden dabei alle in Beispiel 3.1.15 formulierten Nutzenfunktionen betrachtet, d.h. Power, Exponential und die Quadratische Nutzenfunktion. Es wird auch in diesem Abschnitt in Einmalbeitragsfall und laufenden Beitragsfall unterschieden.

Da sich in Abschnitt 5.1 zeigt, dass die Übereinstimmungen in den beiden Kapitalmarktmodellen vergleichbar sind und tendenziell im CIR-SV, aufgrund der stochastischen Volatilität, etwas schlechter ausfallen und darüber hinaus Auswertungen zeigen, dass die für das CIR-SV Modell erhaltenen Ergebnisse beinahe identisch auf das CIR-BSM übertragbar sind, werden in diesem Abschnitt nur die Ergebnisse im CIR-SV Modell beschrieben.

Im Folgenden werden Lifecycle- und Mischfonds, wie in dem vorherigen Abschnitt beschrieben, unter einem CIR-SV Modell betrachtet. Daneben wird stets auch der Erwartungsnutzen des Mischfonds+ ausgewertet, um einen Eindruck des Gebührenfaktors auf den Erwartungsnutzen zu erhalten. Als Referenzgrößen werden des Weiteren ein Fondsinvestment, das nur in den Aktienfonds investiert, und ein Fondsinvestment, das nur in den Rentenfonds investiert, ausgewertet.

5.2.1 Einmalbeitrag

Im Einmalbeitragsfall zeigt Abbildung 5.3 den Erwartungsnutzen für die drei in Kapitel 3.1 vorgestellten Nutzenfunktionen für verschiedene Ausprägungen der Risikoaversion (α) und die damit verbundene Sensitivität des Nutzens auf Endwertveränderungen. Die α -Werte müssen dabei aufgrund der unterschiedlichen Charakteristiken der Funktionen entsprechend gewählt werden. Insbesondere im Exponential und im Quadratischen Fall müssen die Parameter entsprechend der zu untersuchenden Endwerte gewählt werden, da diese Funktionen beschränkt sind. Bei der Quadratischen Nutzenfunktion ist der erzielte Nutzen ab einem Endwert von $\frac{\alpha}{2}$ sogar stets konstant.

Aus Abbildung 5.3 wird direkt klar, dass ein Unterschied im Erwartungsnutzen von Lifecycle- und Mischfonds in allen betrachteten Fällen und für alle Werte von α kaum vorhanden ist. So liegen die Erwartungsnutzenlinien des Lifecycle- und des Mischfonds nahezu komplett aufeinander, während ein Unterschied zu den anderen Fondsinvestments je nach Wahl von α offensichtlich vorhanden ist. Es zeigt sich für den Mischfonds+ erwartungsgemäß, dass dieser aufgrund der besseren Endwertverteilung den Lifecycle- und den Mischfonds im Hinblick auf den Erwartungsnutzen für jeden Wert von α und jede Nutzenfunktion überbietet. Beim Exponential (CARA) bzw. dem Quadratischen (HARA) Erwartungsnutzen gilt zudem, dass für kleine bzw. große α -Werte die Risikoaversion abnimmt, sodass ab einem bestimmten Wert (ab $\alpha < 0,08$ bzw. $\alpha > 55$) das reine Aktienfondsinvestment bevorzugt wird. Umgekehrt nimmt die Risikoaversion zu, sodass im Extremfall sogar ein reines Rentenfondsinvestment den höchsten Erwartungsnutzen erzielt. In den mittleren α -Bereichen zeigt sich in diesen beiden Fällen, dass Lifecycle- und Mischfonds(+) einen höheren Erwartungsnutzen als reine Aktien- bzw. Rentenfondsinvestments erreichen, wodurch auch durch die Erwartungsnutzentheorie deren Existenz bestärkt wird. Bei der Betrachtung der Power (CRRA) Nutzenfunktion bleibt allerdings die Reihenfolge der Fondsinvestments für alle α -Werte identisch und wird von einem reinen Aktienfondsinvestment dominiert, lediglich der absolute Erwartungsnutzenunterschied ändert sich⁴.

Insgesamt lässt sich festhalten, dass im Einmalbeitragsfall in der Erwartungsnutzen-

⁴Die Reihenfolge wird auch für kleine α beibehalten, die in Abbildung 5.3 nicht sichtbar sind. Des Weiteren wirkt sich der Skalierungsfaktor $\frac{1}{\alpha}$ nicht auf die Reihenfolge aus, da er lediglich ein multiplikativer Faktor ist und sich dementsprechend nur multiplikativ auf den Abstand auswirkt.

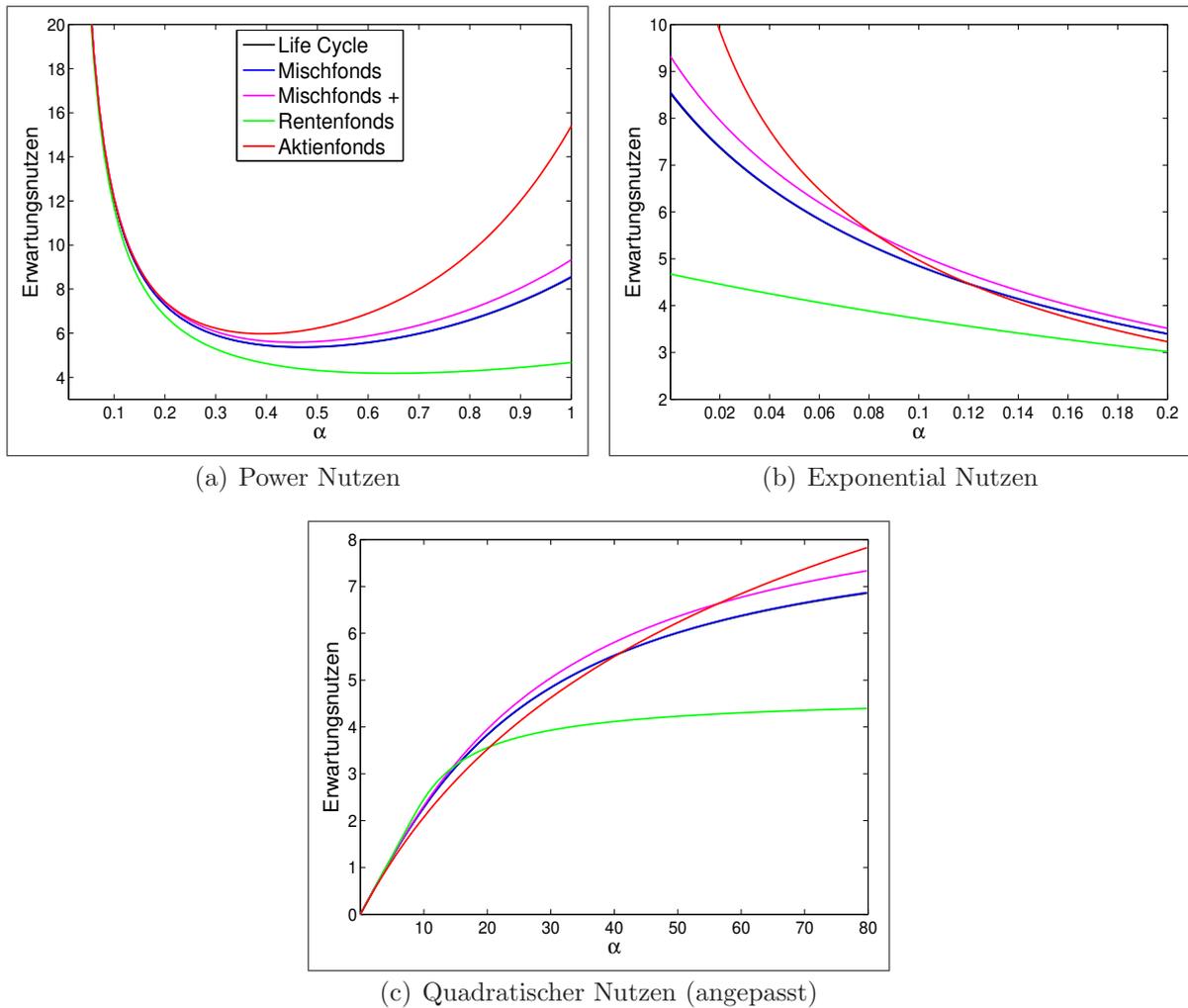


Abbildung 5.3: Vergleich des Erwartungsnutzen im CIR-SV bei Einmalbeitrag.

theorie kein signifikanter Unterschied zwischen Lifecycle- und Mischfonds auszumachen ist und beide einen beinahe identischen Erwartungsnutzen erzielen. Dementsprechend bietet die Erwartungsnutzentheorie im Hinblick auf diese beiden Investments keine Entscheidungsgrundlage bzw. schätzt beide Investments als gleich gut/schlecht ein.

5.2.2 Laufender Beitrag

Im laufenden Beitragsfall werden die Ergebnisse für verschiedene α -Werte in Abbildung 5.4 abgebildet. Aufgrund der unterschiedlichen Endwerte im Vergleich zum Einmalbei-

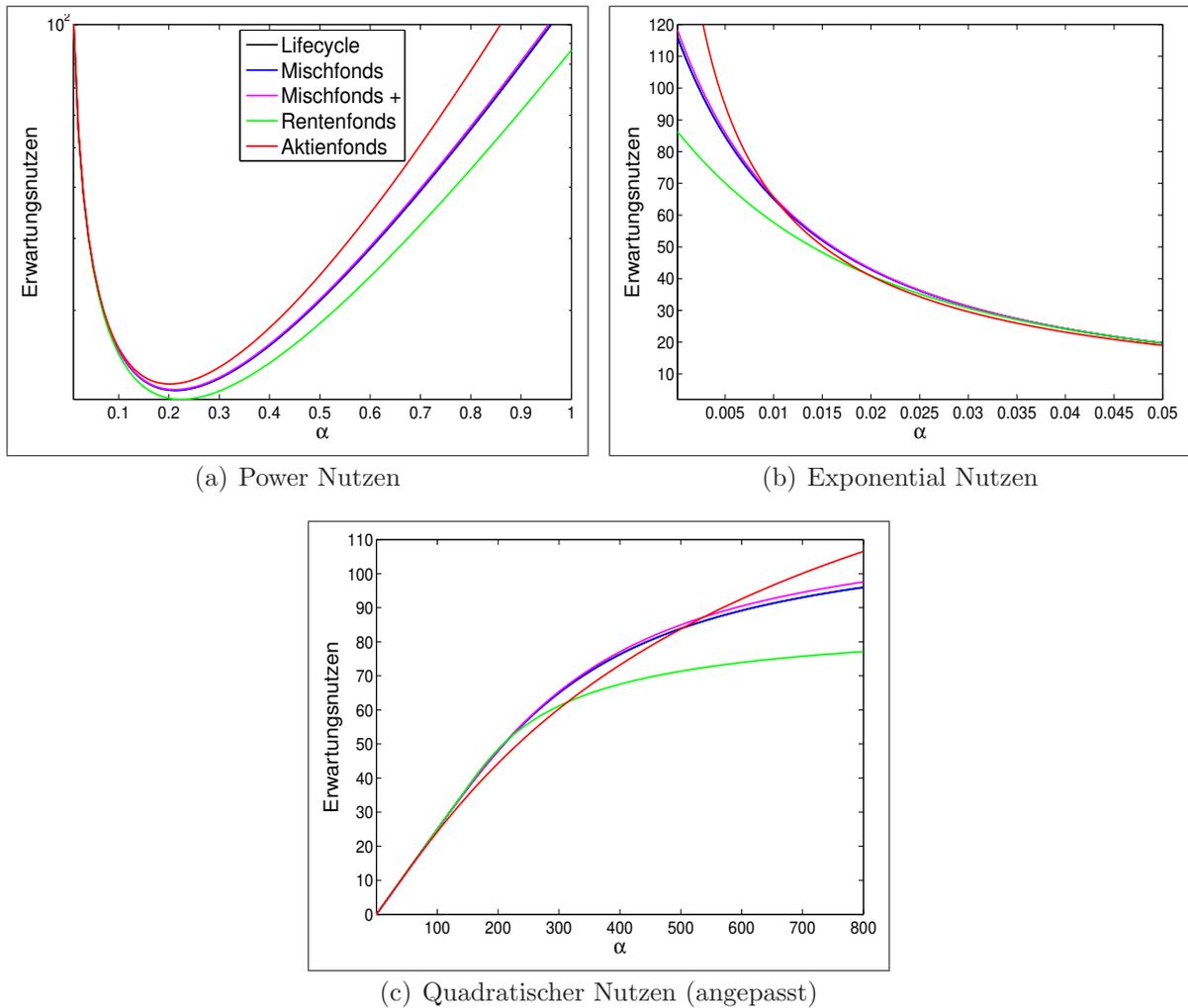


Abbildung 5.4: Vergleich des Erwartungsnutzen im CIR-SV bei laufendem Beitrag.

tragsfall unterscheidet sich teilweise die Auswahl der α -Werte.

Die Ergebnisse sind vergleichbar zu denen im Einmalbeitragsfall. Erneut zeigt sich, dass ein Unterschied im Erwartungsnutzen von Lifecycle- und Mischfonds in allen betrachteten Fällen und für alle Werte von α kaum vorhanden ist. Die Erwartungsnutzenlinien des Lifecycle- und des Mischfonds liegen auch im laufenden Beitragsfall nahezu aufeinander. Der Mischfonds+ ist auch hier leicht dominant gegenüber dem Lifecycle- und Mischfonds, allerdings ist der Unterschied aufgrund des geringeren Gebührenunterschiedes im laufenden Beitragsfall deutlich geringer als im Einmalbeitragsfall. Beim Exponential bzw.

dem Quadratischen Erwartungsnutzen zeigt sich wieder, dass für kleine bzw. große α -Werte die Risikoaversion abnimmt und das reine Aktienfondsinvestment bevorzugt wird. Umgekehrt betrachtet, bietet auch hier das reine Rentenfondsinvestment den höchsten Erwartungsnutzen. Dazwischen erzielen wieder die Lifecycle- und Mischfonds(+) die höchsten Erwartungsnutzen. Bei der Betrachtung der Power Nutzenfunktion zeichnet sich erneut ab, dass die Reihenfolge der Fondsinvestments für alle α -Werte identisch ist und von einem reinen Aktienfondsinvestment dominiert wird.

Insgesamt gilt auch für diesen Fall, dass in der Erwartungsnutzentheorie kein signifikanter Unterschied zwischen Lifecycle- und Mischfonds auszumachen ist und beide einen beinahe identischen Erwartungsnutzen erzielen. Daher bietet auch im laufenden Beitragsfall die Erwartungsnutzentheorie im Hinblick auf diese beiden Investments keine Entscheidungshilfe.

5.3 Analyse der Wertschwankungen

Abschnitt 5.2 zeigte, dass die in dieser Arbeit betrachteten Lifecycle- und Mischfonds im Hinblick auf ihren Erwartungsnutzen, der auf die klassische Weise mit Hilfe der Erwartungsnutzentheorie bezogen auf die Endwerte, bestimmt wurde, nahezu identisch sind. Dementsprechend ist es aus erwartungsnutzentheoretischer Sicht irrelevant, ob sich ein Anleger für den Lifecycle- oder für den Mischfonds entscheidet, da er in beiden Fällen den identischen Nutzen erhält. Allerdings sind die betrachteten Lifecycle- und Mischfonds lediglich in ihrer Endwertverteilungen nahezu identisch. In ihrer Zusammensetzung und in ihrem Verlauf unterscheiden sie sich entscheidend voneinander. Während der Mischfonds stets den gleichen Anteil in Aktien- bzw. Rentenfonds investiert, findet beim Lifecycle Fonds über die gesamte Laufzeit eine Umschichtung von Aktien- zu Rentenfondsanteilen statt.

Der unterschiedliche Verlauf ist daher von Bedeutung, da ein Anleger bei einer langfristigen Anlage, hier 35 Jahre, auch die zwischenzeitlichen Wertstände, z.B. bei der Jahresabrechnung, der Anlage überprüft bzw. wahrnimmt. Daher stellt sich zwangsläufig die Frage, welchen Einfluss der Verlauf auf den subjektiven Nutzen eines Anlegers hat. Um diesen Nutzen zu erfassen, müssen zuerst geeignete Größen, die den unterschiedli-

chen Verlauf widerspiegeln, analysiert werden. In diesem Fall sind die jährlichen Wertschwankungen die idealen Größen, da sie die Änderungen der Fonds während der Laufzeit erfassen und auch vom Anleger in dieser Form registriert werden. Mit Hilfe dieser Schwankungen wird in den folgenden Kapiteln 6 und 7 der MCPT^w-Nutzen aus Kapitel 3.2.4 der Fonds untersucht.

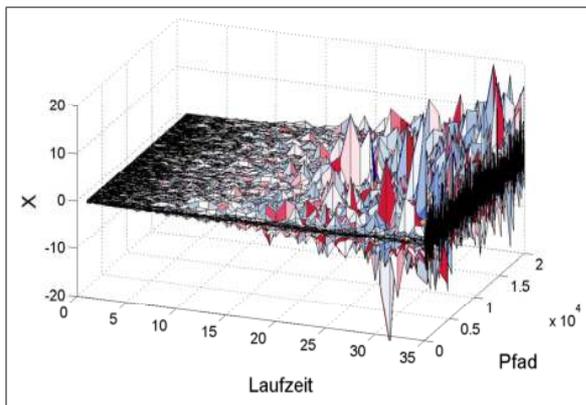
Dieser Abschnitt dient dazu, einen Eindruck über die, in den späteren Prospect Theorie Analysen verwendeten, Wertschwankungen der verschiedenen Fonds zu geben. Dabei werden die jährlichen Wertschwankungen in relativer (jährliche Renditen) und absoluter Form betrachtet. Diese werden in der in Definition 3.2.6 gegebenen Form für die einzelnen Fonds bestimmt und ausgewertet. Darüber hinaus werden die absoluten Schwankungen auch noch im Verhältnis zu den Beiträgen betrachtet, um zusätzlich eine von der Beitragshöhe unabhängige Interpretation zu ermöglichen. Es werden hierbei lediglich die Ergebnisse für das CIR-SV Modell beschrieben. Die beiden Kapitalmarktmodelle erzeugen, insbesondere im Hinblick auf den späteren Einsatz, vergleichbare Wertschwankungen. Bei den hauptsächlich verwendeten absoluten Wertschwankungen ist nur ein sehr geringer Unterschied zwischen CIR-BSM und CIR-SV Modell auszumachen. Dagegen lässt sich im CIR-SV im Vergleich zum CIR-BSM Modell, aufgrund der stochastisch modellierten Volatilität, im Fall von relativen Wertschwankungen (Renditen) eine Zunahme der besonders extremen Ereignisse beobachten. Insgesamt ist die Struktur der Verteilungen der Wertschwankungen allerdings in beiden Fällen sehr ähnlich, weshalb die Betrachtung eines Modells für die folgenden Zwecke ausreichend ist.

5.3.1 Einmalbeitrag

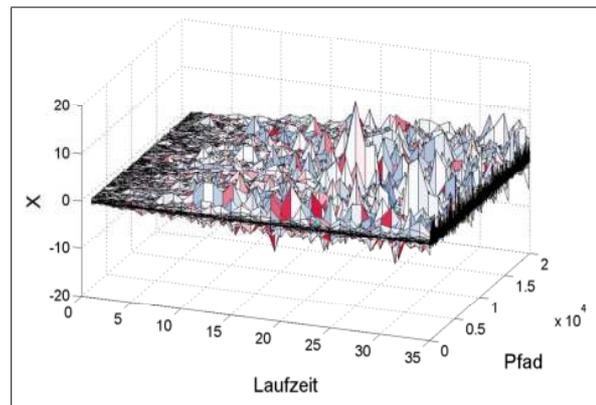
Im Einmalbeitragsfall zeigt Abbildung 5.5 die jährlichen Renditen und absoluten Wertschwankungen in ihrer ursprünglichen Form, d.h. es werden die Wertschwankungen der einzelnen simulierten Pfade pfadweise in einem Schaubild abgebildet. Bereits in dieser Darstellung werden die Unterschiede der beiden Fonds offensichtlich.

So zeigt sich bei den Renditen des Mischfonds aufgrund der über die Zeit gleichbleibende Investmentstrategie eine über die gesamte Laufzeit gleichbleibende Struktur. Beim Lifecycle Fonds nimmt dagegen, aufgrund der abnehmenden Aktienfondsanteile, die Schwankungsbreite der Renditen ab, wodurch auf der einen Seite das Risiko, auf der

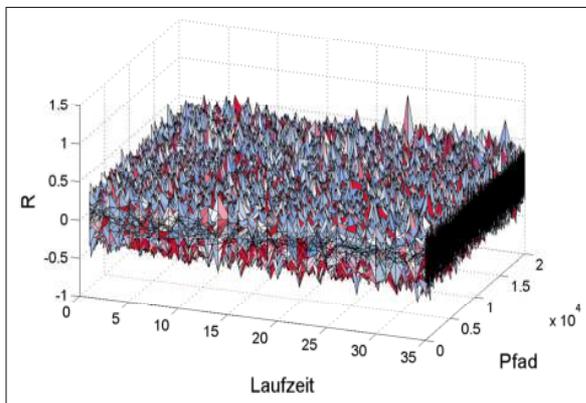
anderen Seite aber auch die Chancen geringer werden. Bei der Betrachtung der absoluten Wertschwankungen⁵ ergibt sich folglich beim Mischfonds eine starke Zunahme der Schwankungsbreite gegen Ende der Laufzeit. Im Gegensatz dazu sind die absoluten Wertschwankungen des Lifecycle Fonds über die gesamte Laufzeit homogener verteilt, d.h. zu Beginn ist die Schwankungsbreite größer als beim Mischfonds, mit zunehmender Laufzeit steigt sie allerdings deutlich geringer an und fällt gegen Ende der Laufzeit, durch das komplette Umschichten in Rentenfondsanteile, wieder etwas ab.



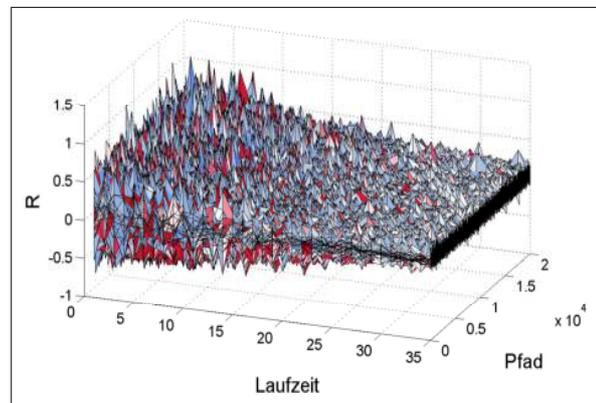
(a) Wertschwankungen Mischfonds



(b) Wertschwankungen Lifecycle



(c) Renditen Mischfonds



(d) Renditen Lifecycle

Abbildung 5.5: Wertschwankungen und Renditen im CIR-SV bei Einmalbeitrag.

⁵Da der Einmalbeitrag 1 Euro beträgt, können im Einmalbeitragsfall die absoluten Ergebnisse direkt auf andere Beitragshöhen angewandt werden, d.h. die absoluten Ergebnisse sind identisch mit den prozentualen Änderungen im Verhältnis zur Beitragshöhe.

Bei der Betrachtung der Renditen ist bereits durch die bekannten Aktienfondsanteile analytisch klar, dass die Renditen ab dem 14. Jahr im Lifecycle Fonds sicherheitsorientierter sind, da ab diesem Jahr der Rentenfondsanteil des Lifecycle Fonds den des Mischfonds übertrifft.

Jahr	Schwankungsquantile Lifecycle Fonds						
	0,005	0,05	0,25	Median	0,75	0,95	0,995
1	-0,509	-0,302	-0,076	0,080	0,231	0,451	0,683
5	-0,757	-0,351	-0,067	0,085	0,253	0,604	1,058
10	-1,080	-0,417	-0,055	0,098	0,294	0,806	1,735
15	-1,365	-0,437	-0,039	0,115	0,347	0,978	2,238
20	-1,303	-0,405	-0,014	0,142	0,401	1,142	2,712
25	-1,179	-0,318	0,014	0,166	0,432	1,236	2,979
30	-0,850	-0,175	0,044	0,188	0,453	1,309	3,208
35	-0,920	-0,201	0,049	0,204	0,496	1,465	3,760

Tabelle 5.8: Quantile der absoluten Lifecycle Schwankungen bei Einmalbeitrag.

Jahr	Schwankungsquantile Mischfonds						
	0,005	0,05	0,25	Median	0,75	0,95	0,995
1	-0,318	-0,168	-0,024	0,068	0,152	0,270	0,388
5	-0,433	-0,210	-0,027	0,079	0,184	0,364	0,571
10	-0,666	-0,293	-0,035	0,097	0,241	0,538	0,962
15	-0,972	-0,386	-0,045	0,119	0,320	0,761	1,479
20	-1,344	-0,513	-0,055	0,152	0,425	1,093	2,213
25	-1,956	-0,703	-0,067	0,188	0,553	1,498	3,337
30	-2,741	-0,910	-0,074	0,241	0,724	2,136	5,019
35	-4,396	-1,365	-0,104	0,301	0,945	2,995	7,798

Tabelle 5.9: Quantile der absoluten Mischfonds Schwankungen bei Einmalbeitrag.

In den Tabellen 5.8 und 5.9 werden die Strukturen der absoluten Wertschwankungen nochmals exakt mit Hilfe von Quantilen für verschiedene Jahre angegeben. Der in den Kapitalmarktmodellen modellierte positive Drift verursacht die positiven Mediane der Wertschwankungen. Des Weiteren bestätigt sich hier der in den Schaubildern bereits gewonnene Eindruck: Während der Mischfonds auch im letzten Jahr für das 5%-Quantil noch Verluste in Höhe von -1,365 ausweist, sind diese beim Lifecycle Fonds mit -0,201

deutlich geringer. Das 25%-Quantil der Wertschwankungen des Lifecycle Fonds ist bereits ab dem 22. Jahr stets positiv, wohingegen dieses im Mischfonds über die gesamte Laufzeit negativ ist. Bei der Betrachtung beider Fondstypen lässt sich beobachten, dass der Lifecycle Fonds die Endwertverteilung mit deutlich weniger Schwankungen in den letzten Jahren erzielt, während im Mischfonds auch in diesen Jahren noch große Änderungen auftreten können. So kann im Fall eines schlechten Verlaufes beim Mischfonds dennoch am Ende der Laufzeit ein hoher Gewinn erzielt werden. Im Gegensatz dazu lässt der Lifecycle Fonds zum Ende der Laufzeit keine großen Schwankungen nach oben und unten mehr zu. Da langfristige Investments aber oftmals der Altersvorsorge dienen, sind große Änderungen, aufgrund der Verlustgefahr und der damit verbundenen Unsicherheiten, welche die Planungen für die Altersvorsorge stark beeinträchtigen, in den letzten Jahren nicht wünschenswert. Des Weiteren können hohe Wertverluste in den letzten Jahren auch nur noch schwer in der verbleibenden Zeit aufgeholt werden, im Gegensatz zu Verlusten zu Beginn der Laufzeit.

Aufgrund der gewonnenen Eindrücke ist zu vermuten, dass sich ein sicherheitsorientierter Anleger mit diesem Wissen im Einmalbeitragsfall für den Lifecycle- und gegen den Mischfonds entscheiden würde bzw. der Anleger unter der Berücksichtigung der Unsicherheiten, welche die Wertschwankungen in den letzten Jahren im Mischfonds verursachen, einen höheren Nutzen aus einem Investment in den Lifecycle Fonds erhalten würde.

5.3.2 Laufender Beitrag

Im laufenden Beitragsfall können die Schwankungen, analog zu denen im Einmalbeitragsfall in Abbildung 5.5, und die Unterschiede der beiden Fonds auf vergleichbarer Weise veranschaulicht werden. Die Ergebnisse in der Grundstruktur der Wertschwankungen sind grundsätzlich identisch mit denen des Einmalbeitragsfalles. Bei den absoluten Wertschwankungen entstehen allerdings durch die regelmäßigen Beiträge und das dadurch höhere investierte Volumen noch größere Unterschiede im Vergleich der Wertschwankungen zu Beginn und zum Ende der Laufzeit.

Aufgrund des im Vergleich zum Einmalbeitragsfall geringeren Aktienfondsanteils des Mischfonds, sind die Renditen des Lifecycle Fonds erst ab dem 19. Jahr sicherheits-

orientierter als die des Mischfonds. Auch im laufenden Beitragsfall wird ein Überblick über die Quantile der absoluten Wertschwankungen gegeben. In den Tabellen 5.10 und 5.11 zeigt sich, dass insbesondere die Wertverluste des Lifecycle Fonds gegen Ende der Laufzeit im Vergleich zum Mischfonds stark begrenzt werden. Aufgrund des zunehmenden investierten Volumens zum Ende der Laufzeit aber weniger stark als im Vergleich zum Einmalbeitragsfall. Der Mischfonds hat im letzten Jahr für das 5%-Quantil Verluste in Höhe von -12,366 zu verbuchen, der Lifecycle Fonds dagegen nur von -3,150. Das 25%-Quantil der Wertschwankungen des Lifecycle Fonds ist erneut ab dem 22. Jahr stets positiv, während dieses für den Mischfonds auch in diesem Fall über die gesamte Laufzeit negativ ist.

Jahr	Schwankungsquantile Lifecycle Fonds						
	0,005	0,05	0,25	Median	0,75	0,95	0,995
1	-0,509	-0,302	-0,076	0,080	0,231	0,451	0,683
5	-2,837	-1,512	-0,322	0,412	1,160	2,428	3,917
10	-6,423	-3,017	-0,506	0,909	2,408	5,295	9,338
15	-10,004	-4,195	-0,501	1,475	3,676	8,145	15,146
20	-11,763	-4,647	-0,234	2,198	4,914	10,835	19,730
25	-11,430	-4,188	0,287	2,817	5,865	12,433	23,898
30	-8,449	-2,683	1,011	3,423	6,583	13,974	28,013
35	-10,287	-3,150	1,156	3,903	7,638	16,566	34,063

Tabelle 5.10: Quantile der absoluten Lifecycle Schwankungen bei laufendem Beitrag.

Jahr	Schwankungsquantile Mischfonds						
	0,005	0,05	0,25	Median	0,75	0,95	0,995
1	-0,227	-0,113	-0,004	0,064	0,125	0,209	0,291
5	-1,288	-0,625	-0,023	0,343	0,692	1,202	1,752
10	-3,229	-1,497	-0,069	0,774	1,606	2,926	4,489
15	-5,791	-2,601	-0,105	1,328	2,817	5,313	8,393
20	-9,188	-4,016	-0,185	2,114	4,447	8,649	13,825
25	-13,857	-5,983	-0,252	2,976	6,541	12,947	22,091
30	-19,947	-8,305	-0,266	4,232	9,161	19,181	34,792
35	-31,093	-12,366	-0,496	5,718	12,675	27,341	52,490

Tabelle 5.11: Quantile der absoluten Mischfonds Schwankungen bei laufendem Beitrag.

Im Gegensatz zum Einmalbeitragsfall sind die prozentualen Änderungen im Verhältnis

Jahr	Prozentuale Schwankungsquantile Lifecycle Fonds						
	0,005	0,05	0,25	Median	0,75	0,95	0,995
1	-0,509	-0,302	-0,076	0,080	0,231	0,451	0,683
5	-0,567	-0,302	-0,064	0,082	0,232	0,486	0,783
10	-0,642	-0,302	-0,051	0,091	0,241	0,529	0,934
15	-0,667	-0,280	-0,033	0,098	0,245	0,543	1,010
20	-0,588	-0,232	-0,012	0,110	0,246	0,542	0,987
25	-0,457	-0,168	0,011	0,113	0,235	0,497	0,956
30	-0,282	-0,089	0,034	0,114	0,219	0,466	0,934
35	-0,294	-0,090	0,033	0,112	0,218	0,473	0,973

Tabelle 5.12: Quantile der prozentualen Lifecycle Schwankungen bei laufendem Beitrag im Verhältnis zur Beitragshöhe.

Jahr	Prozentuale Schwankungsquantile Mischfonds						
	0,005	0,05	0,25	Median	0,75	0,95	0,995
1	-0,227	-0,113	-0,004	0,064	0,125	0,209	0,291
5	-0,258	-0,125	-0,005	0,069	0,138	0,240	0,350
10	-0,323	-0,150	-0,007	0,077	0,161	0,293	0,449
15	-0,386	-0,173	-0,007	0,089	0,188	0,354	0,560
20	-0,459	-0,201	-0,009	0,106	0,222	0,432	0,691
25	-0,554	-0,239	-0,010	0,119	0,262	0,518	0,884
30	-0,665	-0,277	-0,009	0,141	0,305	0,639	1,160
35	-0,888	-0,353	-0,014	0,163	0,362	0,781	1,500

Tabelle 5.13: Quantile der prozentualen Mischfonds Schwankungen bei laufendem Beitrag im Verhältnis zur Beitragshöhe.

zur eingezahlten Beitragshöhe im laufenden Beitragsfall nicht identisch mit den absoluten Schwankungen, daher werden diese in den Tabellen 5.12 und 5.13 gesondert dargestellt um einen Eindruck unabhängig von der Beitragshöhe zu erhalten. Durch die 0,5%- und 5%-Quantile wird ersichtlich, dass (unabhängig von der Beitragshöhe) die Wertverluste im Verhältnis zur eingezahlten Beitragshöhe des Lifecycle Fonds mit zunehmender Laufzeit stark begrenzt werden und gegen Ende stark abnehmen, während sie für den Mischfonds stark zunehmen. So verliert ein Anleger mit dem Lifecycle Fonds nur mit einer Wahrscheinlichkeit von je ca. 5% mehr als 9% seiner bisher eingezahlten Beiträge in einem der letzten fünf Jahre, wohingegen beim Mischfonds noch im letzten Jahr mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% der Anleger mehr als 35,3% seiner bisher

eingezahlten Beiträge verliert. Der Median des Lifecycle Fonds ist aufgrund des höheren Aktienfondsanteils zu Beginn höher, allerdings nimmt dieser über die Laufzeit beim Mischfonds deutlich stärker zu. Es zeigt sich zudem, dass für den Lifecycle Fonds die 75%- und auch die 95%-Quantile über die gesamte Laufzeit sich nur gering ändern. Dagegen nehmen die 75%-, 95%-Quantile und 99,5% für den Mischfonds deutlich zu. Auch in dieser Darstellung zeigt sich die sicherheitsorientierte Ausrichtung des Lifecycle Fonds mit zunehmender Laufzeit.

Insgesamt zeigen sich auch im laufenden Beitragsfall die im Einmalbeitragsfall beschriebenen Auswirkungen. Diese sind allerdings aufgrund der laufenden Beiträge deutlicher ausgeprägt. Daher ist auch im laufenden Beitragsfall zu vermuten, dass sich ein sicherheitsorientierter Anleger, aufgrund der höheren Planungssicherheit, zumindest bei Altersvorsorgeprodukten für den Lifecycle- und gegen den Mischfonds entscheiden würde.

Zusammenfassend zeigt dieser Abschnitt, dass erhebliche Unterschiede zwischen Lifecycle- und Mischfonds im Hinblick auf ihre Wertschwankungen und damit in ihren Verläufen bestehen. Dies bestärkt die Notwendigkeit, die Unterschiede dieser Fonds während der Investitionsdauer auch im Hinblick auf den Nutzen für einen Anleger zu beschreiben, da dieser die Unterschiede wahrnimmt und bewertet. Abschnitt 5.2 zeigt, dass die Erwartungsnutzentheorie in ihrer klassischen Form diese Unterschiede nicht berücksichtigt, weshalb andere Methoden, die weitere Differenzierungsmerkmale bei der Nutzenbestimmung berücksichtigen, verwendet werden müssen um aussagekräftige Vergleiche solcher Fondstypen durchzuführen. Der Ansatz der Prospect Theorie und insbesondere der daraus resultierende MCPT^w-Nutzen bietet eine solche Methode, die weitere Merkmale und den Verlauf in die Nutzenbestimmung mit einbezieht. Dementsprechend widmen sich Kapitel 6 und 7 der Analyse der Fonds mit Hilfe dieser Methode.

6 MCPT Analyse im Einmalbeitragsfall

In Kapitel 5 wurden die betrachteten Lifecycle- und Mischfonds beschrieben und bereits anhand ihrer Endwertverteilungen bzw. ihrer Schwankungen während des Investitionszeitraums untersucht. Zum einen zeigte sich, dass die betrachteten Lifecycle- und Mischfonds in ihren Endwertverteilungen tatsächlich praktisch übereinstimmen und dass dementsprechend die Erwartungsnutzentheorie für beide einen nahezu identischen Erwartungsnutzen hervorbringt. Darüber hinaus zeigte der Abschnitt 5.3 aber auch, dass die Verläufe beider Fonds sehr unterschiedlich sind und sich insbesondere die Wertschwankungen beider Fonds gegen Ende der Laufzeit extrem unterscheiden, weshalb eine weitreichendere Untersuchung der beiden Konzepte vorgenommen werden muss. Die in Kapitel 3.2.4 eingeführte Multi-Kumulative Prospect Theorie, welche die Ideen der Prospect Theorie auf eine fortlaufende Art verwendet, bietet sich in diesem Zusammenhang an und bildet die Grundlage der beiden folgenden Kapitel. In diesem (Einmalbeitragsfall) und dem folgenden Kapitel 7 (laufender Beitragsfall) werden dementsprechend die Lifecycle- und Mischfonds mit den im Kapitel 3.2.4 vorgestellten Ideen der Multi-Kumulativen Prospect Theorie untersucht. Dabei werden stets die Auswertungen im CIR-SV Modell (siehe Kapitel 2.2) verwendet und beschrieben. Die Ergebnisse können jedoch beinahe identisch für das CIR-BSM Modell übernommen werden.

Um die Auswirkungen unterschiedlicher Parameter auf den $MCPT^w$ -Nutzen einschätzen zu können, stellt Abschnitt 6.1 eine entsprechende Sensitivitätsanalyse dar. Dabei wird zuerst die Sensitivität bezüglich der Parameter λ (Verlustaversion) und α (beeinflusst die Sensitivität auf Gewinne und Verluste) genauer betrachtet, da diese für die Risikoaversion ausschlaggebend sind. In Verbindung mit diesen Analysen werden auch verschiedene Werte von γ ($= 0.6, 0.8, 1$) und ρ ($= 0.98, 1, 1.02$) betrachtet um sowohl den Effekt der Wahrscheinlichkeitsgewichtung als auch der Zeitdiskontierung zu untersuchen. Im ersten Teil des Abschnittes werden die Differenzen von Lifecycle- und Mischfonds $MCPT^w$ -Nutzen für verschiedenen Parameterkombinationen untersucht. Des Weiteren

findet in diesem Abschnitt (6.1.2) aber auch eine Betrachtung der Nutzenentwicklung bei Lifecycle- und Mischfonds statt, d.h. es wird untersucht, welche Jahre welchen Effekt auf den MCPT^w-Nutzen haben. Abschließend findet im ersten Abschnitt eine kurze Betrachtung des Mischfonds+ statt, um den Effekt der niedrigeren Gebühren auf den MCPT^w-Nutzen einschätzen zu können und um zu untersuchen, ob der „angenehmere“ Fondsverlauf des Lifecycle Fonds einen Nachteil in der Endwertverteilung im Vergleich zum Mischfonds+ im Hinblick auf den MCPT^w-Nutzen ausgleichen oder sogar kompensieren kann. Es wird stets ein vollständiges Bild über alle sechs möglichen Funktionenkombinationen (3 Wertefunktionen und 2 Wahrscheinlichkeitsgewichtsfunktionen) gegeben. Abschließend wird in Abschnitt 6.1.4 ein Überblick gegeben, in welchen Parameterfällen, welcher Fondstyp den höheren Nutzen erzielt.

Im Abschnitt 6.2 werden Anleger mit bestimmten Risikoaversionen betrachtet. Dabei findet insbesondere eine genaue Analyse der Verteilung der MCPT^w-Nutzen statt. Es wird dabei mit Hilfe der in Abschnitt 6.1 gewonnenen Erkenntnisse zwischen einem risikoaversen ($\lambda = 2.5$), einem risikoneutralen ($\lambda = 1$) und einem risikoaffinen ($\lambda = 0.4$) Anleger unterschieden, wobei die Unterschiede in der Risikoaversion in diesen Betrachtungen lediglich durch verschiedene Werte der Verlustaversion λ modelliert werden.

Abschließend wird in Abschnitt 6.3 der in Kapitel 3.2.5 eingeführte Fall der Gedächtnismodellierung untersucht. Es wird hierfür eine Analyse der Auswirkungen der Gedächtnishalbwertszeit gegeben.

6.1 Sensitivitätsanalysen

Wie bereits oben beschrieben findet in diesem Abschnitt eine Sensitivitätsanalyse des MCPT^w-Nutzen bezüglich der verschiedenen Parameter und Funktionenkombinationen statt. Es wird stets der in Definition 3.2.10 formulierte MCPT^w-Nutzen für den Lifecycle- und den Mischfonds bzw. den Mischfonds+ (6.1.3) mit den in Kapitel 4.3 beschriebenen Monte-Carlo-Methoden bestimmt. Bei den Fonds handelt es sich um die in Kapitel 5.1 in Tabelle 5.2 beschriebenen Fonds mit einer Laufzeit von 35 Jahren und einem Einmalbeitrag in Höhe von einem Euro.

In den Abschnitten 6.1.1 und 6.1.3 werden die Differenzen zwischen Lifecycle- und Misch-

fonds bzw. Mischfonds+ bestimmt und ausgewertet.

In Abschnitt 6.1.2 wird die Entwicklung des MCPT^w-Nutzen für den Lifecycle- und Mischfonds betrachtet, d.h. es wird für jeden Zeitpunkt $\tau \in \{1, \dots, 35\}$ der zwischenzeitliche Nutzen bis zu diesem Jahr über

$$MCPT^w(A)_\tau := \int_{-\infty}^0 \left[\sum_{t=0}^{\tau-1} \rho^{t+1} v(x_{t+1}) \left(\frac{d}{ds} w(F_{t+1}^A(s)) \Big|_{s=x_{t+1}} \right) \right] dx_{t+1} \\ + \int_0^\infty \left[\sum_{t=0}^{\tau-1} \rho^{t+1} v(x_{t+1}) \left(\frac{d}{ds} (-w(1 - F_{t+1}^A(s))) \Big|_{s=x_{t+1}} \right) \right] dx_{t+1}$$

mit Hilfe von Monte-Carlo-Methoden und dem Schätzer

$$\widehat{MCPT}^w(A)_\tau := \frac{1}{20000} \sum_{k \in \mathcal{M}_1} \left[\sum_{t=0}^{\tau-1} \rho^{t+1} v(x_{t+1}^k) \left(\frac{d}{ds} w(\widehat{F}_{t+1}^A(s)) \Big|_{s=x_{t+1}^k} \right) \right] \\ + \frac{1}{20000} \sum_{k \in \mathcal{M}_2} \left[\sum_{t=0}^{\tau-1} \rho^{t+1} v(x_{t+1}^k) \left(\frac{d}{ds} (-w(1 - \widehat{F}_{t+1}^A(s))) \Big|_{s=x_{t+1}^k} \right) \right]$$

bestimmt ($\mathcal{M}_{1/2}$ und \widehat{F}_{t+1}^A wie in Kapitel 4.3) und dessen Verlauf untersucht. Dies zeigt in welchen Jahren die Unterschiede in den MCPT^w-Nutzen des Lifecycle- und des Mischfonds entstehen und wie sich die Parameter auf diese Verläufe auswirken.

6.1.1 α - λ - Sensitivität

Zuerst findet eine Analyse bzgl. α und λ der verschiedenen Funktionenkombinationen in Verbindung mit verschiedenen Wahrscheinlichkeitsgewichtsfaktoren γ ohne Zeitdiskontierung statt. Der Einfluss der Zeitdiskontierung wird im Anschluss diskutiert.

Untersuchung unterschiedlicher Wertefunktionen im Fall ohne Zeitdiskontierung

Im Folgenden werden die Differenzen des MCPT^w-Nutzen zwischen Lifecycle- und Mischfonds für alle Funktionenkombinationen abgebildet.

(a) Power Wertefunktion

Die ersten betrachteten Fälle sind die Kombinationen aus einer Power Wertefunktion und einer Tversky Kahneman bzw. Prelec Wahrscheinlichkeitsgewichtsfunktion (siehe Kapitel 3.2.3). Abbildung 6.1 zeigt in diesen beiden Fällen die Ergebnisse

der α - λ - Auswertungen für verschiedene Werte für γ ($= 0.6, 0.8, 1$). Dabei bedeutet ein positiver Wert (blau) einen Nutzenvorteil für den Lifecycle- und ein negativer Wert (rot) einen Nutzenvorteil für den Mischfonds. Bereiche in denen die Nutzen der beiden Fonds nahezu identisch ist sind in weiß abgebildet. Da neben den absoluten Werten auch insbesondere die Struktur von Interesse ist, wird zwar die Farbskalierung stets einheitlich (je Abbildung) gewählt, die MCPT^w-Nutzen Achsen können jedoch unterschiedliche Skalierungen aufweisen um die Struktur besser darstellen zu können. Wie in Abbildung 6.1 deutlich wird, verursachen die

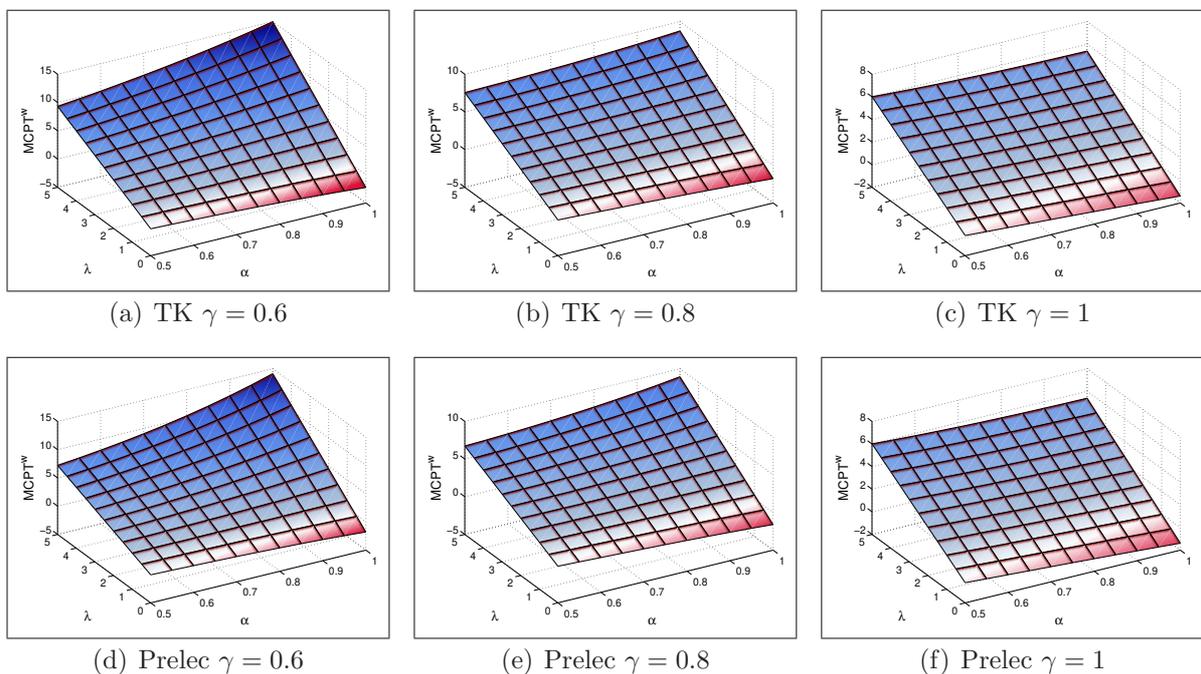


Abbildung 6.1: Power MCPT^w-Nutzen Differenz zwischen LC- und Mischfonds bei $\rho = 1, \alpha \in [0.5, 1]$ und TK bzw. Prelec.

Tversky Kahneman und die Prelec Wahrscheinlichkeitsgewichtsfunktionen trotz ihrer Unterscheide vergleichbare Auswirkungen. In allen Fällen gilt, dass sich insbesondere der Verlustaversionparameter λ auf die Differenz auswirkt. So lässt sich feststellen, dass für einen Verlustaversionparameter von $\lambda > 1$ (d.h. einen im Allgemeinen risikoaversen Anleger), wie er in der Prospect Theorie üblich ist, in allen betrachteten Fällen der Lifecycle Fonds einen höheren Nutzen generiert als der Mischfonds. Des Weiteren ist auch zu erkennen, dass auch bei extremer

Unterbewertung von Verlusten ($\lambda \ll 1$) der Vorteil für den Mischfonds nicht überproportional zunimmt. Es zeigen sich sogar annähernd lineare Strukturen in λ für feste α , obwohl ein Wert für λ von beispielsweise $\frac{1}{100}$ dazu führt, dass ein Gewinn sich 100-mal so stark auf den Nutzen auswirkt wie ein Verlust. Werden Gewinne und Verluste identisch bewertet ($\lambda = 1$) ist die Differenz der beiden betrachteten Fonds nur sehr gering.

Auf der anderen Seite ist die Wirkung des Sensitivitätsparameters α auf die Differenzen weniger stark. Es wird lediglich ersichtlich, dass mit abnehmender Sensitivität auf Gewinn- und Verluständerungen sich die Nutzenunterschiede tendenziell verringern. Für $\lambda < 1$, d.h für eine risikoaffine Ausprägung, tendiert der Anleger mit zunehmendem α stärker zum Mischfonds, während dieser für kleine α noch teilweise mit dem Lifecycle Fonds einen höheren Nutzen erzielt. Unter Ausblendung der Wahrscheinlichkeitsgewichtung ($\gamma = 1$) zeigen sich auch lineare Strukturen in α für feste λ . Erst mit der Zunahme der Wahrscheinlichkeitsgewichtung entsteht eine zunehmende Krümmung in α für feste λ . Dadurch bewirkt die Wahrscheinlichkeitsgewichtung höhere Differenzen, insbesondere für Anleger mit einer sehr stark ausgeprägten Sensitivität (α nahe eins). Des Weiteren breitet sich der Bereich, in welchem der Lifecycle- den Mischfonds überbietet mit steigender Wahrscheinlichkeitsgewichtung zusätzlich noch etwas aus.

(b) **Exponential Wertefunktion**

Der zweite betrachtete Fall behandelt die Kombinationen aus Exponential Wertefunktion und den beiden Wahrscheinlichkeitsgewichtsfunktionen. Auch in diesem Fall zeigt die Abbildung 6.2, dass die Tversky Kahneman und die Prelec Wahrscheinlichkeitsgewichtsfunktionen vergleichbare Auswirkungen besitzen und keinen entscheidenden Einfluss auf die Interpretation der Ergebnisse verursachen. Es zeigt sich erneut, dass in allen Fällen insbesondere der Verlustaversionsparameter λ die Differenz beeinflusst. Auch hier ist festzustellen, dass für einen Verlustaversionsparameter $\lambda > 1$, in allen betrachteten Fällen der Lifecycle Fonds besser abschneidet als der Mischfonds. Die bereits bei der Power Wertefunktion erkennbaren linearen Strukturen in λ für feste α zeigen sich auch bei der Exponential Wertefunktion. Bei gleicher Bewertung der Gewinne und Verluste ($\lambda = 1$) ist die Differenz der beiden betrachteten Fonds auch in diesem Fall nur sehr gering. Der Sensitivitätsparameter α bewirkt für risikoaverse Anleger ($\lambda > 1$) ähnlich geringe Auswirkungen wie im

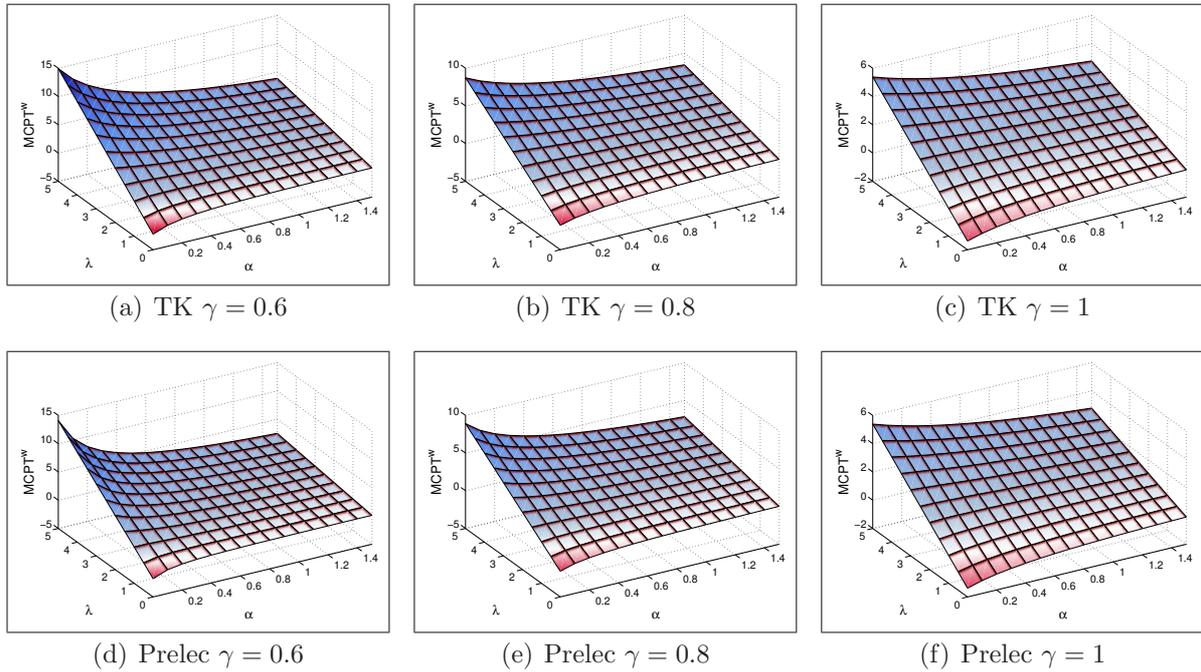


Abbildung 6.2: Expo $MCPT^w$ -Nutzen Differenz zwischen LC- und Mischfonds bei $\rho = 1$, $\alpha \in [0.1, 1.5]$ und TK bzw. Prelec.

vorherigen Fall¹. Für risikoaffine Anleger ($\lambda < 1$) zeigt sich erneut ein zunehmender Vorteil für den Mischfonds bei zunehmender Sensitivität, d.h. bei abnehmendem α . Im Gegensatz zur Power Wertefunktion ist die Krümmung im Hinblick auf α für feste λ , insbesondere im Bereich $\lambda < 1$ und $\alpha < 0,4$, deutlich ausgeprägter. Der Bereich, in welchem der Lifecycle- den Mischfonds überbietet, nimmt mit zunehmender Wahrscheinlichkeitsgewichtung in diesem Fall noch etwas deutlicher zu als im zuvor betrachteten Fall. So lässt sich feststellen, dass für eine extreme Wahrscheinlichkeitsgewichtung $\gamma = 0,6$ in der Prelec Version lediglich für $\alpha < 0,4$ und $\lambda < 0,5$ der Mischfonds noch als besser wahrgenommen wird als der Lifecycle Fonds, was bedeutet, dass nur noch Anleger mit einer Überbewertung der Gewinne mit wenigstens dem Faktor 2 im Vergleich zu den Verlusten und einer sehr hohen Sensibilität auf Gewinnzuwächse den Mischfonds bevorzugen würden.

¹Es ist zu beachten, dass, aufgrund der Definition der Exponential Wertefunktion (siehe Kapitel 3.2.3), bei zunehmendem Sensitivitätsparameter α , umgekehrt zur Power und Quadratischen Wertefunktion, die Sensitivität abnimmt und nicht zunimmt. Vergleiche dazu auch die Abbildung 3.2 in Kapitel 3.2.3.

Des Weiteren zeigt sich, dass die Krümmung in α für feste λ mit zunehmender Wahrscheinlichkeitsgewichtung sich verändert. So nimmt für feste $\lambda \geq 2,5$ die konvexe Krümmung deutlich zu, was zu einer höheren Differenz für Anleger mit einer hohen Sensitivität (kleine α) führt. Für feste $\lambda \in [1, 2,5)$ zeigt sich ohne Wahrscheinlichkeitsgewichtung eine konkave Struktur in α , die mit zunehmender Wahrscheinlichkeitsgewichtung verschwindet und zunehmend konvex wird (Siehe Ergebnisse für $\gamma = 0,6$). Die konkaven Strukturen für feste $\lambda < 1$ beschränken sich mit zunehmender Wahrscheinlichkeitsgewichtung auf den Bereich der Anleger mit einer hohen Sensitivität (kleine α).

(c) **Quadratische Wertefunktion**

Abschließend wird die Quadratische Wertefunktion in Kombination mit den Wahrscheinlichkeitsgewichtsfunktionen betrachtet. Aus Abbildung 6.3 ergeben sich vergleichbare Ergebnisse wie in den zuvor betrachteten Fällen. Die Unterschiede zwischen Tversky Kahneman und Prelec Wahrscheinlichkeitsgewichtsfunktion sind erneut gering. Auch ist erneut der Verlustaversionsparameter λ die entscheidende Größe, welche die Differenz am stärksten beeinflusst und für $\lambda > 1$ in allen betrachteten Fällen den Lifecycle Fonds besser abschneiden lässt als den Mischfonds. Die linearen Strukturen in λ für feste α sind auch hier beobachtbar. Der Sensitivitätsparameter α bewirkt ähnlich geringe Auswirkungen wie in den vorherigen Fällen, lediglich bei geringen Werten für λ führt er zu einer Vorzeichenänderung in der Differenz. So gilt bei kleinen λ -Werten, dass für große α (hohe Sensibilität auf Gewinn- und Verlustzuwächse) der Mischfonds und bei kleinen α (niedrigere Sensibilität auf Gewinn- und Verlustzuwächse) der Lifecycle Fonds als leicht besser wahrgenommen wird. Ein Unterschied zu den vorherigen Fällen ist in der Krümmung in α für feste λ festzustellen. Während bei der Exponential Wertefunktion die Struktur konkav in α für feste $\lambda < 1$ und zunehmend konvex für große λ ist, zeigt sich hier ein anderes Verhalten. Ohne Wahrscheinlichkeitsgewichtung ist die Struktur in α für feste $\lambda < 1$ konvex und für $\lambda \geq 1$ konkav. Zudem ist die Krümmung im Gegensatz zu den vorherigen Fällen im Bereich der Anleger mit einer geringen Sensitivität (kleine α) besonders stark. Mit zunehmender Wahrscheinlichkeitsgewichtung wird die Krümmung jedoch zunehmend gleichmäßiger in α für feste λ . Außerdem gleicht eine zunehmende Wahrscheinlichkeitsgewichtung die konvexen Strukturen für kleine λ aus, so dass diese zunehmend verschwinden. Auch hier wird

mit zunehmender Wahrscheinlichkeitsgewichtung der Bereich größer, in welchem der Lifecycle Fonds als besser wahrgenommen wird. Für eine extreme Wahrscheinlichkeitsgewichtung $\gamma = 0,6$ in der Prelec Version gilt erneut, dass nur noch Anleger mit einer hohen Überbewertung der Gewinne im Vergleich zu den Verlusten und einer sehr hohen Gewinn- und Verlustsensibilität den Mischfonds bevorzugen würden.

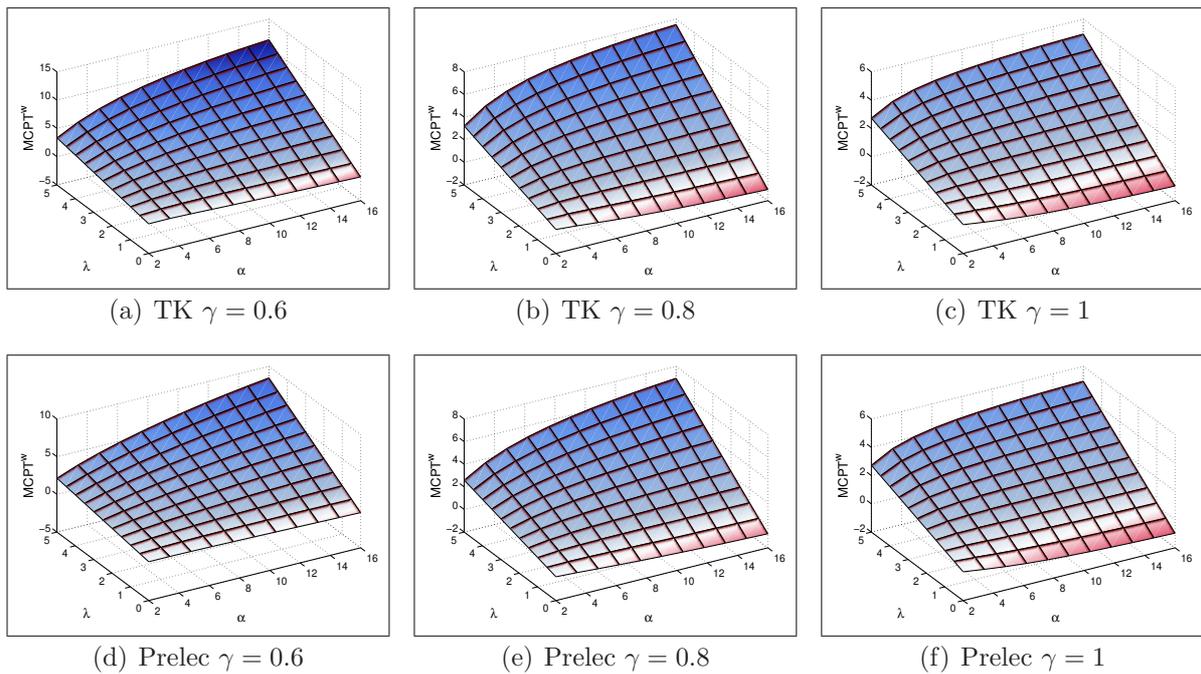


Abbildung 6.3: Quadratischer $MCPT^w$ -Nutzen Differenz zwischen LC- und Mischfonds bei $\rho = 1$, $\alpha \in [2, 16]$ und TK bzw. Prelec.

Insgesamt zeigt dieser Teil, dass die Ergebnisse bezüglich der Differenzen für alle Kombinationen von Wertefunktionen und Wahrscheinlichkeitsgewichtsfunktionen ähnlich sind, insbesondere für risikoaverse Anleger ($\lambda > 1$). Es gilt, dass in allen betrachteten Fällen unter Prospect Theorie Annahmen, d.h. vor allem einer Verlustaversion ($\lambda > 1$), sich ein Anleger stets für den Lifecycle Fonds entscheidet, da dieser einen höheren Nutzen generiert als der vergleichbare Mischfonds. Für risikoaffine Anleger ($\lambda < 1$) sind die Ergebnisse etwas sensibler sowohl im Hinblick auf die gewählte Funktionenkombination als auch auf die Wahl der Parameter. Darüber hinaus liegen die größte Unterschiede im

Krümmungsverhalten in α für feste λ , welche durch die unterschiedlichen Wertefunktion verursacht werden.

Einfluss der Zeitdiskontierung am Beispiel der Power Wertefunktion mit Tversky Kahneman Wahrscheinlichkeiten

Bisher wurden nur Ergebnisse ohne Berücksichtigung der Zeitdiskontierung (ρ) betrachtet. In diesem Abschnitt wird nun anhand der Power Wertefunktion mit Tversky Kahneman Wahrscheinlichkeiten der Einfluss der Zeitdiskontierung untersucht. Die Ergebnisse für die anderen Funktionenkombinationen sind in ihrer Aussage identisch. Abbildung 6.4 zeigt erneut die Differenzen des MCPT^w-Nutzen zwischen Lifecycle- und Mischfonds. In der ersten Reihe ist für verschiedene γ -Werte der negative Diskontierungsfall ($\rho = 0,98$) abgebildet, in der zweiten Reihe der bereits in den vorherigen Analysen betrachtete Fall ohne Diskontierung ($\rho = 1$) und in der dritten Reihe wird der Fall mit positiver Diskontierung ($\rho = 1,02$) gezeigt. Die Abbildung veranschaulicht deutlich, dass die Struktur der Differenzen durch die Diskontierung nahezu unverändert bleibt. Der Einfluss auf die Fondsauswahl ist auf Anleger mit $\lambda < 1$ beschränkt. So wirkt sich für diese Anleger eine negative Diskontierung positiv auf den Lifecycle Fonds aus und eine positive Diskontierung positiv auf den Mischfonds. Es wird allerdings für alle λ ersichtlich, dass die absoluten Differenzen größer werden, je größer ρ wird. Es lässt sich sogar feststellen, dass sich die absoluten Differenzen bei einer Diskontierung von $\rho = 0,98$ zu $\rho = 1$ und zu $\rho = 1,02$ jeweils annähernd verdoppeln. Dieses Ergebnis ist insofern überraschend, da zwar gilt $0,98^{35} \approx 0,493$ und $1,02^{35} \approx 2$, allerdings werden nur die letzten Wertschwankungen mit diesem Faktor diskontiert. Die vorherigen Wertschwankungen werden mit einer entsprechend niedrigeren Potenz, wie in Definition 3.2.10 formuliert, diskontiert. Eine Begründung hierfür liefern die in Abschnitt 6.1.2 genauer betrachteten Verläufe der MCPT^w-Nutzen und die Tatsache, dass der Nutzenunterschied hauptsächlich in den letzten Jahren entsteht.

Aufgrund der hier gewonnenen Eindrücke lässt sich zumindest im Hinblick auf die absoluten Differenzen und die damit verbundene Entscheidung, welcher Fondstyp gewählt werden sollte, feststellen, dass sich der Zeitdiskontierungsfaktor, in den hier verwendeten Größenordnungen, auf risikoaffine Anleger ($\lambda < 1$) beschränkt und andernfalls im Einmalbeitragsfall vernachlässigt werden kann. Für Prospect Theorie Anleger ist die

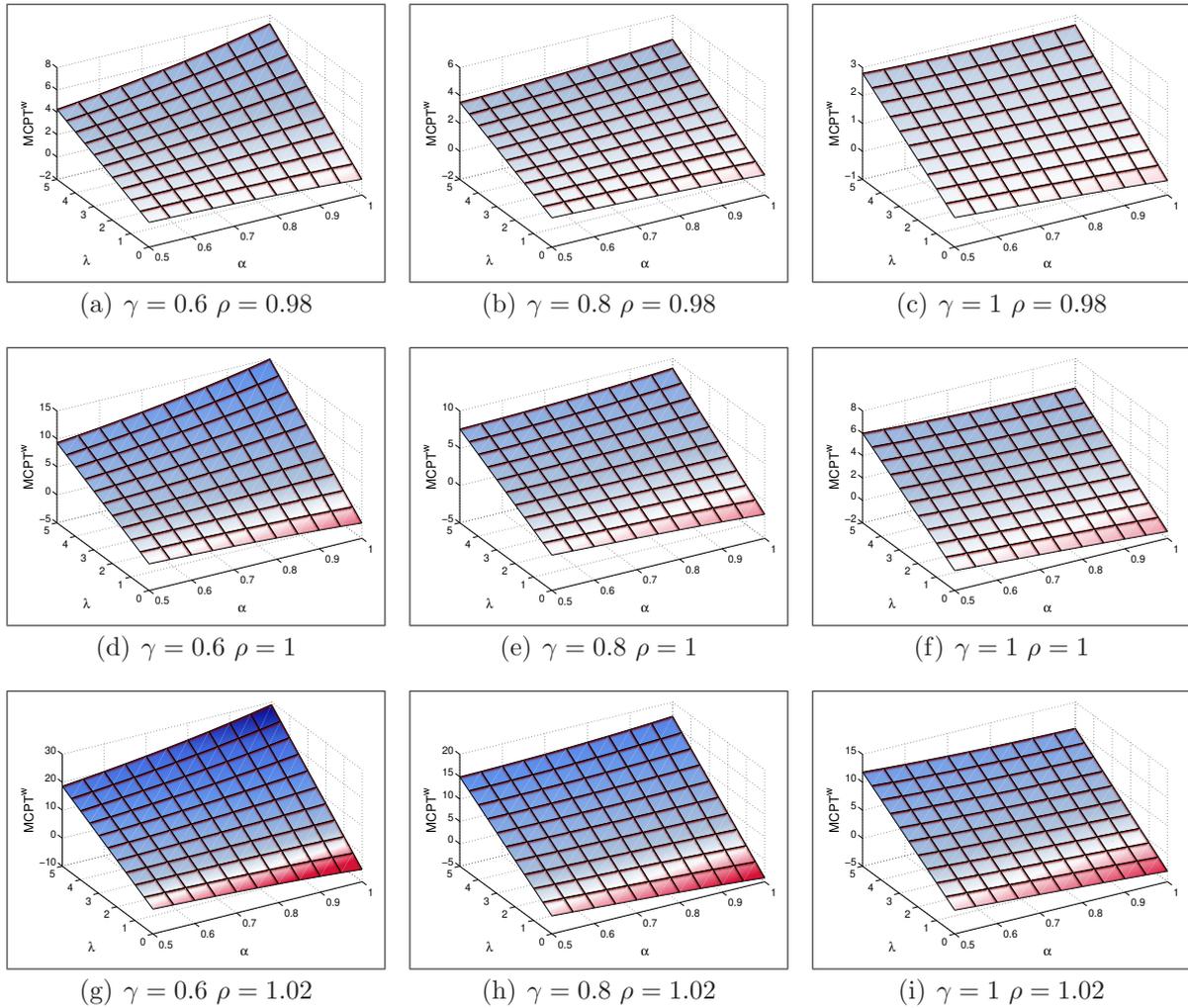


Abbildung 6.4: Power $MCPT^w$ -Nutzen Differenz zwischen LC- und Mischfonds bei $\alpha \in [0.5, 1]$ und TK.

Diskontierung im Hinblick auf die Differenz dementsprechend nur bei einer Betrachtung der absoluten Differenzhöhen notwendig.

6.1.2 Entwicklung des $MCPT^w$ -Nutzen α -Sensitivität

In diesem Teil wird die Entwicklung des $MCPT^w$ -Nutzen über die Zeit für den Lifecycle- und den Mischfonds, wie zu Beginn des Abschnittes beschrieben, betrachtet. Dadurch kann ein Eindruck über die Entstehung der Unterschiede in den $MCPT^w$ -Nutzen des

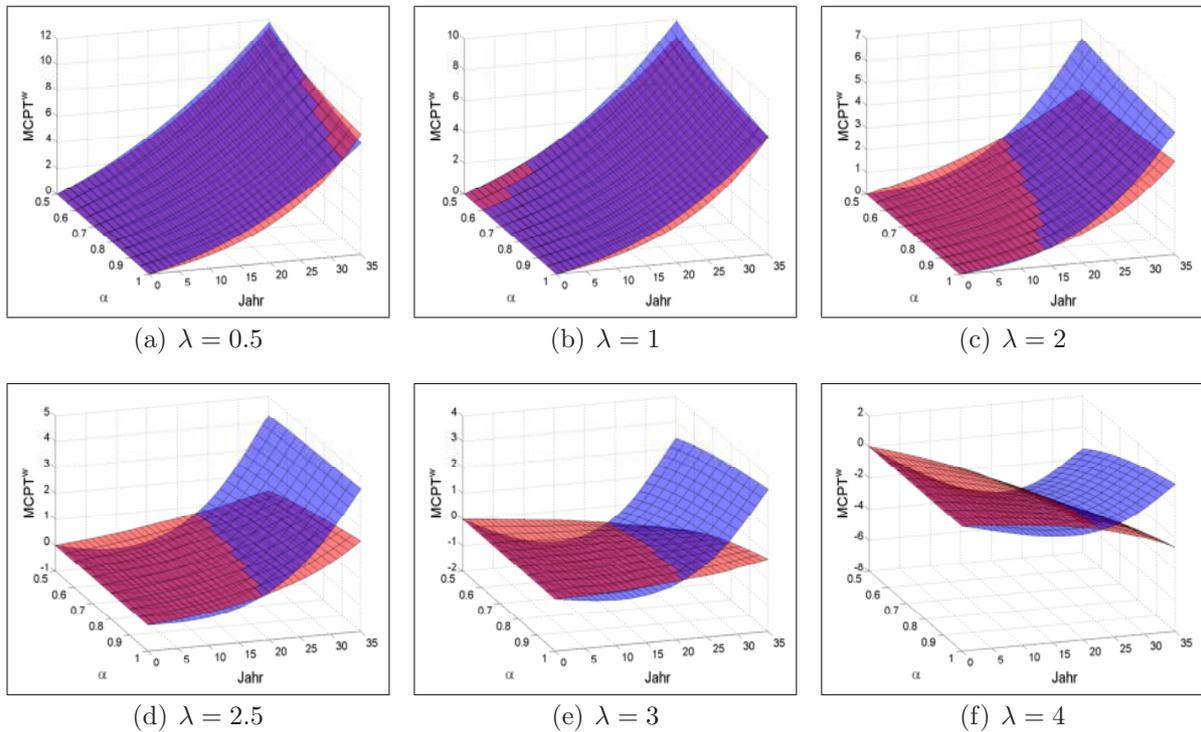


Abbildung 6.5: Einfluss von λ auf die α Sensitivität der Power $MCPT^w$ -Nutzen Entwicklung von LC- und Mischfonds bei $\rho = \gamma = 1, \alpha \in [0.5, 1]$.

Lifecycle- und des Mischfonds gewonnen werden.

Es wird stets der Einfluss von α auf den Verlauf des $MCPT^w$ -Nutzen abgebildet. Dabei wird der $MCPT^w$ -Nutzen Verlauf des Lifecycle Fonds in blau dargestellt und der des Mischfonds in rot. Zu Beginn werden zusätzlich die Auswirkungen von λ untersucht. Anschließend werden zwei Fälle ($\lambda = 2, 5$ und $\lambda = 0, 4$) genauer betrachtet.

Einfluss von λ auf die α -Sensitivität im Fall $\rho = \gamma = 1$

Wie bereits bei den Differenzen im Abschnitte 6.1.1 deutlich wird, hat der Verlustversionsparameter λ einen starken Einfluss auf den $MCPT^w$ -Nutzen. Dies spiegelt sich auch in der Betrachtung des Verlaufes wider. In Abbildung 6.5 werden für verschiedene Werte von λ die $MCPT^w$ -Nutzen Verläufe im Fall mit einer Power Wertefunktion und ohne Wahrscheinlichkeitsgewichtung und Zeitdiskontierung abgebildet. Im Fall $\lambda = 0, 5$, d.h. Gewinne wirken doppelt so stark wie Verluste, sind sowohl die Nutzen zum Ende

der Investitionsperiode als auch die Verläufe des Nutzens sehr ähnlich. Bei beiden Fonds steigt der MCPT^w-Nutzen während der Laufzeit. Der Lifecycle Fonds Nutzen wächst dabei zu Beginn stärker als der Mischfonds Nutzen, dessen Steigung gegen Ende der Laufzeit zunimmt. Die Endwerte sind beinahe identisch. Für $\alpha < 0,7$ wird der Lifecycle- und für $\alpha \geq 0,7$ der Mischfonds als leicht besser wahrgenommen.

Mit zunehmendem λ wird der Unterschied der Endwerte und der Verläufe größer. Es ist zu erkennen, dass insbesondere der Mischfonds Nutzen gegen Ende der Laufzeit sich zunehmend verschlechtert. Bei $\lambda = 1$ dominiert der Lifecycle Fonds Nutzen beinahe komplett den Mischfonds Nutzen, auch wenn der Unterschied noch gering ist. Bei $\lambda = 2$, d.h. ein Verlust wird doppelt so stark wahrgenommen wie ein Gewinn, ist deutlich zu erkennen, dass der Lifecycle Fonds zu Beginn der Laufzeit aufgrund der höheren Aktienfondsanteile schlechter abschneidet als der Mischfonds. Dafür steigt der Nutzen des Lifecycle Fonds in den letzten 20 Jahren sehr stark an und bewirkt einen deutlichen Vorteil gegenüber dem Mischfonds. Wird λ noch größer gewählt verstärkt sich dieser Unterschied. Ab $\lambda = 3$ ist ersichtlich, dass der Mischfonds kaum noch positiven Nutzen erzielt, während der Lifecycle Fonds durch den hohen Nutzensvorteil gegen Ende der Laufzeit immer noch einen positiven Gesamtnutzen erreicht. Bei $\lambda = 4$ ist zu erkennen, dass der Gesamtnutzen für die Fonds teilweise (Lifecycle) bzw. komplett (Mischfonds) negativ ist. Der Lifecycle Fonds erzielt unter Einbeziehung der letzten Jahren der Laufzeit jedoch immer noch einen positiven Nutzen, der ausreichend ist um für $\alpha > 0,7$ einen positiven Gesamtnutzen zu erzeugen.

Hier wird ersichtlich, dass bei einer zunehmenden Verlustaversion vor allem der Sicherheitsvorteil des Lifecycle Fonds am Ende der Laufzeit den Nutzenunterschied bewirkt. Außerdem zeigt sich, dass α auch bei der Untersuchung der Verläufe einen geringen Einfluss besitzt, der sich hauptsächlich auf die absoluten Größen auswirkt und nicht auf die Struktur.

Aufgrund der Ergebnisse der Untersuchung der Auswirkung des Verlustaversionsparameters λ werden im Folgenden der Fall eines verlustaversen Anlegers ($\lambda = 2,5$) und der eines Anlegers, der umgekehrt Gewinne 2,5-Fach stärker gewichtet als Verluste ($\lambda = 0,4$), betrachtet.

α -Sensitivität im Fall $\lambda = 2,5$

A: Einfluss der Zeitdiskontierung ρ am Beispiel der Power Wertefunktion

Bei der Betrachtung der Differenzen in 6.1.1 hat sich gezeigt, dass der Zeitdiskontierungsfaktor lediglich auf die absolute Höhe einen Einfluss hat und die Struktur nahezu unverändert bleibt. Ein ähnlicher Eindruck ergibt sich auch bei der Betrachtung des Verlaufes. Aus Abbildung 6.6 wird ersichtlich, dass die grundlegende Struktur des Verlaufes durch die Zeitdiskontierung nicht beeinflusst wird. Allerdings wird deutlich, dass in diesem Fall die Diskontierung einen höheren Effekt auf den Lifecycle Fonds Nutzen hat als auf den Mischfonds Nutzen, da der Lifecycle Fonds hauptsächlich in den letzten Jahren, in denen die Zeitdiskontierung besonders wirkt, Nutzen generiert. Bei negativer Diskontierung wird der Lifecycle Fonds daher erst zu einem späteren Zeitpunkt besser als der Mischfonds Nutzen. Umgekehrt führt eine positive Diskontierung zu einem früheren Vorteil des Lifecycle Fonds. Da die Grundstruktur der Verläufe nicht von der Zeitdiskontierung beeinflusst wird, wird im Weiteren nur noch der Fall ohne Zeitdiskontierung betrachtet.

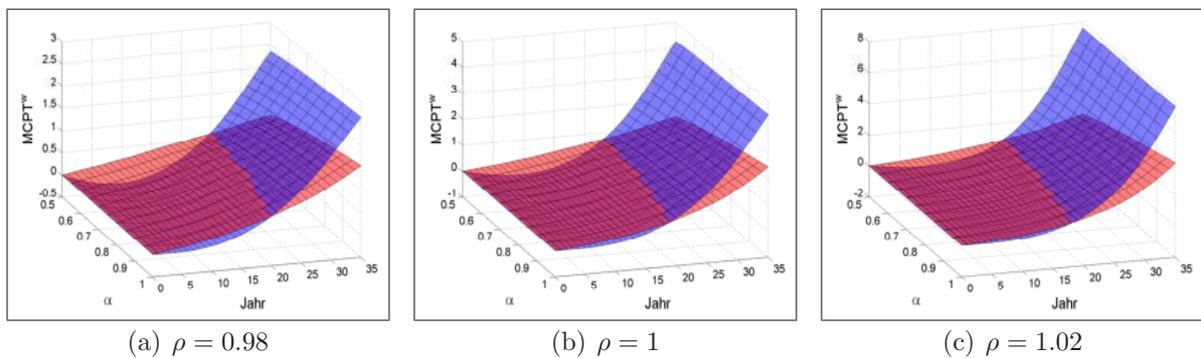


Abbildung 6.6: Power MCPT^w-Nutzen Entwicklung LC- und Mischfonds bei $\gamma = 1$, $\alpha \in [0.5, 1]$ sowie verschiedene ρ .

B: Einfluss der Wahrscheinlichkeitsgewichtsfunktion am Beispiel der Power Wertefunktion (ohne Zeitdiskontierung)

Ein weiterer wichtiger Faktor ist die Wahrscheinlichkeitsgewichtung. Hierzu werden die beiden Wahrscheinlichkeitsgewichtsfunktionen für verschiedene γ betrachtet.

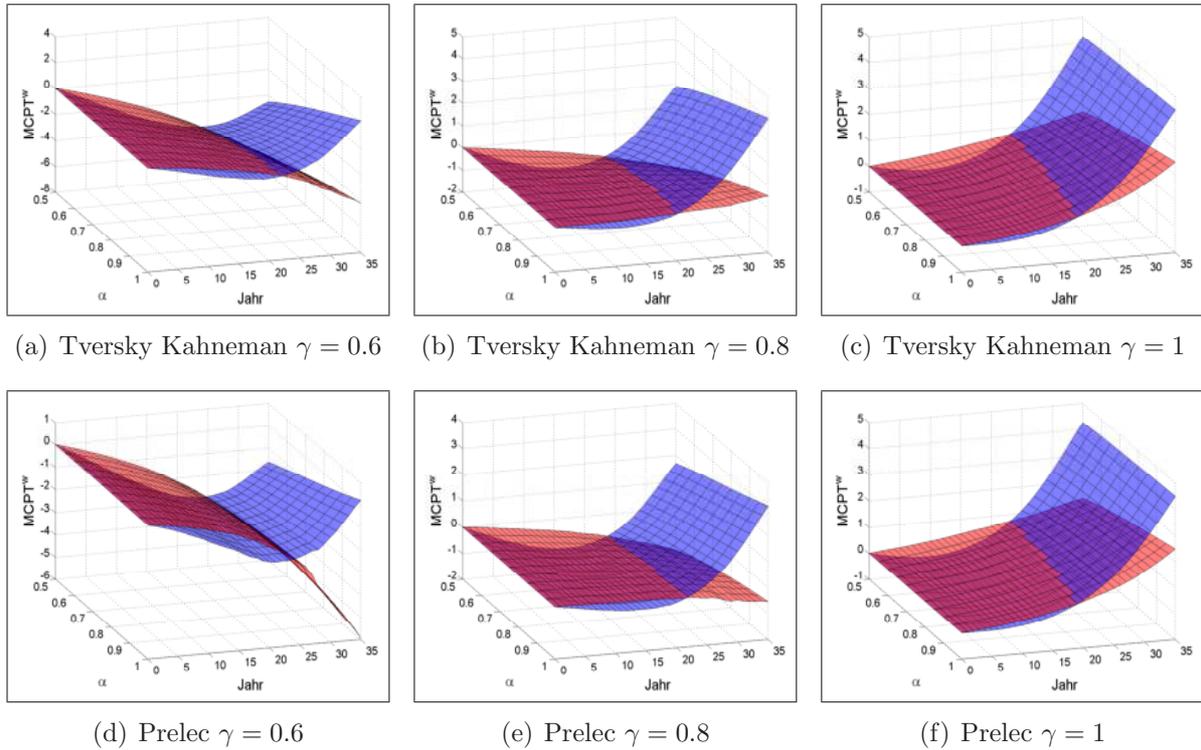


Abbildung 6.7: Einfluss der Wahrscheinlichkeitsgewichtsfunktion auf die Power $MCPT^w$ -Nutzen Entwicklung für LC- und Mischfonds bei $\rho = 1, \alpha \in [0.5, 1]$.

In der ersten Reihe in Abbildung 6.7 finden sich die Ergebnisse für die Tversky Kahneman Version und in der zweiten Reihe die der Prelec Version. In beiden Fällen ist beobachtbar, dass eine zunehmende Wahrscheinlichkeitsgewichtung zu einem geringeren Nutzen für beide Fondstypen führt. Bereits bei einer Wahrscheinlichkeitsgewichtung von $\gamma = 0,8$ ist der Gesamtnutzen für den Mischfonds negativ, insbesondere in den letzten Jahren fällt sein Nutzen. Dieser Effekt wird für $\gamma = 0,6$ noch extremer. Der Lifecycle Fonds kann auch hier durch den Nutzenvorteil in den letzten Jahren zumindest bei einer Wahrscheinlichkeitsgewichtung von $\gamma = 0,8$ noch einen positiven Gesamtnutzen erzielen. Bei einer Gewichtung von $\gamma = 0,6$ steigt der Lifecycle Fonds Nutzen zwar in den letzten Jahren noch, allerdings ist er nur für α nahe eins am Ende der Laufzeit leicht positiv. Hier ist auch ein Unterschied zwischen den beiden Wahrscheinlichkeitsgewichtsfunktionen zu erkennen. Die Prelec Version verstärkt die Effekte am Ende der Laufzeit. So steigt der Li-

ifecycle Fonds Nutzen deutlich stärker als in der Tversky Kahneman Version und erreicht sogar noch teilweise einen positiven Endnutzen.

Es gilt, dass die Wahrscheinlichkeitsgewichtung einen hohen Einfluss auf die Verläufe hat. Insbesondere die Nutzenentwicklung des Mischfonds reagiert sehr sensibel auf eine Zunahme der Wahrscheinlichkeitsgewichtung. Hier wirkt sich der Nachteil der möglichen hohen Wertverluste, die auch in den letzten Jahren der Laufzeit noch eintreten können, besonders stark auf den Nutzen aus.

C: Betrachtung verschiedener Werte- und Wahrscheinlichkeitsgewichtsfunktionskombinationen (ohne Zeitdiskontierung)

Für den Fall $\lambda = 2,5$ wird in Abbildung 6.8 abschließend ein Überblick über die Nutzenverläufe unter weiteren Funktionenkombinationen gegeben. In den Abbildungen (a) und (d) wird nochmals die Kombination aus Power Wertefunktion und Tversky Kahneman Wahrscheinlichkeiten betrachtet. In (b) und (e) wird eine Kombination aus Exponential Wertefunktion und Prelec Wahrscheinlichkeiten und in (c) und (f) aus Quadratischer Wertefunktion und Tversky Kahneman Wahrscheinlichkeiten abgebildet. In der ersten Reihe wird eine Wahrscheinlichkeitsgewichtung von $\gamma = 0,8$ vorgenommen, während in der zweiten Reihe keine Wahrscheinlichkeitsgewichtung berücksichtigt wird.

Bei der Betrachtung der unterschiedlichen Kombinationen sind zwar leichte Unterschiede insbesondere bei der Sensitivität auf α ersichtlich, jedoch sind die Grundlegenden Ergebnisse identisch. So ist der Nutzen des Mischfonds in den ersten Jahren in allen Kombinationen höher. In der zweiten Hälfte der Laufzeit schneidet jedoch der Nutzen des Lifecycle Fonds den des Mischfonds und steigt in der Folgezeit deutlich stärker, sodass am Ende der Laufzeit der Lifecycle Fonds einen deutlich höheren Nutzen generiert als der Mischfonds.

Zusammenfassend lässt sich im Fall $\lambda = 2,5$ beobachten, dass der Lifecycle Fonds unabhängig von der Funktionenkombination durch die erhöhte Sicherheit am Ende der Laufzeit einen deutlich besseren MCPT^w-Nutzen als der Mischfonds erzielt.

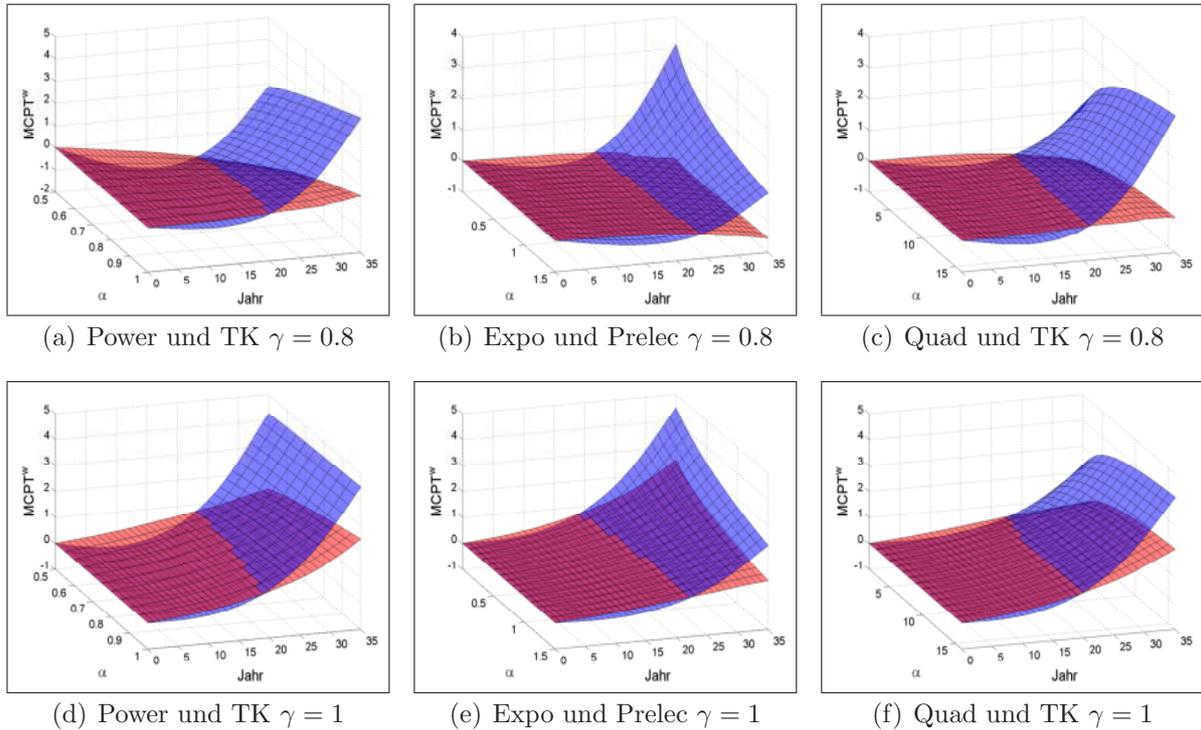


Abbildung 6.8: $MCPT^w$ -Nutzen Entwicklung für LC- und Mischfonds für verschiedene Funktionskombinationen bei $\rho = 1, \alpha \in [0.5, 1]$ (Power), $\alpha \in [0.1, 1.5]$ (Expo), $\alpha \in [2, 16]$ (Quad) sowie verschiedene γ .

α -Sensitivität im Fall $\lambda = 0, 4$

Nachdem der Fall $\lambda = 2, 5$ ausführlich betrachtet wurde, wird für den Fall $\lambda = 0, 4$, d.h. Gewinne wirken sich 2,5-mal so stark aus wie Verluste, ein kurzer Überblick gegeben. Abbildung 6.9 zeigt auch in diesen Fall, dass für alle betrachteten Funktionenkombinationen die Grundstruktur vergleichbar ist. Es zeigt sich, dass die Nutzenverläufe der beiden Fondstypen beinahe identisch sind, wobei der Lifecycle Fonds in allen Fällen über einen Großteil der Laufzeit einen höheren Nutzen als der Mischfonds erzeugt. Zum Ende der Laufzeit ist der Mischfonds bei geringer Sensitivitätsabnahme bezüglich Wertgewinnen und -verlusten (α) jedoch etwas besser. Es lässt sich feststellen, dass bei einer Überbewertung der Gewinne die Nutzen von Lifecycle- und Mischfonds sich einander annähern und im Gegensatz zum vorherigen Fall der Lifecycle Fonds in den ersten Jahren besser abschneidet als der Mischfonds und in den letzten Jahren der Mischfonds besser als der

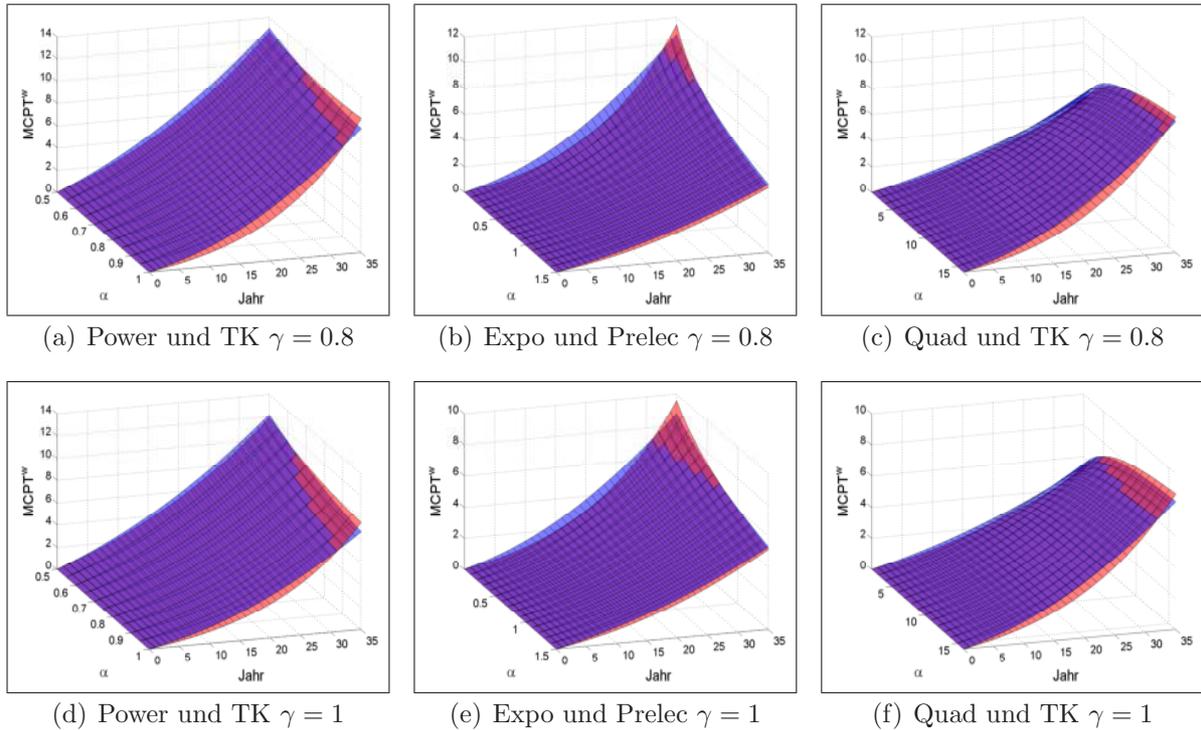


Abbildung 6.9: $MCPT^w$ -Nutzen Entwicklung für LC- und Mischfonds für verschiedene Funktionskombinationen bei $\rho = 1, \alpha \in [0.5, 1]$ (Power), $\alpha \in [0.1, 1.5]$ (Expo), $\alpha \in [2, 16]$ (Quad) sowie verschiedene γ .

Lifecycle Fonds. Dadurch wird in diesem Fall die Risikobereitschaft belohnt. Der Vorteil der höheren Chancen des Mischfonds wirkt sich allerdings nicht so stark aus wie der Vorteil des Lifecycle Fonds im vorherigen Fall, weshalb der Mischfonds maximal einen kleinen Nutzenvorteil gegenüber dem Lifecycle Fonds erzielen kann.

6.1.3 Vergleich zum Mischfonds+

In diesem Abschnitt wird exemplarisch an der Power Wertefunktion und Tversky-Kahneman Wahrscheinlichkeitsgewichtsfunktion für $\rho = 1$ die $MCPT^w$ -Nutzen Differenz des Lifecycle Fonds zu dem in Kapitel 5 eingeführten Mischfonds+ im Einmalbeitragsfall untersucht. Dabei werden die Ergebnisse in Abbildung 6.10 wieder mit den in Abschnitt 6.1.1 bereits verwendeten Differenzen dargestellt. In der ersten Reihe werden die Differenzen von Lifecycle- und Mischfonds+ und in der zweiten Reihe die von Lifecycle- zu

Mischfonds abgebildet.

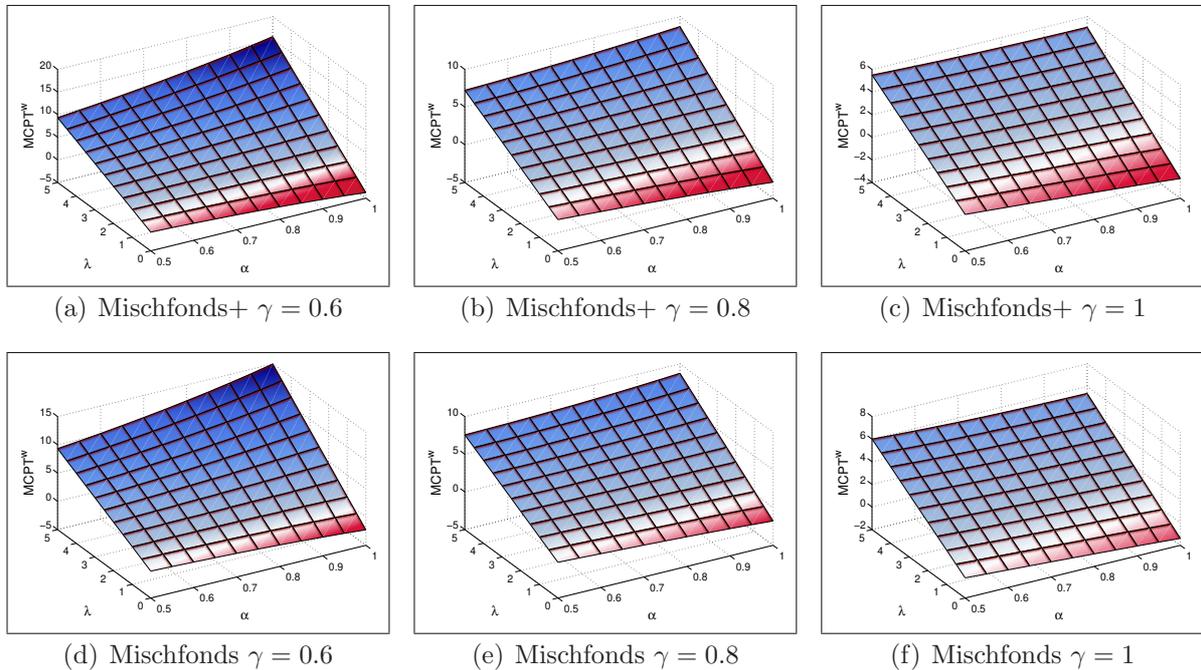


Abbildung 6.10: Power MCPT^w-Nutzen Differenz zwischen LC- und Mischfonds+ bzw. Mischfonds bei $\rho = 1$, $\alpha \in [0.5, 1]$ und TK.

Es zeigt sich, dass trotz der besseren Endwertverteilungen des Mischfonds+ im Vergleich zum Lifecycle Fonds (vgl. Kapitel 5.1) der MCPT^w-Nutzen des Lifecycle Fonds für verlustaverse Anleger höher ist. Zwar gilt, dass im Vergleich zum Mischfonds der Mischfonds+, insbesondere wenn keine Wahrscheinlichkeitsgewichtung vorgenommen wird, besser abschneidet und teilweise auch für einen Verlustavversionsparameter $\lambda > 1$ (maximal jedoch bis $\lambda = 1,5$) noch besser als der Lifecycle Fonds ist. Dennoch ist der Lifecycle Fonds für die meisten risikoaversen Anleger ($\lambda > 1$) auch besser als der Mischfonds+. Dies zeigt, dass die durch den Gebührenfaktor verursachte negative Verschiebung der Endwertverteilung sich im Hinblick auf den MCPT^w-Nutzen deutlich geringer auswirkt als beispielsweise in der ENT. Darüber hinaus zeigen diese Ergebnisse, dass Unsicherheiten insbesondere in den letzten Jahren dazu führen können, dass ein Fondsinvestment trotz einer besseren Endwertverteilung einen Nutzennachteil gegenüber einem Fondsinvestment mit einer höheren Planungssicherheit in den letzten Jahren besitzen kann.

6.1.4 Überblick im Einmalbeitragsfall

Zum Abschluss dieses Abschnittes wird in Tabelle 6.1 ein Überblick gegeben in welchen Fällen der Lifecycle- bzw. der Mischfonds im Einmalbeitragsfall besser abschneidet. Die Übersicht basiert auf den Ergebnissen dieses Abschnittes für den Fall ohne Zeitdiskontierung und ermöglicht es einen Eindruck zu gewinnen, für welche Anleger (Parameterkombinationen), welcher Fondstyp von Vorteil ist. Es wird zwischen verschiedenen Verlustavversionsparametern λ , Wahrscheinlichkeitsdiskontierungsfaktoren γ und der Sensitivitäten auf Wertänderungen der Gewinne bzw. Verluste α unterschieden. Da α nicht einheitlich für die einzelnen Wertefunktionen gewählt werden kann, werden drei mögliche Ausprägungen der Sensitivität betrachtet. n steht dabei für eine weitgehend neutrale Ausprägung, d.h. die Sensitivität nimmt nur sehr langsam ab, was bedeutet, dass ein vergleichbar kleiner Unterschied zwischen zwei Wertverlusten bzw. -gewinnen auch bei zunehmender Größe dieser Wertschwankungen einen spürbaren Nutzenunterschied bewirkt. ↗ bedeutet, dass die Sensitivität etwas stärker abnimmt, d.h. vergleichbar kleine Unterschiede wirken sich mit zunehmender Größe der Schwankung schwächer aus und ↗↗ steht für eine sehr stark abnehmende Sensitivität.

		λ				
γ	α	0 - 0,5	0,5 - 1	1 - 1,5	1,5 - 2	> 2
0,6	n	M ₊₊	-	LC	LC ₊	LC ₊₊
	↗	M ₊	-	LC	LC ₊	LC ₊₊
	↗↗	M	LC	LC	LC	LC ₊
0,8	n	M ₊	M	LC	LC ₊	LC ₊₊
	↗	M	-	LC	LC	LC ₊₊
	↗↗	-	LC	LC	LC	LC ₊
1	n	M ₊	M	-	LC	LC ₊₊
	↗	M	-	-	LC	LC ₊₊
	↗↗	-	LC	LC	LC	LC ₊

Tabelle 6.1: Übersicht der Ergebnisse im Einmalbeitragsfall.

M=Mischfonds leicht im Vorteil, M₊=Mischfonds im Vorteil, M₊₊=Mischfonds deutlich im Vorteil,
 - = vergleichbare Nutzen / kein Vorteil eindeutig zu bestimmen,
 LC=Lifecycle leicht im Vorteil, LC₊=Lifecycle im Vorteil, LC₊₊=Lifecycle deutlich im Vorteil

Die hier gegebene Übersicht zeigt deutlich, dass die MCPT einen Ansatz liefert, der es

ermöglicht Unterschiede der Verläufe von verschiedenen Fondstypen im Einmalbeitragsfall im Nutzen zu erfassen und zusätzlich die Möglichkeit bietet verschiedene Anlegertypen mit unterschiedlichen Risikoausprägungen zu betrachten. Die Ergebnisse zeigen, dass der Sicherheitsvorteil, den der Lifecycle Fonds am Ende der Laufzeit dem Anleger gewährt, sich in einem deutlich besseren Nutzen widerspiegelt. Lediglich Anleger die nicht der Prospect Theorie entsprechen ($\lambda < 1$) erhalten teilweise durch den Mischfonds einen leicht höheren Nutzen. Jedoch erzeugt selbst für $\lambda \in [0,5, 1]$ der Mischfonds bei abnehmender Sensitivität (\nearrow bzw. $\nearrow \nearrow$) keinen eindeutig besseren Nutzen als der Lifecycle Fonds. Für alle typischen Prospect Theorie Größen für λ und γ ist der Lifecycle Fonds besser als der Mischfonds. Bei $\lambda > 2$, zur Erinnerung Tversky und Kahneman schlagen für λ eine Größe von 2,25 vor, ist der Lifecycle Fonds sogar deutlich besser als der Mischfonds.

6.2 Analyse ausgewählter MCPT^w Investoren

In Abschnitt 6.1 wurde eine ausführliche Untersuchung des MCPT^w-Nutzen im Einmalbeitragsfall durchgeführt, dessen Hauptergebnisse in Tabelle 6.1 zusammengefasst sind. In diesem Abschnitt erfolgt nun darauf aufbauend eine genauere Betrachtung von drei speziell ausgewählten Anlegertypen im Einmalbeitragsfall.

Die Anlegertypen sind im Einzelnen:

- risikoaffiner Anleger ($\lambda = 0,4$),
- risikoneutraler Anleger ($\lambda = 1$),
- risikoaverser Anleger ($\lambda = 2,5$).

Die Risikoaversion wird hier nur durch den Verlustaversionsparameter gesteuert, wohingegen α für alle Anleger auf 0,8 gesetzt wird. Des Weiteren wird stets eine Power Wertefunktion in Kombination mit einer Tversky Kahneman Wahrscheinlichkeitsgewichtung mit $\gamma = 0,8$ und $\gamma = 1$ betrachtet.

Nach den Auswertungen in Abschnitt 6.1 bevorzugt der risikoaffine Anleger stets den Mischfonds, der risikoneutrale tendiert leicht zum Lifecycle Fonds und der risikoaverse Anleger erhält aus dem Lifecycle Fonds einen deutlichen Vorteil. Im Folgenden wird untersucht, welcher Nutzen tatsächlich in den einzelnen Fällen erreicht wird, d.h. nachdem

in den vorherigen Analysen stets nur der „Erwartungswert“ (MCPT^w-Nutzen) betrachtet wurde, wird in diesem Abschnitt die komplette Verteilung der eingetretenen Nutzen (pfadweise) analysiert. Dabei werden neben dem Mittelwert (MCPT^w-Nutzen) auch der Median und die Verteilungsstruktur, auf Basis der 20000 simulierten Ergebnisse, durch ein Histogramm dargestellt.

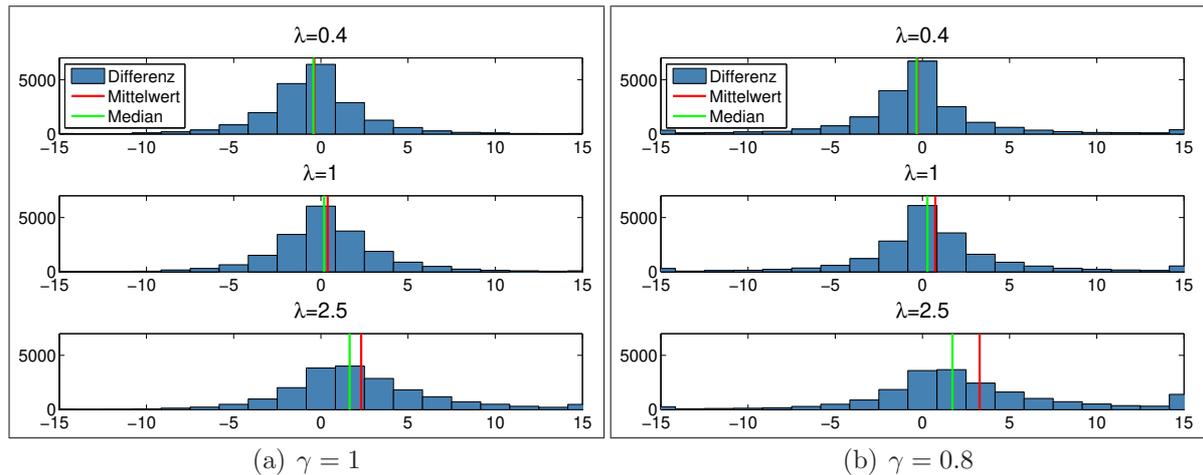


Abbildung 6.11: Verteilung der MCPT^w-Nutzen Differenz zwischen Lifecycle- und Mischfonds.

In Abbildung 6.11 werden die Verteilungen der MCPT^w-Nutzen Differenzen für die verschiedenen Fälle abgebildet. Für den risikoaffinen Anleger lässt sich erkennen, dass der Mittelwert (-0,38 bzw. -0,28) und der Median (-0,43 bzw. 0,33) nahezu übereinstimmen und einen leicht negativen Wert, der für den Mischfonds spricht, annehmen. Dies bedeutet, dass in ziemlich genau 50% der Fälle der Vorteil für den Mischfonds höher bzw. niedriger ausfällt als der bestimmte MCPT^w-Nutzen Vorteil. Andererseits lässt sich aber auch erkennen, dass trotz des MCPT^w-Nutzen Vorteils für den Mischfonds, für eine Vielzahl der Fälle (40,93% bzw. 42,11%) der Lifecycle Fonds den Mischfonds im Nutzen übertrifft. Aus diesem Ergebnis wird ersichtlich, dass für einen risikoaffinen Anleger der Mischfonds nach dem MCPT^w-Nutzen zwar bevorzugt wird, die Wahrscheinlichkeit allerdings, dass der Mischfonds tatsächlich als besser wahrgenommen wird als der Lifecycle Fonds, nur 59,07% bzw. 57,89% und damit nur leicht vorteilhaft ist.

Beim risikoneutralen Anleger verschiebt sich die Verteilung im Vergleich zum risiko-

affinen Anleger leicht zu Vorteil des Lifecycle Fonds. Unter Ausblendung der Wahrscheinlichkeitsgewichtung sind Median (0,19) und Mittelwert (0,39) weiterhin nahe beieinander, allerdings leicht positiv. Des Weiteren ist die Verteilung in diesem Fall nahezu symmetrisch. Bei Hinzunahme der Wahrscheinlichkeitsgewichtung verschiebt sich der Mittelwert (0,72) stärker zu Gunsten des Lifecycle Fonds als der Median (0,29) im Vergleich zum Fall ohne Wahrscheinlichkeitsgewichtung. Die MCPT^w-Nutzen Differenz wird also in weniger als 50% der Fälle überschritten (46,01% bzw. 41,67%) und durch eine Zunahme der extremen positiven Zuwächse größer. Dies ist die direkte Folge der durch die Wahrscheinlichkeitsgewichtung verursachten Übergewichtung von seltenen Ereignissen. Für den neutralen Anleger gilt das gleiche Fazit wie für den risikoaffinen Anleger, lediglich mit Vorteil für den Lifecycle Fonds. So besteht auch für den risikoneutralen Anleger eine hohe Wahrscheinlichkeit (46,32% bzw. 44,26%), dass der Mischfonds als besser wahrgenommen wird als der Lifecycle Fonds, welche nur leicht geringer ist als die im umgekehrten Fall.

Für den risikoaversen Anleger wird der Effekt der Wahrscheinlichkeitsgewichtung noch deutlicher. Insgesamt lässt sich eine starke Verschiebung zu Gunsten des Lifecycle Fonds feststellen. Allerdings ist der Median (1,65 bzw. 1,72), bedingt durch eine stärkere Zunahme der positiven Differenzen, deutlich kleiner als der Mittelwert (2,31 bzw. 3,28) bzw. der bestimmte MCPT^w-Nutzen Unterschied. Es gilt, dass der Nutzen mit einer Wahrscheinlichkeit von 57,45% bzw. 64,28% niedriger ausfällt als der Mittelwert. Dafür erzielt für diesen Anleger der Mischfonds nur in 28,75% bzw. 29,10% der Fälle in der Wahrnehmung ein besseres Ergebnis, d.h. in mehr als 7 von 10 Fällen erhält der Anleger durch den Lifecycle Fonds einen höheren tatsächlichen Nutzen.

Abbildung 6.12 zeigt die Verteilung des MCPT^w-Nutzen für den Lifecycle- (links) und den Mischfonds (rechts) für die verschiedenen Anlegertypen unter Ausblendung der Wahrscheinlichkeitsgewichtung. Es zeigt sich, dass der absolute Nutzen mit zunehmender Risikoaversion abnimmt, die Verteilungsstruktur aber ähnlich bleibt. Auch hier zeigt sich, wie bei der Betrachtung der Differenzen, dass der Median durchgängig niedriger ist als der Mittelwert.

In Abbildung 6.13 werden die Verteilung des MCPT^w-Nutzen für den Lifecycle (links) und den Mischfonds (rechts) für die verschiedenen Anlegertypen mit Wahrscheinlich-

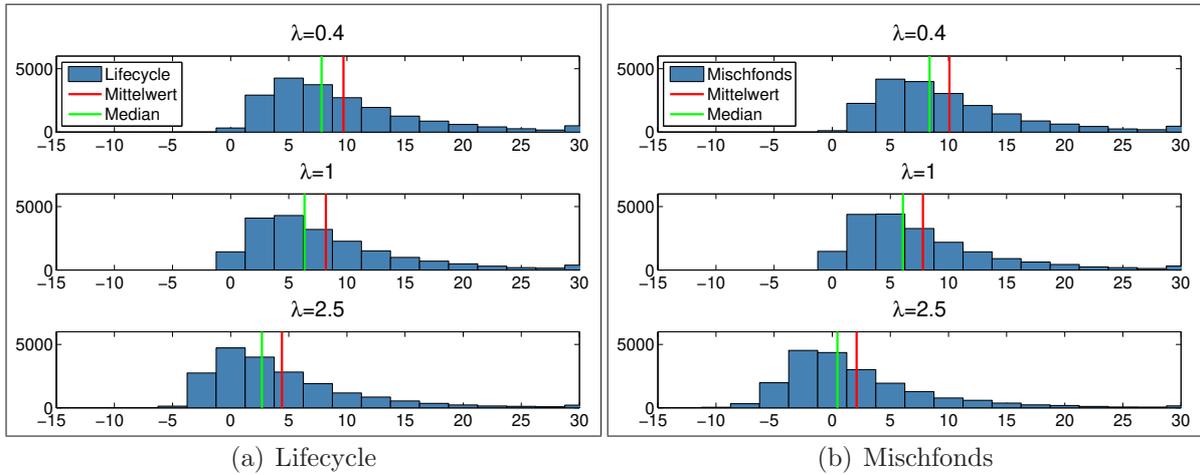


Abbildung 6.12: Verteilung der $MCPT^w$ -Nutzen des Lifecycle- und Mischfonds für $\gamma = 1$.

keitsgewichtung ($\gamma = 0,8$) abgebildet. Bei zunehmender Risikoaversion verschiebt sich die Verteilung des Mischfonds deutlich stärker ins Negative als die des Lifecycle Fonds und im Vergleich zum Fall ohne Wahrscheinlichkeitsgewichtung. Des Weiteren lässt sich feststellen, dass für einen risikoaversen Anleger der Lifecycle Fonds zwar einen positiven $MCPT^w$ -Nutzen besitzt, der Median allerdings leicht negativ ist, was bedeutet, dass in mehr als 50% der Fälle der Lifecycle Fonds einen negativen Nutzen aufweist.

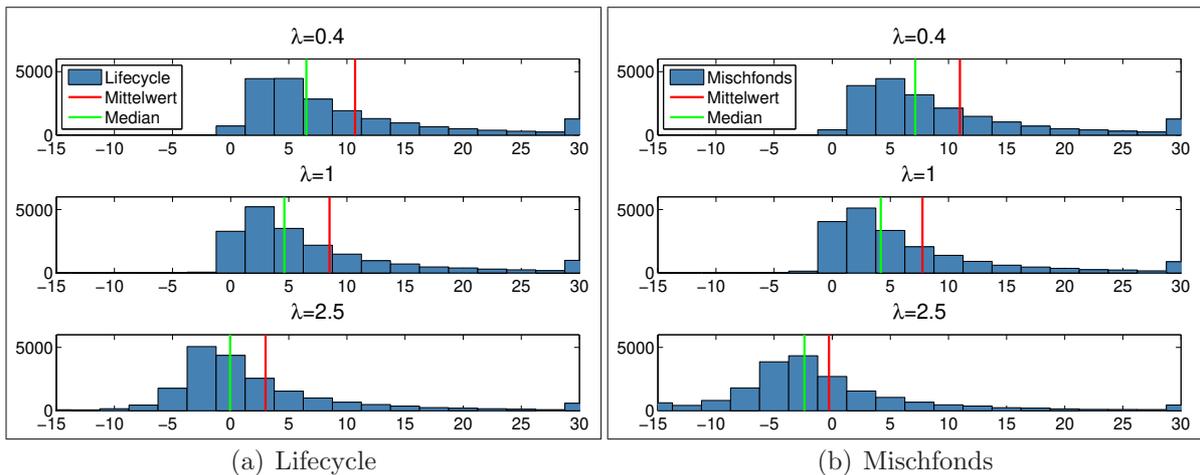


Abbildung 6.13: Verteilung der $MCPT^w$ -Nutzen des Lifecycle- und Mischfonds für $\gamma = 0.8$.

Insgesamt zeigt dieser Abschnitt, dass vor allem für einen risikoaversen Anleger der Lifecycle Fonds nicht nur einen besseren MCPT^w-Nutzen aufweist, sondern dass der Lifecycle Fonds tatsächlich in beinahe drei von vier Fällen für diesen Anleger die bessere Wahl darstellt. Dagegen sind die Nutzenvorteile für den neutralen und risikoaffinen Anleger nicht nur geringer sondern mit Hinblick auf die Verteilung auch deutlich ungewisser.

6.3 Analyse im Gedächtnisfall

Zum Abschluss dieses Kapitels wird der in Kapitel 3.2.5 eingeführte Gedächtnisfall untersucht. Dabei gibt es vier Parameter, η , λ , γ und ρ , die den MCPT^w-Nutzen in diesem Fall beeinflussen können. Wie in Kapitel 3.2.5 beschrieben ist der Gedächtnisfall für eine lineare Wertefunktion formuliert, dagegen ist bei der Verwendung der Wahrscheinlichkeitsgewichtsfunktion sowohl die Tversky-Kahneman als auch die Prelec Version möglich. In den hier beschriebenen Fällen werden die Ergebnisse für $\rho = 1$, d.h. ohne Zeitdiskontierung beschrieben. Die Ergebnisse mit Zeitdiskontierung unterscheiden sich in der Struktur nicht von dem hier beschriebenen Fall. Es ist lediglich bei positiver Diskontierung eine kleine Verschiebung zum Vorteil des Lifecycle Fonds und bei negativer Verschiebung eine kleine Verschiebung zum Vorteil des Mischfonds auszumachen, die allerdings den Gesamteindruck nicht beeinflussen. Abbildung 6.14 zeigt die Differenzen zwischen dem MCPT^w-Nutzen des Lifecycle- und des Mischfonds für unterschiedliche Verlustaversionen $\lambda \in [0, 5]$ und Gedächtnishalbwertszeiten in Jahren ($\text{HWZ} \in (0, 10]$). Des Weiteren werden diese Differenzen für verschiedenen Wahrscheinlichkeitsgewichtungen $\gamma = 0,6, 0,8, 1$, für beide Wahrscheinlichkeitsgewichtsfunktionen abgebildet.

Insgesamt lässt sich beobachten, dass sich mit zunehmender Gedächtnishalbwertszeit die Nutzen des Lifecycle- und des Mischfonds einander annähern und sich die Struktur in zwei Bereiche einteilen lässt.

Im Teil mit einer Gedächtnishalbwertszeit von mehr als 5 Jahren werden kaum noch Unterschiede des Nutzens durch den Verlustaversionparameter λ verursacht, d.h. der Nutzenunterschied zwischen Lifecycle- und Mischfonds ist für einen sehr verlustaversen Anleger beinahe identisch wie für einen weniger verlustaversen Anleger. In diesen Fällen

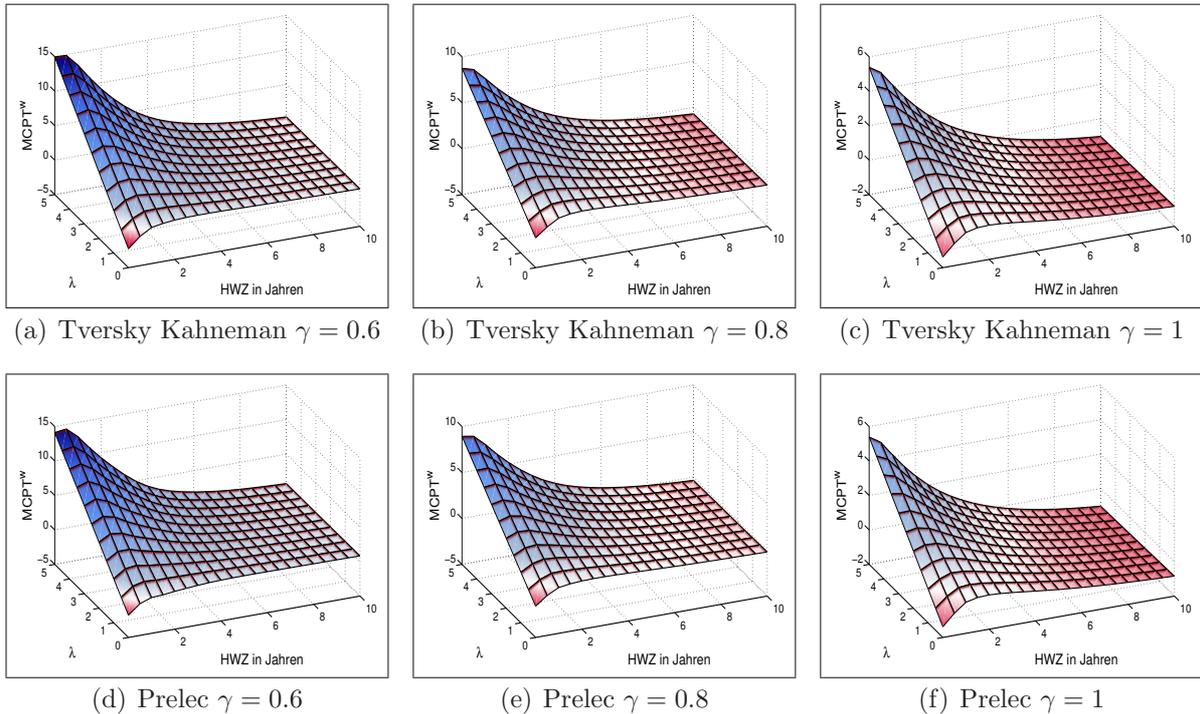


Abbildung 6.14: $MCPT^w$ -Nutzen Differenz mit Gedächtnis zwischen LC- und Mischfonds bei $\rho = 1$, Gedächtnis mit Halbwertszeit zwischen 0 und 10 Jahren und TK bzw. Prelec.

ist der Unterschied zwischen Lifecycle- und Mischfonds nur sehr gering und den Ausschlag, ob der Lifecycle- oder der Mischfonds besser ist, hängt in erster Linie von der Wahrscheinlichkeitsgewichtung ab. Bei einer unverzerrten Wahrscheinlichkeit ($\gamma = 1$) ist der Mischfonds im Vorteil, während bei einer subjektiven Wahrscheinlichkeitsgewichtung mit starker Übergewichtung von seltenen Ereignissen ($\gamma = 0,6$) der Lifecycle Fonds tendenziell besser ist.

Bei einer Gedächtnishalbwertszeit von unter 5 Jahren zeigt sich allerdings ein anderes Bild. Zwar ist der absolute Unterschied zwischen Lifecycle- und Mischfonds immer noch von der Wahrscheinlichkeitsgewichtung abhängig, allerdings ist in diesen Fällen der Einfluss der Verlustaversion (λ) deutlich stärker und führt dazu, dass in allen Fällen für $\lambda > 1$ der Lifecycle- besser als der Mischfonds ist und lediglich bei einer Gedächtnishalbwertszeit von unter einem Jahr und $\lambda < 1$ der Mischfonds einen Vorteil gegenüber

dem Lifecycle Fonds besitzt.

Wird die Gedächtnishalbwertszeit ausgeblendet, d.h. im Fall $HWZ = 0$, ergibt sich der bereits in Abschnitt 6.1 beschriebene Fall der Power Wertefunktion mit $\alpha = 1$ und $\rho = 1$. In den hier durchgeführten Auswertungen zeigt sich, dass durch die Hinzunahme der Modellierung eines Gedächtnisses, sich die Nutzen der beiden Fondstypen einander annähern. Dies lässt sich dadurch erklären, dass die hohen Wertverluste bei der Betrachtung des Mischfonds nicht mehr so stark berücksichtigt werden, da sie mit vorherigen Gewinnen ausgeglichen werden, die bei einer höheren Gedächtnishalbwertszeit sich länger auswirken können. Dadurch wiegt der Nachteil von hohen Verlusten nicht mehr ganz so stark, wenn im Vorfeld hohe Gewinne erzielt wurden.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass die Berücksichtigung eines Anlegergedächtnisses die Unterschiede im Nutzen von Lifecycle- und Mischfonds tendenziell verringert. Trotzdem besteht noch, vor allem bei Gedächtnishalbwertszeiten von unter 5 Jahren, eine starke Tendenz dazu, dass insbesondere verlustaverse Anleger mit dem Lifecycle Fonds einen höheren Nutzen erzielen und dementsprechend diesen bevorzugen.

7 MCPT Analyse im laufenden Beitragsfall

Analog zur Beschreibung der Ergebnisse des Einmalbeitragsfalles in Kapitel 6 findet in Kapitel 7 die Untersuchung des $MCPT^w$ -Nutzen für den laufenden Beitragsfall statt. Es werden hierzu die in Kapitel 5.1.2 beschriebenen Fonds für den laufenden Beitragsfall verwendet. Erneut wird neben dem Vergleich zwischen Lifecycle- und Mischfonds auch eine kurze Betrachtung des Mischfonds+ im laufenden Beitragsfall gegeben, um den Einfluss des Gebührenfaktors zu beschreiben.

Das Vorgehen ist dabei identisch zu dem im Einmalbeitragsfall, d.h. zuerst werden in Abschnitt 7.1 Sensitivitätsanalysen durchgeführt, deren Hauptergebnisse in Unterabschnitt 7.1.4 in einer Übersicht zusammengefasst und interpretiert werden. Anschließend werden in Abschnitt 7.2 erneut Anleger mit unterschiedlichen Risikoaversionen betrachtet und eine genaue Analyse der Verteilungen der $MCPT^w$ -Nutzen durchgeführt. Im abschließenden Abschnitt 7.3 wird der in Kapitel 3.2.5 eingeführte Fall der Gedächtnismodellierung untersucht.

7.1 Sensitivitätsanalysen im laufenden Beitragsfall

Zu Beginn und in Abschnitt 7.1.3 werden die Einflüsse der verschiedenen Parameter auf die Differenzen zwischen Lifecycle- und Mischfonds bzw. Mischfonds+ analysiert. In Abschnitt 7.1.2 wird die Entwicklung des $MCPT^w$ -Nutzen für den Lifecycle- und Mischfonds, wie in Kapitel 6.1 beschrieben, betrachtet.

Es werden dabei stets die in Kapitel 5.1 in Tabelle 5.5 beschriebenen Fonds verwendet.

7.1.1 $\alpha - \lambda$ - Sensitivität

Im ersten Teil wird eine Analyse bezüglich α und λ der verschiedenen Funktionenkombinationen in Verbindung mit verschiedenen Wahrscheinlichkeitsgewichtsfaktoren γ ohne Zeitdiskontierung durchgeführt. Der Einfluss der Zeitdiskontierung wird im Anschluss näher betrachtet.

Untersuchung unterschiedlicher Wertefunktionen im Fall ohne Zeitdiskontierung, d.h. $\rho = 1$

(a) Power Wertefunktion

Der erste Fall behandelt die Kombinationen aus einer Power Wertefunktion und einer Tversky Kahneman bzw. Prelec Wahrscheinlichkeitsgewichtsfunktion. Abbildung 7.1 zeigt für diese Fälle mit Hilfe der gleichen Darstellungsweise wie in Kapitel 6.1 die Ergebnisse der $\alpha - \lambda$ - Auswertungen für verschiedene γ -Werte (0,6, 0,8, 1).

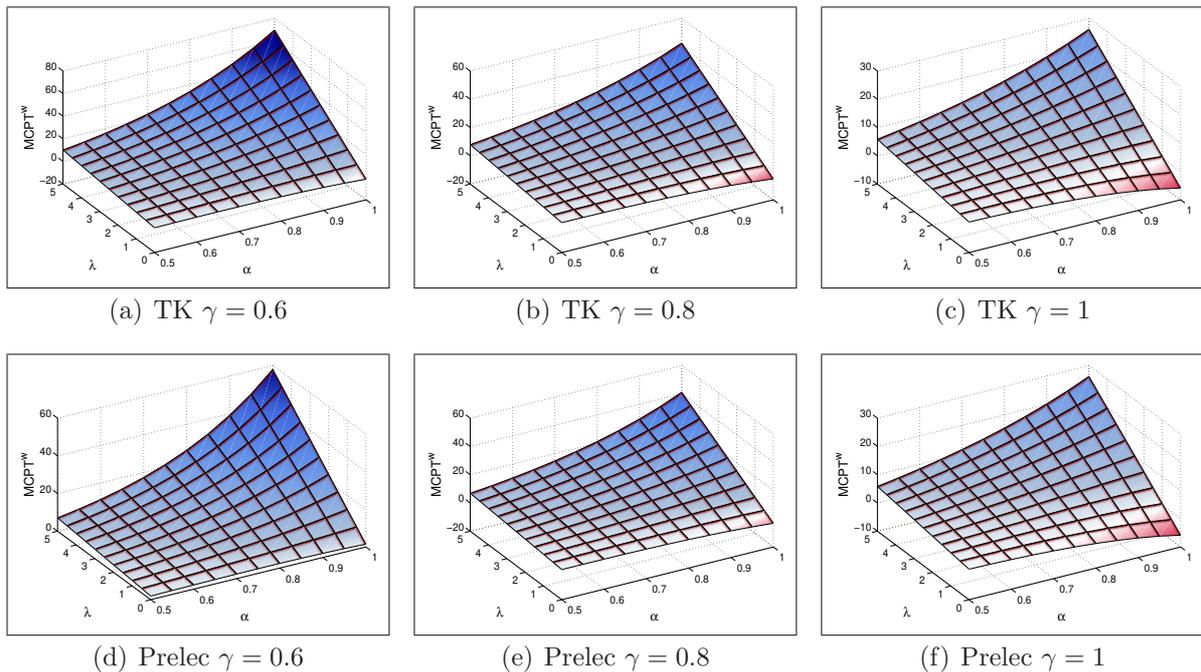


Abbildung 7.1: Power $MCPT^w$ -Nutzen Differenz zwischen LC- und Mischfonds bei $\rho = 1$, $\alpha \in [0.5, 1]$ und TK bzw. Prelec.

Abbildung 7.1 veranschaulicht, dass auch im laufenden Beitragsfall die Tversky Kahneman und die Prelec Wahrscheinlichkeitsgewichtsfunktionen vergleichbare Auswirkungen auf den Nutzen besitzen, die sich lediglich im Hinblick auf risikoaffine Anleger mit einer hohen Sensitivität auf die Wahl des Fonds leicht unterscheiden. Erneut wirkt sich der Verlustavversionsparameter λ entscheidend auf die Differenz aus. Insgesamt lässt sich feststellen, dass die Ergebnisse im Hinblick auf die Fondswahl sehr ähnlich zum Einmalbeitragsfall sind. So gilt auch hier, dass für einen Verlustavversionsparameter von $\lambda > 1$ der Lifecycle Fonds in allen betrachteten Fällen einen höheren Nutzen als der Mischfonds erzeugt. Neben den Unterschieden in der absoluten Höhe der Differenzen, die ihre Ursache in den höheren Schwankungen haben, ist im Gegensatz zum Einmalbeitragsfall aber auch zu erkennen, dass bei einer Wahrscheinlichkeitsgewichtung der Lifecycle Fonds im laufenden Beitragsfall, bis auf ganz wenige Ausnahmen, stets den Mischfonds dominiert. Im Fall $\gamma = 0,6$ sogar für alle betrachteten λ und α . Auch ist der Einfluss von α auf die Differenz im Vergleich zum Einmalbeitragsfall sehr ähnlich. So folgt insbesondere für Anleger mit $\lambda < 1$, dass sie mit geringerer Abnahme der Sensitivität (α nahe eins) zunehmend zum Mischfonds tendieren. In den anderen Fällen für λ verändert sich hauptsächlich die absolute Höhe der Differenz. Dabei vergrößert sich für Anleger mit $\lambda > 1$ der Nutzenvorteil durch den Lifecycle Fonds mit zunehmendem α . Ein Unterschied zum Einmalbeitragsfall zeigt sich in der Krümmung in α für feste λ , die hier deutlich stärker ist, insbesondere für risikoaverse Anleger ($\lambda > 1$) mit einer hohen Sensitivität (α nahe eins). Die Ursache liegt erneut in den deutlich höheren absoluten Schwankungen im Vergleich zum Einmalbeitragsfall (Vergleiche hierzu Ausführungen und Tabellen in Kapitel 5.3).

(b) Exponential Wertefunktion

Bei den Kombinationen mit der Exponential Wertefunktion lassen sich vergleichbare Ergebnisse wie im vorherigen Fall erkennen¹. Abbildung 7.2 zeigt die Kombination mit der Tversky Kahneman Wahrscheinlichkeitsgewichtung. Erneut wird der Lifecycle Fonds lediglich in kleinen Bereichen für $\lambda < 1$ und $\alpha < 0,04$, also unter einer geringeren Abnahme der Sensitivität, als schlechter als der Mischfonds

¹Erneut ist darauf hinzuweisen, dass für die Exponential Wertefunktion bei zunehmendem Sensitivitätsparameter α , umgekehrt zur Power und Quadratischen Wertefunktion, die Sensitivität abnimmt und nicht zunimmt (Vergleiche Tabelle 3.2.3).

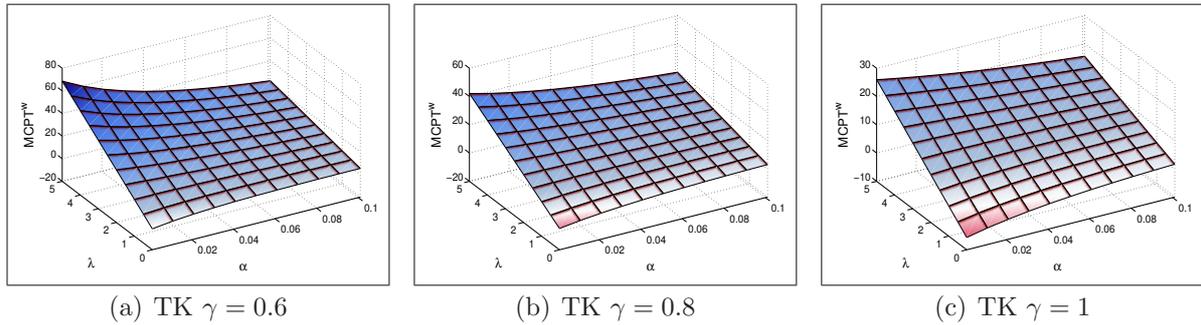


Abbildung 7.2: Expo MCPT^w-Nutzen Differenz zwischen LC- und Mischfonds bei $\rho = 1$, $\alpha \in (0, 0.1]$ und TK.

wahrgenommen. Des Weiteren ist bei einer Zunahme der Wahrscheinlichkeitsgewichtung der Lifecycle Fonds zunehmend im Vorteil. Die Krümmung zeigt die gleichen Charakteristika wie im Fall der Power Wertefunktion (konvex für große λ , konkav für kleine λ und besonders stark für Anleger mit hoher Sensitivität), allerdings ist sie hier weniger stark ausgeprägt.

(c) Quadratische Wertefunktion

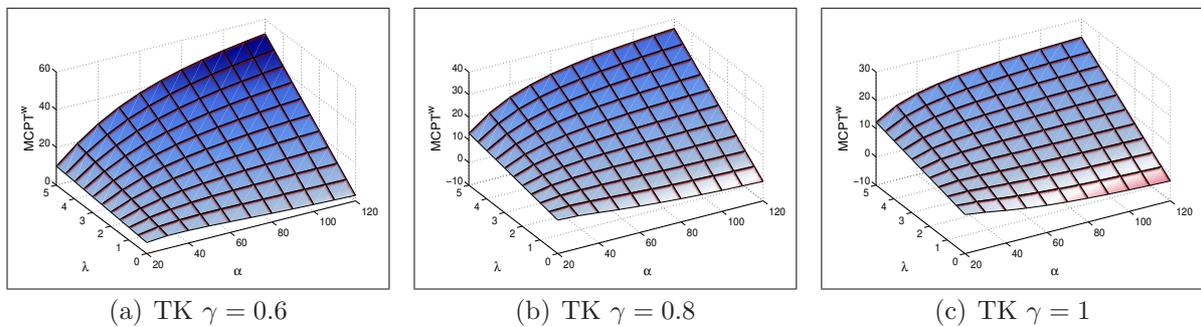


Abbildung 7.3: Quadratischer MCPT^w-Nutzen Differenz zwischen LC- und Mischfonds bei $\rho = 1$, $\alpha \in [20, 120]$ und TK .

Bei der Betrachtung der Quadratischen Wertefunktion sind die Vorteile des Lifecycle Fonds noch deutlicher. In Abbildung 7.3 lässt sich für den Tversky Kahneman Fall erkennen, dass der Lifecycle Fonds lediglich für $\lambda < 0,5$ und vor allem unter Ausblendung der Wahrscheinlichkeitsgewichtung schlechter als der Mischfonds ist.

In den anderen Fällen ist der Lifecycle Fonds deutlich besser als der Mischfonds. Wie im Einmalbeitragsfall zeigt sich auch hier bei der Quadratischen Wertefunktion ein im Vergleich zu den Auswertungen der beiden anderen Wertefunktionen anderes Krümmungsverhalten in α . Insbesondere ist es für $\lambda > 1$ stets konkav und erneut, im Gegensatz zu den vorherigen Fällen, im Bereich der Anleger mit einer geringen Sensitivität (kleine α) besonders stark.

Insgesamt zeigt dieser Teil des ersten Abschnittes, dass die Ergebnisse im laufenden Beitragsfall, bezüglich der Differenzen für alle Kombinationen von Wertefunktionen und Wahrscheinlichkeitsgewichtsfunktionen, vergleichbar sind und die Wahl der Funktionenkombination nur einen geringen Einfluss auf die Interpretation der Resultate besitzt. Vor allem die Ergebnisse für Anleger, die der Grundannahmen der Prospect Theorie entsprechen ($\lambda > 1$), sind für alle Funktionenkombinationen in ihrer Struktur sehr ähnlich. Des Weiteren zeigt sich, dass der bereits im Einmalbeitragsfall eingetretene Vorteil des Lifecycle Fonds im laufenden Beitragsfall noch verstärkt wird und für einen Großteil der Anleger, insbesondere für alle Prospect Theorie Anleger ($\lambda > 1$) der Lifecycle Fonds, klar zu bevorzugen ist. Erneut ist der größte Unterschied im Krümmungsverhalten in α für feste λ festzustellen. So besitzen Power und Exponential Wertefunktion für $\lambda > 1$ ein konvexe Struktur in α , die besonders für Anleger mit hohen Sensitivitäten stark ausgeprägt ist, während die Quadratische Wertefunktion, vor allem für Anleger mit einer geringen Sensitivität, eine konkave Struktur in diesem Bereich aufweist.

Einfluss der Zeitdiskontierung am Beispiel der Power Wertefunktion mit Tversky Kahneman Wahrscheinlichkeiten

In Abbildung 7.4 wird der Einfluss der Zeitdiskontierung deutlich. Es zeigt sich, dass sich zum einen die absoluten Werte der Differenzen bei positiver Zeitdiskontierung erhöhen. Zum anderen zeigt sich auch, dass eine positive Zeitdiskontierung eine Verschiebung zu Gunsten des Mischfonds und eine negative Diskontierung eine Verschiebung zum Vorteil des Lifecycle Fonds verursacht. Diese Ergebnisse entsprechen damit auch den Resultaten im Einmalbeitragsfall. Darüber hinaus führt eine negative Diskontierung mit $\rho = 0,98$ bereits zu einer positiven Verschiebung der zuvor negativen Differenzen, die dazu führt, dass dann der Lifecycle Fonds für alle Anleger in allen Fällen besser abschneidet als der Mischfonds.

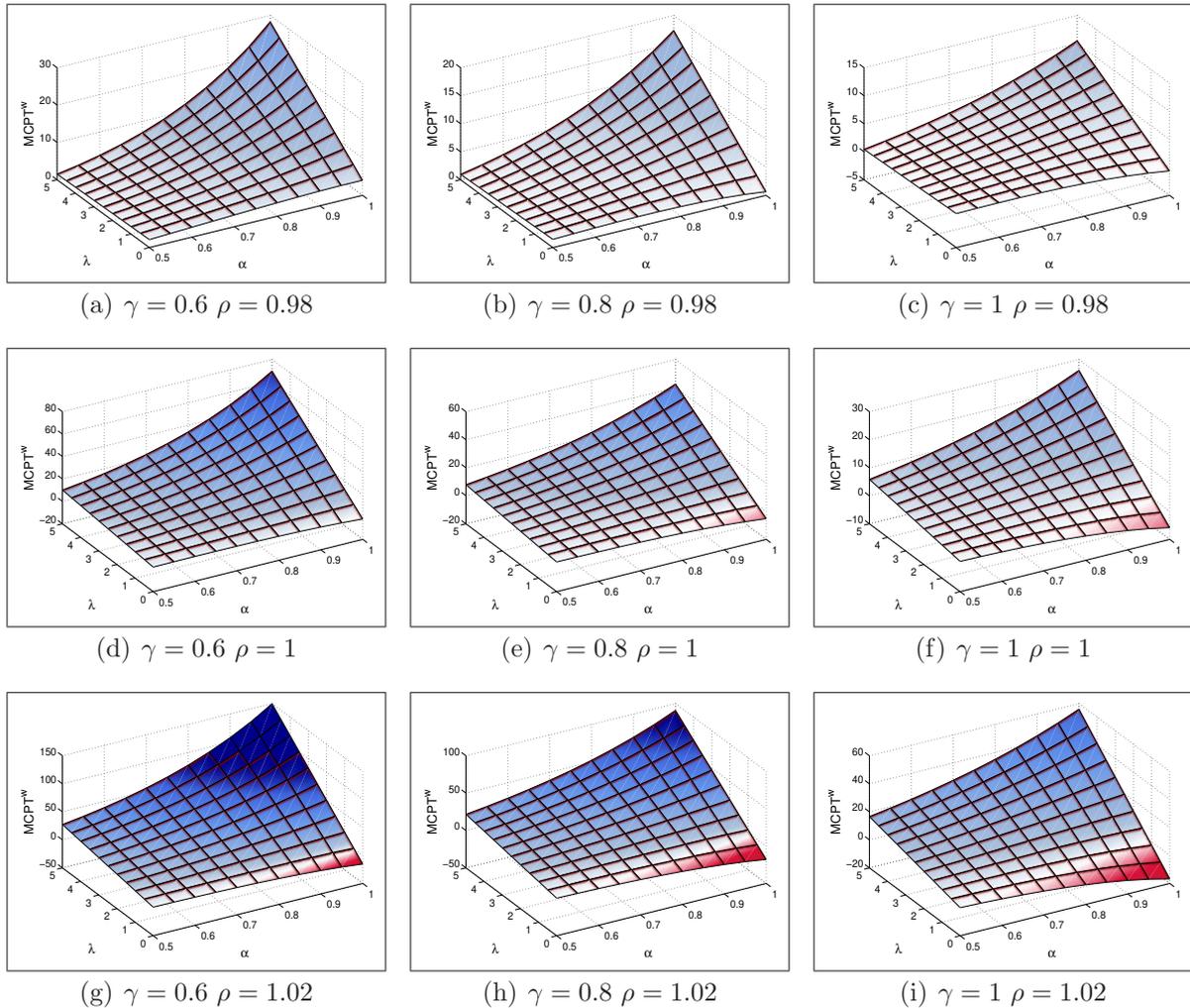


Abbildung 7.4: Power $MCPT^w$ -Nutzen Differenz zwischen LC- und Mischfonds bei $\alpha \in [0.5, 1]$ und TK.

7.1.2 Entwicklung des $MCPT^w$ -Nutzen α -Sensitivität

Im zweiten Teil des ersten Abschnittes wird die Entwicklung des $MCPT^w$ -Nutzen für den Lifecycle- und Mischfonds, wie im Einmalbeitragsfall in Abschnitt 6.1.2, untersucht. Es werden erneut die $MCPT^w$ -Nutzen Verläufe von Lifecycle- (blau) und Mischfonds (rot) abgebildet. Zuerst findet eine Analyse der Auswirkung von λ auf die Verläufe statt. Anschließend werden die gleichen zwei exemplarischen Fälle ($\lambda = 2, 5$ und $\lambda = 0, 4$) wie im Einmalbeitragsfall im Detail betrachtet.

Einfluss von λ auf die α -Sensitivität im Fall $\rho = \gamma = 1$

Auch in dieser Analyse wird sehr deutlich, dass der Verlustavversionsparameter λ einen entscheidenden Einfluss auf den $MCPT^w$ -Nutzen hat. In Abbildung 7.5, in welcher für verschiedene Werte von λ die $MCPT^w$ -Nutzen Verläufe im Fall mit einer Power Wertefunktion und ohne Wahrscheinlichkeitsgewichtung und Zeitdiskontierung abgebildet sind, wird ersichtlich, dass die Verläufe ein ähnliches Muster wie im Einmalbeitragsfall aufweisen.

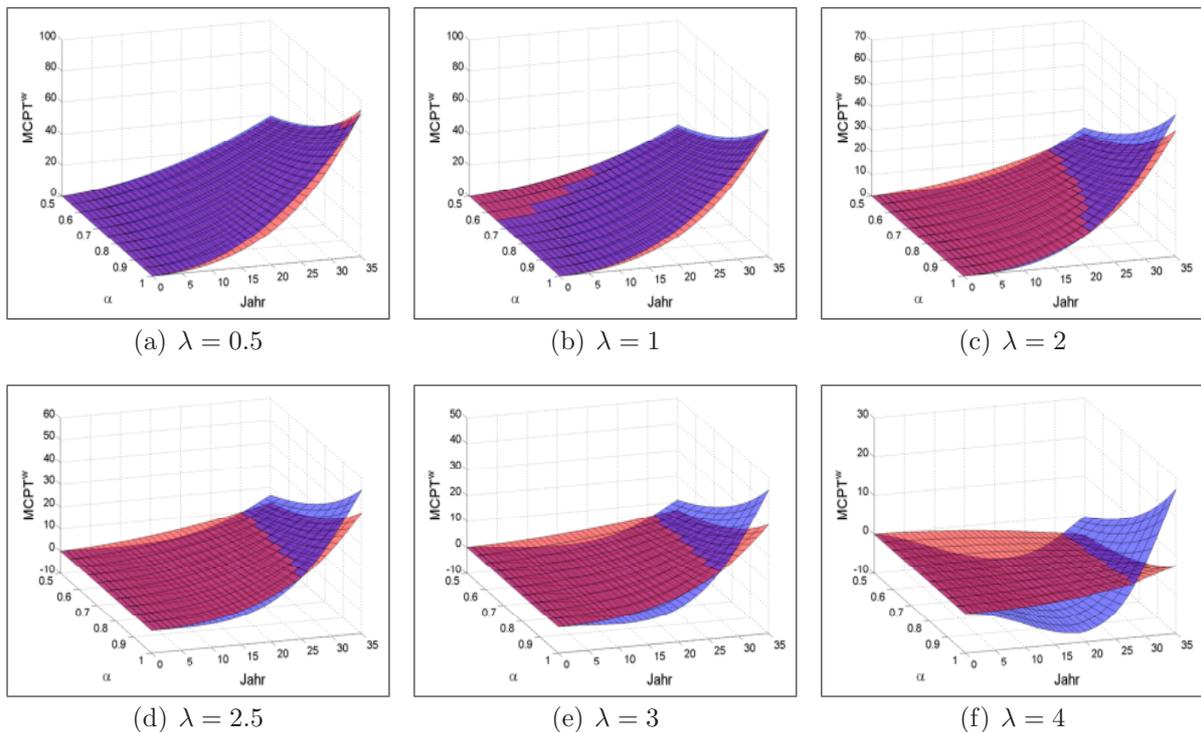


Abbildung 7.5: Einfluss von λ auf die α Sensitivität der Power $MCPT^w$ -Nutzen Entwicklung von LC- und Mischfonds bei $\rho = \gamma = 1, \alpha \in [0.5, 1]$ und TK.

Für den Fall $\lambda = 0,5$ und $\lambda = 1$ sind die Endwerte und auch die Verläufe annähernd gleich. Selbst bei einer Verlustaversion mit $\lambda = 2$ sind die Unterschiede noch vergleichsweise klein. Allerdings zeigt sich für $\lambda \geq 2$ der Effekt der höheren Aktienfondsanteile zu Beginn der Laufzeit und der höheren Sicherheit am Ende der Laufzeit des Lifecycle Fonds. So unterscheiden sich die Steigungen mit wachsendem λ zwischen Lifecycle- und Mischfonds Nutzen zunehmend. Während die Steigung des Mischfonds Nutzen immer

mehr abflacht, entsteht beim Lifecycle Fonds erneut eine zunächst fallende und zum Ende der Laufzeit wachsende Struktur.

Im Vergleich zum Einmalbeitrag schneidet der Lifecycle Fonds für $\lambda > 2$ erst deutlich später den Mischfonds Nutzen, z.B. für $\lambda = 2,5$ erst in den letzten 5-10 Jahren. Dies ist unter anderem auf die unterschiedliche Aktien- und Rentenfondsstruktur im laufenden Beitragsfall im Vergleich zum Einmalbeitragsfall zu erklären. Im laufenden Beitragsfall ist der Mischfonds mit einem Aktienfondsanteil von 41,73% (Einmalbeitragsfall: 58,16%) deutlich vorsichtiger bzw. sicherheitsorientierter und dementsprechend für einen risikoaversen Anleger attraktiver.

Der Lifecycle Fonds generiert darüber hinaus in allen betrachteten Fällen einen positiven Gesamtnutzen, während der Mischfonds Nutzen für $\lambda = 4$ und $\alpha < 0,8$ negative Werte annimmt.

Bei der Sensibilität im Bezug auf α , d.h. auf die Gewinn- und Verlustsensitivität, zeigen sich die Unterschiede besonders in den letzten Jahren der Laufzeit. So ist der Gesamtnutzen bei höherer Sensitivität für beide Fonds etwas größer. Vor allem für große λ vergrößert dieser Effekt die Differenz zwischen Lifecycle- und Mischfonds, da der Lifecycle Fonds in den letzten Jahren deutliche Nutzenvorteile gegenüber dem Mischfonds besitzt.

In den weiteren Betrachtungen werden auch in diesem Kapitel zwei Fälle ($\lambda = 2,5$ und $\lambda = 0,4$) im Folgenden genauer untersucht.

α -Sensitivität im Fall $\lambda = 2,5$

A: Einfluss der Zeitdiskontierung ρ am Beispiel der Power Wertefunktion mit Tversky Kahneman Wahrscheinlichkeiten

Der Einfluss der Zeitdiskontierung wird in Abbildung 7.6 gezeigt. Es zeigt sich, dass sich die absoluten Werte und der Zeitpunkt, zu welchem der Lifecycle Fonds den Mischfonds schneidet, ändern. Die Grundstruktur bleibt jedoch vergleichbar. Genau wie im Einmalbeitragsfall gilt, dass bei einer negativen Diskontierung der Lifecycle Fonds Nutzen erst zu einem späteren Zeitpunkt besser als der Mischfonds Nutzen ist. Umgekehrt bewirkt eine positive Diskontierung einen früheren Vorteil für den Lifecycle Fonds.

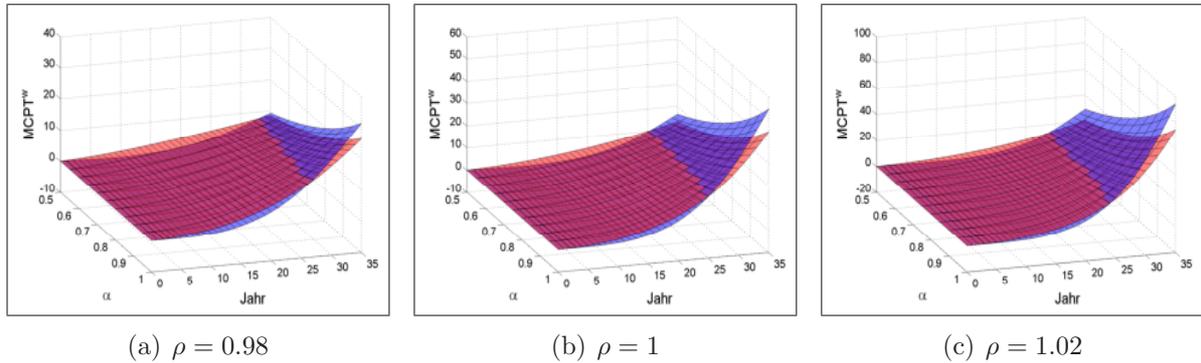


Abbildung 7.6: Power $MCPT^w$ -Nutzen Entwicklung LC- und Mischfonds bei $\gamma = 1$, $\alpha \in [0.5, 1]$ und TK sowie verschiedene ρ .

B: Einfluss der Wahrscheinlichkeitsgewichtsfunktion am Beispiel der Power Wertefunktion (ohne Zeitdiskontierung)

Als nächstes wird die Wahrscheinlichkeitsgewichtung untersucht. Es werden dazu in Abbildung 7.7 die beiden Wahrscheinlichkeitsgewichtsfunktionen für verschiedene γ betrachtet. Es lässt sich beobachten, dass eine zunehmende Wahrscheinlichkeitsgewichtung zu einem geringeren Nutzen der beiden Fondstypen führt. Bei einer Wahrscheinlichkeitsgewichtung von $\gamma = 0,6$ ist der Gesamtnutzen für den Mischfonds sogar in allen Fällen negativ, wobei der negative Gesamtnutzen hauptsächlich in den letzten Jahren entsteht. Der Lifecycle Fonds erzielt nur in der Tversky Kahneman Version für $\gamma = 0,6$ und $\alpha < 0,7$, d.h. bei einer stark abnehmenden Gewinn- und Verlustsensitivität, einen leicht negativen Nutzen. Insgesamt führt eine erhöhte Wahrscheinlichkeitsgewichtung zu einem stärkeren Vorteil des Lifecycle Fonds im Vergleich zum Mischfonds.

Die Prelec Version verstärkt, wie im Einmalbeitragsfall, die Effekte am Ende der Laufzeit. Die Struktur der Ergebnisse ist dennoch in beiden Fällen vergleichbar.

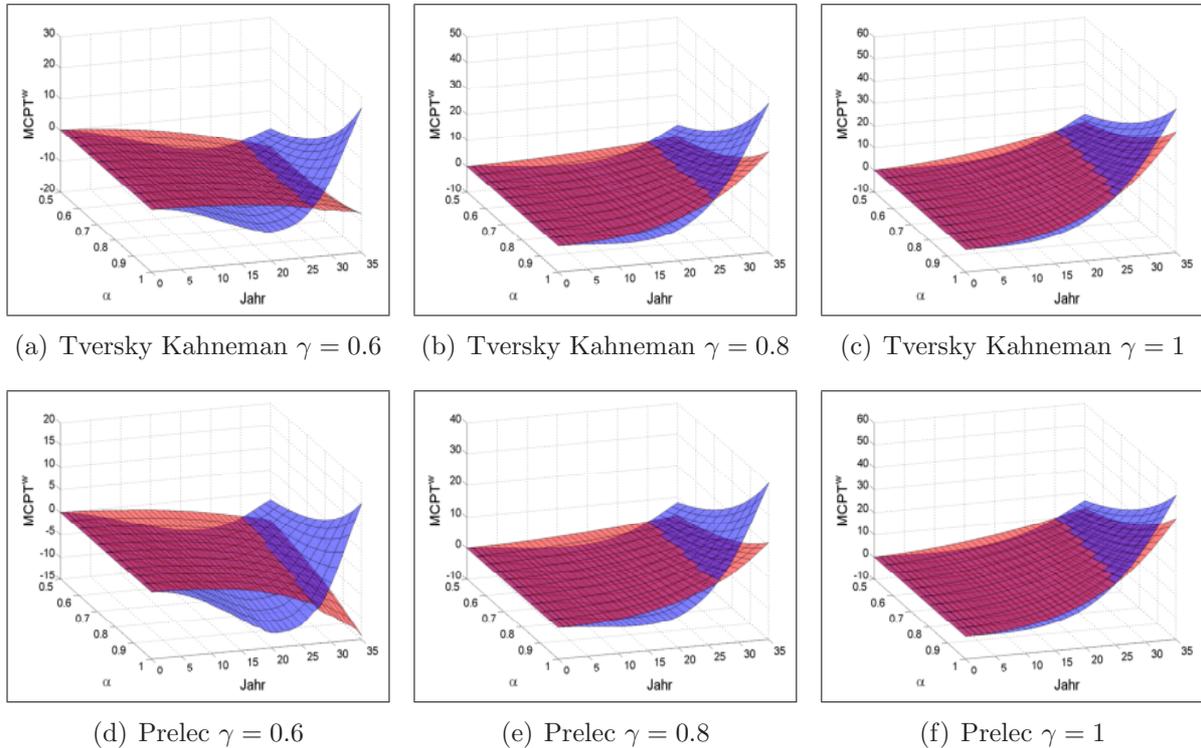


Abbildung 7.7: Einfluss der Wahrscheinlichkeitsgewichtsfunktion auf die Power $MCPT^w$ -Nutzen Entwicklung für LC- und Mischfonds bei $\rho = 1, \alpha \in [0.5, 1]$.

Auch im laufenden Beitragsfall hat die Wahrscheinlichkeitsgewichtung einen deutlichen Einfluss auf die Verläufe. Während der Lifecycle Fonds in den letzten Jahren noch einen erhöhten positiven Nutzen generieren kann, gilt für den Mischfonds, dass mit zunehmender Wahrscheinlichkeitsgewichtung kein positiver Nutzen mehr erzielt wird, da das Risiko (Aktienfondsanteil) über die gesamte Laufzeit zu hoch ist und dementsprechend von einem Anleger, der seltene Ereignisse und damit auch seltene hohe Verluste übergewichtet, bestraft wird.

C: Betrachtung verschiedener Werte- und Wahrscheinlichkeitsgewichtsfunktionskombinationen (ohne Zeitdiskontierung)

Abschließend wird zum Fall $\lambda = 2,5$ noch eine Übersicht über eine Auswahl von Funktionenkombinationen in Abbildung 7.8 gegeben. Es zeigt sich erneut, dass in allen Funktionenkombinationen vergleichbare Resultate entstehen. In allen be-

trachteten Fällen übertrifft der Lifecycle Fonds, aufgrund der Nutzenvorteile in den letzten Jahren, den Mischfonds gegen Ende der Laufzeit und erzielt zudem einen höheren Gesamtnutzen.

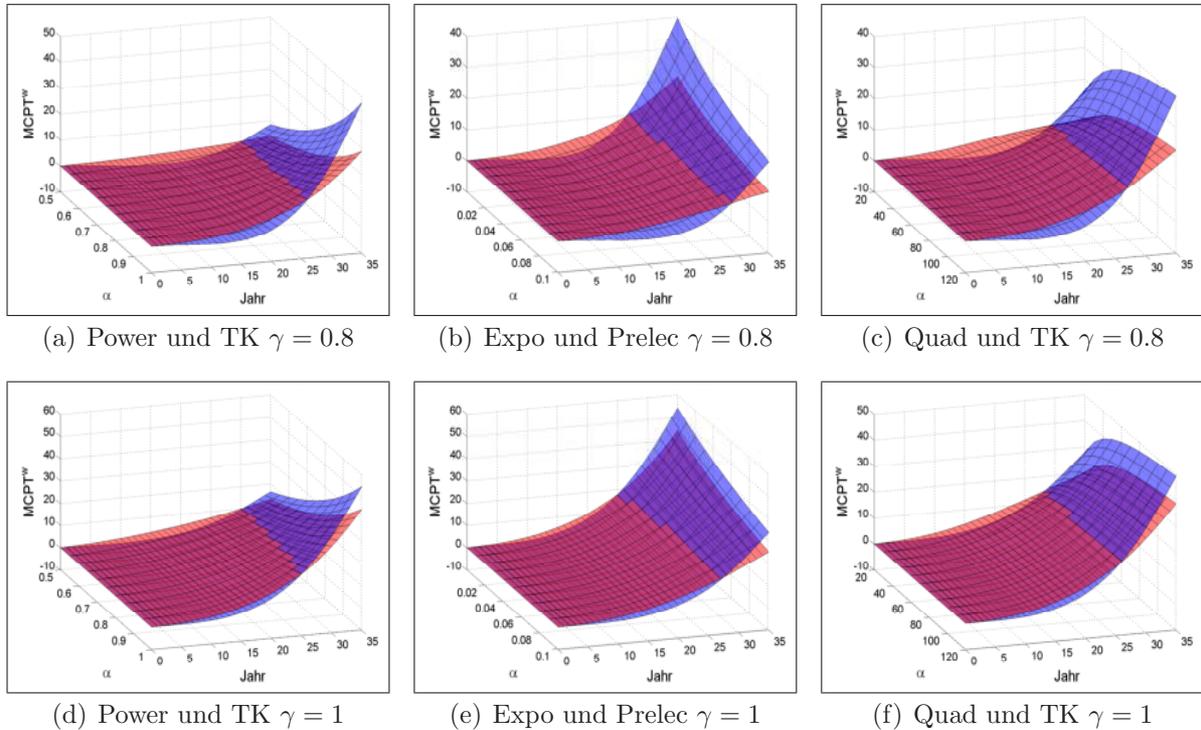


Abbildung 7.8: MCPT^w-Nutzen Entwicklung für LC- und Mischfonds für verschiedene Funktionskombinationen bei $\rho = 1, \alpha \in [0.5, 1]$ (Power), $\alpha \in (0, 0.1]$ (Expo), $\alpha \in [20, 120]$ (Quad) sowie verschiedene γ .

α -Sensitivität im Fall $\lambda = 0,4$

Für den Fall $\lambda = 0,4$ wird in Abbildung 7.9 ein Eindruck der Ergebnisse vermittelt. Es zeigt sich, dass in beinahe allen Fällen der Lifecycle Fonds über die gesamte Laufzeit einen kleinen Nutzenvorteil besitzt, der gegen Ende der Laufzeit nahezu verschwindet. Der Nutzenvorteil für den Lifecycle Fonds entsteht hier hauptsächlich in den ersten Jahren, d.h. in den Jahren, in welchen der Lifecycle Fonds einen höheren Aktienfondsanteil besitzt als der Mischfonds. Gegen Ende der Laufzeit generiert der Mischfonds einen höheren Nutzen, wodurch die Gesamtnutzen am Ende der Laufzeit in allen Fällen beinahe identisch sind.

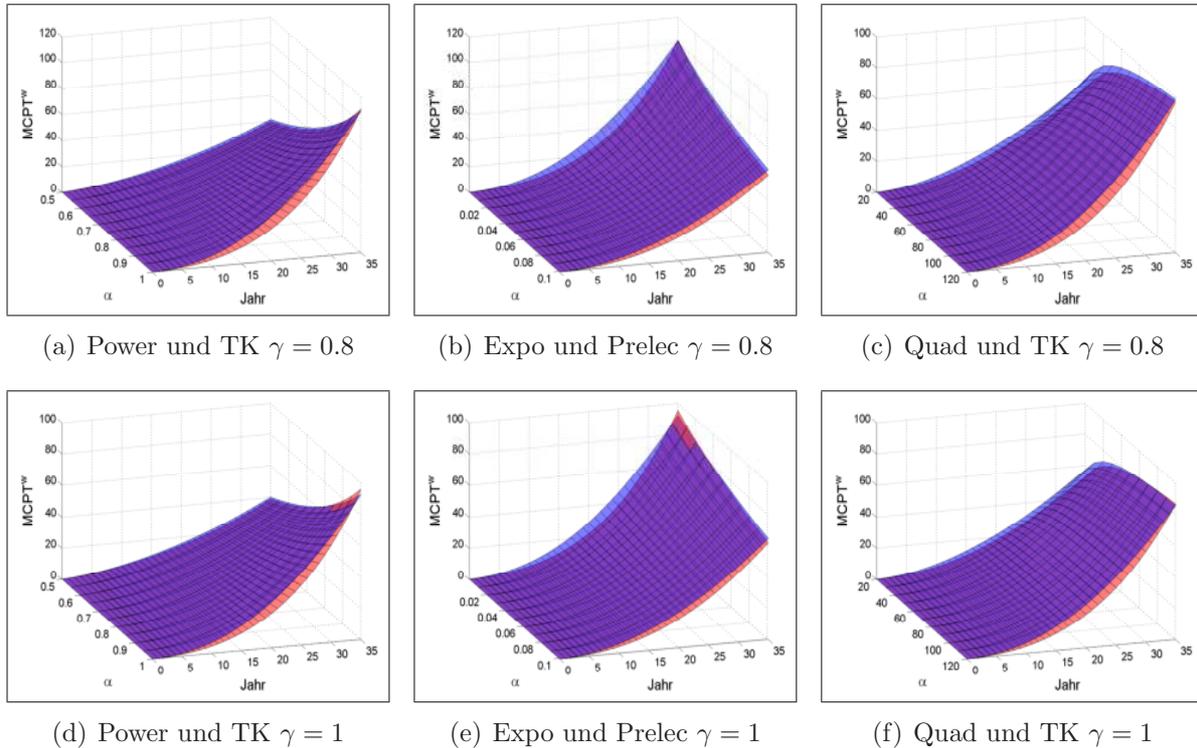


Abbildung 7.9: MCPT^w-Nutzen Entwicklung für LC- und Mischfonds für verschiedene Funktionskombinationen bei $\rho = 1, \alpha \in [0.5, 1]$ (Power), $\alpha \in (0, 0.1]$ (Expo), $\alpha \in [20, 120]$ (Quad) sowie verschiedene γ .

Auch im laufenden Beitragsfall zeigt sich also, dass bei einer Überbewertung der Gewinne sich die Nutzen von Lifecycle- und Mischfonds einander annähern. Im Gegensatz zum Einmalbeitragsfall reicht eine Überbewertung der Gewinne mit dem Faktor 2,5 nicht aus, um einen Vorteil für den Mischfonds ableiten zu können.

7.1.3 Vergleich zum Mischfonds+

In diesem Teil des Abschnittes wird eine Analyse des in Kapitel 5.1.2 eingeführten Mischfonds+ im laufenden Beitragsfall durchgeführt.

Die Ergebnisse sind beinahe deckungsgleich zu denen im Einmalbeitragsfall. Aufgrund der niedrigeren Gebühren des Mischfonds im Vergleich zum Einmalbeitragsfall fallen die Auswirkungen jedoch etwas schwächer aus. So erzielt der Mischfonds+ nur ein leicht besseres Ergebnis als der Mischfonds bei der Betrachtung des MCPT^w-Nutzen. Der Li-

ifecycle Fonds erzielt trotz der leicht schlechteren Endwertverteilung für alle Prospect Theorie Anleger ($\lambda > 1$ und $\gamma < 1$) einen teilweise deutlich höheren Nutzen.

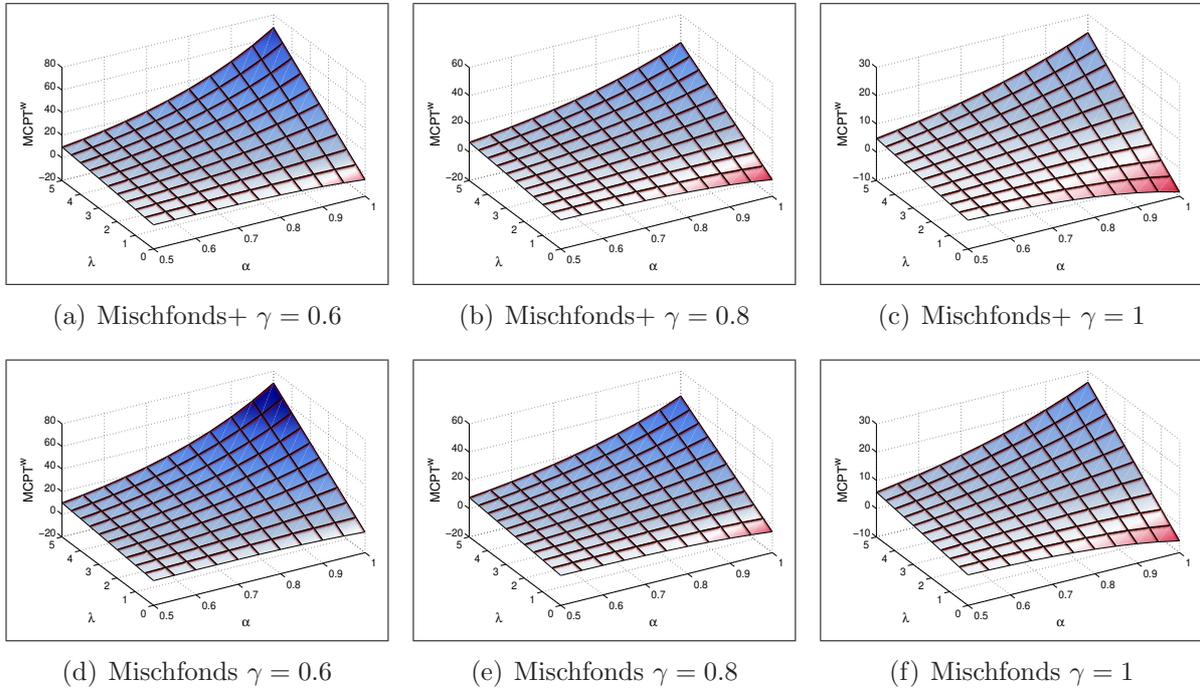


Abbildung 7.10: Power $MCPT^w$ -Nutzen Differenz zwischen LC- und Mischfonds+ bzw. Mischfonds bei $\rho = 1$, $\alpha \in [0.5, 1]$ und TK.

Dies zeigt, dass auch im laufenden Beitragsfall die Unsicherheiten in den letzten Jahren dazu führen, dass der Mischfonds+ trotz einer besseren Endwertverteilung einen Nutzennachteil gegenüber dem Lifecycle Fonds, der gegen Ende sicherheitsorientierter investiert, besitzt.

7.1.4 Überblick im laufenden Beitragsfall

Abschließend wird in diesem Abschnitt eine Zusammenfassung der Ergebnisse für den laufenden Beitragsfall in einer Tabelle gegeben, die einen schnellen Überblick über die Nutzenvorteile verschiedener Anleger für den Fall ohne Zeitdiskontierung gibt. Tabelle 7.1 verwendet die Unterscheidungsmerkmale der Anleger, die bereits im Einmalbeitragsfall in Tabelle 6.1 genutzt wurden. Insbesondere steht n für eine weitgehend neutrale

Gewinn- und Verlustsensitivitätsausprägung, ↗ für eine Sensitivität, die etwas stärker abnimmt und ↗↗ für eine sehr stark abnehmende Sensitivitätsausprägung.

		λ				
γ	α	0 - 0,5	0,5 - 1	1 - 1,5	1,5 - 2	> 2
0,6	n	-	LC ₊	LC ₊	LC ₊₊	LC ₊₊
	↗	LC	LC ₊	LC ₊	LC ₊	LC ₊₊
	↗↗	LC	LC	LC ₊	LC ₊	LC ₊
0,8	n	M	-	LC ₊	LC ₊	LC ₊₊
	↗	-	LC	LC ₊	LC ₊	LC ₊₊
	↗↗	LC	LC	LC	LC ₊	LC ₊
1	n	M ₊	M	LC	LC ₊	LC ₊₊
	↗	M	-	LC	LC ₊	LC ₊
	↗↗	-	LC	LC	LC	LC ₊

Tabelle 7.1: Übersicht der Ergebnisse im laufenden Beitragsfall.

M=Mischfonds leicht im Vorteil, M₊=Mischfonds im Vorteil,
M₊₊=Mischfonds deutlich im Vorteil,
- = vergleichbare Nutzen / kein Vorteil eindeutig zu bestimmen,
LC=Lifecycle leicht im Vorteil, LC₊=Lifecycle im Vorteil, LC₊₊=Lifecycle
deutlich im Vorteil

Der MCPT Ansatz gibt auch im laufenden Beitragsfall eine Möglichkeit, den Nutzen für verschiedene Verläufe von unterschiedlichen Fondstypen quantitativ zu messen und zwischen verschiedenen Anlegerklassen zu unterscheiden. Es zeigt sich insgesamt, dass der Sicherheitsvorteil den der Lifecycle Fonds am Ende der Laufzeit dem Anleger bietet, insbesondere für Prospect Theorie Anleger, einen deutlich besseren Nutzen hervorbringt. Bei Anlegern, die nicht der Prospect Theorie entsprechen ($\lambda < 1$), ist meistens keine klare Tendenz für oder gegen einen Fondstyp auszumachen, da die Nutzen nahezu übereinstimmend sind. Für diese Anleger sind die Wahrscheinlichkeitsgewichtung und der α -Wert entscheidend. Allerdings gilt, dass lediglich für Anleger, die absolut im Gegensatz zur Prospect Theorie stehen ($\lambda < 0,5$, $\gamma = 1$ und nur eine sehr langsam abnehmende Gewinn- und Verlustsensitivität), der Mischfonds deutlich besser ist. Betrachtet man die Ergebnisse für $\lambda > 1$, so lässt sich ein deutlicher Vorteil für den Lifecycle Fonds erkennen.

7.2 Analyse ausgewählter MCPT^w Investoren

Nachdem in Abschnitt 7.1 eine ausführliche Untersuchung des MCPT^w-Nutzen im laufenden Beitragsfall gegeben wurde, folgt in diesem Abschnitt eine Betrachtung bestimmter Anleger. Es werden erneut, wie im Einmalbeitragsfall, drei Anlegertypen genauer betrachtet:

- risikoaffiner Anleger ($\lambda = 0, 4$),
- risikoneutraler Anleger ($\lambda = 1$),
- risikoaverser Anleger ($\lambda = 2, 5$).

Der Parameter α ist für alle Anleger auf 0,8 gesetzt, d.h. es wird eine mittlere Abnahme der Gewinn- und Verlustsensitivität unterstellt (vergleichbar mit ↗) und es wird stets eine Power Wertefunktion in Kombination mit einer Tversky Kahneman Wahrscheinlichkeitsgewichtung mit $\gamma = 0,8$ und $\gamma = 1$ analysiert.

Auf Basis der Auswertungen in Abschnitt 7.1 lässt sich feststellen, dass sich für den risikoaffinen Anleger keine klare Tendenz für oder gegen einen der beiden Fonds ergibt. Beim risikoneutralen Anleger zeigt sich nur ein geringer Vorteil für den Lifecycle Fonds. Der risikoaverse Anleger dagegen erhält einen deutlichen Vorteil aus dem Lifecycle Fonds. Es werden nun auch für den laufenden Beitragsfall die Verteilungen des MCPT^w-Nutzen (bzw. der Differenzen) untersucht, um einen besseren Eindruck über die Zusammensetzung des Nutzens zu erhalten.

In Abbildung 7.11 sind die Verteilungen der MCPT^w-Nutzen Differenzen in den betrachteten Fällen mit Hilfe von Histogrammen dargestellt.

Bei der Betrachtung des risikoaffinen Anlegers zeigt sich, dass der Mittelwert (-0,03 bzw. 1,30) und der Median (-0,85 bzw. -0,54) für $\gamma = 1$ sehr nahe beieinander sind, während bei einer Wahrscheinlichkeitsgewichtung der Abstand zunimmt, was durch die Zunahme der extremen Ereignisse (große Differenzen) verursacht wird, die sich in den Tails für $\gamma = 0,8$ erkennen lassen. Für diese Anleger zeigt sich insgesamt eine beinahe symmetrische Verteilung, die allerdings leicht mehr negative (52,83% bzw. 51,83%) als positive Werte aufweist.

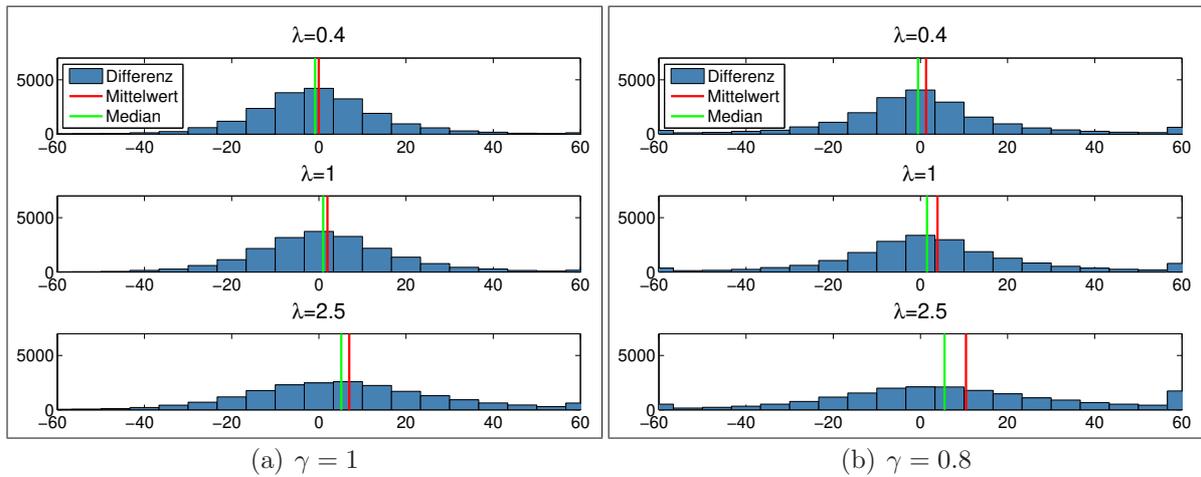


Abbildung 7.11: Verteilung der MCPT^w-Nutzen Differenz zwischen Lifecycle- und Mischfonds.

Bei der Analyse des risikoneutralen Anlegers fällt auf, dass sich wie im Einmalbeitragsfall die Verteilung im Vergleich zum risikoaffinen Anleger leicht zum Vorteil des Lifecycle Fonds verschiebt. Sowohl der Mittelwert (1,97 bzw. 3,91) als auch der Median (1,01 bzw. 1,52) sind in beiden Fällen leicht positiv. Erneut zeigt sich, dass bei einer stärkeren Wahrscheinlichkeitsgewichtung der Unterschied zwischen Median und Mittelwert aufgrund der größeren Tails zunimmt. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Mischfonds als besser wahrgenommen wird, beträgt nur noch 47,14% bzw. 46,05%, im Gegensatz zum risikoaffinen Anleger, dessen Wahrscheinlichkeit für diesen Fall bei 52,83% bzw. 51,83% liegt. Dies bedeutet aber, dass auch für diese Anleger in beinahe jedem zweiten Fall der Mischfonds als besser wahrgenommen wird als der Lifecycle Fonds, weshalb der Vorteil für den Lifecycle Fonds nur sehr gering ist.

Der Effekt der Wahrscheinlichkeitsgewichtung ist auch im laufenden Beitragsfall für den risikoaversen Anleger am stärksten. So steigen insbesondere die Fälle, in denen der Lifecycle Fonds einen Nutzenvorteil von mehr als 50 hat, überproportional. Dies hat zur Folge, dass der Mittelwert (10,46) deutlich größer als der Median (5,52) ist. Der tatsächliche Nutzen fällt mit einer Wahrscheinlichkeit von 53,52% bzw. 57,72% niedriger aus als der Mittelwert. Bereits ohne Wahrscheinlichkeitsgewichtung zeigt sich in diesem Fall der Vorteil für den Lifecycle Fonds im Mittelwert (6,98) und im Median (5,14). Allerdings

ist im Gegensatz zum Einmalbeitragsfall die Wahrscheinlichkeit, dass der Mischfonds dennoch ein besseres Ergebnis erzielt, mit 40,28% bzw. 41,24% noch relativ hoch. Das bedeutet, dass trotz eines deutlich besseren MCPT^w-Nutzen der Lifecycle Fonds in 4 von 10 Fällen im tatsächlichen Nutzen schlechter wahrgenommen wird als der Mischfonds. Dies liegt insbesondere an der deutlich konservativeren Zusammenstellung des Mischfonds mit einem geringeren Aktienfondsanteil von 41,73% (Einmalbeitragsfall: 58,16%), der auch bereits in Abschnitt 7.1.2 angesprochen wurde.

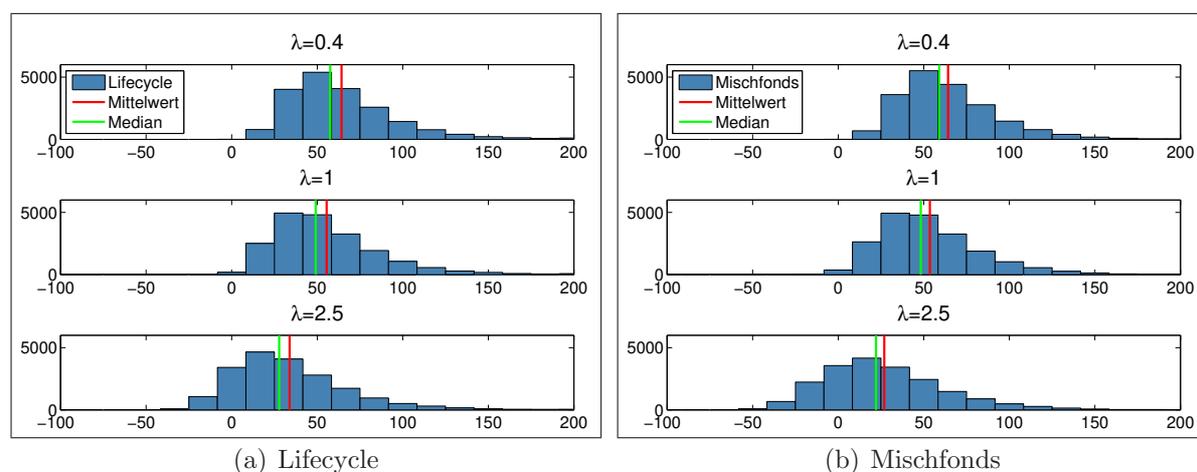


Abbildung 7.12: Verteilung der MCPT^w-Nutzen des Lifecycle- und Mischfonds für $\gamma = 1$.

In Abbildung 7.12 wird die Verteilung des MCPT^w-Nutzen für den Lifecycle- (links) und den Mischfonds (rechts) für verschiedene Anlegertypen unter Ausblendung der Wahrscheinlichkeitsgewichtung dargestellt. Auch im laufenden Beitragsfall lässt sich erkennen, dass der absolute Nutzen mit zunehmender Risikoaversion abnimmt und der Median stets kleiner als der Mittelwert ist, wobei der MCPT^w-Nutzen (Mittelwert) für beide Fonds in allen Fällen stets positiv ist. Während im Fall $\lambda = 0,4$ und $\lambda = 1$ die Verteilungen von Lifecycle- und Mischfonds noch beinahe identisch sind, zeigt sich bei $\lambda = 2,5$, dass der Mischfonds Nutzen deutlich öfter negative Werte annimmt als der Lifecycle Fonds. So ist der Mischfonds Nutzen in 23,11% der Fälle negativ und der Lifecycle Fonds nur in 13,06% der Fälle. Betrachtet man die Wahrscheinlichkeit der hohen negativen Nutzen, wird der Unterschied noch deutlicher, so tritt für den Mischfonds in 6,07% der Fälle ein Nutzen von weniger als -20 ein, für den Lifecycle Fonds dagegen nur in 0,98%

der Fälle. Insgesamt gilt in diesem Fall, dass die negativen Nutzen des Mischfonds im Mittelwert $-14,34$ ergeben, dieser ist deutlich niedriger als der Mittelwert der negativen Nutzen des Lifecycle Fonds ($-8,77$). Die Mittelwerte der positiven Nutzen sind dagegen mit $40,29$ (LC) bzw. $39,30$ (Mischfonds) vergleichbar. Der $MCPT^w$ -Nutzenunterschied zwischen Lifecycle- und Mischfonds im Fall $\lambda = 2,5$ wird daher hauptsächlich durch diese überproportionale Zunahme der hohen negativen Nutzen für den Mischfonds im Vergleich zum Lifecycle Fonds verursacht.

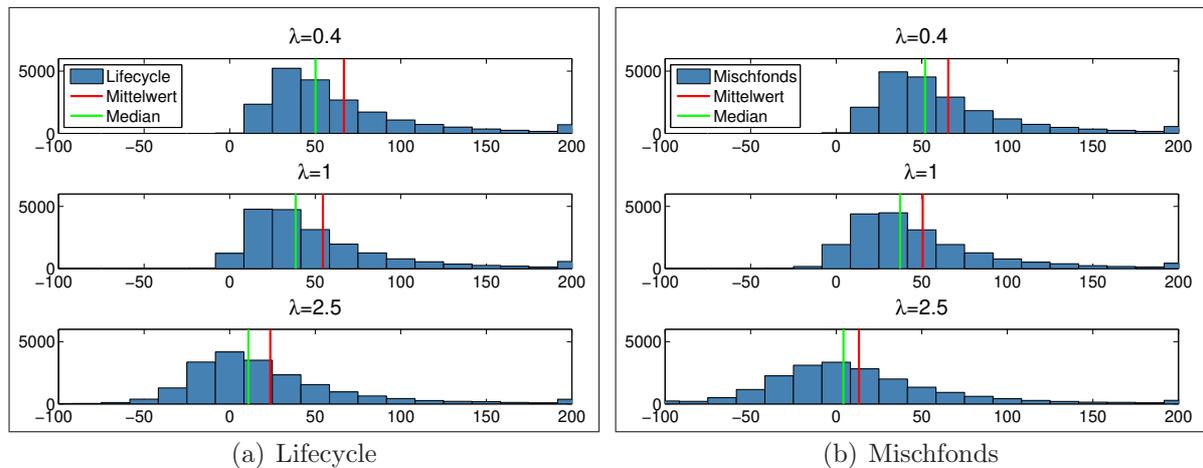


Abbildung 7.13: Verteilung der $MCPT^w$ -Nutzen des Lifecycle- und Mischfonds für $\gamma = 0.8$.

Abbildung 7.13 zeigt die Verteilungen im Fall einer Wahrscheinlichkeitsgewichtung von $\gamma = 0,8$. Für $\lambda = 0,4$ weisen auch hier die Verteilungen von Lifecycle- und Mischfonds Nutzen große Übereinstimmungen auf. Im Vergleich zum vorherigen Fall $\gamma = 1$ ist für $\lambda = 1$ der Unterschied der beiden Verteilungen bereits deutlicher. Der Mischfonds Nutzen nimmt hier in $3,89\%$ der Fälle negative Werte an, die einen Mittelwert von $-6,14$ besitzen, während der Lifecycle Fonds Nutzen nur in $1,23\%$ der Fälle negativ ist und der Mittelwert auch nur $-3,82$ beträgt. Dementsprechend ist auch der Mittelwert des Lifecycle Fonds Nutzen mit $54,49$ größer als der des Mischfonds mit $50,57$. Im Fall $\lambda = 2,5$ wirken die Prospect Theorie Modellierungen noch stärker. Der Mittelwert des Lifecycle Fonds Nutzen ist mit $23,76$ deutlich größer als der des Mischfonds ($13,31$). Die Wahrscheinlichkeit von negativen Nutzen ist im Lifecycle Fonds mit $36,66\%$ erheblich geringer als im Mischfonds ($45,70\%$) und auch die Mittelwerte der negativen Nutzen sind für den

Lifecycle mit -18,28 deutlich besser als die des Mischfonds mit -29,06.

Dieser Abschnitt zeigt, dass der Lifecycle Fonds im laufenden Beitragsfall im Hinblick auf die Verteilung des MCPT^w-Nutzen für den risikoaversen Prospect Theorie Anleger ($\lambda = 2,5$) die bessere Wahl ist. Allerdings zeigt sich auch, dass selbst in diesem Fall in circa 4 von 10 Fällen der Mischfonds einen höheren tatsächlichen Nutzen erzielt. Der risikoneutrale Anleger erhält auch hier durch den Lifecycle Fonds ein leicht besseres Ergebnis. Für den risikoaffinen Anleger zeigt sich, dass sich auch bei der Betrachtung der Verteilung des MCPT^w-Nutzen kein eindeutiger Vorteil für einen Fonds ergibt, da die Fälle in denen der Lifecycle Fonds besser ist als der Mischfonds und umgekehrt, nahezu gleich oft eintreten und auch in ihrer Höhe vergleichbar sind.

7.3 Analyse im Gedächtnisfall

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels findet eine Untersuchung des in Kapitel 3.2.5 eingeführten Gedächtnisfalles im laufenden Beitragsfall statt. Aus den gleichen Gründen wie im Einmalbeitragsfall (Abschnitt 6.3) wird nur der Fall ohne Zeitdiskontierung betrachtet. Es werden die Auswirkungen der Parameter η , λ , γ auf den MCPT^w-Nutzen untersucht. η spiegelt sich mit der Transformation $\text{HWZ} = -\frac{\log(2)}{\log(\eta)}$ in der Gedächtnishalbwertszeit wider.

In Abbildung 6.14 sind die Differenzen zwischen dem MCPT^w-Nutzen des Lifecycle- und des Mischfonds für unterschiedliche Verlustaversionen $\lambda \in [0, 5]$, Gedächtnishalbwertszeiten in Jahren ($\text{HWZ} \in (0, 10]$) und verschiedenen Wahrscheinlichkeitsgewichtungen $\gamma = 0,6, 0,8, 1$, für beide Wahrscheinlichkeitsgewichtsfunktionen zu sehen.

Es zeigt sich, dass mit zunehmender Gedächtnishalbwertszeit der Nutzen des Mischfonds besser als der des Lifecycle Fonds wird, während der Lifecycle Fonds bei kurzen Gedächtnishalbwertszeiten ($\text{HWZ} < 2$ bis 5 Jahre, je nach Wahrscheinlichkeitsgewichtung) und insbesondere für Prospect Theorie Anleger ($\lambda > 1$) einen klaren Vorteil hat. Wie im Einmalbeitragsfall zeigt sich, dass bei zunehmender Gedächtnishalbwertszeit die Unterschiede, die durch den Verlustaversionparameter λ verursacht werden, sehr stark abnehmen und der Nutzenunterschied zwischen Lifecycle- und Mischfonds für einen sehr verlustaversen und einen weniger verlustaversen Anleger beinahe identisch ist. Ob der

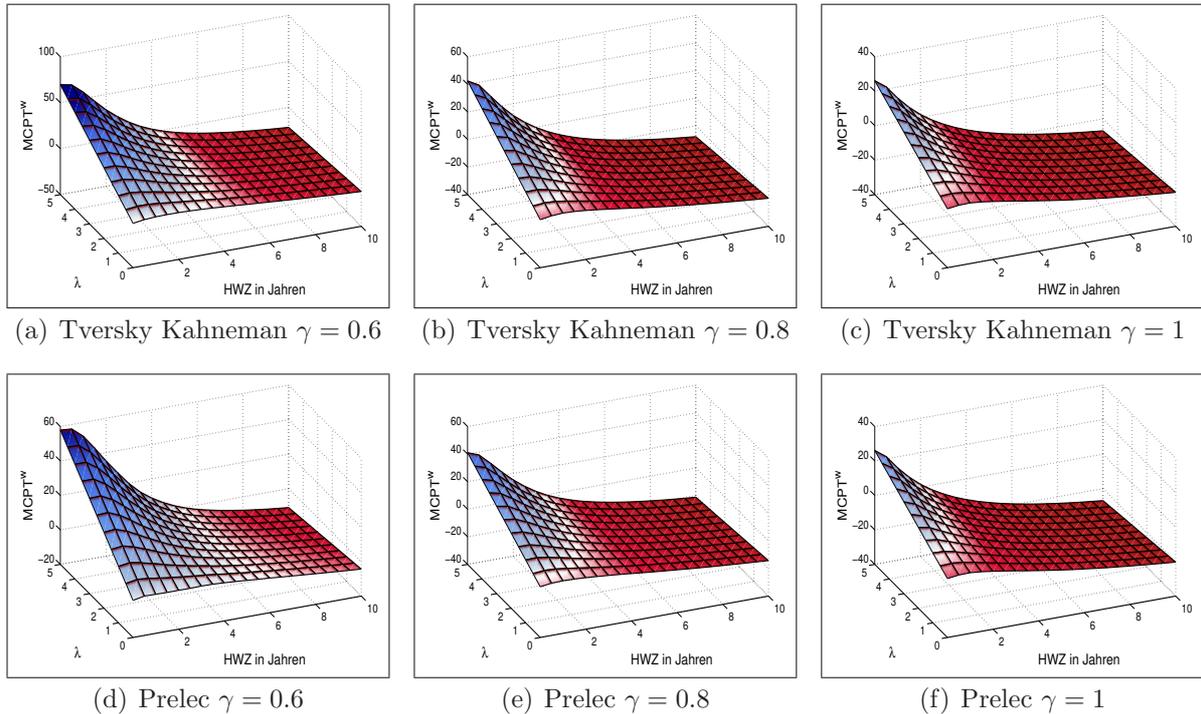


Abbildung 7.14: $MCPT^w$ -Nutzen Differenz mit Gedächtnis zwischen LC- und Mischfonds bei $\rho = 1$, Gedächtnis mit Halbwertszeit zwischen 0 und 10 Jahren und TK bzw. Prelec.

Lifecycle- oder der Mischfonds besser ist hängt hier von der Wahrscheinlichkeitsgewichtung ab. Für $\gamma = 1$ ist der Mischfonds in diesen Fällen stets besser, dagegen ist für $\gamma = 0,6$ der Lifecycle Fonds bis zu einer HWZ von 5 Jahren stets besser.

Bei geringer Gedächtnishalbwertszeit (für $\gamma = 1$, von unter 2 Jahren, für $\gamma = 0,8$, von unter 3 Jahren, für $\gamma = 0,6$, von unter 5 Jahren) ist der Lifecycle Fonds, insbesondere für verlustaverse Anleger, deutlich besser. Bei einer Wahrscheinlichkeitsgewichtung von $\gamma = 0,6$ in der Prelec Version sogar für alle Anleger mit einer HWZ von weniger als 5 Jahren. Für Anleger ohne Wahrscheinlichkeitsgewichtung ergibt sich allerdings, dass der Lifecycle Fonds nur für Anleger mit einer Gedächtnishalbwertszeit von unter 2 Jahren und wenigstens $\lambda > 1$ besser ist.

Die Ursache des Nachteils des Lifecycle Fonds für Anleger mit langem Gedächtnis liegt

in dem höheren Aktienfondsanteil, welchen der Lifecycle Fonds in den ersten 19 Jahren gegenüber dem Mischfonds besitzt und tendenziell zu höheren Risiken (Verlusten) in diesen Jahren führt (vgl. auch Tabelle 5.11 in Kapitel 5.3). Diese Verluste wirken bei einem Anleger mit gutem Gedächtnis lange nach. Da der Lifecycle Fonds allerdings den Aktienfondsanteil weiter verringert, wird es schwieriger die Verluste, die im Gedächtnis noch vorhanden sind, mit hohen Gewinnen auszugleichen. Daher bestraft ein langes Gedächtnis das höhere Risiko des Lifecycle Fonds in den ersten Jahren in Verbindung mit den geringeren Chancen in den letzten Jahren. Im Gegensatz dazu steigen die Verluste des Mischfonds nur durch das zunehmende Fondsvermögen, was bedeutet, dass viele hohe Wertverluste, die vor allem in den letzten Jahren eintreten, nur über einen kurzen Zeitraum wirken, da die Laufzeit des Fonds zu Ende geht. Diese Tatsachen führen zu einem Vorteil des Mischfonds bei hohen Gedächtnishalbwertszeiten.

Insgesamt zeigt sich damit, dass im laufenden Beitragsfall mit der hier verwendeten Modellierung eines Anlegergedächtnisses, der Lifecycle Fonds bei zunehmender Gedächtnishalbwertszeit seinen Vorteil gegenüber dem Mischfonds verliert.

8 Zusammenfassung

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, einen wissenschaftlich fundierten Ansatz zu beschreiben, der es ermöglicht die Auswirkungen von Wertentwicklungen von Fonds während der Laufzeit auf den Nutzen von Anlegern zu beschreiben und darüber hinaus auch psychologische Aspekte zu berücksichtigen. Dadurch soll die Tatsache, dass insbesondere bei langfristigen Altersvorsorgeprodukten die Planungssicherheit einen entscheidenden Einfluss auf den subjektiven Nutzen hat, welche bei der Bestimmung des Nutzens mittels Methoden der klassischen Erwartungsnutzentheorie weitestgehend ausgeblendet wird, einbezogen werden. Aufbauend auf der Arbeit *Life-cycle Funds: Much Ado about Nothing?* (2013, [Gra13]) von Graf wird anschließend mit Hilfe dieses Ansatzes der Einfluss von Wertschwankungen während der Laufzeit auf den subjektiven Nutzen von Lifecycle- und Mischfonds mit vergleichbaren Verteilungen der Vertragsguthaben am Ende der Ansparphase untersucht und verglichen.

Zu Beginn der Arbeit werden in Kapitel 2 die verwendeten stochastischen und finanzmathematischen Grundlagen beschrieben. Dabei werden insbesondere die betrachteten Kapitalmarktmodelle, mit deren Hilfe die Fortschreibungen der Fonds modelliert wurden, eingeführt. Neben einem klassischen Black-Scholes-Merton Ansatz (CIR-BSM) erweitert um eine mit dem Cox-Ingersoll-Ross Modells (CIR) modellierten Short Rate, wurde zudem ein ebenfalls um eine CIR Short Rate erweitertes Heston Modell (CIR-SV) zur Simulation verwendet. Das CIR-SV unterscheidet sich vom CIR-BSM durch die stochastische Modellierung der Volatilität des Aktienkurses, welche eine oftmals realistischere Ausgestaltung der Volatilität ermöglicht. Die verwendeten numerischen Methoden, insbesondere das Euler-Maruyama Verfahren zur Simulation der beschriebenen Kapitalmarktmodelle und deren Kalibrierung, werden in Kapitel 4 ausführlich behandelt. Darüber hinaus werden in Kapitel 4 die von Graf in (2013, [Gra13]) formulierten Methoden beschrieben, mit deren Hilfe zu einem beliebigen deterministischen Lifecycle Fonds in einem Standard Black-Scholes-Merton Modell ein Mischfonds mit identischen

Verteilungen (Einmalbeitragsfall) bzw. identischen ersten und zweiten Momenten (laufender Beitragsfall) der Vertragsguthaben am Ende der Ansparphase modelliert werden kann.

Den theoretischen Kern der Arbeit bildet das Kapitel 3, in welchem die entscheidungstheoretischen Ansätze beschrieben werden. Dabei handelt es sich zum einen um einen klassischen erwartungsnutzentheoretischen Ansatz (ENT), welcher einen rationalen Anleger unterstellt, der den Nutzen des Endvermögens maximieren möchte (Abschnitt 3.1). Der Nutzen wird hierbei mit Hilfe von Nutzenfunktionen bestimmt. Dabei werden in dieser Arbeit drei bezüglich der Risikoaversion verschiedene Typen von Nutzenfunktionen betrachtet. Exemplarisch wurde für jeden Typ ein Beispiel in den späteren Analysen verwendet. Dabei handelt es sich um eine Power Nutzenfunktion, die zur Klasse der CARA (Constant Absolute Risk Aversion) Nutzenfunktionen gehört, eine Exponential Nutzenfunktion aus der Klasse der CRRA (Constant Relative Risk Aversion) Nutzenfunktionen und eine Quadratische Nutzenfunktion, die lediglich der HARA (Hyperbolic Absolute Risk Aversion) Nutzenfunktionen angehört, die eine Oberklasse der CARA und CRRA Nutzenfunktionen darstellen. Zum anderen wird in Abschnitt 3.2 ein prospecttheoretischer Ansatz eingeführt, der verschiedene psychologische Einflüsse, wie die kognitive Verzerrung der Wahrscheinlichkeitsgewichtung, auf den subjektiven Nutzen eines Anlegers berücksichtigt. Ein wesentlicher Unterschied der Prospect Theorie (PT) zur Erwartungsnutzentheorie ist, dass der Nutzen über Gewinne und Verluste und nicht über den Endwert des Vermögens bestimmt wird. Zur Bestimmung des Nutzens über Gewinne und Verluste wird eine Wertefunktion v , welche sich in der Sensitivität im Bezug auf Gewinne und Verluste unterscheidet, verwendet. Hierfür werden in der Regel leicht abgeänderte Funktionen der Erwartungsnutzentheorie betrachtet. Es werden hier drei häufig verwendete Wertefunktionen mit leicht unterschiedlichen Eigenschaften näher beschrieben. Dabei handelt es sich um eine Power, eine Exponential und eine Quadratische Wertefunktion. Daneben wird zur Modellierung der Über- bzw. Unterschätzung von geringen bzw. hohen Wahrscheinlichkeiten (subjektive Wahrscheinlichkeitsgewichtung) eine nicht-lineare Wahrscheinlichkeitsgewichtsfunktion w eingeführt, für welche mit der Tversky Kahneman bzw. Prelec Version ebenfalls zwei oft verwendete Ausgestaltungen näher betrachtet werden. Allerdings verwendet sowohl die ursprüngliche von Tversky und Kahneman beschriebene Prospect Theorie als auch die im Anschluss beschriebene weiterentwickelte Kumulative Prospect Theorie (CPT), welche die Betrachtung von

stetigen Verteilungen ermöglicht, die Wertschwankung über die gesamte Laufzeit. Daher wird aufbauend auf der Arbeit von Barberis, Huang und Santos, die in *Prospect Theorie and Asset pricing* (2001, [BHS01]) eine Methode beschreiben, Wertschwankungen zur Bestimmung des Nutzens zu verwenden, der in dieser Arbeit als Multi-Kumulativer Prospect Theorie Nutzen (MCPT^w-Nutzen) bezeichnete Ansatz eingeführt (Definition 3.2.10). Der subjektive Nutzen, den ein Anleger aus einer Anlage erhält, wird in diesem Ansatz mit Hilfe prospecttheoretischer Werte- und Wahrscheinlichkeitsgewichtsfunktionen über mehrere Schwankungen der Kapitalanlage während der Laufzeit definiert und bietet dementsprechend eine Möglichkeit den Wertverlauf in die Nutzenbestimmung einer Anlage einzubeziehen. Daneben ermöglicht ein Diskontierungsfaktor ρ die Modellierung unterschiedlicher Einflüsse. So kann insbesondere neben der klassischen Diskontierung auch der Effekt modelliert werden, dass Wertschwankungen gegen Ende des Anlagehorizonts subjektiv schmerzhafter sein können als zu Beginn der Laufzeit, da sie schwerer wieder ausgeglichen werden können. Der auf diese Weise definierte MCPT^w-Nutzen bildet die Grundlage der Analysen in dieser Arbeit. Um einen weiteren Effekt zu betrachten, wird zudem eine ebenfalls auf der Arbeit (2001, [BHS01]) von Barberis, Huang und Santos aufbauende Erweiterung dieses Ansatzes um ein Anlegergedächtnis beschrieben, die es in einem Spezialfall zudem erlaubt, die Risikoaversion des Anlegers von den Veränderungen in den vorherigen Zeitperioden abhängig zu machen (Abschnitt 3.2.5). Dies ermöglicht die Modellierung des Effektes, dass Wertverluste nach vorherigen Gewinnen als weniger schmerzhaft wahrgenommen werden, da sie durch die vorherigen Gewinne ausgeglichen werden können und umgekehrt Verluste nach vorherigen Verlusten schmerzhafter sind. Dadurch bietet der MCPT^w-Nutzen eine Vielzahl an Modellierungsmöglichkeiten und Ausgestaltungen, die es ermöglichen unterschiedliche Typen von Anlegern zu betrachten und verschiedene Auswirkungen zu untersuchen.

In den Kapiteln 5, 6 und 7 werden die Ergebnisse der Analysen der verwendeten Fonds dargestellt. Hierzu wurde sowohl im Einmal- als auch im laufenden Beitragsfall jeweils ein Lifecycle Fonds mit einem jährlich linear abnehmenden Aktienfondsanteil sowie einer Laufzeit von 35 Jahren und ein mit den in Abschnitt 4.1 beschriebenen Methoden modellierter Mischfonds mit vergleichbaren Vertragsguthaben am Ende der Ansparphase simuliert. Da der Mischfonds durch die Modellierung höhere Gebühren im Vergleich zum Lifecycle Fonds besitzt, wird zusätzlich ein Mischfonds+ betrachtet, der den gleichen Aktienfondsanteil wie der Mischfonds aufweist, jedoch in der Höhe der Gebühren

dem Lifecycle Fonds entspricht. Dies ermöglicht eine zusätzliche Untersuchung des Einflusses der Gebühren auf die Ergebnisse. In Abschnitt 5.1 zeigt sich durch Vergleiche der Verteilungen der mittleren jährlichen Renditen, dass, obwohl die Simulationen in den komplexeren Kapitalmarktmodellen (CIR-BSM und CIR-SV) durchgeführt wurden¹ und die analytischen Modellierungen der aneinander angepassten Fonds auf einem Standard Black-Scholes-Merton Modell beruhen, die Endwertverteilungen des Lifecycle- und des Mischfonds im Einmal- und im laufenden Beitragsfall jeweils vergleichbar sind und nur geringe Unterschiede auftreten. Auch bei der Analyse des Nutzens der Fonds mit Hilfe der klassischen ENT in Abschnitt 5.2 zeigt sich, dass sowohl der Lifecycle- als auch der Mischfonds in allen betrachteten Fällen einen beinahe identischen Nutzen generieren. Dies bedeutet, dass aus erwartungsnutzentheoretischer Sicht kein Unterschied darin besteht, in welchen der beiden Fonds ein Anleger investiert. Darüber hinaus zeigt Abschnitt 5.3 jedoch, dass im Hinblick auf die jährlichen Wertschwankungen, wobei absolute, relative und Wertschwankungen prozentual im Verhältnis zur Beitragshöhe untersucht wurden, erhebliche Unterschiede zwischen Lifecycle- und Mischfonds bestehen. Insbesondere lässt sich beobachten, dass der Lifecycle Fonds die Endwertverteilung mit deutlich geringeren Schwankungen in den letzten Jahren der Laufzeit erzielt, während bei einer Anlage in den Mischfonds vor allem in den letzten Jahren sehr hohe Wertschwankungen auftreten. Dadurch beinhaltet der Mischfonds eine hohe Verlustgefahr zum Ende der Laufzeit und eine damit verbundene hohe Planungsunsicherheit. Abschnitt 5.2 zeigt, dass diese Unterschiede von der klassischen ENT nicht berücksichtigt werden, wodurch die Notwendigkeit der Entwicklung und Verwendung von Methoden, die diese Differenzierungsmerkmale berücksichtigen, verdeutlicht wird.

In den Kapiteln 6 (Einmalbeitragsfall) und 7 (laufender Beitragsfall) werden auf der Basis der in Abschnitt 3.2.4 eingeführten Multi-Kumulativen Prospect Theorie mit Hilfe der jährlichen Schwankungen die Nutzen des Lifecycle- und des Mischfonds untersucht und verglichen. Um einen möglichst vollständigen Eindruck über die Auswirkungen der verschiedenen Gestaltungsmöglichkeiten, welche der MCPT^w-Nutzen bietet, zu geben, werden in den Abschnitten 6.1 bzw. 7.1 zuerst die Ergebnisse zahlreicher Sensitivitätsanalysen bezüglich der verschiedenen Modellierungsmöglichkeiten beschrieben. Neben den in Abschnitt 3.2 eingeführten sechs verschiedenen Funktionenkombinationen

¹Beide betrachteten Kapitalmarktmodelle erzeugen im Hinblick auf die in dieser Arbeit untersuchten Fragestellungen nahezu identische Ergebnisse.

(3 Wertefunktionen und 2 Wahrscheinlichkeitsgewichtsfunktionen) wurden hierzu insbesondere die Auswirkungen unterschiedlicher Ausprägungen der Risikoaversion und der subjektiven Wahrscheinlichkeitsgewichtung ausgewertet. Es zeigt sich dabei sowohl im Einmal- als auch im laufenden Beitragsfall, dass die Hauptergebnisse für alle betrachteten Kombinationen von Werte- und Wahrscheinlichkeitsgewichtsfunktionen vergleichbar sind. Bereits im Einmalbeitragsfall zeigt sich in allen betrachteten Fällen, dass risikoaverse Anleger einen deutlich höheren $MCPT^w$ -Nutzen durch die Wahl des Lifecycle- im Vergleich zum Mischfonds erhalten. Ausschließlich Anleger, die eine sehr hohen Risikoaffinität aufweisen, erhalten teilweise durch die Wahl des Mischfonds einen leicht höheren $MCPT^w$ -Nutzen. Im laufenden Beitragsfall verstärkt sich der Vorteil des Lifecycle Fonds zusätzlich. So generiert dieser im laufenden Beitragsfall für einen Großteil der Anleger einen deutlich höheren $MCPT^w$ -Nutzen als der Mischfonds. Lediglich für Anleger, die absolut im Gegensatz zur Prospect Theorie stehen, d.h. sehr risikoaffin sind, keine bzw. nur eine geringe Wahrscheinlichkeitsgewichtung und eine sehr langsam abnehmende Gewinn- und Verlustsensitivität aufweisen, erzeugt der Mischfonds einen besseren $MCPT^w$ -Nutzen. Einen detaillierten Überblick in welchen Fällen der Lifecycle- bzw. der Mischfonds im Einmal- bzw. laufenden Beitragsfall besser abschneidet, wird in den Tabellen 6.1 bzw. 7.1 gegeben. Weitere Auswertungen (vgl. Abschnitt 6.1.2 bzw. 6.1.2) zeigen, dass der Nutzenvorteil des Lifecycle Fonds durch die höhere Sicherheit am Ende der Laufzeit erzielt wird und dementsprechend die Planungssicherheit, die der Lifecycle Fond gegenüber dem Mischfonds bietet, sich in einem höheren $MCPT^w$ -Nutzen widerspiegelt. Des Weiteren wird ersichtlich, dass der Einfluss der Zeitdiskontierung, zumindest in der Frage, welcher der beiden betrachteten Fonds den höheren $MCPT^w$ -Nutzen generiert, auf den Fall von risikoaffinen Anlegern beschränkt ist. Hier wirkt sich eine negative Diskontierung zum Vorteil des Lifecycle Fonds aus, während umgekehrt eine positive Diskontierung sich nachteilig auf diesen auswirkt (vgl. Abschnitt 6.1.1 bzw. 7.1.1).

Aufbauend auf den vorherigen Ergebnissen werden in den Abschnitten 6.2 und 7.2 die $MCPT^w$ -Nutzen stellvertretender risikoaffiner, risikoneutraler und risikoaverser Anleger im Detail untersucht. Die Ergebnisse verdeutlichen die zuvor bereits beschriebenen Resultate und zeigen, dass insbesondere für einen risikoaversen Anleger, aber auch für einen risikoneutralen Anleger der Lifecycle Fonds die bessere Wahl ist. Ferner zeigt sich, dass selbst in den Fällen, in welchen der Mischfonds einen höheren $MCPT^w$ -Nutzen generiert (risikoaffiner Anleger), der Vorteil gegenüber dem Lifecycle Fonds deutlich geringer

und unsicherer ist. Zusätzlich findet in den Abschnitten 6.1.3 bzw. 7.1.3 ein Vergleich des Lifecycle- und des Mischfonds+ statt, welcher zeigt, dass trotz der leicht besseren Endwertverteilung des Mischfond+, der Lifecycle Fonds aufgrund der höheren Planungssicherheit für eine Vielzahl der Anleger immer noch einen höheren $MCPT^w$ -Nutzen generiert.

Abschließend findet jeweils in den Abschnitten 6.3 und 7.3 eine Analyse der Auswirkungen des in Abschnitt 3.2.5 beschriebenen Anlegergedächtnisses auf den $MCPT^w$ -Nutzen statt. Im Einmalbeitragsfall zeigt sich, dass sich unter der Berücksichtigung des hier modellierten Anlegergedächtnisses, die $MCPT^w$ -Nutzen des Lifecycle- und des Mischfonds mit zunehmendem Gedächtnis tendenziell annähern. Im laufenden Beitragsfall führt ein zunehmendes Gedächtnis sogar zu einem Vorteil des Mischfonds gegenüber dem Lifecycle Fonds.

Insgesamt zeigen die Auswertungen und Analysen in den Kapiteln 6 und 7, dass der $MCPT^w$ -Nutzen eine sinnvolle Methode beschreibt, die es neben einer Vielzahl an Gestaltungsmöglichkeiten insbesondere ermöglicht, die Planungssicherheit, welche einen entscheidenden Einfluss auf die Auswahl eines Altersvorsorgeproduktes ausübt, in Form von Wertschwankungen zu berücksichtigen. Die durch die Einbeziehung dieser Komponente gewonnenen Resultate rechtfertigen zusätzlich die Existenz von Lifecycle Fonds und deren Einsatz zur Altersvorsorge.

Literaturverzeichnis

- [AJS98] ANDERSON, B. ; JACKSON, J. ; SITHARAM, M.: Descartes' rule of signs revisited. In: *The American mathematical monthly* 105 (1998), Nr. 5, S. 447–451
- [All53] ALLAIS, M.: Le comportement de l'homme rationnel devant le risque: Critique des postulats et axiomes de l'école Américaine. In: *Econometrica: Journal of the Econometric Society* (1953), S. 503–546
- [All13] ALLIANZ SE: „It's time to rethink Retirement“. In: *Demographic Pulse Issue # 9* (2013)
- [And07] ANDERSEN, L.: Efficient simulation of the Heston stochastic volatility model. In: *Available at SSRN 946405* (2007)
- [BCDP10] BRIEN, M. J. ; CROSS, P. J. ; DUNN, T. A. ; PANIS, C. W.: Target Date Funds and Retirement Savings. In: *Deloitte Financial Advisory Services LLP* 56 (2010), Nr. 3, S. 1–20
- [BCR12] BRUDER, B. ; CULERIER, L. ; RONCALLI, T.: How to Design Target-Date Funds? (2012)
- [Ber38] BERNOULLI, D.: Specimen theoriae novae de mensura sortis. In: *Comentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* (1738), Nr. 5, S. 175–192
- [BH08] BARBERIS, N. ; HUANG, M.: Stocks as Lotteries: The Implications of Probability Weighting for Security Prices. In: *American Economic Review* 98 (2008), Nr. 5, S. 2066–2100
- [BHS01] BARBERIS, N. ; HUANG, M. ; SANTOS, T.: Prospect theory and asset prices. In: *The Quarterly Journal of Economics* 116 (2001), Nr. 1, S. 1–53

- [BK06] BROADIE, M. ; KAYA, Ö.: Exact simulation of stochastic volatility and other affine jump diffusion processes. In: *Operations Research* 54 (2006), Nr. 2, S. 217–231
- [BK09] BINGHAM, N. ; KIESEL, R.: *Risk-Neutral Valuation: Pricing and Hedging of Financial Derivatives*. 2. ed. Springer, 2009
- [BM58] BOX, G. E. ; MULLER, M. E.: A note on the generation of random normal deviates. In: *The Annals of Mathematical Statistics* 29 (1958), Nr. 2, S. 610–611
- [Bri07] BRIGO, F. D. and M. D. and Mercurio: *Interest rate models-theory and practice: with smile, inflation and credit*. Springer, 2007
- [BS73] BLACK, F. ; SCHOLES, M.: The Pricing of Options and Corporate Liabilities. In: *Journal of Political Economy* 81 (1973), Januar, Nr. 3, S. 637
- [BT03] BARBERIS, N. ; THALER, R.: A survey of behavioral finance. In: *Handbook of the Economics of Finance* 1 (2003), S. 1053–1128
- [BVI13] BVI: Investmentstatistik. (31.03.2013)
- [Cam95] CAMERER, C.: Individual decision making. (1995)
- [CBD06] CAIRNS, A. J. ; BLAKE, D. ; DOWD, K.: Stochastic lifestyle: Optimal dynamic asset allocation for defined contribution pension plans. In: *Journal of Economic Dynamics and Control* 30 (2006), Nr. 5, S. 843–877
- [CH94] CAMERER, C. F. ; HO, T-H.: Violations of the betweenness axiom and nonlinearity in probability. In: *Journal of risk and uncertainty* 8 (1994), Nr. 2, S. 167–196
- [CIR85] COX, J. C. ; INGERSOLL, J. E. ; ROSS, S. A.: A Theory of the Term Structure of Interest Rates. In: *Econometrica* 53 (1985), März, Nr. 2, S. 385
- [CLDM08] CAPPIELLO, L. ; LO DUCA, M. ; MADDALONI, A.: Country and industry equity risk premia in the euro area: an intertemporal approach. (2008)

- [CM44] CAMERON, R. H. ; MARTIN, W. T.: Transformations of Weiner Integrals Under Translations. In: *The annals of Mathematics* 45 (1944), Nr. 2, S. 386–396
- [CPF⁺12] CARLSON, G. ; PAVLENKO, L. ; FALKOF, D. ; SPICA, K. ; LING, X.: Target-Date Series Research Paper: 2012 Industry Survey. (2012)
- [DD11] DICHTL, H. ; DROBETZ, W.: Portfolio insurance and prospect theory investors: Popularity and optimal design of capital protected financial products. In: *Journal of Banking & Finance* 35 (2011), Nr. 7, S. 1683–1697
- [DGH06] DE GIORGI, E. ; HENS, T.: Making prospect theory fit for finance. In: *Financial Markets and Portfolio Management* 20 (2006), Nr. 3, S. 339–360
- [DN08] DØSKELAND, T. M. ; NORDAHL, H. A.: Optimal pension insurance design. In: *Journal of Banking & Finance* 32 (2008), Nr. 3, S. 382–392
- [DS07] DAVIES, G. B. ; SATCHELL, S. E.: The behavioural components of risk aversion. In: *Journal of Mathematical Psychology* 51 (2007), Nr. 1, S. 1–13
- [Duf04] DUFRESNE, D.: The log-normal approximation in financial and other computations. In: *Advances in Applied Probability* 36 (2004), Nr. 3, S. 747–773
- [EKS12] EBERT, S. ; KOOS, B. ; SCHNEIDER, J.: On the optimal type and level of guarantees for prospect theory investors. In: *Available at SSRN 2118586* (2012)
- [Els07] ELSTRODT, J.: *Maß-und Integrationstheorie*. Springer DE, 2007
- [EPSH07] EWALD, C.-O. ; POULSEN, R. ; SCHENK-HOPPE, K. R.: Stochastic Volatility: Risk Minimization and Model Risk. (2007), Februar, Nr. 07-10
- [Era04] ERAKER, B.: Do Stock Prices and Volatility Jump? Reconciling Evidence from Spot and Option Prices. In: *The Journal of Finance* 59 (2004), Juni, Nr. 3, S. 1367–1404
- [Fis96] FISHMAN, G. S.: *Monte Carlo Concepts, Algorithms and Applications*. Springer, 1996

- [Ges12] GESAMTVERBAND DER DEUTSCHEN VERSICHERUNGSWIRTSCHAFT E.V.: Statistisches Taschenbuch der Versicherungswirtschaft. (2012)
- [Gir60] GIRSANOV, I. V.: On transforming a certain class of stochastic processes by absolutely continuous substitution of measures. In: *Theory of Probability & Its Applications* 5 (1960), Nr. 3, S. 285–301
- [GJ10] GÜNTHER, M. ; JÜNGEL, A.: *Finanzderivate mit MATLAB: Mathematische Modellierung und numerische Simulation*. Vieweg+ Teubner Verlag, 2010
- [Gla03] GLASSERMAN, P.: *Monte Carlo methods in financial engineering*. Bd. 53. Springer, 2003
- [Gra13] GRAF, S.: Life-cycle Funds: Much Ado about Nothing?, Universität Ulm, 2013 (Working Paper)
- [GW99] GONZALEZ, R. ; WU, G.: On the shape of the probability weighting function. In: *Cognitive psychology* 38 (1999), Nr. 1, S. 129–166
- [Hau] HAUGH, M.: Continuous-Time Short Rate Models. http://www.columbia.edu/~mh2078/cts_shortrate_models.pdf
- [Hes93] HESTON, S. L.: A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. In: *Review of Financial Studies* 6 (1993), S. 327–343
- [HR09] HENS, T. ; RIEGER, M.: Why do Investors Buy Structured Products? In: *EFA 2009 Bergen Meetings Paper*, 2009
- [HR10] HENS, T. ; RIEGER, M.: *Financial Economics: A Concise Introduction to Classical and Behavioral Finance*. 1st Edition. Springer, 2010
- [HW07] HENS, T. ; WANG, M.: Does finance have a cultural dimension. In: *National Center of Competence in Research, Financial Valuation, and Risk Management* (2007)
- [Itô42] ITÔ, K.: On stochastic processes (infinitely divisible laws of probability). In: *Jap. J. Math.* 18 (1942), S. 261–301

- [KI40] KAWADA, Y. ; ITÔ, K.: On the probability distribution on a compact group I. In: *Proc. Phys.-Math. Soc. Japan* 22 (1940), Nr. 3, S. 977–998
- [KP11] KLOEDEN, P. E. ; PLATEN, E.: *Numerical solution of stochastic differential equations*. Bd. 23. Springer, 2011
- [KS91] KARATZAS, I. ; SHREVE, S. E.: *Brownian motion and stochastic calculus*. Bd. 113. Springer Verlag, 1991
- [KST82] KAHNEMAN, D. ; SLOVIC, P. ; TVERSKY, A.: *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*. Cambridge University Press, 1982
- [KT79] KAHNEMAN, D. ; TVERSKY, A.: Prospect theory: An analysis of decision under risk. In: *Econometrica: Journal of the Econometric Society* (1979), S. 263–291
- [KT00] KAHNEMAN, D. ; TVERSKY, A.: *Choices, values, and frames*. Cambridge University Press, 2000
- [Lev06] LEVY, H.: *Stochastic dominance: investment decision making under uncertainty*. Bd. 12. Springer Science+ Business Media, 2006
- [LKVD10] LORD, R. ; KOEKKOEK, R. ; VAN DIJK, D.: A comparison of biased simulation schemes for stochastic volatility models. In: *Quantitative Finance* 10 (2010), Nr. 2, S. 177–194
- [Mar52a] MARKOWITZ, H.: Portfolio selection*. In: *The journal of finance* 7 (1952), Nr. 1, S. 77–91
- [Mar52b] MARKOWITZ, H.: The utility of wealth. In: *The Journal of Political Economy* (1952), S. 151–158
- [Mer73] MERTON, R. C.: Theory of Rational Option Pricing. In: *The Bell Journal of Economics and Management Science* 4 (1973), Nr. 1, S. 141
- [MN98] MATSUMOTO, M. ; NISHIMURA, T.: Mersenne twister: a 623-dimensionally equidistributed uniform pseudo-random number generator. In: *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation (TOMACS)* 8 (1998), Nr. 1, S. 3–30

- [MS90] MERTON, R. C. ; SAMUELSON, P. A.: *Continuous-time finance*. Blackwell Oxford, 1990
- [Øks10] ØKSENDAL, B.: *Stochastic differential equations: an introduction with applications*. Springer, 2010
- [Pfa09] PFAU, W. D.: Lifecycle Funds and Wealth Accumulation for Retirement: Evidence for a More Conservative Asset Allocation as Retirement Approaches. (2009), Oktober, Nr. 09-15
- [PG81] PRATT, J. W. ; GIBBONS, J. D.: Kolmogorov-Smirnov Two-Sample Tests. In: *Concepts of Nonparametric Theory*. Springer, 1981, S. 318–344
- [Pra64] PRATT, J. W.: Risk Aversion in the Small and in the Large. In: *Econometrica: Journal of the Econometric Society* (1964), S. 122–136
- [Pre98] PRELEC, D.: The probability weighting function. In: *Econometrica* (1998), S. 497–527
- [Pro05] PROTTER, P.: *Stochastic Integration and Differential Equations: Version 2.1*. Bd. 21. Springer, 2005
- [Rab98] RABIN, M.: Psychology and economics. In: *Journal of economic literature* (1998), S. 11–46
- [RWH11] RIEGER, M. ; WANG, M. ; HENS, T.: Prospect theory around the world. In: *NHH Dept. of Finance & Management Science Discussion Paper* (2011), Nr. 2011/19
- [SE07] SCHLEEF, H. J. ; EISINGER, R. M.: Hitting or Missing the Retirement Target: Comparing Contribution and Asset Allocation Schemes of Simulated Portfolios. In: *Financial Finance Review* 38 (2007), Nr. 2, S. 229
- [Sey12] SEYDEL, R. U.: *Tools for computational finance*. Springer, 2012
- [Sie12] SIEGEL AND GALE: Investor Testing of Target Date Retirement Fund (TDF) Comprehension and Communications. (2012)
- [SS08] SPITZER, J. J. ; SINGH, S.: Shortfall Risk of Target-Date Funds during Retirement. In: *Financial Finance Review* 17 (2008), Nr. 2, S. 143

- [Sta00] STARMER, C.: Developments in non-expected utility theory: The hunt for a descriptive theory of choice under risk. In: *Journal of economic literature* 38 (2000), Nr. 2, S. 332–382
- [Sto06] STOTT, H.P.: Cumulative prospect theory's functional menagerie. In: *Journal of Risk and Uncertainty* 32 (2006), Nr. 2, S. 101–130
- [TF95] TVERSKY, A. ; FOX, C. R.: Weighing risk and uncertainty. In: *Psychological review* 102 (1995), Nr. 2, S. 269–283
- [TJ90] THALER, R. H. ; JOHNSON, E. J.: Gambling with the house money and trying to break even: The effects of prior outcomes on risky choice. In: *Management science* 36 (1990), Nr. 6, S. 643–660
- [TK92] TVERSKY, A. ; KAHNEMAN, D.: Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty. In: *Journal of Risk and uncertainty* 5 (1992), Nr. 4, S. 297–323
- [TW95] TVERSKY, A. ; WAKKER, P.: Risk attitudes and decision weights. In: *Econometrica: Journal of the Econometric Society* (1995), S. 1255–1280
- [Urb12] URBAN, K.: *Numerical Finance Vorlesungsskript*. Universität Ulm, 2012
- [VNM45] VON NEUMANN, J. ; MORGENSTERN, O.: Theory of games and economic behavior. In: *Bull. Amer. Math. Soc* 51 (1945), S. 498–504
- [Wak10] WAKKER, P.P.: *Prospect theory: For risk and ambiguity*. Cambridge University Press, 2010
- [Wer11] WERNER, D.: *Funktionalanalysis*. Springer DE, 2011
- [WG96] WU, G. ; GONZALEZ, R.: Curvature of the probability weighting function. In: *Management science* 42 (1996), Nr. 12, S. 1676–1690
- [WH06] WONG, B. ; HEYDE, CC: On changes of measure in stochastic volatility models. In: *International Journal of Stochastic Analysis* 2006 (2006)
- [YW71] YAMADA, T. ; WATANABE, S.: On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations. In: *J. Math. Kyoto Univ* 11 (1971), Nr. 1, S. 155–167

- [ZK09] ZAKAMOULINE, V. ; KOEKEBAKKER, S.: A Generalisation of the Mean-Variance Analysis. In: *European Financial Management* 15 (2009), Nr. 5, S. 934–970

Ehrenwörtliche Erklärung

Ich erkläre hiermit ehrenwörtlich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig angefertigt habe; die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit wurde bisher keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

Ich bin mir bewusst, dass eine unwahre Erklärung rechtliche Folgen haben wird.

Ulm, den 20. Januar 2014

(Unterschrift)