

**UNA ESTENSIONE DEL COLLECTIVE RISK
MODEL PER LA VALUTAZIONE DELLA
RISERVA SINISTRI**

**Tesi di laurea di:
Alessandro RICOTTA**

**Relatore: Chiar.mo Prof. Gian Paolo CLEMENTE
Correlatore: Chiar.mo Prof. Nino SAVELLI**

INDICE

Introduzione.....pag. 3

Capitolo 1: “L’attività assicurativa e le norme di vigilanza prudenziale”

1. L’attività assicurativa.....pag. 4
2. *Solvency 0* e *Solvency I*” 9
3. *Solvency II*” 13

Capitolo 2: “La riserva sinistri: analisi deterministica e stocastica”

1. La riserva sinistri.....pag. 22
2. Alcuni metodi deterministici per la valutazione della riserva sinistri.....” 27
3. L’approccio stocastico per la valutazione della riserva sinistri.....” 40

Capitolo 3: “Il *collective risk model* per la valutazione della riserva sinistri”

1. Il *collective risk model* nel contesto tariffazione.....pag. 48
 - 1.1. Il processo generatore del numero dei sinistri.....” 50
 - 1.2. Il processo di Poisson composto semplice.....” 53
 - 1.3. Il processo di Poisson composto misturato.....” 54
2. Il *collective risk model* nel contesto riservazione.....” 55
 - 2.1. La variabile aleatoria del numero dei sinistri riservati.....” 56
 - 2.2. La variabile aleatoria del costo dei sinistri.....” 57
3. Il numero dei sinistri posti a riserva.....” 59
4. La riserva sinistri: il processo di Poisson composto misturato.....” 77
5. La riserva sinistri: il processo di Poisson composto semplice con fattore di disturbo applicato alle *severity*.....” 99
6. La riserva sinistri descritta da un processo di Poisson composto misturato con fattore di disturbo applicato alle *severity*.....” 120

Capitolo 4: “L’effetto dei fattori di disturbo sulla riserva sinistri e l’approccio simulativo per la valutazione del *reserve risk*”

1. Il diverso effetto dei fattori di disturbo sulla riserva sinistri.....pag. 146
2. L’approccio simulativo e la distribuzione della riserva sinistri a totale *run-off*” 159

3. L'approccio simulativo e il calcolo del <i>Solvency Capital Requirement</i>”	171
3.1. Sensibilità del SCR rispetto al coefficiente di variazione delle severity e un confronto tra il collective risk model e il bootstrap per la valutazione del requisito di capitale.....”	189
4. La stima dei fattori di disturbo.....”	196
Conclusioni	pag. 200
Appendice	pag. 202
Bibliografia	pag. 221

INTRODUZIONE

Il nuovo contesto normativo dell'attività assicurativa, costituito dalla direttiva comunitaria *Solvency II* che entrerà in vigore il primo gennaio 2016, concentra gran parte del proprio interesse sulla corretta valutazione dei rischi. L'obiettivo fondamentale delle future norme di vigilanza è, infatti, quello di rappresentare l'effettivo profilo di rischiosità degli assicuratori e riassicuratori, con lo scopo di calcolare il requisito di capitale da possedere per fronteggiare gli eventi avversi, relativi all'anno successivo, a cui è esposta l'impresa. La direttiva comunitaria identifica i rischi principali da valutare per il calcolo del requisito patrimoniale; tra questi spiccano quelli tipici dell'attività assicurativa quali quelli di sottoscrizione relativi alle assicurazioni sulla salute, sulla vita e per le assicurazioni contro i danni. Le norme di vigilanza, inoltre, individuano la metodologia e forniscono lo strumento, tramite la c.d. formula standard, per la determinazione del capitale da detenere ai fini di solvibilità. In tale contesto si concentra lo sviluppo di modelli interni, da parte delle imprese di assicurazione, con il fine di quantificare in modo più preciso di quanto non faccia la *standard formula* i rischi a cui è effettivamente esposta l'impresa.

L'obiettivo della tesi è quello di proporre un modello interno per valutare il rischio di riservazione delle assicurazioni danni. Quanto sviluppato risulta essere una variante del *collective risk model* proposto in letteratura per la stima del *reserve risk*.

Sono elaborati tre differenti modelli basati sull'approccio collettivo per descrivere, a portafoglio chiuso, la riserva sinistri sull'intero orizzonte temporale di vita delle passività assicurative. Tali metodi differiscono tra loro in funzione dei fattori di disturbo consideranti: inizialmente si analizza la riserva sinistri descritta da un *processo di Poisson composto misturato* in cui si ipotizza la presenza di un solo fattore sistematico sul numero dei sinistri riservati, successivamente la riserva sinistri viene modellizzata tramite un *processo di Poisson composto semplice con fattore di disturbo sulle severity* in cui viene introdotto un solo fattore sistematico sul costo dei singoli sinistri ed infine la combinazione di questi due modelli porta al *processo di Poisson composto misturato con fattore di disturbo applicato alle severity* in cui sono presenti simultaneamente entrambi i fattori di disturbo. Per ogni approccio proposto sono ottenute in forma chiusa le caratteristiche principali della riserva sinistri; la media, la varianza, il coefficiente di variazione e l'indice di asimmetria. La conoscenza, in forma esatta, di queste grandezze permette di effettuare opportune analisi comparative sulle peculiarità della riserva al variare dei metodi adottati per descriverla, delle intensità dei fattori di disturbo e della dimensione dell'impresa.

Nel seguito, ricorrendo all'uso di simulazioni, è possibile validare i modelli sviluppati, ottenere la distribuzione della riserva valutata sull'intero orizzonte di vita e, inoltre, tramite l'approccio *re-reserving* determinare il *reserve risk* quantificando il *Solvency Capital Requirement*. In tale contesto sono sviluppate delle indagini volte a esaminare e confrontare le caratteristiche della riserva sinistri *one-year* al variare dei metodi stocastici considerati e del parametro dimensionale dell'impresa. Successivamente sono condotte delle analisi con lo scopo di studiare la reattività del SCR rispetto a variazioni del coefficiente di variazione delle *severity*. Gli ammontari monetari dei requisiti di capitale ricavati con i metodi di analisi collettiva della riserva, in aggiunta, sono stati confrontati con i risultati di un approccio ampiamente utilizzato in letteratura quale è il *bootstrap*.

Per concludere è stata avanzata una proposta concernente un possibile criterio per valutare la *standard deviation* dei fattori di disturbo utilizzati nei presenti modelli.

CAPITOLO 1

L'attività assicurativa e le norme di vigilanza prudenziale

1.1. L'attività assicurativa

L'assicurazione è un'operazione economica che ha l'obiettivo di neutralizzare, totalmente o solo in parte, gli effetti patrimoniali di eventi futuri ed incerti. Con il contratto di assicurazione, quindi, si negoziano gli effetti economici di un rischio puro tra due soggetti, cioè un rischio in cui in nessuno scenario possibile il soggetto su cui grava tale rischio potrà ottenere un guadagno.

In base a quanto sancito dall'articolo 1882 del codice civile l'assicurazione è il contratto con il quale l'assicuratore, verso pagamento di un premio, si obbliga a rivalere l'assicurato, entro i limiti convenuti, del danno ad esso prodotto da un sinistro ovvero a pagare un capitale o una rendita al verificarsi di un evento attinente la vita umana. La definizione fornita dal codice civile mette in evidenza la netta separazione tra le assicurazioni danni e le assicurazioni vita. Nelle prime si evidenzia il legame tra il danno subito dall'assicurato, sinistro, e il risarcimento a cui deve provvedere l'assicuratore. Nelle assicurazioni vita, invece, il risarcimento che spetta all'assicurato, solitamente già predeterminato contrattualmente, deriva dal verificarsi di un evento attinente alla vita umana e non è strettamente connesso al danno economico subito.

I contratti di assicurazione sono stipulati tra l'assicurato, che è il soggetto che cede il rischio, e l'assicuratore che invece è colui che se ne fa carico. L'assicuratore è un soggetto che svolge professionalmente l'attività assicurativa assumendo in modo continuativo e sistematico i rischi ceduti da altri. L'impresa di assicurazione quindi riesce a raccogliere una massa di rischi la cui numerosità ed omogeneità ne permette la compensazione, ovvero il perseguimento dell'equilibrio tra i premi incassati e gli ammontari monetari richiesti per coprire gli oneri derivanti dai sinistri.

L'oggetto sociale dell'impresa di assicurazione deve essere limitato all'esercizio dell'attività assicurativa e riassicurativa nei rami danni o nei rami vita per cui l'impresa ha ottenuto l'autorizzazione. Inoltre può svolgere attività connesse o strumentali a quella assicurativa come l'attività di investimento delle riserve tecniche e la riassicurazione passiva. La compagnia di assicurazione è dunque un'impresa specializzata in cui il divieto di svolgere attività diverse da quella assicurativa risiede nel non voler esporre l'assicuratore a rischi diversi da quelli derivanti dall'attività

assicurativa. In modo analogo, inoltre, può essere interpretato il divieto ad esercitare contemporaneamente i rami vita e danni per le compagnie autorizzate dal 1979 in poi. Quest'ultima norma evita di esporre le imprese vita ai risultati tecnici più instabili della gestione danni ed è dunque volta a tutelare i beneficiari delle assicurazioni vita in funzione dell'elevata importanza a livello previdenziale e sociale delle polizze vita.

L'equilibrio economico che deve essere perseguito per svolgere in modo continuativo e durevole l'attività assicurativa è raggiunto solo nel caso in cui siano soddisfatte determinate condizioni. L'impresa si deve dotare, in primo luogo, di un'adeguata politica di tariffazione; con tale termine si intende la capacità dell'assicuratore di calcolare in modo corretto il premio da far pagare ad ogni assicurato, sia in funzione del rischio specifico del soggetto sia in funzione del portafoglio clienti dell'impresa. L'adeguatezza dei premi risiede nel fatto che il loro ammontare deve essere in grado di far fronte ai risarcimenti attesi.

La compagnia di assicurazione, inoltre, deve essere in grado di diversificare adeguatamente i rischi assicurativi che si è assunta ed in caso contrario adottare un'efficace politica coassicurativa e riassicurativa. L'impresa deve anche individuare una coerente politica di investimento e di gestione dei rischi finanziari. Infine, due ulteriori condizioni fondamentali che devono essere rispettate per il perseguimento dell'equilibrio gestionale sono rappresentate da una corretta attività di riservazione, cioè di valutazione e accantonamento delle riserve tecniche, e dalla detenzione di adeguate risorse patrimoniali proprie che garantiscano la solvibilità dell'impresa anche in condizioni avverse di sinistrosità.

Il premio di assicurazione deve essere pagato anticipatamente. Il rispetto di tale principio, infatti, permette all'assicuratore di trarre, dall'ammontare dei premi incassati, le somme necessarie per far fronte ai suoi impegni. Questo fenomeno è noto come inversione del ciclo monetario o produttivo. È proprio da questa peculiarità delle imprese di assicurazione che scaturisce la necessità di accantonare quella parte dei premi che serviranno a fronteggiare gli impegni futuri risarcitori dei sinistri. L'impresa nel passivo del bilancio ha dunque l'obbligo di iscrivere tali ammontari che, al lordo della riassicurazione, prendono il nome di **riserve tecniche**. Esse hanno la funzione di garantire che la compagnia di assicurazione, in condizioni normali di sinistrosità, abbia adeguate risorse finanziarie necessarie ad adempiere agli impegni nei confronti degli assicurati.

L'articolo 36 del codice delle assicurazioni private individua per i rami vita le seguenti riserve tecniche:

- 1- Riserva matematica. Essa rappresenta il valore attuale atteso degli impegni nei confronti degli assicurati, calcolato con metodo prospettivo sufficientemente prudente.
- 2- Riserva per somme da pagare. Contiene l'ammontare complessivo delle somme necessarie per pagare capitali e rendite maturate, riscatti e sinistri da liquidare.
- 3- Riserva per partecipazione agli utili e ristorni. Raccoglie gli importi da liquidare ai beneficiari di polizze a titolo di partecipazione agli utili tecnici sia gli importi che rappresentano un rimborso parziale dei premi.
- 4- Riserve delle assicurazioni dei rami danni.
- 5- Riserve a carico dei riassicuratori.
- 6- Riserva per spese future e riserve aggiuntive (regolamento Ivass n.21).

Con riferimento ai rami danni l'articolo 37 del codice delle assicurazioni private e il regolamento Ivass n.16 individuano esplicitamente le seguenti riserve tecniche:

- 1- Riserva premi. Comprende la riserva per frazioni di premi e la riserva per rischi in corso.
 - 1.1 La riserva per frazioni di premi rappresenta l'importo relativo alla quota di premi già incassati ma riferiti a rischi ancora in corso dopo la chiusura dell'esercizio.
 - 1.2 La riserva per rischi in corso ha lo scopo di fronteggiare gli scostamenti sfavorevoli dei rischi ancora in essere e non adeguatamente coperti dalla riserva per frazioni di premi.
- 2- Riserva sinistri. Raccoglie l'ammontare totale, che dopo una prudente valutazione, risulta necessario per liquidare i sinistri avvenuti nell'esercizio o in quelli precedenti e non ancora liquidati. L'impresa deve tener conto anche delle spese di liquidazione che sosterrà. La riserva sinistri considera tutti i futuri oneri prevedibili ed è pertanto valutata a costo ultimo. Inoltre essa deve essere stimata separatamente per ogni sinistro.
- 3- Riserva per sinistri avvenuti ma non ancora denunciati alla data di chiusura dell'esercizio (c.d. sinistri tardivi oppure IBNR, *incurred but not reported*).
- 4- Riserve di perequazione. Sono costituite solo per rami particolari e hanno lo scopo di livellare le fluttuazioni dell'andamento della sinistrosità negli anni o di coprire rischi particolari.
- 5- Riserva di senescenza. È da costituire per le polizze malattia di durata poliennale con la finalità di compensare il rischio, crescente nel tempo, dovuto all'invecchiamento dell'assicurato.
- 6- Riserva per partecipazione agli utili e ristorni.
- 7- Riserve a carico dei riassicuratori.

Al termine di ogni esercizio le imprese di assicurazione hanno l'obbligo di redigere il bilancio di esercizio. Questo rappresenta la situazione patrimoniale, finanziaria ed economica dell'impresa e ha come scopo prevalente quello di informare tutti i portatori di interesse esterni alla compagnia di assicurazione tra cui gli assicurati, gli azionisti e l'autorità di vigilanza.

Nel seguito si analizza brevemente il bilancio delle imprese di assicurazione danni tralasciando l'analisi relativa ai rami vita in quanto esula dal contesto della presente trattazione.

Il bilancio di esercizio delle assicurazioni danni

Il prospetto patrimoniale o **stato patrimoniale** misura, al 31 dicembre di ogni anno, il patrimonio netto dell'impresa come differenza tra attività e passività. Le attività di una compagnia danni sono costituite principalmente da investimenti in strumenti finanziari effettuati con i fondi derivanti dai premi e anche con le risorse versate dagli azionisti (c.d. investimenti liberi). Le passività sono rappresentate prevalentemente dalle riserve tecniche, gli impegni aleatori futuri a carico dell'impresa. Nei rami danni hanno un peso preponderante la riserva sinistri e la riserva premi. Le risorse necessarie a fronteggiare gli impegni nei confronti degli assicurati sono gli investimenti a copertura delle riserve tecniche. Solo nel caso in cui i suddetti investimenti non siano sufficienti a coprire le riserve tecniche l'impresa dovrà attingere dagli investimenti liberi. Ciò può verificarsi ad esempio a fronte di un'errata politica di riservazione, oppure a causa di scostamenti impreveduti nella sinistrosità.

La situazione patrimoniale della compagnia può essere analizzata sinteticamente attraverso alcuni indici di bilancio.

Il **grado di copertura delle riserve tecniche** è un indice che esprime la sufficienza o meno degli investimenti rispetto alle riserve tecniche. Esso è rappresentato dal rapporto tra investimenti a copertura delle riserve tecniche e l'ammontare delle riserve tecniche nette. Tale indicatore deve essere adeguatamente superiore all'unità.

Il valore che rappresenta la **leva finanziaria-assicurativa** è costruito come rapporto tra riserve tecniche e la somma del patrimonio netto e passività subordinate. Questa quota ha l'obiettivo di valutare la condizione di solvibilità dell'impresa; si confronta, infatti, l'ammontare delle riserve tecniche con i mezzi propri della compagnia che possono essere usati per liquidare le riserve in caso di insufficienza degli investimenti a copertura. Tanto più l'indice si avvicina all'unità e tanto più l'impresa risulta essere solvibile.

Tuttavia per verificare la solvibilità di un'impresa risulta più utile calcolare l'**indice di solvibilità** che valuta la sufficienza dei mezzi propri dell'impresa per fini di vigilanza. Questo indicatore è dato dal rapporto tra i mezzi propri imposti dalla normativa che detiene la compagnia e il requisito patrimoniale minimo richiesto dall'Autorità. L'indice di solvibilità deve essere dunque superiore ad uno affinché l'impresa possa essere conforme alle norme.

Il **conto economico** è il documento di bilancio che ha l'obiettivo di calcolare l'utile, o perdita, d'esercizio come differenza tra i ricavi e i costi ed è redatto rispettando il principio della competenza economica. Con riferimento ai premi, che costituiscono la principale voce di ricavo insieme ai proventi finanziari degli investimenti, è necessario calcolare il valore dei **premi di competenza**. Il valore iscritto nel conto economico per tale voce è pari ai premi contabilizzati nell'esercizio, cioè versati o dovuti dagli assicurati nell'esercizio, meno la variazione della riserva premi:

$$PC_t = P_t - \Delta RP_t \quad (1.1.1)$$

dove

- PC_t = premi di competenza dell'anno t-esimo
- P_t = premi contabilizzati nell'anno t-esimo
- ΔRP_t = variazione della riserva premi nell'anno t-esimo.

Anche con riferimento al valore dei sinistri si applica il principio della competenza economica. I **sinistri di competenza** sono calcolati come la somma tra i sinistri avvenuti nell'esercizio e liquidati, e la stima del costo dei sinistri, noti e tardivi, avvenuti nell'anno ma non ancora pagati; sono quindi i costi relativi ai sinistri che si sono verificati nell'esercizio, indipendentemente dal fatto che siano stati o meno pagati. Anche le modifiche nella valutazione della riserva sinistri influenzano il risultato economico dell'impresa. In definitiva l'**onere per sinistri** iscritto a conto economico è dato dal valore dei sinistri di competenza più l'incremento della stima del costo dei sinistri passati meno il decremento della stima del costo dei sinistri degli esercizi precedenti:

$$OS_t = SC_t + C_t - E_t \quad (1.1.2)$$

dove

- OS_t = onere per sinistri del t-esimo anno
- SC_t = sinistri di competenza del t-esimo anno

- C_t = carenza riserva sinistri nell'anno t-esimo
- E_t = eccedenza riserve sinistri nell'anno t-esimo.

In alternativa il valore degli oneri per sinistri può essere determinato come il costo dei sinistri liquidati nell'anno, anche se riferiti ad esercizi precedenti, più la variazione della riserva sinistri:

$$OS_t = SP_t + \Delta V_t \quad (1.1.3)$$

dove

- SP_t = sinistri pagati nell'anno t-esimo
- ΔV_t = variazione della riserva sinistri nell'anno t-esimo.

Tra le voci di costo tipiche dell'attività assicurativa rientrano, inoltre, i costi di acquisizione e le spese di gestione delle polizze.

Il conto economico delle imprese di assicurazione è generalmente diviso tra il conto tecnico, contenente le voci di costo e ricavi direttamente imputabili alle operazioni assicurative, ed il conto non tecnico contenente le restanti voci di bilancio.

Dal prospetto del conto tecnico è possibile ricavare una vasta serie di indici utili alla valutazione della situazione tecnica dell'impresa.

In primo luogo il **margine tecnico** , dato dal rapporto tra il risultato tecnico di ramo e i premi di competenza, permette di valutare la redditività del ramo stesso. Il margine tecnico è a sua volta scomponibile nella somma tra redditività che deriva dagli investimenti a copertura delle riserve tecniche (margine tecnico finanziario) e la redditività derivante dalle operazioni strettamente assicurative (margine tecnico assicurativo), cioè dal volume dei premi incassati rispetto ai costi sostenuti.

$$\text{Margine tecnico} = \text{margine tecnico finanziario} + \text{margine tecnico assicurativo}. \quad (1.1.4)$$

Il **margine tecnico finanziario** è calcolato come rapporto tra gli utili ricavati dagli investimenti attribuiti al conto tecnico e il valore dei premi di competenza. A sua volta questo indice può essere scomposto nel prodotto tra altri due indicatori: la **redditività degli investimenti a copertura delle riserve tecniche** ed il **cover ratio** . Il primo misura la percentuale degli utili da investimenti rispetto al valore delle riserve tecniche. Il **cover ratio** , invece, è pari al rapporto tra le riserve tecniche e i premi di competenza e rappresenta la durata media delle riserve stesse.

Il **margine tecnico assicurativo** è definito come rapporto tra il risultato tecnico del ramo ed i premi di competenza. Altro indicatore della redditività tecnica assicurativa è il **combined ratio** , pari circa al complemento ad uno del margine tecnico assicurativo. Il **combined ratio** misura l'incidenza dei costi assicurativi rispetto ai premi; quando assume un valore inferiore all'unità significa che i premi hanno più che coperto i costi e quindi si ha un margine tecnico assicurativo positivo. Il **combined ratio** è dato a sua volta dalla somma di:

- **claim ratio** , rapporto tra oneri per sinistri e premi competenza;
- **indice dei costi di acquisizione** , rapporto tra costi acquisizione e premi contabilizzati;
- **indice delle spese amministrative e generali** , pari al rapporto tra spese di gestione non derivanti dalle attività di acquisizione, liquidazione e investimento e i premi contabilizzati.

Il *claim ratio* può essere ottenuto, inoltre, come differenza tra il *loss ratio*, incidenza dei sinistri di competenza rispetto ai premi di competenza, ed il rapporto tra eccedenza o carenza della riserva sinistri sui premi di competenza.

1.2. Solvency 0 e Solvency I

L'attività assicurativa svolge un ruolo fondamentale all'interno della vita economica di un Paese. Per garantire il rispetto dei principi tecnici, economici e finanziari che sono presupposto fondamentale per la solvibilità dell'impresa, l'esercizio dell'attività assicurativa è oggetto di un vasto quadro normativo. La normativa prudenziale, seppur modificatasi nel tempo, ha avuto costantemente l'obiettivo di individuare un appropriato ammontare del patrimonio dell'impresa eccedente i mezzi necessari per far fronte alle obbligazioni. Questa eccedenza di mezzi patrimoniali, denominata nel seguito margine di solvibilità, assolve ad una funzione in senso lato della solvibilità dell'impresa. Quest'ultima, infatti, deve possedere un'adeguata eccedenza di attività rispetto alle passività in modo da garantirne la solvibilità anche nel caso di situazioni eccezionali in cui le attività poste a copertura delle obbligazioni non dovessero essere sufficienti.

La regolamentazione a cui sono sottoposte le imprese di assicurazione ha subito continue modificazioni nel corso degli anni fino all'epoca attuale.

Nel nostro Paese fino al 1973 ed al 1979, rispettivamente per i rami danni e vita, alle compagnie di assicurazione, a fini di solvibilità, era fatto obbligo di possedere solo un capitale sociale minimo, diverso a seconda dei rami esercitati ma non differenziato in funzione del volume dei premi incassati e dei sinistri sostenuti. Le norme di vigilanza prudenziale tuttora in vigore trovano la loro nascita alla fine degli anni '70 con il recepimento delle direttive CEE in materia di solvibilità del settore assicurativo. Le direttive comunitarie del 1973, per i rami danni, e del 1979, per i rami vita, (recepite rispettivamente nel 1978 e nel 1986) hanno costituito l'impalcatura delle norme di vigilanza prudenziali arrivate fino ai giorni nostri.

Queste norme, denominate **Solvency 0**, prevedono che l'impresa posseda sempre un patrimonio netto almeno pari ad una margine minimo di solvibilità. Per i rami danni tale ammontare è calcolato in funzione dei premi incassati e dei sinistri liquidati, per i rami vita, invece, il margine minimo di solvibilità è legato alle riserve matematiche e ai capitali sotto rischio.

La legge numero 295 del 10 giugno 1978 ha introdotto nel sistema normativo italiano le norme comunitarie relative all'esercizio delle assicurazioni private contro i danni. L'articolo 35 della suddetta legge identifica il margine di solvibilità nel patrimonio netto dell'impresa, al netto degli elementi immateriali, e prevede che questo sia costituito dalle seguenti voci:

- il capitale sociale versato;
- il 50% del capitale non versato purché almeno la metà dell'intero capitale sociale sottoscritto sia stata versata;
- le riserve legali, statuarie o facoltative non destinate a copertura di specifici impegni o a rettifica di voci dell'attivo;
- il riporto di utili.

L'impresa risulta essere solvibile nel caso in cui gli elementi costitutivi del margine di solvibilità abbiano un valore maggiore o uguale del **minimo margine di solvibilità** (MMS). Il MMS è calcolato come funzione dell'ammontare annuo dei premi e dell'onere medio dei sinistri degli ultimi tre esercizi. Se l'impresa opera, invece, solo o prevalentemente nei rami credito, tempesta, grandine o gelo si considera l'onere medio dei sinistri negli ultimi sette esercizi (art.37). Il MMS deve essere almeno pari al maggiore tra i risultati ottenuti nel calcolo dell'ammontare annuo dei premi, margine premi, e dell'onere medio dei sinistri, margine sinistri.

L'articolo 38 individua il criterio di calcolo del margine premi. Il valore totale dei premi di competenza dell'esercizio, al lordo delle cessioni in riassicurazione e al netto dei premi assunti a seguito di operazioni di riassicurazione attiva, viene ripartito in due quote. La prima fino ad un ammontare di 10 milioni di unità di conto europea¹ e la seconda comprendente l'eccedenza rispetto a tale valore. Il margine è calcolato applicando sulla prima quota la percentuale del 18% e sulla seconda quota del 16%, come mostrato di seguito:

$$margine\ premi = \begin{cases} premi > 10.000.000 & 18\% * 10.000.000 + 16\% * (premi - 10.000.000) \\ premi \leq 10.000.000 & 18\% * premi \end{cases}$$

(1.2.1)

La normativa prevede inoltre che nel calcolo del MMS rientri anche il margine sinistri. L'onere medio dei sinistri evita di basarsi solo sul valore dei premi e permette di non incorrere in eventuali distorsioni dovute a politiche di sottotariffazione.

Il metodo di calcolo del margine sinistri è fornito dall'articolo 39. L'onere medio dei sinistri di competenza degli ultimi tre o sette esercizi, considerando i sinistri al lordo delle quote a carico dei riassicuratori ed i sinistri a carico dell'impresa a fronte di operazioni di riassicurazione attiva, viene ripartito in due quote. La prima fino ad un ammontare corrispondente a sette milioni di unità di conto europea e la seconda comprendente l'eccedenza di tale ammontare. Il margine è calcolato applicando sulla prima quota la percentuale del 26% e sulla seconda quota del 23%:

$$margine\ sinistri = \begin{cases} onere\ medio\ sinistri > 7.000.000 & 26\% * 7.000.000 + 23\% * (onere\ medio\ sx - 7.000.000) \\ onere\ medio\ sinistri \leq 7.000.000 & 26\% * onere\ medio\ sinistri \end{cases}$$

(1.2.2)

Nel calcolo del margine sinistri si considera il valore dell'onere medio dei sinistri riferito ad un orizzonte pluriennale. La finalità di considerare gli ultimi tre anni, oppure sette per i rami più volatili, consente di esaminare e usare un dato che sia il più possibile rappresentativo dell'effettivo profilo di sinistrosità dell'impresa. Un orizzonte pluriennale consente di livellare, infatti, eventuali valori estremi registrati in anni anomali della sinistrosità.

È quindi possibile calcolare il margine minimo di solvibilità che è pari al massimo tra margine premi ed il margine sinistri moltiplicato per un'aliquota che cerca di tenere conto del beneficio derivante dalla riassicurazione:

¹ È stata una moneta scritturale, cioè virtuale e usata solo a scopi contabili, dell'Unione europea introdotta nel 1978. Il suo valore era dato dalla media delle valute degli Stati membri, ponderata in relazione all'importanza economica dei rispettivi Paesi.

$$\text{margine minimo di solvibilità} = \alpha \max[\text{margine premi} ; \text{margine sinistri}] . \quad (1.2.3)$$

Il valore di α , che è legato agli effetti della riassicurazione, è determinato come il massimo tra un'aliquota fissa pari al 50% e il rapporto tra l'ammontare dei sinistri dell'ultimo anno al netto delle quote a carico dei riassicuratori e l'ammontare dei sinistri al lordo della riassicurazione, relativi entrambi all'ultimo esercizio (art. 38 e 39):

$$\alpha = \max \left[50\% ; \frac{\text{sinistri netto riassicurazione}}{\text{sinistri lordo riassicurazione}} \right]. \quad (1.2.4)$$

La normativa pone un limite massimo al beneficio derivante dalla riassicurazione pari al 50%. In questo modo si è cercato di tutelare le imprese che ricorrono massicciamente alla riassicurazione passiva dal rischio di insolvenza dei riassicuratori. Infatti resta sempre a capo dell'impresa cedente l'onere di risarcire i sinistri agli assicurati indipendentemente dal fatto che il riassicuratore abbia o meno liquidato all'impresa cedente quanto stabilito dal trattato.

Infine l'articolo 41 prevede che le imprese debbano sempre possedere, già al momento della loro costituzione, la **quota di garanzia** che risulta essere pari ad un terzo del margine minimo di solvibilità e comunque non inferiore ai valori previsti dalla legge per i vari rami. In caso di inosservanza di tale norma l'autorità di vigilanza impone all'impresa di presentare un piano di finanziamento a breve termine. Nel caso in cui invece l'impresa sia al di sotto del solo MMS è previsto un piano di risanamento (art 44).

La regola di calcolo del MMS prescritta dalla legge 295 del 1978 incorre in evidenti ed importanti limiti. I margini premi e sinistri sono calcolati con aliquote decrescenti in funzione della dimensione dell'impresa (premi raccolti e sinistri liquidati). Si tiene così conto che al crescere dei parametri dimensionali la variabilità relativa, e dunque la rischiosità del portafoglio assicurativo da cui dipende l'ammontare del capitale a fini di solvibilità, aumenta in modo meno che proporzionale. Tuttavia il calcolo, come proposto dalla normativa, risulta essere troppo semplificato e inadeguato a rappresentare in modo coerente e veritiero i rischi legati all'attività di tariffazione e riservazione. Altro importante limite della formula del MMS risiede nel fatto che il calcolo proposto non tiene conto, ad esclusione dell'orizzonte temporale di sette anni per l'onere medio dei sinistri di alcuni rami, della specificità dei vari rami danni e di quella legata alle singole compagnie di assicurazione. La rischiosità infatti non è la stessa nei vari rami a causa della differente natura dei rischi assicurati. Inoltre seppur considerando imprese di analoghe dimensioni e operanti nei medesimi rami ciò non garantisce in alcun modo che il profilo di rischio delle diverse compagnie sia lo stesso. Anche gli effetti derivanti dalla riassicurazione sono considerati in modo approssimativo. Il calcolo dell'aliquota α potrebbe, infatti, dar luogo a valori incoerenti. Risulta possibile, nello specifico, che α sia uguale al 100% nonostante il ricorso alla riassicurazione. Quest'ultima situazione risulta realizzarsi nel caso di un trattato riassicurativo non proporzionale in cui non si sono realizzati nell'esercizio sinistri a carico del riassicuratore; tutti i sinistri dunque sono stati inferiori al valore della priorità. In generale comunque la formula privilegia i trattati proporzionali sebbene quelli non proporzionali abbiano un effetto maggiore sull'esposizione al rischio dell'impresa. Si deve, infine, osservare che nel calcolo che permette di determinare α non vi sia una valutazione del rischio di default del riassicuratore.

Il MMS proposto dalla normativa non tiene inoltre in considerazione tutti gli altri rischi non strettamente assicurativi a cui è esposta un'impresa di assicurazione, come ad esempio i rischi finanziari, operativi e reputazionali.

Infine la normativa determina il MMS a livello di singola impresa di assicurazione; è quindi inadeguata ad individuare il requisito di solvibilità dei gruppi assicurativi.

L'impalcatura generale della vigilanza prudenziale è rimasta sostanzialmente inalterata nelle sue linee guida nel corso del tempo. Con il decreto legislativo numero 173 del 26 maggio 1997 è stata introdotta, tuttavia, un'importante novità nel calcolo della riserva sinistri. Il comma 2 dell'articolo 33 sancisce, infatti, il principio del costo ultimo nella valutazione della riserva sinistri, con l'obiettivo di tener conto di tutti i futuri oneri prevedibili. Il comma 7 dello stesso articolo inoltre vieta esplicitamente la possibilità di effettuare attualizzazioni della riserva sinistri.

Le successive normative in tema di solvibilità assicurativa hanno provveduto solamente ad un aggiornamento dei valori monetari necessari per il calcolo del MMS precedentemente mostrato ed all'introduzione di modifiche strutturali marginali. Con il decreto legislativo numero 307 del 3 novembre 2003 si è data attuazione alle direttive comunitarie n.12 e 13 del 2002 (c.d. **Solvency I**) relative al margine di solvibilità delle imprese di assicurazione vita e danni. Con riferimento a queste ultime il decreto modifica i valori per il calcolo del MMS. Il margine premi risulta essere il seguente (art.11):

$$\text{margine premi} = \begin{cases} \text{premi} > 50.000.000 & 18\% * 10.000.000 + 16\% * (\text{premi} - 50.000.000) \\ \text{premi} \leq 50.000.000 & 18\% * \text{premi} \end{cases} \quad (1.2.5)$$

Il margine sinistri, invece, è dato dalla seguente formula (art.12):

$$\text{margine sinistri} = \begin{cases} \text{onere medio sinistri} > 35.000.000 & 26\% * 7.000.000 + 23\% * (\text{onere medio sx} - 35.000.000) \\ \text{onere medio sinistri} \leq 35.000.000 & 26\% * \text{onere medio sinistri} \end{cases} \quad (1.2.6)$$

La norma, in aggiunta, prevede che l'onere medio dei sinistri da utilizzare nel suddetto calcolo debba essere incrementato del 50% con riferimento ai rami 11,12,13 (r.c. aeromobili, r.c. veicoli marittimi, lacustri e fluviali, r.c. generale). La formula per il calcolo del MMS risulta essere:

$$\text{margine minimo di solvibilità} = \alpha \max[\text{margine premi} ; \text{margine sinistri}] \quad (1.2.7)$$

dove in questo caso l'aliquota α considera i sinistri al netto e lordo riassicurazione degli ultimi tre esercizi, cercando così di attenuare i casi estremi di anni in cui il trattato di riassicurazione seppur presente non ha operato (art.11 e 12). L'articolo 13 introduce, inoltre, il confronto del MMS calcolato nell'esercizio con quello dell'anno precedente. Nel caso in cui il MMS dell'anno corrente sia minore rispetto a quello dell'esercizio precedente, la normativa pone un limite minimo al MMS dell'esercizio. Quest'ultimo deve assumere un valore almeno pari al prodotto tra il MMS dell'anno passato ed il rapporto tra la riserva sinistri finale dell'anno e quella dell'anno precedente:

$$\text{MMS}(t) = \text{MMS}(t - 1) \frac{\text{riserva sinistri finale}(t)}{\text{riserva sinistri finale}(t - 1)}. \quad (1.2.8)$$

Gli articoli 14 e 15, infine, prevedono, rispettivamente, la rideterminazione dei valori minimi della quota di garanzia e l'indicizzazione dei valori presenti nel calcolo dei margini premi e sinistri all'indice europeo dei prezzi al consumo.

Un'ulteriore modifica al rialzo dei valori rientranti nelle formule dei margini premi e sinistri, nonché delle quote di garanzia, è stata apportata dal regolamento Isvap numero 19 del marzo 2008.

1.3. *Solvency II*

Per far fronte agli evidenti limiti del sistema delle norme di solvibilità previste da *Solvency I*, a partire dai primi anni del 2000, a livello europeo si è avviato lo studio di nuove norme prudenziali più consone alla complessità dell'attività assicurativa. Il risultato è stata l'emanazione della direttiva CE numero 138 del 2009 (c.d. *Solvency II*). Queste norme entreranno in vigore all'inizio del 2016 a seguito di ulteriori modifiche apportate dalla direttiva dell'aprile 2014 denominata *Omnibus II*.

Il processo di adozione di tali norme segue il meccanismo Lamfalussy che individua quattro livelli. Il primo di questi è rappresentato dalla direttiva *Solvency II* vera e propria nonché dalle modifiche introdotte da *Omnibus II*. Il secondo livello è costituito dalle misure tecniche relative all'esecuzione della direttiva di cui alcuni aspetti sono ancora oggetto di dibattito. Le norme di implementazione di secondo livello sono state calibrate nel corso del tempo grazie agli studi di impatto quantitativo (QIS) che hanno permesso di testare e valutare gli effetti delle nuove norme sulle imprese che vi hanno preso parte. Il terzo livello è realizzato, invece, dalle linee guida emanate dall'EIOPA² per le autorità di vigilanza dei rispettivi Stati membri. Infine il quarto livello prevede di verificare la corretta applicazione delle norme da parte dei Paesi membri.

Le disposizioni contenute in *Solvency II* hanno l'obiettivo di superare i limiti esistenti, che possono essere individuati come di seguito. L'attuale normativa manca di sensibilità al rischio; nel calcolo del margine di solvibilità i rischi assicurativi sono considerati in modo approssimativo, senza considerare gli effetti di diversificazione e inoltre i rischi finanziari sono completamente trascurati. I requisiti qualitativi relativi alla gestione dei rischi e alla *governance* sono modesti e quindi le imprese di assicurazione, in definitiva, non sono incentivate a gestire adeguatamente i rischi. Altri limiti delle attuali norme risiedono, in aggiunta, in una vigilanza di gruppo non ottimale e nell'assenza di convergenza internazionale e transettoriale (settore bancario).

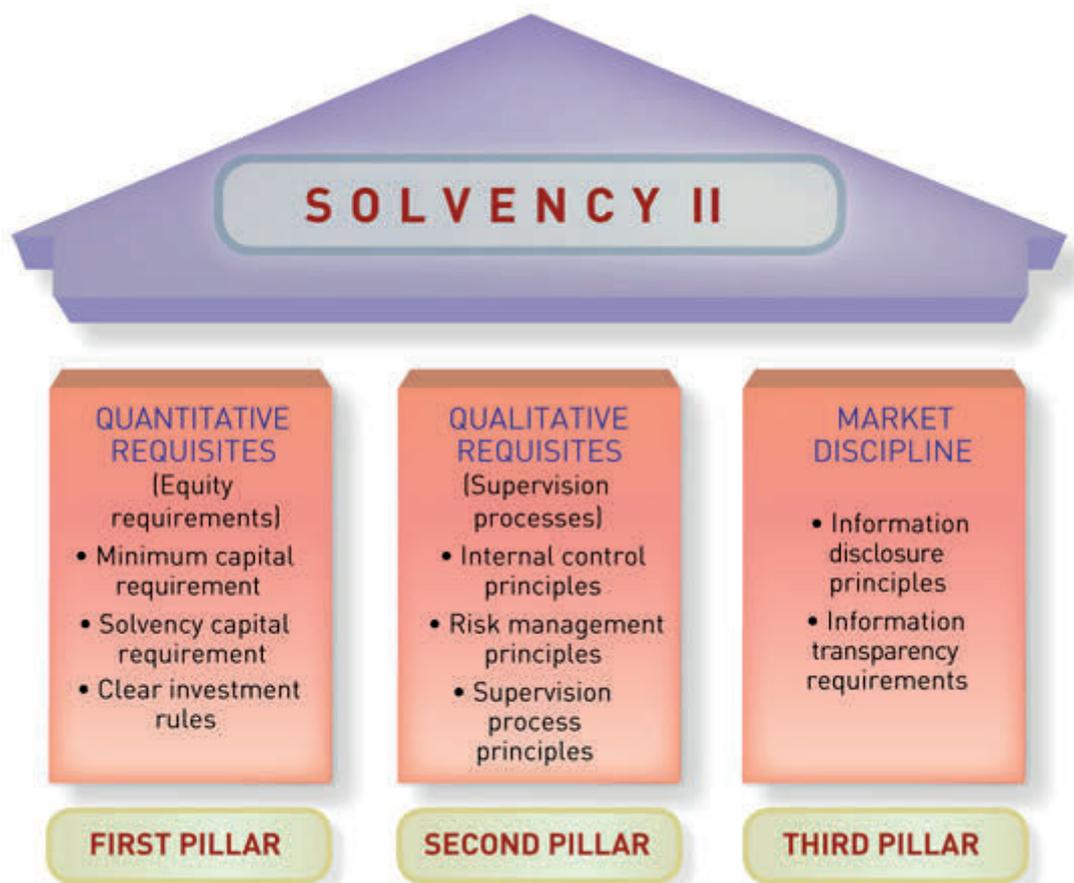
Il nuovo sistema normativo, per superare tali limiti, ha adottato un approccio economico basato sul rischio. I nuovi requisiti patrimoniali cercano di rappresentare l'effettivo profilo di rischio dell'impresa, incentivando quindi un'adeguata gestione dei rischi. *Solvency II* permette inoltre di armonizzare le norme a livello europeo, introduce una migliore vigilanza sui gruppi assicurativi e in definitiva incrementa le tutele dei contraenti e dei beneficiari.

Solvency II è un sistema a tre pilastri. Il primo riguarda i requisiti quantitativi di solvibilità, il secondo contiene le norme relative ai requisiti qualitativi di solvibilità cioè relative al sistema di

² *European insurance and occupational pensions authority*, creata nel 2007 per sostituire il CEIOPS, è responsabile dei sistemi assicurativi e pensionistici nazionali a livello europeo, nonché degli strumenti e mercati finanziari.

governance e alla procedura di riesame da parte dell'autorità di vigilanza, mentre il terzo dispone le norme sulle informazioni da far pervenire all'autorità di vigilanza e al mercato.

Fig.1.3.1: I tre pilastri previsti da *Solvency II* (fonte: *Solvency II for non life insurance undertakings*, Alberto A. Alonso, 2008)



Partendo da quest'ultimo pilastro si sottolinea come l'obiettivo sia rappresentato dal rafforzamento della c.d. disciplina di mercato tramite l'introduzione di obblighi di informativa al pubblico. I consumatori quindi potranno disporre di informazioni maggiori e più approfondite, rispetto all'attuale situazione normativa, per poter valutare la solidità delle imprese, permettendo che il mercato "premi" le compagnie con le migliori caratteristiche.

Con riferimento al secondo pilastro si deve evidenziare che tali norme (artt. 41-50 di *Solvency II*) hanno l'obiettivo primario di considerare i rischi non quantificabili, ovvero quelli che non rientrano nel primo pilastro. È previsto inoltre che le imprese adottino un sistema di valutazione interna del rischio e della solvibilità (c.d. ORSA, *own risk and solvency assessment*), il quale deve essere completamente integrato con le altre funzioni strategiche dell'impresa. L'autorità di vigilanza, di contro, non si limiterà a verificare il rispetto dei soli requisiti patrimoniale di solvibilità (SCR e MCR) ma anche l'adeguatezza del sistema di *governance* delineato sopra.

Lo scopo del primo pilastro è quello di individuare le risorse patrimoniali che deve possedere l'impresa per poter operare in funzione di tutti i rischi quantificabili a cui è esposta. Le norme individuano due livelli di risorse patrimoniali: il requisito patrimoniale di solvibilità (*solvency capital requirement*, SCR), al di sotto del quale si delinea una situazione di solvibilità anomala, ed il requisito patrimoniale minimo (*minimal capital requirement*, MCR), al di sotto del quale si delinea una

situazione critica che se non riportata in breve tempo alla normalità comporta la revoca dell'autorizzazione ad operare per l'impresa. Gli snodi fondamentali del primo pilastro prevedono la valutazione delle attività e passività, riserve tecniche comprese, la determinazione dei fondi propri, il calcolo del SCR e del MCR ed, infine, la verifica del rispetto delle condizioni quantitative di solvibilità ovvero l'accertamento che i fondi propri siano maggiori dei requisiti patrimoniali richiesti. Nel seguito si analizzano le peculiarità del primo pilastro.

Tra le novità principali introdotte con il primo pilastro vi è principio del *fair value* nella valutazione delle attività e passività attraverso cui *Solvency II* determina i valori di bilancio. Il *fair value*, valore equo, può essere definito come il prezzo che si riceverebbe a vendere un'attività o che si pagherebbe a trasferire una passività in una regolare transazione tra i partecipanti al mercato alla data di valutazione (IFRS 13). Il *fair value* di una posta di bilancio risulta essere, concretamente, il prezzo corrente di mercato nel caso in cui esista un mercato attivo in cui sono negoziate attività o passività identiche a quelle oggetto di valutazione. In caso contrario il valore equo deve essere ricavato con un'opportuna tecnica di valutazione. Anche in quest'ultima situazione, tuttavia, gli input necessari per ricavare il *fair value* devono essere il più possibile riferiti ad osservabili variabili di mercato. Le ragioni che hanno portato il Legislatore ad adottare questo principio contabile risultano essere date dal poter limitare il più possibile la discrezionalità e soggettività nelle valutazioni e la tendenza internazionale a privilegiare l'approccio anglosassone *market-oriented*. Tuttavia il motivo principale che ha portato a questa scelta risiede nel fatto che le valutazioni così effettuate sono essenziali per poter misurare quantitativamente i rischi dell'impresa di assicurazione, che sono appunto definiti come le possibili oscillazioni future dei *fair value*. L'articolo 75 della direttiva, dunque, afferma che le attività e passività sono valutate all'importo al quale potrebbero essere scambiate tra parti consapevoli e consenzienti in un'operazione svolta alle normali condizioni di mercato. Unica eccezione al concetto di *fair value* consiste nel non effettuare alcun aggiustamento per tenere conto del merito creditizio nel valutare le passività della stessa impresa di assicurazione. Le riserve tecniche sono la principale passività di una compagnia assicurativa; con riferimento alle stesse la direttiva comunitaria prevede che il loro valore corrisponda all'importo attuale che le imprese di assicurazione e riassicurazione dovrebbero pagare se dovessero trasferire immediatamente le loro obbligazioni di assicurazione e riassicurazione ad un'altra impresa di assicurazione o riassicurazione (art. 76 comma 2). *Solvency II* prevede dunque che le riserve siano valutate sulla base del "*current exit value*" che può essere visto come una definizione specifica di *fair value* applicata alle riserve tecniche. Non esistendo un mercato attivo per tali passività, l'unica modalità possibile per effettuarne la valutazione è rappresentata da opportuni metodi che utilizzino informazioni correnti ricavate dai mercati e che siano affidabili, prudenti e obiettivi.

L'articolo 77 della direttiva precisa i criteri da adottare per calcolare le riserve tecniche. Nel caso in cui i flussi di cassa futuri connessi alle obbligazioni assicurative possano essere riprodotti in modo affidabile tramite strumenti finanziari per i quali sia osservabile un valore di mercato attendibile, il valore delle riserve tecniche associato a tali flussi di cassa futuri è determinato sulla base del valore di mercato di tali strumenti finanziari (c.d. metodo del portafoglio replicante). Quando non è possibile applicare questo criterio, come nel contesto delle assicurazioni danni, alle imprese è fatto obbligo di calcolare il valore delle riserve come somma della *best estimate* e *risk margin* (art.77 comma 1).

Il comma 2 dello stesso articolo definisce la **best estimate** come la media dei flussi di cassa futuri ponderata con le probabilità, tenendo conto del valore temporale del denaro (valore attuale atteso dei flussi di cassa futuri) sulla base della pertinente struttura per scadenza dei tassi di interesse privi di rischio. Il calcolo della **best estimate** utilizza metodi attuariali adeguati basati su informazioni aggiornate, credibili e su ipotesi realistiche. Le norme prevedono di considerare tutte le entrate e uscite di cassa necessarie per regolare le obbligazioni, comprese quindi le spese e l'effetto dell'inflazione, per tutta la loro durata di vita. L'articolo include, in aggiunta, che la **best estimate** sia calcolata al lordo della riassicurazione passiva; l'articolo 81 impone, infatti, una valutazione a parte delle riserve tecniche cedute ai riassicuratori.

Il principio della prudenzialità risulta assente nella valutazione delle riserve. Con riferimento ai rami danni, infatti, non sarà più possibile valutare a costo ultimo il valore delle riserve e nei rami vita l'attualizzazione, che è già prevista, dovrà essere effettuata con i tassi forniti dalla vigilanza e non più in base ai tassi fissati nel *pricing*. La determinazione della curva dei tassi a pronti *risk free*, necessaria per effettuare le attualizzazioni, è ricavata dalla curva dei tassi swap depurata dal rischio di credito a cui viene in seguito sommato uno spread che ha lo scopo di considerare l'illiquidità delle passività assicurative.

Il **risk margin** è definito dal comma 3 dell'articolo 77 il quale prevede che questo sia tale da garantire che il valore delle riserve tecniche sia equivalente all'importo di cui le imprese di assicurazione e di riassicurazione avrebbero bisogno per assumersi ed onorare le obbligazioni di assicurazione e di riassicurazione. Il margine di rischio è concettualmente pari alla differenza tra *current exit value* e *best estimate*; quindi deve essere interpretato come un aggiustamento per il rischio e non come un elemento di prudenzialità. Il comma 5 precisa che il **risk margin** è calcolato determinando il costo della costituzione di un importo di fondi propri ammissibili pari al requisito patrimoniale di solvibilità necessario per far fronte alle obbligazioni di assicurazione e riassicurazione per tutta la loro durata di vita. Il metodo del costo del capitale, dunque, prevede che il margine di rischio sia pari al costo del SCR necessario per coprire le riserve tecniche. Il tasso del costo del capitale è fissato in modo uguale per tutte le imprese dall'autorità di vigilanza europea. A livello operativo il problema consiste nello stimare l'SCR relativo alla *best estimate* per l'intera durata di vita delle obbligazioni assicurative. Tale valore può essere calcolato dalle imprese ricorrendo alla formula standard, menzionata nel seguito, oppure avvalendosi di un modello interno. La formula del margine di rischio è la seguente:

$$RM = \sum_{t=0}^T CoC \frac{SCR_t}{(1 + i_t)^{t+1}} \quad (1.3.1)$$

dove il CoC (*cost of capital*) rappresenta il costo del capitale fissato al 6% per tutte le imprese e i_t rappresenta la curva dei tassi *risk free*.

A seguito della valutazione a *fair value* di tutte le attività e passività, è possibile individuare i fondi propri ammissibili dell'impresa. Questi devono essere maggiori del SCR e MCR affinché le condizioni di solvibilità possano dirsi rispettate. I **fondi propri totali** sono costituiti dalla somma dei fondi propri di base e dei fondi propri accessori (art.87). I **fondi propri di base**, a loro volta, sono costituiti dal patrimonio netto valutato a *fair value* (attività meno passività) e dalle passività subordinate, cioè passività il cui rimborso è subordinato a quello di tutti gli altri debiti (art.88). I **fondi propri accessori**, invece, sono composti dagli elementi diversi dai fondi propri di base che

possono essere richiamati per assorbire le perdite: il capitale sociale non versato e non richiamato, le lettere di credito e le garanzie ne costituiscono alcuni esempi (art.89).

La normativa prevede, in seguito, che i fondi propri totali debbano essere aggiustati, ossia diminuiti, in linea con il rispetto dei principi di trasferibilità e fungibilità nel caso in cui l'impresa appartenga ad un gruppo assicurativo. Successivamente devono essere applicati i criteri quantitativi sulla qualità dei fondi propri, pervenendo, al valore dei **fondi propri ammissibili**. Quest'ultimo aspetto prevede che i fondi propri di base e accessori siano classificati in tre livelli (*tier*) in funzione della loro capacità di assorbire le perdite nel tempo, cioè in base alla loro qualità. I fondi propri di base possono essere classificati in tutti i livelli mentre i fondi propri accessori possono rientrare solo negli ultimi due. Di seguito sono riportate le caratteristiche che concorrono alla classificazione dei fondi individuate dalla normativa (art.93):

- la disponibilità permanente, cioè l'elemento è disponibile o può essere richiamato per assorbire interamente le perdite;
- la subordinazione, cioè in caso di liquidazione l'importo totale dell'elemento è disponibile per assorbire le perdite e il rimborso dell'elemento al possessore avviene solo dopo aver onorato tutte le altre obbligazioni;
- la durata sufficiente;
- assenza di incentivi al rimborso del suo valore nominale;
- l'assenza di costi obbligatori di servizio, cioè l'assenza di spese fisse;
- l'assenza di gravami di qualsiasi genere.

A seguito della classificazione dei fondi propri nei tre livelli, l'impresa verifica che siano rispettati i criteri quantitativi di ammissibilità che riguardano separatamente l'SCR e MCR. Le norme di primo livello, in particolare, con riferimento all'SCR prevedono che la proporzione degli elementi di livello 1 dei fondi propri ammissibili sia superiore ad un terzo dell'importo totale di tali fondi. L'importo ammissibile degli elementi di livello 3 deve, invece, essere inferiore ad un terzo dell'importo totale dei fondi propri ammissibili (art.98 comma 1). Con riferimento all'MCR possono concorrere i soli fondi propri di base ammissibili di *tier* 1 e 2; inoltre l'importo dei fondi propri di base di livello 1 deve essere superiore al 50% del totale (art.98 comma 2).

Per verificare la solvibilità dell'impresa è necessario calcolare i valori del SCR e del MCR. Le norme di primo livello (art.101) sanciscono che il **requisito patrimoniale di solvibilità (SCR)** sia pari al valore a rischio (*value at risk*, VaR) dei fondi propri di base dell'impresa soggetto ad un livello di confidenza del 99,5% su un periodo di un anno. Si deve determinare, dunque, la distribuzione di probabilità dei fondi propri di base su un orizzonte temporale annuo ed individuare il *worst case* al 99,5% di probabilità; tale perdita massima potenziale rappresenta il valore del SCR. Il requisito patrimoniale di solvibilità è calibrato in modo tale che siano presi in considerazione tutti i rischi quantificabili a cui è esposta l'impresa; questo copre l'attività esistente nonché le nuove attività che si prevede vengano iscritte nel corso dei dodici mesi successivi. Le norme di primo livello prevedono espressamente che il SCR debba essere calcolato considerando almeno i seguenti rischi:

- rischio di sottoscrizione per l'assicurazione vita;
- rischio di sottoscrizione per l'assicurazione non vita;
- rischio di sottoscrizione per l'assicurazione malattia;
- rischio di mercato;
- rischio di credito;

- rischio operativo.

L'articolo 102 prevede per le imprese l'obbligo di calcolare il SCR almeno una volta all'anno e di darne comunicazione all'autorità di vigilanza. Un'impresa è considerata solvibile se dispone di fondi propri ammissibili tali da coprire l'ultimo requisito patrimoniale di solvibilità comunicato. Se il profilo di rischio corrente dell'impresa si discosta significativamente dalle ipotesi sottese al calcolo dell'ultimo SCR comunicato, l'impresa è obbligata a rieffettuarne il calcolo e a darne comunicazione all'autorità di vigilanza.

La direttiva individua due modalità di calcolo dell'SCR: la formula standard oppure un modello interno sviluppato dall'impresa stessa e approvato dall'autorità di vigilanza.

La **formula standard** non individua il requisito di capitale stimando l'intera distribuzione dei fondi propri bensì prevede di adottare un approccio modulare. I rischi di ciascun modulo vengono, peraltro, valutati facendo sempre riferimento al *worst case* al 99,5% di probabilità.

La formula standard prescrive che l'SCR sia dato dalla somma algebrica, non contemplando quindi la possibilità di alcuna diversificazione tra i rischi in esame, di tre componenti:

- il requisito patrimoniale di solvibilità di base (BSCR);
- il requisito patrimoniale di solvibilità riferito al rischio operativo;
- la capacità di assorbimento di perdite delle riserve tecniche associate ai prodotti rivalutabili e delle imposte differite (art.103).

L'articolo 104 delle norme di primo livello prevede che il requisito patrimoniale di solvibilità di base (*basic SCR*) sia dato, a sua volta, dall'aggregazione di sei macromoduli volti a valutare i rischi seguenti:

- rischio di sottoscrizione dell'assicurazione non vita;
- rischio di sottoscrizione dell'assicurazione vita;
- rischio di sottoscrizione dell'assicurazione malattia;
- rischio di mercato;
- rischio di inadempimento della controparte;
- rischio sui beni immateriali (quest'ultimo è stato aggiunto successivamente con il QIS 5, viene sommato ai precedenti cinque rischi e assume, generalmente, una rilevanza trascurabile).

Il SCR di base è dato dalla seguente formula:

$$basic\ SCR = \sqrt{\sum_i \sum_j Corr_{i,j} SCR_i SCR_j} + SCR_{intangibles} \cdot \quad (1.3.2)$$

Dove i pedici "i,j" individuano rischi di sottoscrizione delle assicurazioni vita, non vita, malattia, i rischi di mercato e quello di default.

Solvency II tramite l'aggregazione dei rischi ammette che questi possano in parte diversificarsi tra loro. Gli SCR sono calcolati sulla base di misure di rischio di tipo VaR e la direttiva fa ricorso ad un'approssimazione estrema per poterli aggregare; questi vengono trattati come degli scarti quadratici medi. I valori dei coefficienti di correlazione, necessari per l'aggregazione, sono forniti dall'autorità di vigilanza e non possono essere modificati dalle singole imprese.

L'approccio modulare previsto dalla formula standard presenta alcuni limiti. In primo luogo aggregare gli SCR dei vari moduli con la correlazione lineare risulta essere una semplificazione. Altra limitazione risiede nella rigidità della matrice di correlazione che è calibrata a livello di mercato e non di singola impresa.

La formula standard, tuttavia, possiede numerosi vantaggi. La struttura modulare, infatti, può essere aggiornata nel tempo andando a modificare o aggiungere i singoli moduli o sottomoduli (di cui si parlerà nel seguito) e quindi risulta essere una metodologia molto flessibile. Le compagnie di assicurazione, inoltre, possono creare modelli interni anche solo parziali, cioè volti a valutare solo specifici rischi e utilizzando per i rimanenti la formula standard. Altro lato positivo dell'approccio modulare risiede nella sua elevata comprensibilità; l'analisi degli SCR relativi ai vari moduli, infatti, permette di individuare in modo immediato quali siano i rischi principali a cui è esposta la specifica impresa.

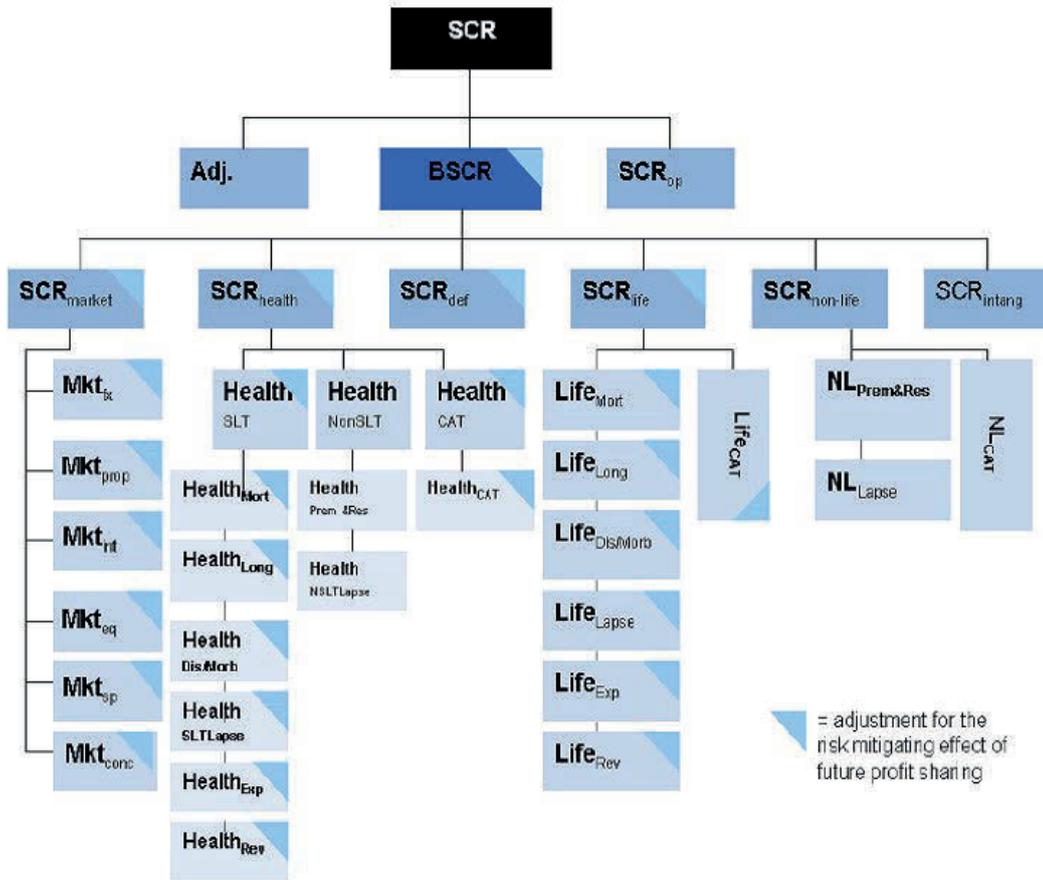
La formula standard prevede che il calcolo degli SCR relativi ad alcuni moduli segua, a sua volta, un approccio modulare. Nella determinazione del *basic* SCR infatti i moduli del rischio di mercato e dei rischi di sottoscrizione delle assicurazioni vita, non vita e malattia sono costituiti a loro volta da altri moduli espressamente previsti. L'aggregazione di tali sottomoduli segue ancora la logica, vista precedentemente, della correlazione lineare. Un'analisi più precisa di questi quattro macromoduli è fornita dall'articolo 105 delle norme di primo livello.

Il comma 2 impone che il modulo relativo al **rischio di sottoscrizione delle assicurazioni non vita** sia costituito dai sottomoduli attinenti al rischio di tariffazione-riservazione, al rischio di catastrofe e al rischio di riscatto; quest'ultimo sottomodulo è stato introdotto dal QIS 5 e assume, generalmente, un'importanza trascurabile. Il primo di questi è definito come il rischio di perdita o variazione sfavorevole del valore delle passività assicurative, derivate da oscillazioni riguardanti il momento di accadimento, la frequenza e la gravità degli eventi assicurati (**rischio tariffazione**) nonché il momento di accadimento e l'importo delle liquidazioni di sinistri (**rischio riservazione**). Il secondo sottomodulo, invece, è volto a valutare il rischio di perdita o di variazione sfavorevole del valore delle passività assicurative, derivante da un'incertezza significativa delle ipotesi in materia di fissazione dei prezzi e di costituzione delle riserve in rapporto ad eventi estremi o eccezionali (**rischio catastrofe**). Si deve puntualizzare che recentemente è stato introdotto un ulteriore sottomodulo per quantificare il rischio di riscatto (QIS5).

Nel proseguo dell'articolo 105, comma 3, sono individuati i rischi che concorrono a formare il SCR relativo al rischio di sottoscrizione delle assicurazioni vita. La norma individua esplicitamente i rischi di mortalità, longevità, invalidità-morbilità, di spesa, di revisione, di riscatto e il rischio di catastrofe. Il modulo del rischio di sottoscrizione delle assicurazioni malattia è costituito dall'aggregazione di tre sottomoduli che valutano i rischi derivanti dai contratti assimilabili a quelli vita e non vita, a loro volta composti da altri moduli, e il modulo relativo al rischio catastrofe.

Il comma 5, infine, definisce il rischio di mercato come il rischio derivante dal livello o dalla volatilità dei prezzi di mercato degli strumenti finanziari che hanno un impatto sul valore delle attività e passività dell'impresa. La norma inoltre individua espressamente i seguenti sottomoduli: rischio di tasso d'interesse, rischio azionario, rischio immobiliare, rischio di spread, rischio valutario ed infine le concentrazioni del rischio di mercato.

Fig.1.3.2 : I moduli previsti dalla formula standard (fonte: QIS5 *Technical Specifications, Bruxelles, 5 July 2010*)



La formula standard prevede due approcci differenti di misurazione dei rischi che possono essere usati per giungere alla determinazione degli SCR dei vari moduli. Queste tecniche sono individuate dalle norme di secondo livello che identificano le situazioni di utilizzo senza possibilità di deroghe da parte delle imprese.

L’approccio **factor-based** prevede di considerare una o più variabili legate al rischio oggetto di misurazione. Il requisito patrimoniale di solvibilità del sottomodulo considerato risulta essere determinato attraverso una funzione, individuata dall’autorità, delle variabili in esame, in cui vengono applicati specifici coefficienti. Questo approccio viene usato, per esempio, per i rischi operativi e per il sottomodulo del rischio tariffazione-riservazione delle assicurazioni non vita.

L’approccio **scenario-based**, di contro, consiste nel determinare il SCR in base alle perdite in cui incorrerebbe l’impresa al verificarsi di uno scenario calibrato con probabilità 99,5%. Questo approccio è usato per valutare, ad esempio, i rischi di mercato e prevede nel concreto di usare la tecnica Delta NAV (*net asset value*). In sintesi tale metodo prevede di valutare il valore delle attività e passività, oggetto di interesse, in due scenari distinti. Il primo scenario è dato dalla situazione corrente che risulta dal bilancio di esercizio, il secondo scenario, invece, prevede di ricalcolarne il valore in corrispondenza del *worst case* al 99,5% di probabilità (scenario stressato). La differenza tra il NAV in condizioni normali e quello in condizioni stressate dunque fornisce il patrimonio di solvibilità che deve possedere l’impresa per poter far fronte agli eventi avversi considerati con un livello di probabilità del 99,5%.

Di seguito si fornisce un'idea delle modalità di calcolo del SCR del sottomodulo del rischio tariffazione-riservazione per le assicurazioni non vita. Il quinto studio di impatto quantitativo ha previsto che il SCR relativo all'**underwriting risk** per le assicurazioni non vita sia costituito da tre sottomoduli:

- rischio di tariffazione-riservazione;
- rischio di catastrofe;
- rischio di riscatto.

L'aggregazione di questi tre sottomoduli è effettuata con i coefficienti di correlazione lineare forniti dall'autorità.

La formula standard prevede di calcolare il SCR del rischio di tariffazione-riservazione attraverso una funzione della volatilità totale di portafoglio, cioè lo scarto quadratico medio (σ), che approssima il VaR al livello di probabilità del 99,5% di una distribuzione lognormale. La formula risulta essere "bloccata" e le imprese hanno il compito di individuare il solo parametro di volatilità separatamente per il rischio di tariffazione e riservazione. Le imprese possono calcolare lo scarto quadratico medio relativo al *premium risk* sia adottando completamente le stime effettuate dall'autorità (c.d. *market wide approach*) oppure stimandolo in base a parametri caratteristici dell'impresa sulla base di metodologie prefissate (c.d. *undertaking specific approach*). Questa procedura deve essere svolta separatamente con riferimento ai singoli rami individuati dai QIS (c.d. *lines of business, lob*) che sono diversi da quelli previsti nelle norme civilistiche. Anche la stima degli scarti quadratici medi delle diverse lob per il *reserve risk* può seguire l'approccio *market wide* oppure *undertaking specific*. Il passo successivo prevede l'aggregazione per singola lob dei σ stimati per il rischio tariffazione e riservazione con un coefficiente di correlazione lineare fissato dall'autorità pari a 0,5. Infine le *standard deviation* dei vari rami vengono aggregate tra loro considerando i rispettivi volumi (premi e riserve). Inserendo il valore di σ così stimato nella formula fornita dalla vigilanza si ottiene, infine, l'importo del SCR relativo al sottomodulo del rischio di tariffazione e riservazione.

Il primo pilastro di *Solvency II* prevede di individuare, oltre al SCR, un importo denominato **minimo margine di solvibilità (MCR)** al di sotto del quale le risorse patrimoniali dell'impresa non possono scendere. Il MCR rappresenta, infatti, l'ammontare di fondi propri minimi al di sotto del quale l'impresa non può operare. L'articolo 129 delle norme di primo livello sancisce che una violazione del MCR esporrebbe i contraenti e i beneficiari ad un livello di rischio inaccettabile qualora alle imprese fosse consentito di continuare la loro attività. Il valore del MCR corrisponde, da un punto di vista prettamente teorico, al VaR dei fondi propri di base ad un livello di probabilità dell'85% e su un orizzonte temporale annuo. È previsto, tuttavia, dalla normativa un calcolo semplice e chiaro al fine di garantirne una rapida revisione; inoltre alle imprese è fatto obbligo di calcolare il requisito patrimoniale minimo ogni tre mesi. Per questi motivi è previsto che l'MCR sia calcolato, con un approccio *factor-based*, come funzione lineare delle riserve tecniche, premi contabilizzati, capitale a rischio, imposte differite e costi amministrativi dell'impresa. La formula, tuttavia, è calibrata dalle norme di secondo livello con l'obiettivo di ottenere un valore che sia il più possibile approssimabile al VaR all'85% di probabilità su un orizzonte annuo. Inoltre, per garantire che il valore assunto dal MCR sia inferiore a quello dell'SCR, il comma 3 dell'articolo 129 impone che il requisito patrimoniale minimo non possa scendere al di sotto del 25% né superare il 45% del SCR.

CAPITOLO 2

La riserva sinistri: analisi deterministica e stocastica

2.1 La riserva sinistri

La riserva sinistri è la principale passività delle imprese di assicurazioni danni. Questa posta di bilancio costituisce l'accantonamento che deve costituire l'assicuratore a fine esercizio in previsione dei costi che dovrà sostenere negli anni successivi a fronte dei sinistri avvenuti nell'esercizio, o in quelli precedenti, e non ancora liquidati. La vigente normativa italiana obbliga le imprese di assicurazione a seguire precise norme nella valutazione della riserva sinistri.

In primo luogo i sinistri devono essere classificati in base alla data di avvenimento e non quella di denuncia; ciò comporta l'insorgere del problema valutativo dei c.d. sinistri tardivi. La riserva sinistri inoltre deve essere valutata a costo ultimo. Le imprese devono quindi considerare tutti i futuri oneri prevedibili, tra cui le spese liquidative che sono esplicitamente menzionate dalle norme. Infine è fatto preciso divieto di effettuare attualizzazioni degli importi posti a riserva.

La formazione della riserva sinistri all'interno delle imprese segue un'evoluzione multifase. Il processo inizia con la valutazione compiuta dai periti liquidatori che stimano il danno per ogni sinistro, dando luogo alla c.d. riserva di inventario (*case reserve*). È prevista, tuttavia, soprattutto per i rami *long tail*, cioè caratterizzati da processi liquidativi lunghi che comportano un'eccessiva incertezza della stima, la necessità di utilizzare metodi statistico-attuariali per la valutazione del costo ultimo. I periti possono effettuare la stima dei sinistri sia a costo ultimo, considerando quindi l'inflazione, oppure a costo attualizzato. Il metodo di valutazione adottato, in ogni caso, deve essere costante negli anni, così da non creare distorsioni nei dati che porterebbero a criticità nell'applicazione di alcuni metodi statistico-attuariali utilizzati per verificare la sufficienza o meno della riserva. Il secondo passo che concorre alla formazione della riserva sinistri è rappresentato dalla stima, con metodologie statistiche, della riserva per i sinistri IBNR i quali per loro natura non rientrano nella riserva calcolata dai liquidatori. Gli ultimi due passaggi per giungere alla riserva iscritta a bilancio (c.d. *booked reserve*) sono costituiti dall'attribuzione delle spese di liquidazione non considerate in precedenza e dall'aggiustamento discrezionale effettuato dal *board* della compagnia. Le spese di liquidazione, più precisamente, sono distinte tra spese dirette, come ad esempio la remunerazione dei periti per singolo sinistro liquidato, attribuibili ai singoli sinistri, e spese indirette, come i costi fissi. La prima tipologia di spese risulta, generalmente, essere già presente nel metodo attuariale utilizzato, la seconda tipologia, invece, è sommata all'ammontare

complessivo finale della riserva. L'ultima correzione a cui è sottoposto l'importo dei sinistri da liquidare è rappresentata dalla valutazione effettuata dal management dell'impresa (c.d. *management adjustment*). Questo aggiustamento è posto in essere nel caso in cui si siano verificati degli eventi che si ritiene abbiano un impatto sul valore della riserva sinistri e non considerati invece dai metodi valutativi precedentemente adottati.

L'adeguatezza della riserva sinistri può essere valutata dall'impresa di assicurazione al termine di ogni esercizio. Considerando un generico anno t , la sufficienza della riserva è calcolata come segue:

$$suff_t = V_{t-1} - X_t^{old} - V_t^{old} \quad (2.1.1)$$

dove

- V_{t-1} rappresenta la riserva iscritta a bilancio alla fine dell'esercizio precedente (t-1);
- X_t^{old} individua l'ammontare pagato nell'anno t per sinistri avvenuti negli anni precedenti;
- V_t^{old} è la riserva costituita alla fine dell'esercizio corrente (t) per i soli sinistri che si sono verificati precedentemente all'anno t .

Si parla di sufficienza della riserva sinistri se il valore risultante dall'equazione precedente è positivo, in caso contrario di insufficienza. Scomponendo la riserva iniziale e quella finale nelle loro componenti base si ottiene:

$$suff_t = (V_{t-1}^{SS} + V_{t-1}^{PA} + V_{t-1}^R) - X_t^{old} - (V_t^{old,R} + V_t^{old,RI}) \quad (2.1.2)$$

dove

- V_{t-1}^{SS} rappresenta il valore dei sinistri riservati al termine dell'anno precedente (t-1) e che non hanno avuto seguito nel corso dell'anno corrente (t) (c.d. sinistri senza seguito);
- V_{t-1}^{PA} rappresenta l'ammontare messo a riserva per i sinistri avvenuti in anni precedenti al t-esimo anno e liquidati nell'anno corrente (t);
- V_{t-1}^R rappresenta l'ammontare dei sinistri già riservati in anni precedenti a quello corrente (t) e non ancora liquidati nell'anno t ;
- $V_t^{old,R}$ rappresenta la stima del costo sinistri effettuata nell'anno corrente (t) per i sinistri verificatisi negli anni precedenti;
- $V_t^{old,RI}$ rappresenta la stima del costo dei sinistri riaperti nell'anno corrente (t).

La sufficienza della riserva sinistri può essere interpretata come somma di due componenti: la riserva caduta e la variazione della riserva residua:

$$suff_t = RC_t + RR_t \quad (2.1.3)$$

Il primo termine è dato dalla riserva caduta che è la somma di due elementi. Il primo di questi è il saldo tra quanto riservato e quanto pagato effettivamente, mentre il secondo è il saldo tra i sinistri senza seguito e quelli riaperti:

$$RC_t = (V_{t-1}^{PA} - X_t^{old}) + (V_{t-1}^{SS} - V_t^{old,RI}) \quad (2.1.4)$$

La variazione della riserva residua risulta essere, invece, la differenza tra riserva sinistri calcolata alla fine dell'anno precedente (t-1) per i sinistri non liquidati nell'anno t-esimo e la riserva ricalcolata alla fine dell'anno corrente (t) per gli stessi sinistri:

$$RR_t = V_{t-1}^R - V_t^{old,R} \quad (2.1.5)$$

Prima di presentare alcuni metodi statistico-attuariali per la stima della riserva sinistri è opportuno mostrare un insieme di valutazioni e diagnostiche preliminari che deve compiere l'impresa per individuare in modo appropriato e coerente il metodo statistico.

Le compagnie di assicurazione raccolgono negli anni i dati relativi al processo liquidativo dei sinistri. Tali dati sono inseriti in apposite tabelle, chiamate **triangoli di run off**, dove sono classificati in funzione dell'anno di generazione, cioè l'anno accadimento del sinistro, sulle righe e dell'anno di sviluppo (c.d. antidurata) sulle colonne. I triangoli di *run off* sono il punto di partenza per l'applicazione dei metodi statistico-attuariali necessari per stimare la riserva sinistri. La scelta del metodo per la valutazione della riserva si basa sull'analisi preliminare dei possibili triangoli che può costruire l'impresa, dai quali si ricavano importanti informazioni. Nel seguito si fa riferimento a triangoli di *run off* con dimensione pari a 12 righe e 12 colonne, come previsto dalla normativa ad esempio per il ramo responsabilità civile autoveicoli terrestri, oppure con 13 colonne se è presente la c.d. coda. Sulle righe, individuate dal pedice "i", i dati vengono classificati in funzione dell'anno di calendario in cui è avvenuto il sinistro, mentre sulle colonne, rappresentate dal pedice "j", la classificazione segue gli anni di sviluppo. L'adozione dei triangoli di *run off* permette di ragionare in una triplice ottica: per anno di accadimento dei sinistri sulle righe, per anno di sviluppo sulle colonne e, infine, per epoca di valutazione sulle diagonali del triangolo. L'obiettivo dei metodi statistici adottati dall'impresa è quello di stimare il triangolo inferiore, cioè le celle che si riferiscono agli esercizi futuri.

Fig.2.1.1: Schema di un generico triangolo di *run off*

Anno di generazione(i)	Anno di sviluppo (j)												
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12+
N-11	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Brown	Red
N-10	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Brown		
N-9	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Brown			
N-8	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Brown				
N-7	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Brown						
N-6	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Brown							
N-5	Blue	Blue	Blue	Blue	Brown								
N-4	Blue	Blue	Blue	Brown									
N-3	Blue	Blue	Brown										
N-2	Blue	Brown											
N-1	Brown												
N													

EPOCA DI VALUTAZIONE "N"

Si ricavano informazioni fondamentali dai triangoli di *run off* relativi all'importo e al numero dei sinistri pagati. Il triangolo dell'**importo dei sinistri pagati** contiene in una generica cella (i,j) il

valore dei sinistri accaduti nell'anno di calendario i -esimo e pagati dopo j anni. Il triangolo così costruito contiene gli importi incrementali cioè relativi all'anno. Le celle contengono anche gli importi dei sinistri liquidati solo parzialmente. I valori iscritti nel triangolo sono tutti valori osservati con l'unica eccezione dell'eventuale valore inserito nella cella ($i = N-11$, $j = 12+$) che rappresenta la coda del triangolo. In questa cella è contenuto infatti il valore stimato che l'impresa deve ancora liquidare per i sinistri avvenuti nell'anno $i = N-11$ che dopo 12 anni non sono stati ancora liquidati.

Con riferimento al triangolo di *run off* contenente il **numero dei sinistri liquidati** valgono considerazioni analoghe a quelle fatte precedentemente. Anche in questo caso i valori iscritti nelle celle sono valori incrementali ed osservati, con l'unica eccezione per il valore contenuto nella cella relativa all'ultima antidurata della prima generazione, il quale risulta essere un valore stimato. Il numero dei sinistri pagati nei vari anni considera solo i sinistri liquidati integralmente; ciò può creare distorsioni nella costruzione del triangolo del costo medio del pagato nel caso in cui la politica di liquidazione parziale dei sinistri adottata dall'impresa sia mutata nel tempo.

Da questi triangoli è possibile ricavare quello relativo al **costo medio del pagato**. Tali valori sono dati dal rapporto tra l'importo pagato e il numero dei sinistri pagati nelle medesime celle. L'andamento di queste grandezze dipende dalla composizione del portafoglio e soprattutto dal ramo considerato. In modo analogo rispetto ai triangoli dei sinistri pagati, le imprese di assicurazione costruiscono quelli relativi agli importi e numero dei sinistri riservati. Il triangolo di *run off* contenente gli **importi dei sinistri riservati** è costituito dai valori stimati dall'impresa nei vari esercizi per i sinistri ancora non liquidati. Il valore estremo del triangolo è dato da quello contenuto nella cella ($i = N-11$, $j = 11$) il quale risulta essere il valore della coda del triangolo degli importi dei sinistri pagati.

Il triangolo del **numero dei sinistri riservati** contiene, a differenza del precedente, valori osservati. Tali valori sono dati, considerando una generica cella (i,j), dal numero dei sinistri riservati a inizio anno, al netto dei pagati e dei senza seguito nell'anno, a cui vanno infine aggiunti i sinistri riaperti nell'anno. Unica cella del triangolo che contiene un valore stimato è quella relativa all'antidurata 11 della prima generazione; tale grandezza inoltre costituisce la coda del triangolo del numero dei sinistri pagati.

Considerando queste informazioni è possibile costruire il triangolo del **costo medio del riservato**, dato dal rapporto tra l'importo riservato e il numero dei sinistri riservati nelle medesime celle. L'andamento dei dati contenuti nel triangolo, in tale caso, dipende dalla politica liquidativa dell'impresa, dal portafoglio considerato e dal ramo assicurativo a cui si riferisce.

Partendo dai triangoli di *run off* relativi agli importi pagati e riservati dei sinistri, nonché quelli contenente il numero dei sinistri pagati e riservati è possibile effettuare importanti valutazioni sulla politica liquidativa della compagnia di assicurazione. Si può determinare, infatti, la velocità di liquidazione per numeri e importi dei sinistri e studiarne le eventuali variazioni negli anni di generazione. Tale diagnostica risulta essere fondamentale nella scelta del metodo statistico da usare per valutare la riserva sinistri. La costruzione del triangolo della **velocità di liquidazione per importi** prevede di determinare il valore per ogni singola cella (i,j) come rapporto tra due termini: il numeratore è dato dall'importo pagato cumulato fino all'antidurata j , mentre il denominatore è costituito dalla somma tra l'importo pagato cumulato fino all'antidurata j e il riservato nella stessa antidurata:

$$vel_{i,j}^{imp} = \frac{\sum_{h=0}^j P_{i,h}}{\sum_{h=0}^j P_{i,h} + R_{i,j}} \quad (2.1.6)$$

dove

- $P_{i,h}$ individua l'importo dei sinistri pagati nella cella (i,h);
- $R_{i,j}$ individua l'importo dei sinistri riservato nella cella (i,j).

La **velocità di liquidazione per numero di sinistri** è calcolata in modo analogo, considerando, però, il numero dei sinistri pagati cumulati e riservati:

$$vel_{i,j}^{num} = \frac{\sum_{h=0}^j n_{i,h}}{\sum_{h=0}^j n_{i,h} + r_{i,j}} \quad (2.1.7)$$

dove

- $n_{i,h}$ rappresenta il numero dei sinistri liquidati nella cella (i,h);
- $r_{i,j}$ rappresenta il numero dei sinistri riservati nella cella (i,j).

L'obiettivo principale di tale analisi è quello di valutare la stabilità della velocità di liquidazione cioè la politica liquidativa adottata dall'impresa al variare degli anni di generazione a parità di antidurata. La velocità di liquidazione, sia per numeri che per importi, dipende fortemente dal ramo assicurativo e dal portafoglio considerato.

Altri triangoli di *run off* su cui effettuare importanti diagnostiche risultano essere quelli relativi al numero dei sinistri senza seguito e riaperti. I **sinistri senza seguito** presentano generalmente maggiore incidenza nelle prime antidurate. I **sinistri riaperti** non compaiono nel primo anno di sviluppo ($j = 0$) in quanto un sinistro chiuso e riaperto nel medesimo anno non è conteggiato come riaperto. Questi valori hanno generalmente un comportamento decrescente nelle antidurate. Il saldo tra sinistri senza seguito e riaperti risulta essere, quindi, positivo nei primi anni di sviluppo per poi divenire negativo nella parte estrema del triangolo. Anche in questo caso l'obiettivo è quello di valutare la stabilità di tali dati; è auspicabile che la politica di chiusura dei sinistri adottata dall'impresa sia costante nel tempo per non incorrere in incoerenze nella serie storica dei dati.

Di seguito sono presentati alcuni metodi, qualificati come deterministici, che possono essere utilizzati, in linea con le attuali norme di vigilanza (*Solvency I*), per valutare la riserva sinistri. Successivamente, invece, sono esposti dei metodi di stima stocastici. Questi ultimi sono il punto di partenza per valutare la riserva sinistri e il requisito patrimoniale di solvibilità in base a quanto previsto da *Solvency II*.

2.2 Alcuni metodi deterministici per la valutazione della riserva sinistri

In letteratura esistono molteplici metodi deterministici per stimare la riserva sinistri. Questi procedimenti statistico-attuariali si differenziano tra loro poiché si basano su ipotesi in parte diverse e peculiari del metodo prescelto. I differenti approcci inoltre cercano di cogliere dinamiche diverse nei dati per giungere alla stima della riserva. A livello pratico, tuttavia, la compagnia di assicurazione valuta la riserva sinistri con più metodi statistici al fine di effettuare opportune comparazioni; inoltre il valore ottenuto per la riserva (più precisamente *l'ultimate loss ratio*) viene confrontato con l'ipotesi elaborata in sede di tariffazione. I modelli prescelti, inoltre, difficilmente sono usati in modo "bloccato" in quanto l'impresa effettua opportune modifiche con lo scopo di renderli più aderenti alle proprie caratteristiche.

Questi metodi sono definiti deterministici in quanto permettono di giungere alla stima del valore puntuale della riserva (valore atteso), non permettendo di poter misurare la volatilità di tale ammontare.

Di seguito si analizzano i seguenti metodi: *Chain-Ladder Paid*, *Fisher-Lange* e *Frequency-severity*.

CHAIN LADDER PAID

Questo modello appartiene alla categoria dei c.d. *loss development methods*. La meccanica del *Chain Ladder* può essere applicata a differenti tipologie di triangoli di *run off*.

Il metodo *Paid* prevede di costruire dal triangolo degli importi incrementali dei sinistri pagati quello dei valori cumulati; questo costituisce il punto di partenza dell'intero procedimento. Partendo dal triangolo di *run off* degli importi incrementali dei sinistri pagati ($P_{i,j}$), si possono ricavare i valori cumulati con la seguente relazione:

$$C_{i,j} = \sum_{h=0}^j P_{i,h} \quad (2.2.1)$$

dove il pedice $i = 0,1,\dots,t$ indica le righe (anni di generazione) del triangolo, mentre il pedice $j = 0,1,\dots,t$ ($t+1$ se è presente la coda) individua le colonne (antidurate o anni di sviluppo).

Fig.2.2.1: Triangolo di *run off* degli importi cumulati dei sinistri pagati

		Anno di sviluppo (j)												
Anno di generazione(i)		0	1	2	.	.	J	t	t+1	
0														
1														
2														
.														
.														
I							$C_{i,j}$							
.														
.														
.														
.														
t														

L'obiettivo del metodo risulta essere la stima delle celle del triangolo inferiore degli importi cumulati per i sinistri pagati, cioè il valore cumulato dell'importo sinistri relativo agli esercizi futuri.

Il modello ipotizza che la progressione dei pagamenti cumulati si mantenga sostanzialmente costante al variare delle generazioni; dunque il rapporto $\lambda_{i,j} = C_{i,j+1} / C_{i,j}$, denominato fattore di sviluppo o *link ratio* individuale, non dipende dalla generazione "i" considerata ma dal solo anno di sviluppo "j". Il presupposto chiave sottostante al metodo prevede, quindi, che i dati storici siano indicativi della dinamica futura con cui verranno liquidati i sinistri. Quest'unica assunzione su cui si fonda il procedimento *Chain Ladder* vale solo nel caso in cui siano rispettate determinate condizioni. In primo luogo l'impresa non deve aver mutato significativamente portafoglio assicurativo negli anni. In questa circostanza infatti, la conseguenza sarebbe una "frattura" dei dati contenuti nel triangolo che porterebbe ad un'invalidazione dell'ipotesi su cui si basa il metodo. Anche cambiamenti nella politica riassicurativa dell'impresa comportano effetti analoghi a quelli del cambiamento di portafoglio. Altra condizione che deve essere soddisfatta riguarda la costanza della politica liquidativa nel corso dei vari anni. Per poter applicare in modo coerente il metodo, inoltre, devono essere verificate altre due condizioni che si riferiscono alla politica normativa e all'inflazione. Entrambe non risultano essere delle variabili controllabili dall'impresa e, anche in questo caso, devono restare il più possibili stabili nel tempo. Variazioni nella normativa, come ad esempio le revisioni delle tabelle ministeriali per i danni a persone relative al ramo r.c. autoveicoli terrestri, possono comportare modifiche significative negli importi che devono essere liquidati oppure possono portare a modifiche nella velocità di liquidazione. Anche variazioni notevoli nell'inflazione portano ad una distorsione delle stime prodotte dal metodo. Quest'ultimo inconveniente può essere gestito esprimendo i valori degli importi incrementali dei sinistri pagati in moneta corrente. Successivamente è possibile, quindi, applicare il *Chain Ladder* per stimare la celle vuote del triangolo cumulato e infine la riserva. Il valore della riserva così ottenuto, però, non considera l'inflazione; per ottenere una stima conforme alla normativa vigente occorre effettuarne una stima. Tale passaggio non è di facile soluzione: è necessario, infatti, poter prevedere l'inflazione sia economica che quella propria dei sinistri per un numero di anni molto elevato (più di 10 anni per le ultime generazioni). Il metodo risulta essere, in generale, particolarmente adeguato per grandi portafogli assicurativi di rami caratterizzati da un'elevata frequenza dei sinistri e nel contempo contenuta intensità, in modo tale da garantire coerenza del metodo anche in presenza di eventuali sinistri "anomali" (c.d. sinistri *large*).

Dal punto di vista analitico il *Chain Ladder Paid* prevede di calcolare i fattori di sviluppo λ_j relativi ad ogni antidurata nel seguente modo:

$$\lambda_j = \frac{\sum_{i=0}^{t-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{t-j-1} C_{i,j}} \quad \text{con } j=0,1,\dots,t-1 . \quad (2.2.2)$$

Il fattore di sviluppo così calcolato non è altro che la media dei $\lambda_{i,j}$ ponderata per i rispettivi $C_{i,j}$. Infatti scrivendo $C_{i,j+1} = \lambda_{i,j} C_{i,j}$ si ottiene:

$$\lambda_j = \frac{\sum_{i=0}^{t-j-1} \lambda_{i,j} C_{i,j}}{\sum_{i=0}^{t-j-1} C_{i,j}}. \quad (2.2.3)$$

In presenza di un triangolo con coda, il valore del *link ratio* dell'antidurata t risulta essere dato dal rapporto tra l'ammontare cumulato dei pagamenti iscritto nella cella $(0,t+1=12+)$ e l'ammontare cumulato dei pagamenti nella cella precedente $(0,t=11)$. La particolarità in questo caso consiste nel fatto che $C_{0,t+1}$ contiene il valore stimato della riserva, ad esempio la riserva di inventario, che compare nel triangolo degli importi riservati nella prima generazione per l'antidurata t ($R_{0,t}$):

$$C_{0,t+1} = C_{0,t} + R_{0,t}. \quad (2.2.4)$$

Per il *link ratio* dell'antidurata t -esima si ottiene quindi:

$$\lambda_t = \frac{C_{0,t+1}}{C_{0,t}} = 1 + \frac{R_{0,t}}{C_{0,t}}. \quad (2.2.5)$$

Il metodo, in seguito, prevede di stimare i pagamenti futuri cumulati come segue:

$$\hat{C}_{h,k} = C_{h,t-h} \prod_{j=t-h}^k \lambda_j \quad \text{con } h=0,\dots,t; k=t-h+1,\dots,t. \quad (2.2.6)$$

La formula prevede di moltiplicare il costo dei pagamenti cumulati iscritto nella diagonale, che rappresenta l'ultimo dato osservato disponibile, per il prodotto dei fattori di sviluppo relativi alle antidurate oggetto di stima; i pedici "h" e "k" sono infatti riferiti alle sole celle inferiori del triangolo. La produttoria dei *link ratio* al variare dell'anno di sviluppo prende il nome di fattore di sviluppo cumulato (*cumulative development factor*, CDF). Il costo ultimo della generazione i -esima può, analogamente, essere scritto come:

$$\hat{C}_{i,t+1} = C_{i,t-i} CDF_{t-i} \quad \text{con } i=0,\dots,t. \quad (2.2.7)$$

I fattori di sviluppo cumulati sono introdotti perché permettono di ricavare informazioni relative alla velocità di liquidazione. Il reciproco di CDF_j , infatti, può essere interpretato come un'aspettativa della futura velocità di liquidazione che l'impresa si attende di osservare nell'antidurata "j". Questo valore è ricavato da dati storici e dunque nulla garantisce che rimanga invariato; tuttavia permette di formulare una previsione sugli importi percentuali che verranno liquidati negli esercizi futuri. Un valore di CDF_2 pari all'80% significa, ad esempio, che in media l'80% dell'importo sinistri è liquidato entro 3 anni.

Dopo aver calcolato i costi ultimi per tutte le generazioni, è possibile ottenere il valore della riserva sinistri:

$$\hat{R} = \sum_{i=0}^t (\hat{C}_{i,t+1} - C_{i,t-i}). \quad (2.2.8)$$

La riserva per ogni generazione è calcolata come differenza tra il costo ultimo e il valore dell'importo cumulato dei sinistri presente in diagonale.

La stima del valore del costo ultimo dei sinistri per ogni singola generazione include automaticamente il valore dei sinistri tardivi. Il metodo, infatti, proietta la dinamica liquidativa passata negli esercizi futuri e quindi, implicitamente, anche i sinistri IBNR in funzione della dinamica osservata negli anni precedenti. Anche in questo caso, quindi, è richiesta un'adeguata stabilità nel tempo dei dati relativi ai sinistri tardivi, circostanza, tuttavia, che non può essere controllata dall'impresa stessa.

Il metodo *Chain Ladder Paid* appena presentato viene definito come "bloccato" e nella pratica non è adottato così come proposto. Le imprese introducono nel modello opportuni aggiustamenti che permettono di considerare in modo più coerente le dinamiche interne alla compagnia e quindi ottenere una stima della riserva più adeguata. Le modifiche che vengono apportate al metodo bloccato si concentrano sui fattori di sviluppo, cioè si cerca di individuare degli stimatori diversi dai λ_j .

L'impresa, in primo luogo, costruisce il triangolo dei *link ratio* individuali $\lambda_{i,j}$.

Fig.2.2.2: Triangolo di *run off* dei fattori di sviluppo individuali

		Anno di sviluppo (j)												
Anno di generazione(i)		0	1	2	.	.	j	t	t+1
0														
1														
2														
.														
.														
i							$\lambda_{i,j}$							
.														
.														
.														
.														
t														

L'analisi delle singole generazioni e antidurate del triangolo permette l'individuazione di valori inconsueti nei singoli fattori di sviluppo; in questa eventualità si deve risalire alla causa del valore anomalo, come ad esempio un sinistro *large*. In tale situazione si può operare depurando i dati dai valori estremi, i sinistri *large* appunto, ricalcolare il triangolo dei fattori di sviluppo individuali e procedere nello sviluppo del metodo. Parallelamente si stimano i sinistri *large* che verranno successivamente incorporati nella stima della riserva.

L'impresa seleziona differenti stimatori che applica al triangolo di *run off* dei *link ratio* individuali, ottenendo differenti stime dei fattori di sviluppo per ogni antidurata. Esempi di possibili stimatori possono essere la media aritmetica, la media aritmetica dei soli valori più recenti, la media aritmetica con l'esclusione del valore massimo e minimo e la media geometrica. Per incrementare

la profondità storica dei dati su cui effettuare le stime delle ultime antidurate è possibile considerare anche i dati storici fuori dal triangolo. La discrezionalità dell'attuario gioca un ruolo fondamentale nella scelta dei valori dei *link ratio* relativi alle antidurate ($\hat{\lambda}_j$). Tale decisione è basata sull'analisi dei dati storici relativi ai sinistri, sull'analisi del triangolo dei fattori di sviluppo individuali ed infine sull'analisi dei valori assunti dagli stimatori dei *link ratio*. Quando la profondità storica dei dati posseduti dall'impresa risulta essere limitata, o per qualche ragione non più affidabile, è necessario utilizzare ulteriori informazioni ricavabili da fonti esterne. Una di queste può consistere nei dati relativi a rami simili rispetto a quello oggetto di studio. Altra possibilità è quella di utilizzare i dati di mercato del ramo a cui si riferisce il portafoglio, ammesso che l'impresa possa essere paragonata al mercato.

Dopo aver individuato le stime dei *link ratio* ($\hat{\lambda}_j$), il passo successivo prevede di valutare i fattori di sviluppo relativi alle ultime antidurate. Questi, per costruzione, derivano da stime poco affidabili perché basate su scarsi dati e hanno un'incidenza non trascurabile sul calcolo della riserva. Un primo approccio consiste nell'usare, quando disponibili, come nel contesto anglosassone a differenza di quello italiano, le stime a livello di mercato dei *link ratio* estremi. Nel caso in cui, invece, il portafoglio non rispecchi l'andamento del mercato, una seconda alternativa è quella che prevede di usare un metodo interpolante per ricavare i *link ratio*. In quest'ultima situazione, più precisamente, si adottano più curve per interpolare i valori $\hat{\lambda}_j$, ad esempio una curva per le prime antidurate, ad esclusione dell'antidurata zero, e una seconda per quelle estreme. Così facendo si rideterminano tutti i fattori di sviluppo ($\hat{\lambda}_j$). La scelta delle curve dipende dal grado di adattamento ai valori $\hat{\lambda}_j$. Inoltre si deve cercare di ottenere un andamento sufficientemente livellato tendente all'unità per i *link ratio* delle antidurate estreme.

Dopo quest'ultimo passaggio è, infine, possibile adottare i fattori di sviluppo così ottenuti ($\hat{\lambda}_j$) per calcolare la riserva sinistri con le formule del metodo *Chain Ladder Paid* mostrate precedentemente.

Una variante del metodo appena esposto è quella che prende il nome di *Chain Ladder Incurred*. In questo caso il punto di partenza del modello è il triangolo di *run off* della grandezza "incurred", data in ogni cella dalla somma dell'importo pagato cumulato e di quello stimato. Il modello porta a stimare, per ogni generazione, il costo ultimo nell'ultima antidurata, da cui è possibile sottrarre l'importo cumulato pagato nell'ultimo anno di valutazione per ottenere la stima della riserva.

FREQUENCY-SEVERITY

In questa categoria rientrano i metodi che giungono alla valutazione della riserva sinistri passando attraverso la stima separata della *frequency*, cioè del numero di sinistri per unità di tempo considerata, e della *severity*, cioè il costo medio dei sinistri. In questa sede viene analizzato solo il metodo classico *frequency-severity*, il quale si basa sulla meccanica dei fattori di sviluppo (*Chain Ladder*); tuttavia, si deve tener presente che in letteratura esistono molteplici modelli che rientrano in tale famiglia.

Il modello proposto perviene alla valutazione della riserva sinistri stimando separatamente due grandezze: il numero cumulato dei sinistri che si andranno a liquidare e il costo medio cumulato dei sinistri che saranno pagati negli esercizi futuri. Il metodo stima queste due componenti grazie ai

fattori di sviluppo dei rispettivi triangoli di *run off*. L'ipotesi alla base di tale procedimento è quindi la stessa, *mutatis mutandis*, del *Chain Ladder*. Affinché il procedimento possa essere applicato nel modo più coerente possibile devono essere rispettate le condizioni su cui poggia la predetta ipotesi.

La stima del numero dei sinistri (*frequency*) prevede di costruire il triangolo del numero cumulato dei sinistri pagati. È possibile ottenere questi dati grazie alla seguente relazione:

$$n_{i,j}^c = \sum_{j=0}^{t+1} n_{i,j} \quad (2.2.9)$$

dove $n_{i,j}$ è il numero dei sinistri liquidati per la generazione "i" nell'antidurata "j".

Fig.2.2.3: Triangolo di *run off* del numero cumulato dei sinistri pagati

Anno di generazione(i)	Anno di sviluppo (j)												
	0	1	2	.	.	j	t	t+1	
0													
1													
2													
.													
.													
i						$n_{i,j}^c$							
.													
.													
.													
.													
t													

Questa metodologia prevede di calcolare i fattori di sviluppo relativi ad ogni antidurata. Le formule sono analoghe a quelle proposte con il *Chain Ladder*:

$$\lambda_j^{n^c} = \frac{\sum_{i=0}^{t-j-1} n_{i,j+1}^c}{\sum_{i=0}^{t-j-1} n_{i,j}^c} \quad \text{con } j=0,1,\dots,t-1. \quad (2.2.10)$$

Nel caso in cui si stia lavorando in un triangolo con coda, il *link ratio* per l'antidurata t viene calcolato nel modo seguente:

$$\lambda_t^{n^c} = \frac{n_{0,t}^c + r_{0,t}}{n_{0,t}^c} = 1 + \frac{r_{0,t}}{n_{0,t}^c} \quad (2.2.11)$$

dove $r_{0,t}$ rappresenta la stima del numero dei sinistri che restano ancora da liquidare per la prima generazione del triangolo. Nella prassi, generalmente, si dà piena credibilità alla stima effettuata dall'impresa sia per il numero sinistri che per il costo medio della coda del triangolo.

È possibile, a questo punto, calcolare il numero cumulato dei sinistri stimato per gli esercizi futuri:

$$\hat{n}_{h,k}^c = n_{h,t-h}^c \prod_{j=t-h}^k \lambda_j^c \quad \text{con } h=0,\dots,t; k=t-h+1,\dots,t. \quad (2.2.12)$$

La seconda parte del metodo prevede di stimare la componente delle *severity* costruendo il triangolo di *run off* dei costi medi cumulati per i sinistri pagati.

I costi medi utilizzati dal metodo possono essere considerati come dei costi medi cumulati. Con riferimento ad ogni singola cella (i,j), sono costruiti, infatti, come rapporto tra l'importo cumulato dei sinistri liquidati nella cella e il numero cumulato dei sinistri liquidati nella medesima cella:

$$CM_{i,j}^c = \frac{C_{i,j}}{n_{i,j}^c}. \quad (2.2.13)$$

Fig.2.2.4: Triangolo di *run off* dei costi medi cumulati dei sinistri pagati

		Anno di sviluppo (j)												
Anno di generazione(i)		0	1	2	.	.	j	t	t+1	
0														
1														
2														
.														
.														
i							$CM_{i,j}^c$							
.														
.														
.														
.														
t														

Si procede, in modo analogo a quanto visto poco sopra, al calcolo dei *link ratio* per le varie antidurate:

$$\lambda_j^{CM^c} = \frac{\sum_{i=0}^{t-j-1} CM_{i,j+1}^c}{\sum_{i=0}^{t-j-1} CM_{i,j}^c} \quad \text{con } j=0,1,\dots,t-1. \quad (2.2.14)$$

Nel caso in cui sia presente la coda del triangolo, il fattore di sviluppo relativo all'antidurata t è calcolato come rapporto tra il costo medio cumulato della cella (0,t+1) e il costo medio cumulato della cella (0,t). Il numeratore risulta essere:

$$CM_{0,t+1}^c = \frac{C_{0,t} + R_{0,t}}{n_{0,t}^c + r_{0,t}} \quad (2.2.15)$$

mentre il denominatore:

$$CM_{0,t}^c = \frac{C_{0,t}}{n_{0,t}^c} \quad (2.2.16)$$

dove $R_{0,t}$ e $r_{0,t}$ individuano rispettivamente l'importo riservato nell'ultima antidurata e la stima del numero dei sinistri che restano ancora da liquidare per la prima generazione del triangolo. Il *link ratio* per l'antidurata t-esima è quindi pari a:

$$\lambda_t^{CM^c} = \frac{CM_{0,t+1}^c}{CM_{0,t}^c} = \frac{\frac{C_{0,t} + R_{0,t}}{n_{0,t}^c + r_{0,t}}}{\frac{C_{0,t}}{n_{0,t}^c}}. \quad (2.2.17)$$

Infine la stima del valore del costo medio cumulato relativo agli esercizi futuri è ottenuta come:

$$\hat{CM}_{h,k}^c = CM_{h,t-h}^c \prod_{j=t-h}^k \lambda_j^{n^c} \quad \text{con } h=0, \dots, t; \quad k=t-h+1, \dots, t. \quad (2.2.18)$$

Il passo computazionale finale, necessario per ottenere la stima della riserva, prevede di calcolare il valore stimato del costo cumulato dei sinistri per ogni generazione:

$$\hat{C}_{i,t+1} = \sum_{j=t-i+1}^t \hat{CM}_{i,j}^c \hat{n}_{i,j}^c. \quad (2.2.19)$$

La formula precedente permette di ricostruire, per ogni generazione, tutta la successione degli importi cumulati stimati fino all'antidurata estrema.

La riserva, in conclusione, risulta essere data dalla differenza tra il costo ultimo delle generazioni e l'importo cumulato pagato per i sinistri all'epoca di valutazione:

$$\hat{R} = \sum_{i=0}^t (\hat{C}_{i,t+1} - C_{i,t-i}). \quad (2.2.20)$$

FISHER-LANGE

Il metodo *Fisher-Lange* stima la riserva sinistri valutando separatamente l'evoluzione futura dei costi medi e del numero dei sinistri non basandosi sulla meccanica *Chain Ladder*. Tale metodo, come del resto il *frequency-severity*, prevede la stima di un elevato numero di parametri e, dunque, è esposto ad un maggior rischio di parametro rispetto al metodo *Chain Ladder Paid*.

La valutazione del numero dei sinistri che verranno liquidati in futuro si basa sulla stima di due componenti. La prima è rappresentata dal numero di sinistri che avranno seguito, mentre la seconda risulta essere la velocità di liquidazione, la quale permette di stimare la cadenza del numero dei sinistri che verranno liquidati negli esercizi futuri.

La stima del numero dei sinistri che avranno seguito considera il numero dei sinistri liquidati e riservati. Da queste due grandezze si costruisce il triangolo di *run off* contenente le aliquote del numero dei sinistri con seguito:

$$aliq_{i,j} = \frac{\sum_{h=j+1}^{t-i} n_{i,h} + r_{i,t-i}}{r_{i,j}} \quad \text{con } i=0,\dots,t-1 ; j=0,\dots,t-i-1 \quad (2.2.21)$$

dove

- $\sum_{h=j+1}^{t-i} n_{i,h}$ individua il numero dei sinistri pagati per la generazione i-esima dall'antidurata j+1 fino all'epoca di valutazione, cioè fino all'antidurata t-i;
- $r_{i,t-i}$ risulta essere, per la generazione i-esima, il numero di sinistri riservati all'epoca della valutazione, cioè il numero di sinistri che l'impresa si aspetta venga pagato negli esercizi futuri.

Il valore dell'aliquota per una generica cella (i,j) è determinato come il rapporto tra il numero dei sinistri che ha avuto seguito, dato dalla somma tra il numero di sinistri pagati dopo l'antidurata j e di quelli riservati, e il numero di sinistri riservati nell'antidurata j. L'aliquota rappresenta, quindi, la percentuale del numero dei sinistri che ha avuto effettivamente seguito rispetto al numero sinistri riservati in (i,j).

Sull'ultima diagonale del triangolo, cioè con riferimento all'epoca di valutazione, i valori delle aliquote risultano essere pari all'unità per costruzione; il numeratore, infatti, è costituito dal solo valore del numero dei sinistri riservati. Nella costruzione del triangolo di *run off*, quindi, i valori della diagonale vengono omessi poiché non risultano essere informativi.

Fig.2.2.5: triangolo di *run off* delle aliquote del numero dei sinistri con seguito

		Anno di sviluppo (j)											
Anno di generazione(i)		0	1	2	.	.	j	t	t+1
0													/
1												/	
2											/		
.									/				
.								/					
i							<i>aliq_{i,j}</i>	/					
.							/						
.					/								
.				/									
.			/										
t		/											

Le aliquote possono assumere dei valori minori, maggiori o uguali all'unità. Il primo caso ($aliq_{i,j} < 1$) comporta che il numero dei sinistri con seguito è stato inferiore del numero dei sinistri riservati

inizialmente nell'antidurata j . Questa situazione si presenta quando l'impresa ha un saldo positivo tra il numero dei sinistri senza seguito e quelli riaperti. Nel caso in cui, invece, il valore dell'aliquota sia maggiore di uno comporta un numero maggiore di riaperture rispetto ai sinistri senza seguito. Il saldo tra il numero dei sinistri senza seguito e sinistri riaperti presenta, in tale circostanza, un valore negativo. L'aliquota assume, infine, un valore pari all'unità nel caso in cui il numero dei sinistri riservati nella cella (i,j) è pari alla somma tra numero di sinistri liquidati negli esercizi futuri e il numero dei sinistri stimati all'epoca di valutazione. Nel triangolo non è presente il valore dell'aliquota per l'antidurata t ; per tale anno di sviluppo, in genere, si ipotizza un valore pari ad uno. Questa ipotesi risulta essere verosimile e si basa sulla considerazione che un sinistro riservato per numero di antidurate così elevato difficilmente potrà dar luogo ad una chiusura.

Nella prassi si osservano dei valori delle aliquote minori ad uno nelle prime antidurate e superiori all'unità nelle antidurate maggiori. I valori assunti dalle aliquote, tuttavia, dipendono molto dalla politica di chiusura dei sinistri adottata dalla compagnia, nonché, dal ramo di appartenenza del portafoglio considerato. I valori delle aliquote che costituiscono il rispettivo triangolo di *run off* risultano essere coerenti tanto più la politica di chiusura dei sinistri adottata dall'impresa è rimasta costante nel tempo.

Dopo aver costruito il triangolo delle singole aliquote ($aliqu_{i,j}$) è necessario individuare un opportuno stimatore per individuare le aliquote associate ad ogni anno di sviluppo ($aliqu_j$). Questi valori forniscono per le varie antidurate una stima della percentuale del numero di sinistri che ci si aspetta vengano liquidati rispetto al numero dei riservati.

Il numero di sinistri che si stima abbiano seguito per ogni generazione è dato dal numero di sinistri riservati nell'anno di valutazione moltiplicato per l'aliquota dell'antidurata corrispondente allo sviluppo della generazione in esame:

$$\hat{n}_i^{CS} = r_{i,t-i} aliqu_{t-i}. \quad (2.2.22)$$

La seconda componente necessaria per valutare il numero di sinistri che varranno liquidati negli esercizi futuri risulta essere la velocità di liquidazione. La conoscenza di questa grandezza è necessaria per poter stimare la sequenza con cui verranno liquidati nelle varie antidurate i numeri dei sinistri stimati per ogni generazione. Dal punto di vista analitico la velocità di liquidazione, desunta dai dati relativi all'ultimo anno di valutazione, cioè l'ultima diagonale del triangolo, risulta essere la seguente:

$$v_j^{(t)} = \frac{n_{t-j,j} \frac{d_t}{d_{t-j}}}{\sum_{j=1}^{t+1} \left(n_{t-j,j} \frac{d_t}{d_{t-j}} \right)} \quad \text{con } j=1, \dots, t+1 \quad (2.2.23)$$

dove d_i è il numero di sinistri denunciati per la generazione i -esima. La formula permette di calcolare la percentuale del numero di sinistri che saranno liquidati dopo j anni di sviluppo per l'ultima generazione (t).

Fig.2.2.6: Celle del triangolo di *run off* utilizzate nel calcolo della velocità di liquidazione

		Anno di sviluppo (j)													
Anno di generazione(i)		0	1	2	.	.	j	t	t+1		
0													$n_{0,t}$	$r_{0,t}$	d_0
1													.		.
2													.		.
.													.		.
.													.		.
.													.		.
i							$n_{i,j}$								d_i
.							.								.
.							.								.
.							.								.
.							.								.
t		$v_1^{(t)}$	$v_j^{(t)}$	$v_{t+1}^{(t)}$	d_t

Il numeratore della formula fornisce la percentuale di sinistri liquidati nell'antidurata j rispetto al numero totale di sinistri denunciati della stessa generazione; tale valore è successivamente moltiplicato per il numero di sinistri denunciato dell'ultima generazione (d_t). Quest'ultimo termine da un punto di vista prettamente matematico risulta essere privo di senso; infatti, a denominatore è presente lo stesso valore che ne comporta la semplificazione. La presenza del termine d_t è tuttavia spiegata dall'esigenza di poter effettuare una rapida diagnostica dei valori assunti dal numeratore. In quest'ultimo, infatti, compare la proporzione del numero sinistri che verranno liquidati nell'antidurata j rispetto a quelli denunciati nell'ultima generazione.

Il denominatore della formula, infine, garantisce che la somma delle velocità di liquidazione sia pari ad uno. Il calcolo di $v_j^{(t)}$ per l'antidurata estrema (t+1) considera il numero dei sinistri liquidati che risulta essere un dato non noto in quanto fuori dal triangolo. In questo caso quindi si dà piena credibilità al numero dei sinistri riservati dall'impresa relativi all'ultima antidurata della prima generazione.

La formula appena esposta permette, come detto, di determinare le velocità di liquidazione per le antidurate relative alla sola ultima generazione. I valori relativi alle generazioni precedenti sono ottenuti, successivamente, per via ricorsiva dalla medesima formula. Quando si considerano le generazioni precedenti all'ultima, la stima della velocità di liquidazione è ottenuta partendo dal numero dei sinistri pagati relativo all'ultima diagonale del triangolo riferito all'antidurata della generazione considerata. La figura 2.2.7 mostra i valori nel triangolo di *run off* che occorre utilizzare per calcolare la velocità di liquidazione per la penultima generazione:

Fig.2.2.7: Celle del triangolo di *run off* usate nel calcolo della velocità di liquidazione per la penultima generazione

		Anno di sviluppo (j)													
Anno di generazione(i)		0	1	2	.	.	j	t	t+1		
0													$n_{0,t}$	$r_{0,t}$	d_0
1													.		.
2													.		.
.													.		.
.													.		.
i							$n_{i,j}$								d_i
.						.									.
.						.									.
.				.											.
.			.												.
t				v_2	.	.	v_j	v_{t+1}	d_t

Questo metodo permette, dunque, di ottenere per via ricorsiva le velocità di liquidazione per tutte le generazioni.

Un limite di tale approccio risiede nel costruire il triangolo inferiore delle velocità di liquidazione utilizzando i dati presenti nella sola ultima diagonale, cioè basandosi sulle informazioni desunte dal solo ultimo anno di valutazione. Per ottenere delle stime più affidabili, cioè basate su dati con una maggiore profondità storica, è possibile considerare nella formula dei v_j anche le diagonali nel triangolo precedenti all'ultima. I valori delle velocità di liquidazione per le antidurate estreme, che in questo caso non possono essere determinati, vengono assunti uguali a quelli derivanti dalle generazioni più recenti. Nella pratica, generalmente, si effettua tale calcolo considerando le ultime tre diagonali; successivamente, con un opportuno stimatore, si individua il valore prescelto, per l'ultima generazione, di ogni antidurata. Proprio da questi valori si implementerà, per via ricorsiva, il calcolo delle velocità di liquidazione per tutte le generazioni presenti nel triangolo.

La costruzione del triangolo inferiore del numero dei sinistri che si stima vengano liquidati sfrutta le stime del numero dei sinistri con seguito per ogni generazione ($\hat{n}_i = r_{i,t-i} aliq_{t-i}$) e quelle delle velocità di liquidazione. Il numero dei sinistri stimato che verrà liquidato nella generica cella (i,j) è dato, dunque, dal prodotto tra il numero dei sinistri con seguito della generazione i-esima e la rispettiva velocità di liquidazione:

$$\hat{n}_{i,j} = \hat{n}_i^{CS} v_j^{gen(i)} \quad \text{con } i=1, \dots, t ; j=1, \dots, t+1 . \quad (2.2.24)$$

Il metodo *Fisher-Lange*, dopo aver stimato la dinamica del numero dei sinistri, prevede di giungere alla stima della riserva valutando la componente dei costi medi.

Il punto di partenza per la stima dei costi medi futuri risulta essere il triangolo (incrementale) dei costi medi del pagato. L'impresa deve stimare un opportuno vettore di costi medi per ogni antidurata, con esclusione di quella riferita a $j=0$, e il tasso di inflazione da applicare a tale vettore. Se i dati relativi ai costi medi pagati sono stati molto stabili nel tempo l'assicuratore potrebbe scegliere come vettore dei costi medi quello contenuto nell'ultima diagonale del triangolo. In caso contrario, la scelta deve essere basata su maggiori dati, come, ad esempio, le ultime tre diagonali riportate in moneta corrente.

La stima più delicata è rappresentata dai valori delle ultime antidurate i quali assumono importi elevati e molto variabili nel tempo. In tale situazione l'impresa può calibrare la stima dei costi medi considerando anche eventuali valori fuori triangolo oppure adottare i dati forniti dal mercato nel caso in cui possieda un portafoglio analogo. Problema ancora più marcato è la scelta del costo medio per l'ultima antidurata. Questo valore, infatti, non è ricavabile in alcun modo dal triangolo dei costi medi pagati. Nella pratica, di solito, le imprese basano la stima di questo valore rifacendosi al costo medio che hanno riservato, oppure inflazionando di un anno il costo medio pagato nell'antidurata t -esima.

Conclusa l'operazione di stima del vettore dei costi medi pagati ($\dot{C}\dot{M}_{t-j,j}$) è possibile calcolare il valore dei costi medi per gli esercizi futuri. Il metodo prevede di inflazionare i costi medi prescelti per ogni antidurata per i relativi anni mancanti:

$$\hat{C}\hat{M}_{i,j} = \dot{C}\dot{M}_{t-j,j} \prod_{h=t+1}^{i+j} (1+i_h) \quad \text{con } i=1,\dots,t; j=1,\dots,t+1 \quad (2.2.25)$$

dove i_h rappresenta il tasso dell'inflazione prescelto per l'anno di calendario h -esimo. La scelta del tasso d'inflazione sinistri risulta essere un'operazione complessa. Questo tasso è dato, infatti, dal prodotto tra inflazione esogena (indice dei prezzi) e inflazione endogena (inflazione assicurativa), dove quest'ultima è depurata dal valore di quella esogena.

A seguito dell'operazione di stima, per tutte le celle inferiori del triangolo, del costo medio dei sinistri ($\widehat{C}\widehat{M}_{i,j}$) e del rispettivo numero ($\hat{n}_{i,j}$), è possibile giungere ai valori degli importi incrementali che l'impresa prevede di dover liquidare negli esercizi futuri. Considerando una generica cella (i,j) oggetto di stima:

$$\hat{P}_{i,j} = \widehat{C}\widehat{M}_{i,j} \hat{n}_{i,j} \quad \text{con } i=1,\dots,t; j=1,\dots,t+1. \quad (2.2.26)$$

Il valore della riserva sinistri è, quindi, pari a:

$$\hat{R} = \sum_{i=0}^t \sum_{j=t-i+1}^{t+1} \hat{P}_{i,j} . \quad (2.2.27)$$

2.3 L'approccio stocastico per la valutazione della riserva sinistri

In letteratura, nel corso degli ultimi due decenni, sono comparsi numerosi metodi stocastici per valutare la riserva sinistri. L'obiettivo di questi criteri è quello di individuare un errore, inteso come misura di variabilità, da associare al valore puntuale della riserva stimata con gli approcci deterministici. Dove possibile, inoltre, tale errore permette di valutare un appropriato intervallo di confidenza per la riserva.

Nel seguito viene proposto il modello di Mack che è stato, nel 1993, uno dei primi metodi stocastici ad essere formulato.

IL MODELLO DI MACK

Il metodo formulato da Mack si basa sulla meccanica del *Chain Ladder Paid*. Questo approccio deterministico viene opportunamente ampliato per poter giungere alla stima del c.d. *standard error*, cioè lo scarto quadratico medio associato alla stima puntuale della riserva. Il metodo tuttavia non permette di poter costruire un intervallo di confidenza, in quanto, la formula di Mack non si basa su alcuna assunzione distributiva.

Il modello considera un triangolo di *run off* in cui non è presente la coda. Gli anni di generazione dei sinistri sono individuati dal pedice $i=1,2,\dots,n$ e quelli relativi alle antidurate dal pedice $j=1,2,\dots,n$.

Le ipotesi da cui parte il metodo sono le seguenti:

$$1) \quad E\left(C_{i,j+1} \mid C_{i,1}, \dots, C_{i,j}\right) = \lambda_j C_{i,j} \quad \text{con } i=1, \dots, n \quad j=1, \dots, n-1 \quad (2.3.1)$$

dove λ_j rappresenta il vero ed ignoto fattore di sviluppo dell'antidurata j -esima.

Questa assunzione corrisponde esattamente a quanto previsto dal *Chain Ladder*, infatti, vale:

$$E\left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} \mid C_{i,j}\right) = \lambda_j \quad (2.3.1 \text{ bis})$$

dove $C_{i,j}$, sotto il condizionamento, è uno scalare. Inoltre, per semplificare la notazione (come verrà fatto per tutte le formule seguenti), è stato possibile scrivere il valore atteso condizionato al solo ultimo termine noto, cioè $C_{i,j}$, in quanto la sequenza degli importi pagati cumulati dalla prima antidurata fino alla j -esima risulta essere una catena di Markov e dunque possiede la proprietà di mancanza di memoria.

$$2) \quad \text{var}(C_{i,j+1} \mid C_{i,j}) = C_{i,j} \sigma_j^2 \quad (2.3.2)$$

che può essere scritta come,

$$\text{var}\left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} \mid C_{i,j}\right) = \frac{\sigma_j^2}{C_{i,j}}. \quad (2.3.2 \text{ bis})$$

La varianza dei *link ratio* individuali ($\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} = \lambda_{i,j}$) è quindi inversamente proporzionale al

valore di $C_{i,j}$. Anche questa assunzione deriva, in realtà, dal procedimento di stima adottato dal *Chain Ladder* per i fattori di sviluppo. I *link ratio* delle varie antidurate, infatti, risultano essere pari alla media dei fattori di sviluppo individuali ponderata rispetto ai valori degli

importi cumulati. Mack dimostra³ che la varianza dei *link ratio* è minima se e solo se i valori degli importi cumulati sono inversamente proporzionali alla varianza dei fattori di sviluppo individuali, dove σ_j^2 risulta essere una costante di proporzionalità positiva ed ignota.

- 3) Le variabili $(C_{i,1}, \dots, C_{i,n})$ e $(C_{j,1}, \dots, C_{j,n})$ con $i \neq j$, cioè considerando anni di accadimento diversi, sono indipendenti. I valori $C_{i,j}$ che si manifestano sono, quindi, generati da variabili aleatorie indipendenti tra loro; tuttavia le stime di tali valori non sono indipendenti tra loro.

L'obiettivo del modello presentato da Mack è quello di individuare l'errore della stima puntuale della riserva calcolandone la varianza.

Considerando una generica variabile aleatoria y e \hat{y} il suo stimatore, è possibile scrivere la *prediction variance*, cioè la varianza di previsione e dunque l'errore che si compie a stimare y con lo stimatore \hat{y} , come:

$$E[(y - \hat{y})^2] = E\left\{[(y - E(y)) - (\hat{y} - E(y))]\right\}^2.$$

Se per ipotesi lo stimatore \hat{y} è non distorto, cioè vale $E(\hat{y}) = E(y)$, è possibile scrivere

$$\begin{aligned} E[(y - \hat{y})^2] &= E\left\{[(y - E(y)) - (\hat{y} - E(\hat{y}))]\right\}^2 = \\ &= E[(y - E(y))^2] + E[(\hat{y} - E(\hat{y}))^2] - 2E[(y - E(y))(\hat{y} - E(\hat{y}))]. \end{aligned}$$

Trascurando l'ultimo addendo si ottiene per la *prediction variance*:

$$E[(y - \hat{y})^2] \approx E[(y - E(y))^2] + E[(\hat{y} - E(\hat{y}))^2] \quad (2.3.3)$$

dove

→ $E[(y - E(y))^2]$ individua la *process variance*, cioè la varianza di processo, che rappresenta la componente di variabilità determinata dalle fluttuazioni casuali insite nei dati utilizzati.

→ $E[(\hat{y} - E(\hat{y}))^2]$ individua l'*estimation variance*, cioè la varianza di stima, che è la variabilità determinata dal fatto di usare uno specifico stimatore per la v.a. y .

La scomposizione della varianza appena vista vale anche con riferimento alla v.a. rappresentata dallo stimatore della riserva sinistri (\hat{R}_i). La varianza di questa grandezza viene studiata condizionatamente alle informazioni disponibili; l'obiettivo è infatti quello di valutare l'errore di stima che si compie a partire dai dati disponibili nel triangolo. Lo stato dell'informazione al tempo n , cioè la conoscenza del triangolo superiore, è sinteticamente individuato con la scrittura:

$$D^{(n)} = \{C_{i+j} \mid i + j \leq n + 1\}. \quad (2.3.4)$$

La varianza legata alla stima della riserva, denominata *mean squared error* (mse), risulta essere:

$$mse(\hat{R}_i \mid D^{(n)}) = mse(\hat{C}_{i,n} \mid D^{(n)}) = E\left[(C_{i,n} - \hat{C}_{i,n}) \mid D^{(n)}\right] \quad (2.3.5)$$

Dove la prima uguaglianza vale in quanto la varianza è invariante a traslazioni e, quindi, lavorare sulla riserva o sul costo ultimo risulta essere equivalente. Sommando e sottraendo la grandezza $E(C_{i,n} \mid D^{(n)})$ e trascurando il doppio prodotto, che risulta avere un peso marginale, si ottiene:

³ Si veda Mack T. (1993): "Measuring the variability of Chain Ladder reserve estimates" pp.140-141.

$$mse(\hat{R}_i | D^{(n)}) \approx \text{var}(C_{i,n} | D^{(n)}) + [\hat{C}_{i,n} - E(C_{i,n} | D^{(n)})]^2 \quad (2.3.6)$$

dove

→ $\text{var}(C_{i,n} | D^{(n)})$ individua la variabilità di processo (*process variance*);

→ $[\hat{C}_{i,n} - E(C_{i,n} | D^{(n)})]^2$ individua la variabilità determinata dallo specifico stimatore adottato per il costo ultimo (*estimation variance*), cioè l'errore dovuto allo specifico stimatore.

La radice quadrata del *mean squared error* è il valore oggetto di stima e prende il nome di *standard error*.

Le prime due ipotesi formulate nel modello forniscono la media e varianza dei valori $C_{i,j}$ che dipendono rispettivamente dai termini λ_j e σ_j^2 . Gli stimatori utilizzati da Mack per queste due grandezze, necessari per poter stimare operativamente i valori della *process variance* ed *estimation variance*, sono proposti di seguito.

Lo stimatore adottato per il fattore di sviluppo è:

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} w_{i,j} \lambda_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n-j} w_{i,j}} \quad (2.3.7)$$

dove $w_{i,j} = C_{i,j}$. Lo stimatore $\hat{\lambda}_j$ è quindi identico a quello usato nel *Chain Ladder*. Il modello di Mack, dunque, fornisce una stima puntuale della riserva coincidente con quella del *Chain Ladder Paid*.

Lo stimatore del termine σ_j^2 è dato da:

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=1}^{n-j} w_{i,j} (\lambda_{i,j} - \hat{\lambda}_j)^2 \quad \text{per } j=1, \dots, n-2. \quad (2.3.8)$$

La formula non permette la stima di σ_j^2 per l'antidurata $n-1$ poiché per costruzione si otterrebbe un valore nullo. Il valore di σ_{n-1}^2 può quindi essere ottenuto tramite regressione rispetto ai valori precedenti oppure sfruttando la seguente formula proposta da Mack:

$$\hat{\sigma}_{n-1}^2 = \min \left\{ \frac{\hat{\sigma}_{n-2}^4}{\hat{\sigma}_{n-3}^2}, \hat{\sigma}_{n-2}^2, \hat{\sigma}_{n-3}^2 \right\}. \quad (2.3.9)$$

Dalle ipotesi su cui si fonda il modello e da quanto appena mostrato derivano le seguenti proprietà:

- $E(\hat{\lambda}_j | D^{(n)}) = \lambda_j$; lo stimatore adottato per i *link ratio* risulta essere non distorto condizionatamente alle informazioni disponibili. Questo risultato vale per ogni peso $w_{i,j}$ adottato.
- $E(\hat{\lambda}_j) = \lambda_j$; lo stimatore dei *link ratio* è non distorto anche nel caso di assenza di condizionamento.
- $E(\hat{C}_{i,n} | D^{(n)}) = E(C_{i,n} | D^{(n)})$; lo stimatore del costo ultimo, in quanto utilizza gli stimatori $\hat{\lambda}_j$ che non sono distorti, risulta essere anch'esso non distorto. Risultato analogo vale anche per lo stimatore della riserva.

- Tra tutti gli stimatori non distorti di $\hat{\lambda}_j$, quello che adotta come pesi $w_{i,j} = C_{i,j}$ è quello a varianza minima. Lo stimatore $\hat{\lambda}_j$ adottato nel *Chain Ladder* è quindi quello più efficiente tra tutti gli stimatori non distorti.
- $\text{cov}(\hat{\lambda}_j, \hat{\lambda}_h) = 0$ per ogni $j \neq h$; gli stimatori dei fattori di sviluppo sono tra loro incorrelati.
- $E(\hat{\sigma}_j^2 | D^{(n)}) = \sigma_j^2$; lo stimatore utilizzato per il fattore σ_j^2 è non distorto condizionatamente alle informazioni disponibili.
- $E(\hat{\sigma}_j^2) = \sigma_j^2$; lo stimatore di σ_j^2 è non distorto anche nel caso di assenza di condizionamento.

Dopo aver individuato gli stimatori che verranno utilizzati operativamente, Mack ricava le formule necessarie per poter quantificare la variabilità di processo e l'errore di stima.

La *process variance* è espressa con la seguente formula⁴:

$$\text{var}(C_{i,n} | D^{(n)}) = \hat{C}_{i,n}^2 \sum_{m=n-i+1}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_m^2}{\hat{\lambda}_m^2 \hat{C}_{i,m}} \quad \text{per } i=2, \dots, n. \quad (2.3.10)$$

Con riferimento all'*estimation variance* si ottiene⁵:

$$\left[\hat{C}_{i,n} - E(C_{i,n} | D^{(n)}) \right]^2 = \hat{C}_{i,n}^2 \left[\sum_{m=n-i+1}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_m^2}{\hat{\lambda}_m^2 \sum_{h=1}^{n-m} C_{h,m}} \right] \quad \text{per } i=2, \dots, n. \quad (2.3.11)$$

Considerando una generica generazione "i", la *prediction variance* risulta essere:

$$PRV(\hat{R}_i) \approx \hat{C}_{i,n}^2 \sum_{m=n-i+1}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_m^2}{\hat{\lambda}_m^2} \left(\frac{1}{\hat{C}_{i,m}} + \frac{1}{\sum_{h=1}^{n-m} C_{h,m}} \right) \quad \text{per } i=2, \dots, n. \quad (2.3.12)$$

Dalla formula precedente è possibile calcolare il coefficiente di variazione del costo ultimo. Questo permette di studiare la variabilità relativa della variabile in esame:

$$CV(\hat{C}_{i,n}) = \frac{\sqrt{PRV(\hat{C}_{i,n})}}{\hat{C}_{i,n}} = \sqrt{\sum_{m=n-i+1}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_m^2}{\hat{\lambda}_m^2} \left(\frac{1}{\hat{C}_{i,m}} + \frac{1}{\sum_{h=1}^{n-m} C_{h,m}} \right)}. \quad (2.3.13)$$

Al crescere degli importi contenuti nel triangolo il $CV(\hat{C}_{i,n})$ tende a zero; questo comporta una diversificazione completa del rischio e l'assenza di fattori sistematici di rischio.

La *prediction variance* a livello totale di riserva risulta essere data dalla somma di due termini. Il primo addendo è costituito dalla somma delle *process variance* delle varie generazioni, le quali sono indipendenti tra loro in virtù dell'ipotesi di indipendenza tra i pagamenti delle diverse generazioni. La seconda componente è data dalla somma delle *estimation variance* delle varie generazioni tenendo conto, inoltre, della dipendenza esistente tra questi termini. Le *estimation variance* delle differenti generazioni, infatti, non sono tra loro indipendenti poiché la procedura di stima, utilizzando i medesimi fattori di sviluppo per la stima dei costi ultimi delle generazioni,

⁴ Si veda Mack T. (1993): "Measuring the variability of Chain Ladder reserve estimates" pp.145-148.

⁵ Si veda Mack T. (1993): "Measuring the variability of Chain Ladder reserve estimates" pp.148-150.

introduce una dipendenza positiva. La *prediction variance* per tutte le generazioni nel triangolo risulta essere⁶:

$$PRV\left(\sum_{i=2}^n \hat{R}_i\right) \approx \sum_{i=2}^n \left[PRV(\hat{R}_i) + 2\hat{C}_{i,n} \left(\sum_{h=i+1}^n \hat{C}_{h,n} \right) \sum_{m=n-i+1}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_m^2}{\hat{\lambda}_m^2 \sum_{h=1}^{n-m} C_{h,m}} \right]. \quad (2.3.14)$$

Quanto visto fino ad ora è valido per un triangolo senza coda. È tuttavia possibile estendere la formula della *prediction variance* anche nel caso in cui sia presente l'antidurata $n+1$. Dalla formula (2.46) la varianza di previsione per una generazione "i" può essere scritta come:

$$PRV(\hat{R}_i) \approx \hat{C}_{i,n}^2 \sum_{m=n-i+1}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_m^2}{\hat{\lambda}_m^2} \left(\frac{1}{\hat{C}_{i,m}} + \frac{1}{\sum_{h=1}^{n-m} C_{h,m}} \right) = \hat{C}_{i,n}^2 \sum_{m=n-i+1}^{n-1} \frac{\text{var}(\lambda_{i,m}) + \text{var}(\hat{\lambda}_m)}{\hat{\lambda}_m^2}. \quad (2.3.15)$$

Con riferimento ad un generico valore cumulato è possibile ottenere, per via iterativa dalla precedente formula, la seguente relazione⁷:

$$PRV(\hat{C}_{i,j+1}) = \hat{C}_{i,j}^2 \left[\text{var}(\lambda_{i,j}) + \text{var}(\hat{\lambda}_j) \right] + \text{var}(\hat{C}_{i,j}) \hat{\lambda}_j^2 \quad (2.3.16)$$

dove

→ $\hat{C}_{i,j}^2 \text{var}(\lambda_{i,j})$ misura l'aleatorietà di processo nell'antidurata $j+1$;

→ $\hat{C}_{i,j}^2 \text{var}(\hat{\lambda}_j)$ quantifica l'aleatorietà di stima nell'antidurata $j+1$;

→ $\text{var}(\hat{C}_{i,j}) \hat{\lambda}_j^2 = \text{var}(\hat{C}_{i,j} \hat{\lambda}_j) = \text{var}(\hat{C}_{i,j+1})$ identifica la varianza cumulata fino all'antidurata j .

In modo ricorsivo è possibile scrivere la formula della *process variance* per il costo ultimo presente nella coda del triangolo come:

$$PRV(\hat{C}_{i,n+1}) = \hat{C}_{i,n}^2 \left[\text{var}(\lambda_{i,n}) + \text{var}(\hat{\lambda}_n) \right] + \text{var}(\hat{C}_{i,n}) \hat{\lambda}_n^2. \quad (2.3.17)$$

Quest'ultima formula incorre in problematiche dal punto di vista operativo. È infatti necessario stimare σ_n^2 . La quantificazione di tale valore è critica a causa della scarsa disponibilità di dati per le ultime antidurate.

Il modello appena mostrato presenta alcuni limiti. In primo luogo l'approccio proposto da Mack lavora senza alcuna ipotesi distributiva e dunque fornisce la sola media e varianza della riserva ma non la sua distribuzione. Per poter costruire un intervallo di confidenza, e dunque effettuare una valutazione in probabilità dell'errore associato alla stima, è necessario effettuare un'ipotesi distributiva.

Altro limite della metodologia risiede nel non considerare triangoli con coda. In caso contrario, infatti, il modello presenta problemi di stima di non facile soluzione.

Il metodo, inoltre, è completamente basato sulla meccanica del *Chain Ladder*; permette quindi di individuare l'errore di stima legato alla valutazione della riserva effettuata con solo tale metodo deterministico. La stima della *prediction variance* tramite la formula di Mack quindi vincola le

⁶ Si veda Mack T. (1993): "Measuring the variability of Chain Ladder reserve estimates" pp.153-154.

⁷ Si veda Mack T. (1999): "The standard error Chain Ladder reserve estimates: recursive calculation and inclusion of a tail factor" pp. 365-366.

imprese di assicurazione ad usare il metodo *Chain Ladder* per giungere alla stima deterministica della riserva.

Si deve, infine, osservare che il modello di Mack permette di valutare la varianza della riserva ragionando a totale *run off*. Si considera quindi la variabilità legata all'intero orizzonte temporale a cui si riferisce la riserva. L'errore di stima valuta perciò i possibili scostamenti, rispetto al valore medio stimato, di tutti i pagamenti futuri che effettuerà l'assicuratore fino all'estinzione completa della riserva (considerata chiusa).

ONE-YEAR APPROACH

Un approccio a totale *run off* risulta necessario per poter determinare il valore delle riserve tecniche, dato dalla somma di *best estimate* e *risk margin*. La stima della *best estimate* può essere ottenuta con un opportuno metodo deterministico che fornisca i valori dei pagamenti incrementali che si prevede debbano essere liquidati dall'impresa negli esercizi successivi. Per giungere al valore della *best estimate*, a questo punto, è sufficiente attualizzare tali valori in funzione della loro epoca futura di liquidazione stimata dal metodo deterministico. Per valutare il margine di rischio, invece, si deve ricorrere necessariamente ad un approccio stocastico a totale *run off*. Il *risk margin*, infatti, deve essere calcolato come il costo del SCR necessario per far fronte alle passività assicurative per tutta la loro durata di vita. È necessario quindi quantificare il valore del requisito patrimoniale di solvibilità riferito all'evoluzione della riserva fino alla sua estinzione⁸.

Congiuntamente alla valutazione delle riserve tecniche, le imprese, per essere conformi alle norme che saranno introdotte da *Solvency II*, devono determinare il valore del requisito patrimoniale di solvibilità. Il SCR deve essere tale da fronteggiare i rischi a cui è esposto l'assicuratore su un orizzonte temporale annuo. Per stimare il valore del *Solvency Capital Requirement* relativo al rischio di riservazione, che è quello considerato in questa sede, i metodi stocastici che permettono di valutare la variabilità della stima della riserva a totale *run off* devono essere opportunamente ricalibrati su un orizzonte annuo⁹ (c.d. *one-year approach*). Le imprese devono valutare, quindi, il rischio di riservazione con riferimento ai soli 12 mesi successivi alla data di chiusura del bilancio. L'analisi del rischio *one-year* prevede di quantificare:

- i possibili scostamenti tra i pagamenti che effettuerà l'impresa l'esercizio successivo e quanto stimato per tale grandezza. Si considera quindi la differenza tra quanto riservato dall'impresa nella prima diagonale del triangolo e quanto effettivamente verrà pagato l'anno successivo;
- gli scostamenti tra quanto riservato dall'impresa per i sinistri che stima vengano liquidati dal secondo esercizio successivo a quello corrente e quanto verrà nuovamente riservato alla fine dell'anno seguente a quello dell'epoca di valutazione per gli stessi sinistri. Si stima quindi la variabilità tra quanto posto a riserva all'epoca di valutazione nel triangolo inferiore, a meno della prima diagonale, e quanto verrà nuovamente stimato dall'impresa l'anno successivo, in base alle informazioni aggiuntive raccolte nell'anno, per gli stessi sinistri.

⁸ Nella pratica per evitare eccessive complicazioni di stima dell'SCR per l'intera durata di vita della riserva è ammessa la seguente semplificazione: le imprese potranno quantificare il valore dell'SCR relativo alla prima diagonale del triangolo con un approccio *one-year* e poi ipotizzare che questo si smonti in modo proporzionale con il valore della *best estimate*.

⁹ L'approccio *one-year* è adottato dalle sole imprese che sviluppano un modello interno. In caso contrario la stima dell'SCR segue la formula standard.

L'approccio *one-year* ha, dunque, come obiettivo quello di studiare, all'epoca di valutazione, la variabilità della sufficienza della riserva sinistri, come proposta in formula (2.1.1), relativa all'anno successivo a quello di valutazione. Lo studio delle caratteristiche di tale variabile aleatoria permette di poter identificare il requisito patrimoniale di solvibilità richiesto da *Solvency II*. Il SCR relativo al rischio di riservazione, infatti, è pari al VaR con un livello di probabilità del 99,5% calcolato sulla distribuzione della sufficienza della riserva sinistri.

Il contributo di Merz e Wuthrich¹⁰ (2008) ha permesso di adattare la formula di Mack ad un orizzonte annuale. La variabile aleatoria oggetto di studio è la sufficienza della riserva sinistri, denominata *claims development results* (CDR), valutata tra l'anno corrente (n) e quello successivo (n+1). Considerando una generazione i si ottiene:

$$CDR_i(n+1) = R_i^{D(n)} - (R_i^{D(n+1)} + X_{i,n-i+2}) \quad \text{con } i=2,\dots,t \quad (2.3.18)$$

dove

- $R_i^{D(n)}$ è la stima della riserva effettuata con le informazioni disponibili al tempo n;
- $R_i^{D(n+1)}$ è la stima della riserva effettuata con le informazioni disponibili al tempo n+1, cioè l'anno successivo;
- $X_{i,n-i+2}$ è il valore dei sinistri che verranno liquidati nell'anno n+1.

Il metodo proposto ha lo scopo di determinare lo scarto quadratico medio del CDR. La varianza legata all'incertezza di previsione di tale grandezza, definita *mean square error of prediction* (mse), risulta essere:

$$mse_{CDR_i(n+1)|D^{(n)}} = \text{var}(CDR_i(n+1) | D^{(n)}) = E\left[\left(\hat{C}_{i,n}^{(n)} - \hat{C}_{i,n}^{(n+1)}\right)^2 | D^{(n)}\right] \quad (2.3.19)$$

dove - $\hat{C}_{i,n}^{(n)}$ è la stima del costo ultimo effettuata all'epoca n per la generazione i-esima;

- $\hat{C}_{i,n}^{(n+1)}$ è la stima del costo ultimo effettuata con all'epoca n+1 per la generazione i-esima.

Merz e Wuthrich dimostrano la seguente formula per la varianza della sufficienza sinistri della generazione i-esima:

$$\hat{C}_{i,n}^2 \left[\frac{\hat{\sigma}_{n-i+1}^2 / \hat{\lambda}_{n-i+1}^2}{C_{i,n-i+1}} + \frac{\hat{\sigma}_{n-i+1}^2 / \hat{\lambda}_{n-i+1}^2}{\sum_{k=1}^{i-1} C_{k,n-i+1}} + \sum_{j=n-i+2}^{n-1} \frac{C_{n-j+1,j}}{\sum_{k=1}^{n-j+1} C_{k,j}} \frac{\hat{\sigma}_j^2 / \hat{\lambda}_j^2}{\sum_{k=1}^{n-j} C_{k,j}} \right] \quad (2.3.20)$$

in cui tutti gli stimatori sono calcolati al tempo n e dove,

→ $\hat{C}_{i,n}^2 \left[\frac{\hat{\sigma}_{n-i+1}^2 / \hat{\lambda}_{n-i+1}^2}{C_{i,n-i+1}} \right]$ rappresenta la *process variance* del pagamento incrementale sulla prima

diagonale del triangolo. Tale valore è nullo per la prima generazione in quanto il triangolo considerato non possiede la coda.

¹⁰ Per le dimostrazioni delle formule esposte di seguito si rimanda all'articolo di Merz M. e Wuthrich M.V. "Modelling the claims development result for solvency purposes", 2008, Casualty Actuarial Society.

→ $\hat{C}_{i,n}^2 \left[\frac{\hat{\sigma}_{n-i+1}^2 / \hat{\lambda}_{n-i+1}^2}{\sum_{k=1}^{i-1} C_{k,n-i+1}} \right]$ individua la *estimation variance* del pagamento incrementale sulla prima

diagonale. Anche questo termine è nullo per la prima generazione del triangolo.

→ $\hat{C}_{i,n}^2 \left[\frac{\sum_{j=n-i+2}^{n-1} \frac{C_{n-j+1,j}}{\sum_{k=1}^{n-j+1} C_{k,j}} \frac{\hat{\sigma}_j^2 / \hat{\lambda}_j^2}{\sum_{k=1}^{n-j} C_{k,j}}}{\sum_{k=1}^{n-1} C_{k,n-i+1}} \right]$ quantifica la *estimation variance* legata alla nuova stima della

riserva, cioè condizionata alle nuove informazioni disponibili al tempo n+1. Questo termine risulta essere nullo per le prime due generazioni del triangolo; in assenza di coda, infatti, nell'anno di calendario n+1 non è presente alcuna riserva per tali generazioni.

Il *mean square error of prediction* a livello complessivo di triangolo, a meno della prima generazione che è già chiusa, risulta essere dato dalla somma tra i msep delle generazioni ed un termine che considera la dipendenza tra le generazioni stesse:

$$msep_{\sum_i CDR_i(n+1)|D^{(n)}} = \sum_i msep_{CDR_i(n+1)|D^{(n)}} + 2 \sum_{i < l} \hat{C}_{i,n}^{(n)} \hat{C}_{l,n}^{(n)} \left[\frac{\hat{\sigma}_{n-i+1}^2 / \hat{\lambda}_{n-i+1}^2}{\sum_{k=1}^{i-1} C_{k,n-i+1}} + \sum_{j=n-i+2}^{n-1} \frac{C_{n-j+1,j}}{\sum_{k=1}^{n-j+1} C_{k,j}} \frac{\hat{\sigma}_j^2 / \hat{\lambda}_j^2}{\sum_{k=1}^{n-j} C_{k,j}} \right].$$

(2.3.21)

Anche il metodo proposto da Merz e Wuthrich presenta il limite, come quello di Mack, di non essere in grado di determinare la distribuzione della sufficienza della riserva sinistri. Per individuare il valore del SCR è necessario quindi formulare un'ipotesi distributiva.

CAPITOLO 3

Il *collective risk model* e la valutazione della riserva sinistri

3.1 Il *collective risk model* nel contesto tariffazione

Il *collective risk model* (CRM) è un approccio nato nel contesto della tariffazione che ha l'obiettivo di studiare il costo aggregato dei sinistri generato da un portafoglio di polizze in un determinato intervallo di tempo, generalmente pari ad un anno. Il CRM è un metodo che si presta ad un'ampia varietà di analisi all'interno dell'impresa di assicurazione; oltre ad essere impiegato per quantificare il premio permette, infatti, di valutare in un'ottica *Solvency II* il *premium risk* e il *reserve risk*.

L'obiettivo della compagnia di assicurazione consiste nella determinazione, in prima battuta, delle caratteristiche fondamentali del costo aggregato dei sinistri dell'esercizio successivo; la media permette di conoscerne il valore atteso, cioè il premio di rischio, mentre lo scarto quadratico medio consente di valutare la dispersione della v.a. e di quantificare, ad esempio, i carichi di sicurezza. Anche l'indice di asimmetria risulta di particolare interesse poiché informa su quanto la v.a. in esame sia distante da una distribuzione simmetrica. La curtosi, infine, permette di valutare l'importanza delle code della distribuzione rispetto alla v.a. gaussiana. Le caratteristiche appena menzionate forniscono informazioni di fondamentale importanza per poter studiare e comprendere la v.a. del costo aggregato dei sinistri ma non permettono di conoscerne la distribuzione. Quest'ultima può essere determinata, conoscendo le caratteristiche della v.a., tramite opportune formule di approssimazione oppure ricorrendo ad un approccio simulativo.

Il metodo CRM consente, infine, di effettuare valutazioni in termini di rischio e solvibilità dell'impresa relative al rischio di tariffazione. La conoscenza della distribuzione di probabilità del costo aggregato dei sinistri dell'anno permette, infatti, sotto opportune ipotesi, di calcolare il requisito patrimoniale di solvibilità richiesto dalla normativa.

L'approccio collettivo presentato in questa sede per studiare il costo aggregato dei sinistri è stato sviluppato agli inizi del XX secolo. Il metodo collettivo non studia singolarmente i singoli rischi (polizze), bensì considera il portafoglio come un *unicum* in cui vengono analizzati separatamente il processo generatore del numero dei sinistri e i rispettivi costi senza porre attenzione agli specifici contratti sottostanti a cui si riferiscono. Il costo aggregato dei sinistri (\tilde{X}) è definito dal seguente processo:

$$\tilde{X} = \sum_{i=1}^{\tilde{K}} \tilde{Z}_i \quad (3.1.1)$$

in cui le v.a. \tilde{K} e \tilde{Z}_i individuano rispettivamente il numero dei sinistri generati dal portafoglio durante il periodo considerato, nel nostro caso l'anno, ed il costo del i -esimo sinistro. Il CRM è un metodo costituito da un doppio livello di stocasticità; il processo che genera la v.a. \tilde{X} è infatti il risultato dell'unione del processo stocastico sottostante al numero dei sinistri e quello che determina i relativi ammontari.

L'analisi del costo aggregato dei sinistri per mezzo del CRM si fonda su due fondamentali ipotesi grazie alle quali è possibile ottenere in forma analitica le caratteristiche di \tilde{X} :

- le v.a. \tilde{K} e \tilde{Z}_i sono tra loro indipendenti;
- le v.a. \tilde{Z}_i sono indipendenti ed identicamente distribuite.

Senza effettuare alcuna ipotesi distributiva sulle variabili aleatorie che descrivono il numero e il costo dei singoli sinistri è possibile ricavare la funzione generatrice dei momenti (f.g.m.) per la v.a. \tilde{X} (per una trattazione approfondita di quanto trattato nel presente paragrafo e nei paragrafi 3.1.1, 3.1.2 e 3.1.3 si rimanda a Daykin, Pentikainen e Pesonen [1994]):

$$M_{\tilde{X}}(s) = M_{\tilde{K}}[\Psi_{\tilde{Z}}(s)] \quad (3.1.2)$$

e la funzione generatrice dei cumulanti (f.g.c.):

$$\Psi_{\tilde{X}}(s) = \Psi_{\tilde{K}}[\Psi_{\tilde{Z}}(s)]. \quad (3.1.3)$$

La conoscenza della f.g.m. e della f.g.c. permette di ottenere la media e varianza del costo aggregato dei sinistri¹¹:

$$E(\tilde{X}) = E(\tilde{K})E(\tilde{Z}) \quad ; \quad \sigma^2(\tilde{X}) = E(\tilde{K})\sigma^2(\tilde{Z}) + \sigma^2(\tilde{K})[E(\tilde{Z})]^2. \quad (3.1.4)$$

Nel seguito del paragrafo si analizza la v.a. che descrive il numero dei sinistri mostrando i risultati di maggior interesse presentati in letteratura. Il costo dei singoli sinistri, invece, non viene associato ad alcuna v.a. in quanto la *severity* assume caratteristiche specifiche in funzione del portafoglio considerato. Infine sono illustrate le caratteristiche del CRM al variare delle diverse assunzioni effettuate sulla v.a. \tilde{K} .

¹¹ Tali grandezze possono essere ottenute anche tramite le proprietà delle medie condizionate.

3.1.1 Il processo generatore del numero dei sinistri

La variabile aleatoria che descrive il numero dei sinistri è, tipicamente, identificata con la v.a. di Poisson. Questa ipotesi è vera nel caso in cui siano rispettate tre assunzioni, che sono appunto quelle che definiscono un processo di Poisson:

- 1) i numeri dei sinistri che si verificano in due intervalli temporali disgiunti sono indipendenti (indipendenza degli incrementi);
- 2) ciascun evento può dar luogo ad un solo sinistro (esclusione di sinistri multipli);
- 3) la probabilità che un sinistro si verifichi in un preciso istante temporale è nulla (esclusione di punti temporali speciali).

La prima condizione è, in genere, non pienamente rispettata nella realtà; risulta essere violata nel caso in cui siano presenti fattori ambientali che creano correlazione tra i numeri dei sinistri. Esempi tipici sono costituiti dalle condizioni macroeconomiche o quelle atmosferiche. Questo problema può essere superato utilizzando una v.a. Poisson misturata che consente di modellizzare il processo che genera il numero dei sinistri nel caso in cui questi siano tra loro dipendenti.

La seconda ipotesi prevede l'esclusione dei sinistri multipli; un modo per preservare la validità di tale assunzione consiste nell'unire più sinistri qualora questi siano stati generati dallo stesso evento. Di contro, per coerenza, anche la *severity* dei singoli sinistri viene sommata, andando così a costituire un unico sinistro di ammontare pari alla somma dei costi dei singoli sinistri.

La terza assunzione su cui si fonda il processo di Poisson riguarda l'esclusione di punti temporali speciali. Questa condizione viene assunta per definizione vera in quanto il numero dei sinistri è generato da una variabile casuale e dunque non è possibile prevedere con certezza l'istante temporale in cui si verificheranno. Queste ipotesi, tuttavia, non è valida in particolari contesti assicurativi come i rami credito e cauzione in cui, di solito, il sinistro si verifica alla scadenza del contratto.

Quando queste tre condizioni sono rispettate la v.a. \tilde{K} segue una distribuzione di **Poisson semplice** (in cui l'aggettivo semplice è introdotto per distinguere il caso della variabile di Poisson misturata):

$$\tilde{K} \sim Po(n) \quad (3.1.1.1)$$

tale variabile casuale è definita su tutti i numeri naturali ($k = 0, 1, 2, \dots$) e possiede la seguente funzione di probabilità:

$$p_{\tilde{K}}(K) = \frac{n^k}{k!} e^{-n} \quad (3.1.1.2)$$

dove n è un numero reale positivo ($n \in \mathbb{R}^+$) e rappresenta l'unico parametro della v.a..

La f.g.m. di \tilde{K} risulta essere:

$$M_{\tilde{K}}(s) = e^{n(e^s - 1)} \quad (3.1.1.3)$$

mentre per la f.g.c. si ottiene:

$$\Psi_{\tilde{K}}(s) = n(e^s - 1). \quad (3.1.1.4)$$

Le caratteristiche fondamentali della v.a. \tilde{K} , che nel seguito verranno sempre identificate per tutte le v.a. in esame con il valore atteso, la varianza, l'indice di asimmetria ed il coefficiente di variazione, sono ricavate dalla f.g.m. e dalla f.g.c.:

- $E(\tilde{K}) = n;$ (3.1.1.5)

- $\text{var}(\tilde{K}) = n;$ (3.1.1.6)

- $\gamma(\tilde{K}) = \frac{1}{\sqrt{n}};$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(\tilde{K}) = 0;$ (3.1.1.7)

- $CV(\tilde{K}) = \frac{1}{\sqrt{n}};$ $\lim_{n \rightarrow \infty} CV(\tilde{K}) = 0.$ (3.1.1.8)

La v.a. **Poisson misturata** è introdotta per poter analizzare in modo più coerente il processo che descrive il numero dei sinistri nel caso in cui i numeri dei sinistri non siano completamente indipendenti tra loro. La Poisson misturata è una v.a. di Poisson in cui è applicata una variabile casuale (c.d. fattore di disturbo) sul parametro n ; quest'ultimo quindi risulta essere a sua volta una v.a.. L'introduzione del fattore di disturbo permette di considerare oscillazioni casuali di breve periodo nell'intensità della sinistrosità senza modificarne il valore atteso (non sono quindi considerate dinamiche di trend e cicli relative al numero di sinistri). La v.a. Poisson misturata è costruita introducendo, in modo moltiplicativo¹², un fattore di disturbo (\tilde{q}) sul parametro n della Poisson semplice. La v.a. \tilde{q} può assumere solo valori positivi ($\tilde{q} > 0$) e possiede una media pari all'unità ($E(\tilde{q}) = 1$); lo scopo del fattore di disturbo è quello di introdurre incertezza, cioè variabilità, sul parametro della Poisson senza modificarne il valore atteso. In questo modo, quindi, si riescono a considerare, come detto, oscillazioni di breve periodo nell'intensità della sinistrosità che non sono colte dalle fluttuazioni casuali insite nel processo di Poisson semplice. Quando la v.a. \tilde{q} assume valori superiori all'unità si ottiene una maggiore intensità della sinistrosità rispetto alle attese, viceversa nel caso in cui \tilde{q} assuma valori compresi tra zero (escluso) ed uno. La Poisson misturata possiede, quindi, un doppio stadio di aleatorietà in quanto le sue determinazioni dipendono dal valore assunto dal fattore di disturbo ($\tilde{q} = q$) e dal valore generato dal processo di Poisson semplice di parametro nq .

Quando il processo generatore del numero sinistri è una v.a. di Poisson misturata, cioè $\tilde{K} \sim Po(n\tilde{q})$, la v.a. \tilde{K} risulta essere descritta dalla seguente funzione di probabilità:

$$p_{\tilde{K}}(K) = \int_0^{\infty} e^{-nq} \frac{(nq)^k}{k!} dF_{\tilde{q}}(q) \quad (3.1.1.9)$$

in cui è stato ipotizzato che il fattore di disturbo sia una variabile casuale continua, con funzione di densità $f_{\tilde{q}}(q)$, definita su tutto il semiasse positivo dei numeri reali.

La f.g.m. assume la seguente formulazione:

¹² In modo del tutto equivalente si potrebbe considerare una v.a. ausiliaria additiva; tuttavia la scelta di un fattore moltiplicativo rende più agevole la trattazione della variabile Poisson misturata sotto un profilo analitico.

$$M_{\tilde{K}}(s) = M_{\tilde{q}}[n(e^s - 1)] \quad (3.1.1.10)$$

mentre per la f.g.c. si ottiene:

$$\Psi_{\tilde{K}}(s) = \Psi_{\tilde{q}}[n(e^s - 1)]. \quad (3.1.1.11)$$

La conoscenza di queste funzioni permette di ricavare la media, varianza, asimmetria e coefficiente di variazione della v.a. \tilde{K} :

$$\bullet \quad E(\tilde{K}) = n \quad (3.1.1.12)$$

$$\bullet \quad \text{var}(\tilde{K}) = \sigma_{\tilde{q}}^2 n^2 + n \quad (3.1.1.13)$$

$$\bullet \quad \gamma(\tilde{K}) = \frac{\gamma_{\tilde{q}} \sigma_{\tilde{q}}^3 n^3 + 3\sigma_{\tilde{q}}^2 n^2 + n}{(\sigma_{\tilde{q}}^2 n^2 + n)^{\frac{3}{2}}} \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(\tilde{K}) = \gamma_{\tilde{q}} \quad (3.1.1.14)$$

$$\bullet \quad CV(\tilde{K}) = \sqrt{\frac{1}{n} + \sigma_{\tilde{q}}^2} \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} CV(\tilde{K}) = \sigma_{\tilde{q}}. \quad (3.1.1.15)$$

La variabile Poisson misturata possiede un valore atteso invariato rispetto al caso in cui è assente il fattore di disturbo, mentre la varianza assume un valore superiore a causa della variabilità introdotta da \tilde{q} . Il coefficiente di variazione di conseguenza risulta essere maggiore rispetto a quello della Poisson semplice. Al crescere della numerosità del portafoglio inoltre la variabilità relativa risulta essere sempre più influenzata da un termine ineliminabile costituito dallo scarto quadratico medio di \tilde{q} . Anche l'asimmetria nel caso di misturazione è influenzata dal fattore di disturbo; in questa circostanza inoltre la v.a. \tilde{K} non possiede necessariamente un'asimmetria positiva come nel caso di assenza del fattore \tilde{q} . Qualora l'asimmetria della variabile \tilde{q} sia sufficientemente negativa ed in grado di compensare i restanti due addendi del momento centrale terzo si ottiene $\gamma(\tilde{K}) < 0$. Al crescere della dimensione del portafoglio inoltre l'indice di asimmetria tende al valore dell'asimmetria della variabile misturante.

La stima della v.a. \tilde{q} , che rappresenta il fattore di disturbo, è basata sull'esperienza maturata dall'impresa di assicurazione o sulle aspettative relative ai fenomeni sottostanti il portafoglio che ne influenzano il numero dei sinistri. Nella prassi esistono tre metodologie per esprimere la v.a. \tilde{q} :

- identificare la forma analitica della funzione di ripartizione;
- esprimere la funzione di ripartizione in forma tabulare;
- non specificare la funzione di ripartizione ma le sole caratteristiche principali come la varianza e asimmetria; la conoscenza di queste grandezze è, infatti, sufficiente per poter studiare le caratteristiche della v.a. di Poisson misturata.

3.1.2 Il processo di Poisson composto semplice

Il CRM, come noto, definisce la v.a. costo aggregato dei sinistri nel seguente modo:

$$\tilde{X} = \sum_{i=1}^{\tilde{K}} \tilde{Z}_i \quad (3.1.2.1)$$

quando la v.a. \tilde{K} che descrive il numero dei sinistri segue un processo di Poisson semplice, la v.a. \tilde{X} è descritta da un processo di Poisson composto semplice.

Le f.g.m. e f.g.c. di \tilde{X} risultano essere rispettivamente:

$$M_{\tilde{X}}(s) = e^{n(M_{\tilde{Z}}(s)-1)} ; \quad \Psi_{\tilde{X}}(s) = n(M_{\tilde{Z}}(s)-1). \quad (3.1.2.2)$$

La conoscenza di queste funzioni permette di determinare la media, varianza, asimmetria e coefficiente di variazione¹³ del processo generatore del costo aggregato dei sinistri:

- $E(\tilde{X}) = nm$ (3.1.2.3)

dove $E(\tilde{Z}) = m$;

- $\text{var}(\tilde{X}) = na_{2,\tilde{Z}}$ (3.1.2.4)

dove $E(\tilde{Z}^2) = a_{2,\tilde{Z}}$;

- $\gamma(\tilde{X}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{a_{3,\tilde{Z}}}{(a_{2,\tilde{Z}})^{\frac{3}{2}}}$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(\tilde{X}) = 0$ (3.1.2.5)

dove $a_{3,\tilde{Z}} = E(\tilde{Z}^3)$;

- $CV(\tilde{X}) = \sqrt{\frac{r_{2,z}}{n}}$; $\lim_{n \rightarrow \infty} CV(\tilde{X}) = 0$ (3.1.2.6)

dove $r_{2,z} = \frac{a_{2,\tilde{Z}}}{m^2}$ rappresenta l'indice di rischio di secondo ordine¹⁴ della *severity* e assume sempre valori maggiori dell'unità.

Nel caso del processo di Poisson composto semplice l'indice di asimmetria assume valori sempre positivi e prossimi a zero al crescere della dimensione del portafoglio, come del resto il coefficiente di variazione. Ciò implica che al crescere del parametro dimensionale dell'impresa la variabilità relativa decresce fino ad annullarsi per $n \rightarrow \infty$; in termini relativi, quindi, l'assicuratore riesce a diversificare completamente il rischio a cui è esposto grazie alla crescita del portafoglio.

¹³ Il coefficiente di variazione della v.a. \tilde{X} può essere visto come lo scarto quadratico medio del *loss ratio* puro, cioè considerando i soli premi equi.

¹⁴ L'indice di rischio di secondo ordine può essere espresso anche nel seguente modo: $r_{2,z} = 1 + [CV(\tilde{Z})]^2$.

3.1.3 Il processo di Poisson composto misturato

Si parla di processo di Poisson composto misturato nel caso in cui la v.a. \tilde{K} , che individua il processo generatore del numero dei sinistri, segua una distribuzione di Poisson misturata.

Sotto questa ipotesi la f.g.m. e la f.g.c. della variabile \tilde{X} assumono rispettivamente le seguenti formulazioni:

$$M_{\tilde{X}}(s) = M_{\tilde{q}}[n(M_{\tilde{Z}}(s)-1)] \quad ; \quad \Psi_{\tilde{X}}(s) = \Psi_{\tilde{q}}[n(M_{\tilde{Z}}(s)-1)]. \quad (3.1.3.1)$$

La conoscenza di queste funzioni permette di ricavare le caratteristiche del costo aggregato dei sinistri:

$$\bullet \quad E(\tilde{X}) = nm; \quad (3.1.3.2)$$

$$\bullet \quad \text{var}(\tilde{X}) = \sigma_{\tilde{q}}^2 n^2 m^2 + na_{2,\tilde{Z}}; \quad (3.1.3.3)$$

$$\bullet \quad \gamma(\tilde{X}) = \frac{\gamma_{\tilde{q}} \sigma_{\tilde{q}}^3 n^3 m^3 + 3\sigma_{\tilde{q}}^2 n^2 m a_{2,\tilde{Z}} + na_{3,\tilde{Z}}}{(\sigma_{\tilde{q}}^2 n^2 m^2 + na_{2,\tilde{Z}})^{\frac{3}{2}}}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(\tilde{X}) = \gamma_{\tilde{q}}; \quad (3.1.3.4)$$

$$\bullet \quad CV(\tilde{X}) = \sqrt{\frac{r_{2,\tilde{Z}}}{n} + \sigma_{\tilde{q}}^2} \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} CV(\tilde{X}) = \sigma_{\tilde{q}}. \quad (3.1.3.5)$$

La varianza di \tilde{X} risulta essere maggiore rispetto al caso di assenza di misturazione in quanto l'obiettivo del fattore di disturbo è proprio quello di incrementare la dispersione della variabile in esame. La formula della varianza se riscritta nel seguente modo:

$$\text{var}(\tilde{X}) = m^2 n + n(a_{2,\tilde{Z}} - m^2) + \sigma_{\tilde{q}}^2 n^2 m^2 = m^2 \text{var}(\tilde{K}) + n \text{var}(\tilde{Z}) + n^2 m^2 \text{var}(\tilde{q})$$

permette di evidenziare le componenti di base che determinano la variabilità della v.a. \tilde{X} . Il primo addendo rappresenta la varianza nel caso in cui sia stocastico il solo numero dei sinistri, il secondo termine individua il contributo alla varianza apportato dalla *severity* ed infine il terzo addendo quantifica il contributo alla variabilità totale apportato del fattore di disturbo. Il peso relativo di questi addendi al crescere del portafoglio è variabile; per collettività poco numerose la componente predominante della varianza è costituita dal costo sinistri, mentre al crescere del parametro dimensionale risulta assumere sempre più importanza la varianza del fattore di disturbo.

Il valore dell'indice di asimmetria nel contesto del processo di Poisson composto misturato può assumere non solo valori positivi, come nel contesto semplice, ma anche valori negativi; quest'ultima circostanza si può verificare nel caso in cui $\gamma_{\tilde{q}}$ sia notevolmente inferiore a zero. Il valore asintotico dell'asimmetria, infine, coincide con quello della v.a. \tilde{q} .

Il coefficiente di variazione possiede un valore maggiore rispetto al processo di Poisson composto semplice a causa del fattore di disturbo. Al crescere della dimensione del portafoglio, inoltre, l'effetto della variabile \tilde{q} risulta essere sempre più significativo come si osserva dal valore assunto a livello asintotico dal coefficiente di variazione. Questo risultato implica che al crescere del parametro dimensionale la compagnia di assicurazione non è in grado di diversificare completamente la rischiosità relativa; il fattore di disturbo, infatti, costituisce un rischio sistematico.

I risultati appena mostrati relativi ai due processi di Poisson composti che descrivono il costo aggregato dei sinistri sono validi indipendentemente dalla distribuzione di probabilità del costo dei

singoli sinistri (\tilde{Z}). L'impresa di assicurazione per poter calcolare i momenti della v.a. \tilde{X} deve essere comunque in grado di poter stimare, per lo meno, le caratteristiche fondamentali della *severity*. L'obiettivo principale del CRM resta tuttavia quello di poter determinare la distribuzione di probabilità del costo aggregato dei sinistri. Un primo approccio che può essere adottato operativamente a tal fine consiste nell'utilizzo delle formule di approssimazione; tale strada viene intrapresa nella circostanza in cui non sia possibile conoscere la funzione di probabilità di \tilde{Z} . Un secondo approccio per individuare la distribuzione di \tilde{X} è costituito dalle tecniche simulative che permettono di ottenere risultati molto soddisfacenti al crescere del numero delle iterazioni simulate. In quest'ultimo caso è necessario poter individuare, mediante stima o tramite la formulazione di un'ipotesi, la funzione di ripartizione della *severity*.

3.2 Il Collective Risk Model nel contesto riservazione

A partire dall'ultimo decennio l'approccio collettivo, sviluppato dalla teoria del rischio classica, ha trovato applicazione nel contesto riservazione. Il CRM è stato riadeguato in modo da poter descrivere il processo liquidativo dei sinistri. Tale metodo permette di ottenere, sotto opportune ipotesi, i momenti esatti della distribuzione della riserva sinistri e inoltre, grazie alle tecniche simulative, è possibile ricavare la distribuzione stessa della riserva. Il CRM si basa su un metodo deterministico sottostante in grado di fornire la stima del numero dei sinistri che verranno liquidati e i rispettivi costi medi.

La formulazione del CRM inizialmente proposta in letteratura¹⁵ per valutare le caratteristiche della riserva sinistri prevede di descrivere la v.a. della riserva sinistri (\tilde{R}) nel seguente modo:

$$\tilde{R} = \sum_{i=1}^{\tilde{K}} \tilde{Z}_i \quad (3.2.1)$$

dove le v.a. \tilde{K} e \tilde{Z}_i rappresentano rispettivamente il numero dei sinistri che verranno liquidati dall'impresa di assicurazione e le *severity* associate a ciascun sinistro. Il processo che descrive la v.a. della riserva sinistri si fonda sulle classiche ipotesi elaborate dalla teoria del rischio: le v.a. del numero e del costo dei singoli sinistri sono tra loro indipendenti e le v.a. \tilde{Z}_i sono tra loro indipendenti ed identicamente distribuite. Quest'ultima ipotesi, tuttavia, è non realistica; il costo dei singoli sinistri liquidati dalle imprese, infatti, non risulta essere identicamente distribuito nelle antidurate ma è generalmente crescente negli anni di sviluppo.

Per superare tale semplificazione è stato formulato un modello per descrivere la v.a. \tilde{R} che modella i pagamenti incrementali stimati per ogni generazione e antidurata, cioè per ogni cella inferiore del triangolo di *run off* del costo incrementale dei sinistri, tramite un approccio CRM. I pagamenti incrementali ($\tilde{X}_{i,j}$) di ogni generica cella (i,j) oggetto di stima sono descritti dal seguente processo:

$$\tilde{X}_{i,j} = \sum_{h=1}^{\tilde{K}_{i,j}} \tilde{Z}_{i,j,h} \quad (3.2.2)$$

¹⁵ IAA, 2004: Non-life insurance case study (appendice B).

in cui

- la v.a. $\tilde{K}_{i,j}$ descrive il numero dei sinistri della generazione i -esima che si stima vengano pagati nel j -esimo anno di sviluppo;
- la v.a. $\tilde{Z}_{i,j,h}$ individua il costo dell' h -esimo sinistro che si stima venga liquidato nella cella (i,j) .

Anche in tale contesto vengono considerate valide le ipotesi su cui si fonda il CRM classico:

- 1) le v.a. $\tilde{K}_{i,j}$ e $\tilde{Z}_{i,j,h}$ sono indipendenti nella cella (i,j) ;
- 2) le v.a. $\tilde{Z}_{i,j,h}$ sono tra loro indipendenti ed identicamente distribuite nella cella (i,j) .

La conoscenza delle v.a. $\tilde{X}_{i,j}$ relative ad ogni cella oggetto di stima permette di determinare la v.a. della riserva sinistri come:

$$\tilde{R} = \sum_{i=1}^t \sum_{j=t-i+2}^t \tilde{X}_{i,j}. \quad (3.2.3)$$

3.2.1 La variabile aleatoria del numero dei sinistri riservati

L'approccio presentato in letteratura, che è quello seguito nel presente capitolo, ipotizza che la v.a. $\tilde{K}_{i,j}$ sia descritta da una variabile casuale di Poisson misturata. Il parametro della Poisson semplice è individuato con il metodo deterministico prescelto dall'impresa per la stima del numero dei sinistri da liquidare. Nel contesto *reserve* la misturazione, data dal fattore di disturbo \tilde{q} , è inserita con un duplice scopo. La v.a. \tilde{q} , nel caso in cui sia unica a livello di riserva, serve per introdurre, in primo luogo, dipendenza sul numero dei sinistri tra le varie celle. Il fattore di disturbo inoltre introduce incertezza sul parametro stimato con il metodo deterministico; questo aspetto è di notevole importanza e molto più rilevante rispetto a quanto adottato dai modelli di analisi collettiva sviluppati in sede di tariffazione. È necessario, infatti, introdurre incertezza sul parametro della Poisson semplice per considerare l'errore legato al processo di stima di tali parametri effettuato con il metodo deterministico. La v.a. $\tilde{K}_{i,j}$ è descritta, come detto, da un processo di Poisson misturato:

$$\tilde{K}_{i,j} \sim Po(\hat{n}_{i,j}\tilde{q}) \quad (3.2.1.1)$$

dove $\hat{n}_{i,j}$ è il numero incrementale dei sinistri, stimato con il metodo deterministico, relativo alla cella (i,j) . Nel seguito, per semplicità, i valori stimati del numero dei sinistri verranno indicati con $n_{i,j}$ omettendo l'accento in quanto è implicita la considerazione di lavorare sulle celle inferiori del triangolo e dunque con valori stimati.

L'introduzione del fattore di disturbo permette di scomporre la volatilità del numero dei sinistri in ogni cella (i,j) in due componenti: la variabilità legata al metodo di stima del parametro $n_{i,j}$, cioè l'errore che si commette a stimare il numero dei sinistri con il metodo deterministico, e la variabilità di processo, cioè quella propria del solo processo poissoniano generatore del numero sinistri.

Per definire la v.a. $\tilde{K}_{i,j}$ occorre conoscere oltre al valore $n_{i,j}$ anche la variabile misturante. In primo luogo è necessario identificare la natura della v.a. \tilde{q} ; in letteratura sono state proposte due soluzioni

alternative¹⁶. La prima di queste prevede di considerare dei fattori di disturbo descritti da v.a. diverse, cioè indipendenti, per ogni singola cella (i,j); la seconda alternativa, invece, ipotizza un unico fattore di disturbo a livello totale di triangolo. Quest'ultima soluzione, che è quella adottata nel presente capitolo, risulta essere più appropriata in quanto permette di introdurre una dipendenza positiva su tutte le celle del numeri dei sinistri e non solo a livello di singola cella.

Dopo aver risolto tale aspetto è necessario quantificare le caratteristiche di \tilde{q} per poter calcolare i momenti della variabile casuale del numero dei sinistri. La conoscenza della varianza del fattore di disturbo permette, dopo aver formulato un'ipotesi distributiva¹⁷ su \tilde{q} , di determinare con il metodo dei momenti i parametri e, infine, le caratteristiche di interesse della v.a.

3.2.2 La variabile aleatoria del costo dei sinistri

L'identificazione della v.a. della *severity* ($\tilde{Z}_{i,j}$) per ogni cella del triangolo oggetto di stima è un processo più complesso rispetto a quanto visto per la v.a. del numero dei sinistri. Il metodo deterministico a costo medio prescelto dall'impresa permette di ricavare i valori attesi del costo dei singoli sinistri al variare dell'anno di generazione e di calendario. Per individuare le caratteristiche della riserva sinistri non è tuttavia sufficiente la sola conoscenza delle medie delle $\tilde{Z}_{i,j}$; l'impresa deve stimare anche i momenti di ordine superiore, come la variabilità, media quadratica e media cubica.

La stima della variabilità, cioè lo scarto quadratico medio, è ricavata implicitamente dal calcolo del coefficiente di variazione effettuato dall'impresa sul *database* relativo al costo dei sinistri liquidati negli esercizi precedenti. Il coefficiente di variazione, di solito, viene calcolato a livello di singola antidurata. L'assunzione implicita sottostante a tale meccanismo prevede che la variabilità relativa del costo sinistri sia identica all'interno di ogni antidurata e dunque non dipendente dall'anno di generazione. La conoscenza della media e varianza del costo dei singoli sinistri di ogni cella permette di ricavare il valore della rispettiva media quadratica.

Per poter quantificare il valore della media cubica è necessario effettuare un'ipotesi distributiva sulle *severity*; la formulazione di tale ipotesi può basarsi sulla stima preliminare, effettuata sul *database*, della distribuzione del costo dei sinistri relativo ad ogni antidurata. Anche in tale caso è necessario ipotizzare che la forma distributiva del costo dei sinistri di ogni antidurata sia indipendente dall'anno di generazione. La conoscenza dei momenti delle *severity* ricavati precedentemente nonché quella delle rispettive distribuzioni permette, grazie al metodo dei momenti, di calcolare le medie cubiche. L'identificazione delle distribuzioni delle v.a. $\tilde{Z}_{i,j}$ è, infine, necessaria per poter ricavare, tramite le simulazioni, la distribuzione della riserva sinistri.

Sulle v.a. del costo dei singoli sinistri, in modo analogo a quanto visto per il numero dei sinistri, è introdotto un fattore di disturbo. L'approccio presentato in letteratura prevede di introdurre una

¹⁶ Nulla vieta di considerare inoltre situazioni intermedie, cioè ipotizzare ad esempio dei fattori di disturbo diversi al variare delle antidurate.

¹⁷In questa sede, quando necessario, si ipotizza che la v.a. \tilde{q} segua una distribuzione Gamma a parametri uguali $\tilde{q} \sim \text{Gamma}(h, h)$. Applicando il metodo dei momenti è possibile determinare il valore del parametro h conoscendo $\sigma_{\tilde{q}}^2$; infatti $h = 1/\sigma_{\tilde{q}}^2$.

v.a. sul coefficiente di variazione delle $\tilde{Z}_{i,j}$ relativo ad ogni antidurata; in questo modo si introduce incertezza e dipendenza sul parametro che esprime la variabilità relativa delle *severity* di una stessa antidurata.

Nel seguito del presente capitolo si utilizza un criterio differente da quanto appena esposto per introdurre il fattore di disturbo; si applicata in modo moltiplicativo un'unica v.a. \tilde{p} ¹⁸ a tutte le *severity* oggetto di stima. Quando necessario inoltre si ipotizza che i costi dei singoli sinistri seguano una distribuzione Gamma in cui i parametri sono stimati con il metodo dei momenti.

Nel paragrafo seguente si analizzano le caratteristiche del triangolo del numero dei sinistri stimati, nell'ipotesi in cui ogni cella sia descritta da una v.a. di Poisson misturata e in cui si ipotizza un unico fattore di disturbo (\tilde{q}) a livello di triangolo (Paragrafo 3.3).

Nel Paragrafo 3.4 si studia la v.a. della riserva sinistri nell'ipotesi in cui sia presente il solo fattore di disturbo sulla componente del numero dei sinistri.

Successivamente, invece, (Paragrafo 3.5) si presentano le caratteristiche della riserva sinistri nell'ipotesi in cui vi sia il solo fattore di disturbo, unico a livello di triangolo, applicato alle v.a. delle *severity*.

Infine si presentano i risultati relativi alla riserva sinistri nel caso in cui questa sia descritta da un processo di Poisson composto misturato con fattore di disturbo applicato alle *severity* (Paragrafo 3.6).

¹⁸In questa sede, quando necessario, si ipotizzerà che la v.a. \tilde{p} segua una distribuzione Gamma a parametri uguali $\tilde{p} \sim \text{Gamma}(k, k)$.

3.3 Il numero dei sinistri posti a riserva

Per ipotesi la v.a. $\tilde{K}_{i,j}$ che descrive il numero dei sinistri incrementali stimati nella cella (i,j) segue una distribuzione di Poisson misturata, $\tilde{K}_{i,j} \sim Po(n_{i,j}\tilde{q})$, in cui il parametro $n_{i,j}$ è il numero di sinistri che l'impresa di assicurazione stima di dover pagare nell'antidurata j con riferimento ai sinistri verificatisi nella generazione i. La v.a. misturante, come noto, risulta essere definita solo per valori positivi e possiede media unitaria. Si ipotizza inoltre che il fattore \tilde{q} sia unico a livello totale di triangolo; in tale modo si introduce dipendenza positiva tra il numero dei sinistri stimati per ogni cella (i,j). Il numero dei sinistri a riserva (\tilde{N}^R), cioè il numero totale dei sinistri riservati dall'assicuratore, è pari alla somma del numero dei sinistri stimati per ogni cella (i,j) del triangolo inferiore:

$$\tilde{N}^R = \sum_i \sum_j \tilde{K}_{i,j} \quad \text{per } i=1,\dots,t; j=t-i+2,\dots,t(t+1). \quad (3.3.1)$$

Le caratteristiche fondamentali, date dalla media, varianza, coefficiente di variazione e asimmetria, di una generica v.a. $\tilde{K}_{i,j}$ sono state presentate precedentemente (Paragrafo 3.1.1) e risultano essere:

- $E(\tilde{K}_{i,j}) = n_{i,j}$
- $\text{var}(\tilde{K}_{i,j}) = n_{i,j} + n_{i,j}^2 \sigma_{\tilde{q}}^2$
- $CV(\tilde{K}_{i,j}) = \frac{\sigma(\tilde{K}_{i,j})}{E(\tilde{K}_{i,j})} = \sqrt{\frac{1}{n_{i,j}} + \sigma_{\tilde{q}}^2}$; $\lim_{n_{i,j} \rightarrow \infty} CV(\tilde{K}_{i,j}) = \sigma_{\tilde{q}}$
- $\gamma(\tilde{K}_{i,j}) = \frac{n_{i,j} + 3n_{i,j}^2 \sigma_{\tilde{q}}^2 + n_{i,j}^3 \gamma_{\tilde{q}} \sigma_{\tilde{q}}^3}{[n_{i,j} + n_{i,j}^2 \sigma_{\tilde{q}}^2]^{\frac{3}{2}}}$; $\lim_{n_{i,j} \rightarrow \infty} \gamma(\tilde{K}_{i,j}) = \gamma_{\tilde{q}}$.

I risultati a livello di riserva, cioè aggregando le v.a. $\tilde{K}_{i,j}$, sono invece presentati di seguito.

VALORE ATTESO

Utilizzando la proprietà di linearità della media si ottiene:

$$E(\tilde{N}^R) = \sum_i \sum_j E(\tilde{K}_{i,j}) = \sum_i \sum_j n_{i,j}. \quad (3.3.2)$$

VARIANZA

La varianza della somma di più v.a. è pari alla somma delle rispettive varianze, più le covarianze riferite a tutte le coppie di v.a. differenti. Individuando sinteticamente le celle appartenenti al triangolo superiore con la grandezza $D^{(t)} = \{i+j \leq t+1\}$ e quelle, oggetto di stima, appartenenti al

triangolo inferiore con la grandezza $B^{(t)} = \{i + j > t + 1\}$, è possibile scrivere la varianza della v.a. \tilde{N}^R come segue:

$$\text{var}(\tilde{N}^R) = \sum_i \sum_j \text{var}(\tilde{K}_{i,j}) + \sum_{i,j \in B^{(t)}} \sum_{\substack{h,k \in B^{(t)} \\ (h \neq i \vee k \neq j)}} \text{cov}(\tilde{K}_{i,j}; \tilde{K}_{h,k}).$$

La covarianza è nulla se e solo se le v.a. sono tra loro incorrelate; in questo contesto non è pari a zero ma positiva in quanto la v.a. \tilde{q} introduce dipendenza positiva tra il numero dei sinistri riservati nelle celle del triangolo.

La covarianza può essere scomposta nella differenza tra la media del prodotto e il prodotto delle medie della somma delle differenti v.a. in esame:

$$\sum_{i,j \in B^{(t)}} \sum_{\substack{h,k \in B^{(t)} \\ (h \neq i \vee k \neq j)}} \text{cov}(\tilde{K}_{i,j}; \tilde{K}_{h,k}) = \sum_{i,j \in B^{(t)}} \sum_{\substack{h,k \in B^{(t)} \\ (h \neq i \vee k \neq j)}} \left[E(\tilde{K}_{i,j} \tilde{K}_{h,k}) - E(\tilde{K}_{i,j}) E(\tilde{K}_{h,k}) \right],$$

il primo termine, cioè la media del prodotto, grazie alla proprietà della media condizionata, risulta essere:

$$\sum_{i,j \in B^{(t)}} \sum_{\substack{h,k \in B^{(t)} \\ (h \neq i \vee k \neq j)}} E(\tilde{K}_{i,j} \tilde{K}_{h,k}) = \sum_{i,j \in B^{(t)}} \sum_{\substack{h,k \in B^{(t)} \\ (h \neq i \vee k \neq j)}} E \left[E(\tilde{K}_{i,j} \tilde{K}_{h,k}) \mid \tilde{q} \right]$$

dove ora, grazie al condizionamento che ha permesso di sciogliere la dipendenza, le v.a. seguono un processo di Poisson semplice di parametro (nq). Sviluppando la relazione precedente si ricava,

$$\sum_{i,j \in B^{(t)}} \sum_{\substack{h,k \in B^{(t)} \\ (h \neq i \vee k \neq j)}} E \left[E(\tilde{K}_{i,j} \tilde{K}_{h,k}) \mid \tilde{q} \right] = \sum_{i,j \in B^{(t)}} \sum_{\substack{h,k \in B^{(t)} \\ (h \neq i \vee k \neq j)}} \left[E(\tilde{q} n_{i,j}) (E(\tilde{q} n_{h,k})) \right] = E(\tilde{q}^2) \sum_{i,j \in B^{(t)}} \sum_{\substack{h,k \in B^{(t)} \\ (h \neq i \vee k \neq j)}} (n_{i,j} n_{h,k}).$$

La covarianza può essere quindi scritta come:

$$\sum_{i,j \in B^{(t)}} \sum_{\substack{h,k \in B^{(t)} \\ (h \neq i \vee k \neq j)}} \text{cov}(\tilde{K}_{i,j}; \tilde{K}_{h,k}) = \sigma_{\tilde{q}}^2 \sum_{i,j \in B^{(t)}} \sum_{\substack{h,k \in B^{(t)} \\ (h \neq i \vee k \neq j)}} (n_{i,j} n_{h,k}).$$

La varianza della somma delle v.a. $\tilde{K}_{i,j}$ risulta essere:

$$\text{var}(\tilde{N}^R) = \sum_i \sum_j (n_{i,j} + n_{i,j}^2 \sigma_{\tilde{q}}^2) + \sigma_{\tilde{q}}^2 \sum_{i,j \in B^{(t)}} \sum_{\substack{h,k \in B^{(t)} \\ (h \neq i \vee k \neq j)}} (n_{i,j} n_{h,k}) = \sum_i \sum_j n_{i,j} + \sigma_{\tilde{q}}^2 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} \right)^2. \quad (3.3.3)$$

La varianza è quindi pari alla somma di due termini:

- $\sum_i \sum_j n_{i,j}$, il primo addendo è la media della somma della v.a. $\tilde{K}_{i,j}$, cioè il numero totale dei sinistri riservati;
- $\sigma_{\tilde{q}}^2 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} \right)^2$, il secondo termine, invece, è il prodotto tra il quadrato del numero atteso complessivo dei sinistri e la varianza del fattore di disturbo.

COEFFICIENTE DI VARIAZIONE

Il coefficiente di variazione permette di individuare la variabilità relativa della v.a. in esame ed è costruito come rapporto tra la *standard deviation* e la media:

$$CV(\tilde{N}^R) = \frac{\sigma\left(\sum_i \sum_j \tilde{K}_{i,j}\right)}{E\left(\sum_i \sum_j \tilde{K}_{i,j}\right)} = \frac{\sqrt{\sum_i \sum_j n_{i,j} + \sigma_{\tilde{q}}^2 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j}\right)^2}}{\sum_i \sum_j n_{i,j}} = \sqrt{\frac{\sum_i \sum_j n_{i,j}}{\left(\sum_i \sum_j n_{i,j}\right)^2} + \sigma_{\tilde{q}}^2}. \quad (3.3.4)$$

Il coefficiente di variazione della v.a. \tilde{N}^R dipende da due termini; il primo è la varianza di \tilde{q} mentre il secondo termine è pari al rapporto tra il numero atteso dei sinistri riservati e il quadrato del valore atteso degli stessi sinistri riservati.

È di notevole interesse comprendere l'evoluzione della variabilità relativa al crescere del parametro dimensionale, cioè all'aumentare del numero dei sinistri riservati dall'impresa. A tale scopo si studia il limite del coefficiente di variazione al tendere ad infinito del numero dei sinistri. Per calcolare tale valore è conveniente effettuare la sostituzione di $n_{i,j}$ con $N\delta_{i,j}$, dove N individua il numero totale dei sinistri posti a riserva, mentre $\delta_{i,j}$ è la percentuale del numero totale dei sinistri stimati riferita alla cella (i,j). Valgono quindi le seguenti relazioni:

$$n_{i,j} = N\delta_{i,j}$$

dove

- $N = \sum_i \sum_j n_{i,j}$
- $0 < \delta_{i,j} < 1$
- $\sum_i \sum_j \delta_{i,j} = 1.$

Il coefficiente di variazione a seguito della sostituzione risulta essere

$$CV(\tilde{N}^R) = \sqrt{\sigma_{\tilde{q}}^2 + \frac{N \sum_i \sum_j \delta_{i,j}}{N^2 \left(\sum_i \sum_j \delta_{i,j}\right)^2}},$$

il limite per N che tende ad infinito è pari a:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} CV(\tilde{N}^R) = \sigma_{\tilde{q}}. \quad (3.3.5)$$

Il coefficiente di variazione al crescere del numero dei sinistri riservati è influenzato proporzionalmente in modo sempre più consistente dalla *standard deviation* del fattore di disturbo; quest'ultimo è interpretabile come un elemento di variabilità sistematica e quindi ineliminabile a cui è soggetta l'impresa di assicurazione. L'incremento di volume del portafoglio non porta dunque ad una compensazione e diversificazione completa dei rischi.

ASIMMETRIA

Il rapporto tra il momento centrale terzo e la *standard deviation* al cubo fornisce l'indice di asimmetria che, come il coefficiente di variazione, è un numero puro, cioè adimensionale. L'indice di asimmetria è un indicatore di forma e permette di comprendere se la v.a. in esame sia simmetrica o meno. Valori positivi dell'indice comportano una distribuzione della v.a. con "coda" più marcata a

destra; la v.a. può assumere quindi determinazioni molto estreme con una probabilità non trascurabile, viceversa nel caso in cui l'indice sia negativo.

L'indice di asimmetria riferito alla somma delle v.a. $\tilde{K}_{i,j}$ è costruito come segue.

$$\gamma(\tilde{N}^R) = \frac{\mu_3\left(\sum_i \sum_j \tilde{K}_{i,j}\right)}{\sigma^3\left(\sum_i \sum_j \tilde{K}_{i,j}\right)}$$

in cui il momento centrale terzo è pari a:

$$\mu_3\left(\sum_i \sum_j \tilde{K}_{i,j}\right) = \alpha_3\left(\sum_i \sum_j \tilde{K}_{i,j}\right) - 3\alpha_1\left(\sum_i \sum_j \tilde{K}_{i,j}\right) \text{var}\left(\sum_i \sum_j \tilde{K}_{i,j}\right) - \left[\alpha_1\left(\sum_i \sum_j \tilde{K}_{i,j}\right)\right]^3$$

dove $\alpha_j(\tilde{x}) = E(\tilde{x}^j)$.

È possibile dimostrare (Appendice A.1) che il momento centrale terzo della v.a. \tilde{N}^R è pari a:

$$\begin{aligned} \mu_3\left(\sum_i \sum_j \tilde{K}_{i,j}\right) &= \\ E(\tilde{q}^3)\left(\sum_i \sum_j n_{i,j}\right)^3 + 3E(\tilde{q}^2)\left(\sum_i \sum_j n_{i,j}\right)^2 + \sum_i \sum_j n_{i,j} - 3\left[\sigma_{\tilde{q}}^2\left(\sum_i \sum_j n_{i,j}\right)^3 + \left(\sum_i \sum_j n_{i,j}\right)^2\right] - \left(\sum_i \sum_j n_{i,j}\right)^3 &= \\ \left(\sum_i \sum_j n_{i,j}\right)^3 \underbrace{\left[E(\tilde{q}^3) - 3\sigma_{\tilde{q}}^2 - 1\right]}_{\mu_3(\tilde{q})} + 3E(\tilde{q}^2)\left(\sum_i \sum_j n_{i,j}\right)^2 + \sum_i \sum_j n_{i,j} - 3\left(\sum_i \sum_j n_{i,j}\right)^2 &= \\ \left(\sum_i \sum_j n_{i,j}\right)^3 \gamma_{\tilde{q}}\sigma_{\tilde{q}}^3 + 3\left[E(\tilde{q}^2) - 1\right]\left(\sum_i \sum_j n_{i,j}\right)^2 + \sum_i \sum_j n_{i,j} &= \\ \left(\sum_i \sum_j n_{i,j}\right)^3 \gamma_{\tilde{q}}\sigma_{\tilde{q}}^3 + 3\sigma_{\tilde{q}}^2\left(\sum_i \sum_j n_{i,j}\right)^2 + \sum_i \sum_j n_{i,j}. & \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

Il cumulante terzo della somma delle v.a. $\tilde{K}_{i,j}$ è costituito dalla somma di tre termini:

- $\left(\sum_i \sum_j n_{i,j}\right)^3 \gamma_{\tilde{q}}\sigma_{\tilde{q}}^3$, il primo addendo è pari al prodotto tra momento centrale terzo del fattore di disturbo e il cubo del numero atteso complessivo dei sinistri riservati;
- $3\sigma_{\tilde{q}}^2\left(\sum_i \sum_j n_{i,j}\right)^2$, il secondo addendo è pari al triplo prodotto tra la varianza del fattore \tilde{q} e il quadrato del numero atteso dei sinistri riservati;
- $\sum_i \sum_j n_{i,j}$, l'ultimo addendo, infine, risulta essere il numero atteso complessivo dei sinistri posti a riserva.

Il primo termine del momento centrale terzo è l'unico che può essere negativo e il suo segno è determinato da quello dell'asimmetria di \tilde{q} . Nel caso in cui il primo termine sia negativo, cioè $\gamma_{\tilde{q}} < 0$, e in grado di compensare il valore dei restanti due addendi si ottiene un valore del momento centrale terzo minore di zero; in tale circostanza quindi anche il valore assunto dell'asimmetria della somma delle v.a. $\tilde{K}_{i,j}$ risulta negativo.

Il denominatore dell'indice di asimmetria è lo scarto quadratico medio al cubo:

$$\sigma^3(\tilde{N}^R) = \left[\sum_i \sum_j n_{i,j} + \sigma_{\tilde{q}}^2 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}.$$

L'indice di asimmetria della somma delle v.a. $\tilde{K}_{i,j}$ descritte da un processo di Poisson misturato e dipendenti tra loro a causa del fattore di disturbo \tilde{q} è pari a:

$$\gamma(\tilde{N}^R) = \frac{\left(\sum_i \sum_j n_{i,j} \right)^3 \gamma_{\tilde{q}} \sigma_{\tilde{q}}^3 + 3 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} \right)^2 \sigma_{\tilde{q}}^2 + \sum_i \sum_j n_{i,j}}{\left[\sum_i \sum_j n_{i,j} + \sigma_{\tilde{q}}^2 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.3.7)$$

Il valore asintotico che assume l'indice di asimmetria al crescere della dimensione dell'impresa di assicurazione, cioè al crescere del numero dei sinistri in portafoglio, può essere calcolato, come fatto precedentemente, effettuando la sostituzione $n_{i,j} = N\delta_{i,j}$:

$$\gamma(\tilde{N}^R) = \frac{N^3 \left(\sum_i \sum_j \delta_{i,j} \right)^3 \gamma_{\tilde{q}} \sigma_{\tilde{q}}^3 + 3N^2 \left(\sum_i \sum_j \delta_{i,j} \right)^2 \sigma_{\tilde{q}}^2 + \sum_i \sum_j N\delta_{i,j}}{\left[N \sum_i \sum_j \delta_{i,j} + \sigma_{\tilde{q}}^2 N^2 \left(\sum_i \sum_j \delta_{i,j} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}},$$

facendo tendere N ad infinito si ottiene,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \gamma(\tilde{N}^R) = \frac{\left(\sum_i \sum_j \delta_{i,j} \right)^3 \gamma_{\tilde{q}} \sigma_{\tilde{q}}^3}{\sigma_{\tilde{q}}^3 \left(\sum_i \sum_j \delta_{i,j} \right)^3} = \gamma_{\tilde{q}}. \quad (3.3.8)$$

Al crescere del parametro dimensionale dell'impresa, l'asimmetria del processo generatore del numero sinistri tende a quella assunta dal fattore di disturbo. La presenza della v.a. \tilde{q} risulta essere un fattore sistematico e ineliminabile a cui è esposto l'assicuratore; al crescere del numero dei sinistri riservati, infatti, sia la variabilità relativa sia l'asimmetria risultano essere influenzate sempre di più, rispettivamente, dallo scarto quadratico medio e dall'asimmetria del fattore di disturbo.

CASO STUDIO: IL NUMERO DI SINISTRI POSTI A RISERVA

Di seguito è proposta un'analisi comparata tra due diverse compagnie di assicurazione operanti nel ramo RCA. Le imprese considerate differiscono tra loro per la dimensione del portafoglio; l'impresa SIFA è circa dieci volte più piccola rispetto all'impresa AMASES. L'obiettivo dell'analisi è quello di studiare le caratteristiche del numero dei sinistri riservati al variare della componente dimensionale dell'impresa e al variare dell'intensità del fattore di disturbo ($\sigma_{\tilde{q}}$); nel seguito si ipotizzano diversi valori di $\sigma_{\tilde{q}}$ e si assume che il fattore di disturbo segua una distribuzione Gamma di parametri uguali, $\tilde{q} \sim \text{Gamma}(h, h)$. Quando necessario, infine, le caratteristiche della v.a. \tilde{q} sono stimate con il metodo dei momenti (Appendice A.3).

Di seguito (figure: 3.3.1 e 3.3.3) sono presentati i triangoli di *run off* relativi al numero dei sinistri cumulati delle imprese SIFA e AMASES. I valori stimati sono stati ottenuti con l'approccio *Chain Ladder*, applicato separatamente sul numero dei sinistri e sul costo medio (*frequency-severity*). Dal numero dei sinistri cumulati, infine, sono stati ricavati i valori incrementali ($n_{i,j}$) relativi ad ogni cella oggetto di stima (figure: 3.3.2 e 3.3.4).

Fig.3.3.1: Triangolo di *run off* del numero dei sinistri cumulati-SIFA

Anno di generazione	Anno di sviluppo												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	12+
1	34.433	48.229	49.819	50.387	50.665	50.816	50.920	50.975	51.004	51.036	51.053	51.072	51.108
2	35.475	49.193	50.693	51.241	51.451	51.584	51.635	51.679	51.706	51.726	51.742	51.761	51.797
3	37.004	50.824	52.351	52.788	52.981	53.053	53.099	53.128	53.145	53.162	53.179	53.199	53.236
4	37.038	50.669	52.131	52.631	52.795	52.875	52.938	52.977	53.003	53.027	53.044	53.064	53.101
5	36.849	50.265	51.828	52.251	52.432	52.539	52.620	52.662	52.687	52.710	52.727	52.747	52.784
6	39.171	51.772	53.364	53.924	54.197	54.372	54.527	54.570	54.596	54.620	54.638	54.658	54.697
7	37.492	49.774	51.831	52.571	52.961	53.248	53.332	53.375	53.400	53.424	53.441	53.461	53.499
8	34.188	46.433	48.371	49.132	49.427	49.563	49.641	49.681	49.704	49.726	49.742	49.761	49.796
9	31.308	42.051	43.958	44.597	44.811	44.933	45.004	45.041	45.062	45.082	45.096	45.113	45.145
10	30.357	40.474	42.085	42.564	42.768	42.885	42.953	42.987	43.008	43.027	43.041	43.057	43.087
11	30.717	41.799	43.258	43.751	43.960	44.080	44.150	44.185	44.206	44.226	44.240	44.257	44.288
12	30.590	41.538	42.988	43.478	43.686	43.805	43.875	43.910	43.931	43.950	43.964	43.981	44.012

Fig.3.3.2: Triangolo *di run off* del numero dei sinistri incrementali-SIFA

		Anno di sviluppo											
Anno di	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	12+
generazione													
1													36
2												19	36
3											17	20	37
4										23	17	20	37
5									25	23	17	20	37
6								44	26	24	18	20	39
7							84	43	25	23	17	20	38
8						135	78	40	24	22	16	19	35
9					213	123	71	36	21	20	15	17	32
10				479	204	117	68	34	20	19	14	16	30
11			1.459	493	209	120	70	35	21	19	14	16	31
12		10.948	1.450	489	208	120	69	35	21	19	14	16	31

Fig.3.3.3: Triangolo *di run off* del numero dei sinistri cumulati-AMASES

		Anno di sviluppo											
Anno di	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	12+
generazione													
1	284.236	395.010	407.622	412.348	414.554	415.754	416.509	417.012	417.415	417.820	418.070	418.272	418.767
2	274.524	367.933	379.865	383.968	385.970	387.096	387.811	388.278	388.747	389.065	389.285	389.473	389.934
3	284.017	374.422	386.345	390.312	392.114	393.119	393.780	394.370	394.770	395.011	395.241	395.432	395.900
4	299.605	400.289	412.734	416.404	417.964	418.849	419.473	419.855	420.157	420.494	420.739	420.943	421.441
5	308.092	411.618	426.850	431.376	433.420	434.608	435.384	435.926	436.350	436.700	436.955	437.166	437.683
6	295.813	391.103	405.954	410.705	413.070	414.337	415.277	415.779	416.183	416.517	416.760	416.962	417.455
7	288.418	381.906	399.078	405.364	408.304	410.063	410.807	411.304	411.704	412.034	412.274	412.474	412.962
8	285.940	387.422	407.558	415.654	419.682	420.917	421.681	422.191	422.601	422.940	423.187	423.391	423.892
9	290.023	386.767	409.717	418.962	421.393	422.632	423.399	423.912	424.324	424.664	424.912	425.117	425.620
10	280.008	374.305	396.095	401.473	403.802	404.990	405.725	406.216	406.611	406.937	407.175	407.371	407.854
11	277.412	369.192	384.552	389.774	392.035	393.189	393.902	394.379	394.762	395.079	395.309	395.500	395.968
12	252.239	337.580	351.625	356.400	358.468	359.522	360.175	360.610	360.961	361.251	361.461	361.636	362.064

Fig.3.3.4: Triangolo *di run off* del numero dei sinistri incrementali-AMASES

		Anno di sviluppo											
Anno di	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	12+
generazione													
1													495
2												188	461
3											230	191	468
4										337	245	203	498
5									424	350	255	211	517
6								502	404	334	243	201	493
7							744	497	400	330	240	199	488
8						1.235	764	510	410	339	247	204	501
9					2.431	1.240	767	512	412	340	248	205	503
10				5.378	2.329	1.188	735	491	395	326	237	197	482
11			15.360	5.222	2.261	1.153	714	477	383	317	230	191	468
12		85.342	14.045	4.775	2.068	1.055	652	436	351	290	211	175	428

Le analisi di sensibilità condotte nel seguito sono basate su quattro valori differenti dello scarto quadratico medio del fattore di disturbo; il 2%, 3%, 5% e 8%. Quando opportuno, inoltre, si considera un *range* più ampio per $\sigma_{\tilde{q}}$.

I valori attesi, le varianze e i rispettivi scarti quadratici medi del numero dei sinistri riservati per le imprese SIFA e AMASES sono presentati nella tabella seguente (fig: 3.3.5).

Fig.3.3.5: Media, varianza e scarto quadratico medio della v.a. \tilde{N}^R al variare della *standard deviation* del fattore di disturbo

$\sigma_{\tilde{q}}$	media		varianza		sqm	
	SIFA	AMASES	SIFA	AMASES	SIFA	AMASES
2%	18.636	169.380	157.561	11.645.197	396,94	3.412,51
3%	18.636	169.380	331.218	25.989.967	575,52	5.098,04
5%	18.636	169.380	886.918	71.893.234	941,76	8.478,99
8%	18.636	169.380	2.241.438	183.782.447	1.497,14	13.556,64

Dal confronto dei due valori attesi si osserva che la compagnia AMASES possiede un portafoglio di circa dieci volte superiore a quello dell'impresa SIFA. Le medie del numero dei sinistri riservati sono costanti per le due imprese in quanto il valore atteso non è influenzato da $\sigma_{\tilde{q}}$.

Nella tabella successiva (fig: 3.3.6) sono riportati i valori del coefficiente di variazione delle imprese relativo sia alle singole generazioni che a livello complessivo di riserva. È stato stimato, inoltre, il valore del coefficiente di correlazione lineare (ρ) nell'ipotesi in cui la dipendenza lineare tra le celle oggetto di stima del triangolo sia la stessa.

Fig.3.3.6: Coefficiente di variazione, per singola generazione, e coefficiente di correlazione lineare a livello aggregato del numero di sinistri riservati al variare della *standard deviation* del fattore di disturbo

COEFFICIENTE DI VARIAZIONE								
$\sigma_{\tilde{q}}$	2%		3%		5%		8%	
generazione	SIFA	AMASES	SIFA	AMASES	SIFA	AMASES	SIFA	AMASES
1	16,79%	4,92%	16,93%	5,40%	17,40%	6,72%	18,49%	9,18%
2	13,54%	4,41%	13,73%	4,94%	14,30%	6,36%	15,60%	8,91%
3	11,75%	3,90%	11,96%	4,50%	12,61%	6,02%	14,08%	8,67%
4	10,32%	3,43%	10,56%	4,10%	11,29%	5,73%	12,90%	8,47%
5	9,27%	3,11%	9,54%	3,83%	10,34%	5,54%	12,08%	8,35%
6	7,92%	2,93%	8,23%	3,69%	9,15%	5,44%	11,08%	8,28%
7	6,63%	2,73%	6,99%	3,53%	8,06%	5,33%	10,19%	8,21%
8	5,58%	2,52%	6,01%	3,37%	7,22%	5,23%	9,55%	8,15%
9	4,72%	2,35%	5,22%	3,24%	6,58%	5,15%	9,07%	8,09%
10	3,74%	2,20%	4,36%	3,14%	5,91%	5,08%	8,60%	8,05%
11	2,83%	2,09%	3,61%	3,06%	5,39%	5,04%	8,25%	8,02%
12	2,18%	2,02%	3,12%	3,02%	5,07%	5,01%	8,05%	8,01%
TOTALE	2,13%	2,01%	3,09%	3,01%	5,05%	5,01%	8,03%	8,00%
ρ	0,131537	0,486357	0,230687	0,652551	0,407982	0,821489	0,596166	0,916356

Analizzando i valori contenuti in tabella si osserva, per entrambe le imprese, un comportamento decrescente del coefficiente di variazione al crescere della generazione considerata; questo andamento è determinato dall'incremento del numero dei sinistri riservato nelle generazioni più recenti. I differenti valori assunti dallo scarto quadratico medio del fattore di disturbo non modificano il *trend* del coefficiente di variazione al variare della generazione, bensì ne incrementano solamente i valori; al crescere di $\sigma_{\tilde{q}}$, infatti la variabilità relativa del numero dei sinistri cresce a parità di generazione per entrambi i portafogli considerati (figure: 3.3.7 e 3.3.8). A fronte delle maggiori dimensioni l'impresa AMASES possiede una variabilità relativa più contenuta rispetto all'impresa SIFA per ogni valore di $\sigma_{\tilde{q}}$ considerato (figure: 3.3.9, 3.3.10, 3.3.11 e 3.3.12).

Fig.3.3.7: Coefficiente di variazione per generazione al variare di $\sigma_{\tilde{q}}$ per l'impresa SIFA

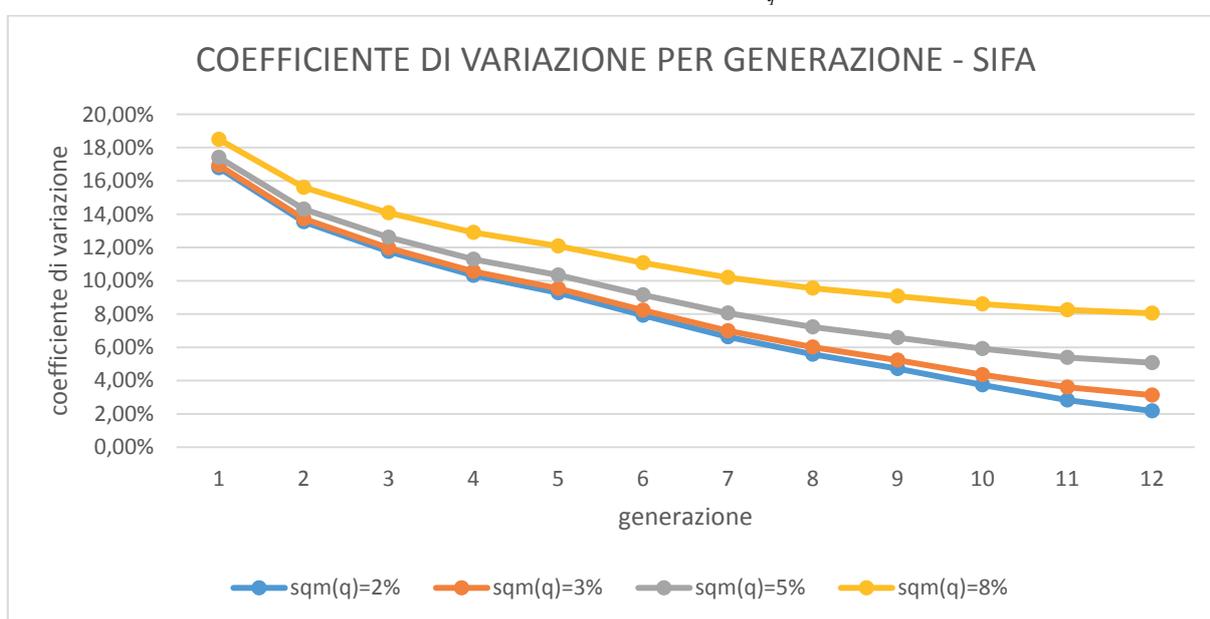


Fig.3.3.8: Coefficiente di variazione per generazione al variare di $\sigma_{\tilde{q}}$ per l'impresa AMASES

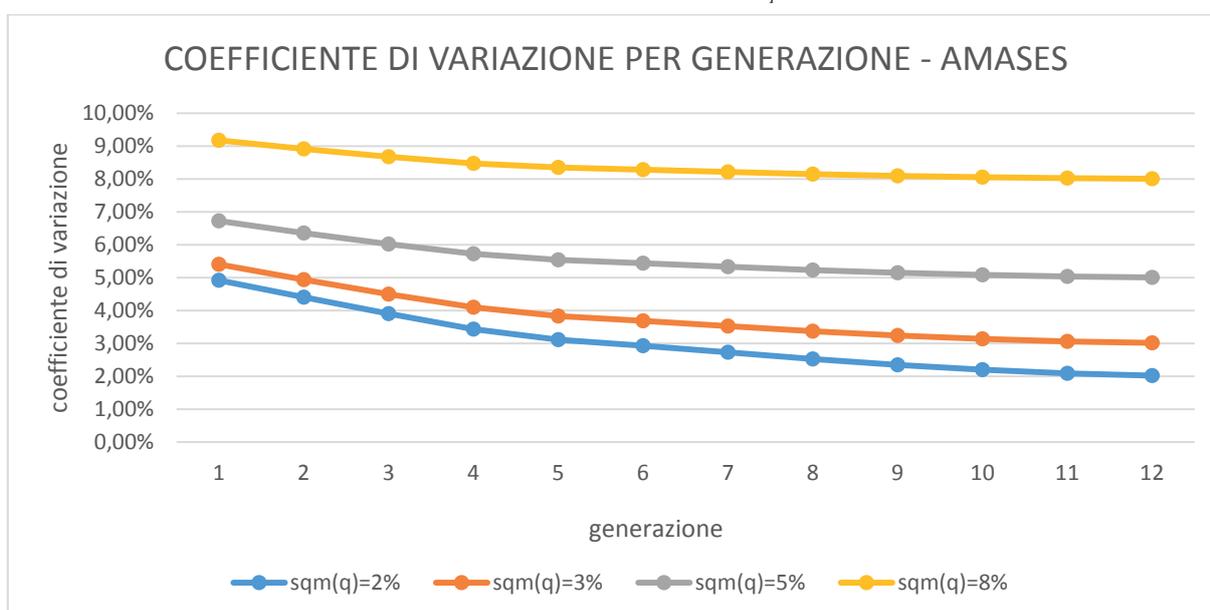


Fig.3.3.9: Coefficiente di variazione per generazione delle imprese SIFA e AMASES posto $\sigma_{\tilde{q}} = 2\%$

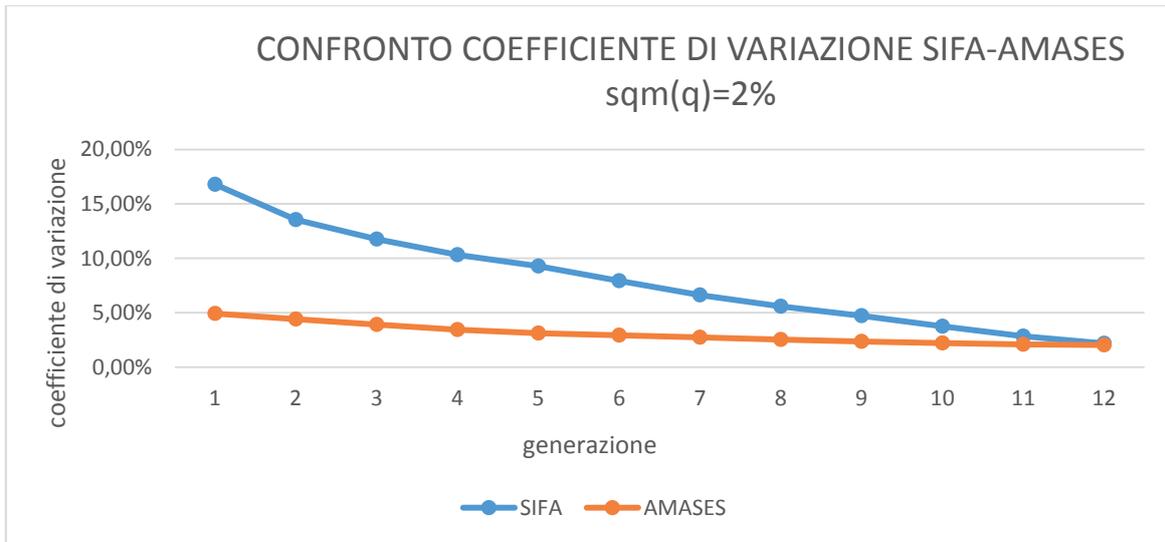


Fig.3.3.10: Coefficiente di variazione per generazione delle imprese SIFA e AMASES posto $\sigma_{\tilde{q}} = 3\%$

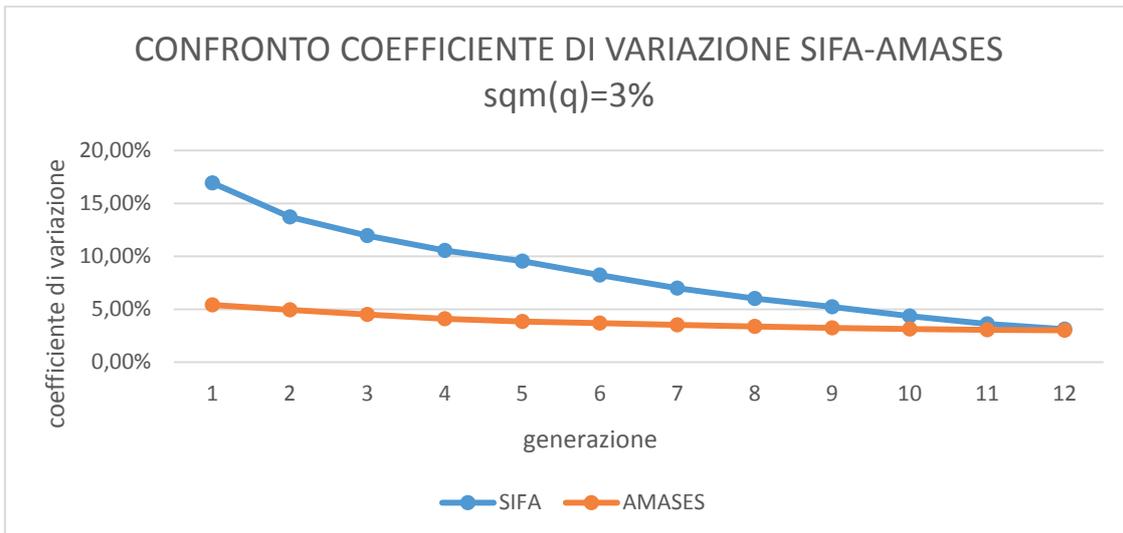


Fig.3.3.11: Coefficiente di variazione per generazione delle imprese SIFA e AMASES posto $\sigma_{\tilde{q}} = 5\%$

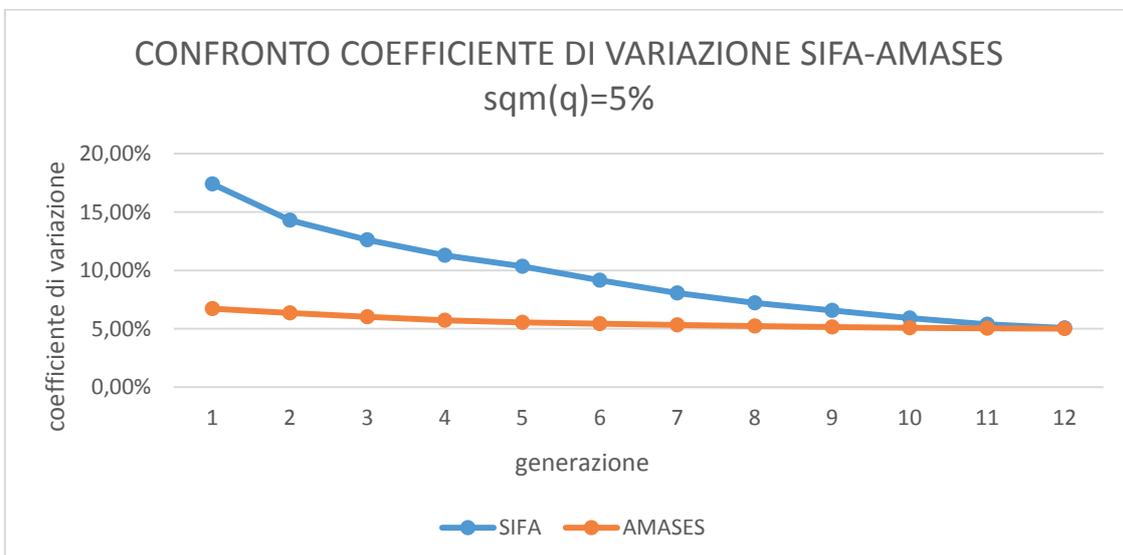
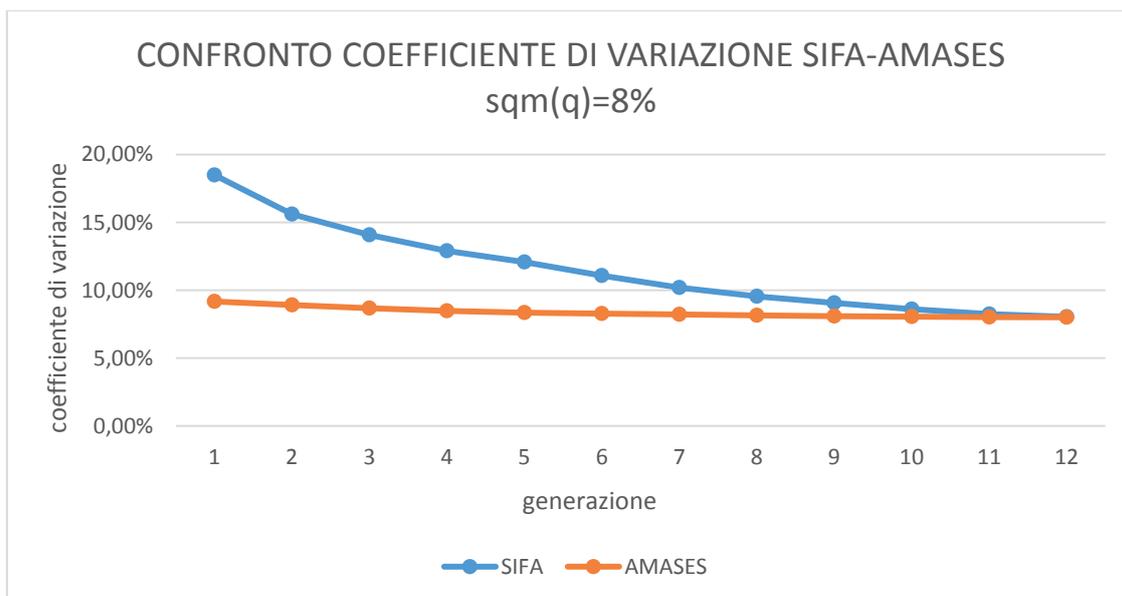


Fig.3.3.12: Coefficiente di variazione per generazione delle imprese SIFA e AMASES posto $\sigma_{\tilde{q}} = 8\%$



Considerazioni analoghe valgono inoltre a livello totale del numero dei sinistri riservati. Il coefficiente di variazione dell'impresa SIFA, al variare di $\sigma_{\tilde{q}}$, è sempre maggiore rispetto al valore analogo dell'impresa AMASES; anche in questo caso la spiegazione risiede nella diversa numerosità dei sinistri riservati da parte delle due imprese.

I valori asintotici dei coefficienti di variazione, al variare del fattore di disturbo, corrispondono ai rispettivi $\sigma_{\tilde{q}}$. Per l'impresa SIFA si riscontrano valori di variabilità relativa prossimi ai corrispondenti scarti quadratici medi del fattore di disturbo; l'effetto dimensionale, quindi, anche per l'impresa più piccola gioca un ruolo predominante. Con riferimento alla compagnia AMASES si ottengono, come atteso, valori dei coefficienti di variazione ancora più vicini a quelli di $\sigma_{\tilde{q}}$.

Nell'ultima riga della tabella infine sono riportate le stime del coefficiente di correlazione lineare a livello totale di riserva. Il valore di ρ cresce, per entrambi gli assicuratori, al crescere della variabilità del fattore di disturbo; il fattore \tilde{q} dunque introduce una dipendenza positiva sulle celle del triangolo crescente rispetto a $\sigma_{\tilde{q}}$. Si osservano, infine, valori di ρ più elevati per l'impresa di maggiori dimensioni.

Nella tabella presentata di seguito (fig: 3.3.13) sono riportati i valori dei coefficienti di variazione a livello totale di riserva calcolati nei casi estremi di perfetta incorrelazione ($\rho = 0$) e piena correlazione lineare ($\rho = 1$) tra tutte le celle del triangolo; sono inseriti inoltre i valori effettivi delle variabilità relative delle due imprese in modo tale da poter cogliere l'effetto della dipendenza lineare realmente presente sul numero dei sinistri riservati delle compagnie SIFA e AMASES.

Fig.3.3.13: Coefficienti di variazione per le imprese SIFA e AMASES, al variare di $\sigma_{\bar{q}}$, calcolati in ipotesi di indipendenza, piena dipendenza e effettiva dipendenza lineare

$\sigma_{\bar{q}}$	CV SIFA			CV AMASES		
	$\rho = 0$	esempio	$\rho = 1$	$\rho = 0$	esempio	$\rho = 1$
2%	1,41%	2,13%	4,63%	1,07%	2,01%	2,67%
3%	1,94%	3,09%	5,36%	1,59%	3,01%	3,54%
5%	3,09%	5,05%	6,98%	2,62%	5,01%	5,39%
8%	4,86%	8,03%	9,61%	4,19%	8,00%	8,26%

Nella tabella seguente (fig: 3.3.14) sono esposti i valori dell'indice di asimmetria delle due imprese calcolati per singola generazione e a livello aggregato al variare dello scarto quadratico medio del fattore di disturbo.

Fig.3.3.14: Indice di asimmetria per singola generazione e lineare a livello aggregato del numero di sinistri riservati al variare della *standard deviation* del fattore di disturbo.

ASIMMETRIA								
$\sigma_{\bar{q}}$	2%		3%		5%		8%	
	SIFA	AMASES	SIFA	AMASES	SIFA	AMASES	SIFA	AMASES
1	0,170245	0,057326	0,174660	0,070694	0,188373	0,104417	0,219491	0,161508
2	0,138378	0,053134	0,143815	0,067622	0,160455	0,102896	0,197035	0,160932
3	0,120924	0,049290	0,127152	0,064997	0,145958	0,101730	0,186222	0,160524
4	0,107044	0,045986	0,114088	0,062940	0,135033	0,100921	0,178618	0,160264
5	0,097014	0,043980	0,104796	0,061810	0,127584	0,100526	0,173781	0,160145
6	0,084274	0,042957	0,093254	0,061279	0,118839	0,100355	0,168562	0,160096
7	0,072290	0,041949	0,082795	0,060791	0,111591	0,100209	0,164718	0,160055
8	0,062962	0,041091	0,075080	0,060412	0,106826	0,100103	0,162504	0,160027
9	0,055660	0,040509	0,069450	0,060179	0,103783	0,100043	0,161262	0,160011
10	0,048089	0,040186	0,064225	0,060061	0,101414	0,100014	0,160420	0,160003
11	0,042442	0,040040	0,061024	0,060012	0,100278	0,100003	0,160074	0,160001
12	0,040146	0,040003	0,060047	0,060001	0,100011	0,100000	0,160003	0,160000
TOTALE	0,040079	0,040001	0,060025	0,060000	0,100006	0,100000	0,160001	0,160000
$\gamma_{\bar{q}}$	0,040000		0,060000		0,100000		0,160000	

L'asimmetria, sia per l'impresa SIFA che per AMASES, assume valori decrescenti nelle generazioni (figure: 3.3.15 e 3.3.16) in virtù dell'incremento del numero di sinistri riservati. L'effetto dimensionale inoltre porta a valori dell'indice di asimmetria minori per l'impresa AMASES rispetto a SIFA a parità di generazione (figure: 3.3.17, 3.3.18, 3.3.19 e 3.3.20).

Risultati analoghi valgono se si considera la riserva del numero sinistri a livello complessivo; la maggiore dimensione del portafoglio determina valori dell'asimmetria, ancora una volta, più bassi per la compagnia AMASES.

Fig.3.3.15: Indice di asimmetria per generazione al variare di $\sigma_{\bar{q}}$ per l'impresa SIFA

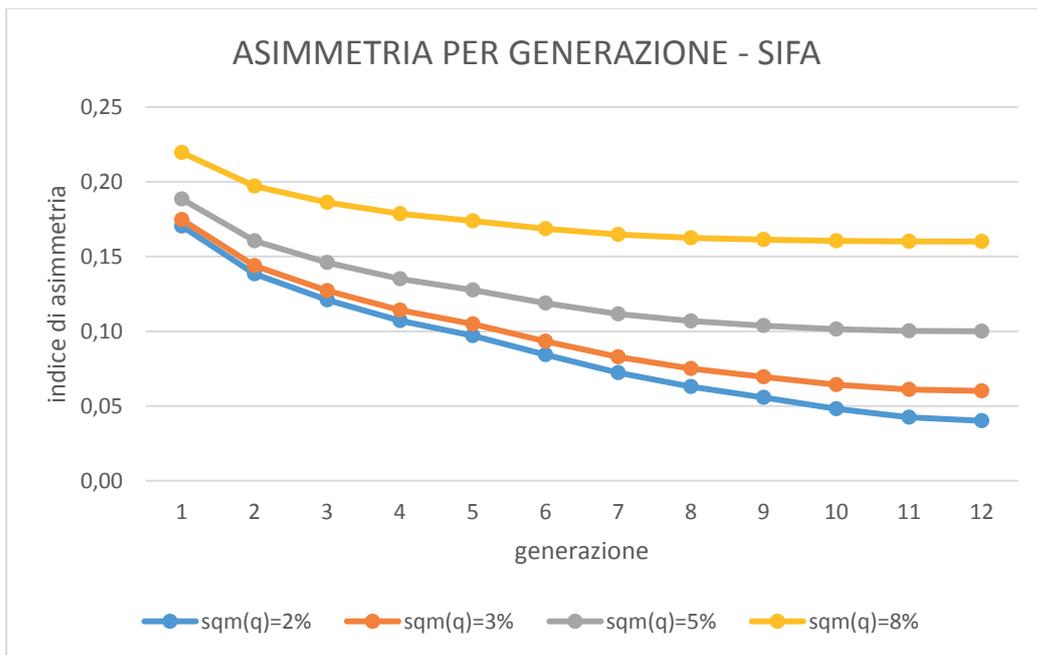


Fig.3.3.16: Indice di asimmetria per generazione al variare di $\sigma_{\bar{q}}$ per l'impresa AMASES

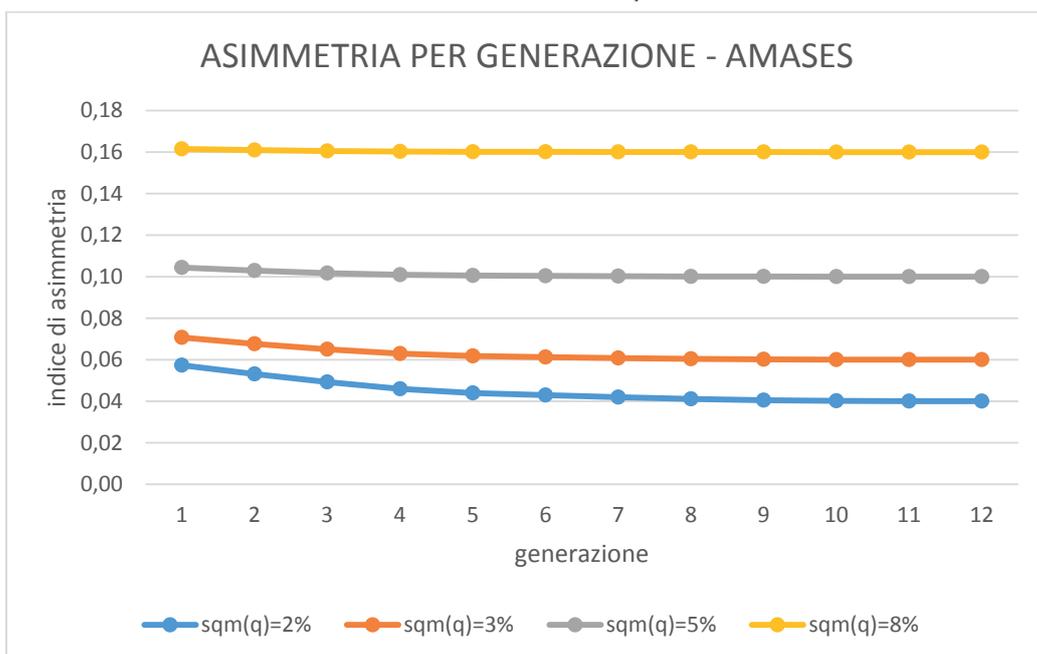


Fig.3.3.17: Indice di asimmetria per generazione delle imprese SIFA e AMASES posto $\sigma_{\bar{q}} = 2\%$

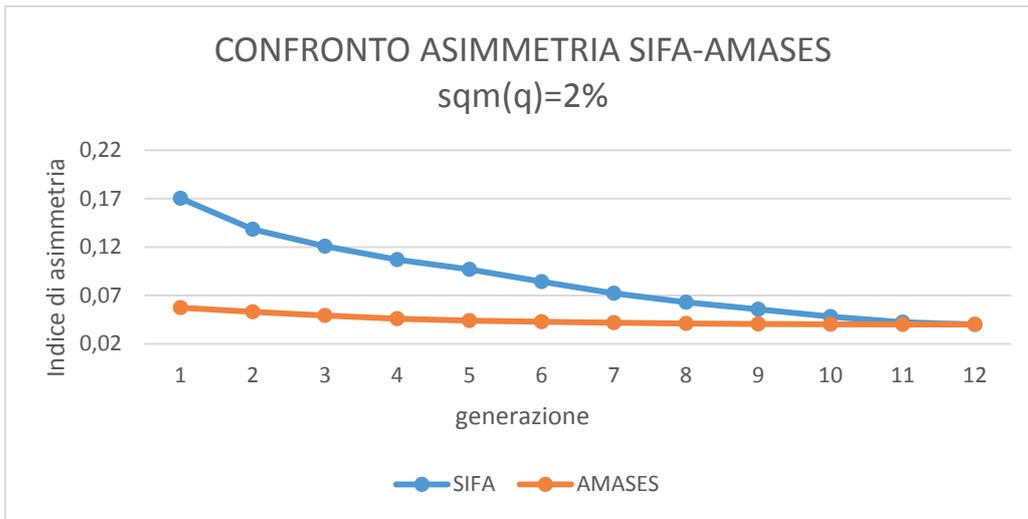


Fig.3.3.18: Indice di asimmetria per generazione delle imprese SIFA e AMASES posto $\sigma_{\bar{q}} = 3\%$

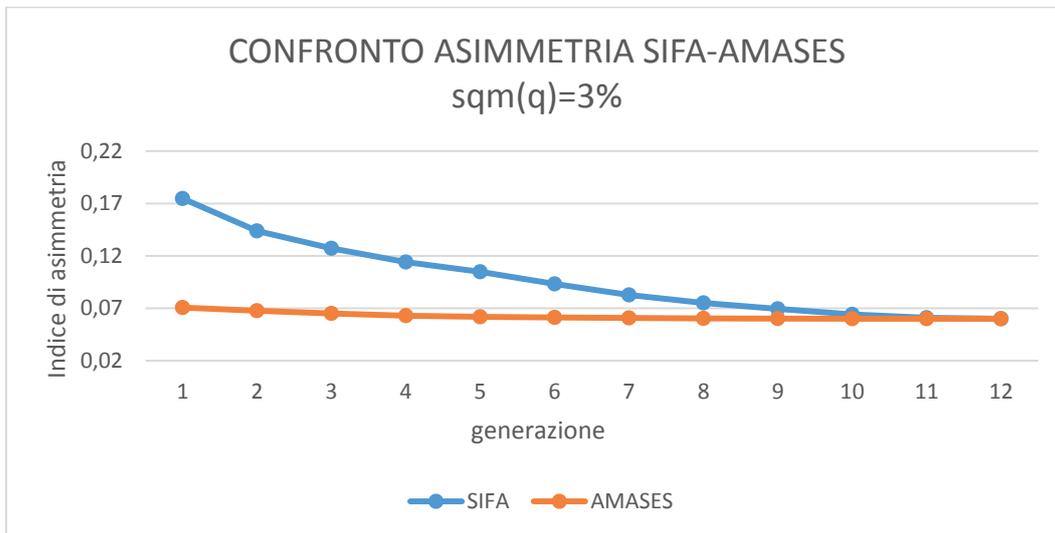


Fig.3.3.19: Indice di asimmetria per generazione delle imprese SIFA e AMASES posto $\sigma_{\bar{q}} = 5\%$

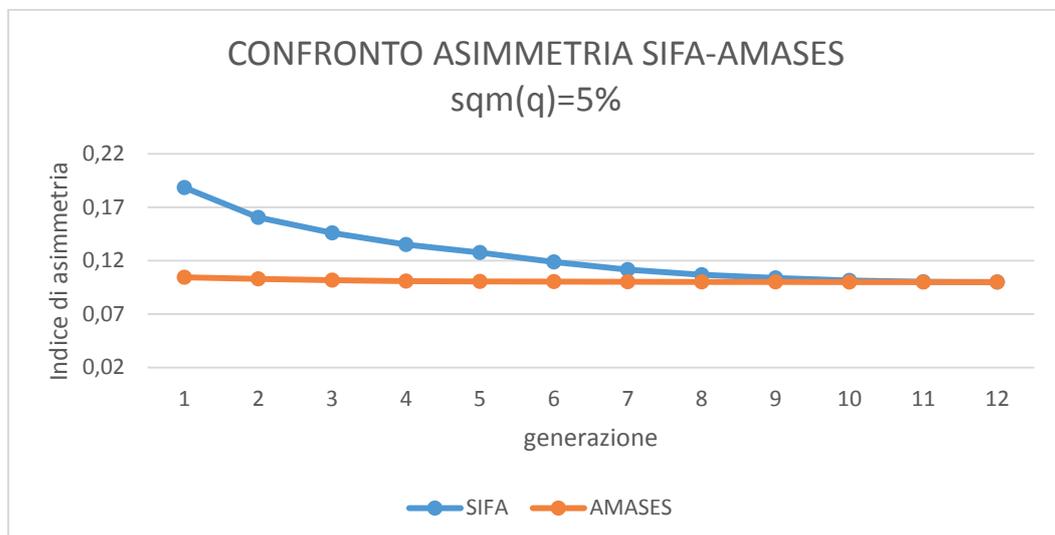
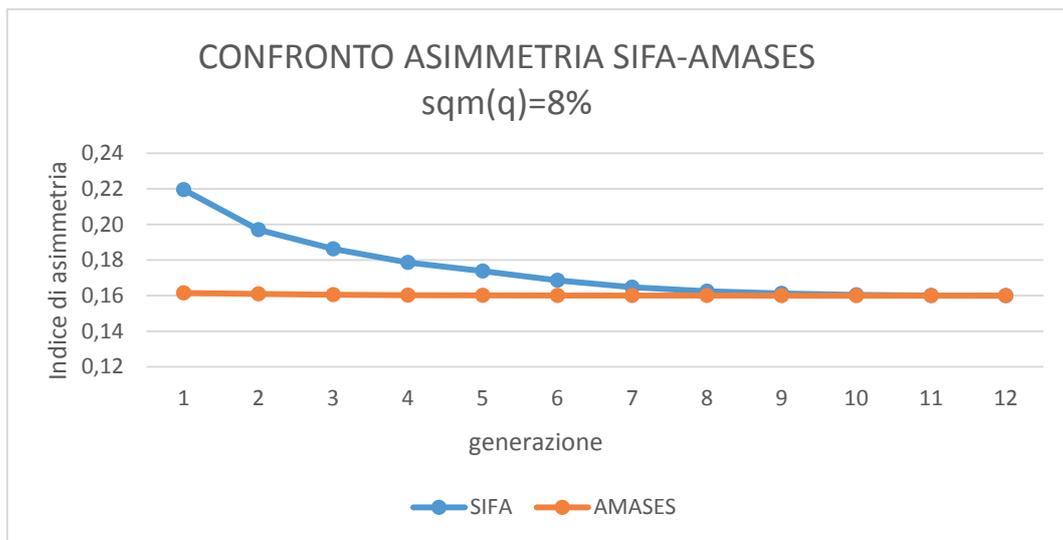


Fig.3.3.20: Indice di asimmetria per generazione delle imprese SIFA e AMASES posto $\sigma_{\tilde{q}} = 8\%$



È interessante, infine, confrontare i valori assunti dall'asimmetria al variare di $\sigma_{\tilde{q}}$ e i rispetti valori asintotici. Il numero complessivo dei sinistri riservati di entrambe le imprese possiede un'asimmetria quasi identica ai valori di $\gamma_{\tilde{q}}$. I valori dell'asimmetria inoltre si avvicinano maggiormente a quelli asintotici al crescere del fattore di disturbo, dunque al crescere della variabilità di \tilde{q} l'asimmetria tende ad essere sempre più spiegata dal solo fattore di disturbo.

L'ultima tabella (fig: 3.3.21) permette di confrontare la variazione percentuale dell'asimmetria e del coefficiente di variazione delle due imprese oggetto di studio considerando un *range* di valori della variabilità del fattore di disturbo, più ampio rispetto alle analisi precedenti, che varia dall'1% al 10%.

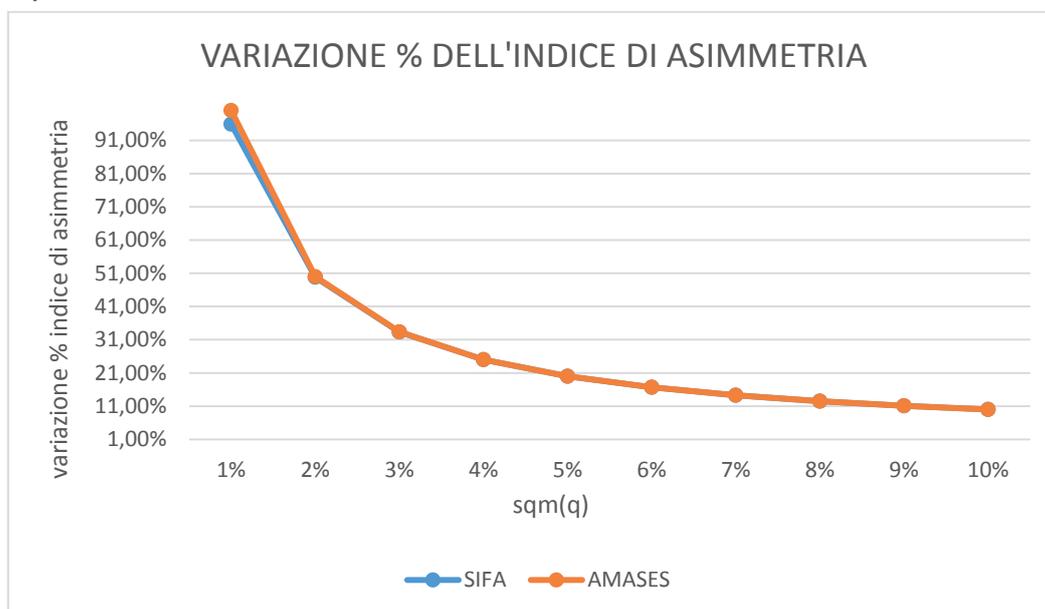
Fig.3.3.21: Variazioni percentuali del coefficiente di variazione e dell'indice di asimmetria, per le imprese SIFA e AMASES, al variare di $\sigma_{\tilde{q}}$

$\sigma_{\tilde{q}}$	SIFA		AMASES		$\Delta \% \sigma_{\tilde{q}}$
	$\Delta \% CV$	$\Delta \% asim.$	$\Delta \% CV$	$\Delta \% asim.$	
1%	71,82%	95,86%	95,77%	100,00%	100,00%
2%	44,99%	49,77%	49,39%	50,00%	50,00%
3%	31,68%	33,30%	33,14%	33,33%	33,33%
4%	24,27%	24,99%	24,92%	25,00%	25,00%
5%	19,61%	20,00%	19,96%	20,00%	20,00%
6%	16,44%	16,67%	16,64%	16,67%	16,67%
7%	14,14%	14,29%	14,27%	14,29%	14,29%
8%	12,40%	12,50%	12,49%	12,50%	12,50%
9%	11,04%	11,11%	11,10%	11,11%	11,11%
10%	9,95%	10,00%	9,99%	10,00%	10,00%

Le variazioni percentuali dell'asimmetria e del coefficiente di variazione per entrambe le compagnie sono positive e dunque, come già osservato precedentemente, ciò implica che tali grandezze siano crescenti nei valori di $\sigma_{\tilde{q}}$.

Con riferimento all'asimmetria la crescita del fattore di disturbo ha effetti leggermente più marcati sull'impresa di elevate dimensioni; per valori di $\sigma_{\tilde{q}}$ maggiori del 3% infine l'asimmetria delle due imprese cresce percentualmente in egual misura e in linea con la crescita della *standard deviation* di \tilde{q} , cioè assume un andamento di crescita lineare (fig: 3.3.22).

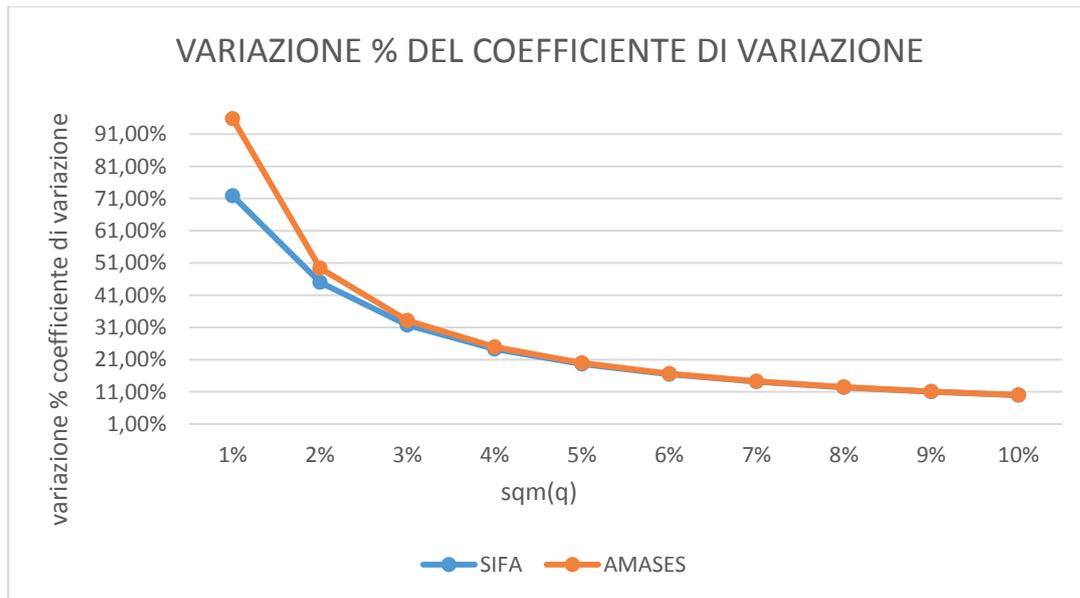
Fig.3.3.22: Grafico delle variazioni percentuali dell'indice di asimmetria per le imprese SIFA e AMASES al variare di $\sigma_{\tilde{q}}$



Focalizzando l'attenzione sul coefficiente di variazione delle due imprese si osserva, anche in tale circostanza, un l'effetto di $\sigma_{\tilde{q}}$ più evidente sull'impresa AMASES. Tale risultato deriva dalla maggiore dimensione del portafoglio detenuto dall'impresa; la maggiore numerosità, infatti, permette una diversificazione quasi totale del rischio non sistematico, lasciando in capo ad AMASES una variabilità relativa quasi tutta determinata dal fattore di disturbo.

Al crescere della variabilità del fattore di disturbo (quando $\sigma_{\tilde{q}}$ è circa il 9%), tuttavia, il fattore \tilde{q} tende ad incidere nella medesima proporzione sulle due imprese determinando una crescita lineare del coefficiente di variazione (fig: 3.3.23).

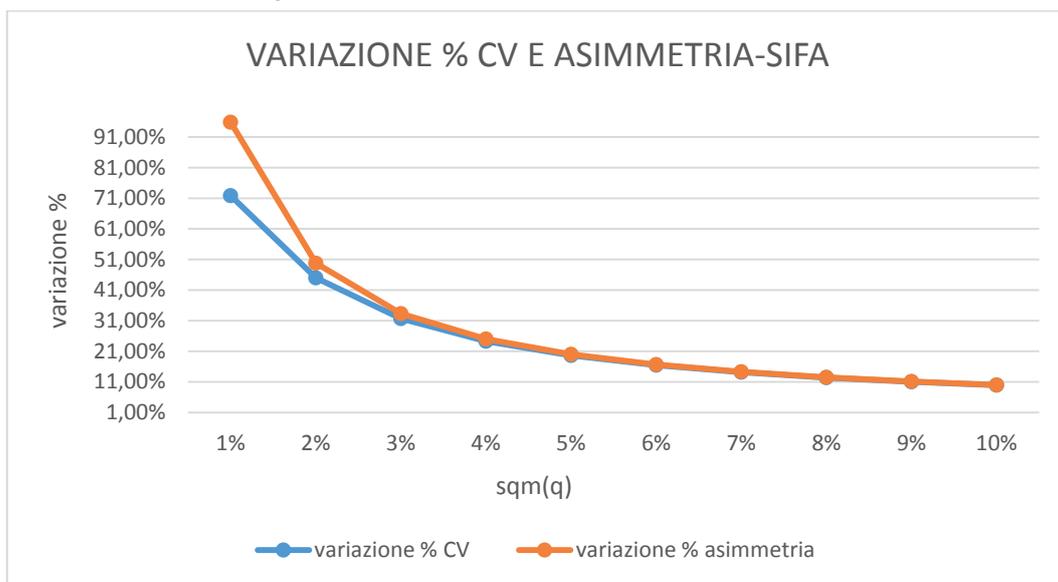
Fig.3.3.23: Grafico delle variazioni percentuali del coefficiente di variazione per le imprese SIFA e AMASES al variare di $\sigma_{\tilde{q}}$



Dalla tabella presentata precedentemente è, infine, possibile studiare l'incidenza del fattore di disturbo, in funzione del suo scarto quadratico medio, sul coefficiente di variazione e asimmetria delle singole compagnie di assicurazione.

Considerando l'impresa SIFA si osserva un'incidenza di \tilde{q} maggiore sull'indice di asimmetria; l'impatto del fattore di disturbo tuttavia tende ad essere uguale sul coefficiente di variazione e sull'asimmetria per valori di $\sigma_{\tilde{q}}$ maggiori del 4% (fig: 3.3.24).

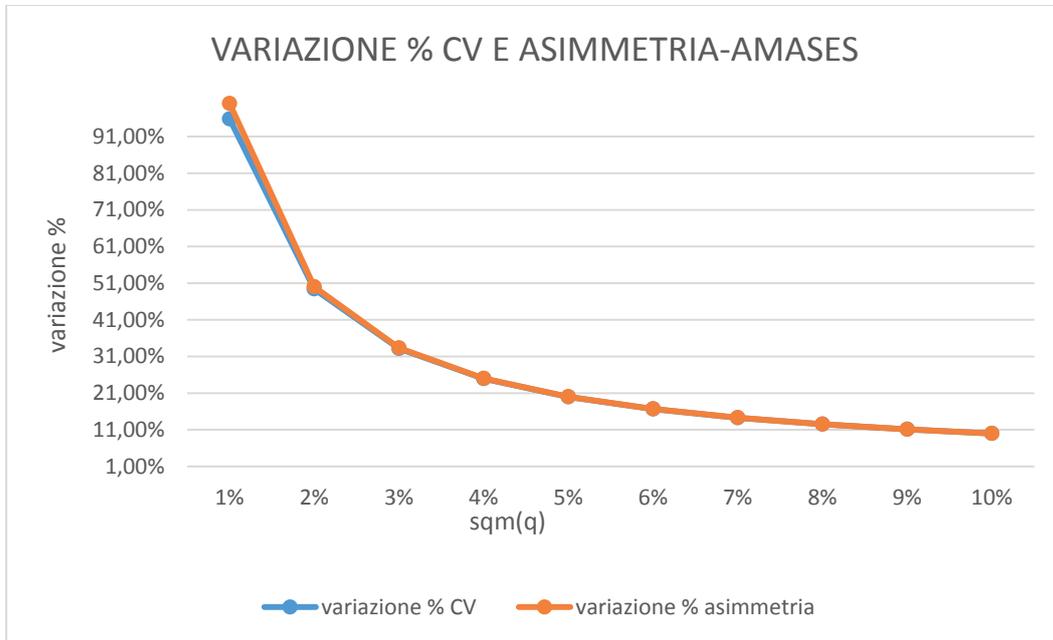
Fig.3.3.24: Grafico delle variazioni percentuali del coefficiente di variazione e indice di asimmetria dell'impresa SIFA al variare di $\sigma_{\tilde{q}}$



Con riferimento all'impresa di maggiori dimensioni si osservano comportamenti analoghi. Il fattore di disturbo ha una maggiore rilevanza sull'indice di asimmetria; in questa circostanza tuttavia

l'impatto di \tilde{q} sul coefficiente di variazione e sull'asimmetria è analogo già per valori della *standard deviation* superiori al 2% (fig: 3.3.25).

Fig.3.3.25: Grafico delle variazioni percentuali del coefficiente di variazione e indice di asimmetria dell'impresa AMASES al variare di $\sigma_{\tilde{q}}$



3.4 La riserva sinistri: il processo di Poisson composto misturato

Nel presente paragrafo si ipotizza che l'ammontare riservato dall'impresa di assicurazione in ogni cella (i,j), per far fronte al costo dei sinistri ancora da liquidare, sia descritto da un processo di Poisson composto misturato:

$${}^n \tilde{X}_{i,j} = \sum_{h=1}^{\tilde{K}_{i,j}} \tilde{Z}_{i,j,h} \quad (3.4.1)$$

(a differenza di quanto visto nei paragrafi precedenti, si introduce l'apice "n" che identifica la presenza del solo fattore di disturbo sulla v.a. del numero dei sinistri).

Valgono le seguenti ipotesi:

- la v.a. $\tilde{K}_{i,j}$ descrive il numero dei sinistri riservati nella cella (i,j) e segue un processo di Poisson misturato, cioè $\tilde{K}_{i,j} \sim Po(n_{i,j}\tilde{q})$. Il fattore di disturbo \tilde{q} è, inoltre, unico a livello di triangolo;
- la v.a. $\tilde{Z}_{i,j,h}$ rappresenta il costo dell'h-esimo sinistro riservato nella cella (i,j); le v.a. che descrivono la *severity* nella medesima cella sono tra loro indipendenti e identicamente distribuite;
- le v.a. $\tilde{K}_{i,j}$ e $\tilde{Z}_{i,j,h}$ sono indipendenti tra loro;
- le v.a. $\tilde{Z}_{i,j}$ e $\tilde{Z}_{h \neq i, k \neq j}$ sono indipendenti tra loro;
- le v.a. \tilde{q} e $\tilde{Z}_{i,j}$, per ogni cella (i,j), sono tra loro indipendenti.

La riserva sinistri è determinata come somma delle v.a. ${}^n \tilde{X}_{i,j}$; queste ultime, a causa del fattore \tilde{q} , sono dipendenti tra loro:

$${}^n \tilde{R} = \sum_i {}^n \tilde{X}_{i,j} \quad \text{per } i=1, \dots, t; j=t-i+2, \dots, t(t+1) \quad (3.4.2)$$

L'analisi di una singola v.a. ${}^n \tilde{X}_{i,j}$ è stata presentata precedentemente (Paragrafo 3.1.3); le caratteristiche principali sono riassunte di seguito:

- $E(\tilde{X}) = nm$;
- $\text{var}(\tilde{X}) = \sigma_{\tilde{q}}^2 n^2 m^2 + na_{2,\tilde{z}}$;
- $\gamma(\tilde{X}) = \frac{\gamma_{\tilde{q}} \sigma_{\tilde{q}}^3 n^3 m^3 + 3\sigma_{\tilde{q}}^2 n^2 m a_{2,\tilde{z}} + na_{3,\tilde{z}}}{(\sigma_{\tilde{q}}^2 n^2 m^2 + na_{2,\tilde{z}})^{\frac{3}{2}}}$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(\tilde{X}) = \gamma_{\tilde{q}}$;
- $CV(\tilde{X}) = \sqrt{\frac{r_{2,\tilde{z}}}{n} + \sigma_{\tilde{q}}^2}$; $\lim_{n \rightarrow \infty} CV(\tilde{X}) = \sigma_{\tilde{q}}$.

A livello totale di riserva, invece, cioè aggregando tutte le v.a. ${}^n \tilde{X}_{i,j}$, si ottengono i risultati esposti nel seguito.

VALORE ATTESO

$$E({}^n\tilde{R}) = \sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j}. \quad (3.4.3)$$

VARIANZA

$$\text{var}({}^n\tilde{R}) = \sum_i \sum_j \text{var}({}^n\tilde{X}_{i,j}) + \sum_{i,j \in B^{(t)}} \sum_{\substack{h,k \in B^{(t)} \\ (h \neq i \vee k \neq j)}} \text{cov}({}^n\tilde{X}_{i,j}; {}^n\tilde{X}_{h,k})$$

dove

$$\sum_{i,j \in B^{(t)}} \sum_{\substack{h,k \in B^{(t)} \\ (h \neq i \vee k \neq j)}} \text{cov}({}^n\tilde{X}_{i,j}; {}^n\tilde{X}_{h,k}) = \sum_{i,j \in B^{(t)}} \sum_{\substack{h,k \in B^{(t)} \\ (h \neq i \vee k \neq j)}} \left[E({}^n\tilde{X}_{i,j} {}^n\tilde{X}_{h,k}) - E({}^n\tilde{X}_{i,j}) E({}^n\tilde{X}_{h,k}) \right].$$

Per scrivere il primo termine della covarianza è necessario ricorrere alla proprietà della media condizionata:

$$\sum_{i,j \in B^{(t)}} \sum_{\substack{h,k \in B^{(t)} \\ (h \neq i \vee k \neq j)}} \left[E({}^n\tilde{X}_{i,j} {}^n\tilde{X}_{h,k}) \right] = \sum_{i,j \in B^{(t)}} \sum_{\substack{h,k \in B^{(t)} \\ (h \neq i \vee k \neq j)}} E \left[E({}^n\tilde{X}_{i,j} {}^n\tilde{X}_{h,k}) \mid \tilde{q} \right],$$

ora le v.a. \tilde{X} , a seguito del condizionamento, sono descritte da un processo di Poisson composto semplice, da cui segue;

$$\sum_{i,j \in B^{(t)}} \sum_{\substack{h,k \in B^{(t)} \\ (h \neq i \vee k \neq j)}} E \left[(\tilde{q} n_{i,j} m_{i,j}) (\tilde{q} n_{h,k} m_{h,k}) \right] = E(\tilde{q}^2) \sum_{i,j \in B^{(t)}} \sum_{\substack{h,k \in B^{(t)} \\ (h \neq i \vee k \neq j)}} (n_{i,j} m_{i,j}) (n_{h,k} m_{h,k}).$$

La covarianza assume dunque la seguente forma:

$$\sum_{i,j \in B^{(t)}} \sum_{\substack{h,k \in B^{(t)} \\ (h \neq i \vee k \neq j)}} \text{cov}({}^n\tilde{X}_{i,j}; {}^n\tilde{X}_{h,k}) = \sigma_{\tilde{q}}^2 \sum_{i,j \in B^{(t)}} \sum_{\substack{h,k \in B^{(t)} \\ (h \neq i \vee k \neq j)}} (n_{i,j} m_{i,j}) (n_{h,k} m_{h,k}).$$

La varianza della somma di processi di Poisson composti misturati dipendenti tra loro è quindi pari a:

$$\text{var}({}^n\tilde{R}) = \sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} + \sigma_{\tilde{q}}^2 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^2. \quad (3.4.4)$$

La varianza della v.a. ${}^n\tilde{R}$ è la somma di due termini:

- $\sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}}$, il primo addendo è la somma delle varianze di processi di Poisson composti semplici;
- $\sigma_{\tilde{q}}^2 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^2$, il secondo addendo, invece, è pari al prodotto tra la varianza del fattore di disturbo e il quadrato del valore atteso della riserva sinistri.

COEFFICIENTE DI VARIAZIONE

Il coefficiente di variazione della v.a. ${}^n\tilde{R}$, pari al rapporto tra lo scarto quadratico medio e la media, è il seguente:

$$CV({}^n\tilde{R}) = \frac{\sigma\left(\sum_i \sum_j {}^n\tilde{X}_{i,j}\right)}{E\left(\sum_i \sum_j {}^n\tilde{X}_{i,j}\right)} = \frac{\sqrt{\sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} + \sigma_{\tilde{q}}^2 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j}\right)^2}}{\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j}} = \sqrt{\frac{\sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}}}{\left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j}\right)^2} + \sigma_{\tilde{q}}^2} .$$

(3.4.5)

La variabilità relativa della riserva sinistri è funzione di due elementi; la varianza del fattore di disturbo e un termine pari al rapporto tra la somma delle varianze di processo di Poisson composti semplici e il quadrato del valore atteso di ${}^n\tilde{R}$.

Il valore asintotico del coefficiente di variazione al crescere del parametro dimensionale della riserva sinistri, cioè del numero dei sinistri riservati, è pari a:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} CV({}^n\tilde{R}) :$$

posto $N \delta_{i,j} = n_{i,j}$

$$CV({}^n\tilde{R}) = \sqrt{\frac{N \sum_i \sum_j \delta_{i,j} a_{2,Z_{i,j}}}{N^2 \left(\sum_i \sum_j \delta_{i,j} m_{i,j}\right)^2} + \sigma_{\tilde{q}}^2}$$

da cui, facendo tendere ad infinito N, si ottiene:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} CV({}^n\tilde{R}) = \sigma_{\tilde{q}} . \tag{3.4.6}$$

La variabilità relativa della riserva sinistri, dunque, diminuisce all'aumentare del numero dei sinistri riservati, fino ad un valore minimo rappresentato dalla *standard deviation* del fattore di disturbo. Quest'ultimo è quindi un fattore di rischio sistematico e ineliminabile che incide in misura maggiore al crescere del parametro dimensionale dell'impresa.

ASIMMETRIA

L'indice di asimmetria è pari al rapporto tra il momento centrale terzo e lo scarto quadratico medio al cubo,

$$\gamma({}^n\tilde{R}) = \frac{\mu_3\left(\sum_i \sum_j {}^n\tilde{X}_{i,j}\right)}{\sigma^3\left(\sum_i \sum_j {}^n\tilde{X}_{i,j}\right)}$$

dove il numeratore può essere scomposto come,

$$\mu_3\left(\sum_i \sum_j {}^n\tilde{X}_{i,j}\right) = \alpha_3\left(\sum_i \sum_j {}^n\tilde{X}_{i,j}\right) - 3\alpha_1\left(\sum_i \sum_j {}^n\tilde{X}_{i,j}\right) \text{var}\left(\sum_i \sum_j {}^n\tilde{X}_{i,j}\right) - \left[\alpha_1\left(\sum_i \sum_j {}^n\tilde{X}_{i,j}\right)\right]^3 .$$

Il momento centrale terzo della somma di processi di Poisson composti misturati dipendenti tra loro risulta essere (Appendice A.2):

$$\begin{aligned} \mu_3 \left(\sum_i \sum_j^n \tilde{X}_{i,j} \right) &= \\ E(\tilde{q}^3) \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^3 &+ 3E(\tilde{q}^2) \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right) \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \right) + \sum_i \sum_j n_{i,j} a_{3,Z_{i,j}} \\ -3 \left\{ \sigma_{\tilde{q}}^2 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^3 &+ \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right) \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \right) \right\} - \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^3 = \\ E(\tilde{q}^3) \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^3 &+ 3 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right) \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \right) [E(\tilde{q}^2) - 1] \\ + \sum_i \sum_j n_{i,j} a_{3,Z_{i,j}} - 3\sigma_{\tilde{q}}^2 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^3 &- \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^3 = \end{aligned}$$

e raccogliendo il termine $\left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^3$ si ottiene:

$$\begin{aligned} \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^3 \underbrace{[E(\tilde{q}^3) - 3\sigma_{\tilde{q}}^2 - 1]}_{\mu_3(\tilde{q})} &+ 3 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right) \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \right) \sigma_{\tilde{q}}^2 + \sum_i \sum_j n_{i,j} a_{3,Z_{i,j}} = \\ \gamma_{\tilde{q}} \sigma_{\tilde{q}}^3 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^3 &+ 3 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right) \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \right) \sigma_{\tilde{q}}^2 + \sum_i \sum_j n_{i,j} a_{3,Z_{i,j}} . \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

Il momento centrale terzo della somma delle v.a. ${}^n \tilde{X}_{i,j}$ dipende da tre termini:

- $\gamma_{\tilde{q}} \sigma_{\tilde{q}}^3 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^3$, il primo addendo è costituito dal prodotto tra il momento centrale terzo di \tilde{q} e il cubo della media della riserva sinistri;
- $3 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right) \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \right) \sigma_{\tilde{q}}^2$, il secondo termine è pari a tre volte il prodotto tra la varianza di \tilde{q} , la media della riserva sinistri e la varianza della somma di processi di Poisson composti semplici;
- $\sum_i \sum_j n_{i,j} a_{3,Z_{i,j}}$, il terzo addendo, infine, è pari alla somma dei momenti centrali terzi di processi di Poisson composti semplici.

Il primo dei tre termini considerati è l'unico che può essere negativo e il suo segno è determinato da $\gamma_{\tilde{q}}$. Il momento centrale terzo della somma delle v.a. ${}^n \tilde{X}_{i,j}$ può essere negativo se $\gamma_{\tilde{q}}$ è minore di zero e il valore del primo termine è tale da superare quello degli altri due addendi. In questa particolare situazione, quindi, anche l'indice di asimmetria della v.a. ${}^n \tilde{R}$ è minore di zero.

Il denominatore dell'indice di asimmetria è costituito dallo scarto quadratico al cubo della somma delle v.a. ${}^n \tilde{X}_{i,j}$:

$$\sigma^3({}^n \tilde{R}) = \left[\sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} + \sigma_{\tilde{q}}^2 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}.$$

L'indice di asimmetria della riserva sinistri, descritta dalla somma delle v.a. ${}^n \tilde{X}_{i,j}$ dipendenti tra loro a causa del fattore di disturbo \tilde{q} , è data dalla seguente formula:

$$\gamma({}^n \tilde{R}) = \frac{\gamma_{\tilde{q}} \sigma_{\tilde{q}}^3 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^3 + 3 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right) \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \right) \sigma_{\tilde{q}}^2 + \sum_i \sum_j n_{i,j} a_{3,Z_{i,j}}}{\left[\sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} + \sigma_{\tilde{q}}^2 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.4.8)$$

Il valore asintotico dell'indice di asimmetria al crescere del numero dei sinistri riservati è calcolato ponendo $N\delta_{i,j} = n_{i,j}$, da cui:

$$\gamma({}^n \tilde{R}) = \frac{\gamma_{\tilde{q}} \sigma_{\tilde{q}}^3 N^3 \left(\sum_i \sum_j \delta_{i,j} m_{i,j} \right)^3 + 3N^2 \left(\sum_i \sum_j \delta_{i,j} m_{i,j} \right) \left(\sum_i \sum_j \delta_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \right) \sigma_{\tilde{q}}^2 + N \sum_i \sum_j \delta_{i,j} a_{3,Z_{i,j}}}{\left[N \sum_i \sum_j \delta_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} + \sigma_{\tilde{q}}^2 N^2 \left(\sum_i \sum_j \delta_{i,j} m_{i,j} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

facendo tendere ad infino N si ricava,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \gamma({}^n \tilde{R}) = \frac{\gamma_{\tilde{q}} \sigma_{\tilde{q}}^3 \left(\sum_i \sum_j \delta_{i,j} m_{i,j} \right)^3}{\sigma_{\tilde{q}}^3 \left(\sum_i \sum_j \delta_{i,j} m_{i,j} \right)^3} = \gamma_{\tilde{q}}. \quad (3.4.9)$$

L'asimmetria della riserva sinistri, al crescere del numero dei sinistri riservati, assume quindi un valore sempre più prossimo a quello dell'indice di asimmetria del fattore di disturbo.

Le caratteristiche della riserva sinistri, ricavate poco sopra, valgono indipendentemente dalla forma distributiva assunta dal costo dei singoli sinistri. Se si ipotizza, come fatto nei casi studio relativi alle imprese SIFA e AMASES, che la *severity* relativa ad ogni cella (i,j) sia descritta da una v.a. Gamma, cioè $\tilde{Z}_{i,j} \sim \text{Gamma}(\alpha_{i,j}; \beta_{i,j})$, le caratteristiche della riserva sinistri, pur mantenendo la stessa struttura, assumono delle formulazioni differenti. I valori asintotici del coefficiente di variazione e dell'asimmetria della riserva sinistri rimangono invariati in quanto dipendono dalle sole caratteristiche del fattore di disturbo.

VALORE ATTESO

$$E({}^n\tilde{X}_{i,j}) = n_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}}{\beta_{i,j}} \quad (3.1.3.2 \text{ bis})$$

$$E({}^n\tilde{R}) = \sum_i \sum_j n_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}}{\beta_{i,j}}. \quad (3.4.3 \text{ bis})$$

VARIANZA

$$\text{var}({}^n\tilde{X}_{i,j}) = n_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}(\alpha_{i,j}+1)}{\beta_{i,j}^2} + n_{i,j}^2 \frac{\alpha_{i,j}^2}{\beta_{i,j}^2} \sigma_{\tilde{q}}^2 \quad (3.1.3.3 \text{ bis})$$

$$\text{var}({}^n\tilde{R}) = \sum_i \sum_j n_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}(\alpha_{i,j}+1)}{\beta_{i,j}^2} + \sigma_{\tilde{q}}^2 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}}{\beta_{i,j}} \right)^2. \quad (3.4.4 \text{ bis})$$

COEFFICIENTE DI VARIAZIONE

$$CV({}^n\tilde{X}_{i,j}) = \sqrt{\sigma_{\tilde{q}}^2 + \frac{1}{n_{i,j}} \frac{(\alpha_{i,j}+1)}{\alpha_{i,j}}} \quad (3.1.3.5 \text{ bis})$$

$$\lim_{n_{i,j} \rightarrow \infty} CV({}^n\tilde{X}_{i,j}) = \sigma_{\tilde{q}} \quad (3.1.3.5)$$

$$CV({}^n\tilde{R}) = \sqrt{\sigma_{\tilde{q}}^2 + \frac{\sum_i \sum_j n_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}(\alpha_{i,j}+1)}{\beta_{i,j}^2}}{\left(\sum_i \sum_j n_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}}{\beta_{i,j}} \right)^2}} \quad (3.4.5 \text{ bis})$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} CV({}^n\tilde{R}) = \sigma_{\tilde{q}}. \quad (3.4.6 \text{ bis})$$

ASIMMETRIA

$$\gamma({}^n\tilde{X}_{i,j}) = \frac{\gamma_{\tilde{q}} \sigma_{\tilde{q}}^3 n_{i,j}^3 \frac{\alpha_{i,j}^3}{\beta_{i,j}^3} + 3\sigma_{\tilde{q}}^2 n_{i,j}^2 \frac{\alpha_{i,j}^2(\alpha_{i,j}+1)}{\beta_{i,j}^3} + n_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}(\alpha_{i,j}+1)(\alpha_{i,j}+2)}{\beta_{i,j}^3}}{\left[n_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}(\alpha_{i,j}+1)}{\beta_{i,j}^2} + n_{i,j}^2 \frac{\alpha_{i,j}^2}{\beta_{i,j}^2} \sigma_{\tilde{q}}^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \quad (3.1.3.4 \text{ bis})$$

$$\lim_{n_{i,j} \rightarrow \infty} \gamma({}^n\tilde{X}_{i,j}) = \gamma_{\tilde{q}} \quad (3.1.3.4)$$

$$\gamma({}^n\tilde{R}) = \frac{\gamma_{\tilde{q}} \sigma_{\tilde{q}}^3 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}}{\beta_{i,j}} \right)^3 + 3 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}}{\beta_{i,j}} \right) \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}(\alpha_{i,j}+1)}{\beta_{i,j}^2} \right) + \sum_i \sum_j n_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}(\alpha_{i,j}+1)(\alpha_{i,j}+2)}{\beta_{i,j}^3}}{\left[\sum_i \sum_j n_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}(\alpha_{i,j}+1)}{\beta_{i,j}^2} + \sigma_{\tilde{q}}^2 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}}{\beta_{i,j}} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \quad (3.4.8 \text{ bis})$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \gamma \left({}^n \tilde{R} \right) = \gamma_{\bar{q}}.$$

(3.4.9 bis)

CASO STUDIO: LA RISERVA SINISTRI DESCRITTA DA UN PROCESSO DI POISSON COMPOSTO MISTURATO

Di seguito è proposto il confronto tra le caratteristiche della riserva sinistri delle imprese SIFA e AMASES in funzione dei risultati analitici elaborati precedentemente.

I triangoli di *run off* del numero dei sinistri riservati sono stati mostrati nel caso studio precedente (figure: 3.3.1, 3.3.2, 3.3.3 e 3.3.4). I triangoli di *run off* relativi al costo cumulato dei sinistri pagati e relativi ai costi medi incrementali sono, invece, presentati di seguito (figure: 3.4.1, 3.4.2, 3.4.3 e 3.4.4). Anche in tale circostanza le stime sono state ottenute ricorrendo alla meccanica *Chain Ladder* applicata alle grandezze dei costi medi cumulati (*frequency-severity*).

Fig.3.4.1: triangolo di *run off* degli importi cumulati pagati-SIFA

	Anno di sviluppo												
Anno di generazione	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	12+
1	38.363.753,39	76.319.429,33	91.669.050,46	97.768.678,03	100.947.107,68	103.648.533,42	105.152.019,88	106.513.077,38	107.520.770,41	108.419.496,95	108.706.966,64	109.433.966,64	110.501.966,64
2	41.474.582,37	85.940.182,69	101.878.321,75	108.718.118,40	112.017.923,08	114.747.922,69	115.756.826,12	116.908.524,70	117.675.249,76	118.142.508,31	118.598.779,02	119.391.932,53	120.557.115,41
3	46.520.214,93	94.099.138,44	109.194.549,64	116.103.087,24	119.495.489,11	120.885.084,27	122.223.000,63	123.408.715,51	124.331.054,38	124.890.394,51	125.299.942,41	126.137.911,32	127.368.930,29
4	47.925.318,88	99.791.578,39	117.390.424,27	123.695.666,78	126.570.168,03	128.694.122,84	130.926.984,34	132.134.869,99	133.007.503,29	133.743.527,09	134.182.106,71	135.079.476,90	136.397.759,38
5	51.420.002,85	103.505.441,93	120.795.622,19	126.816.129,26	129.535.562,16	132.572.581,31	133.892.634,71	135.016.971,25	136.024.926,94	136.777.648,26	137.226.177,55	138.143.905,58	139.492.094,77
6	57.585.958,23	111.735.646,84	131.345.325,16	138.875.614,02	142.986.049,09	145.765.884,66	148.032.485,23	149.504.318,23	150.620.427,76	151.453.916,22	151.950.572,79	152.966.773,22	154.459.623,37
7	55.930.212,92	110.871.688,07	131.819.123,75	142.317.840,42	148.181.965,28	151.494.657,04	153.450.752,73	154.976.457,59	156.133.418,82	156.997.414,53	157.512.249,66	158.565.644,94	160.113.136,22
8	51.005.191,42	104.196.644,35	126.015.966,62	134.380.471,31	139.094.639,90	141.949.272,77	143.782.118,66	145.211.691,82	146.295.755,18	147.105.312,19	147.587.708,56	148.574.731,45	150.024.718,30
9	51.693.302,82	103.265.553,70	121.933.460,37	130.766.947,06	134.749.486,57	137.514.944,06	139.290.534,00	140.675.448,97	141.725.647,46	142.509.914,86	142.977.241,73	143.933.431,18	145.338.122,15
10	54.954.198,53	106.565.466,35	125.169.173,44	133.178.034,17	137.234.003,93	140.050.451,06	141.858.779,40	143.269.229,50	144.338.791,60	145.137.519,36	145.613.462,83	146.587.282,54	148.017.873,27
11	59.763.157,04	113.506.128,00	134.015.646,31	142.590.542,34	146.933.172,35	149.948.675,05	151.884.809,05	153.394.944,31	154.540.098,92	155.395.277,66	155.904.858,97	156.947.504,50	158.479.203,84
12	60.361.376,37	120.440.066,03	142.202.483,47	151.301.208,46	155.909.123,94	159.108.839,69	161.163.249,54	162.765.636,94	163.980.747,51	164.888.167,99	165.428.878,94	166.535.218,30	168.160.487,11

Fig.3.4.2: triangolo di *run off* dei costi medi incrementali-SIFA

Anno di sviluppo													
Anno di	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	12+
generazione													
1													29.666,67
2												41.189,43	31.935,50
3											23.706,55	42.340,77	32.828,17
4										31.659,95	25.451,62	45.457,54	35.244,70
5									40.297,47	32.572,69	26.185,37	46.768,04	36.260,78
6								33.690,84	43.060,87	34.806,36	27.981,04	49.975,17	38.747,37
7							23.223,77	35.706,04	45.636,54	36.888,29	29.654,71	52.964,41	41.065,03
8						21.097,01	23.378,64	35.944,16	45.940,89	37.134,30	29.852,48	53.317,63	41.338,89
9					18.661,28	22.543,55	24.981,63	38.408,72	49.090,88	39.680,45	31.899,35	56.973,41	44.173,34
10				16.712,58	19.913,03	24.055,72	26.657,34	40.985,08	52.383,78	42.342,12	34.039,08	60.795,05	47.136,38
11			14.052,88	17.408,64	20.742,39	25.057,62	27.767,59	42.692,07	54.565,51	44.105,63	35.456,78	63.327,11	49.099,56
12		5.487,40	15.004,89	18.587,98	22.147,58	26.755,14	29.648,70	45.584,24	58.262,04	47.093,56	37.858,79	67.617,19	52.425,80

Fig.3.4.3: triangolo di *run off* degli importi cumulati pagati-AMASES

Anno di sviluppo													
Anno di	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	12+
generazione													
1	193.473.600	366.091.200,00	453.291.600,00	499.089.600,00	528.858.000,00	548.653.200,00	568.435.200,00	585.750.000,00	599.121.600,00	611.673.600,00	620.504.400,00	628.557.400,00	648.446.400,00
2	199.854.000	368.820.000,00	449.362.800,00	490.018.800,00	519.072.000,00	540.193.200,00	560.157.600,00	574.406.400,00	585.126.000,00	598.809.600,00	604.818.000,00	612.667.419,53	632.053.624,04
3	225.578.400	412.342.800,00	505.692.000,00	553.300.800,00	584.271.600,00	610.562.400,00	628.183.200,00	646.593.600,00	661.255.200,00	668.846.400,00	676.993.944,72	685.780.074,58	707.479.731,45
4	256.398.000	493.076.400,00	598.692.000,00	649.863.600,00	687.201.600,00	711.286.800,00	732.040.800,00	744.122.400,00	758.259.600,00	772.150.851,26	781.556.797,97	791.699.960,36	816.751.165,72
5	282.956.400	546.152.400,00	666.535.200,00	730.224.000,00	767.444.400,00	796.683.600,00	819.804.000,00	835.312.800,00	852.634.925,05	868.255.124,22	878.831.764,02	890.237.375,64	918.406.531,18
6	292.428.000	576.829.200,00	718.228.800,00	774.619.200,00	814.814.400,00	842.769.600,00	872.756.400,00	893.345.131,09	911.870.689,51	928.576.082,84	939.887.521,70	952.085.524,18	982.211.697,21
7	312.350.400	597.856.800,00	729.543.600,00	804.795.600,00	851.344.800,00	890.076.000,00	918.943.750,28	940.622.062,54	960.128.016,46	977.717.479,91	989.627.534,14	1.002.471.070,03	1.034.191.557,47
8	327.673.200	635.665.200,00	797.181.600,00	875.146.800,00	927.842.400,00	964.399.575,38	995.677.855,12	1.019.166.360,75	1.040.301.110,68	1.059.359.338,38	1.072.263.911,97	1.086.179.915,28	1.120.549.142,87
9	339.898.800	666.178.800,00	852.090.000,00	953.362.800,00	1.007.038.153,90	1.046.715.657,77	1.080.663.687,17	1.106.157.048,27	1.129.095.749,45	1.149.780.687,37	1.163.786.727,58	1.178.890.527,84	1.216.193.332,18
10	371.275.200	757.122.000,00	950.127.600,00	1.041.498.898,75	1.100.136.410,07	1.143.482.003,77	1.180.568.446,88	1.208.418.607,92	1.233.477.936,87	1.256.075.147,57	1.271.376.012,52	1.287.876.122,80	1.328.627.481,72
11	388.024.800	778.761.600,00	963.512.711,27	1.056.171.221,34	1.115.634.800,25	1.159.591.033,61	1.197.199.939,35	1.225.442.445,07	1.250.854.802,30	1.273.770.355,69	1.289.286.774,61	1.306.019.333,47	1.347.344.785,25
12	398.685.600	775.725.200,03	959.755.964,71	1.052.053.198,24	1.111.284.928,00	1.155.069.775,53	1.192.532.043,74	1.220.664.431,62	1.245.977.705,79	1.268.803.911,19	1.284.259.831,43	1.300.927.149,86	1.342.091.473,25

Fig.3.4.4: triangolo di run off dei costi medi incrementali-AMASES

Anno di generazione	Anno di sviluppo												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	12+
1													40.179,80
2												41.731,90	42.060,03
3											35.380,30	46.007,98	46.369,73
4										41.205,13	38.369,54	49.895,13	50.287,45
5									40.875,02	44.614,21	41.544,01	54.023,17	54.447,94
6								40.975,13	45.833,01	50.025,76	46.583,16	60.575,99	61.052,29
7							38.791,58	43.613,01	48.783,64	53.246,30	49.582,07	64.475,73	64.982,69
8					29.608,02	40.946,95	46.036,28	51.494,20	56.204,82	52.337,00	68.058,19	68.593,32	
9				22.082,22	32.004,75	44.261,55	49.762,85	55.662,58	60.754,52	56.573,60	73.567,40	74.145,85	
10			16.988,53	25.174,53	36.486,57	50.459,77	56.731,45	63.457,36	69.262,35	64.495,96	83.869,51	84.528,96	
11		12.027,97	17.744,97	26.295,46	38.111,19	52.706,57	59.257,50	66.282,89	72.346,36	67.367,74	87.603,92	88.292,73	
12	4.418,01	13.103,01	19.330,98	28.645,69	41.517,48	57.417,35	64.553,80	72.207,10	78.812,51	73.388,91	95.433,75	96.184,13	

Il calcolo delle caratteristiche della riserva sinistri richiede la conoscenza della media, varianza, media quadratica e media cubica del costo dei singoli sinistri. Le varianze e le medie quadratiche delle *severity* relative alle celle (i,j) oggetto di stima sono state ricavate mediante il vettore dei coefficienti di variazione del costo sinistri stimati per ogni antidurata (fig: 3.4.5).

Fig 3.4.5: vettore stimato dei coefficienti di variazione del costo sinistri.

CV(Z)=	Anno di sviluppo												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	12+
		5,75	5,7	5,85	5,05	4,65	3,35	4,70	3,50	2,45	3,60	2,45	3,22

Per la stima delle medie cubiche del costo dei singoli sinistri, invece, si è ipotizzato che la *severity* di ogni cella (i,j) sia descritta da una v.a. Gamma di parametri $(\alpha_{i,j}; \beta_{i,j})$ (Appendice A.3).

I valori attesi, le varianze e gli scarti quadratici medi delle imprese SIFA e AMASES al variare di $\sigma_{\tilde{q}}$ sono esposti nella tabella seguenti (fig: 3.4.6):

Fig.3.4.6: Media, varianza e scarto quadratico medio della v.a. ${}^n\tilde{R}$ al variare della *standard deviation* del fattore di disturbo

$\sigma_{\tilde{q}}$	media		varianza		sqm	
	SIFA	AMASES	SIFA	AMASES	SIFA	AMASES
2%	229.538.009	2.826.940.322	120.311.233.955.518	4.902.360.744.239.040	10.968.647,77	70.016.860,43
3%	229.538.009	2.826.940.322	146.655.082.745.426	8.898.156.537.274.620	12.110.123,15	94.330.040,48
5%	229.538.009	2.826.940.322	230.955.398.873.130	21.684.703.074.988.500	15.197.216,81	147.257.268,33
8%	229.538.009	2.826.940.322	436.437.419.434.409	52.851.910.260.666.100	20.891.084,69	229.895.433,32

Le medie delle due riserve sinistri sono costanti al variare dell'intensità del fattore \tilde{q} in quanto il valore atteso della riserva, a differenza della varianza, non è influenzato da $\sigma_{\tilde{q}}$.

Nella tabella successiva (fig: 3.4.7) sono riportati i valori del coefficiente di variazione delle due imprese relativi sia alle singole generazioni che a livello complessivo di riserva. È stato stimato, inoltre, il valore del coefficiente di correlazione lineare (ρ) nell'ipotesi in cui la dipendenza lineare tra le celle oggetto di stima del triangolo sia la stessa.

Fig.3.4.7: Coefficiente di variazione, per singola generazione e a livello aggregato, e coefficiente di correlazione lineare a livello aggregato di riserva al variare della *standard deviation* del fattore di disturbo

COEFFICIENTE DI VARIAZIONE								
$\sigma_{\bar{q}}$	2%		3%		5%		8%	
generazione	SIFA	AMASES	SIFA	AMASES	SIFA	AMASES	SIFA	AMASES
1	56,23%	15,29%	56,28%	15,45%	56,42%	15,96%	56,76%	17,14%
2	41,27%	12,64%	41,33%	12,84%	41,53%	13,45%	41,99%	14,83%
3	37,11%	11,25%	37,17%	11,47%	37,39%	12,15%	37,91%	13,66%
4	31,46%	9,09%	31,54%	9,36%	31,79%	10,18%	32,40%	11,94%
5	29,46%	8,06%	29,55%	8,37%	29,81%	9,28%	30,46%	11,18%
6	27,87%	7,90%	27,96%	8,21%	28,24%	9,13%	28,93%	11,07%
7	23,47%	6,96%	23,58%	7,31%	23,91%	8,33%	24,72%	10,41%
8	20,95%	6,24%	21,07%	6,63%	21,44%	7,74%	22,33%	9,95%
9	18,71%	5,53%	18,84%	5,97%	19,26%	7,18%	20,25%	9,52%
10	15,72%	4,88%	15,88%	5,37%	16,38%	6,69%	17,53%	9,15%
11	11,03%	3,95%	11,26%	4,54%	11,95%	6,05%	13,48%	8,69%
12	6,07%	3,03%	6,47%	3,77%	7,61%	5,50%	9,84%	8,32%
TOTALE	4,78%	2,48%	5,28%	3,34%	6,62%	5,21%	9,10%	8,13%
ρ	0,003597	0,026135	0,008012	0,056092	0,021600	0,137668	0,052002	0,281222

Analizzando la tabella si osserva, per entrambe le imprese, un comportamento decrescente del coefficiente di variazione al crescere della generazione considerata; questo andamento è determinato dall'incremento del numero dei sinistri riservato nelle generazioni più recenti. Il crescere dello scarto quadratico medio del fattore di disturbo non modifica l'andamento del coefficiente di variazione al variare della generazione ma ne comporta solamente un incremento; al crescere di $\sigma_{\bar{q}}$ infatti, la variabilità relativa del numero dei sinistri cresce a parità di generazione per entrambi i portafogli considerati (figure: 3.4.8 e 3.4.9).

L'impresa AMASES grazie al maggior numero di sinistri riservati rispetto all'impresa SIFA, possiede una variabilità relativa più bassa per ogni valore considerato della *standard deviation* del fattore di disturbo (figure: 3.4.10, 3.4.11, 3.4.12 e 3.4.13).

Fig.3.4.8: Coefficiente di variazione per generazione al variare di $\sigma_{\bar{q}}$ per l'impresa SIFA

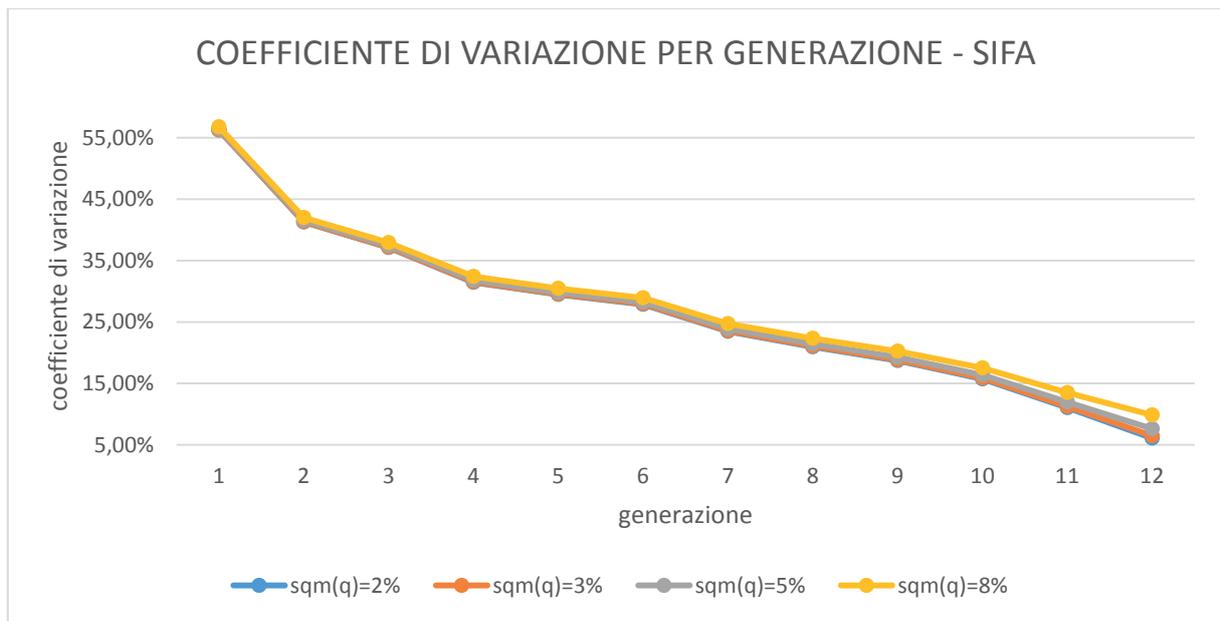


Fig.3.4.9: Coefficiente di variazione per generazione al variare di $\sigma_{\bar{q}}$ per l'impresa AMASES

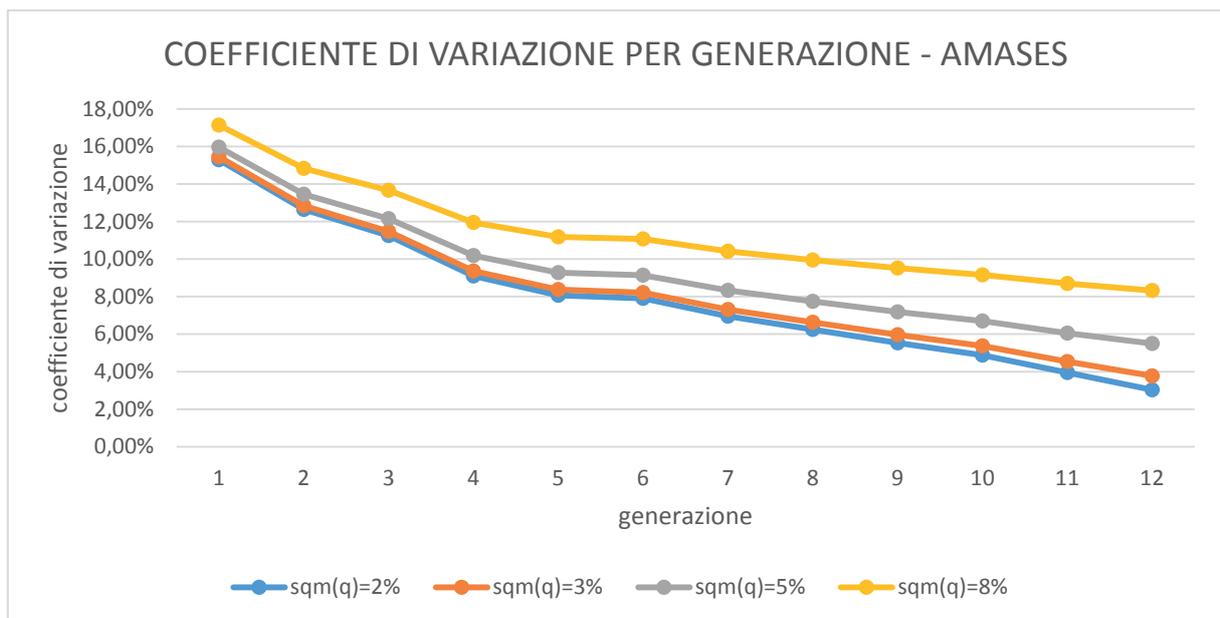


Fig.3.4.10: Coefficiente di variazione per generazione delle imprese SIFA e AMASES posto $\sigma_{\tilde{q}} = 2\%$

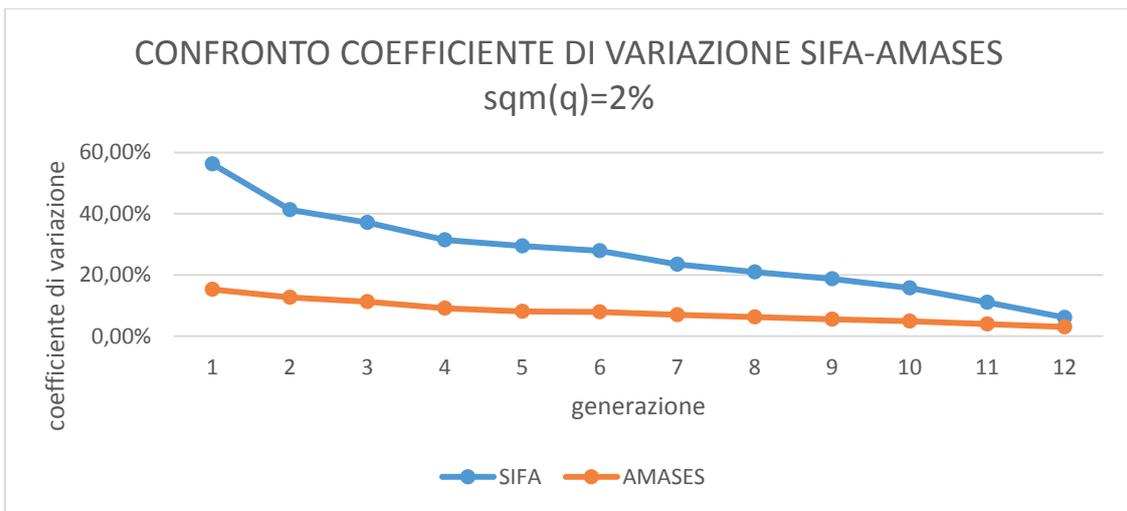


Fig.3.4.11: Coefficiente di variazione per generazione delle imprese SIFA e AMASES posto $\sigma_{\tilde{q}} = 3\%$

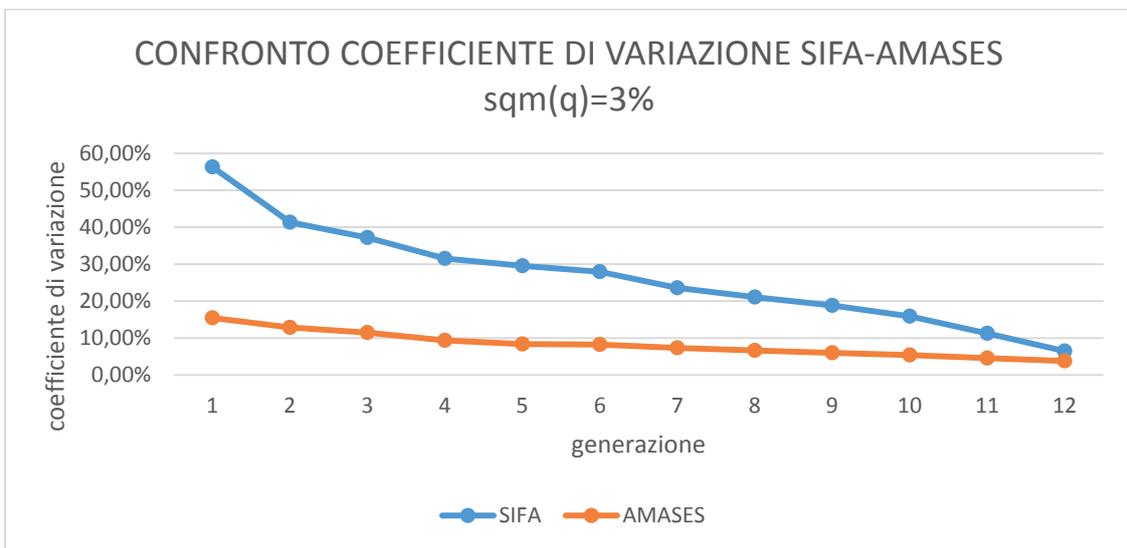


Fig.3.4.12: Coefficiente di variazione per generazione delle imprese SIFA e AMASES posto $\sigma_{\tilde{q}} = 5\%$

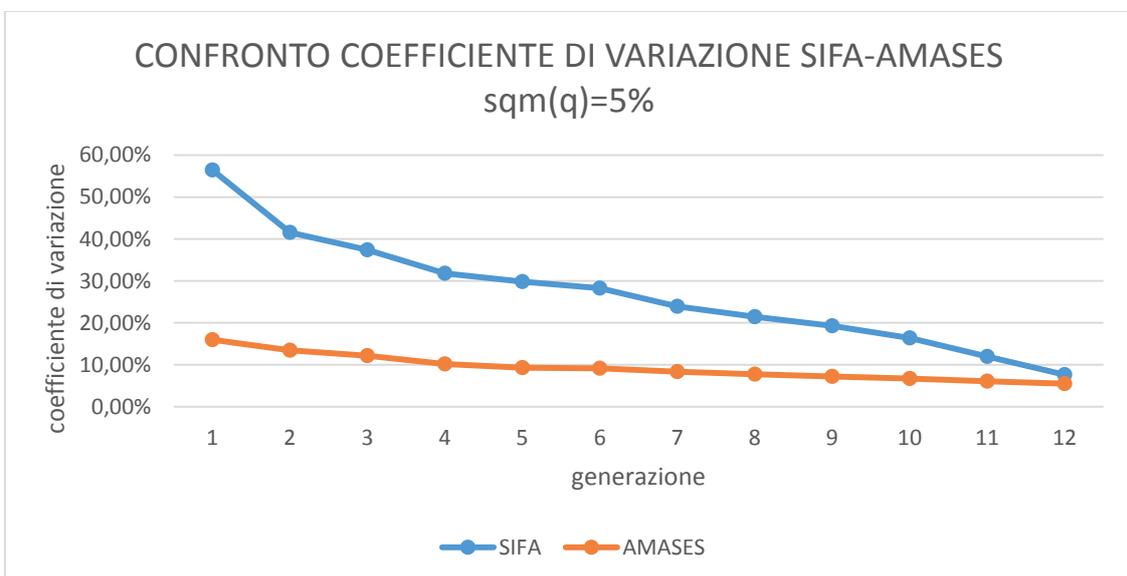
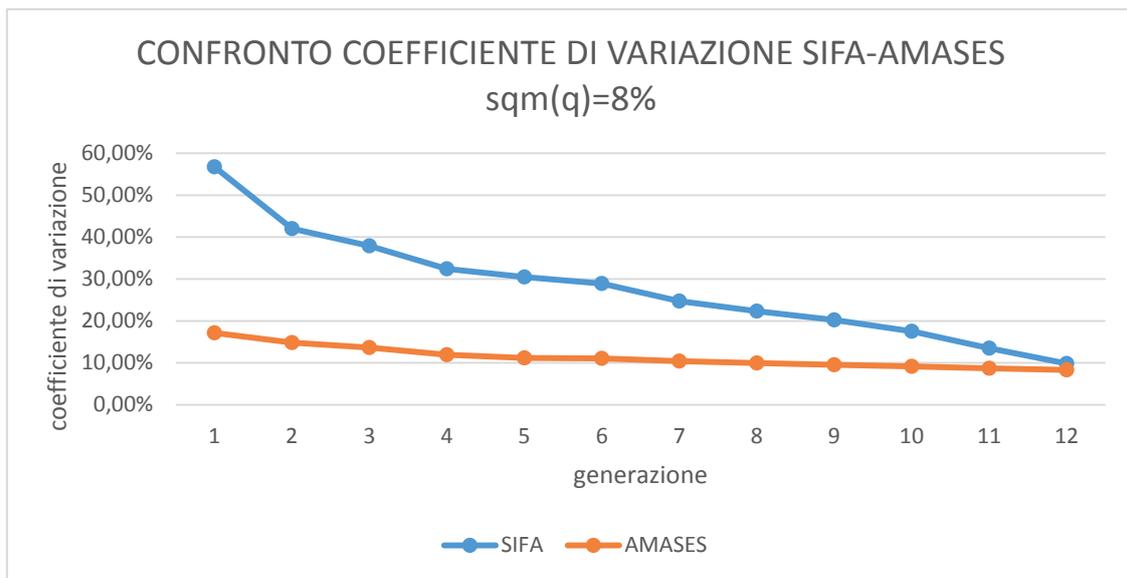


Fig.3.4.13: Coefficiente di variazione per generazione delle imprese SIFA e AMASES posto $\sigma_{\tilde{q}} = 8\%$



Considerazioni analoghe valgono a livello totale di riserva sinistri. Il coefficiente di variazione dell'impresa SIFA, al variare di $\sigma_{\tilde{q}}$, è sempre maggiore rispetto a quello dell'impresa AMASES. La diversa numerosità dei sinistri riservati gioca, quindi, un ruolo determinante sulle due imprese.

I valori asintotici dei coefficienti di variazione, al variare del fattore di disturbo, corrispondono ai rispettivi $\sigma_{\tilde{q}}$. L'impresa SIFA possiede valori di variabilità relativa abbastanza distanti rispetto ai corrispondenti scarti quadratici medi dei fattori di disturbo; la dimensione dell'impresa più piccola non è quindi sufficiente a diversificare in modo consistente il rischio non sistematico di portafoglio. Con riferimento alla compagnia AMASES, invece, si ottengono valori dei coefficienti di variazione molto prossimi a quelli di $\sigma_{\tilde{q}}$; in questo caso quindi la dimensione dell'impresa comporta una diversificazione quasi totale del rischio non sistematico.

Nell'ultima riga della tabella presentata in figura 3.4.7 infine sono riportati i valori stimati del coefficiente di correlazione lineare a livello totale di riserva. Il valore di ρ cresce, per entrambi gli assicuratori, al crescere della variabilità del fattore di disturbo; il fattore \tilde{q} dunque introduce una dipendenza positiva sulle celle del triangolo crescente nei valori di $\sigma_{\tilde{q}}$. Si osservano infine valori di ρ più elevati per l'impresa di maggiori dimensioni.

Nella tabella presentata di seguito (fig:3.4.14) sono esposti i valori dei coefficienti di variazione a livello totale di riserva calcolati nei casi estremi di perfetta incorrelazione ($\rho = 0$) e piena correlazione lineare ($\rho = 1$) tra tutte le celle del triangolo; sono riportati inoltre i valori effettivi delle variabilità relative delle due imprese in modo tale da poter cogliere l'effetto della dipendenza lineare realmente presente sulla riserva sinistri delle compagnie SIFA e AMASES.

Fig.3.4.14: Coefficienti di variazione per le imprese SIFA e AMASES, al variare di $\sigma_{\bar{q}}$, calcolati in ipotesi di indipendenza, piena dipendenza e effettiva dipendenza lineare

$\sigma_{\bar{q}}$	CV SIFA			CV AMASES		
	$\rho = 0$	esempio	$\rho = 1$	$\rho = 0$	esempio	$\rho = 1$
2%	4,38%	4,78%	32,05%	1,51%	2,48%	12,24%
3%	4,44%	5,28%	32,22%	1,57%	3,34%	12,53%
5%	4,60%	6,62%	32,72%	1,75%	5,21%	13,34%
8%	4,98%	9,10%	33,77%	2,12%	8,13%	14,96%

Nella tabella seguente (fig: 3.4.15) sono riportati i valori dell'indice di asimmetria delle due imprese calcolati per singola generazione e a livello totale di riserva al variare dello scarto quadratico medio del fattore di disturbo.

Fig.3.4.15: Indice di asimmetria per singola generazione a livello aggregato di riserva al variare della *standard deviation* del fattore di disturbo

ASIMMETRIA								
$\sigma_{\bar{q}}$	2%		3%		5%		8%	
generazione	SIFA	AMASES	SIFA	AMASES	SIFA	AMASES	SIFA	AMASES
1	1.074566	0.290160	1.074687	0.290786	1.075096	0.293620	1.076217	0.304306
2	0.791044	0.247378	0.791203	0.247869	0.791760	0.250949	0.793429	0.264467
3	0.711679	0.218287	0.711854	0.219007	0.712484	0.223260	0.714440	0.240568
4	0.619978	0.181253	0.620064	0.181929	0.620461	0.187561	0.622156	0.210926
5	0.598500	0.157914	0.598440	0.159148	0.598413	0.167232	0.599301	0.196181
6	0.607183	0.160228	0.606729	0.160920	0.605513	0.168009	0.603899	0.196224
7	0.529054	0.140563	0.528290	0.141685	0.526265	0.151305	0.523658	0.185042
8	0.454814	0.123402	0.454264	0.125414	0.453031	0.138311	0.452846	0.177301
9	0.395043	0.107788	0.394680	0.110803	0.394189	0.127299	0.396430	0.171304
10	0.322491	0.093838	0.322382	0.098120	0.323025	0.118552	0.329249	0.167032
11	0.222837	0.076453	0.223071	0.082894	0.226155	0.109285	0.241976	0.163069
12	0.145512	0.062294	0.143242	0.071362	0.148713	0.103606	0.181817	0.161033
TOTALE	0.099707	0.045014	0.102177	0.062015	0.120342	0.100524	0.167636	0.160137
$\gamma_{\bar{q}}$	0.040000		0.060000		0.100000		0.160000	

L'asimmetria, sia per l'impresa SIFA che per AMASES, assume valori decrescenti rispetto alle generazioni in virtù dell'incremento del numero di sinistri riservati (figure: 3.4.16 e 3.4.17). L'effetto dimensionale inoltre porta a valori dell'indice di asimmetria minori per l'impresa AMASES rispetto a SIFA a parità di generazione (figure: 3.4.18, 3.4.19, 3.4.20 e 3.4.21).

Risultati analoghi valgono se si considera la riserva sinistri a livello complessivo; la maggiore dimensione del portafoglio determina valori dell'asimmetria, ancora una volta, più bassi per la compagnia AMASES.

Fig.3.4.16: Indice di asimmetria per generazione al variare di $\sigma_{\bar{q}}$ per l'impresa SIFA

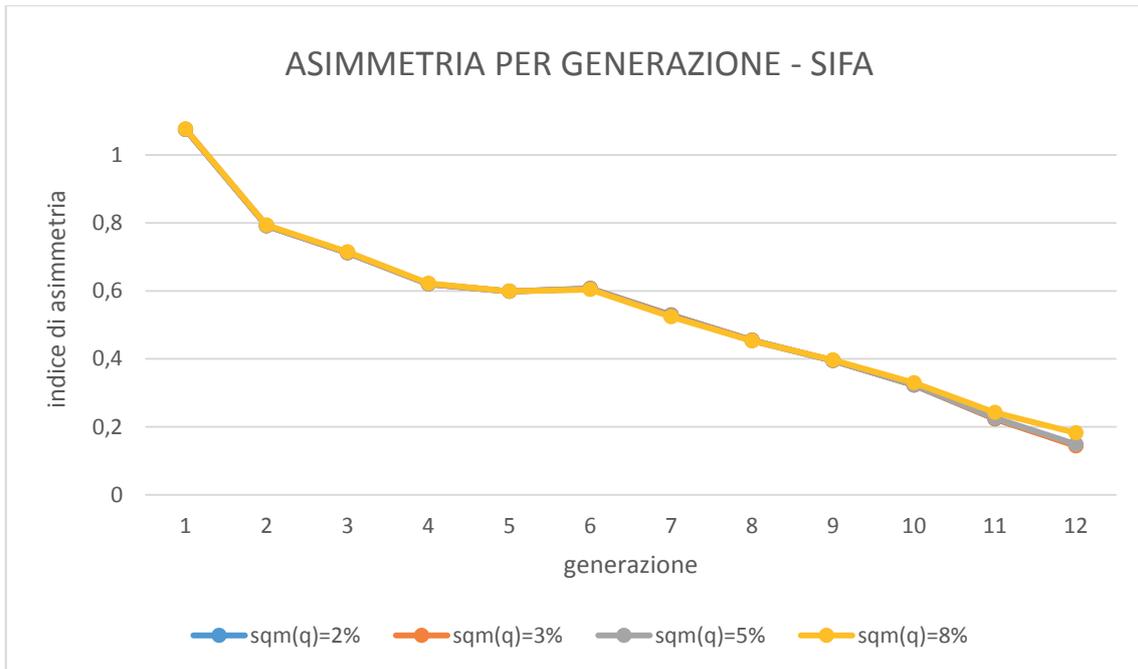


Fig.3.4.17: Indice di asimmetria per generazione al variare di $\sigma_{\bar{q}}$ per l'impresa AMASES

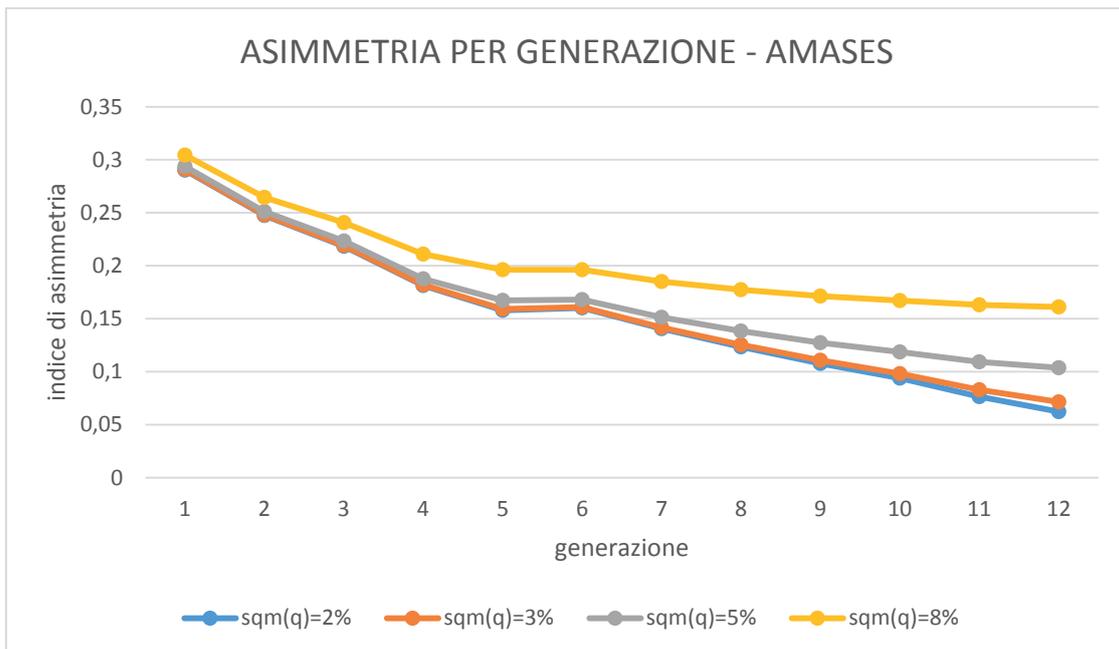


Fig.3.4.18: Indice di asimmetria per generazione delle imprese SIFA e AMASES posto $\sigma_{\dot{q}} = 2\%$

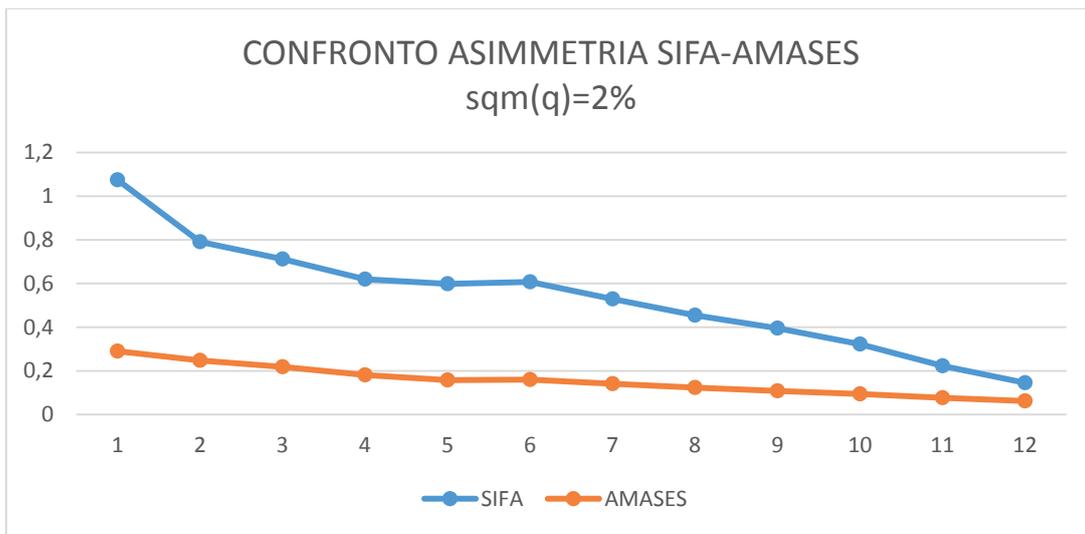


Fig.3.4.19: Indice di asimmetria per generazione delle imprese SIFA e AMASES posto $\sigma_{\dot{q}} = 3\%$

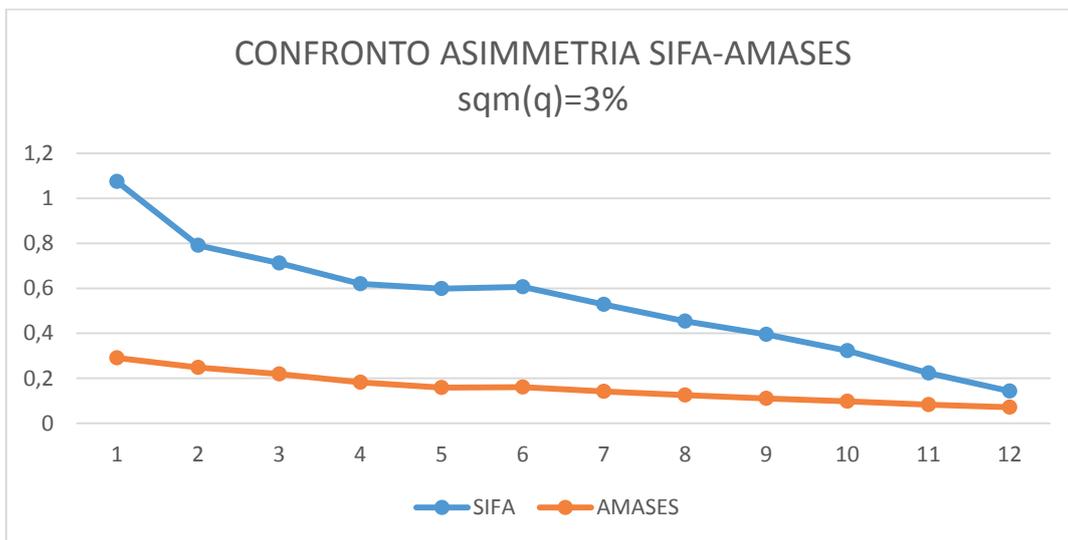


Fig.3.4.20: Indice di asimmetria per generazione delle imprese SIFA e AMASES posto $\sigma_{\dot{q}} = 5\%$

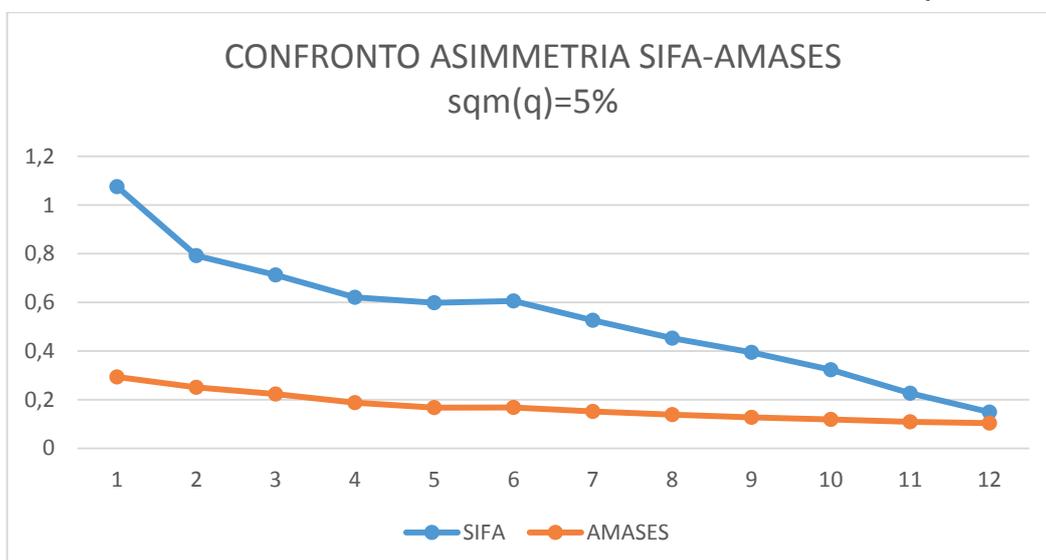
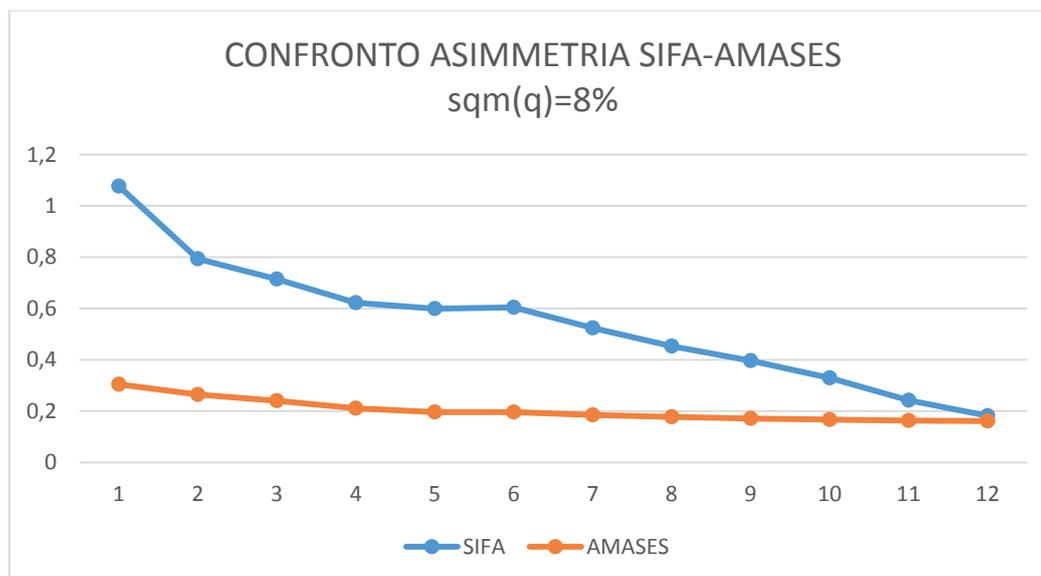


Fig.3.4.21: Indice di asimmetria per generazione delle imprese SIFA e AMASES posto $\sigma_{\tilde{q}} = 8\%$



Il valore asintotico dell'indice di asimmetria della riserva sinistri corrisponde a quello del fattore di disturbo. La riserva sinistri dell'impresa SIFA possiede un indice di asimmetria abbastanza distante dal valore di $\gamma_{\tilde{q}}$; tale differenza tuttavia tende a diminuire al crescere di $\sigma_{\tilde{q}}$. All'aumentare della variabilità del fattore di disturbo dunque l'asimmetria tende ad essere sempre più influenzata dal fattore di disturbo stesso. La riserva sinistri della compagnia AMASES possiede, invece, grazie alla maggiore numerosità dei sinistri riservati, valori dell'asimmetria vicini a quelli asintotici; al crescere del fattore di disturbo, anche in questo caso, l'asimmetria tende ad essere sempre più spiegata dal solo fattore di disturbo.

Con riferimento all'indice di asimmetria delle due imprese si deve porre attenzione alla circostanza in cui $\sigma_{\tilde{q}}$ assuma valori molto bassi; per valori inferiori al 2%, infatti, l'indice non assume un andamento strettamente crescente. Per la compagnia AMASES, infatti, per valori dello scarto quadratico medio del fattore di disturbo compresi tra lo 0,1% e lo 0,7% si osserva un andamento decrescente dell'indice di asimmetria (fig. 3.4.22). Con riferimento all'impresa SIFA, invece, il range di valori di $\sigma_{\tilde{q}}$ tali per cui l'asimmetria è decrescente, risulta essere più ampio: dallo 0,1% al 2% (fig: 3.4.23).

Fig. 3.4.22: focus indice di asimmetria impresa AMASASES per $0,10\% < \sigma_{\tilde{q}} < 1,10\%$.

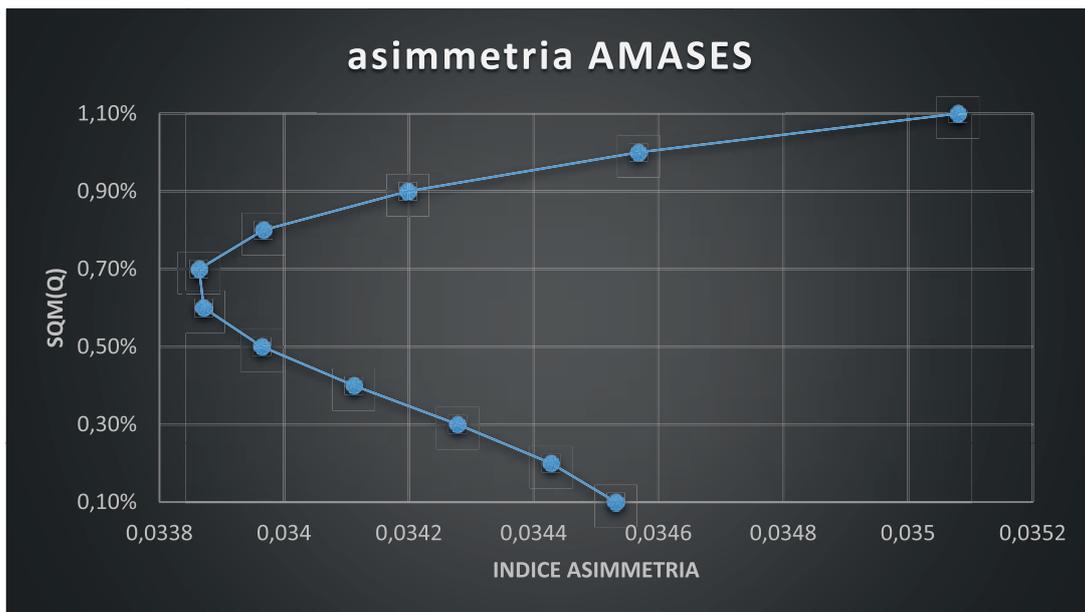
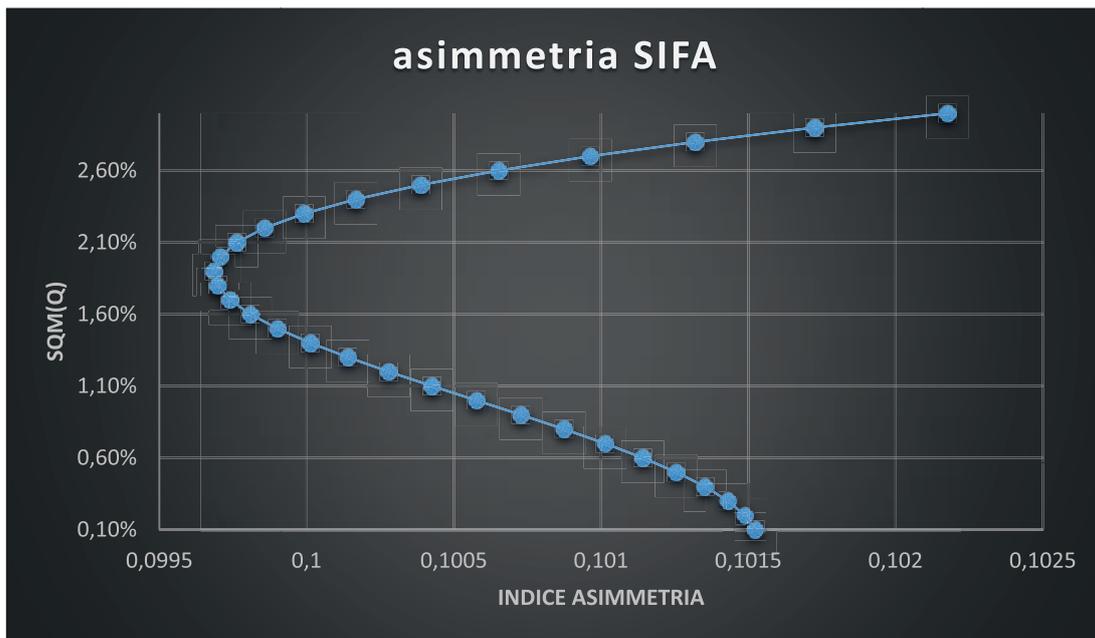


Fig. 3.4.23: focus indice di asimmetria impresa AMASASES per $10\% < \sigma_{\tilde{q}} < 3,00\%$.



L'ultima tabella che è presentata di seguito (fig: 3.4.24) permette di confrontare la variazione percentuale dell'asimmetria e del coefficiente di variazione delle due imprese oggetto di studio, considerando un *range* di valori della variabilità del fattore di disturbo che varia dall'1% al 10%.

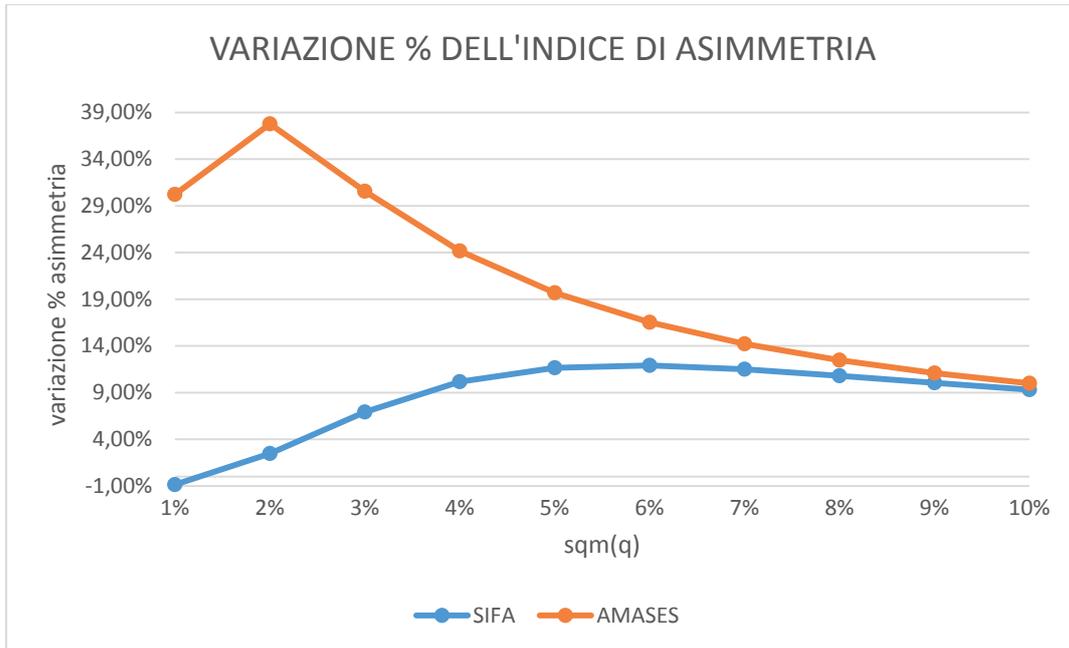
Fig.3.4.24: Variazioni percentuali del coefficiente di variazione e dell'indice di asimmetria, per le imprese SIFA e AMASES, al variare di $\sigma_{\tilde{q}}$

$\sigma_{\tilde{q}}$	SIFA		AMASES		$\Delta \% \sigma_{\tilde{q}}$
	$\Delta \% CV$	$\Delta \% asim$	$\Delta \% CV$	$\Delta \% asim$	
1%	7,30%	-0,87%	39,90%	30,22%	100,00%
2%	10,41%	2,48%	34,72%	37,77%	50,00%
3%	11,87%	6,92%	27,62%	30,55%	33,33%
4%	12,18%	10,16%	22,32%	24,16%	25,00%
5%	11,85%	11,66%	18,55%	19,69%	20,00%
6%	11,22%	11,90%	15,80%	16,53%	16,67%
7%	10,50%	11,49%	13,73%	14,22%	14,29%
8%	9,78%	10,80%	12,12%	12,46%	12,50%
9%	9,10%	10,05%	10,84%	11,09%	11,11%
10%	8,48%	9,31%	9,80%	9,99%	10,00%

Le variazioni percentuali del coefficiente di variazione per entrambe le compagnie sono positive; ciò implica che tali grandezze sono crescenti nei valori di $\sigma_{\tilde{q}}$. Con riferimento all'indice di asimmetria invece si nota un valore negativo per l'impresa SIFA; l'asimmetria dell'impresa quindi, come osservato precedentemente, non è crescente nel passaggio di $\sigma_{\tilde{q}}$ dall'1% al 2%. Per l'impresa di maggiori dimensioni, invece, la tabella non permette di cogliere tale dinamica in quanto i valori dello scarto quadratico medio del fattore di disturbo tali da comportare un decremento dell'asimmetria sono inferiori all'1%.

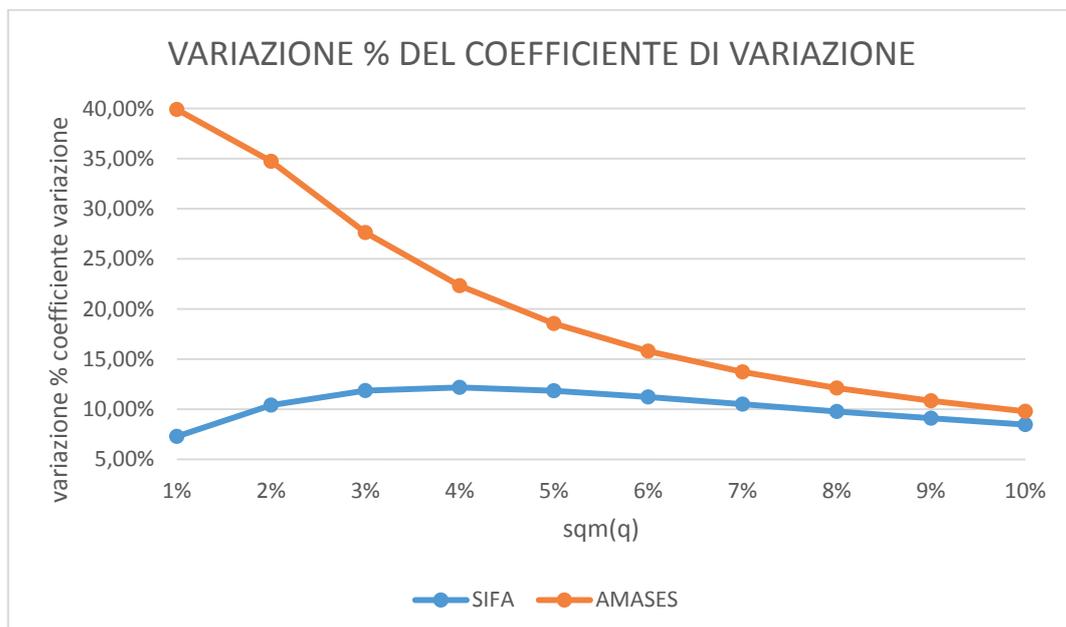
Con riferimento all'asimmetria (fig: 3.4.25) la crescita del fattore di disturbo ha effetti inizialmente più marcati sull'impresa di elevate dimensioni; per valori di $\sigma_{\tilde{q}}$ maggiori del 8%, infine, l'asimmetria dell'impresa AMASES cresce percentualmente in egual misura e in linea con la crescita della *standard deviation* di \tilde{q} , cioè assume un andamento di crescita lineare. Tale comportamento si riscontra anche per l'asimmetria dell'impresa SIFA per valori dello scarto quadratico medio del fattore di disturbo più elevati di quelli presentati in tabella. Questi andamenti differenti, per valori relativamente contenuti di $\sigma_{\tilde{q}}$, sono determinati dalle differenti caratteristiche e numerosità delle compagnie. L'asimmetria dell'impresa di piccole dimensioni risulta, per valori contenuti della variabilità di \tilde{q} , poco influenzata dal fattore di disturbo in quanto le scarse dimensioni del portafoglio portano a valori dell'asimmetria lontani da quelli asintotici e quindi il peso proporzionale della variabile misturante non risulta essere marcato.

Fig.3.4.25: Grafico delle variazioni percentuali dell'indice di asimmetria per le imprese SIFA e AMASES al variare di $\sigma_{\tilde{q}}$



Considerazioni analoghe valgono per il coefficiente di variazione (fig: 3.4.26); anche in tale circostanza si ha un effetto più evidente di $\sigma_{\tilde{q}}$ sull'impresa AMASES. Questo risultato deriva dalla maggiore dimensione del portafoglio detenuto dall'impresa; in tale situazione infatti la maggiore numerosità permette una diversificazione quasi totale del rischio non sistematico, lasciando, quindi, in capo ad AMASES una variabilità relativa quasi tutta determinata dal fattore di disturbo. Al crescere della variabilità del fattore di disturbo, infine, i coefficienti di variazione delle due imprese tendono a crescere nella stessa proporzione di $\sigma_{\tilde{q}}$.

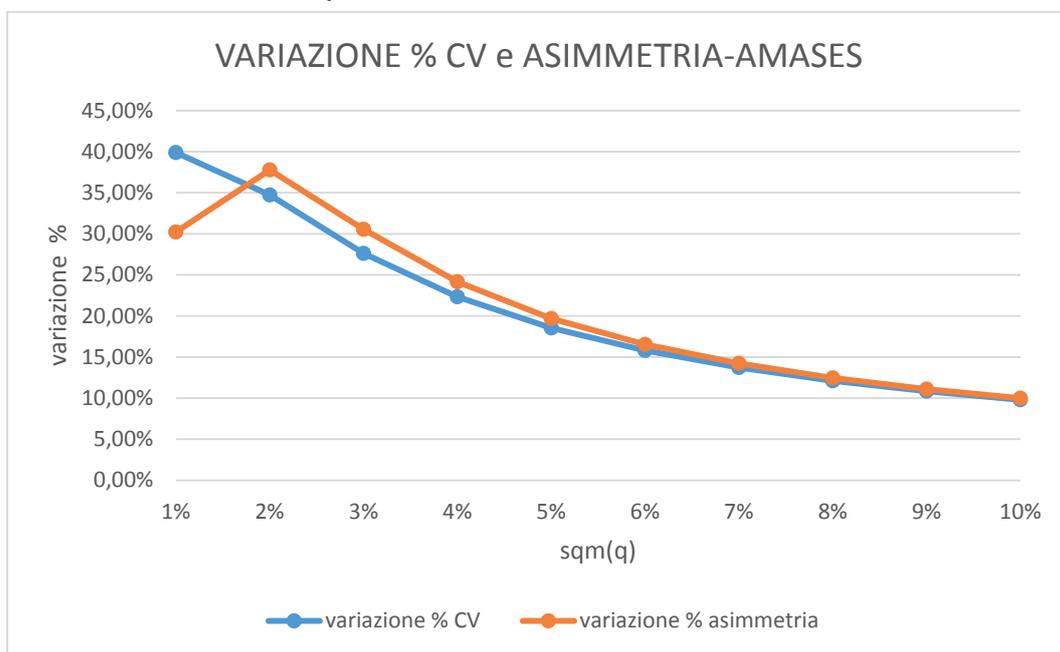
Fig.3.4.26: Grafico delle variazioni percentuali del coefficiente di variazione per le imprese SIFA e AMASES al variare di $\sigma_{\tilde{q}}$



Dalla tabella presentata in figura 3.4.24 è possibile, infine, studiare l'impatto del fattore di disturbo, al variare della sua *standard deviation*, sul coefficiente di variazione e asimmetria della singola impresa di assicurazione.

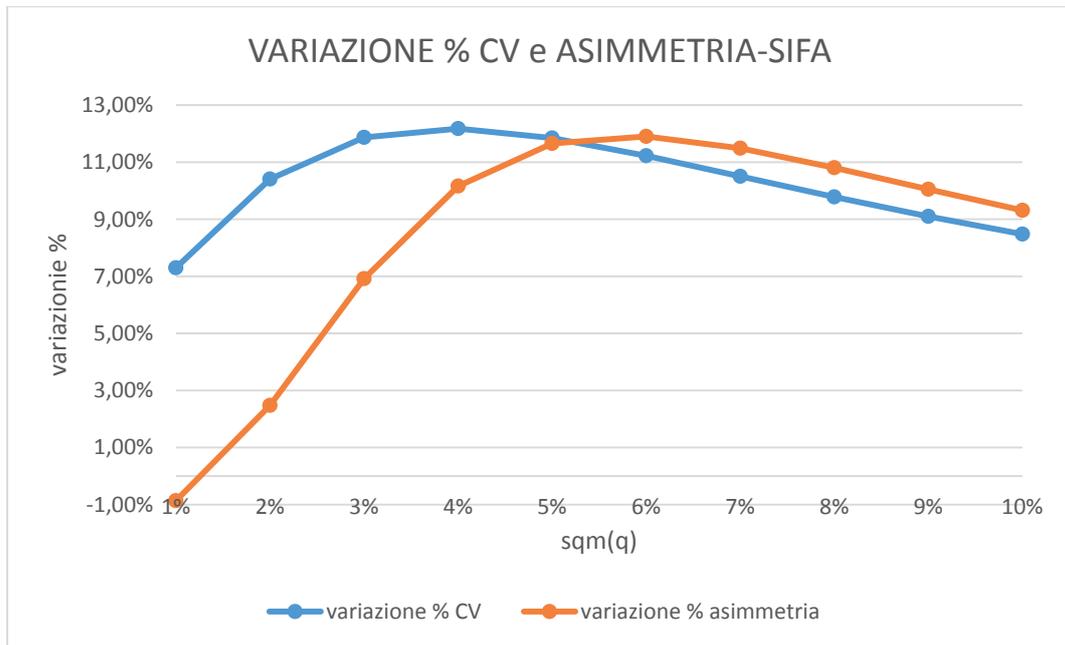
Considerando l'impresa AMASES (fig: 3.4.27) si riscontra un effetto di $\sigma_{\tilde{q}}$ più marcato, a meno del valore 1%, sull'indice di asimmetria; quest'ultimo infatti cresce percentualmente in modo maggiormente rispetto al coefficiente di variazione. Per valori elevati dello scarto quadratico medio del fattore di disturbo, tuttavia, la crescita percentuale dell'asimmetria e del coefficiente di variazione si allinea su valori comuni e pari agli incrementi percentuali di $\sigma_{\tilde{q}}$.

Fig.3.4.27: Grafico delle variazioni percentuali del coefficiente di variazione e indice di asimmetria dell'impresa AMASES al variare di $\sigma_{\tilde{q}}$



Considerando, infine, la compagnia di minori dimensioni (fig:3.4.28) si osserva un'incidenza maggiore del fattore di disturbo sul coefficiente di variazione fino a valori della *standard deviation* pari al 5%; superata tale soglia, invece, l'indice di asimmetria risulta esserne influenzato maggiormente. Quando $\sigma_{\tilde{q}}$ assume valori considerevoli, infine, le variazioni percentuali dell'asimmetria e del coefficiente di variazione tendono ad assumere valori coincidenti e pari agli incrementi della variabilità di \tilde{q} .

Fig.3.4.28: Grafico delle variazioni percentuali del coefficiente di variazione e indice di asimmetria dell'impresa SIFA al variare di $\sigma_{\bar{q}}$



3.5 La riserva sinistri: il processo di Poisson composto semplice con fattore di disturbo applicato alle *severity*

Nel presente paragrafo si studia la v.a. del costo incrementale dei sinistri nell'ipotesi in cui sia presente un solo fattore di disturbo, applicato alle v.a. che descrivono il costo dei singoli sinistri. L'importo incrementale, ${}^c\tilde{X}_{i,j}$, (in cui l'apice "c" evidenzia la presenza del fattore di disturbo solo sulle v.a. delle *severity*) riservato dall'impresa di assicurazione nella generica cella (i,j) è descritto dalla seguente variabile aleatoria:

$${}^c\tilde{X}_{i,j} = \sum_{h=1}^{\tilde{K}_{i,j}} \tilde{p}\tilde{Z}_{i,j,h} \quad (3.5.1)$$

dove per ipotesi:

- la v.a. del numero dei sinistri riservati nella cella (i,j) è $\tilde{K}_{i,j}$ ed è descritta da un processo di Poisson semplice, cioè $\tilde{K}_{i,j} \sim Po(n_{i,j})$;
- Le v.a. $\tilde{K}_{i,j}$ e $\tilde{K}_{h \neq i, k \neq j}$ sono tra loro indipendenti, cioè il numero dei sinistri riservati riferiti a celle diverse sono indipendenti;
- $\tilde{Z}_{i,j,h}$ è la v.a. del costo riferito all'h-esimo sinistro riservato nella cella (i,j). Le v.a. delle *severity* sono indipendenti ed identicamente distribuite nella medesima cella;
- Le v.a. $\tilde{Z}_{h \neq i, k \neq j}$ e $\tilde{Z}_{i,j}$ sono tra loro indipendenti, cioè i costi dei singoli sinistri riferiti a celle diverse sono indipendenti;
- Le v.a. $\tilde{Z}_{i,j}$ e $\tilde{K}_{i,j}$ sono indipendenti;
- la v.a. \tilde{p} è indipendente rispetto alle v.a. $\tilde{Z}_{i,j,h}$ e $\tilde{K}_{i,j}$ per ogni cella considerata;
- Il fattore di disturbo \tilde{p} applicato al costo dei singoli sinistri è unico a livello totale di triangolo ed è una v.a. con media unitaria e supporto positivo: $E(\tilde{p}) = 1, \tilde{p} > 0$. Questa v.a. introduce dipendenza positiva, nonché ulteriore variabilità, tra le *severity* delle singole celle, creando una dipendenza positiva tra le v.a. ${}^c\tilde{X}_{i,j}$.

La riserva sinistri è pari alla somma delle v.a. ${}^c\tilde{X}_{i,j}$:

$${}^c\tilde{R} = \sum_i \sum_j {}^c\tilde{X}_{i,j} \quad \text{per } i = 1, \dots, t; j = t - i + 2, \dots, t(t+1). \quad (3.5.2)$$

Si noti, infine, che valgono le seguenti relazioni:

$${}^c\tilde{X}_{i,j} = \tilde{p}\tilde{X}_{i,j}; \quad {}^c\tilde{R} = \tilde{p}\tilde{R}$$

dove la v.a. $\tilde{X}_{i,j}$ individua un processo di Poisson composto semplice; tali considerazioni sono utili per analizzare le caratteristiche, presentate di seguito, della riserva sinistri a livello di singola cella e a livello aggregato di triangolo.

VALORE ATTESO

$$E({}^c \tilde{X}_{i,j}) = E(\tilde{p} \tilde{X}_{i,j}) = E(\tilde{p}) E(\tilde{X}_{i,j}) = n_{i,j} m_{i,j} \quad (3.5.3)$$

$$E({}^c \tilde{R}) = E\left(\sum_i \sum_j \tilde{p} \tilde{X}_{i,j}\right) = E(\tilde{p}) E\left(\sum_i \sum_j \tilde{X}_{i,j}\right) = \sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \cdot \quad (3.5.4)$$

VARIANZA

$$\begin{aligned} \text{var}({}^c \tilde{X}_{i,j}) &= \text{var}(\tilde{p} \tilde{X}_{i,j}) = E(\tilde{p}^2) \text{var}(\tilde{X}_{i,j}) + E(\tilde{X}_{i,j})^2 \text{var}(\tilde{p}) = \\ &E(\tilde{p}^2) n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} + n_{i,j}^2 m_{i,j}^2 \sigma_{\tilde{p}}^2 \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

Tale formula individua la varianza della v.a. ${}^c \tilde{X}_{i,j}$ come somma di due termini:

- $E(\tilde{p}^2) n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}}$, il primo addendo è il prodotto tra la media quadratica di \tilde{p} e la varianza di un processo di Poisson composto semplice;
- $n_{i,j}^2 m_{i,j}^2 \sigma_{\tilde{p}}^2$, il secondo termine è il prodotto tra la varianza del fattore di disturbo e il quadrato della media di ${}^c \tilde{X}_{i,j}$.

La formula 3.5.5 può essere vista anche nel seguente modo:

$$\begin{aligned} E(\tilde{p}^2) n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} + n_{i,j}^2 m_{i,j}^2 \sigma_{\tilde{p}}^2 &= (\sigma_{\tilde{p}}^2 + 1) n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} + n_{i,j}^2 m_{i,j}^2 \sigma_{\tilde{p}}^2 = \\ &\sigma_{\tilde{p}}^2 (n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} + n_{i,j}^2 m_{i,j}^2) + n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

La formula precedente esprime la varianza della v.a. ${}^c \tilde{X}_{i,j}$ ancora come somma di due termini:

- $\sigma_{\tilde{p}}^2 (n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} + n_{i,j}^2 m_{i,j}^2)$, il primo addendo è il prodotto tra la varianza di \tilde{p} e la media quadratica di un processo di Poisson composto semplice;
- $n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}}$, il secondo addendo, invece, è pari alla varianza di un processo di Poisson composto semplice.

A livello totale di riserva la varianza risulta essere:

$$\text{var}({}^c \tilde{R}) = \sum_i \sum_j \text{var}({}^c \tilde{X}_{i,j}) + \sum_{i,j \in B^{(t)}} \sum_{\substack{h,k \in B^{(t)} \\ (h \neq i \vee k \neq j)}} \text{cov}({}^c \tilde{X}_{i,j}; {}^c \tilde{X}_{h,k})$$

dove

$$\sum_{i,j \in B^{(t)}} \sum_{\substack{h,k \in B^{(t)} \\ (h \neq i \vee k \neq j)}} \text{cov}({}^c \tilde{X}_{i,j}; {}^c \tilde{X}_{h,k}) = \sum_{i,j \in B^{(t)}} \sum_{\substack{h,k \in B^{(t)} \\ (h \neq i \vee k \neq j)}} \left[E(\tilde{p} \tilde{X}_{i,j} \tilde{p} \tilde{X}_{h,k}) - E(\tilde{p} \tilde{X}_{i,j}) E(\tilde{p} \tilde{X}_{h,k}) \right] =$$

$$\sum_{i,j \in B^{(t)}} \sum_{\substack{h,k \in B^{(t)} \\ (h \neq i \vee k \neq j)}} \left[E(\tilde{p}^2) E(\tilde{X}_{i,j}) E(\tilde{X}_{h,k}) - E(\tilde{p}) E(\tilde{X}_{i,j}) E(\tilde{p}) E(\tilde{X}_{h,k}) \right] =$$

$$E(\tilde{p}^2) \sum_{i,j \in B^{(t)}} \sum_{\substack{h,k \in B^{(t)} \\ (h \neq i \vee k \neq j)}} \left[E(\tilde{X}_{i,j}) E(\tilde{X}_{h,k}) \right] - E(\tilde{p})^2 \sum_{i,j \in B^{(t)}} \sum_{\substack{h,k \in B^{(t)} \\ (h \neq i \vee k \neq j)}} \left[E(\tilde{X}_{i,j}) E(\tilde{X}_{h,k}) \right] =$$

$$\left[E(\tilde{p}^2) - 1 \right] \sum_{i,j \in B^{(t)}} \sum_{\substack{h,k \in B^{(t)} \\ (h \neq i \vee k \neq j)}} \left[E(\tilde{X}_{i,j}) E(\tilde{X}_{h,k}) \right] = \sigma_{\tilde{p}}^2 \sum_{i,j \in B^{(t)}} \sum_{\substack{h,k \in B^{(t)} \\ (h \neq i \vee k \neq j)}} (n_{i,j} m_{i,j}) (n_{h,k} m_{h,k}).$$

Quindi per la varianza si ricava:

$$\begin{aligned} \text{var}({}^c \tilde{R}) &= \sum_i \sum_j \left[\sigma_{\tilde{p}}^2 (n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} + n_{i,j}^2 m_{i,j}^2) + n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \right] + \sigma_{\tilde{p}}^2 \sum_{i,j \in B^{(t)}} \sum_{\substack{h,k \in B^{(t)} \\ (h \neq i \vee k \neq j)}} (n_{i,j} m_{i,j}) (n_{h,k} m_{h,k}) = \\ &= \sigma_{\tilde{p}}^2 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^2 + \sigma_{\tilde{p}}^2 \sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} + \sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} = \sigma_{\tilde{p}}^2 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^2 + (\sigma_{\tilde{p}}^2 + 1) \sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} = \\ &= \sigma_{\tilde{p}}^2 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^2 + E(\tilde{p}^2) \sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}}. \end{aligned} \quad (3.5.7)$$

Tale formula, analogamente alla 3.5.5, scompone la varianza della riserva sinistri in due termini:

- $\sigma_{\tilde{p}}^2 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^2$, il primo addendo è il prodotto tra la varianza del fattore di disturbo e il quadrato del valore atteso della riserva sinistri;
- $E(\tilde{p}^2) \sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}}$, il secondo addendo, invece, è pari al prodotto tra la media quadratica di \tilde{p} e la somma delle varianze di processi di Poisson composti semplici.

La formula della varianza ricavata precedentemente può essere riscritta nel seguente modo:

$$\text{var}({}^c \tilde{R}) = \sigma_{\tilde{p}}^2 \left[\left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^2 + \sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \right] + \sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}}.$$

(3.5.8)

In questo caso la varianza della v.a. ${}^c \tilde{R}$ è ancora pari alla somma di due termini:

- $\sigma_{\tilde{p}}^2 \left[\left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^2 + \sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \right]$, il primo addendo è il prodotto tra la varianza di \tilde{p} e la media quadratica della somma di processi di Poisson composti semplici;
- $\sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}}$, l'ultimo addendo, invece, è la somma delle varianze di processi di Poisson composti semplici.

COEFFICIENTE DI VARIAZIONE

Il coefficiente di variazione della v.a. ${}^c \tilde{X}_{i,j}$ è pari a:

$$CV({}^c\tilde{X}_{i,j}) = \sqrt{\frac{E(\tilde{p}^2)n_{i,j}a_{2,Z_{i,j}} + n_{i,j}^2m_{i,j}^2\sigma_{\tilde{p}}^2}{n_{i,j}^2m_{i,j}^2}} = \sqrt{\frac{E(\tilde{p}^2)r_{2,Z_{i,j}}}{n_{i,j}} + \sigma_{\tilde{p}}^2} \quad (3.5.9)$$

La variabilità relativa di ${}^c\tilde{X}_{i,j}$ dipende quindi dalla varianza del fattore di disturbo e da un termine pari al rapporto tra due elementi; il numeratore è il prodotto tra la media quadratica di \tilde{p} e l'indice di rischio di secondo ordine della *severity*, mentre il denominatore è pari al numero di sinistri riservati nella cella (i,j).

Il limite del coefficiente di variazione per $n_{i,j} \rightarrow \infty$ risulta essere:

$$\lim_{n_{i,j} \rightarrow \infty} CV({}^c\tilde{X}_{i,j}) = \sigma_{\tilde{p}} \quad (3.5.10)$$

A livello totale di riserva sinistri si ottengono i seguenti risultati:

$$CV({}^c\tilde{R}) = \sqrt{\frac{\sigma_{\tilde{p}}^2 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^2 + E(\tilde{p}^2) \sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}}}{\left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^2}} = \sqrt{\frac{E(\tilde{p}^2) \sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}}}{\left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^2} + \sigma_{\tilde{p}}^2} \quad (3.5.11)$$

In questo caso, quindi, la variabilità relativa della v.a. ${}^c\tilde{R}$ è funzione di due grandezze. La prima è la varianza del fattore di disturbo mentre la seconda è costituita dal rapporto tra due termini; il numeratore è il prodotto tra media quadratica di \tilde{p} e la somma delle varianze di processi di Poisson composti semplici, mentre il denominatore è il quadrato del valore atteso della riserva sinistri.

Il valore asintotico del coefficiente di variazione al crescere del numero dei sinistri riservati può essere calcolato effettuando la sostituzione $n_{i,j} = N\delta_{i,j}$:

$$CV({}^c\tilde{R}) = \sqrt{\frac{E(\tilde{p}^2)N \sum_i \sum_j \delta_{i,j} a_{2,Z_{i,j}}}{N^2 \left(\sum_i \sum_j \delta_{i,j} m_{i,j} \right)^2} + \sigma_{\tilde{p}}^2}$$

e facendo tendere N ad infinito,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} CV({}^c\tilde{R}) = \sigma_{\tilde{p}}. \quad (3.5.12)$$

Il limite del coefficiente di variazione informa che al crescere del numero dei sinistri riservati l'impresa non è in grado di diversificare tutto il rischio a cui è esposta; la riserva sinistri, infatti, è affetta da un elemento sistematico e ineliminabile di variabilità costituito dalla *standard deviation* del fattore di disturbo.

ASIMMETRIA

L'indice di asimmetria è costruito come rapporto tra momento centrale terzo e scarto quadratico medio al cubo:

$$\gamma({}^c\tilde{X}_{i,j}) = \frac{\mu_3({}^c\tilde{X}_{i,j})}{\sigma^3({}^c\tilde{X}_{i,j})}$$

dove

$$\mu_3({}^c\tilde{X}_{i,j}) = \alpha_3({}^c\tilde{X}_{i,j}) - 3\alpha_1({}^c\tilde{X}_{i,j})\text{var}({}^c\tilde{X}_{i,j}) - [\alpha_1({}^c\tilde{X}_{i,j})]^3.$$

I termini che compongono il momento centrale terzo sono i seguenti:

$$\alpha_3({}^c\tilde{X}_{i,j}) = E({}^c\tilde{X}_{i,j}^3) = E(\tilde{p}^3)E(\tilde{X}_{i,j}) = E(\tilde{p}^3)[n_{i,j}^3m_{i,j}^3 + 3n_{i,j}^2m_{i,j}a_{2,Z_{i,j}} + n_{i,j}a_{3,Z_{i,j}}],$$

$$\alpha_1({}^c\tilde{X}_{i,j})\text{var}({}^c\tilde{X}_{i,j}) = n_{i,j}m_{i,j}(E(\tilde{p}^2)n_{i,j}a_{2,Z_{i,j}} + n_{i,j}^2m_{i,j}^2\sigma_{\tilde{p}}^2) = E(\tilde{p}^2)n_{i,j}^2m_{i,j}a_{2,Z_{i,j}} + n_{i,j}^3m_{i,j}^3\sigma_{\tilde{p}}^2,$$

$$[\alpha_1({}^c\tilde{X}_{i,j})]^3 = n_{i,j}^3m_{i,j}^3.$$

Si ricava quindi per il momento centrale terzo della v.a. ${}^c\tilde{X}_{i,j}$:

$$\mu_3({}^c\tilde{X}_{i,j}) = E(\tilde{p}^3)n_{i,j}^3m_{i,j}^3 + 3E(\tilde{p}^3)n_{i,j}^2m_{i,j}a_{2,Z_{i,j}} + E(\tilde{p}^3)n_{i,j}a_{3,Z_{i,j}} - 3E(\tilde{p}^2)n_{i,j}^2m_{i,j}a_{2,Z_{i,j}} - 3n_{i,j}^3m_{i,j}^3\sigma_{\tilde{p}}^2 - n_{i,j}^3m_{i,j}^3$$

e raccogliendo il termine $n_{i,j}^3m_{i,j}^3$,

$$n_{i,j}^3m_{i,j}^3 \underbrace{[E(\tilde{p}^3) - 3\sigma_{\tilde{p}}^2 - 1]}_{\mu_3(\tilde{p})} + 3E(\tilde{p}^3)n_{i,j}^2m_{i,j}a_{2,Z_{i,j}} + E(\tilde{p}^3)n_{i,j}a_{3,Z_{i,j}} - 3E(\tilde{p}^2)n_{i,j}^2m_{i,j}a_{2,Z_{i,j}} =$$

$$\gamma_{\tilde{p}}\sigma_{\tilde{p}}^3n_{i,j}^3m_{i,j}^3 + 3n_{i,j}^2m_{i,j}a_{2,Z_{i,j}}[E(\tilde{p}^3) - E(\tilde{p}^2)] + E(\tilde{p}^3)n_{i,j}a_{3,Z_{i,j}}. \quad (3.5.13)$$

Il momento centrale terzo della v.a. ${}^c\tilde{X}_{i,j}$ è costituito dalla somma di tre termini:

- $\gamma_{\tilde{p}}\sigma_{\tilde{p}}^3n_{i,j}^3m_{i,j}^3$, il primo addendo è il prodotto tra il cubo della media di ${}^c\tilde{X}_{i,j}$ e il momento centrale terzo di \tilde{p} ;
- $3n_{i,j}^2m_{i,j}a_{2,Z_{i,j}}[E(\tilde{p}^3) - E(\tilde{p}^2)]$, il secondo termine dipende dalla media e media quadratica della *severity*, dal quadrato del numero dei sinistri attesi e, infine, da un termine pari alla differenza tra la media cubica e quadratica del fattore di disturbo;
- $E(\tilde{p}^3)n_{i,j}a_{3,Z_{i,j}}$, l'ultimo termine è, infine, il prodotto tra la media cubica di \tilde{p} e il momento centrale terzo di un processo di Poisson composto semplice.

I primi due termini del momento centrale terzo della v.a. ${}^c\tilde{X}_{i,j}$ possono assumere valori negativi.

Nel caso in cui $\gamma_{\tilde{p}} < 0$ e $[E(\tilde{p}^3) - E(\tilde{p}^2)] < 0$ è possibile che il momento centrale terzo e dunque anche l'asimmetria di ${}^c\tilde{X}_{i,j}$ siano negative.

Nel caso particolare in cui $\tilde{p} \sim \text{Gamma}(k, k)$, l'asimmetria di ${}^c\tilde{X}_{i,j}$ è sicuramente positiva in quanto $\gamma_{\tilde{p}}$ e $[E(\tilde{p}^3) - E(\tilde{p}^2)]$ sono sempre maggiori di zero (Appendice A.4).

L'indice di asimmetria risulta essere:

$$\gamma\left({}^c\tilde{X}_{i,j}\right)=\frac{\gamma_{\tilde{p}}\sigma_{\tilde{p}}^3n_{i,j}^3m_{i,j}^3+3n_{i,j}^2m_{i,j}a_{2,Z_{i,j}}\left[E\left(\tilde{p}^3\right)-E\left(\tilde{p}^2\right)\right]+E\left(\tilde{p}^3\right)n_{i,j}a_{3,Z_{i,j}}}{\left[E\left(\tilde{p}^2\right)n_{i,j}a_{2,Z_{i,j}}+n_{i,j}^2m_{i,j}^2\sigma_{\tilde{p}}^2\right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.5.14)$$

Se si raccoglie il termine $m_{i,j}^3$ è possibile esprimere l'asimmetria in funzione degli indici di rischio di secondo e terzo ordine della *severity*:

$$\gamma\left({}^c\tilde{X}_{i,j}\right)=\frac{\gamma_{\tilde{p}}\sigma_{\tilde{p}}^3n_{i,j}^3m_{i,j}^3+3n_{i,j}^2m_{i,j}a_{2,Z_{i,j}}\left[E\left(\tilde{p}^3\right)-E\left(\tilde{p}^2\right)\right]+E\left(\tilde{p}^3\right)n_{i,j}a_{3,Z_{i,j}}}{m_{i,j}^3\left[\frac{E\left(\tilde{p}^2\right)n_{i,j}a_{2,Z_{i,j}}}{m_{i,j}^2}+n_{i,j}^2\sigma_{\tilde{p}}^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\gamma_{\tilde{p}}\sigma_{\tilde{p}}^3n_{i,j}^3+3n_{i,j}^2r_{2,Z_{i,j}}\left[E\left(\tilde{p}^3\right)-E\left(\tilde{p}^2\right)\right]+E\left(\tilde{p}^3\right)n_{i,j}r_{3,Z_{i,j}}}{\left[E\left(\tilde{p}^2\right)n_{i,j}r_{2,Z_{i,j}}+n_{i,j}^2\sigma_{\tilde{p}}^2\right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.5.15)$$

Il valore asintotico dell'asimmetria di ${}^c\tilde{X}_{i,j}$ è pari a:

$$\lim_{n_{i,j}\rightarrow\infty}\gamma\left({}^c\tilde{X}_{i,j}\right)=\gamma_{\tilde{p}}. \quad (3.5.12)$$

L'indice di asimmetria, come il coefficiente di variazione, è affetto dal fattore di disturbo; al crescere del numero dei sinistri riservati nella cella (i,j), infatti, l'asimmetria tende al valore di $\gamma_{\tilde{p}}$.

A livello totale di riserva l'indice di asimmetria è il seguente:

$$\gamma\left({}^c\tilde{R}\right)=\frac{\mu_3\left(\sum_i\sum_j{}^c\tilde{X}_{i,j}\right)}{\sigma^3\left(\sum_i\sum_j{}^c\tilde{X}_{i,j}\right)}$$

dove

$$\mu_3\left(\sum_i\sum_j{}^c\tilde{X}_{i,j}\right)=\alpha_3\left(\sum_i\sum_j{}^c\tilde{X}_{i,j}\right)-3\alpha_1\left(\sum_i\sum_j{}^c\tilde{X}_{i,j}\right)\text{var}\left(\sum_i\sum_j{}^c\tilde{X}_{i,j}\right)-\left[\alpha_1\left(\sum_i\sum_j{}^c\tilde{X}_{i,j}\right)\right]^3.$$

Il momento centrale terzo della v.a. ${}^c\tilde{R}$ può essere scritto come segue (Appendice A.5):

$$\mu_3\left(\sum_i\sum_j{}^c\tilde{X}_{i,j}\right)=$$

$$E(\tilde{p}^3) \left\{ \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^3 + 3 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right) \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \right) + \sum_i \sum_j n_{i,j} a_{3,Z_{i,j}} \right\} \\ - 3 \left\{ \sigma_{\tilde{p}}^2 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^3 + E(\tilde{p}^2) \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right) \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \right) \right\} - \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^3,$$

raccogliendo il termine $\left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^3$ si ottiene:

$$\left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^3 \underbrace{\left[E(\tilde{p}^3) - 3\sigma_{\tilde{p}}^2 - 1 \right]}_{\mu_3(\tilde{p})} + 3 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right) \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \right) \left[E(\tilde{p}^3) - E(\tilde{p}^2) \right] + E(\tilde{p}^3) \sum_i \sum_j n_{i,j} a_{3,Z_{i,j}} = \\ \gamma_{\tilde{p}} \sigma_{\tilde{p}}^3 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^3 + 3 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right) \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \right) \left[E(\tilde{p}^3) - E(\tilde{p}^2) \right] + E(\tilde{p}^3) \sum_i \sum_j n_{i,j} a_{3,Z_{i,j}}.$$

(3.5.17)

Il momento centrale terzo della v.a. ${}^C \tilde{R}$, analogamente a quanto mostrato nella formula 3.5.13, è costituito dalla somma di tre termini:

- $\gamma_{\tilde{p}} \sigma_{\tilde{p}}^3 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^3$, il primo addendo è il prodotto tra il momento centrale terzo di \tilde{p} e il cubo della media della riserva sinistri;
- $3 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right) \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \right) \left[E(\tilde{p}^3) - E(\tilde{p}^2) \right]$, il secondo addendo è pari a tre volte il prodotto tra il valore atteso della riserva sinistri, la somma delle varianze di processi di Poisson composti semplici e un termine pari alla differenza tra la media cubica e la media quadratica di \tilde{p} ;
- $E(\tilde{p}^3) \sum_i \sum_j n_{i,j} a_{3,Z_{i,j}}$, l'ultimo addendo, infine, è il prodotto tra la media cubica della v.a. \tilde{p} e la somma dei momenti centrali terzi di processi di Poisson composti semplici.

In tale contesto valgono considerazioni analoghe a quelle espone con riferimento alle singole v.a. ${}^C \tilde{X}_{i,j}$; i primi due termini del momento centrale terzo di ${}^C \tilde{R}$ possono essere negativi e quindi anche l'indice di asimmetria. Tuttavia quest'ultima circostanza non è possibile nel caso in cui \tilde{p} sia una v.a. Gamma di parametri uguali.

L'indice di asimmetria è quindi pari a:

$$\gamma({}^c \tilde{R}) = \frac{\gamma_{\tilde{p}} \sigma_{\tilde{p}}^3 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^3 + 3 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right) \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \right) \left[E(\tilde{p}^3) - E(\tilde{p}^2) \right] + E(\tilde{p}^3) \sum_i \sum_j n_{i,j} a_{3,Z_{i,j}}}{\left[\sigma_{\tilde{p}}^2 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^2 + E(\tilde{p}^2) \sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \right]^{\frac{3}{2}}}$$

(3.5.18)

Il valore asintotico che assume l'indice di asimmetria al crescere indefinito del numero dei sinistri riservati può essere calcolato effettuando la sostituzione $n_{i,j} = N \delta_{i,j}$:

$$\gamma({}^c \tilde{R}) = \frac{\gamma_{\tilde{p}} \sigma_{\tilde{p}}^3 N^3 \left(\sum_i \sum_j \delta_{i,j} m_{i,j} \right)^3 + 3 N^2 \left(\sum_i \sum_j \delta_{i,j} m_{i,j} \right) \left(\sum_i \sum_j \delta_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \right) \left[E(\tilde{p}^3) - E(\tilde{p}^2) \right] + E(\tilde{p}^3) N \sum_i \sum_j \delta_{i,j} a_{3,Z_{i,j}}}{\left[\sigma_{\tilde{p}}^2 N^2 \left(\sum_i \sum_j \delta_{i,j} m_{i,j} \right)^2 + E(\tilde{p}^2) N \sum_i \sum_j \delta_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \right]^{\frac{3}{2}}}$$

facendo tendere N ad infinito si ricava,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \gamma({}^c \tilde{R}) = \gamma_{\tilde{p}}. \quad (3.5.19)$$

Al crescere del parametro dimensionale dell'impresa, l'asimmetria della v.a. della riserva sinistri tende, quindi, a quella assunta dal fattore di disturbo.

Le caratteristiche della riserva sinistri, ricavate poco sopra, valgono indipendentemente dalla tipologia distributiva del costo dei singoli sinistri. Se si ipotizza, come fatto nei casi studio per le imprese SIFA e AMASES, che le *severity* relative ad ogni cella (i,j) siano descritte da una v.a. Gamma, cioè $\tilde{Z}_{i,j} \sim \text{Gamma}(\alpha_{i,j}; \beta_{i,j})$, le caratteristiche della riserva sinistri, pur mantenendo la stessa struttura, assumono formulazioni differenti. I valori asintotici del coefficiente di variazione e dell'asimmetria della riserva sinistri rimangono invariati in quanto dipendono dalle sole caratteristiche del fattore di disturbo.

VALORE ATTESO

$$E({}^c \tilde{X}_{i,j}) = n_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}}{\beta_{i,j}} \quad (3.5.3 \text{ bis})$$

$$E({}^c \tilde{R}) = \sum_i \sum_j n_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}}{\beta_{i,j}}. \quad (3.5.4 \text{ bis})$$

VARIANZA

$$\text{var}({}^c \tilde{X}_{i,j}) = E(\tilde{p}^2) \left[n_{i,j} \frac{\alpha_{i,j} (\alpha_{i,j} + 1)}{\beta_{i,j}^2} \right] + n_{i,j}^2 \frac{\alpha_{i,j}^2}{\beta_{i,j}^2} \sigma_{\tilde{p}}^2 \quad (3.5.5 \text{ bis})$$

oppure

$$\text{var}({}^c\tilde{X}_{i,j}) = \sigma_{\tilde{p}}^2 \left(n_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}(\alpha_{i,j}+1)}{\beta_{i,j}^2} + n_{i,j}^2 \frac{\alpha_{i,j}^2}{\beta_{i,j}^2} \right) + n_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}(\alpha_{i,j}+1)}{\beta_{i,j}^2}. \quad (3.5.6 \text{ bis})$$

$$\text{var}({}^c\tilde{R}) = \sigma_{\tilde{p}}^2 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}}{\beta_{i,j}} \right)^2 + E(\tilde{p}^2) \sum_i \sum_j n_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}(\alpha_{i,j}+1)}{\beta_{i,j}^2} \quad (3.5.7 \text{ bis})$$

oppure

$$\text{var}({}^c\tilde{R}) = \sigma_{\tilde{p}}^2 \left[\left(\sum_i \sum_j n_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}}{\beta_{i,j}} \right)^2 + \sum_i \sum_j n_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}(\alpha_{i,j}+1)}{\beta_{i,j}^2} \right] + \sum_i \sum_j n_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}(\alpha_{i,j}+1)}{\beta_{i,j}^2}. \quad (3.5.8 \text{ bis})$$

COEFFICIENTE DI VARIAZIONE

$$CV({}^c\tilde{X}_{i,j}) = \sqrt{\frac{E(\tilde{p}^2)(\alpha_{i,j}+1)}{n_{i,j}\alpha_{i,j}} + \sigma_{\tilde{p}}^2} \quad (3.5.9 \text{ bis})$$

$$\lim_{n_{i,j} \rightarrow \infty} CV({}^c\tilde{X}_{i,j}) = \sigma_{\tilde{p}}. \quad (3.5.10 \text{ bis})$$

$$CV({}^c\tilde{R}) = \sqrt{\frac{E(\tilde{p}^2) \sum_i \sum_j n_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}(\alpha_{i,j}+1)}{\beta_{i,j}^2}}{\left(\sum_i \sum_j n_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}}{\beta_{i,j}} \right)^2} + \sigma_{\tilde{p}}^2} \quad (3.5.11 \text{ bis})$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} CV({}^c\tilde{R}) = \sigma_{\tilde{p}}. \quad (3.5.12 \text{ bis})$$

ASIMMETRIA

$$\gamma({}^c\tilde{X}_{i,j}) = \frac{n_{i,j}^3 \frac{\alpha_{i,j}^3}{\beta_{i,j}^3} \gamma_{\tilde{p}} \sigma_{\tilde{p}}^3 + 3 \left(n_{i,j}^2 \frac{\alpha_{i,j}(\alpha_{i,j}+1)}{\beta_{i,j}^2} \right) [E(\tilde{p}^3) - E(\tilde{p}^2)] + E(\tilde{p}^3) n_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}(\alpha_{i,j}+1)(\alpha_{i,j}+2)}{\beta_{i,j}^3}}{\left[E(\tilde{p}^2) \left[n_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}(\alpha_{i,j}+1)}{\beta_{i,j}^2} \right] + n_{i,j}^2 \frac{\alpha_{i,j}^2}{\beta_{i,j}^2} \sigma_{\tilde{p}}^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \quad (3.5.14 \text{ bis})$$

oppure

$$\gamma({}^c\tilde{X}_{i,j}) = \frac{n_{i,j}^3 \gamma_{\tilde{p}} \sigma_{\tilde{p}}^3 + 3 \left(n_{i,j}^2 \frac{\alpha_{i,j}(\alpha_{i,j}+1)}{\alpha_{i,j}} \right) [E(\tilde{p}^3) - E(\tilde{p}^2)] + E(\tilde{p}^3) n_{i,j} \frac{(\alpha_{i,j}+1)(\alpha_{i,j}+2)}{\alpha_{i,j}^3}}{\left[E(\tilde{p}^2) \left[n_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}(\alpha_{i,j}+1)}{\alpha_{i,j}} \right] + n_{i,j}^2 \sigma_{\tilde{p}}^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \quad (3.5.15 \text{ bis})$$

$$\lim_{n_{i,j} \rightarrow \infty} \gamma\left({}^c \tilde{X}_{i,j}\right) = \gamma_{\tilde{p}} . \quad (3.5.16 \text{ bis})$$

$$\gamma\left({}^c \tilde{R}\right) = \frac{\gamma_{\tilde{p}} \sigma_{\tilde{p}}^3 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}}{\beta_{i,j}} \right)^3 + 3 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}}{\beta_{i,j}} \right) \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}(\alpha_{i,j} + 1)}{\beta_{i,j}^2} \right) \left[E(\tilde{p}^3) - E(\tilde{p}^2) \right]}{\left[\sigma_{\tilde{p}}^2 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}}{\beta_{i,j}} \right)^2 + E(\tilde{p}^2) \sum_i \sum_j n_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}(\alpha_{i,j} + 1)}{\beta_{i,j}^2} \right]^{\frac{3}{2}} + \frac{E(\tilde{p}^3) \sum_i \sum_j n_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}(\alpha_{i,j} + 1)(\alpha_{i,j} + 2)}{\beta_{i,j}^3}}{\left[\sigma_{\tilde{p}}^2 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}}{\beta_{i,j}} \right)^2 + E(\tilde{p}^2) \sum_i \sum_j n_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}(\alpha_{i,j} + 1)}{\beta_{i,j}^2} \right]^{\frac{3}{2}}}} \quad (3.5.18 \text{ bis})$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \gamma\left({}^c \tilde{R}\right) = \gamma_{\tilde{p}} . \quad (3.5.19 \text{ bis})$$

CASO STUDIO: LA RISERVA SINISTRI DESCRITTA DA UN PROCESSO DI POISSON COMPOSTO SEMPLICE CON FATTORE DI DISTURBO APPLICATO ALLE SEVERITY

Di seguito è proposta l'analisi di sensibilità al variare di $\sigma_{\tilde{p}}$ delle caratteristiche della riserva sinistri delle imprese SIFA e AMASES in base ai risultati analitici ricavati precedentemente. In tale contesto il processo generatore del numero dei sinistri è descritto da una somma di v.a. Poisson semplici indipendenti tra loro. La v.a. del numero dei sinistri possiede, per l'impresa SIFA e AMASES rispettivamente, le seguenti caratteristiche: valore atteso pari a 18.636 e 169.380 sinistri, scarto quadratico medio pari a 136,51 e 411,56 sinistri, coefficiente di variazione del 0,73% e 0,24% e, infine, un indice di asimmetria pari a 0,007325 e 0,002498.

I valori delle medie, varianze e scarti quadratici medi delle due imprese, al variare di $\sigma_{\tilde{p}}$, sono mostrati nella tabella seguente (fig: 3.5.1):

Fig.3.5.1: Media, varianza e scarto quadratico medio della v.a. ${}^c \tilde{R}$ al variare della *standard deviation* del fattore di disturbo

$\sigma_{\tilde{p}}$	media		varianza		sqm	
	SIFA	AMASES	SIFA	AMASES	SIFA	AMASES
2%	229.538.009	2.826.940.322	120.350.928.417.488	4.903.043.033.882.960	10.970.457,07	70.021.732,58
3%	229.538.009	2.826.940.322	146.744.395.284.857	8.899.691.688.973.450	12.113.810,11	94.338.177,26
5%	229.538.009	2.826.940.322	231.203.489.260.439	21.688.967.385.263.000	15.205.376,99	147.271.746,73
8%	229.538.009	2.826.940.322	437.072.530.825.920	52.862.826.894.968.900	20.906.279,70	229.919.174,70

In figura 3.5.2 sono esposti i valori del coefficiente di variazione delle due imprese relativi alle singole generazioni e a livello complessivo di riserva. È stato stimato, inoltre, il valore del coefficiente di correlazione lineare (ρ) nell'ipotesi in cui la dipendenza lineare tra le celle del triangolo sia la stessa.

Fig.3.5.2: Coefficiente di variazione, per singola generazione e a livello aggregato, e coefficiente di correlazione lineare a livello aggregato di riserva al variare della *standard deviation* del fattore di disturbo

COEFFICIENTE DI VARIAZIONE								
$\sigma_{\tilde{p}}$	2%		3%		5%		8%	
generazione	SIFA	AMASES	SIFA	AMASES	SIFA	AMASES	SIFA	AMASES
1	56,24%	15,29%	56,30%	15,46%	56,49%	15,98%	56,94%	17,18%
2	41,28%	12,65%	41,35%	12,85%	41,58%	13,46%	42,12%	14,86%
3	37,11%	11,25%	37,19%	11,48%	37,43%	12,16%	38,02%	13,69%
4	31,46%	9,09%	31,55%	9,37%	31,83%	10,19%	32,50%	11,97%
5	29,47%	8,07%	29,56%	8,37%	29,85%	9,28%	30,55%	11,20%
6	27,88%	7,90%	27,97%	8,22%	28,28%	9,14%	29,01%	11,08%
7	23,48%	6,96%	23,59%	7,31%	23,94%	8,34%	24,79%	10,42%
8	20,95%	6,24%	21,08%	6,63%	21,47%	7,75%	22,40%	9,96%
9	18,71%	5,53%	18,85%	5,97%	19,28%	7,19%	20,30%	9,53%
10	15,73%	4,88%	15,89%	5,37%	16,40%	6,70%	17,57%	9,16%
11	11,04%	3,95%	11,26%	4,54%	11,96%	6,05%	13,51%	8,70%
12	6,07%	3,03%	6,47%	3,77%	7,61%	5,50%	9,85%	8,32%
TOTALE	4,78%	2,48%	5,28%	3,34%	6,62%	5,21%	9,11%	8,13%
ρ	0,003596	0,026125	0,008005	0,056046	0,021549	0,137383	0,051702	0,280000

Da quanto riportato in tabella si nota, per entrambe le imprese, un comportamento decrescente del coefficiente di variazione al crescere della generazione considerata a causa dell'incremento del numero di sinistri riservati nelle generazioni più recenti. L'incremento dello scarto quadratico medio del fattore di disturbo non modifica il trend decrescente del coefficiente di variazione al variare della generazione ma ne comporta solamente un incremento. Al crescere di $\sigma_{\tilde{p}}$, infatti, la variabilità relativa della riserva cresce a parità di generazione per entrambe le imprese (figure: 3.5.3 e 3.5.4). La compagnia di assicurazioni AMASES, grazie al maggior numero di sinistri riservati rispetto all'impresa SIFA, possiede un coefficiente di variazione più basso per ogni valore considerato della standard deviation di \tilde{p} (figure: 3.5.5, 3.5.6, 3.5.7 e 3.5.8)

Fig.3.5.3: Coefficiente di variazione per generazione al variare di $\sigma_{\bar{p}}$ per l'impresa SIFA

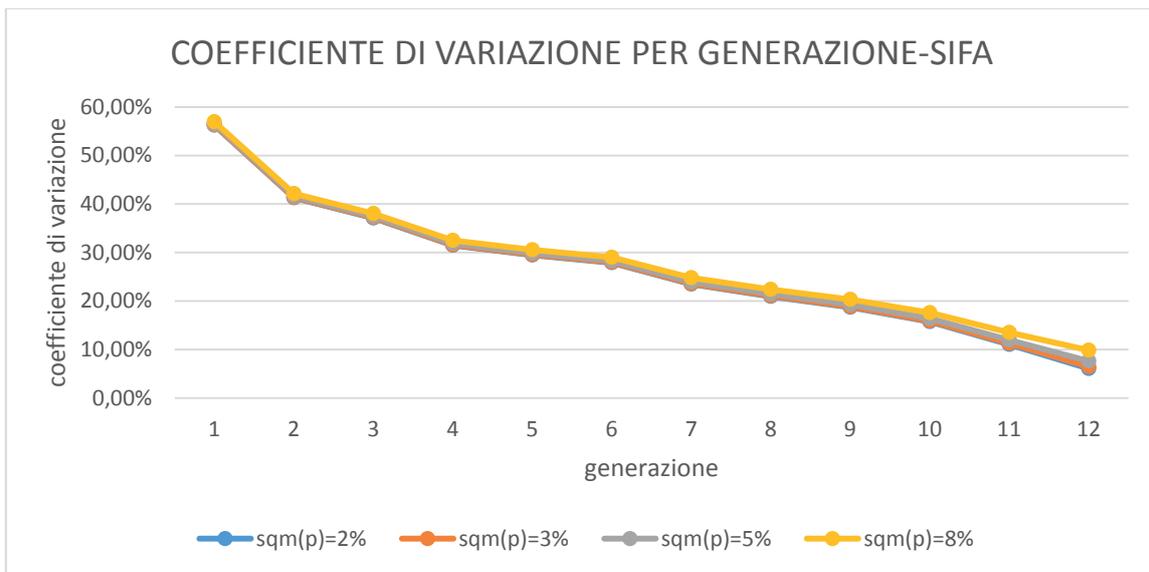


Fig.3.5.4: Coefficiente di variazione per generazione al variare di $\sigma_{\bar{p}}$ per l'impresa AMASES

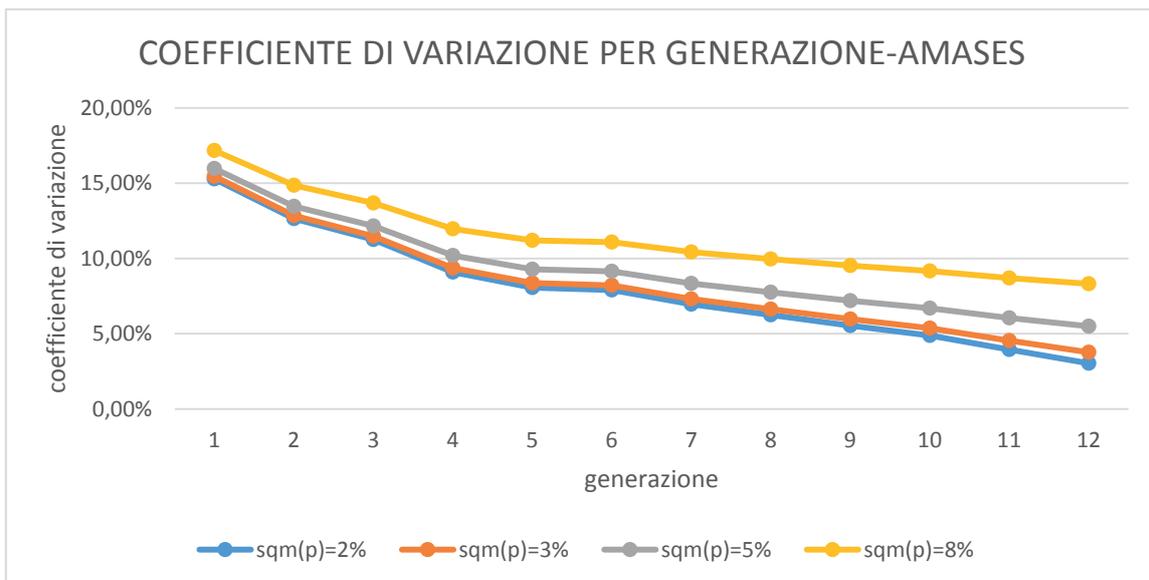


Fig.3.5.5: Coefficiente di variazione per generazione delle imprese SIFA e AMASES posto $\sigma_{\bar{p}} = 2\%$

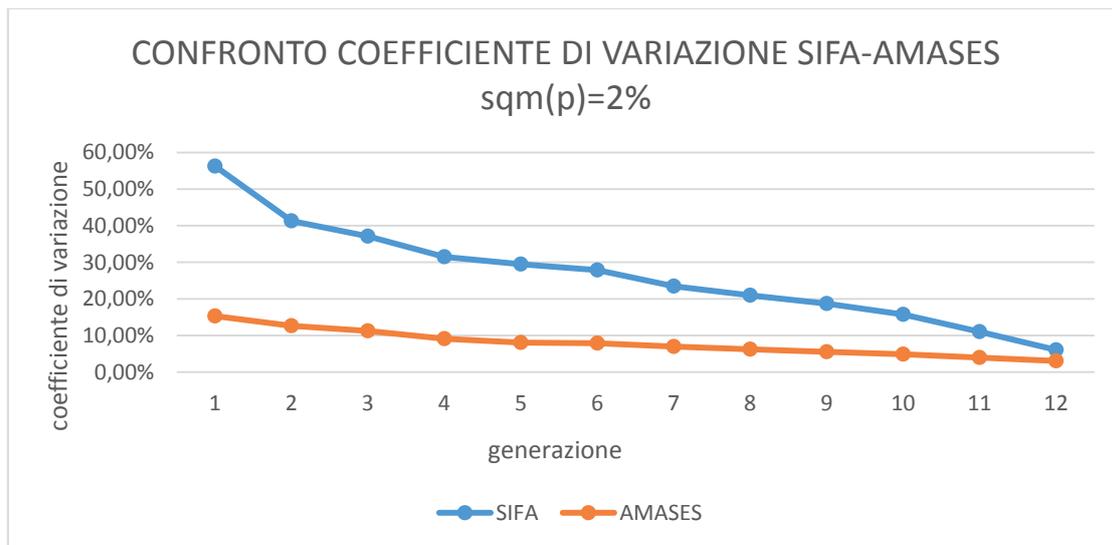


Fig.3.5.6: Coefficiente di variazione per generazione delle imprese SIFA e AMASES posto $\sigma_{\bar{p}} = 3\%$

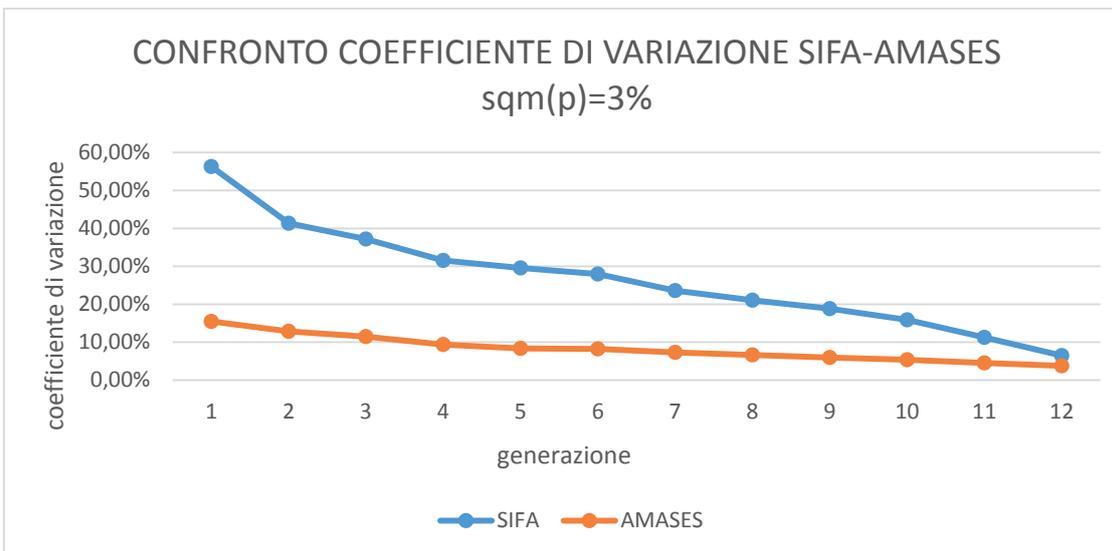


Fig.3.5.7: Coefficiente di variazione per generazione delle imprese SIFA e AMASES posto $\sigma_{\bar{p}} = 5\%$

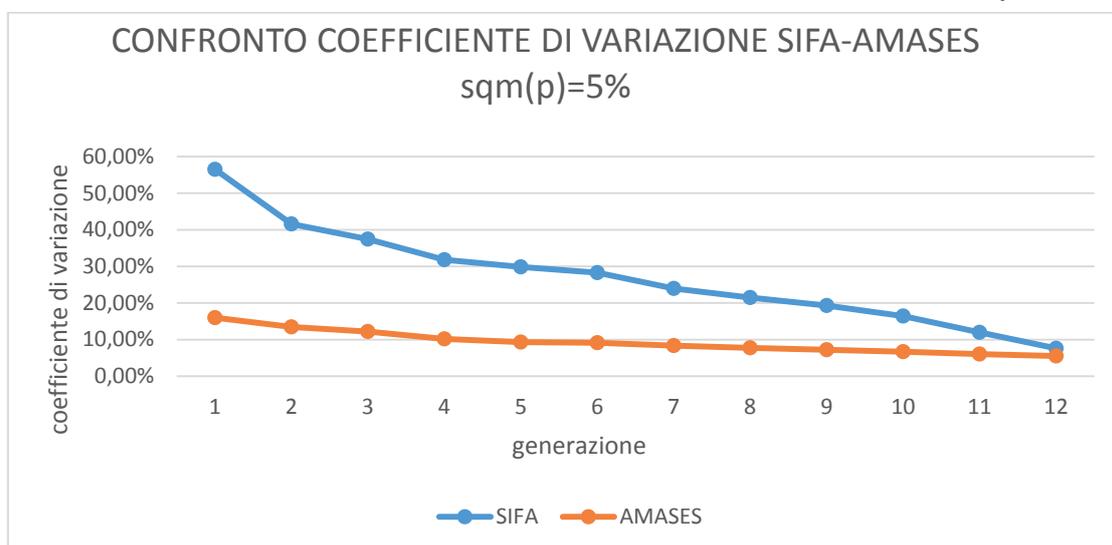
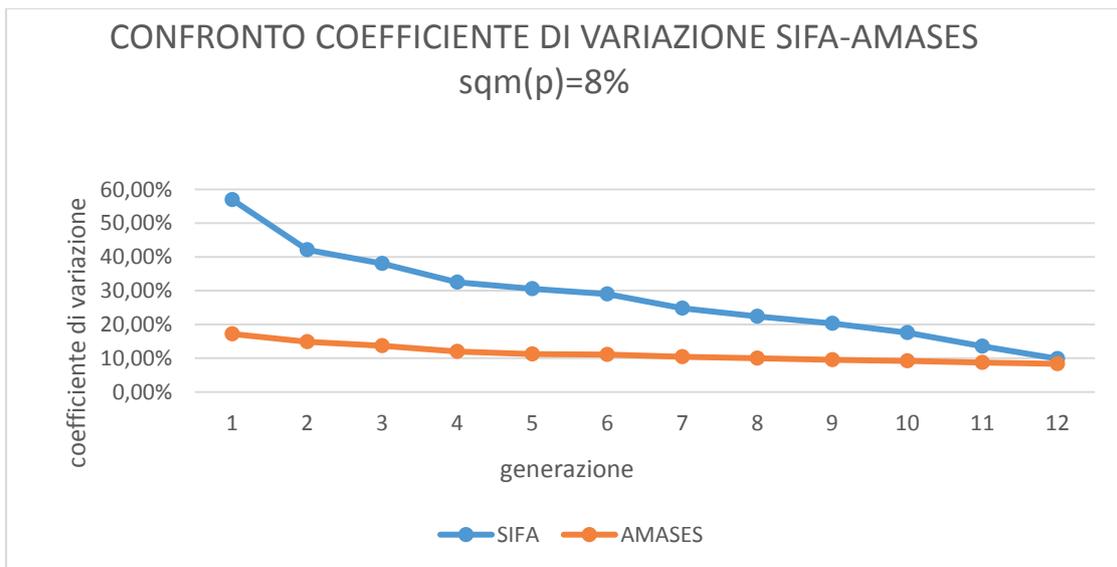


Fig.3.5.8: Coefficiente di variazione per generazione delle imprese SIFA e AMASES posto $\sigma_{\bar{p}} = 8\%$



Considerazioni analoghe valgono inoltre a livello totale di riserva sinistri; la variabilità relativa dell'impresa SIFA, al variare di $\sigma_{\bar{p}}$, è sempre maggiore rispetto a quella dell'impresa AMASES.

Ponendo l'attenzione sui valori asintotici si osserva che l'impresa di minori dimensioni possiede delle variabilità relative distanti dai rispettivi valori di $\sigma_{\bar{p}}$; tale differenza tuttavia tende a diminuire al crescere della *standard deviation* del fattore di disturbo. L'impresa AMASES, di contro, grazie alle sue maggiori dimensioni, possiede dei coefficienti di variazione più prossimi ai rispettivi valori asintotici.

Nell'ultima riga della tabella sono riportati i valori del coefficiente di correlazione lineare a livello di riserva. Il valore di ρ è crescente, per entrambe le imprese, rispetto ai valori di $\sigma_{\bar{p}}$; il fattore di disturbo quindi introduce una dipendenza positiva sulle celle del triangolo che è crescente al crescere della standard deviation del fattore di disturbo stesso. Si riscontrano, infine, valori di ρ più elevati per l'impresa AMASES.

Nella tabella seguente (fig:3.5.9) sono riportati i valori dei coefficienti di variazione a livello totale di riserva calcolati nei casi estremi di perfetta incorrelazione ($\rho = 0$) e piena correlazione lineare ($\rho = 1$) tra tutte le celle del triangolo; sono riportati inoltre i valori effettivi delle variabilità relative delle due imprese in modo tale da poter cogliere l'effetto della dipendenza lineare realmente presente sulla riserva sinistri delle compagnie SIFA e AMASES.

Fig.3.5.9: Coefficienti di variazione per le imprese SIFA e AMASES, al variare di $\sigma_{\bar{p}}$, calcolati in ipotesi di indipendenza, piena dipendenza e effettiva dipendenza lineare

$\sigma_{\bar{p}}$	CV SIFA			CV AMASES		
	$\rho = 0$	esempio	$\rho = 1$	$\rho = 0$	esempio	$\rho = 1$
2%	4,38%	4,78%	32,05%	1,51%	2,48%	12,24%
3%	4,44%	5,28%	32,23%	1,57%	3,34%	12,54%
5%	4,61%	6,62%	32,75%	1,75%	5,21%	13,36%
8%	4,99%	9,11%	33,87%	2,12%	8,13%	14,99%

Nella tabella successiva (fig: 3.5.10) sono riportati i valori dell'indice di asimmetria delle due imprese riferiti alle singole generazioni e a livello totale di riserva al variare di $\sigma_{\bar{p}}$.

Fig.3.5.10: Indice di asimmetria per singola generazione a livello aggregato di riserva al variare della *standard deviation* del fattore di disturbo

ASIMMETRIA								
$\sigma_{\bar{p}}$	2%		3%		5%		8%	
generazione	SIFA	AMASES	SIFA	AMASES	SIFA	AMASES	SIFA	AMASES
1	1,076054	0,297707	1,078029	0,307235	1,084314	0,335082	1,099434	0,390118
2	0,793472	0,256488	0,796642	0,267442	0,806665	0,298282	0,830360	0,355016
3	0,714478	0,228492	0,718119	0,240672	0,729595	0,273943	0,756505	0,332001
4	0,623408	0,193713	0,627723	0,207601	0,641238	0,243047	0,672447	0,299110
5	0,602198	0,171793	0,606690	0,187094	0,620720	0,224284	0,652891	0,279762
6	0,611105	0,174354	0,615471	0,189239	0,629077	0,225210	0,660120	0,278826
7	0,533816	0,156317	0,538861	0,172273	0,554417	0,208689	0,589022	0,260500
8	0,460221	0,140588	0,466227	0,157685	0,484553	0,194644	0,524351	0,245540
9	0,401151	0,126593	0,408135	0,144529	0,429183	0,181044	0,473632	0,230644
10	0,329811	0,114262	0,338365	0,132649	0,363521	0,168040	0,413930	0,216723
11	0,233229	0,099020	0,245083	0,116361	0,277336	0,148585	0,333350	0,197080
12	0,163055	0,084650	0,175869	0,097615	0,204559	0,127165	0,248061	0,178492
TOTALE	0,120377	0,061872	0,136744	0,077534	0,168986	0,111873	0,215746	0,167802
$\gamma_{\bar{p}}$	0,040000		0,060000		0,100000		0,160000	

L'asimmetria, sia per l'impresa SIFA che per AMASES, assume valori decrescenti rispetto alle generazioni in virtù dell'incremento del numero di sinistri riservati (figure: 3.5.11 e 3.5.12). L'effetto dimensionale inoltre porta a valori dell'indice di asimmetria minori per l'impresa AMASES rispetto a SIFA a parità di generazione (figure: 3.5.13, 3.5.14, 3.5.15 e 3.5.16).

Risultati analoghi valgono se si considera la riserva del numero sinistri a livello complessivo; la maggiore dimensione del portafoglio determina valori dell'asimmetria, ancora una volta, più bassi per la compagnia AMASES.

Fig.3.5.11: Indice di asimmetria per generazione al variare di $\sigma_{\hat{p}}$ per l'impresa SIFA

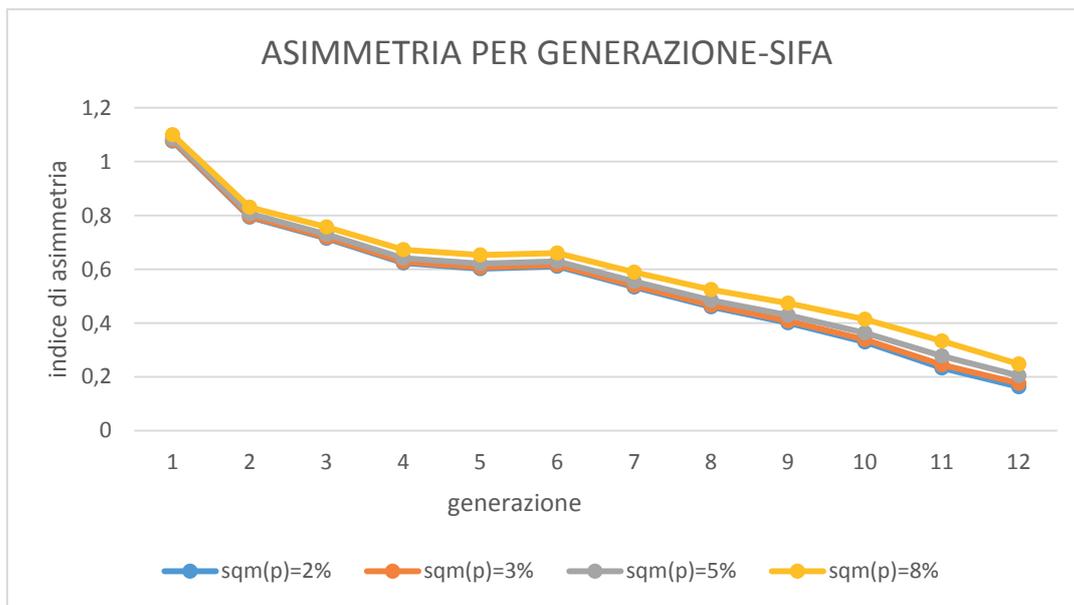


Fig.3.5.12: Indice di asimmetria per generazione al variare di $\sigma_{\hat{p}}$ per l'impresa AMASES

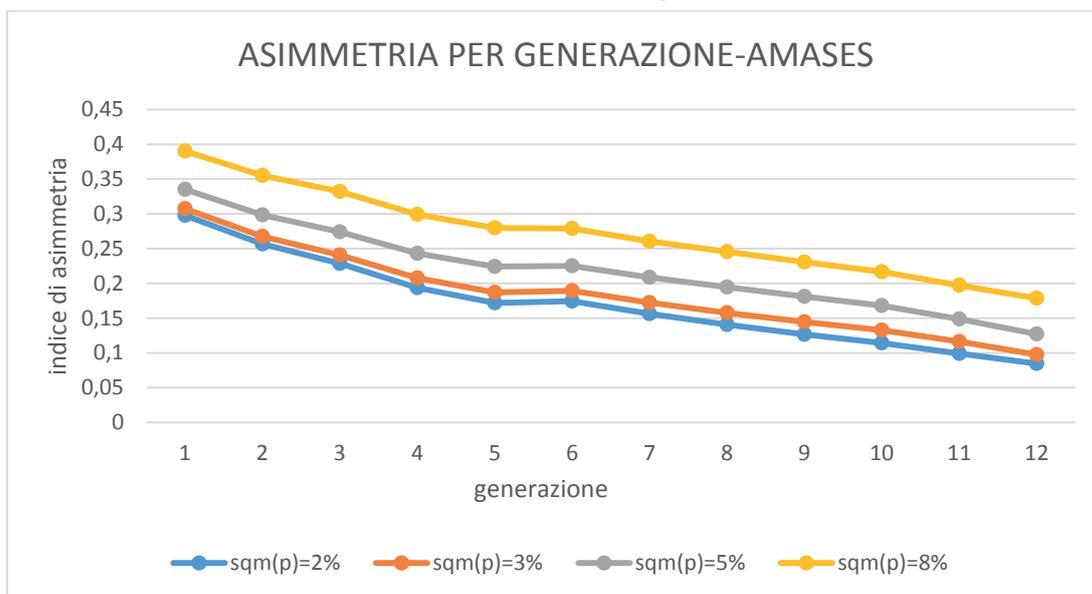


Fig.3.5.13: Indice di asimmetria per generazione delle imprese SIFA e AMASES posto $\sigma_{\hat{p}} = 2\%$

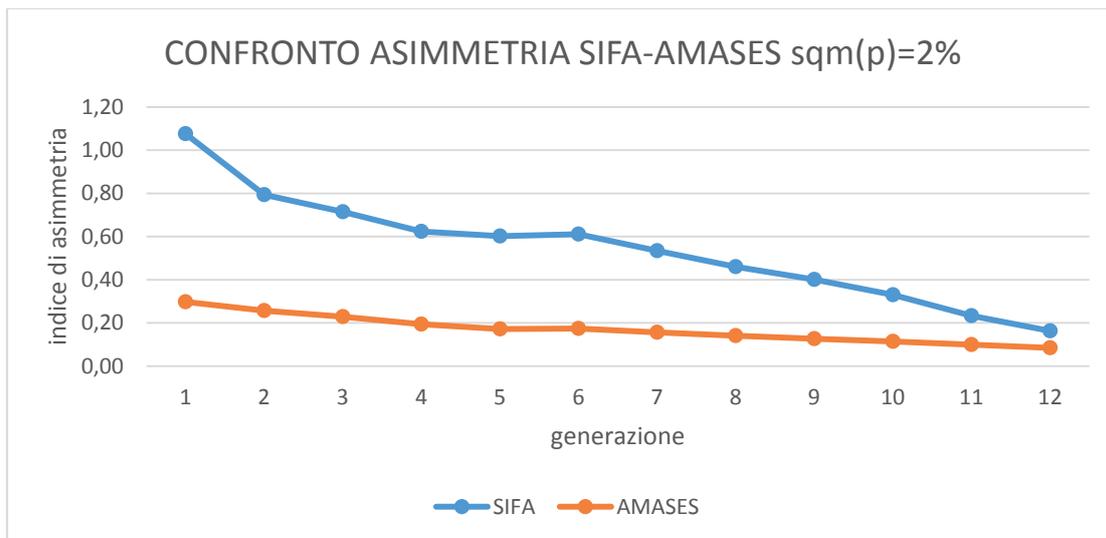


Fig.3.5.14: Indice di asimmetria per generazione delle imprese SIFA e AMASES posto $\sigma_{\hat{p}} = 3\%$

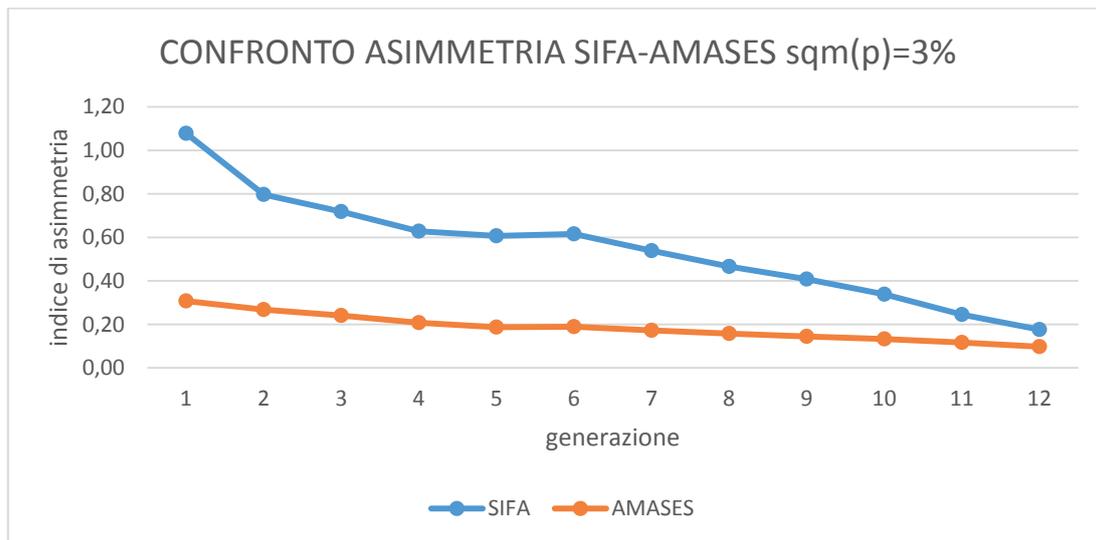


Fig.3.5.15: Indice di asimmetria per generazione delle imprese SIFA e AMASES posto $\sigma_{\hat{p}} = 5\%$

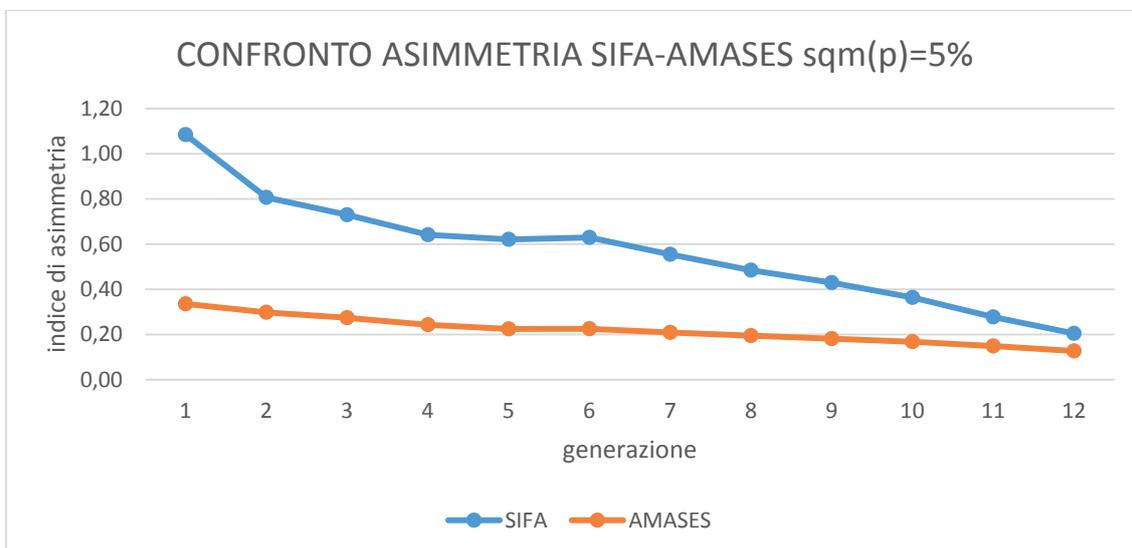
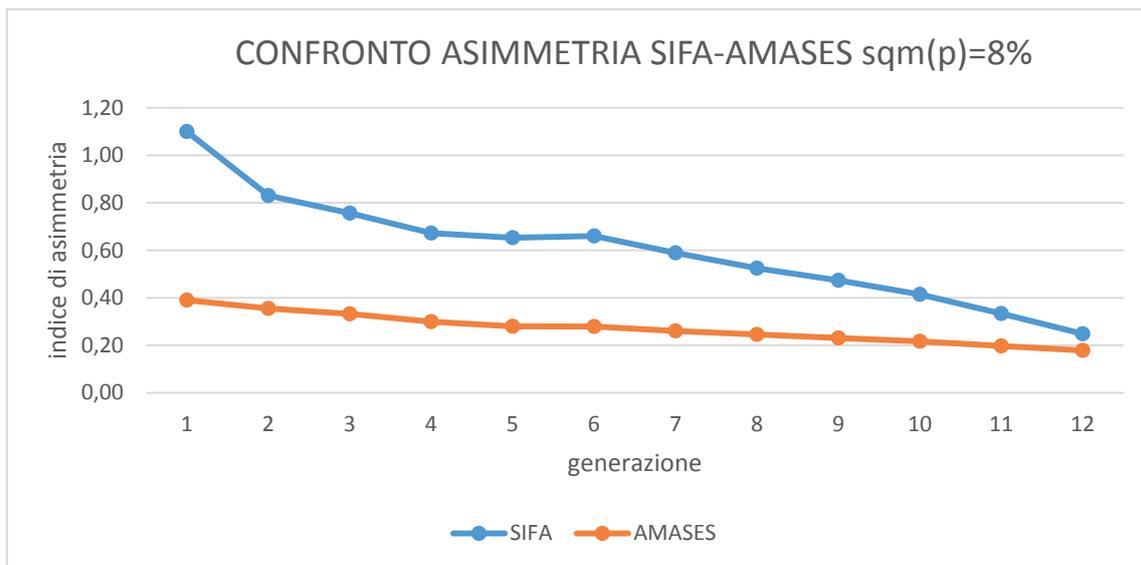


Fig.3.5.16: Indice di asimmetria per generazione delle imprese SIFA e AMASES posto $\sigma_{\tilde{p}} = 8\%$



I valori dell'asimmetria della riserva sinistri totale delle due imprese risultano abbastanza distanti dai rispettivi valori asintotici, pari a $\gamma_{\tilde{p}}$, al variare di $\sigma_{\tilde{p}}$; questa differenza, tuttavia, diminuisce al crescere dello scarto quadratico medio del fattore \tilde{p} . L'asimmetria della riserva sinistri, infatti, al crescere della variabilità del fattore di disturbo tende ad essere sempre più spiegata dal fattore di disturbo stesso.

A differenza di quanto visto nel caso del CRM con il solo fattore di disturbo sul numero dei sinistri, in questa circostanza l'asimmetria della riserva sinistri, per entrambe le imprese, assume sempre un andamento crescente, anche per valori di $\sigma_{\tilde{p}}$ molto contenuti.

L'ultima tabella presentata in figura 3.5.17 confronta le variazioni percentuali dell'indice di asimmetria e del coefficiente di variazione delle due imprese al variare di $\sigma_{\tilde{p}}$ tra l'1% e il 10%.

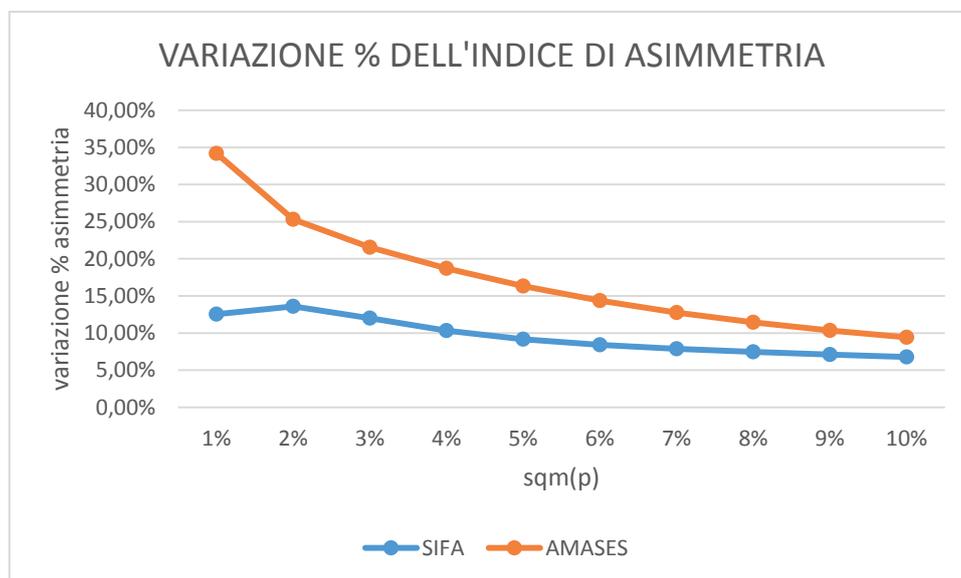
Fig.3.5.17: Variazioni percentuali del coefficiente di variazione e dell'indice di asimmetria, per le imprese SIFA e AMASES, al variare di $\sigma_{\tilde{p}}$

$\sigma_{\tilde{p}}$	SIFA		AMASES		$\Delta \% \sigma_{\tilde{p}}$
	$\Delta \% CV$	$\Delta \% asim.$	$\Delta \% CV$	$\Delta \% asim.$	
1%	7,31%	12,54%	39,90%	34,20%	100,00%
2%	10,42%	13,60%	34,73%	25,31%	50,00%
3%	11,88%	12,00%	27,62%	21,55%	33,33%
4%	12,19%	10,33%	22,32%	18,70%	25,00%
5%	11,85%	9,17%	18,55%	16,32%	20,00%
6%	11,23%	8,41%	15,80%	14,36%	16,67%
7%	10,51%	7,88%	13,73%	12,75%	14,29%
8%	9,79%	7,46%	12,12%	11,44%	12,50%
9%	9,10%	7,10%	10,84%	10,34%	11,11%
10%	8,48%	6,78%	9,80%	9,43%	10,00%

Le variazioni percentuali della variabilità relativa e dell'asimmetria, per entrambe le imprese, sono positive; tali grandezze quindi, come già mostrato precedentemente, sono crescenti nei valori dello scarto quadratico medio di \tilde{p} .

Con riferimento all'indice di asimmetria l'effetto della variabile \tilde{p} è più marcato sull'impresa di maggiori dimensioni (fig: 3.5.18); al crescere dello scarto quadratico medio del fattore di disturbo tuttavia l'incidenza di \tilde{p} risulta essere analoga su entrambe le imprese. La diversa crescita dell'asimmetria per le due imprese è determinata dalle dimensioni differenti delle imprese SIFA e AMASES. L'asimmetria dell'impresa di minori dimensioni, infatti, per valori contenuti di $\sigma_{\tilde{p}}$, risulta poco influenzata dal fattore di disturbo in quanto le contenute dimensioni del portafoglio portano a valori dell'indice di asimmetria lontani da quelli asintotici e quindi l'incidenza proporzionale del fattore di disturbo non risulta essere marcata.

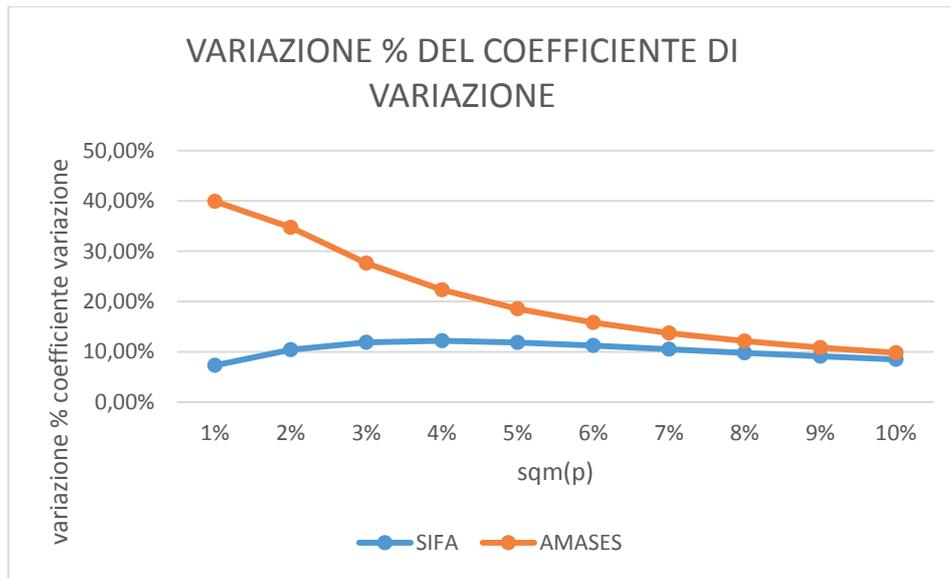
Fig.3.5.18: Grafico delle variazioni percentuali dell'indice di asimmetria per le imprese SIFA e AMASES al variare di $\sigma_{\tilde{p}}$



Risultati analoghi valgono con riferimento al coefficiente di variazione; L'effetto del fattore di disturbo è più evidente sull'impresa AMASES (fig: 3.5.19). Questo risultato è determinato dalla maggiore dimensione del portafoglio detenuto dall'impresa; in tale circostanza, infatti, la maggiore numerosità dei sinistri riservati permette di diversificare quasi completamente il rischio non sistematico, lasciando sull'impresa una variabilità relativa quasi tutta determinata dal solo fattore di disturbo.

Al crescere della variabilità del fattore \tilde{p} , infine, i coefficienti di variazione delle due imprese crescono nella stessa misura.

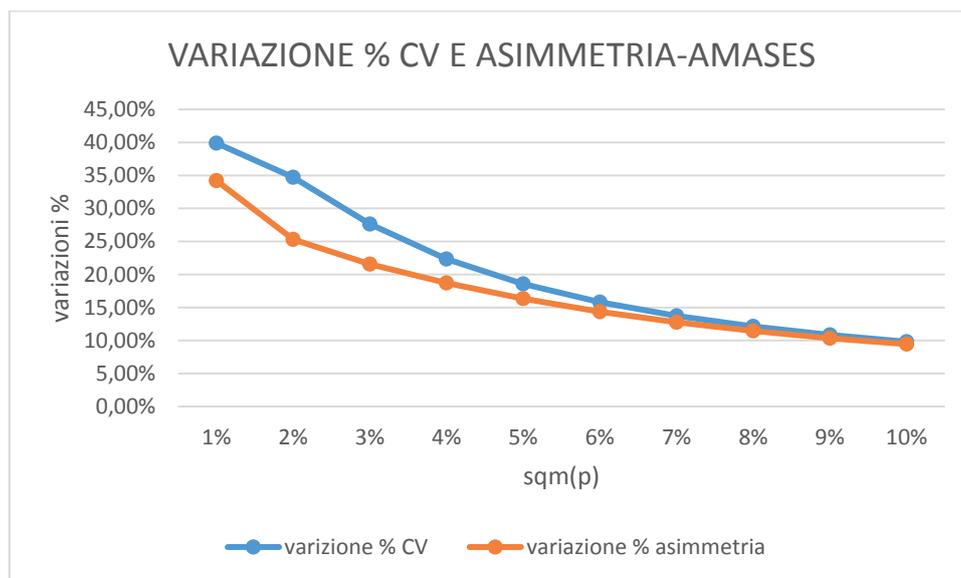
Fig.3.5.19: Grafico delle variazioni percentuali del coefficiente di variazione per le imprese SIFA e AMASES al variare di $\sigma_{\tilde{q}}$



Dalla tabella mostrata in figura 3.5.16 è possibile inoltre studiare l'incidenza del fattore di disturbo sulla variabilità relativa e asimmetria delle singole imprese.

Considerando l'impresa AMASES (fig: 3.5.20) si osserva una maggiore incidenza di \tilde{p} sul coefficiente di variazione rispetto all'asimmetria. Per valori elevati di $\sigma_{\tilde{p}}$ si riscontra, inoltre, una crescita percentuale quasi identica delle due grandezze.

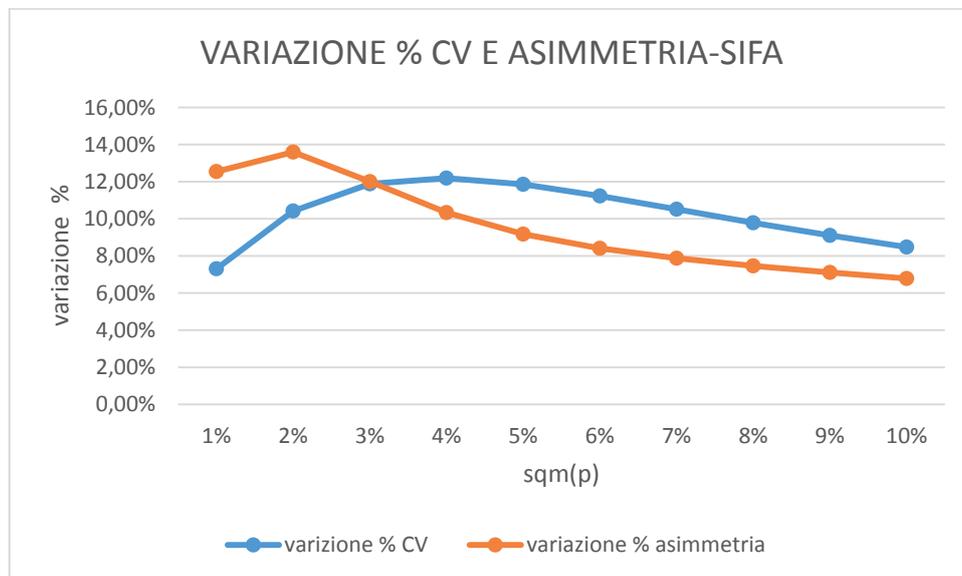
Fig.3.5.20: Grafico delle variazioni percentuali del coefficiente di variazione e indice di asimmetria dell'impresa AMASES al variare di $\sigma_{\tilde{q}}$



Considerando, infine, l'impresa di minori dimensioni (fig: 3.5.21) si nota inizialmente, per valori di $\sigma_{\tilde{p}}$ pari all'1% e 2%, un'incidenza maggiore del fattore di disturbo sull'indice di asimmetria. La

variazione percentuale dell'asimmetria e del coefficiente di variazione è quasi identica per $\sigma_{\bar{p}} = 3\%$ mentre per valori della *standard deviation* superiori al 3% si osserva un effetto più marcato del fattore di disturbo sul coefficiente di variazione. Anche con riferimento all'impresa SIFA, inoltre, si osserva la tendenza a crescite percentuali identiche dell'asimmetria e della variabilità relativa per valori molto estremi di $\sigma_{\bar{p}}$. In tale circostanza, tuttavia, a causa della minore dimensione dell'impresa, per ottenere crescite analoghe si devono considerare valori di $\sigma_{\bar{p}}$ più elevati rispetto al caso dell'impresa AMASES.

Fig.3.5.21: Grafico delle variazioni percentuali del coefficiente di variazione e indice di asimmetria dell'impresa SIFA al variare di $\sigma_{\bar{q}}$



3.6 La riserva sinistri descritta dal processo di Poisson composto misturato con fattore di disturbo applicato alle severity

In questo paragrafo si uniscono i modelli visti precedentemente (Paragrafi 3.4 e 3.5) ipotizzando che il costo incrementale dei sinistri posti a riserva sia descritto da un processo di Poisson composto misturato in cui, oltre al fattore di disturbo sul numero dei sinistri, è presente il fattore di disturbo sulle severity dei singoli sinistri.

Il costo sinistri relativo a una generica cella (i,j) è descritto dal seguente processo:

$$\tilde{X}_{i,j} = \sum_{h=1}^{\tilde{K}_{i,j}} \tilde{p} \tilde{Z}_{i,j,h} \quad (3.6.1)$$

dove per ipotesi:

- $\tilde{K}_{i,j} \sim Po(n_{i,j}, \tilde{q})$ è la v.a. Poisson misturata che descrive il numero dei sinistri riservati nella singola cella (i,j). La v.a. misturante \tilde{q} , unica per tutte le celle del triangolo, ha supporto positivo e media unitaria;
- \tilde{p} è il fattore di disturbo applicato al costo dei singoli sinistri nella cella (i,j); è definita su supporto positivo e possiede media unitaria. La v.a. \tilde{p} è unica per tutte le celle del triangolo oggetto di stima;
- le v.a. $\tilde{Z}_{i,j,h}$ descrivono il costo dei singoli sinistri all'interno della cella (i,j) e sono tra loro indipendenti e identicamente distribuite;
- $\tilde{Z}_{i,j,h}$ e $\tilde{K}_{i,j}$ sono indipendenti da \tilde{p} per ogni cella considerata;
- le v.a. $\tilde{Z}_{i,j,h}$ e $\tilde{Z}_{y \neq i, z \neq j, h}$ sono indipendenti ma non identicamente distribuite;
- le v.a. $\tilde{K}_{i,j}$ e $\tilde{Z}_{i,j,h}$ sono indipendenti per ogni cella (i,j) considerata;
- la v.a. \tilde{q} è indipendente dalle $\tilde{Z}_{i,j,h}$ per ogni cella (i,j);
- i fattori di disturbo \tilde{q} e \tilde{p} sono indipendenti.

La v.a. che descrive la riserva sinistri, pari alla somma delle v.a. $\tilde{X}_{i,j}$ dipendenti tra loro a causa dei due fattori di disturbo, è determinata come:

$$\tilde{R} = \sum_i \sum_j \tilde{X}_{i,j} \quad per \quad i = 1, \dots, t; j = t - i + 2, \dots, t(t+1). \quad (3.6.2)$$

Nel seguito sono analizzate le caratteristiche del costo sinistri riferito ad una generica cella ($\tilde{X}_{i,j}$) e a livello totale di riserva (\tilde{R}).

VALORE ATTESO

$$E(\tilde{X}_{i,j}) = E[\tilde{p} E({}^n \tilde{X}_{i,j})] = E(\tilde{p}) E({}^n \tilde{X}_{i,j}) = n_{i,j} m_{i,j}. \quad (3.6.3)$$

$$E(\tilde{R}) = E\left[\tilde{p}E\left(\sum_i \sum_j^n \tilde{X}_{i,j}\right)\right] = E(\tilde{p})E\left(\sum_i \sum_j^n \tilde{X}_{i,j}\right) = \sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j}. \quad (3.6.4)$$

VARIANZA

$$\text{var}(\tilde{X}_{i,j}) = E(\tilde{X}_{i,j}^2) - [E(\tilde{X}_{i,j})]^2$$

dove

$$E(\tilde{X}_{i,j}^2) = E\left[E(\tilde{X}_{i,j}^2 | \tilde{p})\right] = E\left[\tilde{p}^2 E(\tilde{X}_{i,j}^2)\right] = E\left[\tilde{p}^2 (E(\tilde{q}^2) n_{i,j}^2 m_{i,j}^2 + n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}})\right] = E(\tilde{p}^2) (E(\tilde{q}^2) n_{i,j}^2 m_{i,j}^2 + n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}}).$$

La varianza, quindi, risulta essere:

$$\text{var}(\tilde{X}_{i,j}) = E(\tilde{X}_{i,j}^2) - [E(\tilde{X}_{i,j})]^2 =$$

$$E(\tilde{p}^2) (E(\tilde{q}^2) n_{i,j}^2 m_{i,j}^2 + n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}}) - n_{i,j}^2 m_{i,j}^2 = (\sigma_{\tilde{p}}^2 + 1) [(\sigma_{\tilde{q}}^2 + 1) n_{i,j}^2 m_{i,j}^2 + n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}}] - n_{i,j}^2 m_{i,j}^2 = n_{i,j}^2 m_{i,j}^2 (\sigma_{\tilde{p}}^2 \sigma_{\tilde{q}}^2 + \sigma_{\tilde{q}}^2 + \sigma_{\tilde{p}}^2) + n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} (\sigma_{\tilde{p}}^2 + 1) = n_{i,j}^2 m_{i,j}^2 [\sigma_{\tilde{q}}^2 (\sigma_{\tilde{p}}^2 + 1) + \sigma_{\tilde{p}}^2] + n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} (\sigma_{\tilde{p}}^2 + 1),$$

nel termine $[\sigma_{\tilde{q}}^2 (\sigma_{\tilde{p}}^2 + 1) + \sigma_{\tilde{p}}^2]$ si riconosce la varianza del prodotto dei due fattori di disturbo, infatti, vale:

$$\text{var}(\tilde{p}\tilde{q}) = \text{var}(\tilde{q}\tilde{p}) = E[\text{var}(\tilde{p}\tilde{q} | \tilde{p})] + \text{var}[E(\tilde{p}\tilde{q} | \tilde{p})] = E[\tilde{p}^2 \text{var}(\tilde{q})] + \text{var}[\tilde{p}E(\tilde{q})] = E(\tilde{p}^2) \text{var}(\tilde{q}) + [E(\tilde{q})]^2 \text{var}(\tilde{p}) = (\sigma_{\tilde{p}}^2 + 1) \sigma_{\tilde{q}}^2 + \sigma_{\tilde{p}}^2.$$

Per la varianza della v.a. $\tilde{X}_{i,j}$ si trova infine:

$$\text{var}(\tilde{X}_{i,j}) = n_{i,j}^2 m_{i,j}^2 \sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}^2 + n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} (\sigma_{\tilde{p}}^2 + 1). \quad (3.6.5)$$

La varianza di $\tilde{X}_{i,j}$ è pari alla somma di due termini:

- $n_{i,j}^2 m_{i,j}^2 \sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}^2$, il primo addendo è il prodotto tra il quadrato della media di $\tilde{X}_{i,j}$ e la varianza della v.a. determinata dal prodotto dei due fattori di disturbo;
- $n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} (\sigma_{\tilde{p}}^2 + 1)$, il secondo addendo, invece, è pari al prodotto tra la media quadratica di \tilde{p} , che è il fattore di disturbo sulle *severity*, e la varianza del processo di Poisson composto semplice.

La formula (3.6.5) può essere scritta anche nel seguente modo:

$$\text{var}(\tilde{X}_{i,j}) = (\sigma_{\tilde{p}}^2 + 1) [n_{i,j}^2 m_{i,j}^2 \sigma_{\tilde{q}}^2 + n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}}] + n_{i,j}^2 m_{i,j}^2 \sigma_{\tilde{p}}^2 \quad (3.6.6)$$

In questo caso la varianza della v.a. $\tilde{X}_{i,j}$ è ancora determinata dalla somma di due termini:

- $(\sigma_{\tilde{p}}^2 + 1) [n_{i,j}^2 m_{i,j}^2 \sigma_{\tilde{q}}^2 + n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}}]$, il primo addendo è il prodotto tra la media quadratica di \tilde{p} e la varianza del processo di Poisson composto misturato;

- $n_{i,j}^2 m_{i,j}^2 \sigma_{\tilde{p}}^2$, il secondo addendo, invece, è pari al prodotto tra il quadrato della media di $\tilde{X}_{i,j}$ e la varianza della fattore \tilde{p} .

A livello aggregato di riserva la varianza risulta essere la seguente:

$$\text{var}(\tilde{R}) = \sum_i \sum_j \text{var}(\tilde{X}_{i,j}) + \sum_{i,j \in B^{(l)}} \sum_{\substack{h,k \in B^{(l)} \\ (h \neq i \vee k \neq j)}} \text{cov}(\tilde{X}_{i,j}; \tilde{X}_{h,k})$$

dove

$$\begin{aligned} \sum_{i,j \in B^{(l)}} \sum_{\substack{h,k \in B^{(l)} \\ (h \neq i \vee k \neq j)}} \text{cov}(\tilde{X}_{i,j}; \tilde{X}_{h,k}) &= \sum_{i,j \in B^{(l)}} \sum_{\substack{h,k \in B^{(l)} \\ (h \neq i \vee k \neq j)}} \left\{ E \left[\text{cov}(\tilde{X}_{i,j}; \tilde{X}_{h,k} \mid \tilde{p}) \right] + \text{cov} \left[E(\tilde{X}_{i,j} \mid \tilde{p}); E(\tilde{X}_{h,k} \mid \tilde{p}) \right] \right\} = \\ &= \sum_{i,j \in B^{(l)}} \sum_{\substack{h,k \in B^{(l)} \\ (h \neq i \vee k \neq j)}} \left\{ E \left[\tilde{p}^2 \text{cov}({}^n \tilde{X}_{i,j}; {}^n \tilde{X}_{h,k}) \right] + \text{cov} \left[\tilde{p} n_{i,j} m_{i,j}; \tilde{p} n_{h,k} m_{h,k} \right] \right\}, \end{aligned}$$

in cui $\text{cov}({}^n \tilde{X}_{i,j}; {}^n \tilde{X}_{h,k}) = \sigma_{\tilde{q}}^2 n_{i,j} m_{i,j} n_{h,k} m_{h,k}$ in quanto le v.a., a seguito del condizionamento, seguono un processo di Poisson composto misturato.

La covarianza, infine, risulta essere:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j \in B^{(l)}} \sum_{\substack{h,k \in B^{(l)} \\ (h \neq i \vee k \neq j)}} \text{cov}(\tilde{X}_{i,j}; \tilde{X}_{h,k}) &= \sum_{i,j \in B^{(l)}} \sum_{\substack{h,k \in B^{(l)} \\ (h \neq i \vee k \neq j)}} \left[E(\tilde{p}^2) \sigma_{\tilde{q}}^2 n_{i,j} m_{i,j} n_{h,k} m_{h,k} + \text{var}(\tilde{p}) n_{i,j} m_{i,j} n_{h,k} m_{h,k} \right] = \\ &= \sum_{i,j \in B^{(l)}} \sum_{\substack{h,k \in B^{(l)} \\ (h \neq i \vee k \neq j)}} \left\{ n_{i,j} m_{i,j} n_{h,k} m_{h,k} \left[(\sigma_{\tilde{p}}^2 + 1) \sigma_{\tilde{q}}^2 + \sigma_{\tilde{p}}^2 \right] \right\}. \end{aligned}$$

A questo punto per la varianza della somma di processi di Poisson composti misturati con fattore di disturbo applicato alle *severity* è possibile scrivere:

$$\begin{aligned} \text{var}(\tilde{R}) &= \sum_i \sum_j \text{var}(\tilde{X}_{i,j}) + \sum_{i,j \in B^{(l)}} \sum_{\substack{h,k \in B^{(l)} \\ (h \neq i \vee k \neq j)}} \text{cov}(\tilde{X}_{i,j}; \tilde{X}_{h,k}) \\ &= \sum_i \sum_j \left\{ n_{i,j}^2 m_{i,j}^2 \left[\sigma_{\tilde{q}}^2 (\sigma_{\tilde{p}}^2 + 1) + \sigma_{\tilde{p}}^2 \right] + n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} (\sigma_{\tilde{p}}^2 + 1) \right\} + \sum_{i,j \in B^{(l)}} \sum_{\substack{h,k \in B^{(l)} \\ (h \neq i \vee k \neq j)}} \left\{ n_{i,j} m_{i,j} n_{h,k} m_{h,k} \left[(\sigma_{\tilde{p}}^2 + 1) \sigma_{\tilde{q}}^2 + \sigma_{\tilde{p}}^2 \right] \right\} = \\ &= \underbrace{\left[(\sigma_{\tilde{p}}^2 + 1) \sigma_{\tilde{q}}^2 + \sigma_{\tilde{p}}^2 \right]}_{\text{var}(\tilde{q}\tilde{p})} \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^2 + (\sigma_{\tilde{p}}^2 + 1) \sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} = \\ &= \sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}^2 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^2 + (\sigma_{\tilde{p}}^2 + 1) \sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}}. \end{aligned} \quad (3.6.7)$$

La varianza della somma delle v.a. $\tilde{X}_{i,j}$ dipende da due termini:

- $\sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}^2 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^2$, il primo addendo è il prodotto tra la varianza della v.a. data dal prodotto dei due fattori disturbo e il quadrato del valore atteso della riserva sinistri;

- $(\sigma_{\tilde{p}}^2 + 1) \sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}}$, l'ultimo addendo, invece, è il prodotto tra la media quadratica di \tilde{p} e la somma delle varianze di processi di Poisson composti semplici.

La formula precedente può inoltre scritta in modo analogo come:

$$\text{var}(\tilde{R}) = (\sigma_{\tilde{p}}^2 + 1) \left[\sigma_{\tilde{q}}^2 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^2 + \sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \right] + \sigma_{\tilde{p}}^2 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^2 \quad (3.6.8)$$

Anche in questo caso la varianza di \tilde{R} è pari alla somma di due addendi:

- $(\sigma_{\tilde{p}}^2 + 1) \left[\sigma_{\tilde{q}}^2 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^2 + \sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \right]$, nel primo termine si riconosce il prodotto tra la media quadratica di \tilde{p} e la varianza della somma di processi di Poisson composti misturati;
- $\sigma_{\tilde{p}}^2 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^2$, il secondo termine, invece, è pari al prodotto tra la varianza di \tilde{p} e il quadrato della media della riserva sinistri.

COEFFICIENTE DI VARIAZIONE

Dopo aver calcolato il valore atteso e la varianza delle v.a. $\tilde{X}_{i,j}$ è possibile determinare il valore del coefficiente di variazione.

A livello di singola cella vale,

$$CV(\tilde{X}_{i,j}) = \frac{\sigma(\tilde{X}_{i,j})}{E(\tilde{X}_{i,j})} = \frac{\sqrt{n_{i,j}^2 m_{i,j}^2 \sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}^2 + (\sigma_{\tilde{p}}^2 + 1) n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}}}}{n_{i,j} m_{i,j}} = \sqrt{\frac{n_{i,j}^2 m_{i,j}^2 \sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}^2 + (\sigma_{\tilde{p}}^2 + 1) n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}}}{n_{i,j}^2 m_{i,j}^2}} = \sqrt{\sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}^2 + \frac{(\sigma_{\tilde{p}}^2 + 1) r_{2,Z_{i,j}}}{n_{i,j}}}. \quad (3.6.9)$$

La variabilità relativa di $\tilde{X}_{i,j}$ dipende dalla varianza del prodotto dei due fattori di disturbo e da un elemento costruito come rapporto di due termini; il numeratore è pari al prodotto della media quadratica di \tilde{p} e l'indice di rischio di secondo ordine della *severity*, mentre il denominatore è costituito dal numero dei sinistri riservati.

È immediato notare che al crescere del numero dei sinistri riservati nella cella (i,j), il coefficiente di variazione assume valori sempre più prossimi allo scarto quadratico medio della v.a. data dal prodotto dei due fattori di disturbo. Il limite rispetto a $n_{i,j} \rightarrow \infty$, infatti, vale:

$$\lim_{n_{i,j} \rightarrow \infty} CV(\tilde{X}_{i,j}) = \sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}. \quad (3.6.10)$$

In questo contesto, quindi, la variabilità sistematica e non diversificabile a cui è sottoposta la riserva sinistri è determinata dall'effetto congiunto dei due fattori di disturbo; la componente di rischio sistematico a carico dell'impresa è infatti pari alla *standard deviation* della v.a. data dal prodotto tra \tilde{q} e \tilde{p} .

A livello totale di riserva il coefficiente di variazione risulta essere:

$$CV(\tilde{R}) = \frac{\sigma\left(\sum_i \sum_j \tilde{X}_{i,j}\right)}{E\left(\sum_i \sum_j \tilde{X}_{i,j}\right)} = \frac{\sqrt{\sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}^2 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j}\right)^2 + (\sigma_{\tilde{p}}^2 + 1) \sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}}}}{\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j}} =$$

$$\sqrt{\frac{\sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}^2 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j}\right)^2 + (\sigma_{\tilde{p}}^2 + 1) \sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}}}{\left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j}\right)^2}} = \sqrt{\sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}^2 + \frac{(\sigma_{\tilde{p}}^2 + 1) \sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}}}{\left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j}\right)^2}}. \quad (3.6.11)$$

In modo analogo a quanto visto per una singola v.a., anche la variabilità relativa della riserva sinistri dipende da due termini. Il primo è la varianza del prodotto tra \tilde{q} e \tilde{p} , mentre il secondo termine è pari al rapporto tra due grandezze; il numeratore è il prodotto tra la media quadratica di \tilde{p} e la somma delle varianze di processi di Poisson composti semplici, mentre il denominatore è pari al valore atteso della riserva sinistri.

Anche in questo caso il valore asintotico che assume la variabilità relativa della riserva sinistri al crescere del numero totale dei sinistri riservati coincide con il termine $\sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}$.

Il limite del coefficiente di variazione, infatti, a seguito della sostituzione $N\delta_{i,j} = n_{i,j}$ risulta essere:

$$CV(\tilde{R}) = \sqrt{\sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}^2 + \frac{(\sigma_{\tilde{p}}^2 + 1) N \sum_i \sum_j \delta_{i,j} a_{2,Z_{i,j}}}{N^2 \left(\sum_i \sum_j \delta_{i,j} m_{i,j}\right)^2}}$$

da cui

$$\lim_{N \rightarrow \infty} CV(\tilde{R}) = \sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}. \quad (3.6.12)$$

ASIMMETRIA

$$\gamma(\tilde{X}_{i,j}) = \frac{\mu_3(\tilde{X}_{i,j})}{\sigma^3(\tilde{X}_{i,j})}$$

dove

$$\mu_3(\tilde{X}_{i,j}) = \alpha_3(\tilde{X}_{i,j}) - 3\alpha_1(\tilde{X}_{i,j}) \text{var}(\tilde{X}_{i,j}) - [\alpha_1(\tilde{X}_{i,j})]^3.$$

Il primo termine del momento centrale terzo risulta essere:

$$\alpha_3(\tilde{X}_{i,j}) = E(\tilde{X}_{i,j}^3) = E\left[E(\tilde{X}_{i,j}^3 | \tilde{p})\right] = E\left[\tilde{p}^3 E({}^n \tilde{X}_{i,j}^3)\right] =$$

$$E(\tilde{p}^3) \left[E(\tilde{q}^3) n_{i,j}^3 m_{i,j}^3 + 3E(\tilde{q}^2) n_{i,j}^2 m_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} + n_{i,j} a_{3,Z_{i,j}} \right].$$

Per il secondo addendo si ricava invece:

$$\alpha_1\left(\tilde{X}_{i,j}\right)\text{var}\left(\tilde{X}_{i,j}\right)=E\left(\tilde{X}_{i,j}\right)\text{var}\left(\tilde{X}_{i,j}\right)=n_{i,j}m_{i,j}\left[n_{i,j}^2m_{i,j}^2\sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}^2+n_{i,j}a_{2,Z_{i,j}}\left(\sigma_{\tilde{p}}^2+1\right)\right]=n_{i,j}^3m_{i,j}^3\sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}^2+n_{i,j}^2m_{i,j}a_{2,Z_{i,j}}\left(\sigma_{\tilde{p}}^2+1\right).$$

Infine il terzo termine del momento centrale terzo della v.a. $\tilde{X}_{i,j}$ è pari a:

$$\left[\alpha_1\left(\tilde{X}_{i,j}\right)\right]^3=n_{i,j}^3m_{i,j}^3.$$

Il momento centrale terzo è quindi pari a:

$$\mu_3\left(\tilde{X}_{i,j}\right)=E\left(\tilde{p}^3\right)\left[E\left(\tilde{q}^3\right)n_{i,j}^3m_{i,j}^3+3E\left(\tilde{q}^2\right)n_{i,j}^2m_{i,j}a_{2,Z_{i,j}}+n_{i,j}a_{3,Z_{i,j}}\right]-3\left[n_{i,j}^3m_{i,j}^3\sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}^2+n_{i,j}^2m_{i,j}a_{2,Z_{i,j}}\left(\sigma_{\tilde{p}}^2+1\right)\right]-n_{i,j}^3m_{i,j}^3.$$

Raccogliendo il termine $n_{i,j}^3m_{i,j}^3$ è possibile scrivere $\mu_3\left(\tilde{X}_{i,j}\right)$ in funzione del momento centrale terzo del prodotto dei fattori di disturbo \tilde{q} e \tilde{p} :

$$\mu_3\left(\tilde{X}_{i,j}\right)=n_{i,j}^3m_{i,j}^3\left\{E\left(\tilde{p}^3\right)E\left(\tilde{q}^3\right)-3\sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}^2-1\right\}+3E\left(\tilde{p}^3\right)E\left(\tilde{q}^2\right)n_{i,j}^2m_{i,j}a_{2,Z_{i,j}}+E\left(\tilde{p}^3\right)n_{i,j}a_{3,Z_{i,j}}-3E\left(\tilde{p}^2\right)n_{i,j}^2m_{i,j}a_{2,Z_{i,j}}$$

in parentesi graffa si riconosce $\mu_3\left(\tilde{q}\tilde{p}\right)=E\left(\tilde{p}^3\right)E\left(\tilde{q}^3\right)-3\sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}^2-1$, infatti:

$$\mu_3\left(\tilde{q}\tilde{p}\right)=E\left[\left(\tilde{q}\tilde{p}\right)^3\right]-3E\left(\tilde{q}\tilde{p}\right)\text{var}\left(\tilde{q}\tilde{p}\right)-\left[E\left(\tilde{q}\tilde{p}\right)\right]^3$$

e ricordando che le v.a. \tilde{q} e \tilde{p} sono indipendenti tra loro e con media unitaria,

$$\mu_3\left(\tilde{q}\tilde{p}\right)=E\left(\tilde{p}^3\right)E\left(\tilde{q}^3\right)-3\sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}^2-1.$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\mu_3\left(\tilde{X}_{i,j}\right) &= n_{i,j}^3m_{i,j}^3\mu_3\left(\tilde{q}\tilde{p}\right)+3E\left(\tilde{p}^3\right)E\left(\tilde{q}^2\right)n_{i,j}^2m_{i,j}a_{2,Z_{i,j}}+E\left(\tilde{p}^3\right)n_{i,j}a_{3,Z_{i,j}}-3E\left(\tilde{p}^2\right)n_{i,j}^2m_{i,j}a_{2,Z_{i,j}}= \\ & n_{i,j}^3m_{i,j}^3\gamma_{\tilde{q}\tilde{p}}\sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}^3+3E\left(\tilde{p}^3\right)E\left(\tilde{q}^2\right)n_{i,j}^2m_{i,j}a_{2,Z_{i,j}}+E\left(\tilde{p}^3\right)n_{i,j}a_{3,Z_{i,j}}-3E\left(\tilde{p}^2\right)n_{i,j}^2m_{i,j}a_{2,Z_{i,j}}= \\ & n_{i,j}^3m_{i,j}^3\gamma_{\tilde{q}\tilde{p}}\sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}^3+3n_{i,j}^2m_{i,j}a_{2,Z_{i,j}}\left[E\left(\tilde{p}^3\right)E\left(\tilde{q}^2\right)-E\left(\tilde{p}^2\right)\right]+E\left(\tilde{p}^3\right)n_{i,j}a_{3,Z_{i,j}}.\end{aligned}\quad (3.6.13)$$

Il momento centrale terzo della v.a. $\tilde{X}_{i,j}$ è costituito da tre termini:

- $n_{i,j}^3m_{i,j}^3\gamma_{\tilde{q}\tilde{p}}\sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}^3$, il primo addendo è il prodotto tra il momento centrale terzo della v.a. data dal prodotto tra \tilde{q} e \tilde{p} e il cubo della media di $\tilde{X}_{i,j}$;
- $3n_{i,j}^2m_{i,j}a_{2,Z_{i,j}}\left[E\left(\tilde{p}^3\right)E\left(\tilde{q}^2\right)-E\left(\tilde{p}^2\right)\right]$, il secondo addendo dipende dalla media e media quadratica della *severity*, dal valore atteso al quadrato del numero dei sinistri nonché da un termine derivante dall'interazione dei due fattori di disturbo;

- $E(\tilde{p}^3)n_{i,j}a_{3,Z_{i,j}}$, il terzo addendo, infine, è il prodotto tra la media cubica di \tilde{p} e il momento centrale terzo del processo di Poisson composto semplice.

Il momento centrale terzo, come noto, determina il segno dell'indice di asimmetria. Se i fattori di disturbo presenti nel modello sono descritti da due v.a. Gamma di parametri uguali, cioè $\tilde{q} \sim \text{Gamma}(h,h)$ e $\tilde{p} \sim \text{Gamma}(k,k)$, il valore del momento centrale terzo della v.a. $\tilde{X}_{i,j}$ è sempre maggiore di zero. I termini $\gamma_{\tilde{q}\tilde{p}}$ e $[E(\tilde{p}^3)E(\tilde{q}^2) - E(\tilde{p}^2)]$ in questo caso, infatti, sono sempre positivi (Appendice A.4)¹⁹. In caso contrario il segno di $\mu_3(\tilde{X}_{i,j})$ dipenderà dalle famiglie di variabili aleatorie di appartenenza dei fattori \tilde{q} e \tilde{p} , nonché dalle loro caratteristiche.

L'indice di asimmetria risulta essere:

$$\gamma(\tilde{X}_{i,j}) = \frac{\mu_3(\tilde{X}_{i,j})}{\sigma^3(\tilde{X}_{i,j})} = \frac{n_{i,j}^3 m_{i,j}^3 \gamma_{\tilde{q}\tilde{p}} \sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}^3 + 3n_{i,j}^2 m_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} [E(\tilde{p}^3)E(\tilde{q}^2) - E(\tilde{p}^2)] + E(\tilde{p}^3)n_{i,j} a_{3,Z_{i,j}}}{[n_{i,j}^2 m_{i,j}^2 \sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}^2 + n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} (\sigma_{\tilde{p}}^2 + 1)]^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.6.14)$$

Il calcolo del limite rispetto a $n_{i,j} \rightarrow \infty$ dell'asimmetria mostra che, al crescere del parametro dimensionale, la v.a. $\tilde{X}_{i,j}$ tende ad avere un'asimmetria sempre più vicina a quella determinata dal prodotto dei due fattori di disturbo:

$$\lim_{n_{i,j} \rightarrow \infty} \gamma(\tilde{X}_{i,j}) = \frac{m_{i,j}^3 \gamma_{\tilde{q}\tilde{p}} \sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}^3}{m_{i,j}^3 \sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}^2} = \gamma_{\tilde{q}\tilde{p}}. \quad (3.6.15)$$

Dove il segno del termine $\gamma_{\tilde{q}\tilde{p}}$ dipende dalla natura e dalle caratteristiche delle variabili \tilde{q} e \tilde{p} .

A livello di riserva, cioè a livello aggregato di celle, l'indice di asimmetria è pari a:

$$\gamma(\tilde{R}) = \frac{\mu_3\left(\sum_i \sum_j \tilde{X}_{i,j}\right)}{\sigma^3\left(\sum_i \sum_j \tilde{X}_{i,j}\right)}$$

$$\text{dove } \mu_3\left(\sum_i \sum_j \tilde{X}_{i,j}\right) = \alpha_3\left(\sum_i \sum_j \tilde{X}_{i,j}\right) - 3\alpha_1\left(\sum_i \sum_j \tilde{X}_{i,j}\right) \text{var}\left(\sum_i \sum_j \tilde{X}_{i,j}\right) - \left[\alpha_1\left(\sum_i \sum_j \tilde{X}_{i,j}\right)\right]^3.$$

Il momento centrale terzo della v.a. \tilde{R} risulta essere (Appendice A.6):

¹⁹ In appendice inoltre si mostra che nel caso di due v.a. fattori di disturbo simmetriche, il termine $\gamma_{\tilde{q}\tilde{p}}$ non è mai nullo bensì positivo.

$$\begin{aligned} \mu_3 \left(\sum_i \sum_j \tilde{X}_{i,j} \right) = \\ E(\tilde{p}^3) E(\tilde{q}^3) \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^3 + 3E(\tilde{p}^3) E(\tilde{q}^2) \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right) \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \right) + \sum_i \sum_j n_{i,j} a_{3,Z_{i,j}} \\ - 3 \left\{ \sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}^2 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^3 + (\sigma_{\tilde{p}}^2 + 1) \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right) \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \right) \right\} - \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^3, \end{aligned}$$

raccogliendo il termine $\left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^3$ si ottiene:

$$\begin{aligned} \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^3 \left\{ E(\tilde{p}^3) E(\tilde{q}^3) - 3\sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}^2 - 1 \right\} + 3E(\tilde{p}^3) E(\tilde{q}^2) \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right) \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \right) \\ + E(\tilde{p}^3) \sum_i \sum_j n_{i,j} a_{3,Z_{i,j}} - 3E(\tilde{p}^2) \left[\left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right) \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \right) \right] = \\ \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^3 \mu_3(\tilde{q}\tilde{p}) + 3E(\tilde{p}^3) E(\tilde{q}^2) \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right) \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \right) \\ + E(\tilde{p}^3) \sum_i \sum_j n_{i,j} a_{3,Z_{i,j}} - 3E(\tilde{p}^2) \left[\left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right) \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \right) \right] = \\ \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^3 \sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}^3 \gamma_{\tilde{q}\tilde{p}} + 3 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right) \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \right) \left[E(\tilde{p}^3) E(\tilde{q}^2) - E(\tilde{p}^2) \right] + E(\tilde{p}^3) \sum_i \sum_j n_{i,j} a_{3,Z_{i,j}} \end{aligned}$$

(3.6.16)

Il momento centrale terzo della riserva sinistri è dato dalla somma di tre termini:

- $\left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^3 \sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}^3 \gamma_{\tilde{q}\tilde{p}}$, il primo addendo è il prodotto tra il momento centrale terzo del prodotto delle v.a. \tilde{q} e \tilde{p} e il cubo del valore atteso della riserva sinistri;
- $3 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right) \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \right) \left[E(\tilde{p}^3) E(\tilde{q}^2) - E(\tilde{p}^2) \right]$, il secondo addendo è il triplo prodotto tra la media della v.a. \tilde{R} , la somma delle varianze di processi di Poisson composti semplici e, infine, un termine derivante dall'interazione dei due fattori di disturbo;
- $E(\tilde{p}^3) \sum_i \sum_j n_{i,j} a_{3,Z_{i,j}}$, l'ultimo addendo è pari al prodotto tra la media cubica della v.a. \tilde{p} e la somma dei momenti centrali terzi di processi di Poisson composti semplici.

Con riferimento alla v.a. \tilde{R} valgono le considerazioni espote per le singole v.a. $\tilde{X}_{i,j}$; i primi due termini del momento centrale terzo della riserva sinistri possono essere negativi e di conseguenza anche l'indice di asimmetria. Quest'ultima circostanza non è tuttavia possibile nel caso particolare in cui i fattori di disturbo \tilde{q} e \tilde{p} siano delle variabili Gamma.

L'asimmetria, pari al rapporto tra il momento centrale terzo e lo scarto quadratico medio al cubo, è la seguente:

$$\gamma(\tilde{R}) = \frac{\mu_3 \left(\sum_i \sum_j \tilde{X}_{i,j} \right)}{\sigma^3 \left(\sum_i \sum_j \tilde{X}_{i,j} \right)} = \frac{\left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^3 \sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}^3 \gamma_{\tilde{q}\tilde{p}} + 3 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right) \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \right) \left[E(\tilde{p}^3) E(\tilde{q}^2) - E(\tilde{p}^2) \right] + E(\tilde{p}^3) \sum_i \sum_j n_{i,j} a_{3,Z_{i,j}}}{\left[\sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}^2 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^2 + (\sigma_{\tilde{p}}^2 + 1) \sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \right]^{\frac{3}{2}}} \quad (3.6.17)$$

Il valore asintotico assunto dall'asimmetria nel caso in cui il parametro dimensionale tenda ad infinito è pari a $\gamma_{\tilde{q}\tilde{p}}$:

posto $n_{i,j} = N \delta_{i,j}$ si può scrivere l'indice di asimmetria come,

$$\gamma(\tilde{R}) = \frac{N^3 \left(\sum_i \sum_j \delta_{i,j} m_{i,j} \right)^3 \sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}^3 \gamma_{\tilde{q}\tilde{p}} + 3N^2 \left(\sum_i \sum_j \delta_{i,j} m_{i,j} \right) \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \right) \left[E(\tilde{p}^3) E(\tilde{q}^2) - E(\tilde{p}^2) \right] + E(\tilde{p}^3) N \sum_i \sum_j \delta_{i,j} a_{3,Z_{i,j}}}{\left[(\sigma_{\tilde{p}}^2 + 1) \left[\sigma_{\tilde{q}}^2 N^2 \left(\sum_i \sum_j \delta_{i,j} m_{i,j} \right)^2 + N \sum_i \sum_j \delta_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \right] + \sigma_{\tilde{p}}^2 N^2 \left(\sum_i \sum_j \delta_{i,j} m_{i,j} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

il cui limite per $N \rightarrow \infty$ risulta essere:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \gamma(\tilde{R}) = \frac{\left(\sum_i \sum_j \delta_{i,j} m_{i,j} \right)^3 \gamma_{\tilde{q}\tilde{p}} \sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}^3}{\sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}^3 \left(\sum_i \sum_j \delta_{i,j} m_{i,j} \right)^3} = \frac{\gamma_{\tilde{q}\tilde{p}} \sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}^3}{\sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}^3} = \gamma_{\tilde{q}\tilde{p}} \quad (3.6.18)$$

Le caratteristiche della riserva sinistri, ricavate poco sopra, valgono indipendentemente dalla tipologia distributiva del costo dei singoli sinistri. Se si ipotizza, come fatto nei casi studio per le imprese SIFA e AMASES, che le *severity* relative ad ogni cella (i,j) siano descritte da una v.a. Gamma,

cioè $\tilde{Z}_{i,j} \sim \text{Gamma}(\alpha_{i,j}; \beta_{i,j})$, le caratteristiche della riserva sinistri, pur mantenendo la stessa struttura, assumono formulazioni differenti. I valori asintotici del coefficiente di variazione e dell'asimmetria della riserva sinistri rimangono invariati in quanto dipendono dalle sole caratteristiche dei fattori di disturbo.

VALORE ATTESO

$$E\left(\tilde{X}_{i,j}\right) = n_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}}{\beta_{i,j}} \quad (3.6.3 \text{ bis})$$

$$E\left(\tilde{R}\right) = \sum_i \sum_j n_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}}{\beta_{i,j}}. \quad (3.6.4 \text{ bis})$$

VARIANZA

$$\text{var}\left(\tilde{X}_{i,j}\right) = n_{i,j}^2 \frac{\alpha_{i,j}^2}{\beta_{i,j}^2} \sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}^2 + n_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}(\alpha_{i,j} + 1)}{\beta_{i,j}^2} (\sigma_{\tilde{p}}^2 + 1) \quad (3.6.5 \text{ bis})$$

oppure

$$\text{var}\left(\tilde{X}_{i,j}\right) = (\sigma_{\tilde{p}}^2 + 1) \left[n_{i,j}^2 \frac{\alpha_{i,j}^2}{\beta_{i,j}^2} \sigma_{\tilde{q}}^2 + n_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}(\alpha_{i,j} + 1)}{\beta_{i,j}^2} \right] + n_{i,j}^2 \frac{\alpha_{i,j}^2}{\beta_{i,j}^2} \sigma_{\tilde{p}}^2. \quad (3.6.6 \text{ bis})$$

A livello aggregato di riserva invece si ottiene:

$$\text{var}\left(\tilde{R}\right) = \sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}^2 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}}{\beta_{i,j}} \right)^2 + (\sigma_{\tilde{p}}^2 + 1) \sum_i \sum_j n_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}(\alpha_{i,j} + 1)}{\beta_{i,j}^2} \quad (3.6.7 \text{ bis})$$

oppure

$$\text{var}\left(\tilde{R}\right) = (\sigma_{\tilde{p}}^2 + 1) \left[\sigma_{\tilde{q}}^2 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}}{\beta_{i,j}} \right)^2 + \sum_i \sum_j n_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}(\alpha_{i,j} + 1)}{\beta_{i,j}^2} \right] + \sigma_{\tilde{p}}^2 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}}{\beta_{i,j}} \right)^2. \quad (3.6.8 \text{ bis})$$

COEFFICIENTE DI VARIAZIONE

$$CV\left(\tilde{X}_{i,j}\right) = \frac{\sigma\left(\tilde{X}_{i,j}\right)}{E\left(\tilde{X}_{i,j}\right)} = \sqrt{\sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}^2 + \frac{(\sigma_{\tilde{p}}^2 + 1)(\alpha_{i,j} + 1)}{n_{i,j} \alpha_{i,j}}} \quad (3.6.9 \text{ bis})$$

$$\lim_{n_{i,j} \rightarrow \infty} CV\left(\tilde{X}_{i,j}\right) = \sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}. \quad (3.6.10 \text{ bis})$$

A livello totale di riserva sinistri:

$$CV\left(\tilde{R}\right) = \sqrt{\sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}^2 + \frac{(\sigma_{\tilde{p}}^2 + 1) \sum_i \sum_j n_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}(\alpha_{i,j} + 1)}{\beta_{i,j}^2}}{\left(\sum_i \sum_j n_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}}{\beta_{i,j}} \right)^2}} \quad (3.6.11 \text{ bis})$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} CV \left(\sum_i \sum_j \tilde{X}_{i,j} \right) = \sigma_{\tilde{q}\tilde{p}} \cdot \quad (3.6.12 \text{ bis})$$

ASIMMETRIA

$$\gamma \left(\tilde{X}_{i,j} \right) =$$

$$\frac{n_{i,j}^3 \frac{\alpha_{i,j}^3}{\beta_{i,j}^3} \gamma_{\tilde{q}\tilde{p}} \sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}^3 + 3 \left(n_{i,j}^2 \frac{\alpha_{i,j}(\alpha_{i,j}+1)}{\beta_{i,j}^2} \right) \left[E(\tilde{p}^3)E(\tilde{q}^2) - E(\tilde{p}^2) \right] + E(\tilde{p}^3) n_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}(\alpha_{i,j}+1)(\alpha_{i,j}+2)}{\beta_{i,j}^3}}{\left[n_{i,j}^2 \frac{\alpha_{i,j}^2}{\beta_{i,j}^2} \sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}^2 + n_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}(\alpha_{i,j}+1)}{\beta_{i,j}^2} (\sigma_{\tilde{p}}^2 + 1) \right]^{\frac{3}{2}}} \quad (3.6.14 \text{ bis})$$

$$\lim_{n_{i,j} \rightarrow \infty} \gamma \left(\tilde{X}_{i,j} \right) = \gamma_{\tilde{q}\tilde{p}} \cdot \quad (3.6.15 \text{ bis})$$

Considerando l'intera riserva sinistri:

$$\gamma \left(\tilde{R} \right) =$$

$$\frac{\left(\sum_i \sum_j n_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}}{\beta_{i,j}} \right)^3 \gamma_{\tilde{q}\tilde{p}} \sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}^3 + 3 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}}{\beta_{i,j}} \right) \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}(\alpha_{i,j}+1)}{\beta_{i,j}^2} \right) \left[E(\tilde{p}^3)E(\tilde{q}^2) - E(\tilde{p}^2) \right]}{\left[\sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}^2 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}}{\beta_{i,j}} \right)^2 + (\sigma_{\tilde{p}}^2 + 1) \sum_i \sum_j n_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}(\alpha_{i,j}+1)}{\beta_{i,j}^2} \right]^{\frac{3}{2}} + \frac{\sum_i \sum_j E(\tilde{p}^3) n_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}(\alpha_{i,j}+1)(\alpha_{i,j}+2)}{\beta_{i,j}^3}}{\left[\sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}^2 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}}{\beta_{i,j}} \right)^2 + (\sigma_{\tilde{p}}^2 + 1) \sum_i \sum_j n_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}(\alpha_{i,j}+1)}{\beta_{i,j}^2} \right]^{\frac{3}{2}}}} \cdot \quad (3.6.17 \text{ bis})$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \gamma \left(\sum_i \sum_j \tilde{X}_{i,j} \right) = \gamma_{\tilde{q}\tilde{p}} \cdot \quad (3.6.18 \text{ bis})$$

CASO STUDIO: LA RISERVA SINISTRI DESCRITTA DAL CRM CON DOPPIO FATTORE DI DISTURBO

Di seguito sono presentate le analisi di sensibilità, al variare dell'intensità dei fattori di disturbo, a livello di singola impresa e a livello comparato tra le imprese SIFA e AMASES. I valori considerati per le variabilità dei fattori \tilde{q} e \tilde{p} sono il 2%, 3%, 5% e 8%; quando opportuno, inoltre, sono considerati valori compresi in un *range* più ampio. Lo studio delle caratteristiche della riserva sinistri è stato effettuato in prima battuta ipotizzando valori identici per $\sigma_{\tilde{q}}$ e $\sigma_{\tilde{p}}$, successivamente, invece, vengono considerati valori speculari per gli scarti quadratici medi dei due fattori di disturbo.

Di seguito, in figura 3.6.1, è presentata la tabella contenente i valori delle medie, varianze e scarti quadratici medi delle due imprese oggetto di studio al variare di $\sigma_{\tilde{q}}$ e $\sigma_{\tilde{p}}$.

Fig.3.6.1: Media, varianza e scarto quadratico medio della v.a. \tilde{R} al variare della *standard deviation* dei fattori di disturbo

	media		varianza		sqm	
	SIFA	AMASES	SIFA	AMASES	SIFA	AMASES
$\sigma_{\tilde{q}} ; \sigma_{\tilde{p}}$						
2%;2%	229.538.009	2.826.940.322	141.434.437.481.027	8.100.958.322.965.200	11.892.621,14	90.005.323,86
3%;3%	229.538.009	2.826.940.322	194.206.000.141.730	16.098.597.305.622.200	13.935.781,29	126.880.247,89
5%;5%	229.538.009	2.826.940.322	363.252.031.319.851	41.717.893.797.853.900	19.059.171,84	204.249.587,02
8%;8%	229.538.009	2.826.940.322	776.431.883.429.607	104.336.348.637.190.000	27.864.527,33	323.011.375,40
2%;8%	229.538.009	2.826.940.322	458.282.490.363.651	56.079.922.003.857.700	21.407.533,50	236.811.997,17
3%;5%	229.538.009	2.826.940.322	278.740.964.401.827	28.899.380.893.795.800	16.695.537,26	169.998.179,09
5%;3%	229.538.009	2.826.940.322	278.582.186.553.950	28.896.651.735.220.100	16.690.781,48	169.990.151,88
8%;2%	229.538.009	2.826.940.322	457.687.073.434.109	56.069.687.659.198.900	21.393.622,26	236.790.387,60

Nella tabella seguente (fig: 3.6.2) sono riportati i valori del coefficiente di variazione delle due imprese relativi alle singole generazioni e a livello complessivo di riserva nell'ipotesi in cui le variabilità di \tilde{q} e \tilde{p} abbiano valori identici. È stato stimato, inoltre, il valore del coefficiente di correlazione lineare (ρ) nell'ipotesi in cui la dipendenza lineare tra le celle oggetto di stima del triangolo sia la stessa.

Fig.3.6.2: Coefficiente di variazione, per singola generazione e a livello aggregato, e coefficiente di correlazione lineare a livello aggregato di riserva al variare della *standard deviation* dei fattori di disturbo

COEFFICIENTE DI VARIAZIONE								
$\sigma_{\tilde{q}} ; \sigma_{\tilde{p}}$	2%;2%		3%;3%		5%;5%		8%;8%	
generazione	SIFA	AMASES	SIFA	AMASES	SIFA	AMASES	SIFA	AMASES
1	56,28%	15,42%	56,38%	15,74%	56,71%	16,74%	57,50%	18,96%
2	41,33%	12,80%	41,46%	13,19%	41,88%	14,36%	42,88%	16,89%
3	37,17%	11,43%	37,31%	11,86%	37,77%	13,15%	38,86%	15,87%
4	31,53%	9,31%	31,69%	9,84%	32,22%	11,35%	33,47%	14,41%
5	29,53%	8,31%	29,71%	8,89%	30,27%	10,55%	31,59%	13,78%
6	27,95%	8,15%	28,13%	8,75%	28,72%	10,42%	30,10%	13,68%
7	23,56%	7,24%	23,78%	7,90%	24,46%	9,72%	26,05%	13,16%
8	21,05%	6,56%	21,29%	7,28%	22,04%	9,23%	23,79%	12,79%
9	18,82%	5,88%	19,09%	6,68%	19,92%	8,76%	21,83%	12,46%
10	15,85%	5,27%	16,17%	6,15%	17,14%	8,36%	19,32%	12,18%
11	11,22%	4,43%	11,66%	5,44%	12,97%	7,85%	15,71%	11,84%
12	6,40%	3,63%	7,14%	4,82%	9,11%	7,44%	12,71%	11,56%
TOTALE	5,18%	3,18%	6,07%	4,49%	8,30%	7,23%	12,14%	11,43%
ρ	0,007135	0,050299	0,015743	0,104214	0,041427	0,236119	0,095538	0,429364
$\sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}$	2,83%		4,24%		7,08%		11,33%	

Analizzando la tabella si osserva, per entrambe le imprese, un comportamento decrescente del coefficiente di variazione al crescere della generazione considerata; questo andamento è determinato dall'incremento del numero dei sinistri riservato nelle generazioni più recenti. Al crescere dei valori di $\sigma_{\tilde{q}}$ e $\sigma_{\tilde{p}}$ non si modifica il *trend* della variabilità relativa al variare della generazione ma si riscontra solamente un incremento dei valori; al crescere delle *standard deviation* di \tilde{q} e \tilde{p} , infatti, la variabilità relativa del numero dei sinistri cresce a parità di generazione per entrambi i portafogli considerati (figure: 3.6.3 e 3.6.4). In virtù delle maggiori dimensioni, l'impresa AMASES possiede dei valori di variabilità relativi inferiori rispetto all'impresa SIFA per ogni coppia di valori di $\sigma_{\tilde{q}}$ e $\sigma_{\tilde{p}}$ considerati (figure: 3.6.5, 3.6.6, 3.6.7, 3.6.8).

Fig.3.6.3: Coefficiente di variazione per generazione al variare di $\sigma_{\tilde{q}}$ e $\sigma_{\tilde{p}}$ per l'impresa SIFA

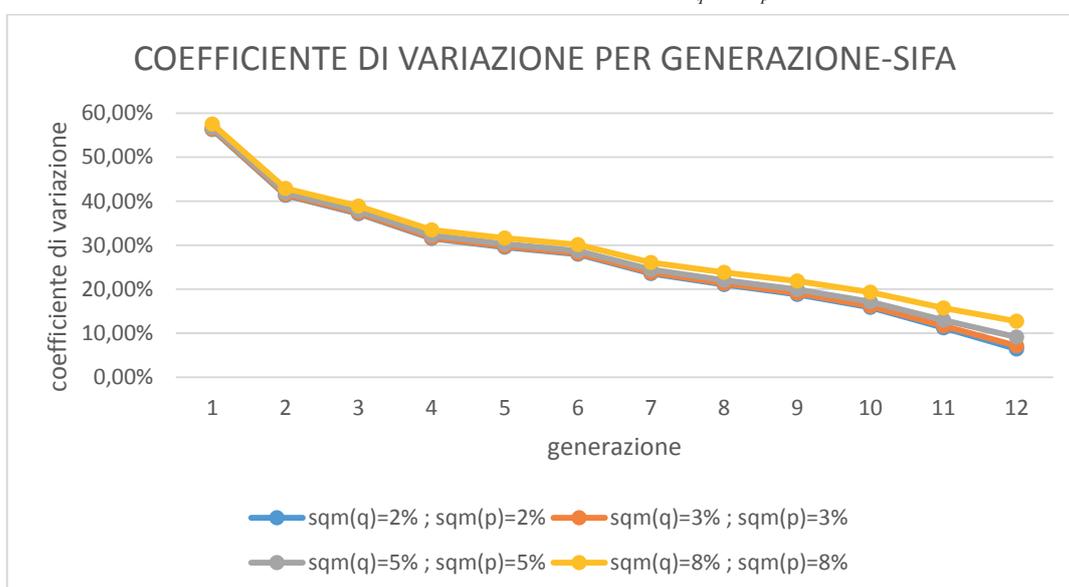


Fig.3.6.4: Coefficiente di variazione per generazione al variare di $\sigma_{\bar{q}}$ e $\sigma_{\bar{p}}$ per l'impresa AMASES

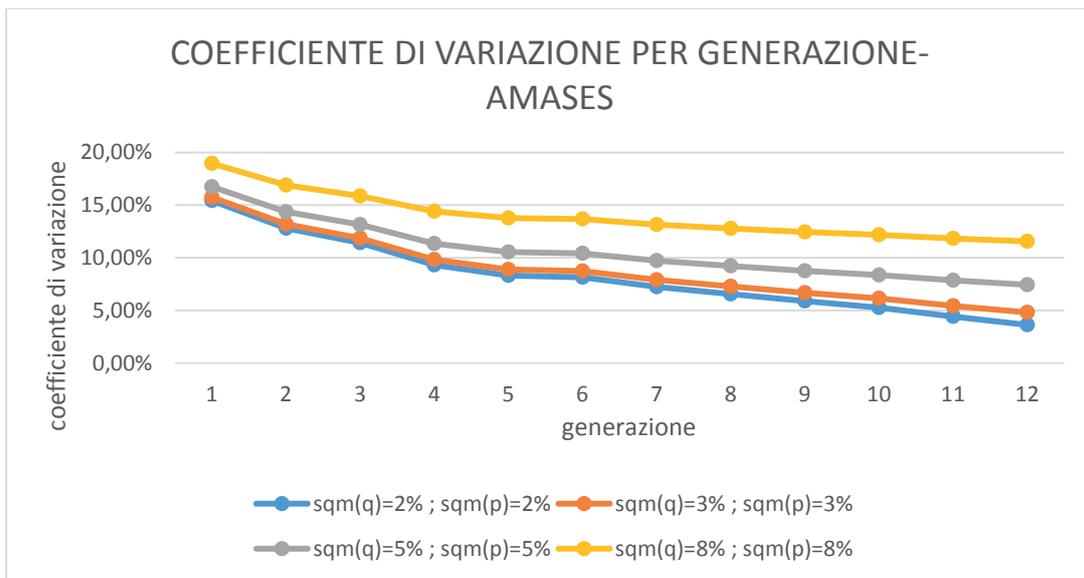


Fig.3.6.5: Coefficiente di variazione per generazione delle imprese SIFA e AMASES posto $\sigma_{\bar{q}} = 2\%$; $\sigma_{\bar{p}} = 2\%$

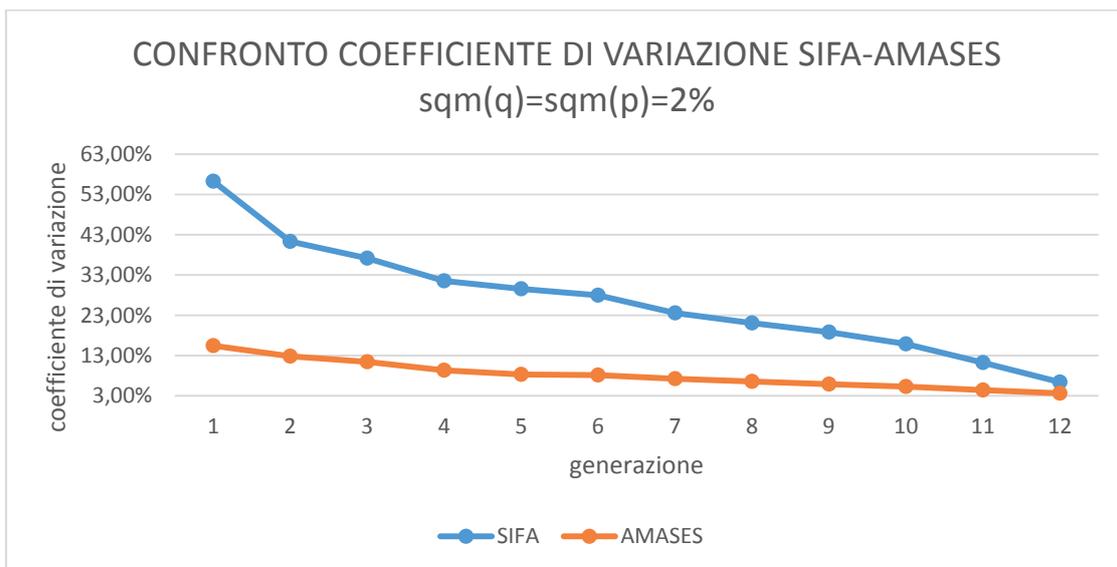


Fig.3.6.6: Coefficiente di variazione per generazione delle imprese SIFA e AMASES posto $\sigma_{\bar{q}} = 3\%$; $\sigma_{\bar{p}} = 3\%$

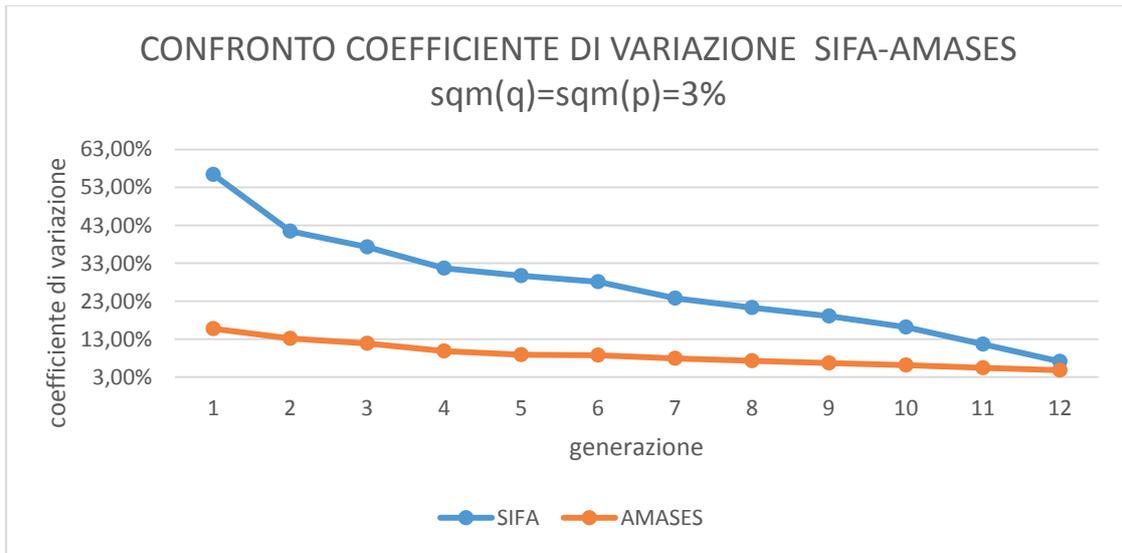


Fig.3.6.7: Coefficiente di variazione per generazione delle imprese SIFA e AMASES posto $\sigma_{\bar{q}} = 5\%$; $\sigma_{\bar{p}} = 5\%$

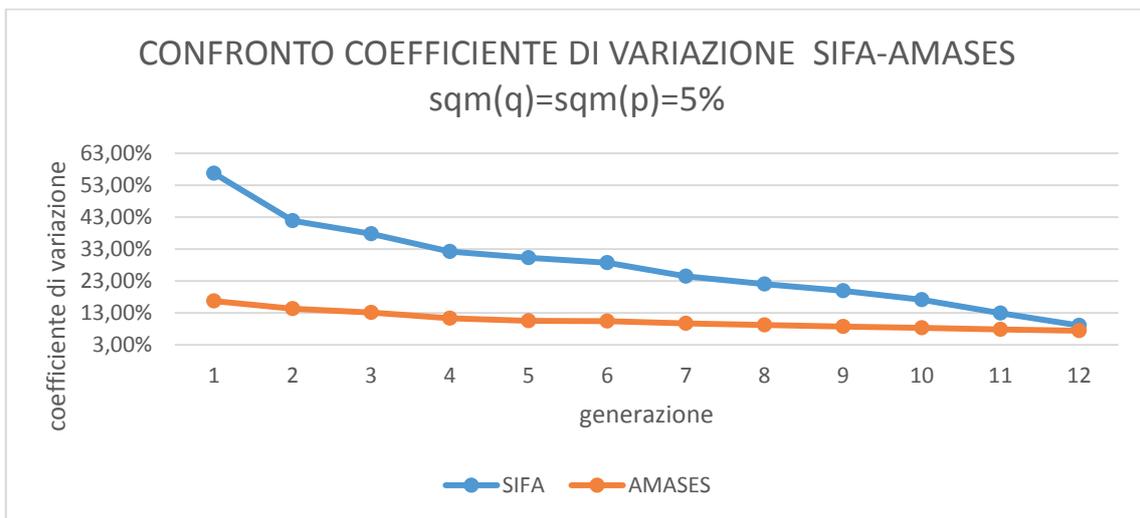
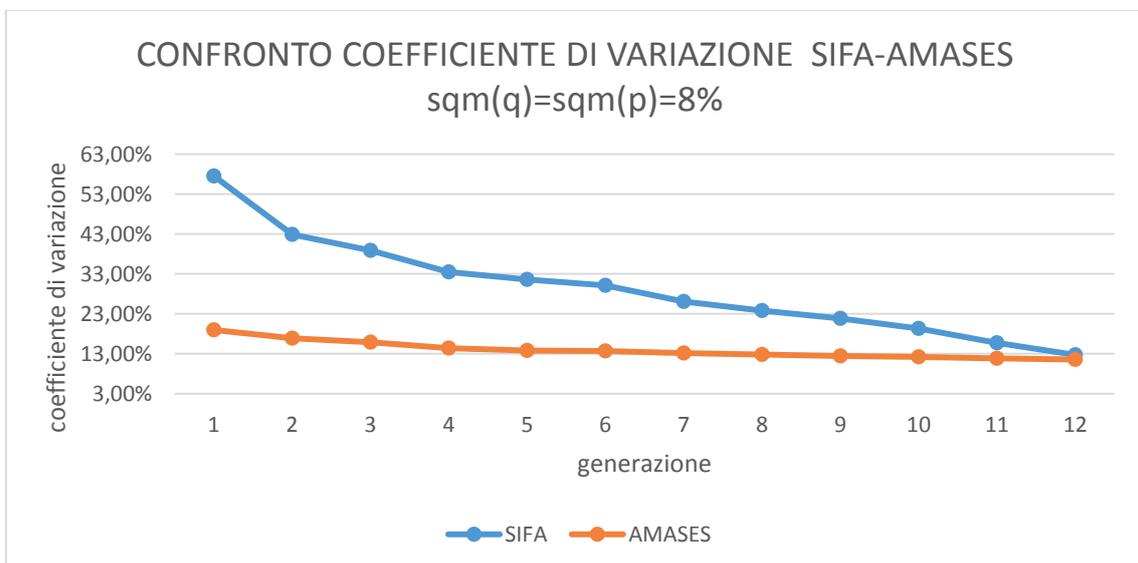


Fig.3.6.8: Coefficiente di variazione per generazione delle imprese SIFA e AMASES posto $\sigma_{\bar{q}} = 8\%$; $\sigma_{\bar{p}} = 8\%$



L'impatto dei due fattori di disturbo a livello di singola compagnia risulta essere identico per le due imprese; sia il fattore di disturbo sul numero dei sinistri che quello applicato al costo dei singoli sinistri portano a incrementi percentuali quasi identici del coefficiente di variazione (figure: 3.6.9 e 3.6.10).

Fig.3.6.9: Incidenza percentuale, per l'impresa SIFA, delle v.a. \tilde{q} e \tilde{p} sul coefficiente di variazione

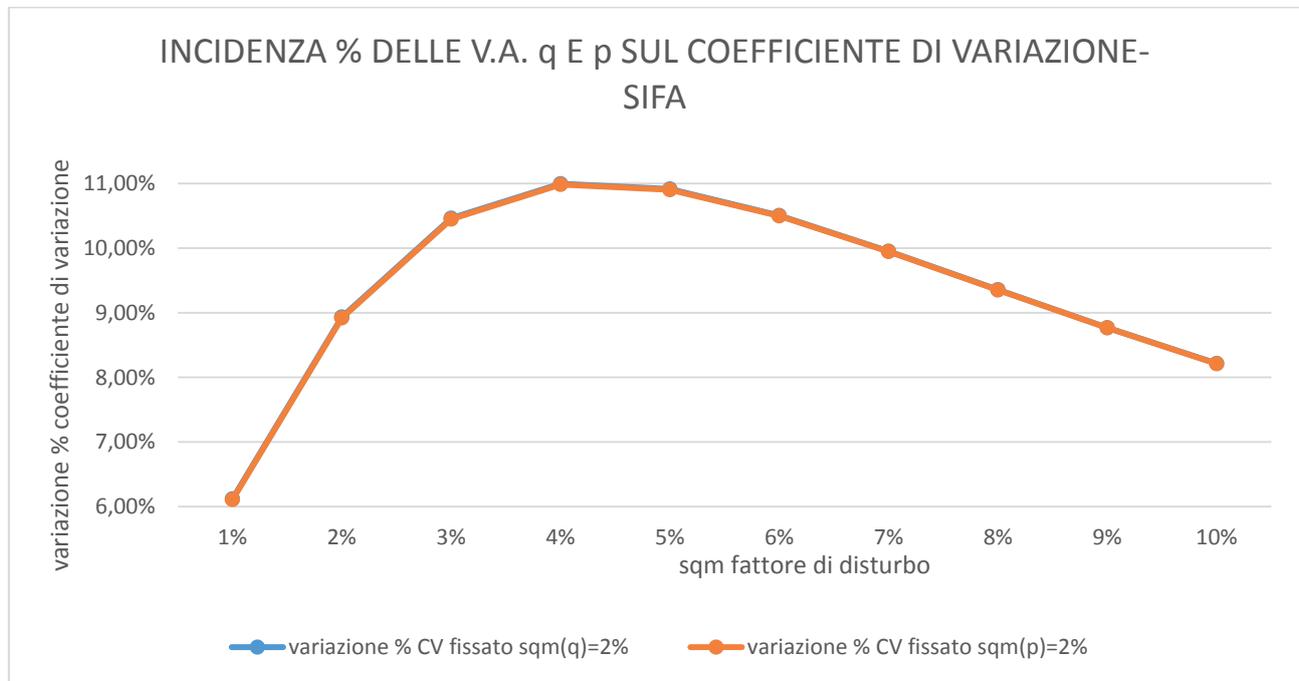
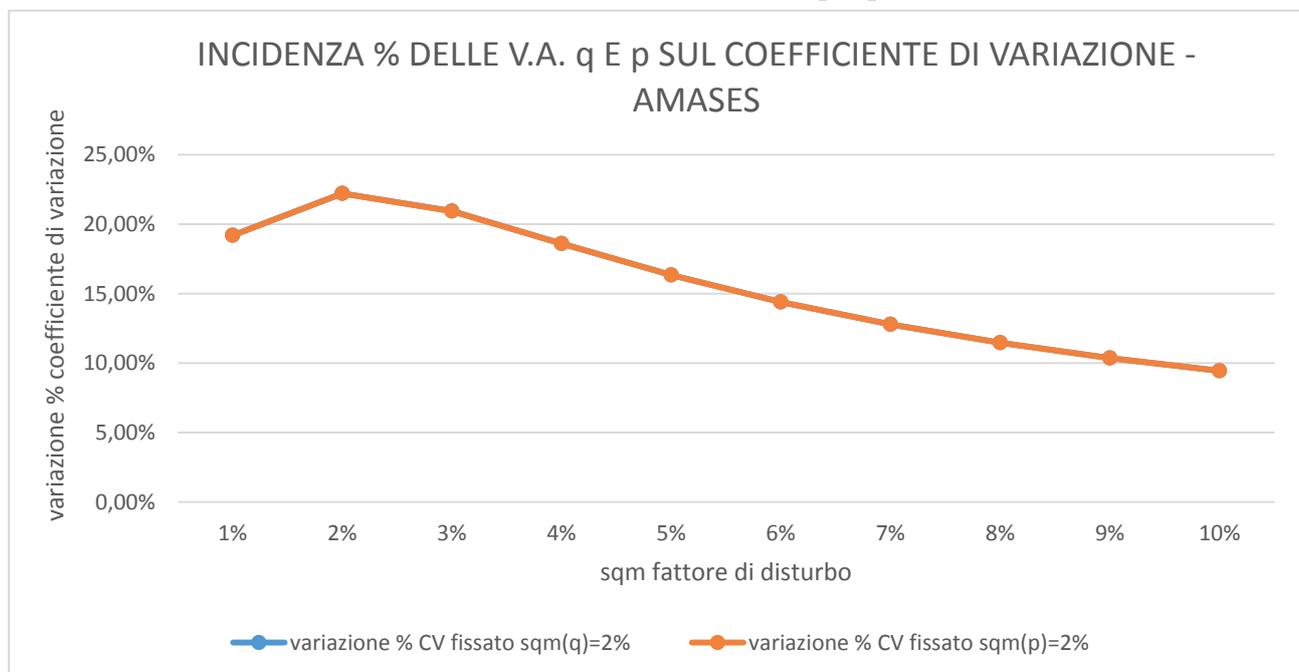


Fig.3.6.10: Incidenza percentuale, per l'impresa AMASES, delle v.a. \tilde{q} e \tilde{p} sul coefficiente di variazione

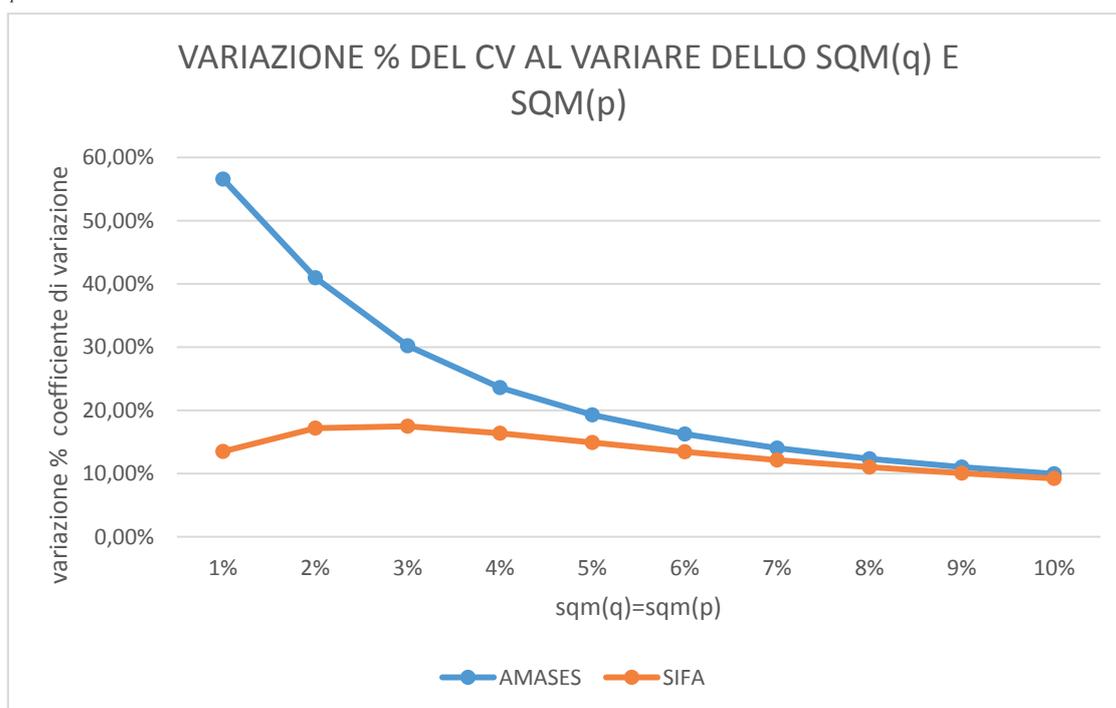


L'incidenza degli elementi sistematici non è tuttavia identica per le due imprese: la variabilità introdotta dai fattori di disturbo infatti incide in modo maggiore sull'impresa AMASES. Come

mostrato nei casi studio precedenti le v.a. \tilde{q} e \tilde{p} hanno un maggiore effetto sull'impresa più grande, cioè su AMASES.

Il grafico seguente (fig: 3.6.11) inoltre mostra le variazioni percentuali del coefficiente di variazione, per le due imprese, al crescere congiunto dei valori di $\sigma_{\tilde{q}}$ e $\sigma_{\tilde{p}}$.

Fig.3.6.11: Variazioni percentuali del coefficiente di variazione, per le imprese SIFA e AMASES, al variare di $\sigma_{\tilde{q}}$ e $\sigma_{\tilde{p}}$



I valori asintotici dei coefficienti di variazione, al variare dei fattori di disturbo, corrispondono ai rispettivi valori di $\sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}$. Tornando ai dati presenti in figura 3.6.2 si osserva che entrambe le imprese possiedono valori di variabilità relativa abbastanza differenti da quelli asintotici; l'impresa SIFA, inoltre, a causa delle minori dimensioni possiede valori del coefficiente di variazioni più distanti rispetto all'impresa AMASES. La differenza percentuale tra tali grandezze e i valori asintotici inoltre tende a diminuire al crescere di $\sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}$; in tale circostanza infatti la variabilità relativa della riserva sinistri delle due imprese tende ad essere influenzata in misura sempre maggiore da quella dei fattori di disturbo.

Nell'ultima riga della tabella, infine, sono riportati i valori stimati del coefficiente di correlazione lineare a livello totale di riserva. Come previsto il valore di ρ cresce, per entrambi gli assicuratori, al crescere della variabilità dei fattori di disturbo; i fattori \tilde{q} e \tilde{p} introducono una dipendenza positiva sulle celle del triangolo che è crescente nei valori di $\sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}$. Si osservano infine valori di ρ più elevati per l'impresa di maggiori dimensioni.

Nella tabella seguente (fig: 3.6.12) sono riportati i valori del coefficiente di variazione per le due imprese relativi alle singole generazioni e a livello complessivo di riserva nell'ipotesi in cui le variabilità di \tilde{q} e \tilde{p} assumono valori speculari. È stato stimato, inoltre, il valore del coefficiente di

correlazione lineare (ρ) nell'ipotesi in cui la dipendenza lineare tra le celle oggetto di stima del triangolo sia la stessa.

Fig.3.6.12: Coefficiente di variazione, per singola generazione e a livello aggregato, e coefficiente di correlazione lineare a livello aggregato di riserva al variare della *standard deviation* dei fattori di disturbo

COEFFICIENTE DI VARIAZIONE								
$\sigma_{\tilde{q}} ; \sigma_{\tilde{p}}$	2%;8%		3%;5%		5%;3%		8%;2%	
generazione	SIFA	AMASES	SIFA	AMASES	SIFA	AMASES	SIFA	AMASES
1	56,97%	17,30%	56,57%	16,26%	56,52%	16,24%	56,81%	17,26%
2	42,17%	15,00%	41,69%	13,79%	41,65%	13,79%	42,05%	14,97%
3	38,08%	13,83%	37,56%	12,53%	37,53%	12,52%	37,97%	13,81%
4	32,56%	12,13%	31,97%	10,62%	31,95%	10,62%	32,47%	12,11%
5	30,62%	11,38%	30,00%	9,76%	29,98%	9,75%	30,53%	11,36%
6	29,08%	11,26%	28,44%	9,62%	28,42%	9,62%	29,00%	11,25%
7	24,87%	10,62%	24,13%	8,86%	24,11%	8,86%	24,80%	10,60%
8	22,48%	10,16%	21,68%	8,31%	21,66%	8,31%	22,43%	10,15%
9	20,40%	9,74%	19,52%	7,79%	19,50%	7,79%	20,35%	9,73%
10	17,69%	9,38%	16,67%	7,34%	16,66%	7,34%	17,65%	9,37%
11	13,66%	8,93%	12,33%	6,76%	12,32%	6,75%	13,63%	8,92%
12	10,06%	8,56%	8,18%	6,26%	8,18%	6,26%	10,05%	8,56%
TOTALE	9,33%	8,38%	7,27%	6,01%	7,27%	6,01%	9,32%	8,38%
ρ	0,054642	0,291815	0,028879	0,176219	0,028922	0,176441	0,054938	0,292988
$\sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}$	8,25%		5,83%		5,83%		8,25%	

Anche in tale situazione il coefficiente di variazione delle due imprese è decrescente nelle generazioni in virtù del maggior numero di sinistri riservati. Le variabilità relative calcolate con queste combinazioni intermedie di scarti quadratici medi dei fattori di disturbo risultano essere comprese tra i valori massimi e minimi, per entrambe le imprese, dei valori della tabella mostrata in figura 3.6.2 .

Considerando i due casi speculari, cioè il caso in cui $\sigma_{\tilde{q}} = 2\%; \sigma_{\tilde{p}} = 8\%$ e $\sigma_{\tilde{q}} = 8\%; \sigma_{\tilde{p}} = 2\%$ ed il caso in cui $\sigma_{\tilde{q}} = 3\%; \sigma_{\tilde{p}} = 5\%$ e $\sigma_{\tilde{q}} = 5\%; \sigma_{\tilde{p}} = 3\%$, si osserva, soprattutto nelle prime generazioni, un'incidenza maggiore del fattore \tilde{p} rispetto alla variabile \tilde{q} ; tale differenza, tuttavia, non è percepibile a livello totale di riserva.

I coefficienti di variazione dell'impresa SIFA sono abbastanza distanti dai relativi valori asintotici; per l'impresa AMASES invece si riscontrano valori più prossimi a quelli di $\sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}$.

Il coefficiente di correlazione lineare è crescente al crescere di $\sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}$; anche in questo caso, come osservato per il coefficiente di variazione nei due casi speculari, la v.a. \tilde{p} mostra una maggiore rilevanza sulla dipendenza lineare rispetto al fattore di disturbo applicato sul numero dei sinistri.

La tabella seguente (fig: 3.6.13) permette di cogliere questo effetto in quanto mostra i valori dei coefficienti di variazione calcolati nei casi limite di perfetta incorrelazione lineare e perfetta correlazione lineare.

Fig.3.6.13: Coefficienti di variazione per le imprese SIFA e AMASES, al variare di $\sigma_{\bar{q}}$ e $\sigma_{\bar{p}}$, calcolati in ipotesi di indipendenza, piena dipendenza e effettiva dipendenza lineare

$\sigma_{\bar{q}} ; \sigma_{\bar{p}}$	CV SIFA			CV AMASES		
	$\rho = 0$	esempio	$\rho = 1$	$\rho = 0$	esempio	$\rho = 1$
2%;2%	4,43%	5,18%	32,19%	1,56%	3,18%	12,48%
3%;3%	4,53%	6,07%	32,52%	1,67%	4,49%	13,01%
5%;5%	4,85%	8,30%	33,45%	1,99%	7,23%	14,43%
8%;8%	5,56%	12,14%	35,35%	2,62%	11,43%	17,17%
2%;8%	5,03%	9,33%	33,97%	2,15%	8,38%	15,14%
3%;5%	4,70%	7,27%	33,01%	1,84%	6,01%	13,76%
5%;3%	4,69%	7,27%	32,99%	1,84%	6,01%	13,75%
8%;2%	5,02%	9,32%	33,88%	2,15%	8,38%	15,11%

I valori relativi all'indice di asimmetria, nel caso di valori identici per $\sigma_{\bar{q}}$ e $\sigma_{\bar{p}}$ sono presentati nella tabella seguente (fig: 3.6.14).

Fig.3.6.14: Indice di asimmetria per singola generazione a livello aggregato di riserva al variare della *standard deviation* dei fattori di disturbo

ASIMMETRIA								
$\sigma_{\bar{q}} ; \sigma_{\bar{p}}$	2%;2%		3%;3%		5%;5%		8%;8%	
generazione	SIFA	AMASES	SIFA	AMASES	SIFA	AMASES	SIFA	AMASES
1	1,077435	0,298429	1,081130	0,308933	1,092878	0,340450	1,121047	0,407439
2	0,794538	0,256962	0,799035	0,268723	0,813272	0,303516	0,847044	0,375745
3	0,715460	0,229033	0,720324	0,242184	0,735687	0,280375	0,771941	0,357421
4	0,624201	0,193939	0,629511	0,208850	0,646232	0,251279	0,685423	0,334240
5	0,602846	0,172246	0,608158	0,189064	0,624893	0,235495	0,664139	0,322954
6	0,611444	0,174329	0,616264	0,190452	0,631533	0,235754	0,667802	0,322463
7	0,533797	0,156322	0,538891	0,174105	0,555093	0,222884	0,593818	0,313392
8	0,460271	0,140983	0,466424	0,160773	0,485803	0,213157	0,531113	0,306954
9	0,401259	0,127359	0,408484	0,149110	0,431009	0,204779	0,482529	0,301398
10	0,329990	0,115529	0,338923	0,139236	0,366292	0,197898	0,426723	0,296890
11	0,233366	0,101154	0,245830	0,127332	0,282517	0,189693	0,357910	0,291518
12	0,159851	0,088990	0,173898	0,117352	0,218788	0,183082	0,308441	0,287282
TOTALE	0,120040	0,076767	0,141698	0,110031	0,198448	0,179281	0,296749	0,285088
$\gamma_{\bar{q}\bar{p}}$	0,070723		0,106109		0,176976		0,283657	

I valori dell'asimmetria sono decrescenti, per entrambe le imprese, nelle generazioni (figure: 3.6.15 e 3.6.16). L'effetto dimensionale inoltre porta a valori dell'indice di asimmetria minori per l'impresa AMASES rispetto a SIFA a parità di generazione (figure: 3.6.17, 3.6.18, 3.6.19 e 3.6.20).

Fig.3.6.15: Indice di asimmetria per generazione al variare di $\sigma_{\hat{q}}$ e $\sigma_{\hat{p}}$ per l'impresa SIFA

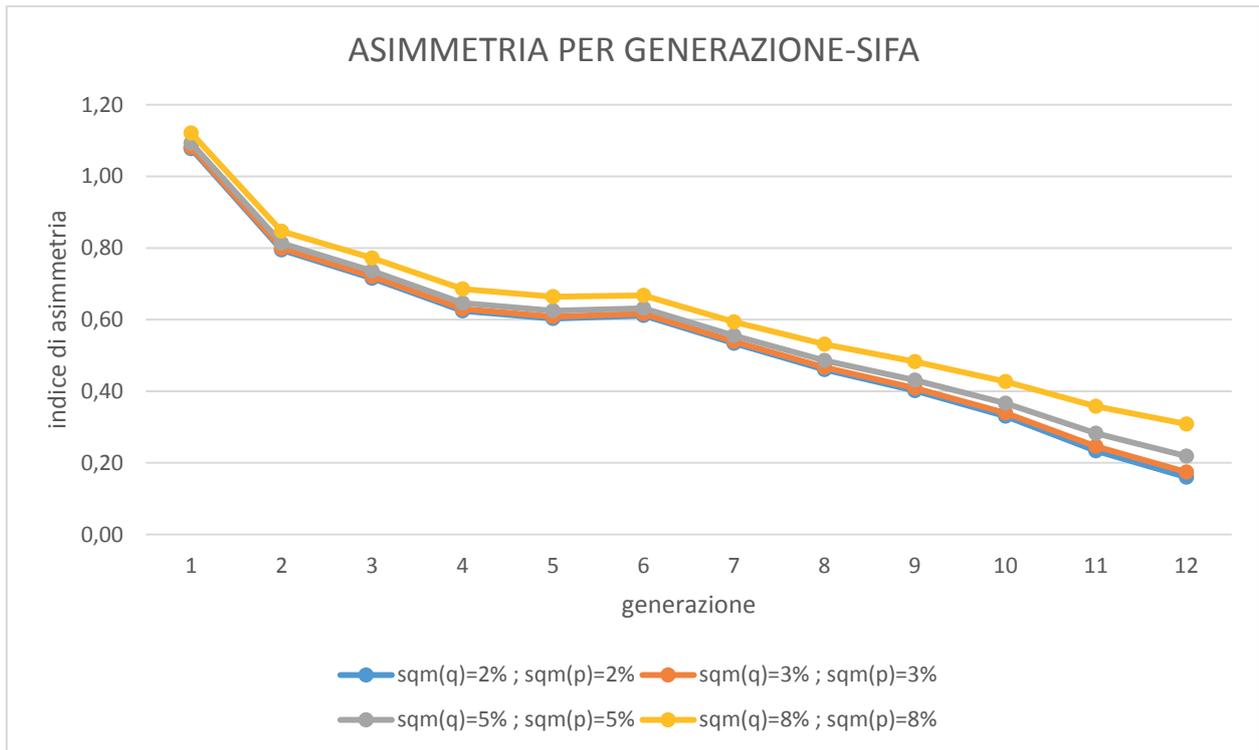


Fig.3.6.16: Indice di asimmetria per generazione al variare di $\sigma_{\hat{q}}$ e $\sigma_{\hat{p}}$ per l'impresa AMASES

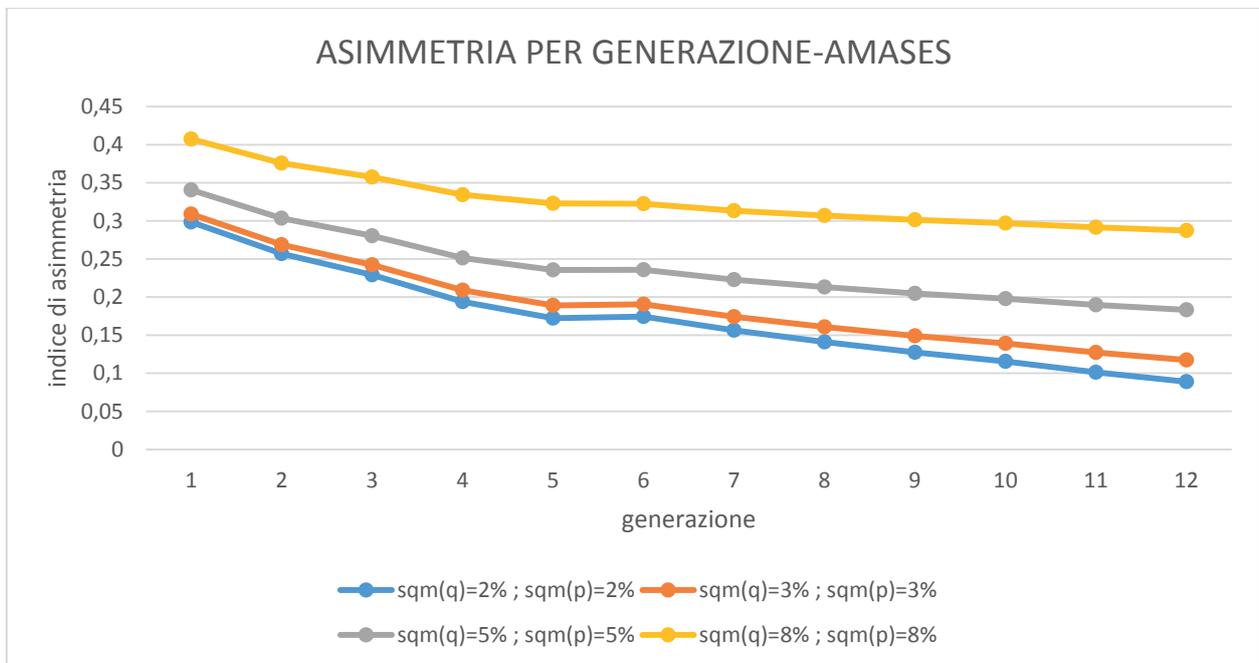


Fig.3.6.17: Indice di asimmetria per generazione delle imprese SIFA e AMASES posto $\sigma_{\dot{q}} = 2\%$; $\sigma_{\dot{p}} = 2\%$

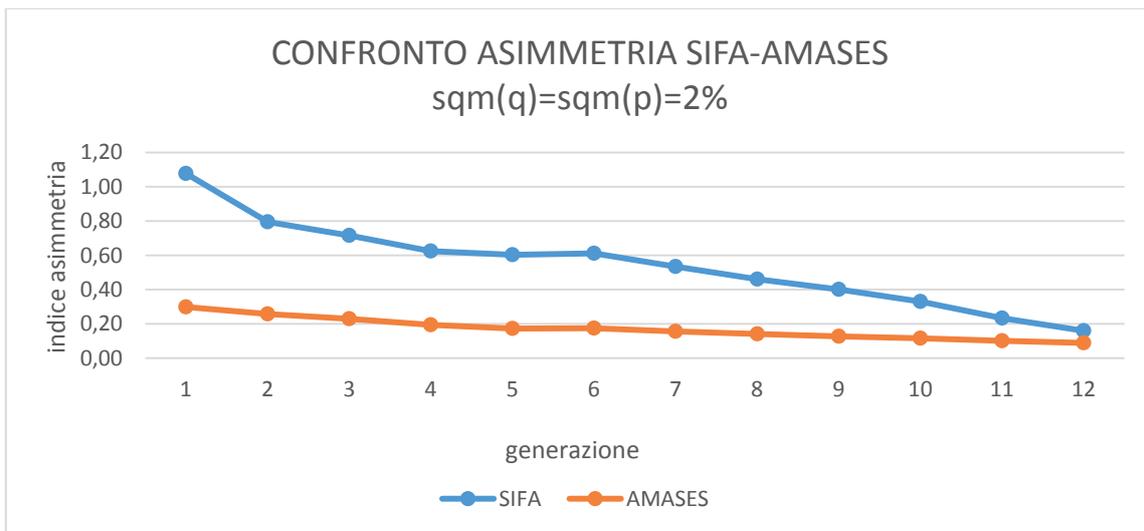


Fig.3.6.18: Indice di asimmetria per generazione delle imprese SIFA e AMASES posto $\sigma_{\dot{q}} = 3\%$; $\sigma_{\dot{p}} = 3\%$

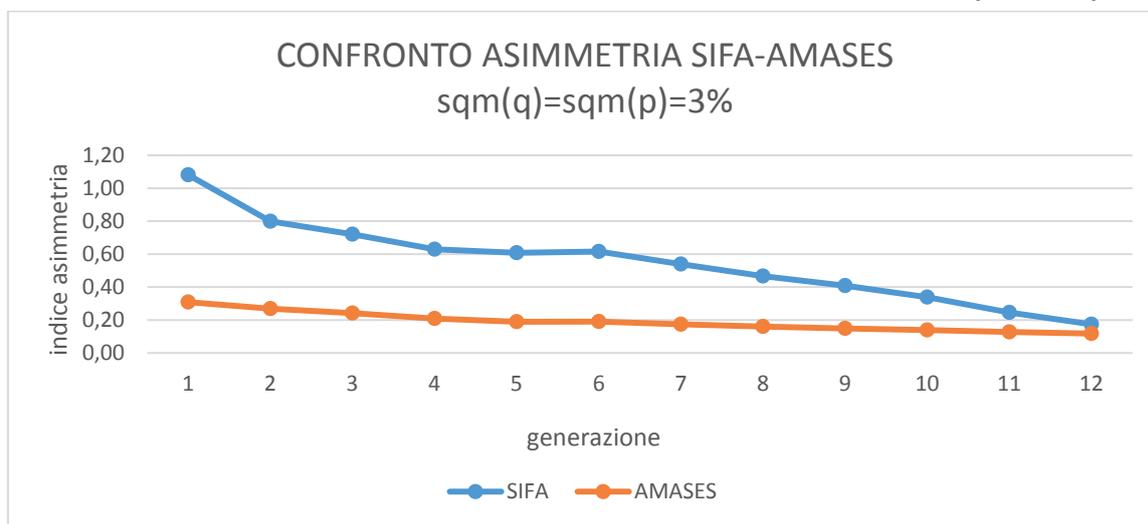


Fig.3.6.19: Indice di asimmetria per generazione delle imprese SIFA e AMASES posto $\sigma_{\dot{q}} = 5\%$; $\sigma_{\dot{p}} = 5\%$

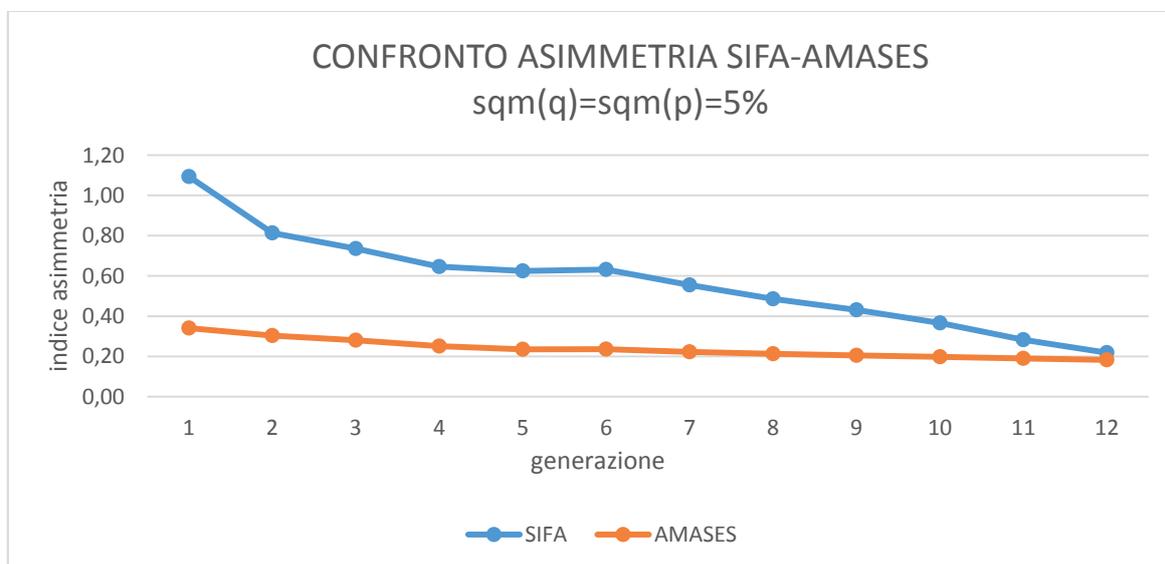
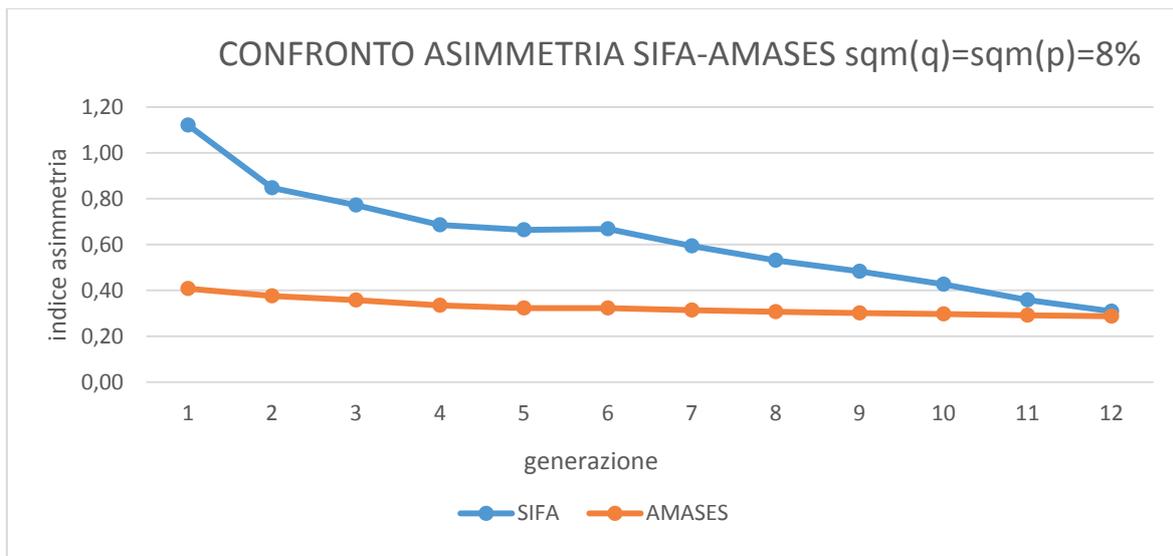


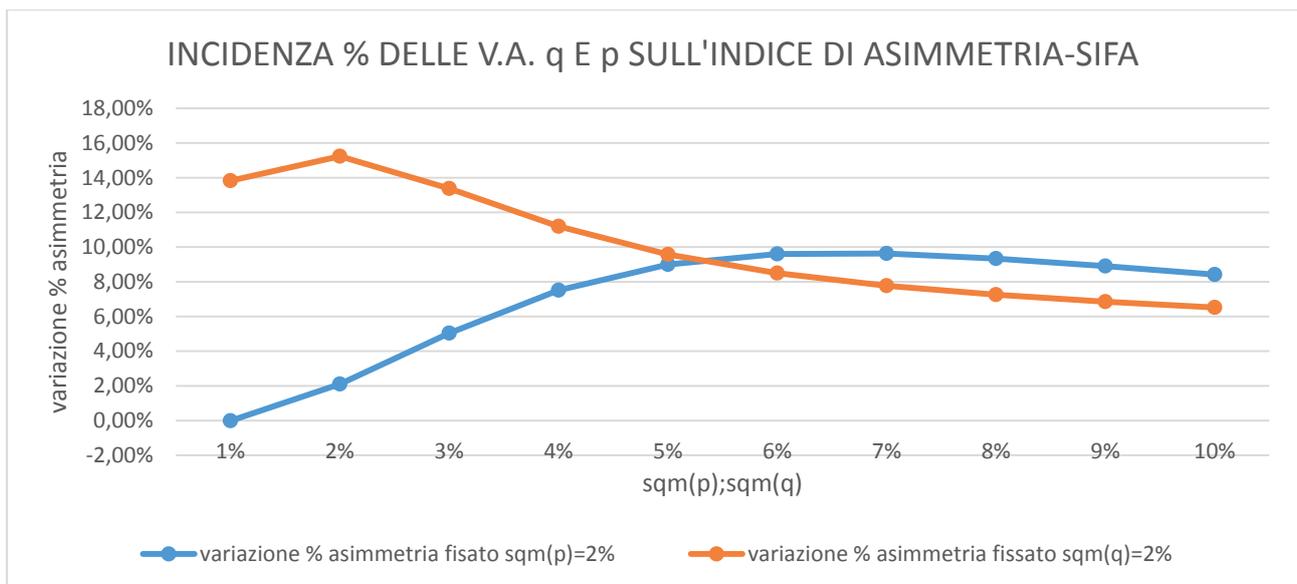
Fig.3.6.20: Indice di asimmetria per generazione delle imprese SIFA e AMASES posto $\sigma_{\tilde{q}} = 8\%$; $\sigma_{\tilde{p}} = 8\%$



Risultati analoghi valgono se si considera la riserva a livello complessivo; la maggiore dimensione del portafoglio determina valori dell'asimmetria, ancora una volta, più bassi per la compagnia AMASES.

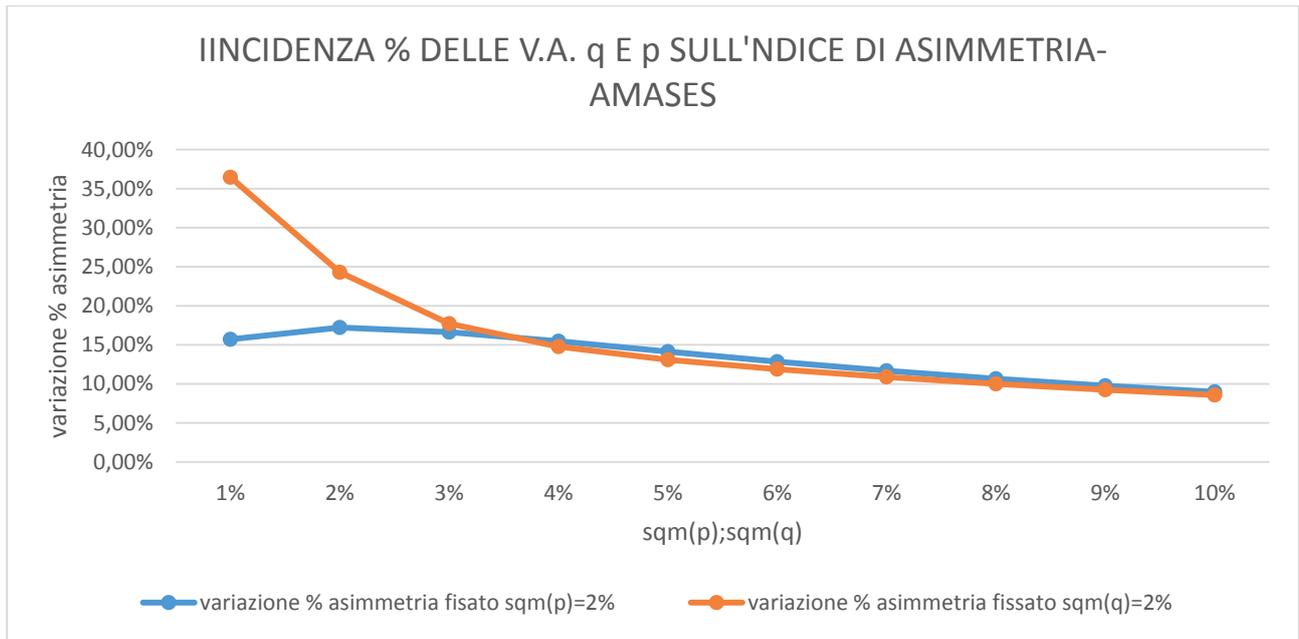
È interessante notare che, a livello di singola impresa, i due fattori di disturbo, al crescere delle loro variabilità, hanno un'incidenza diversa sull'indice di asimmetria. Considerando l'impresa SIFA si osserva un maggiore impatto del fattore \tilde{p} fino a valori dello scarto quadratico medio pari al 5%, successivamente la v.a. \tilde{q} diviene predominante (fig: 3.6.21).

Fig.3.6.21: Incidenza percentuale, per l'impresa SIFA, delle v.a. \tilde{q} e \tilde{p} sul coefficiente di variazione



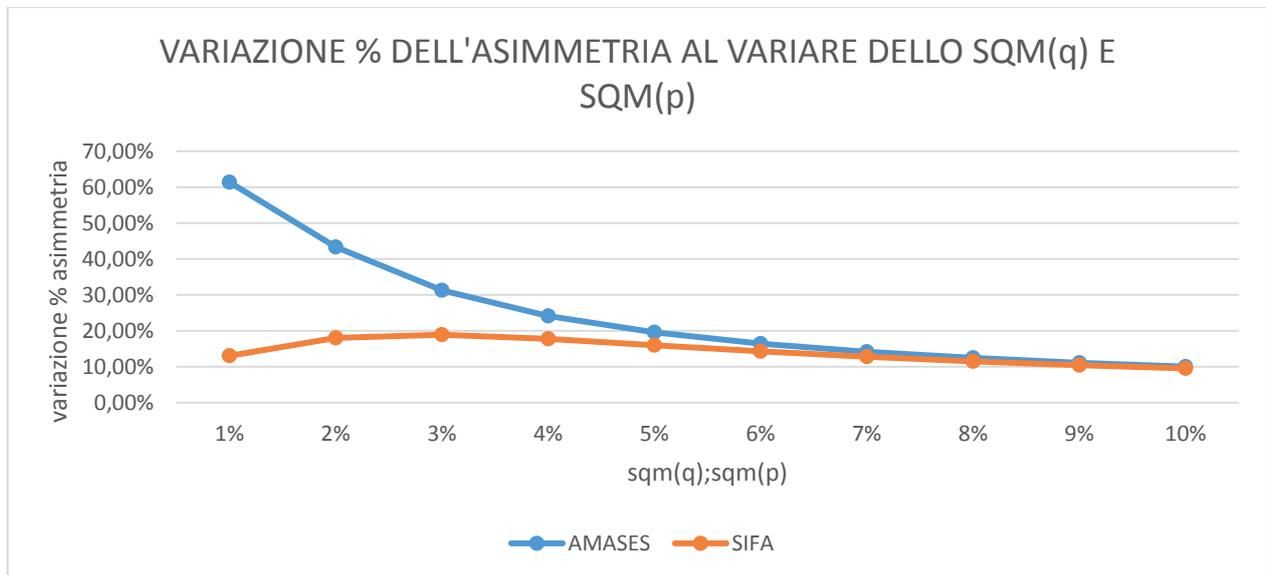
Si riscontrano dinamiche analoghe anche per l'impresa AMASES, tuttavia, in tale contesto il fattore di disturbo sul costo dei singoli sinistri risulta predominante fino a valori della *standard deviation* del 3,5% circa (fig: 3.6.22).

Fig.3.6.22: Incidenza percentuale, per l'impresa AMASES, delle v.a. \tilde{q} e \tilde{p} sul coefficiente di variazione



L'incidenza percentuale degli elementi sistematici non è tuttavia identica per le due imprese; l'impresa AMASES è, infatti, più sensibile ai fattori di disturbo (fig: 3.6.23).

Fig.3.6.23: Variazioni percentuali dell'indice di asimmetria, per le imprese SIFA e AMASES, al variare di $\sigma_{\tilde{q}}$ e $\sigma_{\tilde{p}}$



La riserva sinistri dell'impresa SIFA possiede un indice di asimmetria abbastanza distante dal valore asintotico pari a $\gamma_{\tilde{q}\tilde{p}}$; tale differenza diminuisce al crescere di $\sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}$, dunque all'aumentare della variabilità congiunta dei fattori di disturbo l'asimmetria tende ad essere sempre più influenzata dai fattori di disturbo stessi. La riserva sinistri della compagnia AMASES possiede, invece, grazie alla maggiore numerosità dei sinistri riservati, valori dell'asimmetria vicini a quelli asintotici; al crescere dei fattori di disturbo, inoltre, l'asimmetria è sempre più influenzata dai fattori di disturbo.

A differenza di quanto visto nel caso del CRM con il solo fattore di disturbo sul numero dei sinistri, in questo contesto l'asimmetria della riserva sinistri, per entrambe le imprese, assume sempre un andamento crescente anche per valori di $\sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}$ molto bassi.

I valori dell'indice di asimmetria nel caso in cui le variabilità di \tilde{q} e \tilde{p} abbiano comportamenti opposti sono riportati di seguito in figura 3.6.24.

Fig.3.6.24: Indice di asimmetria per singola generazione a livello aggregato di riserva al variare della *standard deviation* dei fattori di disturbo

ASIMMETRIA								
$\sigma_{\tilde{q}} ; \sigma_{\tilde{p}}$	2%;8%		3%;5%		5%;3%		8%;2%	
generazione	SIFA	AMASES	SIFA	AMASES	SIFA	AMASES	SIFA	AMASES
1	1,119442	0,394507	1,092475	0,337906	1,081536	0,311590	1,079082	0,312157
2	0,844771	0,358610	0,812728	0,300630	0,799587	0,271585	0,796911	0,273414
3	0,769328	0,335359	0,735076	0,276470	0,720946	0,246067	0,718205	0,250315
4	0,683289	0,302516	0,645846	0,245777	0,629902	0,213931	0,626363	0,221934
5	0,663132	0,283584	0,624903	0,227976	0,608135	0,196138	0,603644	0,207933
6	0,670129	0,282680	0,632642	0,228574	0,615083	0,196794	0,608205	0,207992
7	0,597150	0,265071	0,556871	0,213373	0,536951	0,182504	0,528504	0,197458
8	0,531168	0,250916	0,486809	0,201101	0,465263	0,171660	0,458368	0,190209
9	0,479398	0,237044	0,431298	0,189828	0,408046	0,162657	0,402652	0,184631
10	0,418462	0,224280	0,365505	0,179778	0,339568	0,155619	0,336603	0,180677
11	0,336622	0,206599	0,279333	0,166263	0,248719	0,148138	0,251699	0,177022
12	0,253412	0,190195	0,209020	0,153415	0,180000	0,143208	0,194477	0,175134
TOTALE	0,223438	0,180871	0,180545	0,145151	0,156921	0,140425	0,181245	0,174291
$\gamma_{\tilde{q}\tilde{p}}$	0,174143		0,139411		0,139411		0,174143	

Le dinamiche dell'asimmetria al variare delle generazioni sono analoghe a quanto visto poco sopra, tuttavia ora i valori dell'asimmetria a livello di generazioni e a livello aggregato di riserva si pongono tra i valori massimi e minimi di quelli mostrati in figura 3.6.14. È interessante notare, infine, considerando i due casi speculari dati da $\sigma_{\tilde{q}} = 2\%; \sigma_{\tilde{p}} = 8\%$, $\sigma_{\tilde{q}} = 8\%; \sigma_{\tilde{p}} = 2\%$ e da $\sigma_{\tilde{q}} = 3\%; \sigma_{\tilde{p}} = 5\%$, $\sigma_{\tilde{q}} = 5\%; \sigma_{\tilde{p}} = 3\%$, una maggiore incidenza della v.a. \tilde{p} rispetto alla v.a. \tilde{q} , riscontrabile, non solo per le prime generazioni, ma anche a livello totale di riserva.

L'ultima tabella che è presentata di seguito (fig: 3.6.25) permette di confrontare la variazione percentuale dell'asimmetria e del coefficiente di variazione delle due imprese oggetto di studio, considerando un *range* di valori della variabilità dei fattori di disturbo che varia dall'1% al 10%.

Fig.3.6.25: Variazioni percentuali del coefficiente di variazione e dell'indice di asimmetria, per le imprese SIFA e AMASES, al variare di $\sigma_{\tilde{q}}$ e $\sigma_{\tilde{p}}$

$\sigma_{\tilde{q}} ; \sigma_{\tilde{p}}$	SIFA		AMASES		$\Delta \% \sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}$
	$\Delta \% CV$	$\Delta \% asim.$	$\Delta \% CV$	$\Delta \% asim.$	
1%;1%	13,50%	13,07%	56,58%	61,37%	100,01%
2%;2%	17,18%	18,04%	40,97%	43,33%	50,02%
3%;3%	17,50%	18,94%	30,23%	31,26%	33,36%
4%;4%	16,39%	17,75%	23,61%	24,13%	25,03%
5%;5%	14,91%	16,00%	19,28%	19,58%	20,03%
6%;6%	13,45%	14,29%	16,26%	16,46%	16,70%
7%;7%	12,15%	12,79%	14,04%	14,19%	14,33%
8%;8%	11,02%	11,52%	12,35%	12,47%	12,55%
9%;9%	10,06%	10,45%	11,03%	11,12%	11,16%
10%;10%	9,23%	9,55%	9,96%	10,04%	10,06%

Le variazioni percentuali del coefficiente di variazione e dell'indice di asimmetria per entrambe le compagnie sono positive e dunque, come già osservato precedentemente, ciò implica che tali grandezze sono crescenti nei valori di $\sigma_{\tilde{q}}$ e $\sigma_{\tilde{p}}$.

Con riferimento all'asimmetria le crescite dei fattori di disturbo hanno effetti inizialmente più marcati sull'impresa di elevate dimensioni, tuttavia, al crescere della variabilità di \tilde{q} e \tilde{p} l'asimmetria delle due imprese tende ad avere variazioni analoghe e sempre più prossime a quelle assunte da $\sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}$.

Considerazioni analoghe valgono per il coefficiente di variazione; anche in tale circostanza si ha un effetto più evidente sull'impresa AMASES al crescere di $\sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}$. Al crescere della variabilità dei fattori di disturbo inoltre i coefficienti di variazione tendono a crescere nella stessa proporzione di $\sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}$.

Dalla tabella appena mostrata e dai grafici seguenti (figure: 3.6.26 e 3.6.27) è possibile infine studiare l'impatto dei fattori di disturbo, al variare delle *standard deviation*, sul coefficiente di variazione e asimmetria della singola impresa di assicurazione.

Per entrambe le imprese si riscontra un effetto di \tilde{q} e \tilde{p} più marcato sull'indice di asimmetria; quest'ultimo infatti cresce percentualmente in modo maggiormente rispetto al coefficiente di variazione. Per valori elevati dello scarto quadratico medio del fattore di disturbo, tuttavia, la crescita percentuale dell'asimmetria e del coefficiente di variazione si allinea su valori comuni e pari agli incrementi percentuali di $\sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}$.

Fig.3.6.26: Grafico delle variazioni percentuali del coefficiente di variazione e indice di asimmetria dell'impresa SIFA al variare di $\sigma_{\bar{q}}$ e $\sigma_{\bar{p}}$

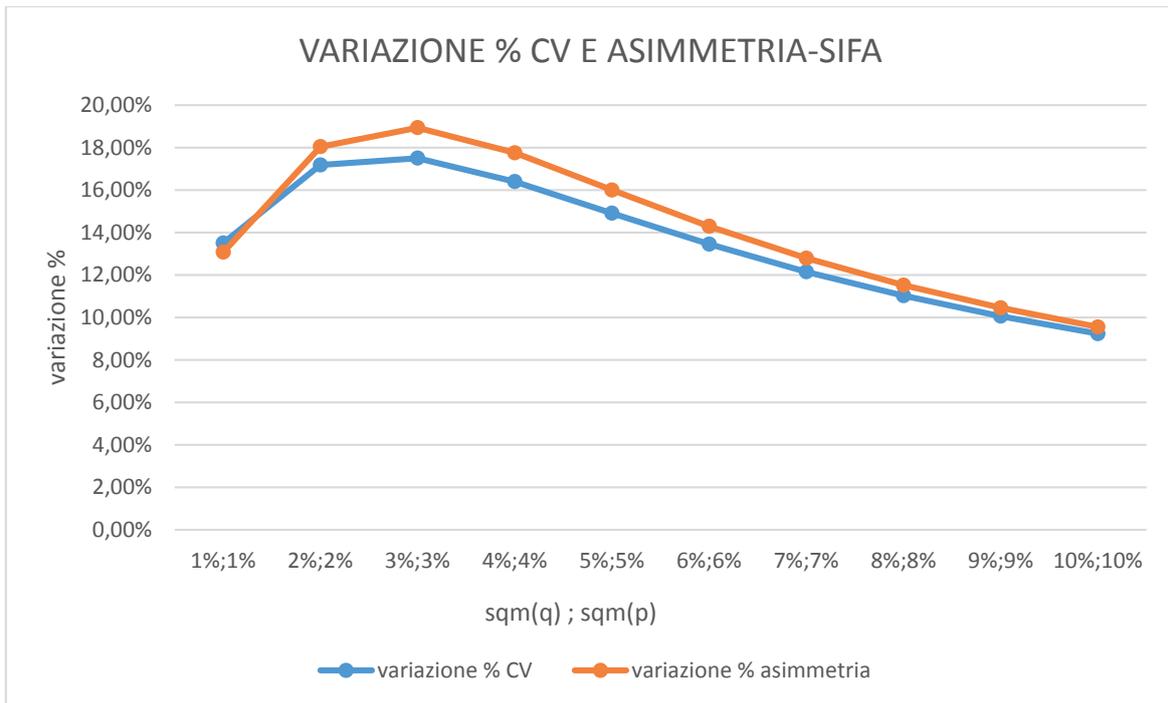
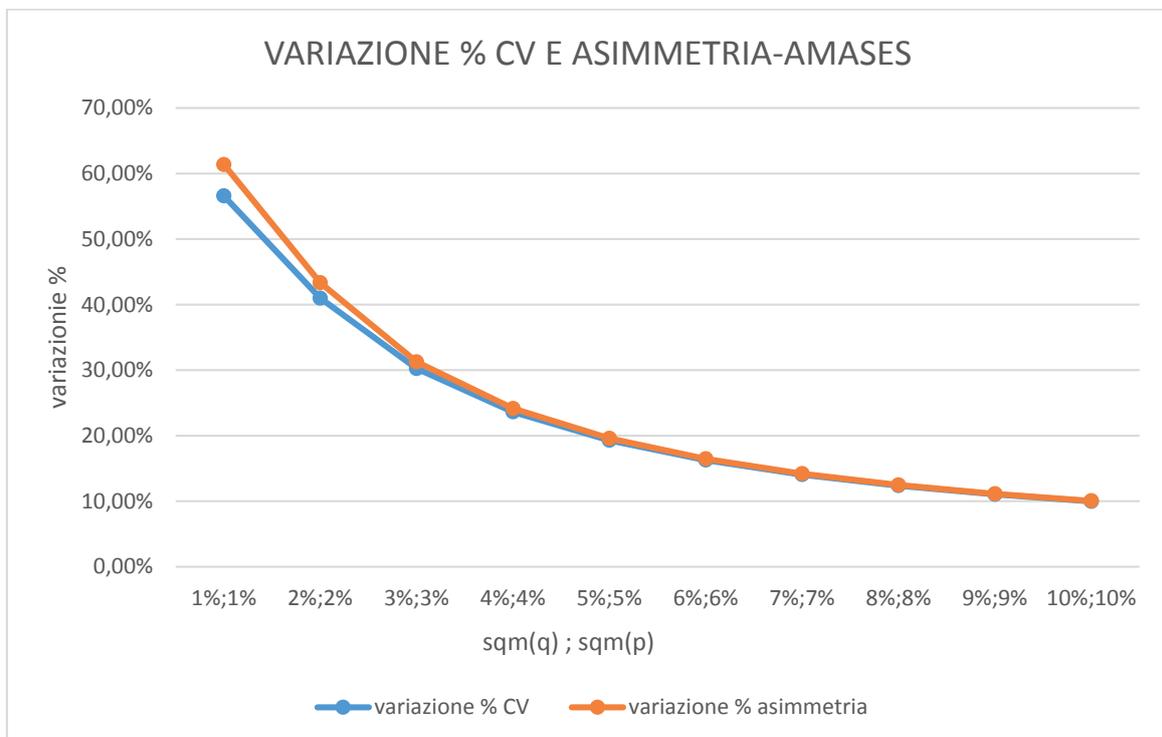


Fig.3.6.27: Grafico delle variazioni percentuali del coefficiente di variazione e indice di asimmetria dell'impresa AMASES al variare di $\sigma_{\bar{q}}$ e $\sigma_{\bar{p}}$



CAPITOLO 4

L'effetto dei fattori di disturbo sulla riserva sinistri e l'approccio simulativo per la valutazione del *reserve risk*

4.1 Il diverso effetto dei fattori di disturbo sulla riserva sinistri

I risultati analitici elaborati nel capitolo precedente mostrano che le caratteristiche della riserva sinistri, ad esclusione del valore atteso, variano in funzione della tipologia ed intensità dei fattori di disturbo considerati. La presenza di un solo fattore di disturbo, sul numero dei sinistri o sulle rispettive *severity*, determina comportamenti dello scarto quadratico medio, del coefficiente di variazione e dell'indice di asimmetria differenti. La presenza di entrambi i fattori di disturbo, infine, espone i cumulanti della riserva sinistri a dinamiche ancora differenti.

L'obiettivo del presente paragrafo consiste nel confrontare le principali caratteristiche sensibili ai fattori di disturbo, date dal coefficiente di variazione e dall'indice di asimmetria, della riserva sinistri al variare del processo stocastico considerato per descriverla.

COEFFICIENTE DI VARIAZIONE

I casi studio elaborati nel capitolo 3 mostrano valori del coefficiente di variazione della riserva sinistri, per le imprese SIFA e AMASES, pressoché identici, a parità di $\sigma_{\tilde{q}}$ e $\sigma_{\tilde{p}}$, nel caso in cui sia presente il solo fattore di disturbo \tilde{q} o \tilde{p} (fig:4.1.1).

Fig.4.1.1: Coefficienti di variazione delle riserve sinistri descritte dalle v.a. ${}^n\tilde{R}$ e ${}^C\tilde{R}$ per le imprese SIFA e AMASES al variare delle *standard deviation* dei fattori di disturbo.

COEFFICIENTE DI VARIAZIONE								
sqm	2%		3%		5%		8%	
	$\sigma_{\tilde{q}}$	$\sigma_{\tilde{p}}$	$\sigma_{\tilde{q}}$	$\sigma_{\tilde{p}}$	$\sigma_{\tilde{q}}$	$\sigma_{\tilde{p}}$	$\sigma_{\tilde{q}}$	$\sigma_{\tilde{p}}$
SIFA	4,78%	4,78%	5,28%	5,28%	6,62%	6,62%	9,10%	9,11%
AMASES	2,48%	2,48%	3,34%	3,34%	5,21%	5,21%	8,13%	8,13%

I valori riportati in tabella, espressi fino alla seconda cifra decimale, non permettono di cogliere le differenze della variabilità relativa della riserva sinistri nel caso in cui questa sia descritta da un processo di Poisson composto misturato o da un processo di Poisson composto semplice con fattore di disturbo applicato alle *severity*. La scelta di un unico fattore di disturbo applicato al processo generatore del numero dei sinistri o applicato al costo dei singoli sinistri non comporta, quindi,

apprezzabili differenze in termini di variabilità relativa; le v.a. \tilde{q} e \tilde{p} hanno la medesima incidenza sul coefficiente di variazione della riserva sinistri, incrementandone in egual misura la variabilità relativa al crescere delle rispettive *standard deviation*. La motivazione di tale risultato può essere compresa dall'analisi delle formule 3.4.5 e 3.5.11 che descrivono il coefficiente di variazione della riserva sinistri rispettivamente nel caso in cui sia presente il solo fattore di disturbo sul numero dei sinistri:

$$CV({}^n\tilde{R}) = \frac{\sqrt{\sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}}}}{\left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^2} + \sigma_{\tilde{q}}^2 \quad (3.4.5)$$

e nella circostanza in cui sia presente il solo fattore \tilde{p} applicato al costo dei singoli sinistri:

$$CV({}^c\tilde{R}) = \frac{\sqrt{E(\tilde{p}^2) \sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}}}}{\left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^2} + \sigma_{\tilde{p}}^2. \quad (3.5.11)$$

L'unico elemento che, a parità di *standard deviation* dei fattori di disturbo, differenzia le due formule è costituito dalla media quadratica della v.a. \tilde{p} . Il termine $E(\tilde{p}^2)$ risulta essere sempre maggiore di uno; nei casi studio presi in esame tuttavia la media quadratica del fattore \tilde{p} , descritto da una v.a. Gamma a parametri uguali, è prossima all'unità e quindi non è in grado di incrementare in modo significativo il numeratore del coefficiente di variazione della riserva sinistri.

Le seguenti tabelle e i rispettivi grafici (figure: 4.1.2, 4.1.3, 4.1.4 e 4.1.5) permettono di confrontare le variazioni percentuali del coefficiente di variazione delle due imprese in esame, considerando un *range* di valori per $\sigma_{\tilde{q}}$ e $\sigma_{\tilde{p}}$ che varia dall'1% al 10%. Gli incrementi percentuali della variabilità relativa sono ottenuti come rapporto tra due termini: il numeratore è pari alla differenza tra il coefficiente di variazione della riserva calcolato a seguito dell'incremento di un punto percentuale della *standard deviation* del fattore di disturbo e il coefficiente di variazione considerando lo scarto quadratico medio del fattore sistematico non incrementato, il denominatore, invece, è pari al valore della variabilità relativa della riserva calcolata nella circostanza in cui $\sigma_{\tilde{q}}$ o $\sigma_{\tilde{p}}$ non siano maggiorati di un punto percentuale. Le variazioni percentuali del coefficiente di variazione della riserva sinistri permettono, quindi, di conoscere l'incremento della variabilità relativa a seguito di una maggiore volatilità dei fattori sistematici. Considerando una singola impresa, a parità di valori dello scarto quadratico medio di \tilde{q} e \tilde{p} , si riscontrano variazioni percentuali quasi identiche della variabilità relativa.

Fig.4.1.2: Variazione percentuale del coefficiente di variazione dell'impresa SIFA al variare delle *standard deviation* dei fattori di disturbo.

SIFA			
$\sigma_{\bar{q}}$	$\Delta \% CV$	$\sigma_{\bar{p}}$	$\Delta \% CV$
1%	7,30%	1%	7,31%
2%	10,41%	2%	10,42%
3%	11,87%	3%	11,88%
4%	12,18%	4%	12,19%
5%	11,85%	5%	11,85%
6%	11,22%	6%	11,23%
7%	10,50%	7%	10,51%
8%	9,78%	8%	9,79%
9%	9,10%	9%	9,10%
10%	8,48%	10%	8,48%

Fig.4.1.3: Variazione percentuale del coefficiente di variazione dell'impresa AMASES al variare delle *standard deviation* dei fattori di disturbo.

AMASES			
$\sigma_{\bar{q}}$	$\Delta \% CV$	$\sigma_{\bar{p}}$	$\Delta \% CV$
1%	39,90%	1%	39,90%
2%	34,72%	2%	34,73%
3%	27,62%	3%	27,62%
4%	22,32%	4%	22,32%
5%	18,55%	5%	18,55%
6%	15,80%	6%	15,80%
7%	13,73%	7%	13,73%
8%	12,12%	8%	12,12%
9%	10,84%	9%	10,84%
10%	9,80%	10%	9,80%

Fig.4.1.4: Grafico della variazione percentuale del coefficiente di variazione dell'impresa SIFA al variare delle *standard deviation* dei fattori di disturbo.

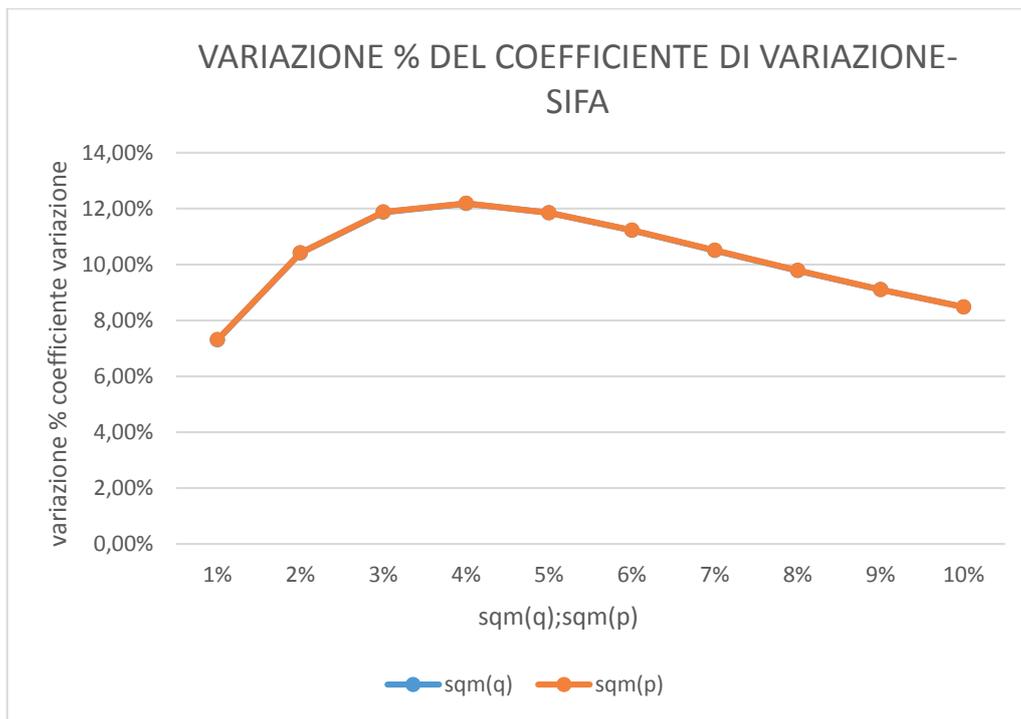
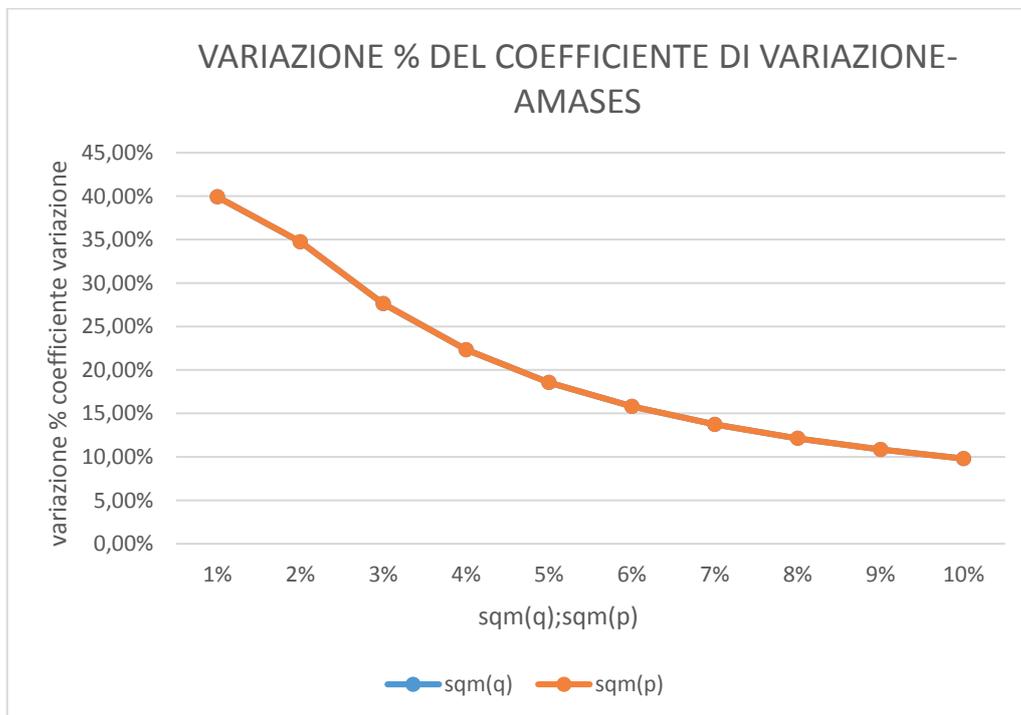


Fig.4.1.5: Grafico della variazione percentuale del coefficiente di variazione dell'impresa AMASES al variare delle *standard deviation* dei fattori di disturbo.



I processi stocastici precedentemente considerati, caratterizzati dalla presenza di un solo fattore di disturbo, non sono completamente confrontabili, per la presenza simultanea di due fattori sistematici, con la riserva sinistri descritta da un processo di Poisson composto misturato con fattore di disturbo applicato alle *severity*. In tale circostanza la riserva sinistri possiede una variabilità

relativa maggiore rispetto alle casistiche precedenti. Il coefficiente di variazione in tale contesto è descritto dalla formula 3.6.11:

$$CV(\tilde{R}) = \sqrt{\frac{E(\tilde{p}^2) \sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,z_{i,j}}}{\left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j}\right)^2} + \sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}^2} \quad (3.6.11)$$

in cui l'elemento fondamentale che ne determina la crescita, al crescere delle *standard deviation* di \tilde{q} e \tilde{p} , risulta essere $\sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}$.

Nella tabella di figura 4.1.6 sono riportati i valori del coefficiente di variazione, ricavati nel capitolo precedente, relativi alla riserva sinistri, delle due imprese in esame, descritta da un processo stocastico con doppio fattore di disturbo.

Fig.4.1.6: Coefficienti di variazione delle riserve sinistri descritte dalla v.a. \tilde{R} per le imprese SIFA e AMASES al variare delle *standard deviation* dei fattori di disturbo.

COEFFICIENTE DI VARIAZIONE				
$\sigma_{\tilde{q}}; \sigma_{\tilde{p}}$	2%;2%	3%;3%	5%;5%	8%;8%
SIFA	5,18%	6,07%	8,30%	12,14%
AMASES	3,18%	4,49%	7,23%	11,43%

I grafici di figura 4.1.7 e 4.1.8 permettono, infine, di confrontare i valori della variabilità relativa nel caso in cui sia presente la sola v.a. \tilde{q} , \tilde{p} o entrambe.

Fig.4.1.7: Confronto tra i coefficienti di variazione della riserva sinistri, in funzione del processo stocastico considerato, per l'impresa SIFA al variare delle *standard deviation* dei fattori di disturbo.

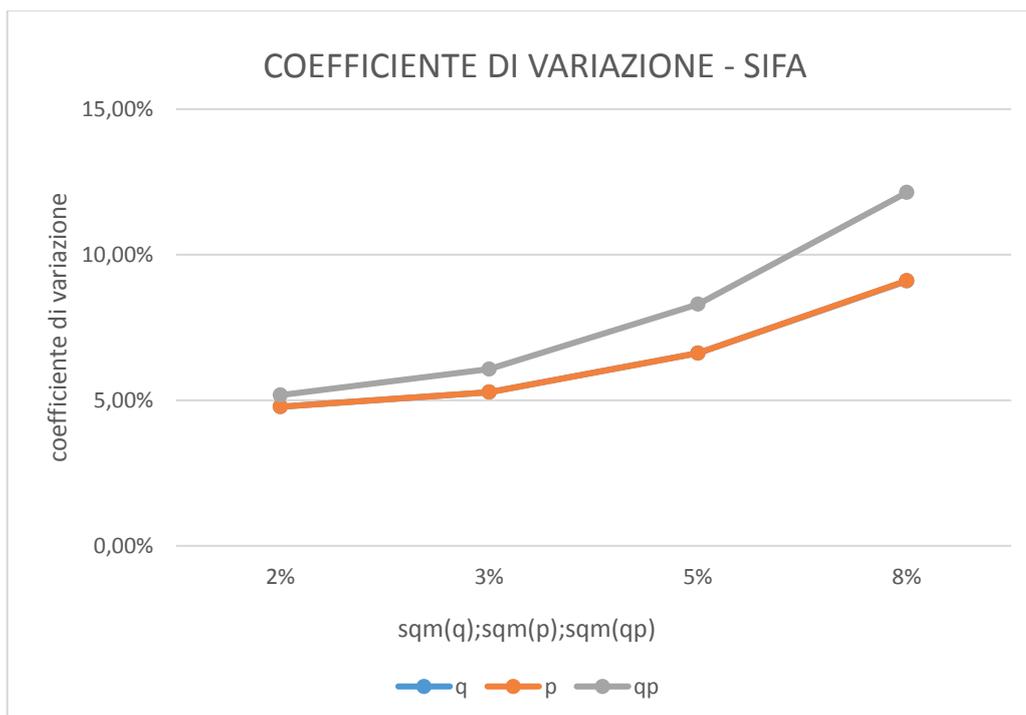
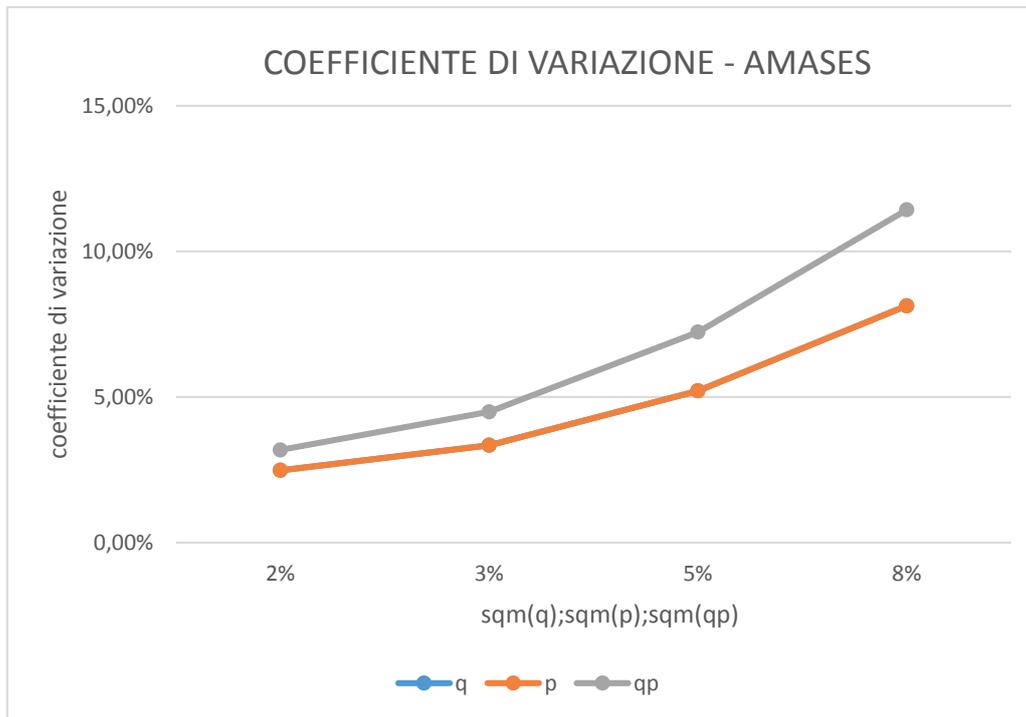


Fig.4.1.8: Confronto tra i coefficienti di variazione della riserva sinistri, in funzione del processo stocastico considerato, per l'impresa AMASES al variare delle *standard deviation* dei fattori di disturbo.



Le seguenti tabelle e i relativi grafici (figure: 4.1.9, 4.1.10, 4.1.11 e 4.1.12) permettono di confrontare le variazioni percentuali del coefficiente di variazione delle imprese SIFA e AMASES, considerando un *range* di valori per $\sigma_{\tilde{q}}$ e $\sigma_{\tilde{p}}$ che varia dall'1% al 10%, nel caso in cui sia presente il solo fattore di disturbo \tilde{q} , \tilde{p} o entrambi. In quest'ultima circostanza gli incrementi della variabilità relativa della riserva sinistri risultano essere inizialmente, cioè per valori di $\sigma_{\tilde{q}}$ e $\sigma_{\tilde{p}}$ contenuti, molto consistenti; al crescere della variabilità dei due fattori di disturbo, invece, il coefficiente di variazione crescere nella stessa proporzione del caso in cui sia presente un solo fattore di disturbo.

Fig.4.1.9: Variazione percentuale del coefficiente di variazione dell'impresa SIFA al variare delle *standard deviation* dei fattori di disturbo.

SIFA					
$\sigma_{\tilde{q}}$	$\Delta \% CV$	$\sigma_{\tilde{p}}$	$\Delta \% CV$	$\sigma_{\tilde{q}}; \sigma_{\tilde{p}}$	$\Delta \% CV$
1%	7,30%	1%	7,31%	1%;1%	13,50%
2%	10,41%	2%	10,42%	2%;2%	17,18%
3%	11,87%	3%	11,88%	3%;3%	17,50%
4%	12,18%	4%	12,19%	4%;4%	16,39%
5%	11,85%	5%	11,85%	5%;5%	14,91%
6%	11,22%	6%	11,23%	6%;6%	13,45%
7%	10,50%	7%	10,51%	7%;7%	12,15%
8%	9,78%	8%	9,79%	8%;8%	11,02%
9%	9,10%	9%	9,10%	9%;9%	10,06%
10%	8,48%	10%	8,48%	10%;10%	9,23%

Fig.4.1.10: Grafico della variazione percentuale del coefficiente di variazione dell'impresa SIFA al variare delle *standard deviation* dei fattori di disturbo.

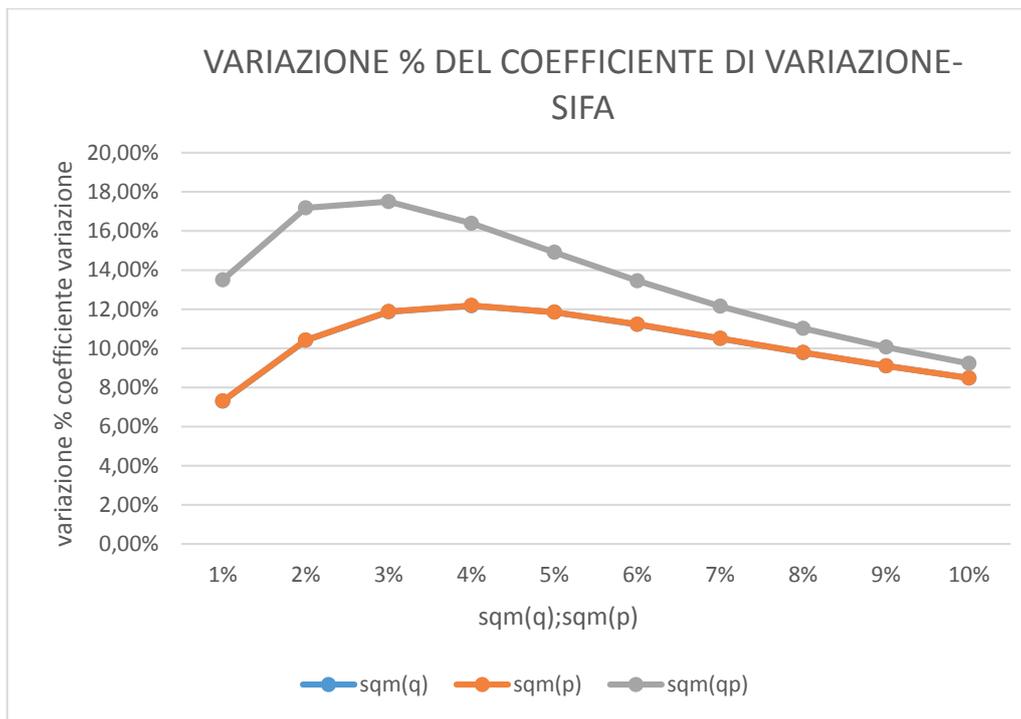
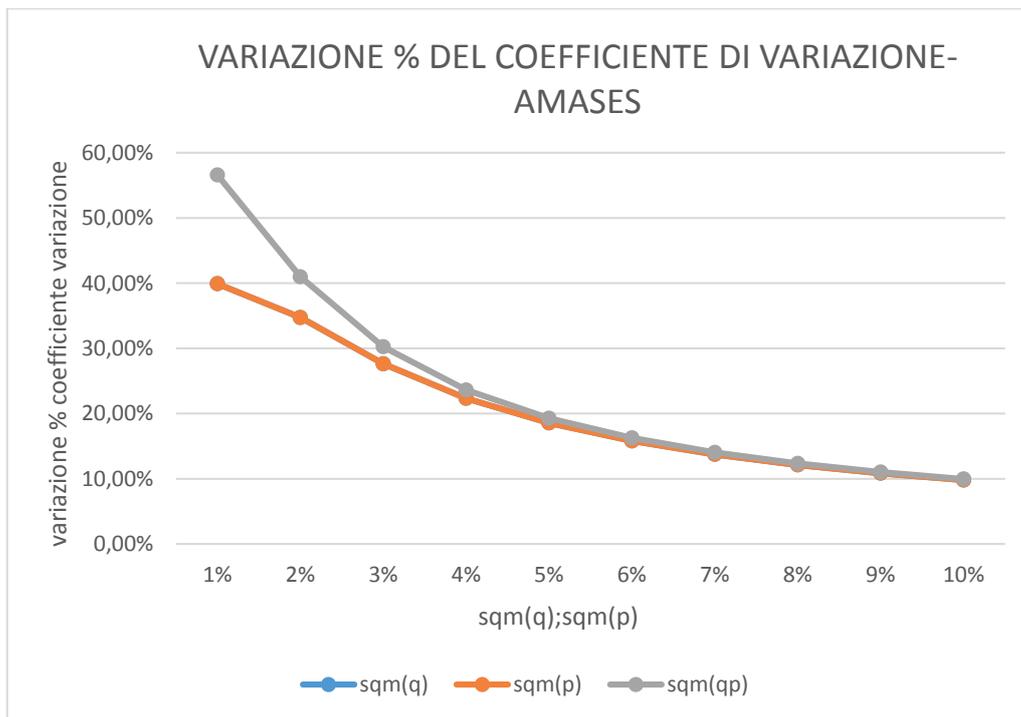


Fig.4.1.11: Variazione percentuale del coefficiente di variazione dell'impresa AMASES al variare delle *standard deviation* dei fattori di disturbo.

AMASES					
$\sigma_{\bar{q}}$	$\Delta \% CV$	$\sigma_{\bar{p}}$	$\Delta \% CV$	$\sigma_{\bar{q}}; \sigma_{\bar{p}}$	$\Delta \% CV$
1%	39,90%	1%	39,90%	1%;1%	56,58%
2%	34,72%	2%	34,73%	2%;2%	40,97%
3%	27,62%	3%	27,62%	3%;3%	30,23%
4%	22,32%	4%	22,32%	4%;4%	23,61%
5%	18,55%	5%	18,55%	5%;5%	19,28%
6%	15,80%	6%	15,80%	6%;6%	16,26%
7%	13,73%	7%	13,73%	7%;7%	14,04%
8%	12,12%	8%	12,12%	8%;8%	12,35%
9%	10,84%	9%	10,84%	9%;9%	11,03%
10%	9,80%	10%	9,80%	10%;10%	9,96%

Fig.4.1.12: Grafico della variazione percentuale del coefficiente di variazione dell'impresa AMASES al variare delle *standard deviation* dei fattori di disturbo.



ASIMMETRIA

Diversamente da quanto osservato per la variabilità relativa, l'indice di asimmetria è notevolmente differente nei casi in cui sia presente il solo fattore di disturbo \tilde{q} o il solo fattore \tilde{p} (fig: 4.1.13):

Fig.4.1.13: Indici di asimmetria delle riserve sinistri descritte dalle v.a. ${}^n\tilde{R}$ e ${}^c\tilde{R}$ per le imprese SIFA e AMASES al variare delle *standard deviation* dei fattori di disturbo.

ASIMMETRIA								
sqm	2%		3%		5%		8%	
	$\sigma_{\tilde{q}}$	$\sigma_{\tilde{p}}$	$\sigma_{\tilde{q}}$	$\sigma_{\tilde{p}}$	$\sigma_{\tilde{q}}$	$\sigma_{\tilde{p}}$	$\sigma_{\tilde{q}}$	$\sigma_{\tilde{p}}$
SIFA	0,100	0,120	0,102	0,137	0,120	0,169	0,168	0,216
AMASES	0,045	0,062	0,062	0,078	0,101	0,112	0,160	0,168

I valori riportati nella tabella precedente evidenziano un indice di asimmetria più elevato nel caso in cui sia presente il fattore di disturbo sulle *severity* rispetto alla circostanza in cui sia presente il solo fattore di disturbo sulle v.a. che descrivono il numero dei sinistri riservati; la v.a. \tilde{p} , inoltre, determina un incremento dell'asimmetria più marcato sull'impresa di minori dimensioni. Il fattore di disturbo \tilde{p} è, quindi, una componente sistematica applicata alla riserva sinistri che non introduce maggiore variabilità relativa rispetto a quanto apportato dal fattore \tilde{q} , ma solo ulteriore asimmetria. Tale aspetto può essere compreso analizzando le formule dell'indice di asimmetria nel caso in cui la riserva sinistri sia descritta da un processo di Poisson composto misturato e da un processo di Poisson composto semplice con fattore di disturbo applicato alle *severity* (formule: 3.4.8 e 3.5.18):

$$\gamma({}^n\tilde{R}) = \frac{\gamma_{\tilde{q}}\sigma_{\tilde{q}}^3\left(\sum_i\sum_j n_{i,j}m_{i,j}\right)^3 + 3\left(\sum_i\sum_j n_{i,j}m_{i,j}\right)\left(\sum_i\sum_j n_{i,j}a_{2,z_{i,j}}\right)\sigma_{\tilde{q}}^2 + \sum_i\sum_j n_{i,j}a_{3,z_{i,j}}}{\left[\sum_i\sum_j n_{i,j}a_{2,z_{i,j}} + \sigma_{\tilde{q}}^2\left(\sum_i\sum_j n_{i,j}m_{i,j}\right)\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (3.4.8)$$

$$\gamma({}^c\tilde{R}) = \frac{\gamma_{\tilde{p}}\sigma_{\tilde{p}}^3\left(\sum_i\sum_j n_{i,j}m_{i,j}\right)^3 + 3\left(\sum_i\sum_j n_{i,j}m_{i,j}\right)\left(\sum_i\sum_j n_{i,j}a_{2,z_{i,j}}\right)\left[E(\tilde{p}^3) - E(\tilde{p}^2)\right] + E(\tilde{p}^3)\sum_i\sum_j n_{i,j}a_{3,z_{i,j}}}{\left[\sigma_{\tilde{p}}^2\left(\sum_i\sum_j n_{i,j}m_{i,j}\right)^2 + E(\tilde{p}^2)\sum_i\sum_j n_{i,j}a_{2,z_{i,j}}\right]^{\frac{3}{2}}}$$

(3.5.18)

Gli elementi che determinano una maggiore asimmetria nel caso in cui sia presente la v.a. \tilde{p} rispetto alla circostanza in cui sia presente il solo fattore di disturbo sul numero dei sinistri sono la media cubica di \tilde{p} , sempre maggiore dell'unità, e il fattore pari alla differenza tra media cubica e quadratica della v.a. \tilde{p} , il quale, a parità di $\sigma_{\tilde{q}}$ e $\sigma_{\tilde{p}}$, è sempre maggiore dello scarto quadratico medio della v.a. \tilde{q} .

Le tabelle seguenti (figure: 4.1.14, 4.1.15) permettono di confrontare le variazioni percentuali dell'indice di asimmetria delle imprese in esame, considerando un *range* di valori per $\sigma_{\tilde{q}}$ e $\sigma_{\tilde{p}}$ che varia dall'1% al 10%.

Fig.4.1.14: Variazione percentuale dell'indice di asimmetria dell'impresa SIFA al variare delle *standard deviation* dei fattori di disturbo.

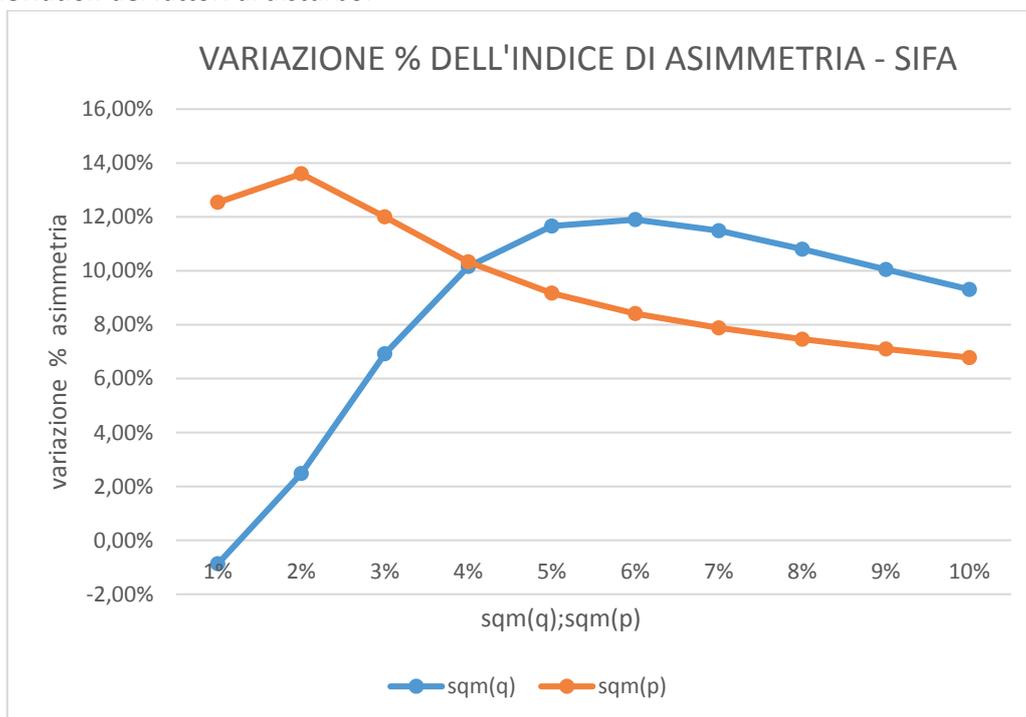
SIFA			
$\sigma_{\tilde{q}}$	Δ % asim.	$\sigma_{\tilde{p}}$	Δ % asim.
1%	-0,87%	1%	12,54%
2%	2,48%	2%	13,60%
3%	6,92%	3%	12,00%
4%	10,16%	4%	10,33%
5%	11,66%	5%	9,17%
6%	11,90%	6%	8,41%
7%	11,49%	7%	7,88%
8%	10,80%	8%	7,46%
9%	10,05%	9%	7,10%
10%	9,31%	10%	6,78%

Fig.4.1.15: Variazione percentuale dell'indice di asimmetria dell'impresa AMASES al variare delle *standard deviation* dei fattori di disturbo.

AMASES			
$\sigma_{\tilde{q}}$	Δ % asim.	$\sigma_{\tilde{p}}$	Δ % asim.
1%	30,22%	1%	34,20%
2%	37,77%	2%	25,31%
3%	30,55%	3%	21,55%
4%	24,16%	4%	18,70%
5%	19,69%	5%	16,32%
6%	16,53%	6%	14,36%
7%	14,22%	7%	12,75%
8%	12,46%	8%	11,44%
9%	11,09%	9%	10,34%
10%	9,99%	10%	9,43%

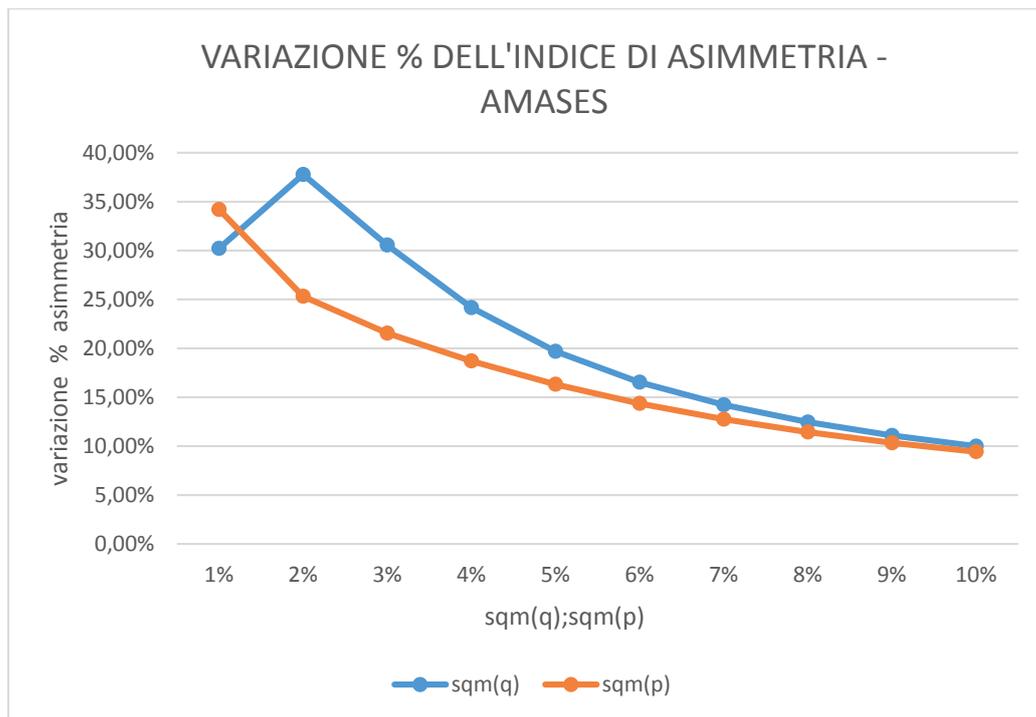
Con riferimento all'indice di asimmetria dell'impresa di minori dimensioni, cioè SIFA, l'effetto della v.a. \tilde{p} è inizialmente, per valori di $\sigma_{\tilde{p}}$ compresi tra l'1% e il 4%, più marcato in termini percentuali rispetto all'incremento di asimmetria apportato dal fattore \tilde{q} . Si osserva, invece, una situazione speculare per valori della *standard deviation* dei fattori di disturbo maggiore del 5% (fig: 4.1.16).

Fig.4.1.16: Grafico della variazione percentuale dell'indice di asimmetria dell'impresa SIFA al variare delle *standard deviation* dei fattori di disturbo.



Considerando, invece, l'impresa di maggiori dimensioni, AMASES, si riscontra, al crescere dello scarto quadratico medio dei fattori di disturbo, una maggiore incidenza percentuale sull'asimmetria della riserva sinistri della v.a. \tilde{q} rispetto al fattore \tilde{p} (fig: 4.1.17).

Fig.4.1.17: Grafico della variazione percentuale dell'indice di asimmetria dell'impresa AMASES al variare delle *standard deviation* dei fattori di disturbo.



A differenza di quanto osservato per il coefficiente di variazione, i fattori di disturbo introducono differente asimmetria e, inoltre, hanno incidenze percentuali differenti al variare del parametro dimensionale dell'impresa.

Quando la riserva sinistri è modellizzata da un processo di Poisson composto misturato con fattore di disturbo sulle *severity*, l'indice di asimmetria è definito dalla formula 3.6.17:

$$\gamma(\tilde{R}) = \frac{\left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^3 \sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}^3 \gamma_{\tilde{q}\tilde{p}} + 3 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right) \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \right) \left[E(\tilde{p}^3) E(\tilde{q}^2) - E(\tilde{p}^2) \right] + E(\tilde{p}^3) \sum_i \sum_j n_{i,j} a_{3,Z_{i,j}}}{\left[\sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}^2 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^2 + (\sigma_{\tilde{p}}^2 + 1) \sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \right]^{\frac{3}{2}}} \quad (3.6.17)$$

In tale contesto l'asimmetria della riserva sinistri è superiore rispetto a quella dei casi in cui sia presente un solo fattore sistematico; l'effetto congiunto dei due fattori di disturbo comporta, quindi, un valore dell'indice di asimmetria più estremo rispetto alle casistiche in cui è presente la sola v.a. \tilde{q} o \tilde{p} . Nella tabella seguente sono richiamati i valori, già ottenuti nel capitolo terzo, dell'indice di asimmetria della riserva sinistri nel caso in cui siano presenti contemporaneamente i due fattori di disturbo (fig: 4.1.18); i grafici di figura 4.1.19 e 4.1.20 permettono, infine, di confrontare i valori dell'asimmetria nel caso in cui sia presente la sola v.a. \tilde{q} , \tilde{p} o entrambe.

Fig.4.1.18: Indici di asimmetria delle riserve sinistri descritte dalla v.a. \tilde{R} per le imprese SIFA e AMASES al variare delle *standard deviation* dei fattori di disturbo.

ASIMMETRIA				
$\sigma_{\tilde{q}}; \sigma_{\tilde{p}}$	2%;2%	3%;3%	5%;5%	8%;8%
SIFA	0,120	0,142	0,198	0,297
AMASES	0,077	0,110	0,179	0,285

Fig.4.1.19: Confronto tra gli indici di asimmetria della riserva sinistri, in funzione del processo stocastico considerato, per l'impresa SIFA al variare delle *standard deviation* dei fattori di disturbo.

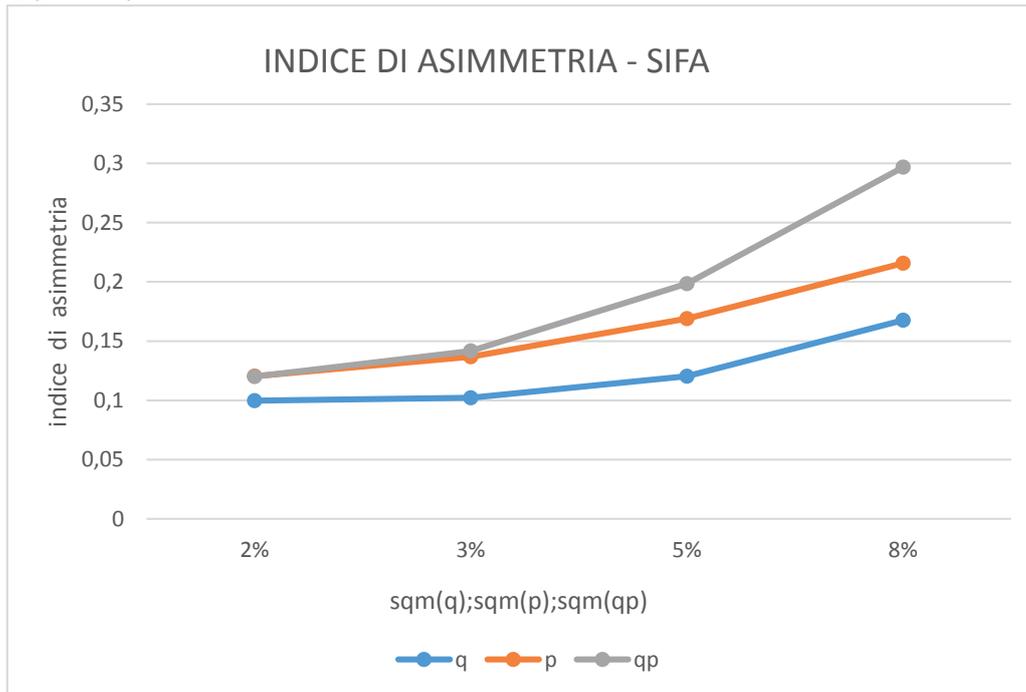
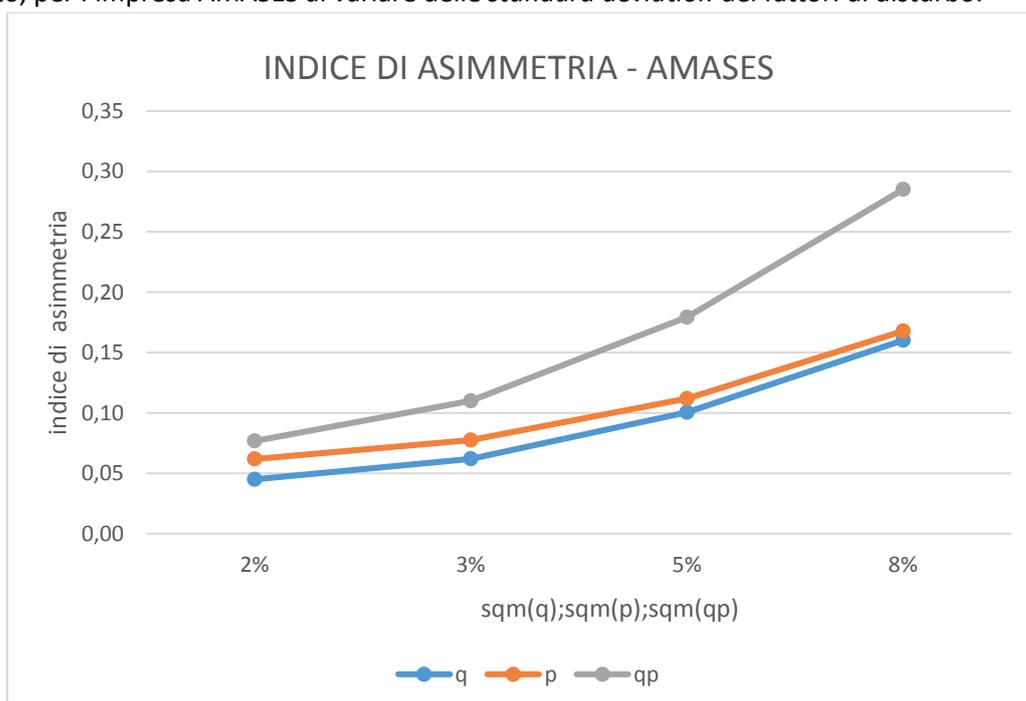


Fig.4.1.20: Confronto tra gli indici di asimmetria della riserva sinistri, in funzione del processo stocastico considerato, per l'impresa AMASES al variare delle *standard deviation* dei fattori di disturbo.



Le tabelle e i grafici presentati di seguito (figure: 4.1.21, 4.1.22, 4.1.23 e 4.1.24) permettono di confrontare le variazioni percentuali dell'indice di asimmetria delle imprese SIFA e AMASES, considerando un *range* di valori per $\sigma_{\bar{q}}$ e $\sigma_{\bar{p}}$ che varia dall'1% al 10%, nel caso in cui sia presente solo uno dei due fattori di disturbo o entrambi. In quest'ultima circostanza gli incrementi dell'asimmetria della riserva sinistri risultano essere inizialmente, cioè per valori di $\sigma_{\bar{q}}$ e $\sigma_{\bar{p}}$ contenuti, molto consistenti; al crescere della variabilità dei due fattori di disturbo, invece, l'indice di asimmetria tende a crescere nella stessa proporzione del caso in cui sia presente un solo fattore di disturbo.

Fig.4.1.21: Variazione percentuale dell'indice di asimmetria dell'impresa SIFA al variare delle *standard deviation* dei fattori di disturbo.

SIFA					
$\sigma_{\bar{q}}$	Δ % asim.	$\sigma_{\bar{p}}$	Δ % asim.	$\sigma_{\bar{q}}; \sigma_{\bar{p}}$	Δ % asim.
1%	-0,87%	1%	12,54%	1%;1%	13,07%
2%	2,48%	2%	13,60%	2%;2%	18,04%
3%	6,92%	3%	12,00%	3%;3%	18,94%
4%	10,16%	4%	10,33%	4%;4%	17,75%
5%	11,66%	5%	9,17%	5%;5%	16,00%
6%	11,90%	6%	8,41%	6%;6%	14,29%
7%	11,49%	7%	7,88%	7%;7%	12,79%
8%	10,80%	8%	7,46%	8%;8%	11,52%
9%	10,05%	9%	7,10%	9%;9%	10,45%
10%	9,31%	10%	6,78%	10%;10%	9,55%

Fig.4.1.22: Grafico della variazione percentuale dell'indice di asimmetria dell'impresa SIFA al variare delle *standard deviation* dei fattori di disturbo.

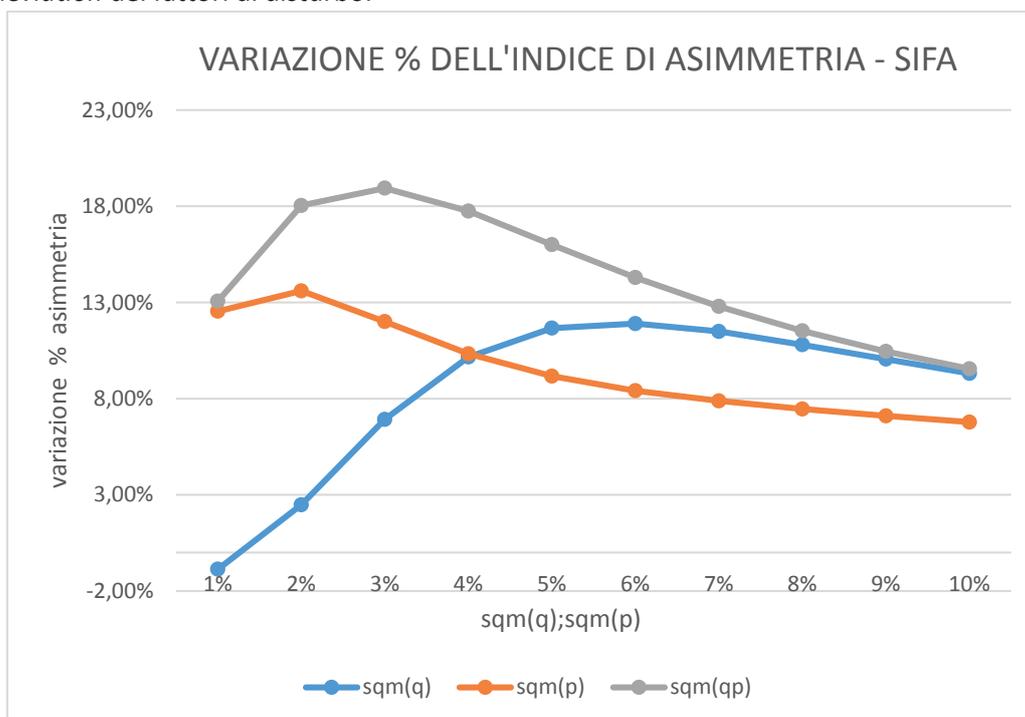
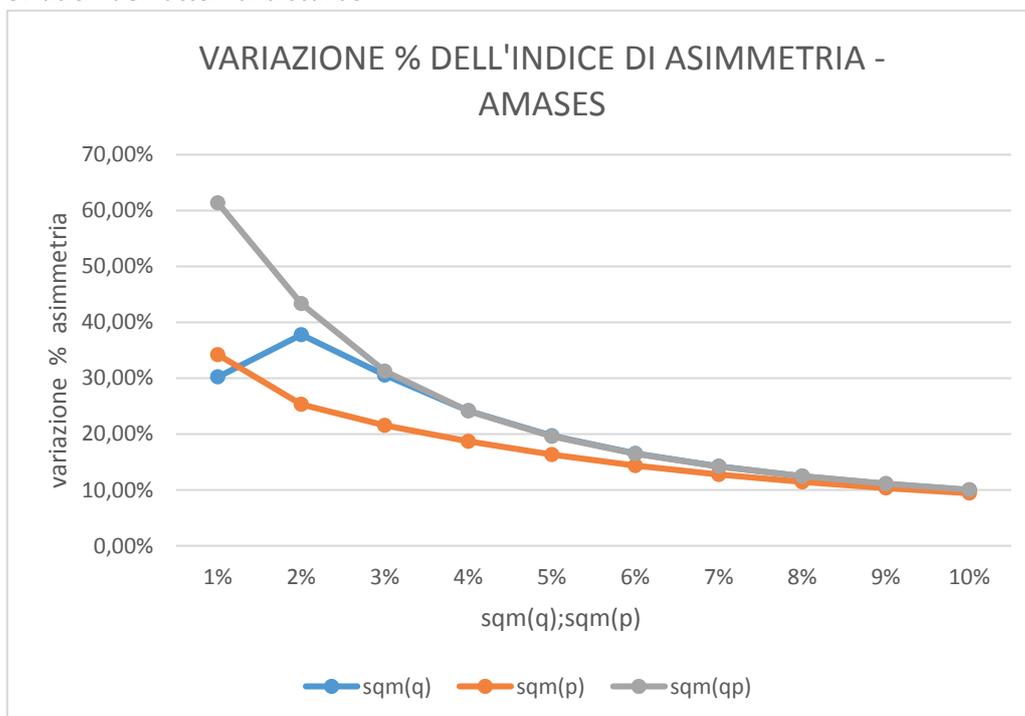


Fig.4.1.23: Variazione percentuale dell'indice di asimmetria dell'impresa AMASES al variare delle *standard deviation* dei fattori di disturbo.

AMASES					
$\sigma_{\bar{q}}$	Δ % asim.	$\sigma_{\bar{p}}$	Δ % asim.	$\sigma_{\bar{q}}; \sigma_{\bar{p}}$	Δ % asim.
1%	30,22%	1%	34,20%	1%;1%	61,37%
2%	37,77%	2%	25,31%	2%;2%	43,33%
3%	30,55%	3%	21,55%	3%;3%	31,26%
4%	24,16%	4%	18,70%	4%;4%	24,13%
5%	19,69%	5%	16,32%	5%;5%	19,58%
6%	16,53%	6%	14,36%	6%;6%	16,46%
7%	14,22%	7%	12,75%	7%;7%	14,19%
8%	12,46%	8%	11,44%	8%;8%	12,47%
9%	11,09%	9%	10,34%	9%;9%	11,12%
10%	9,99%	10%	9,43%	10%;10%	10,04%

Fig.4.1.24: Grafico della variazione percentuale dell'indice di asimmetria dell'impresa AMASES al variare delle *standard deviation* dei fattori di disturbo.



4.2 L'approccio simulativo e la distribuzione della riserva sinistri a totale *run off*

I risultati analitici sviluppati nel capitolo 3 permettono di conoscere i momenti esatti della distribuzione della riserva sinistri, in base alle ipotesi sottostanti al modello considerato, ma non consentono di ottenerne la distribuzione. Tale limite può essere superato ricorrendo alle simulazioni; al crescere del numero di iterazioni simulate, infatti, si ottengono delle distribuzioni di probabilità sempre più simili alla vera ed incognita distribuzione della riserva sinistri. Il confronto tra

i momenti esatti e quelli simulati permette di valutare la prossimità tra la distribuzione simulata e quella effettiva della riserva sinistri nonché di valutare la correttezza o meno dei modelli elaborati analiticamente in forma chiusa nel capitolo precedente. I risultati forniti dalle simulazioni risultano essere molto buoni, in termini di contiguità con i valori esatti, per un numero di *step* simulativi sufficientemente elevato. La scelta del numero di iterazioni da effettuare è, tuttavia, un aspetto critico in quanto è necessario mediare tra due esigenze contrapposte: il tempo macchina richiesto dalle simulazioni e la bontà di adattamento dei risultati ottenuti.

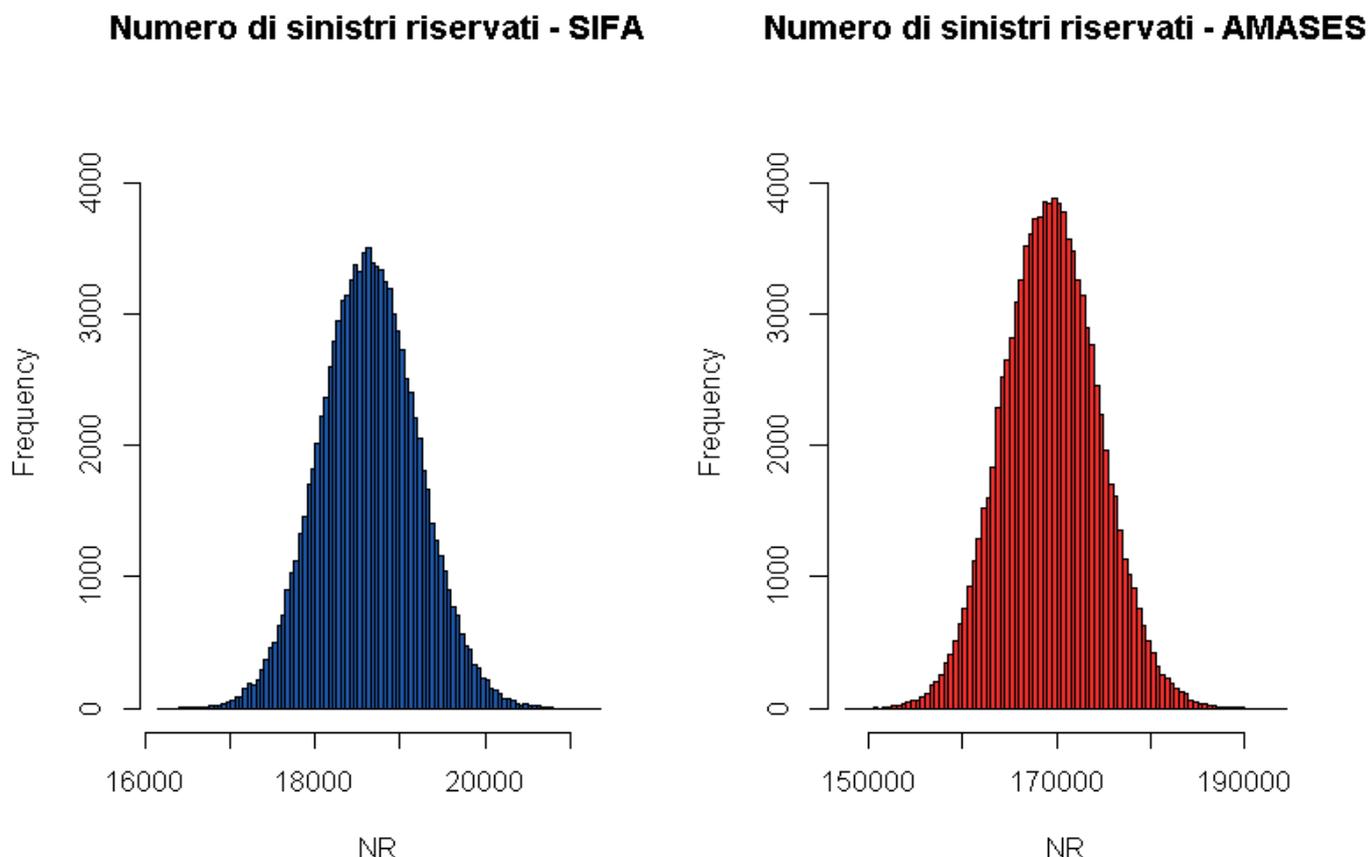
La distribuzione di probabilità simulata della riserva sinistri permette di valutare le passività assicurative dell'impresa considerando la loro intera durata di vita, cioè a totale *run off*. La distribuzione della riserva consente di conoscere l'errore associato alla stima puntuale, cioè il valore iscritto a bilancio, della riserva sinistri. La valutazione a totale *run off* è, inoltre, importante in quanto punto di partenza per valutare il *reserve risk*; la nuova normativa di vigilanza, rappresentata da *Solvency II*, infatti, richiede di quantificare il rischio (SCR), relativo all'anno futuro, legato alla stima della riserva sinistri.

Di seguito sono presentate, per le imprese SIFA e AMASES, le distribuzioni di probabilità della riserva sinistri, ottenute con 100.000 simulazioni, relative ai tre modelli stocastici elaborati nel capitolo precedente. Sono riportate, inoltre, inizialmente le distribuzioni di probabilità del processo generatore del numero dei sinistri sottostanti ai relativi modelli di riserva. Le casistiche in esame considerano un solo valore della *standard deviation* dei fattori di disturbo; quando presenti, infatti, entrambi i valori di $\sigma_{\tilde{q}}$ e $\sigma_{\tilde{p}}$ sono posti pari al 3%.

La variabile casuale del numero dei sinistri riservati segue, come noto, un processo dato dalla somma di v.a. di Poisson semplici o misturate in funzione del modello stocastico considerato per descrivere la riserva sinistri. Il numero dei sinistri riservati è la somma di Poisson misturate nel caso in cui la riserva sia modellizzata da un processo di Poisson composto misturato o da un processo di Poisson composto misturato con fattore di disturbo applicato alle *severity*. Il numero di sinistri riservati, invece, è pari alla somma di Poisson semplici nella circostanza in cui la riserva sinistri segua un processo di Poisson composto semplice con fattore di disturbo sul costo dei singoli sinistri.

Le distribuzioni di probabilità simulate della v.a. del numero dei sinistri riservati nel caso di presenza del fattore di disturbo \tilde{q} sono riportate, rispettivamente per l'impresa SIFA (colore blue) e AMASES (colore rosso), nella figura seguente (fig: 4.2.1).

Fig.4.2.1: Distribuzioni di probabilità del numero di sinistri riservati, simulate con 100.000 iterazioni, posto $\sigma_q = 3\%$, per le imprese SIFA (colore blue) e AMASES (colore rosso)



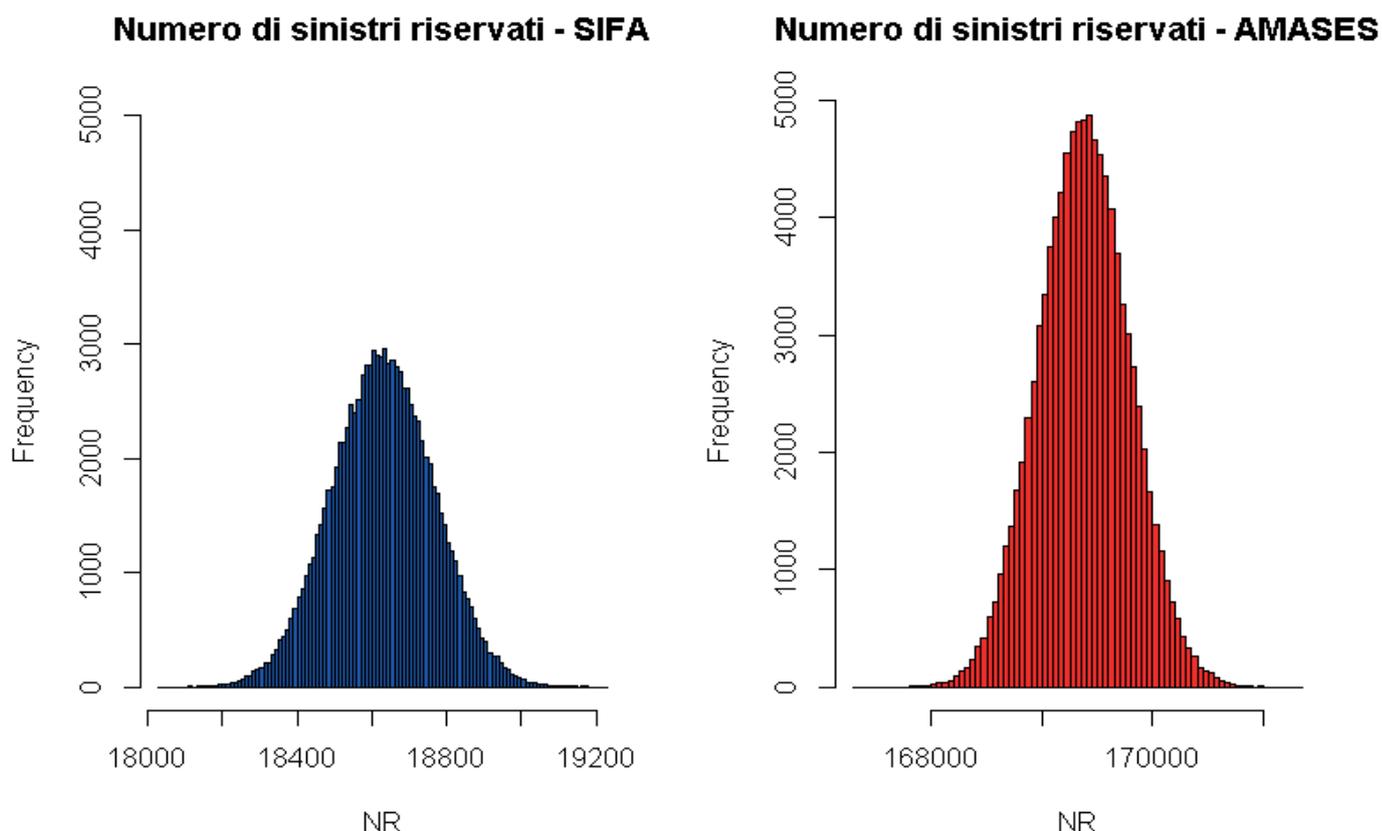
Le caratteristiche della distribuzione simulata ottenuta con 100 mila iterazioni e relativi all'impresa di minori dimensioni risultano pari ad un valore atteso pari a 18.632, *standard deviation* di 575, coefficiente di variazione pari al 3,09% e asimmetria di 0,060. Le caratteristiche simulate risultano essere quasi coincidenti con quelle esatte; il numero di iterazioni simulative prescelto è, quindi, sufficiente a permettere un'ottima convergenza con i risultati esatti, elaborati in forma chiusa, della v.a. in esame.

Le caratteristiche simulate del numero dei sinistri per l'impresa AMASES, invece, sono pari a una media di 169.423, *standard deviation* pari a 5.114, coefficiente di variazione pari al 3,01% e indice di asimmetria di 0,076. Le caratteristiche simulate del numero dei sinistri risultano essere, anche in tale caso, quasi coincidenti con quelle esatte ad eccezione dell'indice di asimmetria che si discosta, seppur non in modo significativo, dal suo valore esatto.

Il confronto tra le due imprese mostra valori di variabilità relativa, come atteso, più contenuti per l'impresa AMSASES. Considerazioni analoghe valgono per l'indice di asimmetria; il numero prescelto di iterazioni simulative, tuttavia, non è sufficiente a far convergere adeguatamente l'indice di asimmetria dell'impresa di maggiori dimensioni, ottenendone un valore maggiore di quello posseduto dall'impresa SIFA.

Quando la v.a. del numero dei sinistri riservati è determinata come somma di v.a. di Poisson semplici, le distribuzioni di probabilità simulate, rispettivamente per le imprese SIFA (colore blue) e AMASES (colore rosso), risultano essere le seguenti (figura: 4.2.2):

Fig.4.2.2: Distribuzioni di probabilità del numero dei sinistri riservati, simulate con 100.000 iterazioni, in assenza del fattore \tilde{q} , per le imprese SIFA (colore blue) e AMASES (colore rosso)



Le caratteristiche della distribuzione simulata, per l'impresa SIFA, sono le seguenti: media pari a 18.630, *standard deviation* di 136, coefficiente di variazione pari allo 0,73% e asimmetria di 0,003. I momenti della distribuzione simulata per l'impresa AMASES sono un valore atteso di 169.377, *standard deviation* pari a 410, coefficiente di variazione pari allo 0,24% e indice di asimmetria di 0,005. Le caratteristiche simulate del numero dei sinistri risultano essere, per entrambe le imprese, ad eccezione dell'asimmetria, quasi identiche a quelle esatte; il numero di iterazioni simulate prescelto è, quindi, sufficiente a permettere un'ottima convergenza con i risultati esatti della v.a. in esame.

A fronte del maggior numero di sinistri riservati, l'impresa AMASES possiede valori di variabilità relativa più contenuti rispetto all'impresa SIFA. Con riferimento all'indice di asimmetria, invece, il numero di iterazioni simulate prescelto non è sufficiente a far convergere adeguatamente l'asimmetria dell'impresa di maggiori dimensioni, ottenendone un valore maggiore di quello posseduto dall'impresa SIFA.

Il confronto tra le caratteristiche del numero dei sinistri riservati nel caso di presenza o meno del fattore di disturbo mostra una minore variabilità relativa e asimmetria, per entrambe le imprese, nella circostanza in cui è assente la v.a. \tilde{q} . Il fattore di disturbo, quindi, come noto, introduce maggiore variabilità e asimmetria nel processo generatore del numero dei sinistri riservati.

Quando la riserva sinistri è modellizzata tramite un **processo di Poisson composto misturato**, l'unico fattore di disturbo considerato è la v.a. \tilde{q} applicata al numero dei sinistri riservati. La distribuzione di probabilità simulata per l'impresa SIFA, a fronte di 100.000 iterazioni, posto

$\sigma_{\tilde{q}} = 3\%$, è riportata in figura 4.2.3; nella tabella successiva (fig: 4.2.4), invece, sono presentati i valori simulati ed esatti della media, scarto quadratico medio, coefficiente di variazione e indice di asimmetria della riserva sinistri.

Fig.4.2.3: Distribuzione di probabilità simulata, con 100.000 iterazioni, della riserva sinistri descritta da un processo di Poisson composto misturato, posto $\sigma_{\tilde{q}} = 3\%$, per l'impresa SIFA

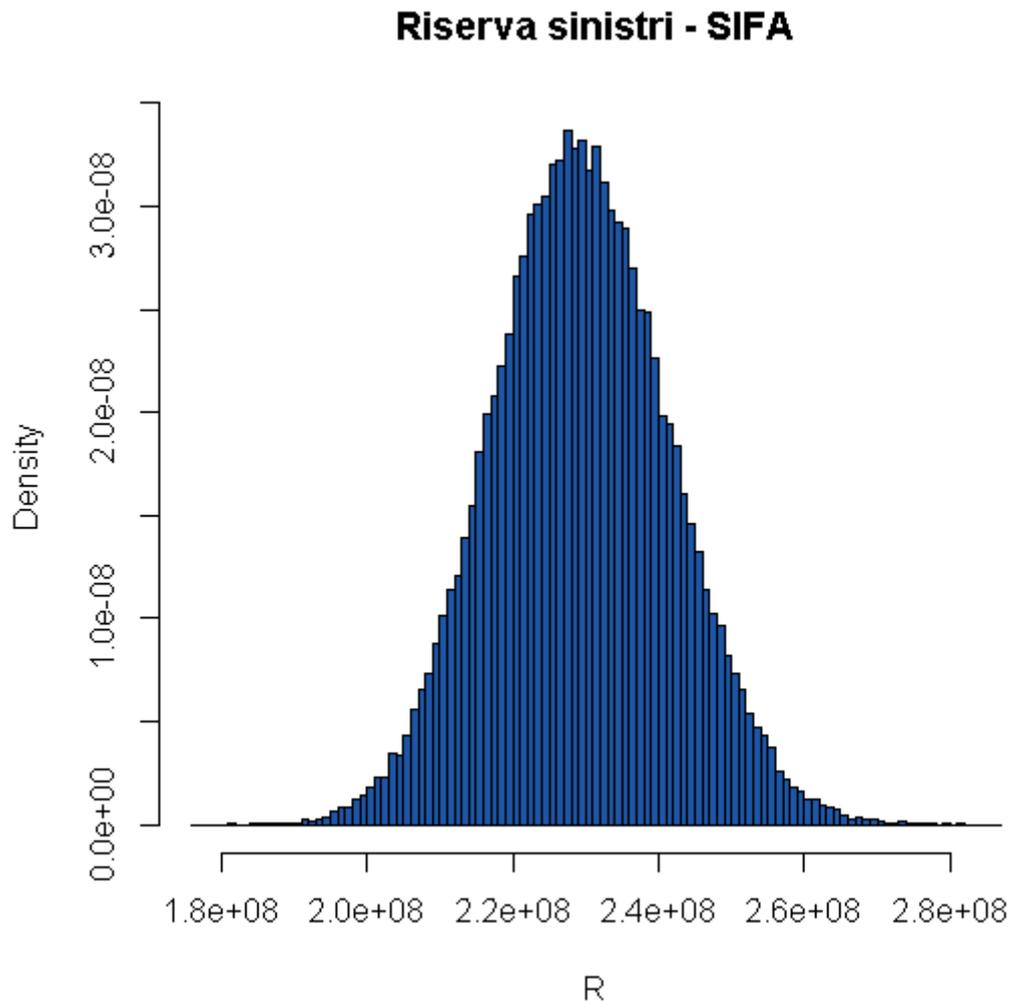


Fig.4.2.4: Caratteristiche esatte e simulate, per l'impresa SIFA, della riserva sinistri descritta da un processo di Poisson composto misturato posto $\sigma_{\tilde{q}} = 3\%$

SIFA				
	media	sqm	coefficiente di variazione	asimmetria
valori esatti	229.538.009	12.110.123	5,28%	0,102
valori simulati	229.372.868	12.128.241	5,28%	0,100

La distribuzione simulata delle riserva sinistri per l'impresa di maggiori dimensioni, cioè AMASES, è riportata nella figura seguente (fig: 4.2.5). Il confronto tra le caratteristiche simulate ed esatte è, invece, presentato nella tabella di figura 4.2.6.

Fig.4.2.5: Distribuzione di probabilità simulata, con 100.000 iterazioni, della riserva sinistri descritta da un processo di Poisson composto misturato, posto $\sigma_{\tilde{q}} = 3\%$, per l'impresa AMASES

Riserva sinistri - AMASES

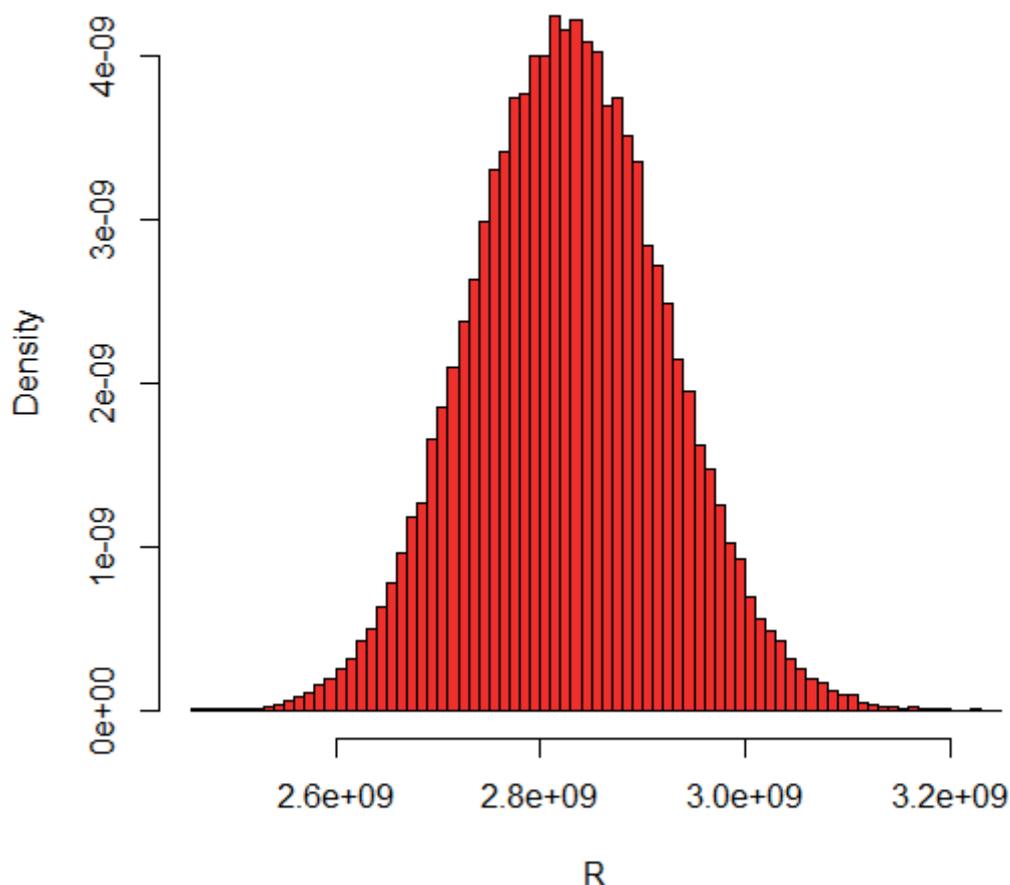


Fig.4.2.6: Caratteristiche esatte e simulate, per l'impresa AMASES, della riserva sinistri descritta da un processo di Poisson composto misturato posto $\sigma_{\tilde{q}} = 3\%$

AMASES				
	media	sqm	coefficiente di variazione	asimmetria
valori esatti	2.826.940.322	94.330.040	3,34%	0,062
valori simulati	2.827.742.455	94.633.784	3,34%	0,067

Le tabelle presentate precedentemente rivelano, per entrambe le imprese, una buona convergenza tra le caratteristiche esatte e simulate. Il confronto tra i coefficienti di variazione e gli indici di asimmetria delle due imprese mostrano valori più contenuti per l'impresa AMASES; il maggiore numero di sinistri riservati determina per l'impresa di elevate dimensioni una variabilità relativa e un'asimmetria più contenute rispetto all'impresa SIFA. Il valore del coefficiente di variazione dell'impresa di maggiori dimensioni è più vicino, rispetto a quello dell'impresa SIFA, al suo valore asintotico pari a $\sigma_{\tilde{q}}$. La variabilità relativa in capo all'impresa AMASES è, quindi, in larga parte determinata dal fattore sistematico \tilde{q} che incide a livello di riserva sul numero dei sinistri riservati. L'elevato numero di sinistri posti a riserva dall'impresa AMASES permette alla compagnia di diversificare gran parte del rischio non sistematico ottenendo un coefficiente di variazione

ampiamente influenzato dal fattore di disturbo. Considerazioni analoghe valgono per l'indice di asimmetria. L'impresa AMASES possiede un valore dell'asimmetria più contenuto e più vicino a quello asintotico, rispetto a SIFA, grazie al maggior numero di sinistri riservati. La maggiore prossimità dell'asimmetria al suo valore asintotico, dato da $\gamma_{\bar{q}}$, comporta una più marcata influenza del fattore di disturbo sull'asimmetria della riserva sinistri dell'impresa AMASES rispetto a quella dell'impresa SIFA.

Nel caso in cui la riserva sinistri sia descritta da un **processo di Poisson composto semplice con fattore di disturbo applicato alle severity**, l'unico fattore di disturbo presente è la v.a. \tilde{p} inserita sul costo dei singoli sinistri riservati. La distribuzione di probabilità simulata per l'impresa SIFA, a fronte di 100.000 iterazioni, posto $\sigma_{\tilde{p}} = 3\%$, è riportata in figura 4.2.7; nella tabella successiva (fig: 4.2.8), invece, sono presentati i valori simulati ed esatti delle caratteristiche principali della riserva sinistri.

Fig.4.2.7: Distribuzione di probabilità simulata, con 100.000 iterazioni, della riserva sinistri descritta da un processo di Poisson composto semplice con fattore di disturbo sulle *severity*, posto $\sigma_{\tilde{p}} = 3\%$, per l'impresa SIFA

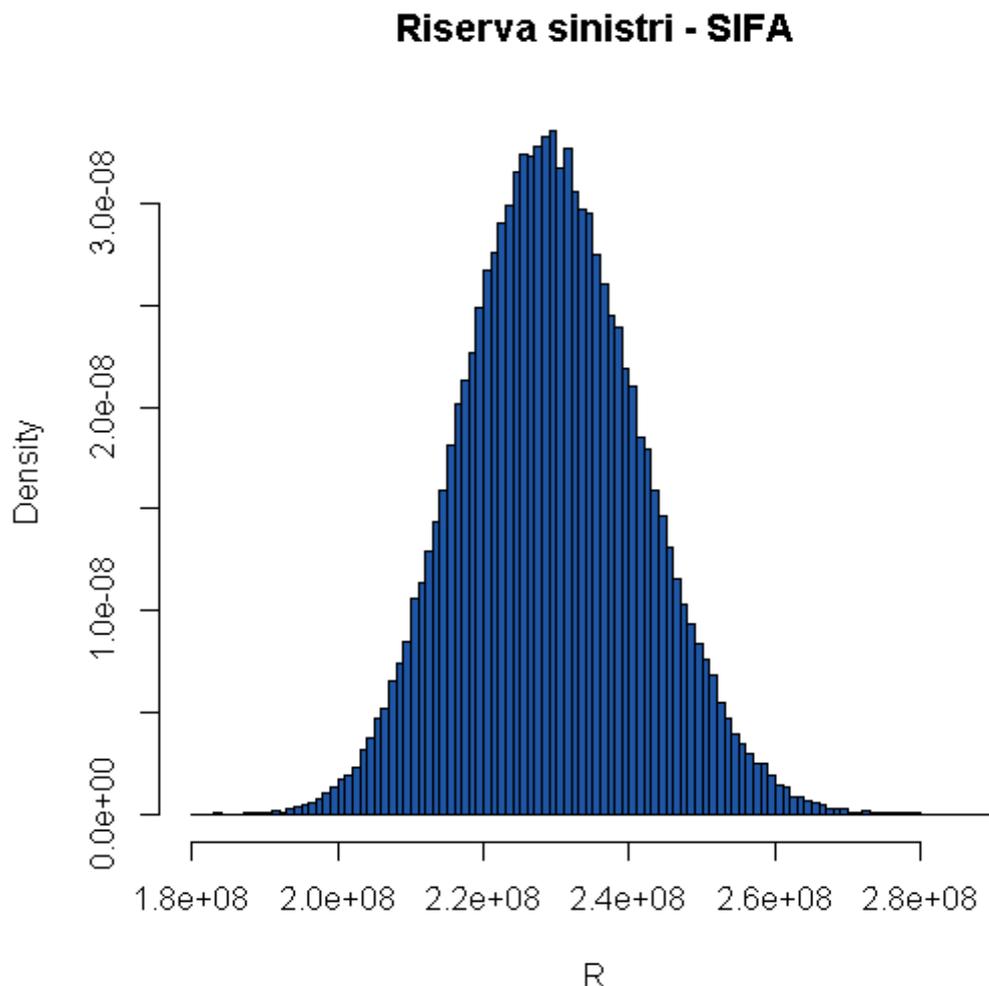


Fig.4.2.8: Caratteristiche esatte e simulate, per l'impresa SIFA, della riserva sinistri descritta da un processo di Poisson composto semplice con fattore di disturbo sulle *severity* posto $\sigma_{\hat{p}} = 3\%$

SIFA				
	media	sqm	coefficiente di variazione	asimmetria
valori esatti	229.538.009	12.113.810	5,28%	0,137
valori simulati	229.375.212	12.122.806	5,28%	0,143

La distribuzione simulata delle riserva sinistri dell'impresa AMASES è riportata nella figura seguente (fig: 4.2.9). Il confronto tra le caratteristiche simulate ed esatte è presentato nella tabella di figura 4.2.10.

Fig.4.2.9: Distribuzione di probabilità simulata, con 100.000 iterazioni, della riserva sinistri descritta da un processo di Poisson composto semplice con fattore di disturbo sulle *severity*, posto $\sigma_{\hat{p}} = 3\%$, per l'impresa AMASES

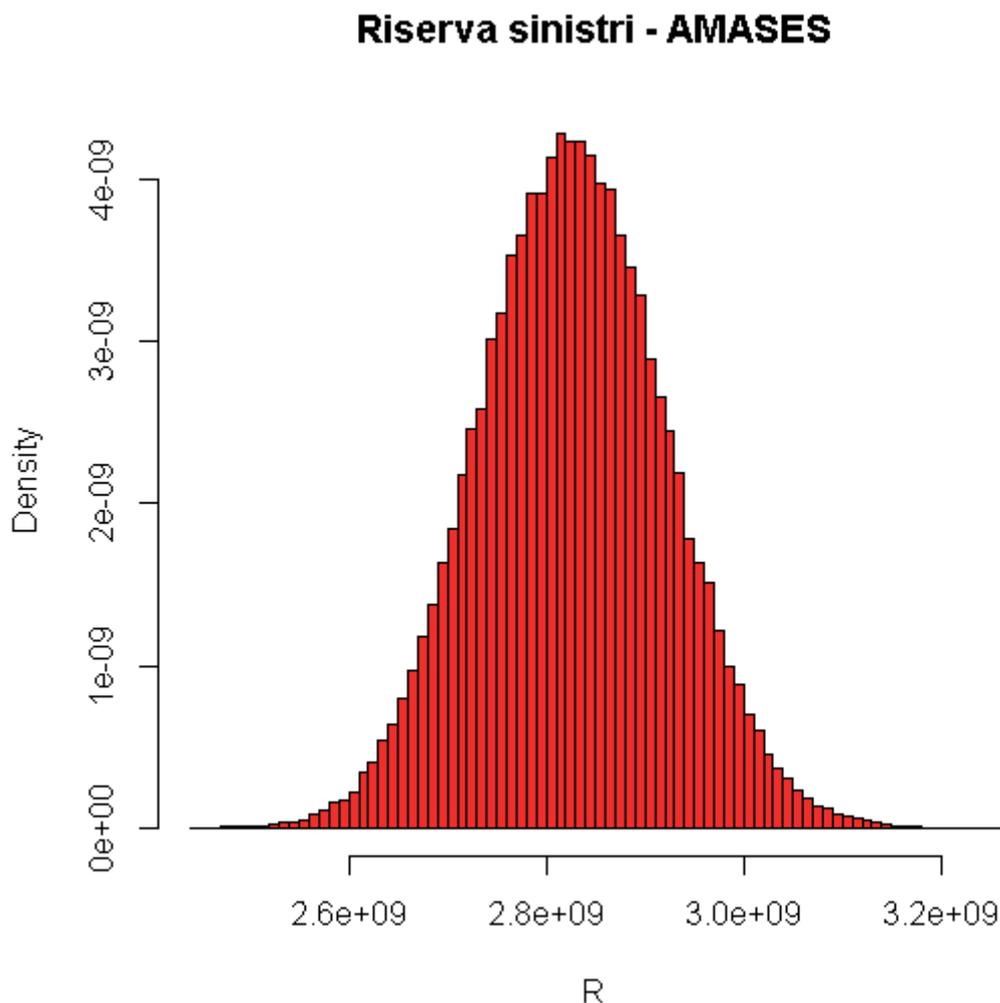


Fig.4.2.10: Caratteristiche esatte e simulate, per l'impresa AMASES, della riserva sinistri descritta da un processo di Poisson composto semplice con fattore di disturbo sulle *severity* posto $\sigma_{\tilde{p}} = 3\%$

AMASES				
	media	sqm	coefficiente di variazione	asimmetria
valori esatti	2.826.940.322	94.338.177	3,34%	0,078
valori simulati	2.826.843.931	94.090.626	3,33%	0,060

Dalle tabelle mostrate poco sopra si osserva, per entrambe le imprese, che le caratteristiche simulate ed esatte risultano essere molto prossime tra loro. L'impresa AMASES, in virtù del maggiore numero di sinistri riservati, possiede una variabilità relativa e un indice di asimmetria minori rispetto all'impresa SIFA. I valori del coefficiente di variazione e dell'asimmetria dell'impresa di maggiori dimensioni risultano essere, rispetto a quanto osservato per l'impresa SIFA, più vicini ai rispettivi valori asintotici dati da $\sigma_{\tilde{p}}$ e $\gamma_{\tilde{p}}$; la variabilità relativa e l'asimmetria dell'impresa AMASES sono, quindi, influenzate in modo maggiore, rispetto a quanto accade per l'impresa SIFA, dal fattore sistematico \tilde{p} .

I valori del coefficiente di variazione di entrambe le imprese mostrano un'incidenza del fattore di disturbo \tilde{p} sulla variabilità relativa del tutto analoga a quella osservata nel modello precedente contenente il fattore \tilde{q} . Il fattore di disturbo \tilde{p} , invece, incrementa in modo consistente l'asimmetria della riserva delle due imprese rispetto al caso in cui sia presente il solo fattore sistematico sul numero dei sinistri.

Nel caso in cui la riserva sinistri segua un **processo di Poisson composto misturato con fattore di disturbo applicato alle *severity***, i fattori di disturbo considerati sono le v.a. \tilde{q} e \tilde{p} applicate, rispettivamente, al numero di sinistri riservati e ai relativi costi. La distribuzione di probabilità simulata per l'impresa di minori dimensioni, a fronte di 100.000 iterazioni, posti $\sigma_{\tilde{q}} = 3\%$ e $\sigma_{\tilde{p}} = 3\%$, è riportata in figura 4.2.11; nella tabella successiva (fig: 4.2.12) è presentato il confronto tra le caratteristiche simulati ed esatte della riserva sinistri.

Fig.4.2.11: Distribuzione di probabilità simulata, con 100.000 iterazioni, della riserva sinistri descritta da un processo di Poisson composto misturato con fattore di disturbo sulle *severity*, posti $\sigma_{\tilde{q}} = \sigma_{\tilde{p}} = 3\%$, per l'impresa SIFA

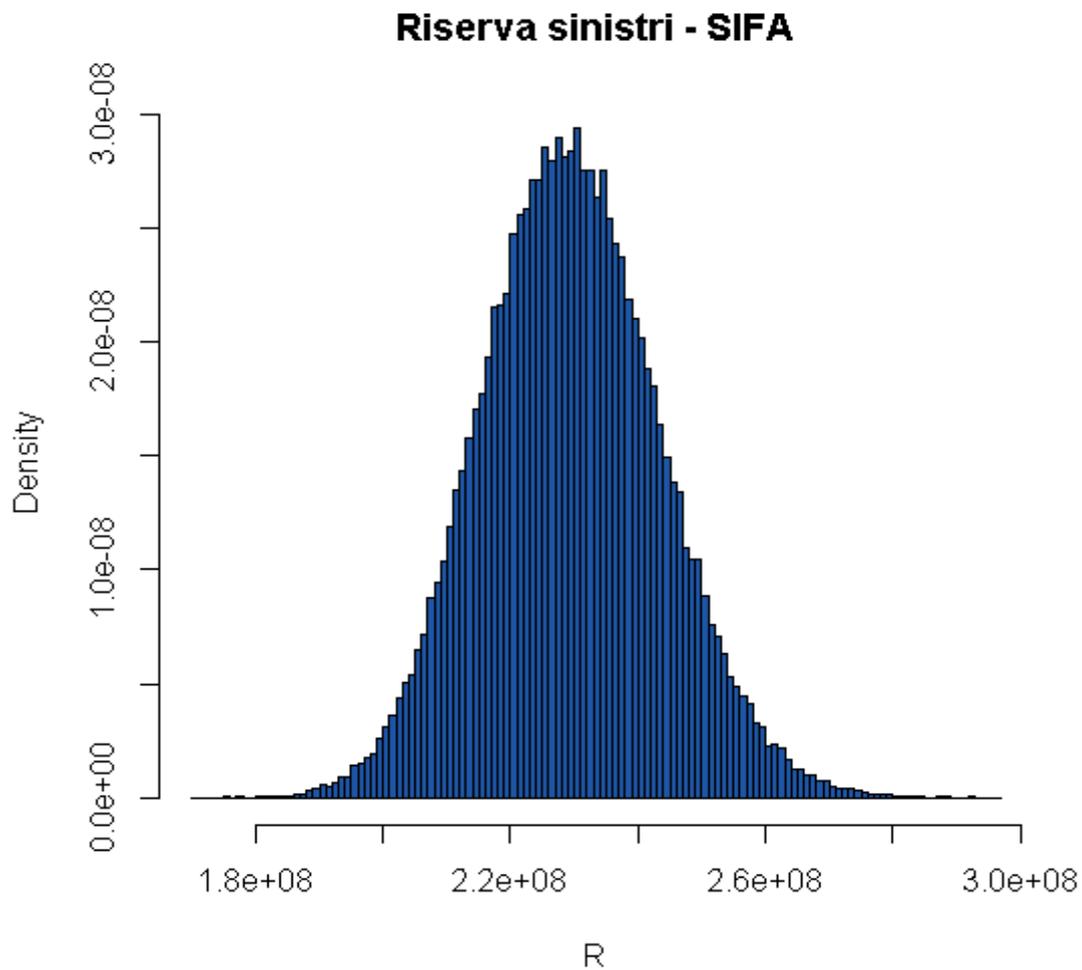


Fig.4.2.12: Caratteristiche esatte e simulate, per l'impresa SIFA, della riserva sinistri descritta da un processo di Poisson composto misturato con fattore di disturbo sulle *severity* posti $\sigma_{\tilde{q}} = \sigma_{\tilde{p}} = 3\%$

SIFA				
	media	sqm	coefficiente di variazione	asimmetria
valori esatti	229.538.009	13.935.781	6,07%	0,142
valori simulati	229.408.275	13.942.823	6,08%	0,144

La distribuzione simulata delle riserva sinistri dell'impresa AMASES è riportata nella figura seguente (fig: 4.2.13). Il confronto tra le caratteristiche simulate ed esatte, invece, è presentato nella tabella di figura 4.2.14.

Fig.4.2.13: Distribuzione di probabilità simulata, con 100.000 iterazioni, della riserva sinistri descritta da un processo di Poisson composto misturato con fattore di disturbo sulle *severity*, posti $\sigma_{\bar{q}} = \sigma_{\bar{p}} = 3\%$, per l'impresa AMASES

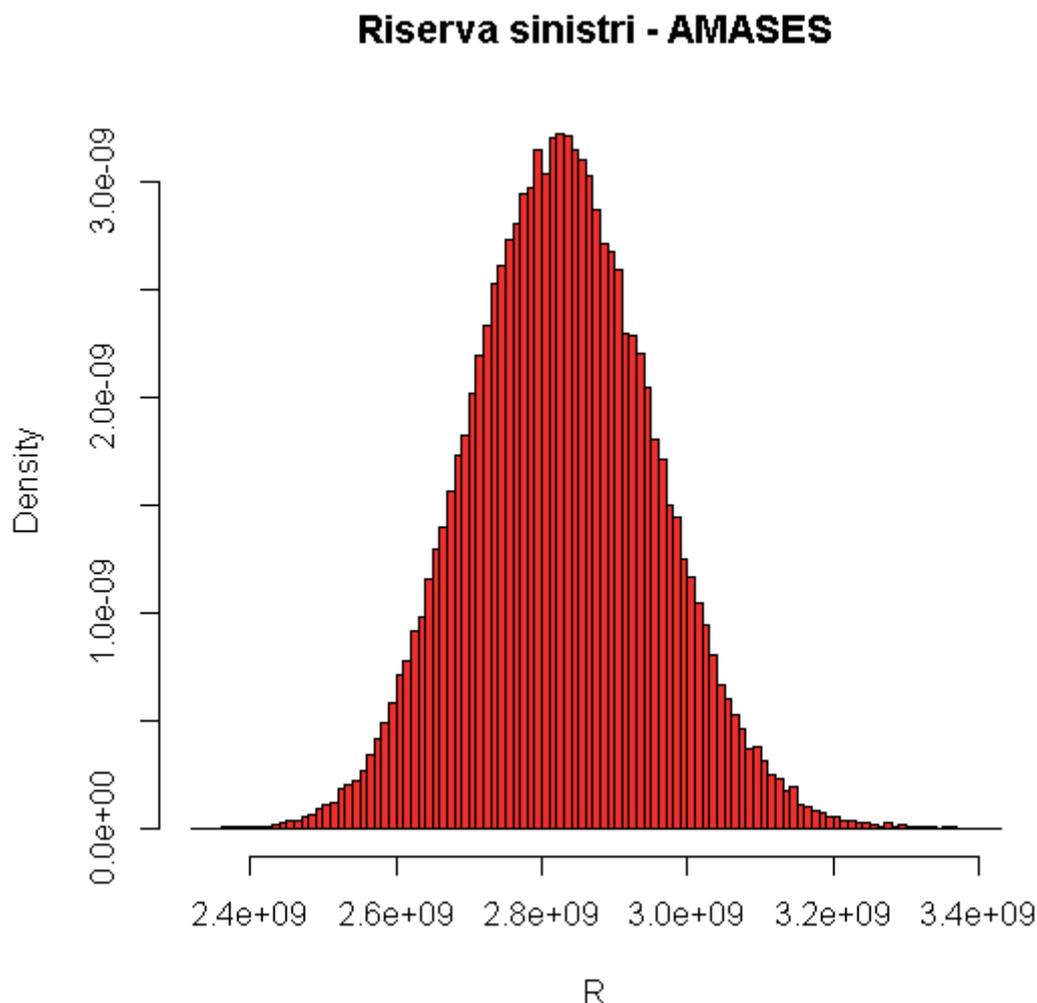


Fig.4.2.14: Caratteristiche esatte e simulate, per l'impresa AMASES, della riserva sinistri descritta da un processo di Poisson composto misturato con fattore di disturbo sulle *severity* posti $\sigma_{\bar{q}} = \sigma_{\bar{p}} = 3\%$

AMASES				
	media	sqm	coefficiente di variazione	asimmetria
valori esatti	2.826.940.322	126.880.247	4,49%	0,110
valori simulati	2.827.494.219	126.344.103	4,47%	0,105

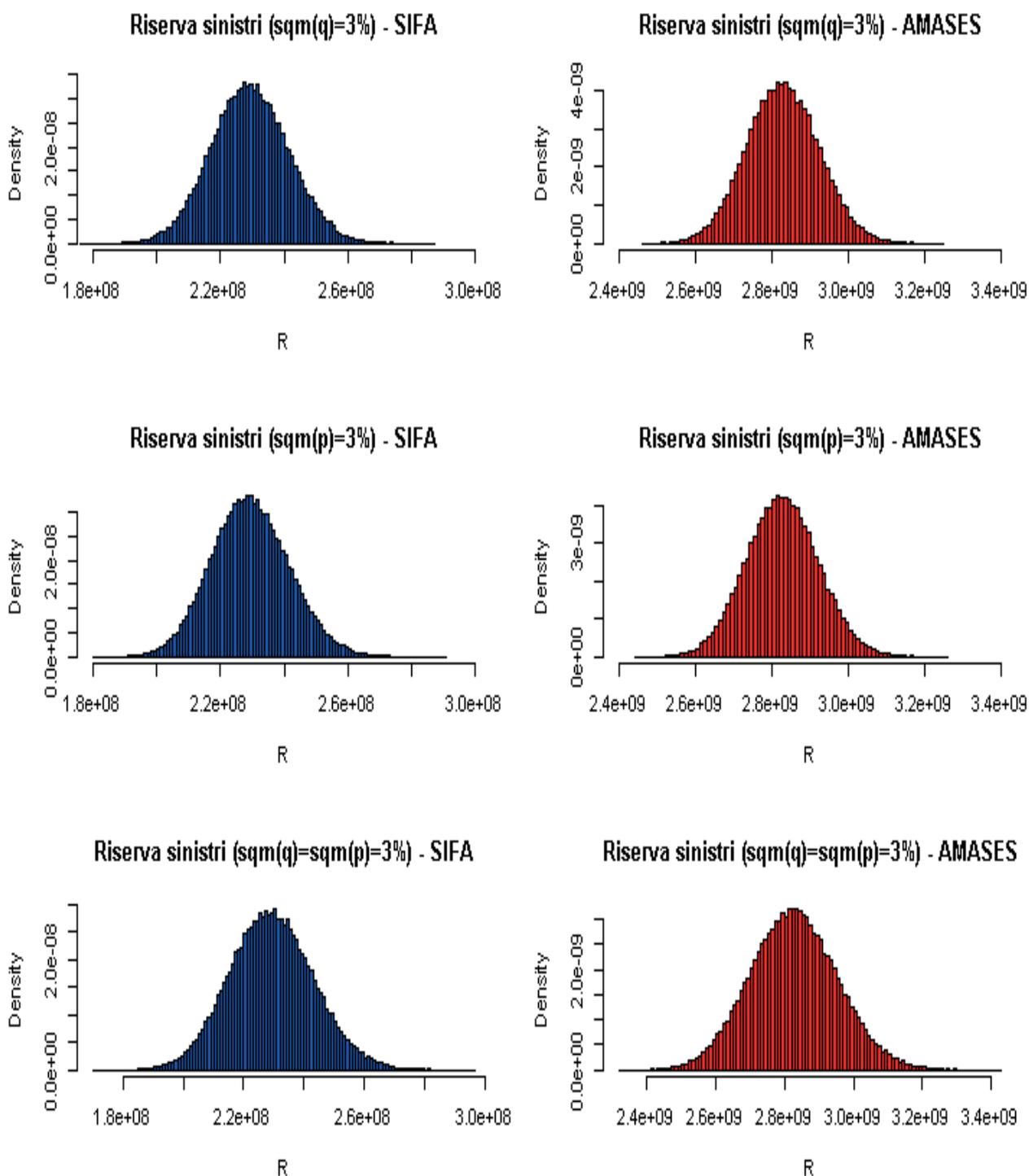
Anche con riferimento a quest'ultimo modello adottato per descrivere la riserva sinistri si osserva, per entrambe le imprese, una buona convergenza tra le caratteristiche simulate ed esatte. Le dinamiche riscontrabili in tale situazione sono analoghe a quelle osservate nei due modelli di riserva sinistri considerati precedentemente. Il confronto tra coefficiente di variazione e indice di asimmetria delle due imprese mostra valori più contenuti per l'impresa AMASES. La variabilità relativa e l'asimmetria dell'impresa di maggiori dimensioni, quindi, dipendono in modo più consistente dai fattori di disturbo rispetto a quanto non accada per l'impresa SIFA.

I valori della variabilità relativa e asimmetria, per entrambe le imprese, risultano essere più elevati rispetto a quelli ottenuti con i due modelli precedenti; la presenza congiunta dei fattori di disturbo,

infatti, rende la distribuzione della riserva sinistri più dispersa e asimmetrica rispetto al caso in cui sia presente un solo fattore sistematico.

L'ultima figura del paragrafo (fig: 4.2.15) raccoglie le distribuzioni di probabilità simulate, presentate precedentemente per le due imprese, con l'intento di poter confrontare la dispersione e l'asimmetria della riserva sinistri al variare del modello considerato.

Fig.4.2.15: Distribuzioni di probabilità simulate, con 100 mila iterazioni, della riserva sinistri al variare del modello stocastico considerato, per le imprese SIFA (colore blue) e AMASES (colore rosso)



4.3 L'approccio simulativo e il calcolo del *Solvency Capital Requirement*

Le imprese di assicurazione, per essere conformi alle norme che saranno introdotte da *Solvency II*, hanno l'obbligo di determinare il requisito patrimoniale di solvibilità. Il SCR deve essere tale da coprire i rischi, valutati con una misura di rischio di tipo VaR al 99,5% di probabilità, a cui è esposto l'assicuratore su un orizzonte temporale annuo. L'analisi del rischio *one-year* per il contesto riservazione delle assicurazioni danni prevede di quantificare:

- i possibili scostamenti tra quanto riservato dall'impresa all'epoca corrente per i sinistri che stima vengano liquidati l'anno futuro rispetto a quanto effettivamente andrà a liquidare durante l'anno successivo. Si considera, quindi, la differenza tra quanto riservato dall'impresa nella prima diagonale del triangolo di *run off* e quanto effettivamente verrà pagato l'anno successivo;
- gli scostamenti tra l'ammontare riservato dall'assicuratore per i sinistri che si stima vengano liquidati dal secondo anno successivo a quello corrente e quanto verrà nuovamente riservato alla fine dell'anno seguente a quello dell'epoca di valutazione per gli stessi sinistri. Si stima quindi la variabilità tra quanto posto a riserva all'epoca di valutazione nel triangolo inferiore, a meno della prima diagonale, e quanto verrà nuovamente stimato dall'impresa l'anno successivo, in base alle informazioni aggiuntive raccolte nell'anno, per gli stessi sinistri.

La stima dell'errore relativo ai pagamenti della prima diagonale del triangolo è composta da una duplice fonte di volatilità; la *process variance* e la *estimation variance*. La prima comporta la possibilità di scostamenti sfavorevoli nei pagamenti che dovrà liquidare l'impresa l'anno successivo a causa di fluttuazioni sfavorevoli nel processo stocastico sottostante alla liquidazione dei sinistri. La variabilità di stima, invece, misura gli scostamenti sfavorevoli dovuti ad un errore nella stima dei pagamenti relativi all'anno successivo.

L'errore che può commettere l'impresa relativo alla stima del triangolo inferiore a meno della prima diagonale, invece, è costituito dalla sola *estimation variance*. L'impresa, infatti, è soggetta al rischio di rivedere, alla fine dell'anno successivo, la stima della riserva sinistri solo a fronte di errori nella stima effettuata l'anno precedente. Questa varianza di stima è condizionata a quanto avvenuto nella nuova diagonale; l'*estimation variance* in esame è, quindi, influenzata sia dalla *estimation* che *process variance* dalla nuova diagonale del triangolo.

La v.a. oggetto di studio per la quantificazione del *reserve risk* risulta essere la sufficienza/insufficienza della riserva sinistri relativa all'anno successivo a quello di valutazione.

I modelli a totale *run off* presentati precedentemente possono essere opportunamente modificati per quantificare il rischio di riservazione a cui è esposta l'impresa utilizzando un approccio simulativo definito *re-reserving*. Questo metodo permette di ottenere la distribuzione della v.a. in esame, cioè la sufficienza della riserva sinistri dell'anno futuro; un importo pari a meno la differenza tra il valore atteso e il percentile al livello di probabilità 0,5% permette, infine, di determinare il requisito patrimoniale di solvibilità richiesto dalla normativa. In modo del tutto equivalente, è possibile calcolare il SCR considerando la v.a. data dai pagamenti stimati per l'anno successivo e la nuova stima della riserva. In questo modo il *Solvency Capital Requirement* è ottenibile come differenza tra il percentile al livello 99,5% di probabilità e il valore atteso della v.a. in esame. L'utilizzo di tale v.a., che è la strada adottata nel presente paragrafo, permette di poter determinare il coefficiente di variazione del *reserve risk*; questo invece non risulta possibile per la v.a. data dalla sufficienza della riserva sinistri in quanto, per definizione, possiede media nulla.

La metodologia *re-reserving*, applicata al contesto del *collective risk model* per la modellizzazione della riserva sinistri, modifica l'approccio simulativo a totale *run off* in modo tale da ottenere la distribuzione di probabilità della v.a. rappresentativa del rischio *one-year*. L'approccio *re-reserving* si sviluppa in due fasi:

- relativamente ai triangoli inferiori precedentemente simulati si considerano le sole prime diagonali. Queste per costruzione raccolgono valori contenenti sia la variabilità di stima, cioè quella propria del metodo deterministico adottato per la stima puntuale dei pagamenti futuri, che quella di processo, cioè quella introdotta dal processo stocastico adottato per simulare la riserva sinistri, che in questa sede è il CRM;
- le diagonali simulate rappresentano le nuove informazioni di cui disporrà l'impresa l'anno successivo per effettuare la nuova stima della riserva. Tali diagonali, in numero pari a quello delle simulazioni effettuate, vengono accorpate al triangolo superiore ottenendo dei trapezi; dai trapezi superiori è possibile stimare con il metodo deterministico prescelto la riserva sinistri relativa alle generazioni mancanti. La stima di tale riserva contiene, per costruzione, la sola *estimation variance*, cioè la variabilità legata alla sola stima, deterministica, della riserva.

L'unione della distribuzione della prima diagonale del triangolo e quella del triangolo inferiore fornisce la distribuzione di probabilità del rischio *one-year* di riservazione. Tale distribuzione è ottenuta come somma tra le due distribuzioni precedenti in quanto le dipendenze sono, per costruzione, già considerate implicitamente; con il metodo *re-reserving*, infatti, ogni triangolo inferiore è condizionato alle informazioni contenute sulla rispettiva nuova diagonale.

In questo contesto, per coerenza con quanto fatto nel capitolo terzo, il metodo deterministico utilizzato è il *frequency-severity* applicato al trapezio del numero dei sinistri cumulati e a quello dei costi medi cumulati. I triangoli utilizzati nelle analisi *one-year*, tuttavia, contengono la c.d. coda statistica; l'antidurata 12+ è, quindi, accorpata a quella precedente. L'uso di triangoli privi di coda è necessario in quanto evita situazioni incoerenti; così facendo si evita di ottenere una variabilità relativa *one-year* superiore a quella a totale *run off*. Quest'ultima circostanza, infatti, risulta paradossale in quanto implica che la variabilità di stima *one-year* del triangolo inferiore, a meno della prima diagonale, sia maggiore delle *estimation* e *process variance* a totale *run off* del medesimo triangolo. La presenza di coda, cioè l'antidurata 12+, nel triangolo può portare a tale inconveniente; nell'approccio *re-reserving*, infatti, i *link ratio* delle varie antidurate, necessari per stimare il triangolo inferiore, vengono, ad ogni *step* simulativo, ricalcolati in funzione dei valori ottenuti sulla nuova diagonale. Il fattore di sviluppo relativo all'antidurata 12 è, per costruzione, calcolato come rapporto tra la cella (1,12+), ogni volta rideterminata dalle simulazioni, e la cella (1,12); la volatilità dei valori dell'ultimo *link ratio* del triangolo può determinare una situazione non coerente in cui la variabilità della riserva sinistri *one-year* risulta essere maggiore di quella a totale *run off*. Tale inconveniente, in definitiva, deriva dall'utilizzo e dal confronto di due metodologie, il *collective risk model* e il *re-reserving* applicato al *collective risk model*, non identiche tra loro.

Di seguito sono presentate le analisi sviluppate con il metodo *re-reserving* relative alle imprese oggetto di studio; i modelli e le ipotesi sottostanti alla riserva sinistri sono le stesse utilizzati nelle analisi a totale *run off* elaborate nel paragrafo precedente. Anche in tale contesto le iterazioni simulate considerate per svolgere le analisi sono pari a 100 mila.

La distribuzione simulata della riserva sinistri dell'impresa SIFA, descritta da un **processo di Poisson composto misturato** ($\sigma_{\tilde{q}} = 3\%$), valutata su un orizzonte temporale annuo è proposta in figura 4.3.1. Nella tabella successiva (fig: 4.3.2) sono riportati i coefficienti di variazioni *one-year* e a totale *run off* sia per singola generazione che a livello totale di riserva.

Fig.4.3.1: Distribuzione di probabilità simulata, con 100.000 iterazioni, della riserva sinistri *one-year* descritta da un processo di Poisson composto misturato, posto $\sigma_{\tilde{q}} = 3\%$, per l'impresa SIFA

Riserva sinistri one-year - SIFA

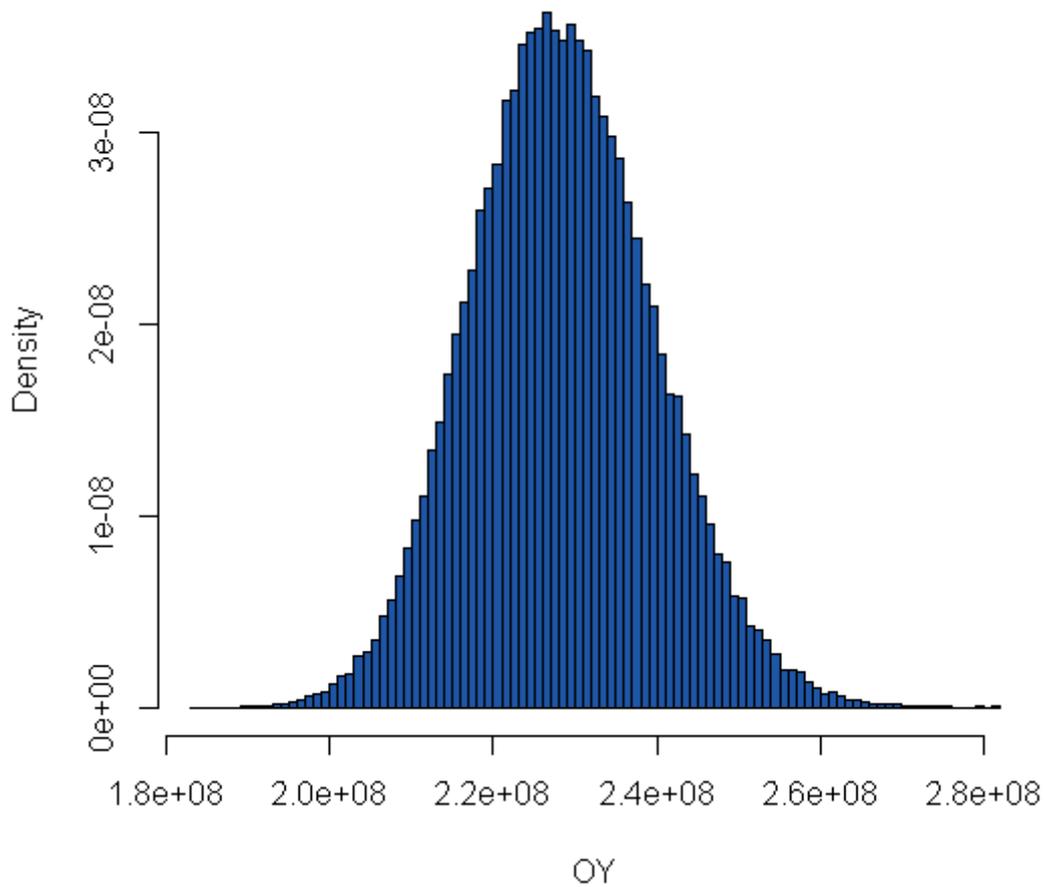


Fig.4.3.2: Confronto tra i coefficienti di variazione *one-year* e a totale *run off*, per l'impresa SIFA, della riserva sinistri descritta da un processo di Poisson composto misturato, posto $\sigma_{\dot{q}} = 3\%$

SIFA			
COEFFICIENTE DI VARIAZIONE			
generazione	one year	tot. Run-off	CV(O.Y.)/CV(tot. Run-off)
1	/	/	/
2	35.45%	35.45%	100.00%
3	21.46%	32.94%	65.17%
4	17.55%	28.56%	61.47%
5	19.61%	27.50%	71.34%
6	19.26%	26.68%	72.20%
7	11.46%	22.67%	50.56%
8	12.48%	20.42%	61.11%
9	11.18%	18.46%	60.58%
10	11.07%	15.74%	70.32%
11	8.60%	11.21%	76.67%
12	5.12%	6.46%	79.36%
totale	4.88%	5.25%	93.07%

I valori riportati in tabella mostrano che la variabilità relativa ad un anno rappresenta la parte preponderante di variabilità a cui è esposta la valutazione della riserva sinistri sull'intero orizzonte di vita. Il valore assunto dall'indice di asimmetria della riserva sinistri valutata su un orizzonte annuo è pari a 0,181 a fronte di un'asimmetria a totale *run off* di 0,100; da un punto di vista matematico, infatti, nulla garantisce che l'indice di asimmetria *one-year* sia minore di quello calcolato sull'intera durata di vita della riserva. Dalla distribuzione della riserva sinistri ottenuta con il metodo *re-reserving* è possibile calcolare, come differenza tra il percentile di ordine 99,5 e il valore atteso, il requisito patrimoniale di solvibilità richiesto da *Solvency II*. In tale circostanza il SCR risulta essere pari a 30.648.692 unità monetarie.

La distribuzione simulata della riserva sinistri per l'impresa AMASES, valutata su un orizzonte temporale annuo, è presentata di seguito (fig: 4.3.3); la tabella di figura 4.3.4, invece, contiene i coefficienti di variazioni *one-year* e a totale *run off* sia per singola generazione che a livello totale di riserva.

Fig.4.3.3: Distribuzione di probabilità simulata, con 100.000 iterazioni, della riserva sinistri *one-year* descritta da un processo di Poisson composto misturato, posto $\sigma_{\bar{q}} = 3\%$, per l'impresa AMASES

Riserva sinistri one-year - AMASES

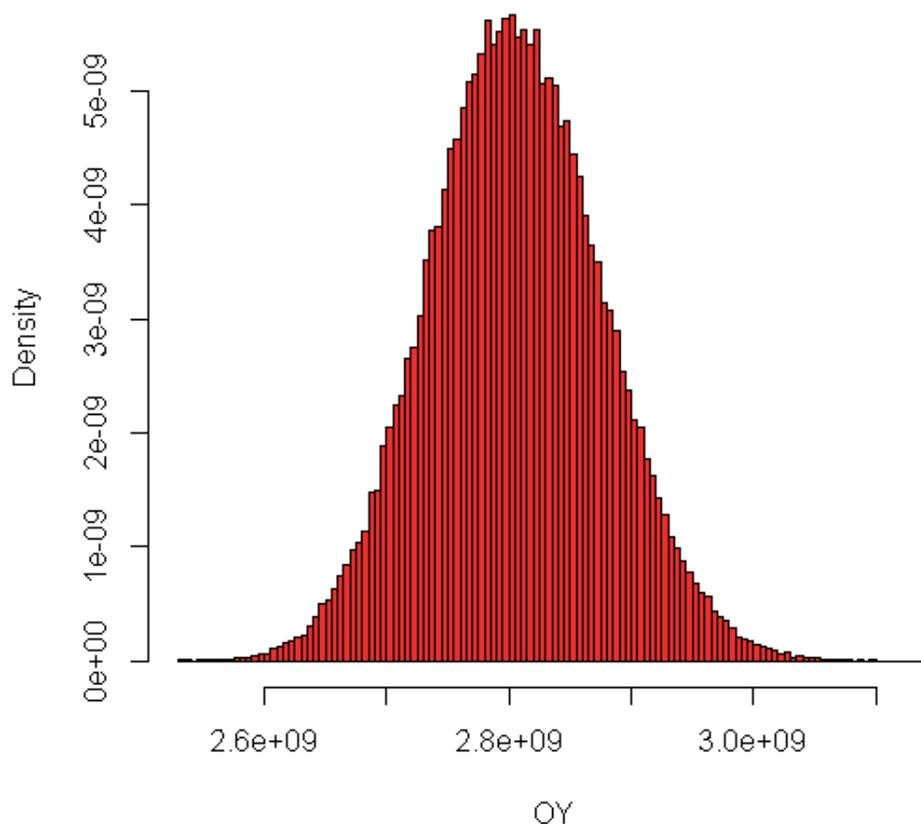
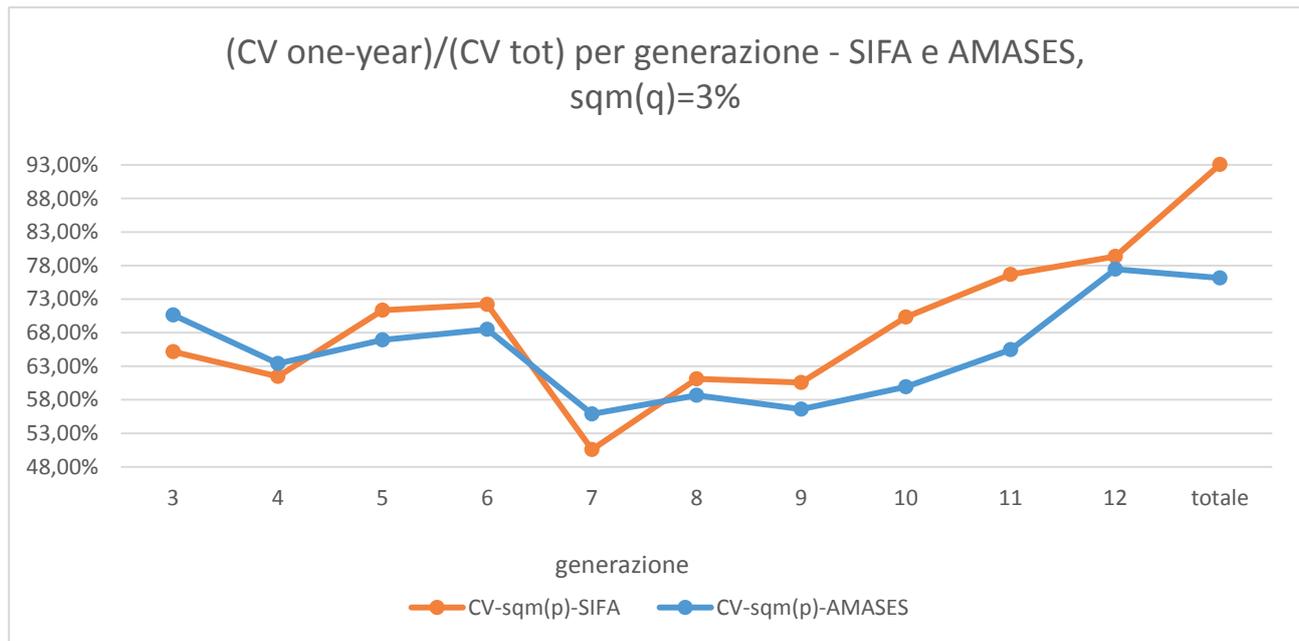


Fig.4.3.4: Confronto tra i coefficienti di variazione *one-year* e a totale *run off*, per l'impresa AMASES, della riserva sinistri descritta da un processo di Poisson composto misturato, posto $\sigma_{\bar{q}} = 3\%$

AMASES			
COEFFICIENTE DI VARIAZIONE			
generazione	one year	tot. Run-off	CV(O.Y.)/CV(tot. Run-off)
1	/	/	/
2	10.84%	10.84%	100.00%
3	7.10%	10.05%	70.63%
4	5.38%	8.49%	63.40%
5	5.21%	7.79%	66.92%
6	5.33%	7.78%	68.49%
7	3.91%	7.00%	55.88%
8	3.78%	6.44%	58.66%
9	3.30%	5.83%	56.60%
10	3.16%	5.27%	59.93%
11	2.95%	4.50%	65.46%
12	2.90%	3.75%	77.46%
totale	2.54%	3.33%	76.16%

La tabella mostra l'incidenza molto elevata della variabilità relativa ad un anno rispetto alla variabilità a cui è esposta la valutazione della riserva sinistri sull'intero orizzonte di vita. Il confronto tra la percentuale di variabilità relativa *one-year* rispetto a quella a totale *run off* tra le due imprese in esame mostra, per le varie generazioni, valori tendenzialmente più bassi per l'impresa AMASES (fig: 4.3.5). A livello complessivo di riserva la variabilità relativa *one-year* dell'impresa di maggiori dimensioni è notevolmente più contenuta di quella posseduta dall'impresa SIFA.

Fig.4.3.5: Rapporto tra i coefficienti di variazione *one-year* e a totale *run off*, per le imprese SIFA (colore arancione) e AMASES (colore azzurro), della riserva sinistri descritta da un processo di Poisson composto misturato, posto $\sigma_{\tilde{q}} = 3\%$



Il valore dell'indice di asimmetria della riserva sinistri dell'impresa AMASES valutata su un orizzonte annuo è pari a 0,089 a fronte di un'asimmetria a totale *run off* di 0,068. Dalla distribuzione *one-year* della riserva sinistri è possibile calcolare il requisito patrimoniale di solvibilità richiesto da *Solvency II*; in tale circostanza il SCR è di 190.219.998 unità monetarie.

La distribuzione della riserva sinistri, considerando l'impresa SIFA, ottenuta con il metodo *re-reserving*, descritta da un **processo di Poisson composto semplice con fattore di disturbo sulle severity** ($\sigma_{\tilde{p}} = 3\%$) è proposta in figura 4.3.6. Nella tabella seguente (fig: 4.3.7) sono riportati i coefficienti di variazioni *one-year* e a totale *run off* sia per singola generazione che a livello totale di riserva.

Fig.4.3.6: Distribuzione di probabilità simulata, con 100.000 iterazioni, della riserva sinistri *one-year* descritta da un processo di Poisson composto semplice con fattore di disturbo sulle *severity*, posto $\sigma_{\bar{p}} = 3\%$, per l'impresa SIFA

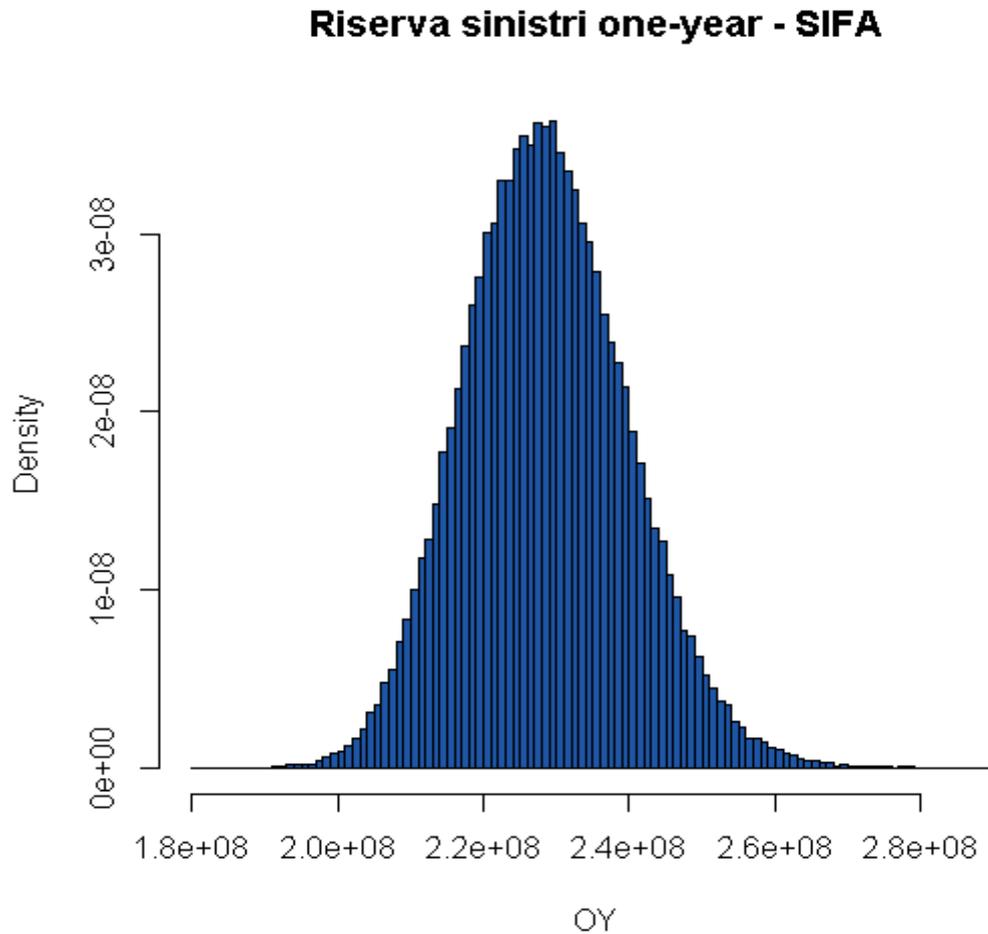


Fig.4.3.7: Confronto tra i coefficienti di variazione *one-year* e a totale *run off*, per l'impresa SIFA, della riserva sinistri descritta da un processo di Poisson composto semplice con fattore di disturbo sulle *severity*, posto $\sigma_{\bar{p}} = 3\%$

SIFA			
COEFFICIENTE DI VARIAZIONE			
generazione	one year	tot. Run-off	CV(O.Y.)/CV(tot. Run-off)
1	/	/	/
2	35.49%	35.49%	100.00%
3	21.51%	33.04%	65.11%
4	17.61%	28.55%	61.68%
5	19.70%	27.54%	71.51%
6	19.17%	26.76%	71.63%
7	11.45%	22.78%	50.27%
8	12.55%	20.52%	61.17%
9	11.21%	18.46%	60.69%
10	11.04%	15.73%	70.16%
11	8.55%	11.19%	76.42%
12	5.14%	6.45%	79.66%
totale	4.88%	5.25%	92.93%

Anche in tale situazione, i valori riportati nella tabella precedente mostrano il peso preponderante della variabilità relativa ad un anno rispetto a quella a cui è esposta la valutazione della riserva sinistri a totale *run off*. Il fattore di disturbo \tilde{p} determina comportamenti della variabilità relativa *one-year* analoghi a quelli introdotti dal fattore sistematico sul numero dei sinistri riservati. L'effetto della v.a. \tilde{p} è, invece, molto consistente sull'asimmetria; il valore assunto dall'indice di asimmetria della riserva sinistri valutata su un orizzonte annuo è pari a 0,229 rispetto ad un'asimmetria a totale *run off* di 0,134. Dalla distribuzione della riserva sinistri *one-year* è possibile calcolare il requisito patrimoniale di solvibilità richiesto da *Solvency II*; la differenza tra il percentile di ordine 99,5% e il valore atteso porta ad un valore del SCR di 31.504.473 unità monetarie. La presenza del fattore sistematico sul costo dei singoli sinistri porta, quindi, ad un requisito patrimoniale superiore rispetto al caso in cui è presente la sola v.a. \tilde{q} . L'incremento di capitale richiesto, rispetto al modello precedente, è dovuto alla presenza di maggiore asimmetria; il fattore \tilde{p} , infatti, determina un incremento notevole del solo indice di asimmetria lasciando pressoché invariato il valore del coefficiente di variazione rispetto a quello ottenuto con il modello contenente il solo fattore sistematico sul numero dei sinistri riservati.

Considerando l'impresa di maggiori dimensioni, cioè AMASES, la distribuzione simulata della riserva sinistri, valuta su un orizzonte annuo, è presentata in figura 4.3.8; la tabella di figura 4.3.9, invece, contiene i coefficienti di variazioni *one-year* e a totale *run off* sia per singola generazione che a livello aggregato di riserva.

Fig.4.3.8: Distribuzione di probabilità simulata, con 100.000 iterazioni, della riserva sinistri *one-year* descritta da un processo di Poisson composto semplice con fattore di disturbo sulle *severity*, posto $\sigma_{\hat{p}} = 3\%$, per l'impresa AMASES

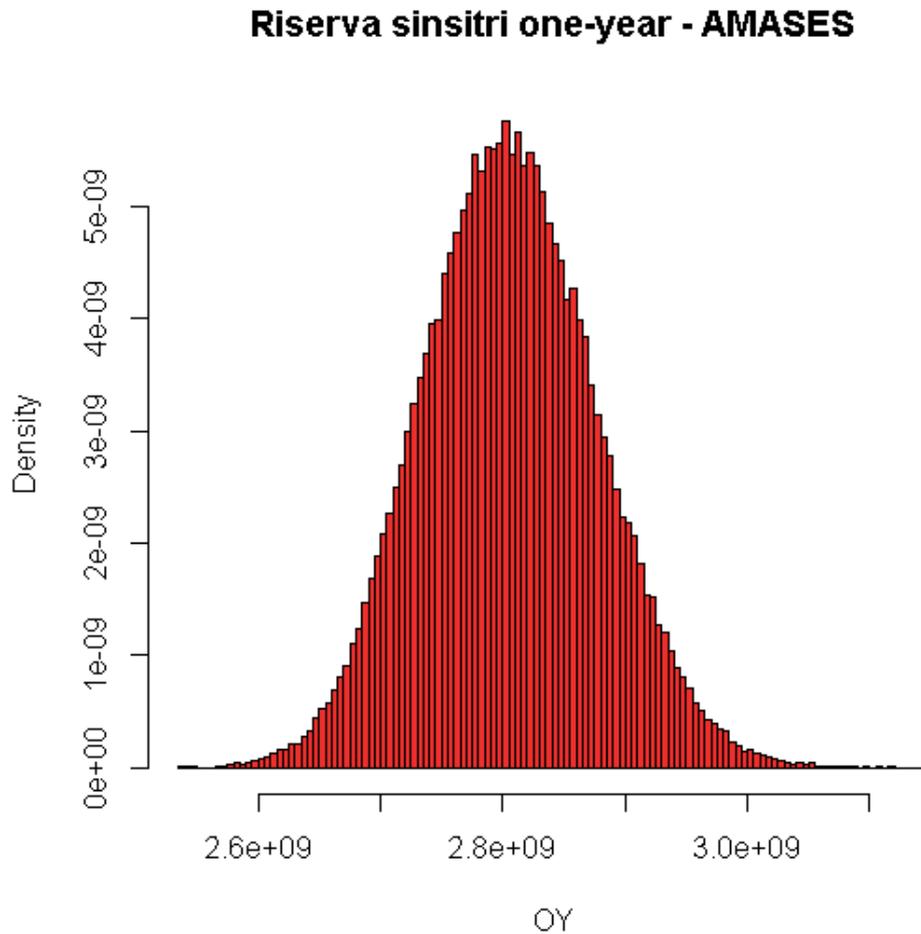
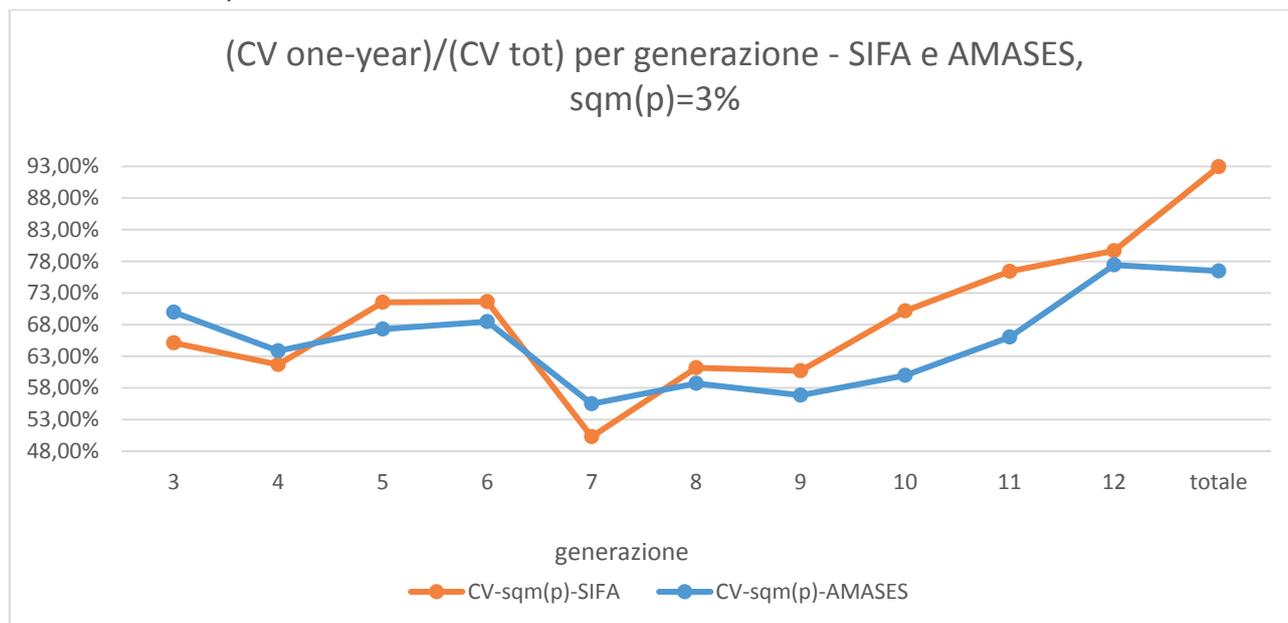


Fig.4.3.9: Confronto tra i coefficienti di variazione *one-year* e a totale *run off*, per l'impresa AMASES, della riserva sinistri descritta da un processo di Poisson composto semplice con fattore di disturbo sulle *severity*, posto $\sigma_{\hat{p}} = 3\%$

AMASES			
COEFFICIENTE DI VARIAZIONE			
generazione	one year	tot. Run-off	CV(O.Y.)/CV(tot. Run-off)
1	/	/	/
2	10.82%	10.82%	100.00%
3	7.11%	10.16%	69.96%
4	5.40%	8.45%	63.84%
5	5.22%	7.76%	67.29%
6	5.34%	7.79%	68.47%
7	3.90%	7.03%	55.49%
8	3.77%	6.43%	58.71%
9	3.31%	5.83%	56.85%
10	3.16%	5.28%	59.97%
11	2.96%	4.48%	66.01%
12	2.90%	3.74%	77.42%
totale	2.54%	3.32%	76.46%

In modo analogo al caso precedente si osserva un'incidenza della variabilità relativa ad un anno molto elevata rispetto alla variabilità della riserva sinistri valutata a totale *run off*. La proporzione di variabilità relativa *one-year* rispetto a quella a totale *run off* per le due imprese SIFA e AMASES, mostra valori generalmente più contenuti, per le differenti generazioni, per l'impresa di maggiori dimensioni (fig: 4.3.10); a livello totale di riserva il coefficiente di variazione dell'impresa AMASES è considerevolmente più contenuto rispetto a quello dell'impresa SIFA.

Fig.4.3.10: Rapporto tra i coefficienti di variazione *one-year* e a totale *run off*, per le imprese SIFA (colore arancione) e AMASES (colore azzurro), della riserva sinistri descritta da un processo di Poisson composto semplice, posto $\sigma_{\tilde{p}} = 3\%$



L'indice di asimmetria della riserva sinistri dell'impresa AMASES valutata su un orizzonte annuo è pari a 0,122 mentre l'asimmetria a totale *run off* è di 0,077. Dalla distribuzione simulata della riserva sinistri ottenuta con il metodo *re-reserving*, è possibile calcolare il requisito patrimoniale di solvibilità che, in tale circostanza, è pari a 191.850.901 unità monetarie. In modo del tutto analogo a quanto osservato per l'impresa SIFA, l'incremento di capitale richiesto all'impresa AMASES in presenza del fattore sistematico \tilde{p} è dovuto ad un aumento consistente dell'indice di asimmetria a fronte di una variabilità relativa quasi invariata rispetto al modello precedente in cui è presente il solo fattore di disturbo sul numero dei sinistri riservati.

La distribuzione della riserva sinistri *one-year* dell'impresa SIFA ottenuta con il metodo *re-reserving*, descritta da un **processo di Poisson composto misturato con fattore di disturbo sulle severity** ($\sigma_{\tilde{q}} = 3\%$ e $\sigma_{\tilde{p}} = 3\%$), è proposta in figura 4.3.11. Nella tabella successiva (fig: 4.3.12) sono riportati i coefficienti di variazioni *one-year* e a totale *run off* sia per singola generazione che a livello totale di riserva.

Fig.4.3.11: Distribuzione di probabilità simulata, con 100.000 iterazioni, della riserva sinistri *one-year* descritta da un processo di Poisson composto misturato con fattore di disturbo sulle *severity*, posti $\sigma_{\bar{q}} = 3\%$ e $\sigma_{\bar{p}} = 3\%$, per l'impresa SIFA

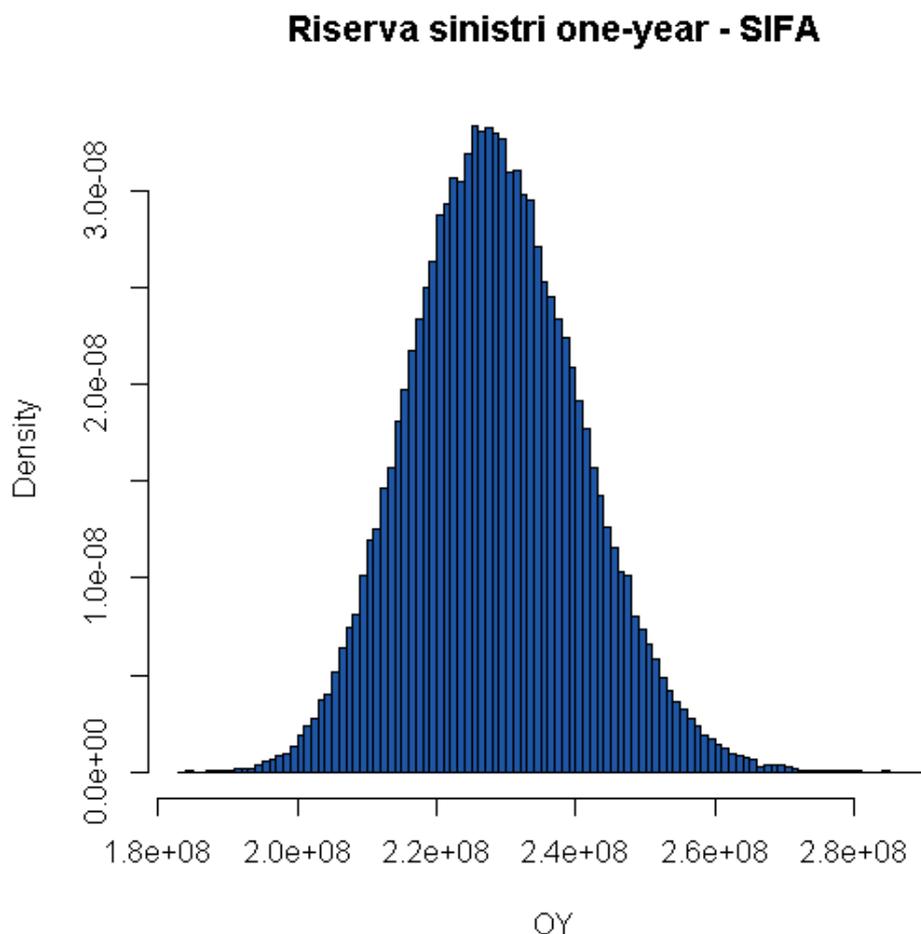


Fig.4.3.12: Confronto tra i coefficienti di variazione *one-year* e a totale *run off*, per l'impresa SIFA, della riserva sinistri descritta da un processo di Poisson composto misturato con fattore di disturbo sulle *severity*, posti $\sigma_{\bar{q}} = 3\%$ e $\sigma_{\bar{p}} = 3\%$

SIFA			
COEFFICIENTE DI VARIAZIONE			
generazione	one year	tot. Run-off	CV(O.Y.)/CV(tot. Run-off)
1	/	/	/
2	35.67%	35.67%	100.00%
3	21.51%	33.25%	64.71%
4	17.63%	28.80%	61.22%
5	19.82%	27.73%	71.45%
6	19.30%	26.94%	71.66%
7	11.60%	22.98%	50.47%
8	12.67%	20.82%	60.87%
9	11.26%	18.72%	60.15%
10	11.16%	16.04%	69.54%
11	8.83%	11.61%	76.06%
12	5.72%	7.12%	80.41%
totale	5.33%	6.05%	88.16%

I valori in tabella informano, anche in tale modello, che la variabilità relativa ad un anno costituisce la componente principale di variabilità a cui è esposta la riserva sinistri valutata a totale *run off*. La presenza congiunta dei due fattori di disturbo, sul numero dei sinistri riservati e sulle rispettive *severity*, determina valori di variabilità relativa *one-year* superiori a quelli ottenuti nei casi in cui è presente un solo fattore sistematico. Il rapporto tra variabilità relativa *one-year* e a totale *run off*, sebbene ancora molto elevato, è minore rispetto ai modelli precedentemente analizzati²⁰. Il valore assunto dall'indice di asimmetria della riserva sinistri valutata su un orizzonte annuo è pari a 0,217 mentre l'asimmetria a totale *run off* è di 0,147. Il valore del SCR, ottenuto dalla distribuzione simulata *one-year* della riserva sinistri, risulta essere di 34.003.789 unità monetarie. La presenza di entrambi i fattori sistematici comporta, quindi, un requisito patrimoniale superiore rispetto ai casi in cui è presente un solo fattore sistematico. L'incremento di capitale richiesto, rispetto al modello in cui è presente il solo fattore \tilde{q} , è dovuto alla presenza di maggiore variabilità relativa e asimmetria; con riferimento al modello contenete la sola v.a. \tilde{p} , invece, l'incremento di capitale è determinato dal solo incremento del coefficiente di variazione, in quanto l'indice di asimmetria risulta essere quasi identico.

La distribuzione simulata della riserva sinistri per l'impresa AMASES, valuta su un orizzonte annuo, è presentata di seguito (fig: 4.3.13); la tabella di figura 4.3.14, invece, contiene i coefficienti di variazioni *one-year* e a totale *run off* sia per singola generazione che a livello totale di riserva.

²⁰ Questo risultato deriva dalla relazione analitica che descrive la varianza della riserva sinistri nel contesto CRM; in questo modello la varianza della riserva valutata a totale *run off* contiene i termini che quantificano la dipendenza tra le tutte celle del triangolo dati dai doppi prodotti tra i valori delle celle stesse moltiplicati per la *standard deviation* del/i fattore/i di disturbo. Tali termini di dipendenza, a meno della diagonale, non sono presenti nella varianza della riserva sinistri *one-year* valutata con l'approccio *re-reserving*. Quando sono presenti entrambi i fattori di disturbo, infine, la varianza della riserva sinistri a totale *run off* diviene più elevata rispetto ai casi in cui sia presente un solo fattore sistematico.

Fig.4.3.13: Distribuzione di probabilità simulata, con 100.000 iterazioni, della riserva sinistri *one-year* descritta da un processo di Poisson composto misturato con fattore di disturbo sulle *severity*, posti $\sigma_{\bar{q}} = 3\%$ e $\sigma_{\bar{p}} = 3\%$, per l'impresa AMASES

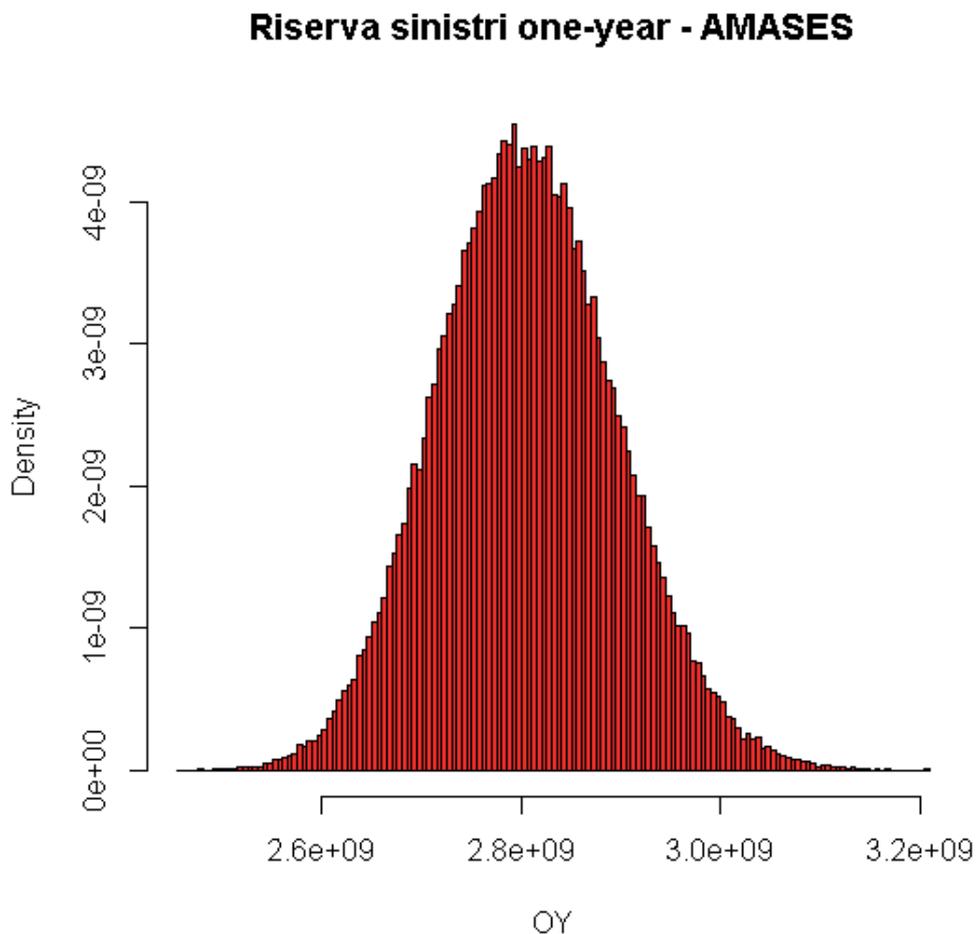
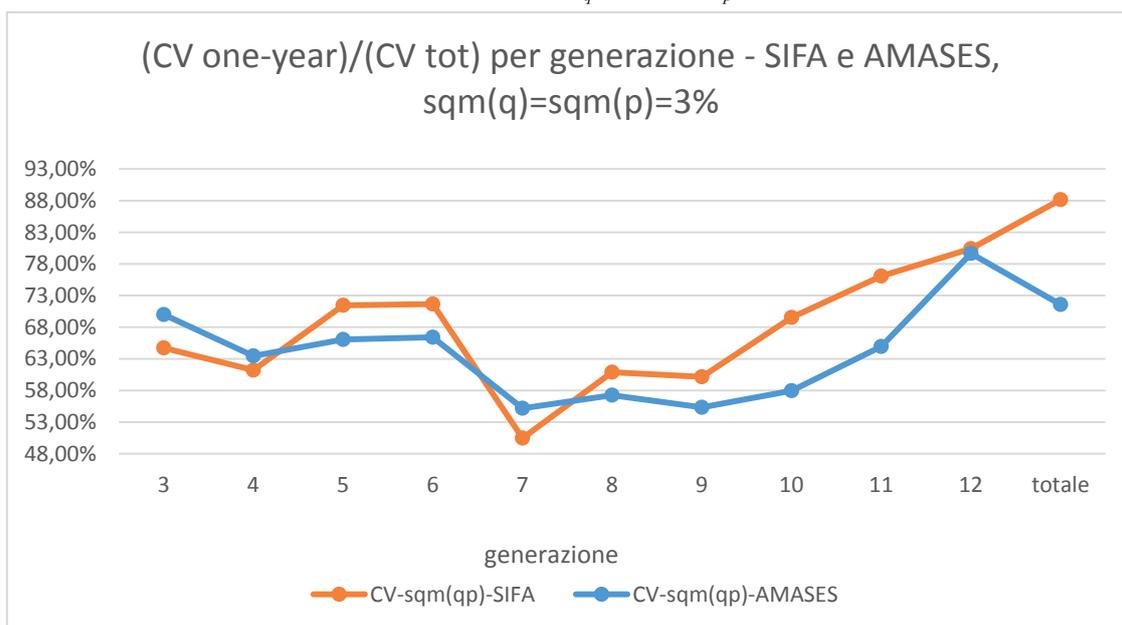


Fig.4.3.14: Confronto tra i coefficienti di variazione *one-year* e a totale *run off*, per l'impresa AMASES, della riserva sinistri descritta da un processo di Poisson composto misturato con fattore di disturbo sulle *severity*, posti $\sigma_{\bar{q}} = 3\%$ e $\sigma_{\bar{p}} = 3\%$

AMASES			
COEFFICIENTE DI VARIAZIONE			
generazione	one year	tot. Run-off	CV(O.Y.)/CV(tot. Run-off)
1	/	/	/
2	11.25%	11.25%	100.00%
3	7.40%	10.57%	69.98%
4	5.72%	9.00%	63.47%
5	5.51%	8.34%	66.06%
6	5.55%	8.36%	66.40%
7	4.22%	7.64%	55.19%
8	4.06%	7.09%	57.26%
9	3.64%	6.57%	55.34%
10	3.52%	6.07%	57.96%
11	3.51%	5.41%	64.93%
12	3.83%	4.81%	79.65%
totale	3.21%	4.49%	71.59%

Anche in tale situazione l'incidenza della variabilità relativa ad un anno su quella a totale *run off* della riserva sinistri è molto elevata; tale rapporto, tuttavia, come osservato per l'impresa SIFA, è più contenuto rispetto ai modelli precedenti. Confrontando le due imprese si osserva che la proporzione di variabilità relativa *one-year* rispetto a quella a totale *run off* a livello complessivo di riserva è più contenuta per l'impresa AMASES (fig: 4.3.15); anche al variare delle generazioni, inoltre, l'impresa di maggiori dimensioni possiede quasi sempre valori più contenuti rispetto all'impresa SIFA.

Fig.4.3.15: Rapporto tra i coefficienti di variazione *one-year* e a totale *run off*, per le imprese SIFA (colore arancione) e AMASES (colore azzurro), della riserva sinistri descritta da un processo di Poisson composto misturato con fattore di disturbo sulle *severity*, posti $\sigma_{\tilde{q}} = 3\%$ e $\sigma_{\tilde{p}} = 3\%$



L'indice di asimmetria della riserva sinistri dell'impresa AMASES valutata su un orizzonte annuo è pari a 0,133 a fronte di un'asimmetria a totale *run off* di 0,105. Dalla distribuzione simulata della riserva sinistri ottenuta con il metodo *re-reserving*, è possibile calcolare il requisito patrimoniale di solvibilità richiesto da *Solvency II* come differenza tra il percentile di ordine 99,5% e il valore atteso. In tale circostanza il SCR risulta essere pari a 244.148.538 unità monetarie. La presenza di entrambi i fattori sistematici comporta, quindi, un requisito patrimoniale superiore rispetto ai casi in cui è presente un solo fattore sistematico. L'incremento di capitale richiesto, rispetto ai modelli precedenti, è dovuto, in modo analogo a quanto visto per l'impresa SIFA, alla presenza di maggiore variabilità relativa e asimmetria rispetto al caso in cui è presente la sola v.a. \tilde{q} . Con riferimento al modello contenete la sola v.a. \tilde{p} , invece, l'incremento di capitale è determinato dal solo incremento del coefficiente di variazione, in quanto l'indice di asimmetria risulta essere quasi identico.

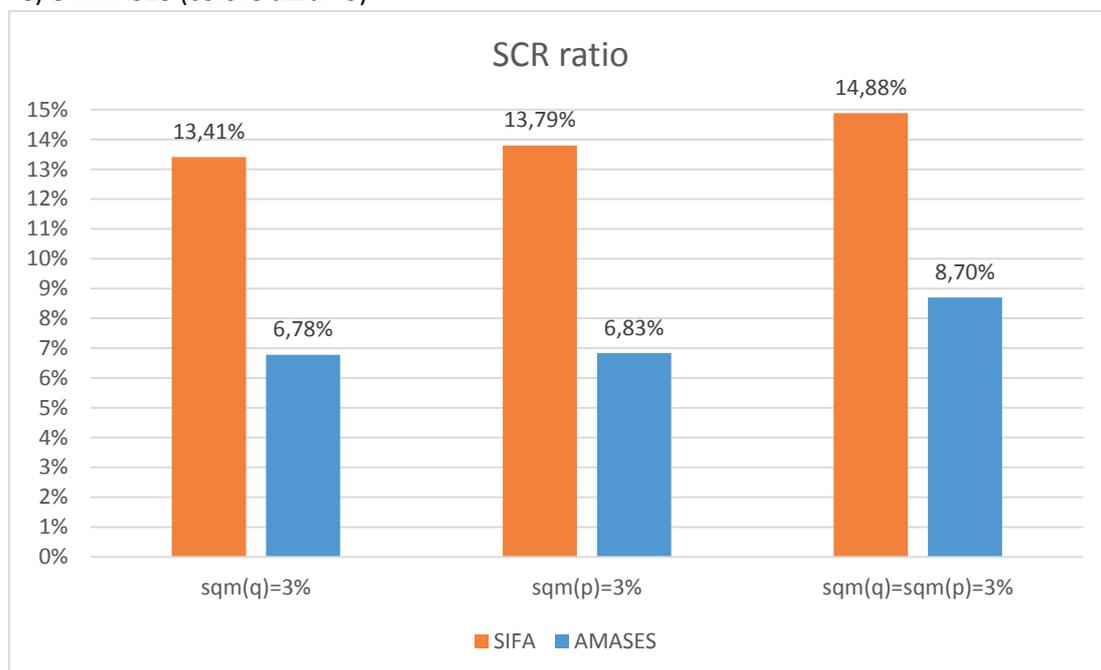
Gli SCR calcolati poco sopra mostrano ammontari monetari più elevati per l'impresa di maggiori dimensioni; il volume della riserva sinistri dell'impresa AMASES, infatti, è circa dieci volte maggiore rispetto a quello dell'impresa SIFA. L'incidenza del *reserve risk* per le due imprese, dato dal rapporto tra il requisito di capitale richiesto dalla normativa e il valore della *best estimate*, definito *SCR ratio*, permette di comprendere l'importanza in termini relativi del rischio di riservazione tra le due

imprese. La percentuale di SCR in termini di valore attuale atteso della riserva sinistri, ottenuto con il metodo deterministico prescelto, risulta essere più elevata per l'impresa SIFA; il requisito di capitale necessario a fronteggiare il *reserve risk* per i 12 mesi successivi, infatti, cresce in modo meno che proporzionale rispetto al volume della riserva sinistri (figure: 4.3.16 e 4.3.17).

Fig.4.3.16: *Solvency Capital Requirement ratio* per le imprese SIFA e AMASES

SCR RATIO			
	$\sigma_{\tilde{q}} = 3\%$	$\sigma_{\tilde{p}} = 3\%$	$\sigma_{\tilde{q}} = \sigma_{\tilde{p}} = 3\%$
SIFA	13.42%	13.79%	14.89%
AMASES	6.78%	6.83%	8.70%

Fig.4.3.17: Grafico a istogramma dei *Solvency Capital Requirement ratio* per le imprese SIFA (colore arancione) e AMASES (colore azzurro)



Le analisi precedenti hanno permesso di conoscere l'elevato impatto della variabilità relativa *one-year* della riserva sinistri rispetto a quella a totale *run off*. Quanto presentato di seguito, invece, ha l'obiettivo di valutare, per l'approccio *one-year* e a totale *run off*, la dipendenza esistente tra il primo anno di calendario stimato e il triangolo inferiore al netto della diagonale. L'analisi è condotta a titolo esemplificativo per le due imprese nel solo caso in cui la riserva sinistri sia descritta da un processo di Poisson composto misturato posto $\sigma_{\tilde{q}} = 3\%$.

Le tabelle seguenti relative all'impresa SIFA (figure 4.3.18 e 4.3.19) contengono, per le singole generazioni e a livello totale di riserva valutata su un orizzonte annuo e a totale *run off*, i valori delle varianze della prima diagonale, della riserva al netto della diagonale stessa e il valore del termine che quantifica la dipendenza tra le due grandezze precedenti. Queste tre grandezze sono rapportate al valore della varianza complessiva della riserva sinistri, totale o per generazione, ottenendo così delle grandezze percentuali che possono essere confrontate al variare delle generazioni e dell'impresa considerata.

Fig.4.3.18: Valori percentuali rispetto alla varianza complessiva della riserva, a livello di generazioni e di riserva totale, delle varianze della diagonale, della riserva al netto della diagonale stessa e valore del termine che quantifica la dipendenza tra le due grandezze precedenti. Impresa SIFA con riserva sinistri *one-year* valutata con l'approccio *re-reserving*.

SIFA					
ONE-YEAR					
valori percentuali:	varianza totale	varianza diagonale	varianza senza diagonale	dipendenza	ρ
generazione					
1	/	/	/	/	/
2	100%	100%	/	/	/
3	100%	47,05%	51,15%	1,80%	0,02
4	100%	45,24%	52,35%	2,40%	0,02
5	100%	69,32%	26,92%	3,76%	0,04
6	100%	75,76%	18,85%	5,39%	0,07
7	100%	57,08%	37,03%	5,89%	0,06
8	100%	73,02%	18,09%	8,89%	0,12
9	100%	74,51%	13,36%	12,13%	0,19
10	100%	75,15%	7,25%	17,60%	0,38
11	100%	67,74%	6,30%	25,96%	0,63
12	100%	47,69%	11,54%	40,77%	0,87
totale	100%	33,72%	27,62%	38,66%	0,63

Fig.4.3.19: Valori percentuali rispetto alla varianza complessiva della riserva, a livello di generazioni e di riserva totale, delle varianze della diagonale, della riserva al netto della diagonale stessa e valore del termine che quantifica la dipendenza tra le due grandezze precedenti. Impresa SIFA con riserva sinistri valutata a totale *run off*.

SIFA					
TOTALE RUN-OFF					
valori percentuali:	varianza totale	varianza diagonale	varianza senza diagonale	dipendenza	ρ
generazione					
1	/	/	/	/	/
2	100%	100%	/	/	/
3	100%	20,31%	79,40%	0,29%	0,00
4	100%	17,31%	82,35%	0,34%	0,00
5	100%	35,47%	64,58%	-0,05%	0,00
6	100%	39,25%	60,58%	0,17%	0,00
7	100%	14,62%	84,98%	0,40%	0,01
8	100%	27,01%	72,26%	0,73%	0,01
9	100%	27,30%	71,49%	1,21%	0,01
10	100%	37,31%	60,79%	1,89%	0,02
11	100%	39,90%	56,31%	3,79%	0,04
12	100%	30,08%	58,83%	11,09%	0,13
totale	100%	29,25%	54,13%	16,62%	0,21

La tabella di figura 4.3.18 relativa alla valutazione *one-year* della riserva sinistri mostra valori del coefficiente di correlazione lineare maggiori, sia a parità di generazione che a livello totale di riserva, rispetto alla valutazione a totale *run off* della riserva. Nel contesto *one-year* basato sul metodo *re-reserving*, infatti, i valori della nuova diagonale, diversi per ogni *step* simulativo, influenzano in modo rilevante la stima della restante riserva sinistri che, per costruzione, essendo basata su una meccanica *Chain Ladder*, dipende dai valori simulati nella nuova diagonale. È interessante notare, inoltre, come il peso della dipendenza aumenti al crescere della generazione assumendo un comportamento strettamente crescente rispetto alle generazioni; i valori dei *link ratio*, rideterminati in base alle nuove informazioni disponibili date dalla diagonale simulata, infatti, assumono generalmente valori più elevati nelle prime antidurate. La magnitudo dei fattori di sviluppo nelle prime antidurate, quindi, influenza in modo molto più consistente tutti i restanti valori della generazione considerata rispetto a quanto non accada per le prime generazioni del triangolo. Con riferimento alla riserva sinistri valutata sull'intera vita residua (figura 4.3.19), invece, la dipendenza tra i valori della diagonale e del restante triangolo inferiore risulta determinata dal modello stocastico adottato per descrivere la riserva. I valori delle diagonali, quindi, per costruzione non influenzano in modo determinante i restanti valori della riserva in quanto la dipendenza tra le varie celle è introdotta, in modo analogo sull'intero triangolo inferiore di *run off*, dai fattori di disturbo presenti nel modello considerato. I valori del coefficiente ρ , che quantifica la dipendenza lineare, infatti, non sono strettamente crescenti nelle generazioni, come accade, ad esempio, per la quinta; spostandosi su generazioni sempre più recenti, tuttavia, il peso della dipendenza risulta essere crescente e sempre più consistente.

Le tabelle di figure 4.3.20 e 4.3.21, rispettivamente per l'analisi *one-year* e a totale *run off* della riserva, sono riferite all'impresa AMASES.

Fig.4.3.20: Valori percentuali rispetto alla varianza complessiva della riserva, a livello di generazioni e di riserva totale, delle varianze della diagonale, della riserva al netto della diagonale stessa e valore del termine che quantifica la dipendenza tra le due grandezze precedenti. Impresa AMASES con riserva sinistri *one-year* valutata con l'approccio *re-reserving*.

AMASES					
ONE YEAR					
valori percentuali:	varianza totale	varianza diagonale	varianza senza diagonale	dipendenza	ρ
generazione					
1	/	/	/	/	/
2	100%	100%	/	/	/
3	100%	54,14%	38,44%	7,41%	0,08
4	100%	42,27%	47,70%	10,03%	0,11
5	100%	51,53%	35,75%	12,72%	0,15
6	100%	58,56%	25,89%	15,55%	0,20
7	100%	45,84%	35,79%	18,37%	0,23
8	100%	48,88%	28,73%	22,38%	0,30
9	100%	44,98%	28,00%	27,01%	0,38
10	100%	43,70%	22,92%	33,38%	0,53
11	100%	37,60%	21,05%	41,35%	0,73
12	100%	24,94%	26,93%	48,13%	0,93
totale	100%	19,21%	37,22%	43,57%	0,81

Fig.4.3.21: Valori percentuali rispetto alla varianza complessiva della riserva, a livello di generazioni e di riserva totale, delle varianze della diagonale, della riserva al netto della diagonale stessa e valore del termine che quantifica la dipendenza tra le due grandezze precedenti. Impresa AMASES con riserva sinistri valutata a totale *run off*.

AMASES					
TOTALE RUN-OFF					
valori percentuali:	varianza totale	varianza diagonale	varianza senza diagonale	dipendenza	ρ
generazione					
1	/	/	/	/	/
2	100%	100%	/	/	/
3	100%	26,82%	70,98%	2,20%	0,03
4	100%	16,96%	78,43%	4,61%	0,06
5	100%	23,02%	72,22%	4,77%	0,06
6	100%	27,41%	68,09%	4,50%	0,05
7	100%	14,29%	80,00%	5,71%	0,08
8	100%	16,78%	76,56%	6,66%	0,09
9	100%	14,38%	76,95%	8,67%	0,13
10	100%	15,68%	72,17%	12,14%	0,18
11	100%	16,10%	64,19%	19,71%	0,31
12	100%	14,96%	54,10%	30,94%	0,54
totale	100%	11,13%	54,07%	34,80%	0,71

Le dinamiche che si osservano dal confronto delle due tabelle sono analoghe a quanto visto per l'impresa di minori dimensioni; i valori della dipendenza lineare, quantificati con il coefficiente ρ , sono più elevati, sia a livello di generazioni che a livello aggregato di riserva, nel contesto *one-year*. In quest'ultimo caso, inoltre, si osserva un andamento strettamente crescente nelle generazioni della dipendenza lineare tra la diagonale e i valori della restante generazione dovuto, per costruzione, all'approccio *re-reserving* e al metodo deterministico su cui si fonda. Nel contesto a totale *run off*, invece, i valori di ρ non sono necessariamente crescenti nelle generazioni. Nelle prime generazioni, infatti, si osserva un andamento decrescente della dipendenza lineare; questa, tuttavia, dalla sesta generazione in poi diventa crescente in modo monotono assumendo valori sempre più consistenti.

Il confronto tra le due imprese (fig: 4.3.22) mostra valori di dipendenza lineare, a livello di riserva, considerevolmente più elevati per l'impresa più grande sia nel il contesto *one-year* che in quello a totale *run off*. Questo risultato deriva dalla maggiore incidenza del fattore di disturbo \tilde{q} sull'impresa AMASES rispetto all'impresa SIFA. L'impresa di elevate dimensioni, a fronte del consistente numero di sinistri riservati, infatti, diversifica un'ampia componente del rischio non sistematico restando esposta ad una variabilità relativa in larga parte determinata dal fattore di disturbo. La v.a. \tilde{q} , come noto, introduce dipendenza positiva tra le celle del triangolo; la maggiore incidenza del fattore sistematico sull'impresa AMASES rispetto all'impresa SIFA, quindi, determina una più elevata dipendenza lineare negli importi riservati dall'impresa di maggiori dimensioni.

Fig.4.3.22: Confronto tra le imprese SIFA e AMASES a livello totale di riserva sinistri *one-year* e a totale *run off*

	varianza totale	varianza diagonale	varianza senza diagonale	dipendenza	ρ
AMASES - ONE YEAR	100%	19,21%	37,22%	43,57%	0,81
SIFA - ONE YEAR	100%	33,72%	27,62%	38,66%	0,63
AMASES - TOT. RUN-OFF	100%	11,13%	54,07%	34,80%	0,71
SIFA - TOT.RUN-OFF	100%	29,25%	54,13%	16,62%	0,21

4.3.1 Sensibilità del SCR rispetto al coefficiente di variazione delle *severity* e un confronto tra il *collective risk model* e il *bootstrap* per la valutazione del requisito di capitale

Le caratteristiche della v.a. del costo dei singoli sinistri sono, generalmente, più mutevoli rispetto a quelle del numero dei sinistri riservati. I momenti delle v.a. \tilde{Z} sono stimate dalle imprese di assicurazione dal *database* contenente le informazioni di ogni sinistro. La variabilità relativa della *severity* è una caratteristica di fondamentale interesse per l'assicuratore in quanto è un elemento che influenza in modo considerevole la dispersione e asimmetria della riserva sinistri e, in ultima battuta, il valore del requisito patrimoniale di solvibilità. Di seguito è presentato, per entrambe le imprese, il calcolo del SCR sotto l'ipotesi di un incremento del coefficiente di variazione delle *severity*. Si ipotizza che il costo dei singoli sinistri di SIFA sia più volatile, a fronte della minore dimensione dell'impresa, rispetto a quello di AMASES; la variabilità relativa delle v.a. \tilde{Z} viene raddoppiata per l'impresa di minori dimensioni mentre per l'impresa più grande viene aumentata del 50%.

Le tabelle seguenti permettono di confrontare le caratteristiche della riserva sinistri, valutata su un orizzonte annuo e a totale *run off*, nelle situazioni di aggravamento o meno del coefficiente di variazione delle *severity*. I valori relativi al caso base, cioè senza modifiche del coefficiente di variazione del costo dei singoli sinistri, sono quelli ottenuti nel paragrafo precedente.

Le figure 4.3.1.1 e 4.3.1.2 contengono, rispettivamente per SIFA e AMASES, le caratteristiche di interesse della riserva sinistri, nonché il SCR e SCR *ratio*, nel caso in cui la riserva sia descritta da un **processo di Poisson composto misturato** posto $\sigma_{\tilde{q}} = 3\%$.

Fig.4.3.1.1: Confronto, per l'impresa SIFA, tra le caratteristiche della riserva sinistri, *one-year* e a totale *run off*, nel caso di incremento o meno del coefficiente di variazione delle *severity*, nella circostanza in cui la riserva sinistri segua un processo di Poisson composto misturato posto $\sigma_{\tilde{q}} = 3\%$

SIFA						
	CV(one-year)	CV(tot.run-off)	asim.(one-year)	asim.(tot.run-off)	SCR	SCR ratio
CV(Z)	4,88%	5,25%	0,181	0,100	30.648.692	13,41%
2*CV(Z)	8,79%	8,95%	0,404	0,215	59.839.525	26,19%
variazione %	80,16%	70,42%	122,57%	116,20%	95,24%	95,24%

Fig.4.3.1.2: Confronto, per l'impresa AMASES, tra le caratteristiche della riserva sinistri, *one-year* e a totale *run off*, nel caso di incremento o meno del coefficiente di variazione delle *severity*, nella circostanza in cui la riserva sinistri segua un processo di Poisson composto misturato posto $\sigma_{\tilde{q}} = 3\%$

AMASES						
	CV(one-year)	CV(tot.run-off)	asim.(one-year)	asim.(tot.run-off)	SCR	SCR ratio
CV(Z)	2,54%	3,33%	0,089	0,068	190.219.998	6,78%
1,5*CV(Z)	3,06%	3,67%	0,129	0,068	234.501.717	8,35%
variazione %	20,58%	10,21%	45,83%	0,21%	23,28%	23,28%

Analizzando l'impresa SIFA si osserva che la variabilità relativa della riserva, *one-year* e a totale *run off*, si è incrementata in modo meno che proporzionale rispetto a quella delle *severity*. L'asimmetria, invece, sia *one-year* che a totale *run off* risulta essere più reattiva, crescendo in modo più che proporzionale. Il valore del SCR, che è influenzato sia dal coefficiente di variazione che dall'asimmetria, infine, risulta essere quasi raddoppiato rispetto al caso base.

I risultati ottenuti per l'impresa AMASES, invece, mostrano crescite percentuali del coefficiente di variazione, asimmetria e SCR molto meno che proporzionali rispetto all'incremento applicato alla variabilità relativa delle *severity*. La maggiore dimensione dell'impresa, quindi, mitiga la maggiore dispersione della v.a. \tilde{Z} rispetto al caso non modificato.

Le tabelle seguenti (figure: 4.3.1.3 e 4.3.1.4) contengono, per le imprese SIFA e AMASES, le caratteristiche della riserva sinistri, gli SCR e SCR *ratio* nel caso in cui la riserva sia descritta da un **processo di Poisson composto semplice con fattore di disturbo sulle *severity*** posto $\sigma_{\tilde{p}} = 3\%$.

Fig.4.3.1.3: Confronto, per l'impresa SIFA, tra le caratteristiche della riserva sinistri, *one-year* e a totale *run off*, nel caso di incremento o meno del coefficiente di variazione delle *severity*, nella circostanza in cui la riserva sinistri segua un processo di Poisson composto semplice con fattore di disturbo sulle *severity*, posto $\sigma_{\tilde{p}} = 3\%$

SIFA						
	CV(one-year)	CV(tot.run-off)	asim.(one-year)	asim.(tot.run-off)	SCR	SCR ratio
CV(Z)	4,88%	5,25%	0,229	0,134	31.504.473	13,79%
2*CV(Z)	8,82%	8,93%	0,416	0,231	59.920.523	26,23%
variazione %	80,68%	70,19%	82,01%	73,11%	90,20%	90,20%

Fig.4.3.1.4: Confronto, per l'impresa AMASES, tra le caratteristiche della riserva sinistri, *one-year* e a totale *run off*, nel caso di incremento o meno del coefficiente di variazione delle *severity*, nella circostanza in cui la riserva sinistri segua un processo di Poisson composto semplice con fattore di disturbo sulle *severity*, posto $\sigma_{\tilde{p}} = 3\%$

AMASES						
	CV(one-year)	CV(tot.run-off)	asim.(one-year)	asim.(tot.run-off)	SCR	SCR ratio
CV(Z)	2,54%	3,32%	0,122	0,077	191.850.901	6,83%
1,5*CV(Z)	3,08%	3,66%	0,161	0,095	236.637.173	8,43%
variazione %	21,13%	10,17%	32,29%	24,22%	23,34%	23,34%

In questo modello, per l'impresa SIFA, le variazioni percentuali del coefficiente di variazione *one-year* e a totale *run off* sono quasi identiche a quelle viste precedentemente; gli incrementi dell'indice di asimmetria, invece, risultano essere meno che proporzionali rispetto all'aggravamento inserito sulla variabilità relativa delle *severity*. A fronte di un minore incremento dell'asimmetria anche il SCR crescere in modo più contenuto rispetto al modello precedente.

Considerando l'impresa AMASES si osservano incrementi percentuali simili, a meno dell'asimmetria a totale *run off*, con quelli registrati dalle caratteristiche della riserva sinistri del caso precedente.

Il confronto tra le due imprese, infine, rivela anche in questo caso, una minore reattività della variabilità relativa, asimmetria e SCR, rispetto all'aggravamento introdotto sulle *severity*, per l'impresa AMASES rispetto all'impresa di minori dimensioni.

Di seguito (figure: 4.3.1.5 e 4.3.1.6) sono presentate, per le compagnie SIFA e AMASES, le caratteristiche della riserva sinistri, gli SCR e SCR *ratio* nel caso in cui la riserva sia descritta da un **processo di Poisson composto misturato con fattore di disturbo sulle *severity***, posti $\sigma_{\tilde{q}} = 3\%$ e $\sigma_{\tilde{p}} = 3\%$.

Fig.4.3.1.5: Confronto, per l'impresa SIFA, tra le caratteristiche della riserva sinistri, *one-year* e a totale *run off*, nel caso di incremento o meno del coefficiente di variazione delle *severity*, nella circostanza in cui la riserva sinistri segua un processo di Poisson composto misturato con fattore di disturbo sulle *severity*, posti $\sigma_{\tilde{q}} = 3\%$ e $\sigma_{\tilde{p}} = 3\%$

SIFA						
	CV(one-year)	CV(tot.run-off)	asim.(one-year)	asim.(tot.run-off)	SCR	SCR ratio
CV(Z)	5,33%	6,05%	0,217	0,147	34.003.789	14,88%
2*CV(Z)	9,09%	9,41%	0,409	0,215	62.002.406	27,14%
variazione %	70,63%	55,58%	88,19%	46,30%	82,34%	82,34%

Fig.4.3.1.6: Confronto, per l'impresa SIFA, tra le caratteristiche della riserva sinistri, *one-year* e a totale *run off*, nel caso di incremento o meno del coefficiente di variazione delle *severity*, nella circostanza in cui la riserva sinistri segua un processo di Poisson composto misturato con fattore di disturbo sulle *severity*, posti $\sigma_{\tilde{q}} = 3\%$ e $\sigma_{\tilde{p}} = 3\%$

AMASES						
	CV(one-year)	CV(tot.run-off)	asim.(one-year)	asim.(tot.run-off)	SCR	SCR ratio
CV(Z)	3,21%	4,49%	0,133	0,105	244.148.538	8,70%
1,5*CV(Z)	3,65%	4,75%	0,159	0,098	280.693.807	10,00%
variazione %	13,63%	5,79%	19,52%	-6,22%	14,97%	14,97%

Considerando l'impresa SIFA gli incrementi nelle caratteristiche della riserva sono, a meno dell'asimmetria *one-year*, inferiori rispetto a quelli registrati nei due modelli precedenti; l'incremento del SCR è, quindi, anch'esso più contenuto. La presenza congiunta dei due fattori di disturbo, come noto, ha una notevole influenza sul coefficiente di variazione e asimmetria della riserva; gli elementi sistematici, quindi, mitigano gli effetti dell'incremento della variabilità relativa delle *severity*.

Considerazioni del tutto analoghe valgono con riferimento all'impresa di maggiori dimensioni; il valore del SCR cresce, in tale circostanza, in modo più contenuto rispetto a quanto osservato nei due casi precedenti.

Il confronto tra le due imprese, infine, mostra risultati simili a quelli dei modelli precedenti; le caratteristiche dell'impresa AMASES e il SCR crescono percentualmente in modo più contenuto rispetto a quanto accade per l'impresa SIFA.

Per entrambe le imprese si osserva, in tutti e tre i modelli considerati, un rapporto tra il coefficiente di variazione *one-year* e a totale *run off* maggiore rispetto al caso base. Al crescere della variabilità relativa delle *severity*, quindi, il peso del coefficiente di variazione della riserva sinistri valutata su un orizzonte annuo diventa sempre più preponderante rispetto alla variabilità relativa della riserva valutata a totale *run off*. Per l'impresa SIFA si registrano valori del coefficiente di variazione *one-year* rispetto a quello a totale *run off* sempre superiori del 95%; per l'impresa AMASES, invece, i valori oscillano circa tra il 76% e l'83%.

I grafici seguenti (figure 4.3.1.7 e 4.3.1.8), infine, mostrano gli SCR *ratio*, rispettivamente per le imprese SIFA e AMASES, calcolati nella situazione base, cioè in assenza di modifiche artificiali del coefficiente di variazione delle *severity*, e nel caso di incremento della variabilità relativa dei costi dei singoli sinistri.

Fig.4.3.1.7: Confronto tra gli SCR *ratio* dell'impresa SIFA calcolati nel caso base (colore giallo) e nella circostanza di incremento del coefficiente di variazione delle v.a. \tilde{Z} (colore arancione)

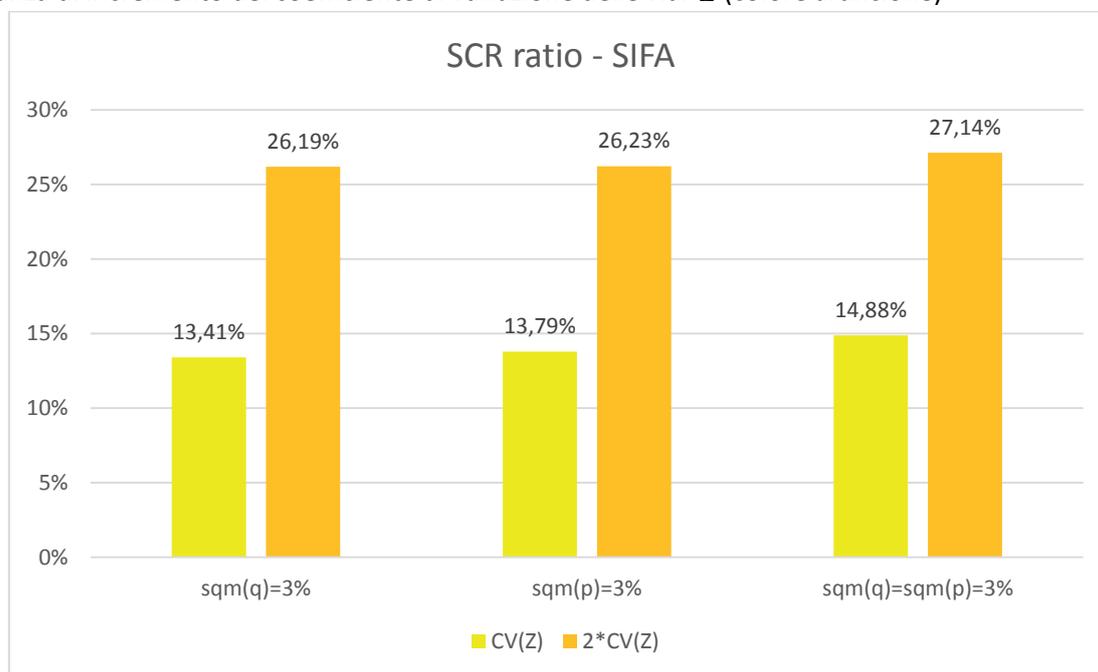
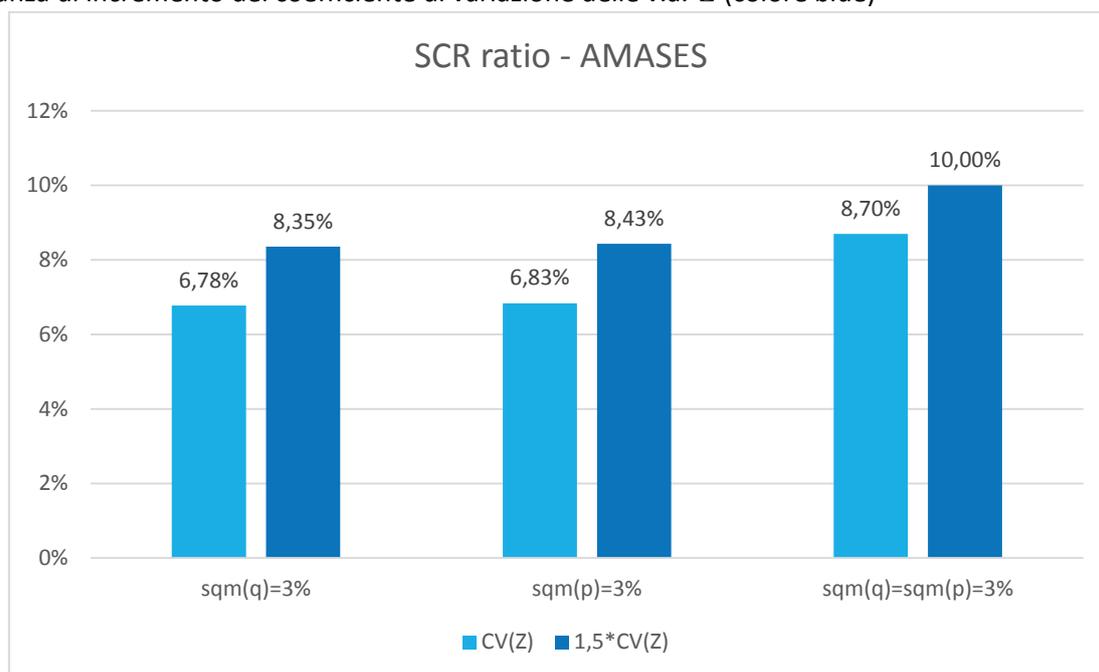


Fig.4.3.1.8: Confronto tra gli SCR *ratio* dell'impresa AMASES calcolati nel caso base (colore azzurro) e nella circostanza di incremento del coefficiente di variazione delle v.a. \tilde{Z} (colore blue)



Lo scopo delle analisi conclusive condotte di seguito è quello di confrontare i risultati degli SCR ottenuti, nel precedente paragrafo, tramite il metodo CRM con un metodo alternativo e ampiamente diffuso in letteratura; il **bootstrap**.

Il metodo *bootstrap* è una metodologia statistica che permette di effettuare inferenza sul campione oggetto di studio. Questo approccio, partendo da un campione di n osservazioni, indipendenti e identicamente distribuite tra loro (i.i.d.), prevede di rigenerare il campione stesso, tramite estrazioni casuali con reimmissione, un numero di volte N adeguatamente elevato. La determinazione delle caratteristiche di interesse per ogni campione n -dimensionale permette, infine, di costruire la distribuzione dello stimatore oggetto di studio e, quindi, di fare inferenza. Quanto appena esposto risulta essere un approccio non parametrico, cioè privo di ipotesi distributive sul campione, ed è valido solo nel caso in cui le osservazioni campionarie siano i.i.d.; proprio l'indipendenza ed identica distribuzione dei dati campionari, infatti, permette di poterli rimescolare ed estrarli in modo casuale generando nuovi campioni. In caso contrario il *bootstrap* deve essere applicato non al campione originario di dati bensì al rispettivo vettore di residui. In tale situazione, dunque, è presente un modello sottostante alle osservazioni campionarie con cui poter calcolare i valori dei residui in modo tale che questi siano tra loro i.i.d.; il meccanismo di ricampionamento, quindi, viene applicato al vettore dei residui da cui in seguito determinare le rispettive osservazioni campionarie. Altro metodo alternativo ai due precedenti è costituito dal *bootstrap* parametrico; in questo caso al campione n -dimensionale oggetto di studio viene associata una distribuzione di probabilità da cui estrarre i valori su cui fare inferenza.

Nel contesto riseruzione il metodo *bootstrap* consente di determinare la distribuzione della riserva sinistri valutata su un orizzonte temporale di 12 mesi e, infine, di calcolare il valore del *Solvency Capital Requirement*. La tipologia di *bootstrap*, utilizzata di seguito, adottata per quantificare il *reserve risk* può essere definita semiparametrica in quanto si fonda sul modello *Over Dispersed*

Poisson (ODP), formulato da England e Verrall, il quale formula un'ipotesi distributiva per i pagamenti incrementali stimati posti a riserva.

Il modello ODP è un approccio stocastico, con metodo deterministico sottostante il *Chain Ladder*, che permette di studiare la riserva sinistri a totale *run off* determinandone il valore atteso e lo scarto quadratico medio ma non la distribuzione di probabilità. Questo modello si basa su una fondamentale assunzione; ipotizza che i pagamenti incrementali della riserva seguano una distribuzione di Poisson sovradispersa, cioè una v.a. di Poisson opportunamente modificata in modo tale da possedere una varianza maggiore del valore atteso. Sotto tale ipotesi, infine, si giunge a dimostrare che la stima del costo ultimo di massima verosimiglianza della riserva sinistri coincide con quella del ottenuta con il metodo *Chain Ladder*²¹.

Il metodo *bootstrap* implementato al triangolo di *run off* della riserva sinistri, in assenza di coda, ricampiona i valori dei residui dei pagamenti incrementali; questi ultimi, infatti, non sono indipendenti tra loro né identicamente distribuiti in quanto possiedono una media e varianza, ricavate dal modello ODP, diverse per ogni cella del triangolo considerata.

La metodologia *bootstrap* ha l'obiettivo di ricostruire il triangolo superiore della riserva nell'ipotesi in cui il metodo *Chain Ladder* sia perfettamente verificato; la creazione di un numero adeguatamente elevato di triangoli superiori rideterminati, infine, permette, grazie al metodo deterministico, di ottenere altrettante stime della riserva sinistri e dunque la distribuzione. Il metodo *bootstrap* si sviluppa nei seguenti passaggi:

1. calcolare i fattori di sviluppo, partendo dai dati cumulati osservati, per ogni antedurata del triangolo;
2. determinare, in modo ricorsivo, dai dati cumulati osservati nell'ultimo anno di calendario disponibile e grazie ai *link ratio* ottenuti al punto precedente, i valori cumulati relativi alle celle superiori del triangolo;
3. calcolare per differenza, dal nuovo triangolo superiore cumulato precedentemente stimato, i valori incrementali;
4. calcolare, dai valori incrementali stimati al punto precedente e da quelli osservati, gli scarti di Pearson nell'ipotesi in cui i valori incrementali precedentemente ottenuti si distribuiscano secondo una v.a. Poisson sovradispersa. I valori degli scarti sono, per costruzione, identicamente distribuiti; per poter applicare il *bootstrap*, inoltre, è necessario ipotizzare che siano anche indipendenti tra loro;
5. calcolare i residui di Pearson corretti, cioè aggiustare i residui calcolati al punto precedente per tenere conto dei gradi di libertà esistenti, dati dal numero di parametri e di osservazioni presenti nel modello;
6. ricampionare i valori ottenuti al punto precedente in modo casuale e con reimmissione, cioè applicare la tecnica *bootstrap* propriamente detta, un numero N sufficientemente elevato di volte, ottenendo N triangoli superiori dei residui corretti;
7. determinare per ogni triangolo superiore dei residui i rispettivi valori cumulati su cui applicare il metodo deterministico *Chain Ladder* per calcolare la riserva sinistri.

Gli N triangoli inferiori della riserva sinistri considerano, per costruzione, la sola variabilità di stima; il metodo illustrato, infatti, utilizza i valori dei residui calcolati come distanza (standardizzata) tra i

²¹ Per una trattazione approfondita del modello ODP si veda: England&Verral [2002], "Stochastic claims reserving in general insurance", British Actuarial Journal 8, pp. 443-544.

pagamenti incrementali osservati e quelli stimati. In questo modo, quindi, il *bootstrap* coglie la sola *estimation variance*, cioè l'errore dovuto a scostamenti nelle stime del *Chain Ladder*, e non anche la variabilità di processo a cui sono esposti i dati. Per superare tale inconveniente e per poter valutare il *reserve risk* è necessario introdurre la componente di variabilità imputabile al processo generatore dei pagamenti incrementali della riserva sinistri relativi alla prima diagonale stimata. Adottando un approccio simulativo, basato sulla tecnica *re-reserving*, è possibile rideterminare i valori contenuti nella prima diagonale, precedentemente stimata, estraendoli da una distribuzione di Poisson sovradispersa come proposta nel modello ODP di England e Verrall. Le N diagonali così ottenute vengono incorporate ai rispettivi N triangoli superiori, determinati con il *bootstrap*; da tali trapezi, infine, è possibile stimare la riserva sinistri mancante grazie al metodo *Chain Ladder*. I valori della riserva così ottenuti, dati dalla somma delle diagonale e della riserva mancante, permettono di ottenere la distribuzione di probabilità relativa al rischio di riservazione valutato su un orizzonte annuo.

Il metodo *bootstrap* con sottostante il modello ODP, a fronte di 100 mila iterazioni, è stato applicato alle imprese SIFA e AMASES per la stima del requisito patrimoniale di solvibilità richiesto da *Solvency II*. I valori ottenuti degli SCR *ratio* permettono di effettuare un generico confronto con le stime degli SCR *ratio* ricavate, nel paragrafo precedente, con il metodo CRM. La stima del SCR ottenuta con il *bootstrap*, infatti, è unica a livello di impresa; nel contesto del CRM, invece, tali stime variano in funzione delle ipotesi relative ai fattori di disturbo sottostanti al modello considerato.

Considerando l'impresa di minori dimensioni, il coefficiente di variazione della riserva sinistri *one-year* è pari al 3,65% mentre l'asimmetria è di 0,176; questi valori determinano un SCR di 23.149.066 unità monetarie. L'impresa AMASES, invece, possiede una variabilità relativa del 2,86% e un indice di asimmetria pari a 0,143. Il requisito patrimoniale di solvibilità ammonta a 217.528.884 unità monetarie.

Le caratteristiche della riserva sinistri *one-year* valutata con il *bootstrap*, date dal coefficiente di variazione e asimmetria, per l'impresa SIFA assumono valori più contenuti rispetto a quelli ottenuti con i modelli CRM, elaborati nel paragrafo precedente, contenenti un solo fattore di disturbo, \tilde{q} o \tilde{p} , o entrambi. Il valore del SCR *ratio*, di conseguenza, si attesta al 10,13% che è una percentuale più contenuta rispetto a quelle ottenute con i modelli CRM che oscillano tra il 13,41% e il 14,88%.

Considerando l'impresa AMASES, il valore del coefficiente di variazione ottenuto con il *bootstrap* è maggiore rispetto alle variabilità relative della riserva sinistri *one-year* valutata con il CRM contenente il fattore di disturbo \tilde{q} o \tilde{p} . Il valore dell'indice di asimmetria, invece, risulta essere più elevato dei valori ottenuti con i modelli CRM con alternativamente un solo fattore sistematico o con entrambi. La percentuale del SCR rispetto al volume della *best estimate* è pari al 7,75%, valore compreso tra gli SCR *ratio* calcolati precedentemente che variano tra il 6,78% e l'8,70%.

L'ultima tabella presentata di seguito (fig: 4.3.1.9) permette di confrontare gli SCR *ratio* e le caratteristiche della riserva sinistri *one-year* modellizzata con il processo di Poisson composto misturato con fattore di disturbo applicato alle *severity*, il quale tra i tre modelli elaborati è quello più completo per descrivere la riserva sinistri, e quelle della riserva valutata con l'approccio *bootstrap*.

Fig. 4.3.1.9: Confronto, per le imprese SIFA e AMASES, della variabilità relativa, asimmetria e SCR *ratio* ottenuti con il bootstrap e con il Processo di Poisson composto misturato con fattore di disturbo applicato alle *severity*

	coefficiente di variazione		asimmetria		SCR <i>ratio</i>	
	$\sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}$	<i>bootstrap</i>	$\sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}$	<i>bootstrap</i>	$\sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}$	<i>bootstrap</i>
SIFA	5,33%	3,65%	0,217	0,176	14,89%	10,13%
AMASES	3,21%	2,86%	0,133	0,143	8,70%	7,75%

4.4 La stima dei fattori di disturbo

Un elemento delicato dell'approccio CRM descritto nella tesi è costituito dalla calibrazione dei fattori sistematici; la volatilità e asimmetria della riserva sinistri, infatti, sono influenzate in modo determinante dalla tipologia distributiva e dall'intensità dei fattori di disturbo stessi.

In letteratura non esiste, nel contesto *reserve*, un approccio ampiamente condiviso e riconosciuto per la calibrazione degli elementi sistematici. Quanto esposto di seguito è da intendersi come una possibile metodologia per stimare il solo scarto quadratico medio dei fattori di disturbo; l'elaborazione di un metodo rigoroso e affidabile per valutare i fattori sistematici, infatti, esula dall'obiettivo della presente tesi.

I fattori di disturbo, applicati ai parametri, considerati nei modelli precedentemente esposti di analisi collettiva della riserva sono la v.a. \tilde{q} , che incide sul numero dei sinistri riservati, e la v.a. \tilde{p} applicata al costo dei singoli sinistri riservati. L'obiettivo dei fattori sistematici è, come noto, quello di introdurre variabilità, cioè incertezza, sui parametri, calibrati con il metodo deterministico prescelto, necessari da stimare per poter implementare il *collective risk model*. La variabilità insita nel modello adottato per descrivere la riserva sinistri è costituita da una duplice fonte di aleatorietà: quella definita di processo, cioè associata alle variabili casuali adottate per descrivere i parametri del metodo CRM, e quella definita di stima che è qui descritta dai fattori di disturbo. La scomposizione della volatilità della riserva sinistri in questi due termini dipende dalle ipotesi alla base dell'approccio CRM stesso quali, ad esempio, la natura e famiglia distributiva adottata per i fattori di disturbo nonché le variabili casuali prescelte per descrivere il numero dei sinistri riservati e le rispettive *severity*. Di seguito è proposto un criterio, basato sulla formula di Mack, per stimare, indipendentemente dalle ipotesi sottostanti al modello CRM utilizzato, gli scarti quadratici medi dei due fattori di disturbo.

La formula presentata da Mack (si veda il capitolo 2) si basa sul metodo deterministico *Chain Ladder* classico (c.d. *paid*) e permette di quantificare separatamente la *estimation variance* e *process variance* a cui è esposta la stima della riserva sinistri. Il valore della *estimation variance* quantifica l'errore dovuto all'utilizzo di specifici stimatori che si compie nel valutare, con la meccanica *Chain Ladder*, la riserva sinistri.

Nell'ambito del *frequency-severity*, che è quello adottato in tale contesto, le *estimation variance* ricavate dai triangoli di *run off* dei numeri e costi medi cumulati dei sinistri misurano l'errore, associato alle due grandezze in esame, dovuto all'incertezza nelle stime dei parametri. Il rapporto tra la radice quadrata dell'*estimation variance* e il valore atteso, ricavato con la meccanica *Chain Ladder*, della grandezza oggetto di studio fornisce la variabilità relativa di stima presente a livello complessivo sul triangolo di *run off*. Tale valore, che quantifica l'errore associato alla stima dei

parametri, è imputabile, in quanto tale, ai fattori di disturbo. Il coefficiente di variazione calcolato con l'*estimation variance*, quindi, coincide con quello dei fattori sistematici. Questi ultimi possiedono, come noto, media unitaria; la variabilità relativa di stima fornita dalla formula di Mack, per tanto, è interpretabile come la *standard deviation* delle v.a. \tilde{q} e \tilde{p} . Il coefficiente di variazione ottenuto per mezzo dell'*estimation variance* ricavata dal triangolo di *run off* del numero dei sinistri fornisce il valore dello scarto quadratico medio del fattore di disturbo associato a tale grandezza, cioè la v.a. \tilde{q} . Considerazione analoga vale per l'elemento sistematico \tilde{p} ; il valore di $\sigma_{\tilde{p}}$ è pari al coefficiente di variazione, calcolato con la variabilità di stima formulata da Mack, attinente al triangolo di *run off* dei costi medi.

La figura seguente (fig: 4.4.1) illustra i valori della variabilità relativa di stima per generazione e a livello complessivo ricavate dai triangoli del numero dei sinistri cumulati delle imprese SIFA e AMASES.

Fig 4.4.1: Variabilità relativa di stima, per le imprese SIFA e AMASES, calcolata per generazione e a livello totale di triangolo di *run off* del numero cumulato dei sinistri riservati

	SIFA	AMASES
generazione	variabilità relativa di stima	variabilità relativa di stima
1	/	/
2	0.46%	0.21%
3	1.45%	0.81%
4	5.02%	3.47%
5	4.68%	3.63%
6	4.40%	3.32%
7	7.23%	2.88%
8	8.41%	3.28%
9	6.70%	4.72%
10	5.23%	6.03%
11	3.92%	5.63%
12	1.96%	1.92%
totale	1.96%	1.62%

I dati in tabella mostrano per le varie generazioni coefficienti di variazione generalmente più contenuti per l'impresa di elevate dimensioni. Tali valori esprimono la variabilità relativa di stima riferita alle singole righe del triangolo; questi, inoltre, potrebbero essere usati per calibrare le *standard deviation* dei fattori di disturbo associati alle relative generazioni nel caso in cui si adotti un approccio di analisi collettiva della riserva sinistri basato su fattori sistematici differenziati e indipendenti tra le generazioni. A livello aggregato di triangolo di *run off* il valore della variabilità relativa di stima, che considera la dipendenza tra le *estimation variance* delle diverse generazioni, è inferiore per l'impresa AMASES. Il parametro dimensionale della compagnia, quindi, espone l'impresa SIFA ad una maggiore incertezza nella stima dei parametri del numero dei sinistri.

La tabella seguente (fig: 4.4.2) raccoglie i valori della variabilità relativa di stima, differenziata per generazione e a livello complessivo, calcolati sui triangoli dei costi medi cumulati delle due imprese.

Fig 4.4.2: Variabilità relativa di stima, per le imprese SIFA e AMASES, calcolata per generazione e a livello totale di triangolo di *run off* del costo medio cumulato

	SIFA	AMASES
generazione	variabilità relativa di stima	variabilità relativa di stima
1	/	/
2	2.31%	3.49%
3	3.95%	3.10%
4	6.32%	3.23%
5	5.34%	2.71%
6	4.49%	2.33%
7	4.35%	2.18%
8	4.12%	2.14%
9	3.61%	1.99%
10	2.97%	1.86%
11	2.21%	1.69%
12	1.95%	2.00%
totale	1.96%	1.53%

Analogamente a quanto osservato per il numero dei sinistri, si osservano, per i costi medi, valori di variabilità relativa di stima per generazione quasi sempre più contenuti per l'impresa AMASES. Questi valori possono essere utilizzati per quantificare gli scarti quadratici medi dei fattori di disturbo nella circostanza in cui si adotti una metodologia *collective risk model* basata su fattori di disturbo differenziati e indipendenti tra le varie generazioni. A livello complessivo di triangolo, infine, l'*estimation variance* ricavata da Mack determina un valore del coefficiente di variazione dell'impresa AMASES più contenuto rispetto a quello dell'impresa SIFA. Anche in tale situazione, quindi, la compagnia di maggiori dimensioni è esposta ad una minore incertezza nella stima delle *severity*.

Le variabilità relative di stima, $\sigma_{\bar{q}}$ e $\sigma_{\bar{p}}$, ottenute a livello complessivo sui triangoli del numero dei sinistri e dei costi medi, assumono valori simili a quelli utilizzati nelle analisi di sensibilità svolte sui modelli CRM sviluppati nella presente tesi. Il *range*, considerato nei capitoli precedenti, dei valori degli scarti quadratici medi dei fattori di disturbo, tuttavia, non è stato scelto in funzione dei risultati ottenuti poco sopra; sono stati considerati, infatti, dei valori *ad hoc*, ritenuti plausibili, per le *standard deviation* dei fattori sistematici e indipendenti dai risultati derivanti da una specifica tecnica di stima.

Nella tabella presentata di seguito (fig: 4.4.3), infine, sono riportati, per SIFA e AMASES, il coefficiente di variazione e l'indice di asimmetria della riserva sinistri, nel caso in cui questa sia descritta da un *processo di Poisson composto misturato con fattore di disturbo applicato alle severity*, nella circostanza in cui le *standard deviation* dei fattori di disturbo siano stimate, a livello complessivo di triangolo, con la metodologia esposta poco sopra.

Fig 4.4.3: Coefficiente di variazione e asimmetria, per le imprese SIFA e AMASES, calcolate, nel caso di processo di Poisson composto misturato con fattore di disturbo sulle *severity*, con i valori di $\sigma_{\tilde{q}}$ e $\sigma_{\tilde{p}}$ stimati precedentemente

		coefficiente di variazione	asimmetria
SIFA	$\sigma_{\tilde{q}} = 1,96\% ; \sigma_{\tilde{p}} = 1,96\%$	5,13%	0,119
AMASES	$\sigma_{\tilde{q}} = 1,62\% ; \sigma_{\tilde{p}} = 1,53\%$	2,66%	0,063

CONCLUSIONI

L'obiettivo del presente lavoro è stato quello di ampliare e modificare gli approcci del *collective risk model* per la valutazione della riserva sinistri attualmente presenti in letteratura. Le metodologie CRM esistenti si basano sul processo di Poisson composto, cioè ipotizzano che il numero dei sinistri riservati sia descritto da una v.a. di Poisson. Il metodo di analisi collettiva inizialmente comparso in letteratura prevede di analizzare la riserva sinistri, sull'intero orizzonte temporale di vita, tramite un processo composto in cui le v.a. del numero dei sinistri e dei rispettivi costi non sono differenziate tra le generazioni e antidurate del triangolo. Più recentemente tale modello è stato superato grazie ad un approccio CRM che studia il costo incrementale dei sinistri riservati al variare di ogni cella (i,j) oggetto di stima del triangolo di *run off*; in tale contesto sono state sviluppate in forma chiusa le relazioni che descrivono la media e la varianza della riserva sinistri. I fattori di disturbo presenti negli attuali modelli riguardano il numero dei sinistri riservati e i rispettivi costi. Gli elementi sistematici relativi alla prima categoria sono introdotti sul parametro delle v.a. di Poisson, dando luogo ad un processo di Poisson composto misturato; i fattori di disturbo possono essere differenti al variare delle antidurate e/o generazioni oppure possono essere unici a livello di triangolo. I fattori sistematici attinenti al costo dei singoli sinistri riservati, invece, sono introdotti sui coefficienti di variazione delle *severity* e calcolati in funzione dei vari anni di sviluppo.

Le analisi condotte nella tesi utilizzano un approccio CRM volto a modellizzare la riserva sinistri come somma del costo incrementale dei sinistri riservati di ogni cella (i,j) oggetto di valutazione del triangolo di *run off*. Sono stati elaborati tre differenti modelli di analisi collettiva, basati sul processo di Poisson, differenziati tra loro in funzione dei fattori sistematici presenti. I fattori di disturbo sono stati considerati unici a livello di triangolo introducendo, in tale modo, dipendenza positiva tra tutte le celle (i,j). Il primo modello sviluppato contiene il solo fattore sistematico sul numero dei sinistri inserito in modo moltiplicativo sul parametro delle v.a. di Poisson. Successivamente, invece, è stato considerato solo l'elemento sistematico applicato, in modo moltiplicativo, alle v.a. delle *severity*; il terzo modello, infine, è comprensivo di entrambi i fattori di disturbo. La finalità è stata quella di ricavare in forma esatta le caratteristiche della riserva sinistri e analizzarne in modo dettagliato le dinamiche sottostanti al variare dei modelli e delle ipotesi considerate. I primi due approcci hanno permesso di comprendere gli effetti sulla riserva sinistri dei fattori di disturbo singolarmente considerati; i risultati ottenuti hanno mostrato un'incidenza analoga dei fattori sistematici sul coefficiente di variazione della riserva sinistri; il valore dell'asimmetria, di contro, risulta essere influenzato in modo molto più marcato dal fattore di disturbo applicato alle variabili casuali delle *severity*. L'ultimo modello, invece, sviluppato considerando entrambi i fattori sistematici, risulta quello più coerente da utilizzare per valutare la riserva sinistri. I metodi formulati per studiare la riserva a totale *run off*, infine, sono stati adattati, ricorrendo all'approccio *re-reserving*, per quantificare il *Solvency Capital Requirement*; anche in tale circostanza sono state condotte delle analisi volte a comprendere l'impatto dei fattori di disturbo sul requisito di capitale che hanno mostrato una maggiore incidenza dell'elemento sistematico \tilde{p} .

L'approccio di analisi collettiva della riserva sinistri sviluppato e analizzato nella tesi ha permesso, basandosi su opportune ipotesi, di giungere ad importanti risultati. La trattazione del *collective risk model*, tuttavia, ha evidenziato alcune criticità.

Uno dei problemi principali della metodologia CRM deriva dal consistente numero di parametri presenti. Questo metodo, infatti, è esposto ad errori potenzialmente molto rilevanti legati alla difficoltà di stimare in modo corretto tutti i parametri necessari per implementare l'approccio di analisi collettiva della riserva. Il *collective risk model*, quindi, è soggetto ad un rischio di parametro maggiore rispetto ad altre metodologie a causa del numero molto elevato di parametri esistenti. All'interno del rischio di parametro assume un peso rilevante, come esposto poco sopra, la stima dei fattori di disturbo; la letteratura, infatti, non è unanime sull'approccio da usare per valutare i fattori sistematici le cui stime, per il momento, rimangono ampiamente discrezionali. In tale contesto, inoltre, possono essere fatte rientrare le problematiche relative alle stime delle *severity*. La quantificazione dei momenti delle v.a. \tilde{Z} può essere effettuata in modo empirico dal database dell'impresa contenente le informazioni dei singoli sinistri. Per potere calcolare il *Solvency Capital Requirement*, invece, è necessario stimare la famiglia distributiva delle variabili del costo dei singoli sinistri relativi ad ogni cella (i,j) oggetto di studio; questa operazione è complicata e può essere compiuta ricorrendo solo ad opportune ipotesi e semplificazioni.

Il CRM, inoltre, è esposto, come del resto tutti le metodologie esistenti, al cosiddetto rischio di modello; tale rischio è complesso da valutare e consiste nel quantificare gli errori a cui è soggetta l'analisi della riserva sinistri dovuti alle specificità del metodo in questione. L'errore di modello deriva dalle approssimazioni compiute dal metodo in esame rispetto alle effettive dinamiche reali sottostanti al fenomeno oggetto di studio. A fronte di tali problematiche, la valutazione della riserva sinistri dovrebbe basarsi su più metodologie; il confronto tra una pluralità di approcci valutativi, infatti, permette di compiere analisi che, al variare del metodo adottato, colgono differenti dinamiche del fenomeno, permettendo, quindi, di minimizzare il rischio di errore legato all'uso di uno specifico modello.

Un altro problema, infine, a cui sono esposte tutte le tecniche valutative della riserva sinistri, e quindi anche il CRM, è quello della riassicurazione. Le analisi condotte nella presente tesi sono basate su triangoli di *run off* al lordo dei benefici derivanti dai trattati riassicurativi. Implementare un modello stocastico nel contesto riservazione su dati al netto della riassicurazione non è agevole; all'interno dei triangoli di *run off*, infatti, si ha un diverso effetto della riassicurazione al variare dei trattati stipulati dall'impresa nelle differenti generazioni. La presenza di diverse coperture riassicurative determina discontinuità e distorsioni nei dati che possono portare a criticità nelle analisi della riserva sinistri condotte con i metodi stocastici. L'effetto della riassicurazione, inoltre, rende più complesso e problematico applicare in modo coerente i relativi modelli deterministici necessari per la stima dei parametri. La soluzione comunemente adottata dalle compagnie di assicurazione consiste, quindi, nell'utilizzare dati al lordo della riassicurazione e in seguito correggere la stima e le analisi della riserva sinistri in funzione di valutazioni *ad hoc* effettuate per tenere conto degli effetti imputabili ai trattati riassicurativi.

Il *collective risk model*, nella forma presentata in questo lavoro, risulta essere, a parere di chi scrive, un metodo, non eccessivamente complesso ma adeguatamente raffinato, che consente di svolgere sulla riserva una molteplicità di analisi. Queste permettono all'impresa di assicurazione di compiere specifiche valutazioni volte a comprendere, anche grazie alla conoscenza delle caratteristiche esatte, le dinamiche a cui è esposta la riserva sinistri nel suo complesso.

APPENDICE – CAPITOLO 3

A.1

$$\mu_3 \left(\sum_i \sum_j \tilde{K}_{i,j} \right) = \alpha_3 \left(\sum_i \sum_j \tilde{K}_{i,j} \right) - 3\alpha_1 \left(\sum_i \sum_j \tilde{K}_{i,j} \right) \text{var} \left(\sum_i \sum_j \tilde{K}_{i,j} \right) - \left[\alpha_1 \left(\sum_i \sum_j \tilde{K}_{i,j} \right) \right]^3.$$

Di seguito sono analizzati in modo separato i termini che compongono il momento centrale terzo.

Primo termine

$$\alpha_3 \left(\sum_i \sum_j \tilde{K}_{i,j} \right) = \left[E \left(\sum_i \sum_j \tilde{K}_{i,j} \right)^3 \right]$$

dove il cubo di un polinomio può essere scritto come somma di tre addendi:

$$\begin{aligned} \left(\sum_i \sum_j \tilde{K}_{i,j} \right)^3 = & \sum_i \sum_j (\tilde{K}_{i,j}^3) + \sum_i \sum_j (\tilde{K}_{i,j}) \left[\sum_{h=1}^{i-1} \sum_{k=t-h+1}^t \tilde{K}_{h,k} + \sum_{y=i+1}^t \sum_{z=t-y+1}^t \tilde{K}_{y,z} + \sum_{s=t-i+1}^{j-1} \tilde{K}_{i,s} + \sum_{f=j+1}^t \tilde{K}_{i,f} \right]^2 \\ & + 2 \left(\sum_i \tilde{K}_{i,j}^2 \right) \left[\sum_{h=1}^{i-1} \sum_{k=t-h+1}^t \tilde{K}_{h,k} + \sum_{y=i+1}^t \sum_{z=t-y+1}^t \tilde{K}_{y,z} + \sum_{s=t-i+1}^{j-1} \tilde{K}_{i,s} + \sum_{f=j+1}^t \tilde{K}_{i,f} \right]. \end{aligned}$$

Il primo addendo è la somma dei cubi dei termini considerati. Il secondo addendo è pari alla somma tra i prodotti dei singoli termini del polinomio per il quadrato della somma di tutti i restanti termini diversi. Il terzo addendo, infine, è pari a due volte la somma tra prodotti dei singoli elementi al quadrato e la somma di tutti i restanti termini diversi del polinomio.

Nel seguito, per non appesantire la scrittura delle formule, le doppie sommatorie con pedici diversi da i e j verranno unite e inoltre non verranno riportati gli estremi di tali sommatorie.

Il cubo della somma delle v.a. $\tilde{K}_{i,j}$ assume, quindi, la seguente forma:

$$\sum_i \sum_j (\tilde{K}_{i,j}^3) + \sum_i \sum_j (\tilde{K}_{i,j}) \left[\sum_{h,k} \tilde{K}_{h,k} + \sum_{y,z} \tilde{K}_{y,z} + \sum_s \tilde{K}_{i,s} + \sum_f \tilde{K}_{i,f} \right]^2 + 2 \left(\sum_i \tilde{K}_{i,j}^2 \right) \left[\sum_{h,k} \tilde{K}_{h,k} + \sum_{y,z} \tilde{K}_{y,z} + \sum_s \tilde{K}_{i,s} + \sum_f \tilde{K}_{i,f} \right]$$

in cui il quadrato di un polinomio può essere scritto, a sua volta, come somma tra i quadrati di tutti gli elementi e i doppi prodotti incrociati:

$$\begin{aligned} \left[\sum_{h,k} \tilde{K}_{h,k} + \sum_{y,z} \tilde{K}_{y,z} + \sum_s \tilde{K}_{i,s} + \sum_f \tilde{K}_{i,f} \right]^2 = & \left[\sum_{h,k} \tilde{K}_{h,k}^2 + \sum_{h,k} \tilde{K}_{h,k} H + \sum_{y,z} \tilde{K}_{y,z}^2 + \sum_{y,z} \tilde{K}_{y,z} Y + \sum_s \tilde{K}_{i,s}^2 + \sum_s \tilde{K}_{i,s} S + \sum_f \tilde{K}_{i,f}^2 + \sum_f \tilde{K}_{i,f} F \right] \end{aligned}$$

dove

$H = \left(\sum_{p=1}^{h-1} \sum_{r=t-p+1}^t \tilde{K}_{p,r} + \sum_{w=h+1}^t \sum_{q=t-w+1}^t \tilde{K}_{w,q} + \sum_{u=t-h+1}^{k-1} \tilde{K}_{i,u} + \sum_{d=k+1}^t \tilde{K}_{i,d} \right)$ rappresenta tutti i termini del polinomio differenti da $\tilde{K}_{h,k}$. Il termine $\sum_{h,k} \tilde{K}_{h,k} H$ quindi identifica tutti i prodotti incrociati;

considerazioni analoghe valgono per i termini Y, S e F.

Di seguito, per non appesantire la scrittura delle formule, le doppie sommatorie del quadrato del polinomio verranno unite e inoltre non verranno riportati gli estremi di tali sommatorie.

Il valore atteso del cubo della somma delle v.a. $\tilde{K}_{i,j}$ è il seguente:

$$\sum_i \sum_j E(\tilde{K}_{i,j}^3) + 2E \left\{ \sum_i \sum_j (\tilde{K}_{i,j}^2) \left[\sum_{h,k} \tilde{K}_{h,k} + \sum_{y,z} \tilde{K}_{y,z} + \sum_s \tilde{K}_{i,s} + \sum_f \tilde{K}_{i,f} \right] \right\} + E \left\{ \left(\sum_i \sum_j \tilde{K}_{i,j} \right) \left[\sum_{h,k} \tilde{K}_{h,k} + \sum_{y,z} \tilde{K}_{y,z} + \sum_s \tilde{K}_{i,s} + \sum_f \tilde{K}_{i,f} \right]^2 \right\}.$$

➤ Primo addendo:

La somma delle medie cubiche delle v.a. di Poisson misturate è la seguente:

$$\sum_i \sum_j E(\tilde{K}_{i,j}^3) = \sum_i \sum_j n_{i,j} + 3 \sum_i \sum_j n_{i,j}^2 E(\tilde{q}^2) + \sum_i \sum_j n_{i,j}^3 E(\tilde{q}^3).$$

➤ Secondo addendo:

$$2E \left[\sum_i \sum_j \tilde{K}_{i,j}^2 \left(\sum_{h,k} \tilde{K}_{h,k} + \sum_{y,z} \tilde{K}_{y,z} + \sum_s \tilde{K}_{i,s} + \sum_f \tilde{K}_{i,f} \right) \right].$$

Ricorrendo alle medie condizionate si può scrivere la media del prodotto come il prodotto delle rispettive medie, in cui ora le v.a., a seguito del condizionamento, sono tra loro indipendenti e descritte da processi di Poisson semplici:

$$2E \left\{ E \left[\sum_i \sum_j \tilde{K}_{i,j}^2 \left(\sum_{h,k} \tilde{K}_{h,k} + \sum_{y,z} \tilde{K}_{y,z} + \sum_s \tilde{K}_{i,s} + \sum_f \tilde{K}_{i,f} \right) \middle| \tilde{q} \right] \right\},$$

il valore atteso interno alla parentesi graffa è pari a:

$$E \left(\sum_i \sum_j \tilde{K}_{i,j}^2 \right) E \left(\sum_{h,k} \tilde{K}_{h,k} + \sum_{y,z} \tilde{K}_{y,z} + \sum_s \tilde{K}_{i,s} + \sum_f \tilde{K}_{i,f} \right) = \sum_i \sum_j (\tilde{q} n_{i,j} + \tilde{q}^2 n_{i,j}^2) \left(\sum_{h,k} \tilde{q} n_{h,k} + \sum_{y,z} \tilde{q} n_{y,z} + \sum_s \tilde{q} n_{i,s} + \sum_f \tilde{q} n_{i,f} \right),$$

e posto

$$\left(\sum_h \sum_k n_{h,k} + \sum_y \sum_z n_{y,z} + \sum_s n_{i,s} + \sum_f n_{i,f} \right) = \Psi$$

si ottiene

$$\sum_i \sum_j \tilde{q}^2 n_{i,j} \Psi + \sum_i \sum_j \tilde{q}^3 n_{i,j}^2 \Psi .$$

Quindi

$$2E \left\{ \sum_i \sum_j \tilde{q}^2 n_{i,j} \Psi + \sum_i \sum_j \tilde{q}^3 n_{i,j}^2 \Psi \right\} = 2 \left\{ E(\tilde{q}^2) \sum_i \sum_j n_{i,j} \Psi + E(\tilde{q}^3) \sum_i \sum_j n_{i,j}^2 \Psi \right\} .$$

► Terzo addendo:

$$E \left[\sum_i \sum_j (\tilde{K}_{i,j}) \left(\sum_{h,k} \tilde{K}_{h,k} + \sum_{y,z} \tilde{K}_{y,z} + \sum_s \tilde{K}_{i,s} + \sum_f \tilde{K}_{i,f} \right)^2 \right],$$

ricorrendo alle medie condizionate:

$$E \left\{ E \left[\sum_i \sum_j (\tilde{K}_{i,j}) \left(\sum_{h,k} \tilde{K}_{h,k} + \sum_{y,z} \tilde{K}_{y,z} + \sum_s \tilde{K}_{i,s} + \sum_f \tilde{K}_{i,f} \right)^2 \right] \middle| \tilde{q} \right\},$$

a seguito del condizionamento le v.a. che descrivono il numero dei sinistri nelle varie celle del triangolo sono tra loro indipendenti.

Il valore atteso interno alla parentesi graffa risulta essere:

$$\begin{aligned} & E \sum_i \sum_j (\tilde{K}_{i,j}) E \left(\sum_{h,k} \tilde{K}_{h,k} + \sum_{y,z} \tilde{K}_{y,z} + \sum_s \tilde{K}_{i,s} + \sum_f \tilde{K}_{i,f} \right)^2 = \\ & E \sum_i \sum_j (\tilde{K}_{i,j}) E \left(\sum_{h,k} \tilde{K}_{h,k}^2 + \sum_{h,k} \tilde{K}_{h,k} H + \sum_{y,z} \tilde{K}_{y,z}^2 + \sum_{y,z} \tilde{K}_{y,z} Y + \sum_s \tilde{K}_{i,s}^2 + \sum_s \tilde{K}_{i,s} S + \sum_f \tilde{K}_{i,f}^2 + \sum_f \tilde{K}_{i,f} F \right) = \\ & \sum_i \sum_j \tilde{q} n_{i,j} \left(\begin{aligned} & \left(\sum_{h,k} (\tilde{q} n_{h,k} + \tilde{q}^2 n_{h,k}^2) + \sum_{h,k} \tilde{q} n_{h,k} \bar{H} + \sum_{y,z} (\tilde{q} n_{y,z} + \tilde{q}^2 n_{y,z}^2) + \sum_{y,z} \tilde{q} n_{y,z} \bar{Y} \right) \\ & + \left(\sum_s (\tilde{q} n_{i,s} + \tilde{q}^2 n_{i,s}^2) + \sum_s \tilde{q} n_{i,s} \bar{S} + \sum_f (\tilde{q} n_{i,f} + \tilde{q}^2 n_{i,f}^2) + \sum_f \tilde{q} n_{i,f} \bar{F} \right) \end{aligned} \right) \end{aligned}$$

con

$$\bar{H} = E(H) = \left(\sum_{p,r} \tilde{q} n_{p,r} + \sum_{w,q} \tilde{q} n_{w,q} + \sum_u \tilde{q} n_{i,u} + \sum_d \tilde{q} n_{i,d} \right) = \tilde{q} \bar{H}^*$$

essendo

$$\bar{H}^* = \left(\sum_{p,r} n_{p,r} + \sum_{w,q} n_{w,q} + \sum_u n_{i,u} + \sum_d n_{i,d} \right); \text{ valgono risultati analoghi per i termini } Y, S \text{ e } F.$$

Da cui

$$\begin{aligned} & \sum_i \sum_j \tilde{q} n_{i,j} \left(\begin{aligned} & \left(\sum_{h,k} (\tilde{q} n_{h,k} + \tilde{q}^2 n_{h,k}^2) + \sum_{h,k} \tilde{q}^2 n_{h,k} \bar{H}^* + \sum_{y,z} (\tilde{q} n_{y,z} + \tilde{q}^2 n_{y,z}^2) + \sum_{y,z} \tilde{q}^2 n_{y,z} \bar{Y}^* \right) \\ & + \left(\sum_s (\tilde{q} n_{i,s} + \tilde{q}^2 n_{i,s}^2) + \sum_s \tilde{q}^2 n_{i,s} \bar{S}^* + \sum_f (\tilde{q} n_{i,f} + \tilde{q}^2 n_{i,f}^2) + \sum_f \tilde{q}^2 n_{i,f} \bar{F}^* \right) \end{aligned} \right) = \\ & \sum_i \sum_j \tilde{q}^2 n_{i,j} \left(\begin{aligned} & \left(\sum_{h,k} (n_{h,k} + \tilde{q} n_{h,k}^2) + \sum_{h,k} \tilde{q} n_{h,k} \bar{H}^* + \sum_{y,z} (n_{y,z} + \tilde{q} n_{y,z}^2) + \sum_{y,z} \tilde{q} n_{y,z} \bar{Y}^* \right) \\ & + \left(\sum_s (n_{i,s} + \tilde{q} n_{i,s}^2) + \sum_s \tilde{q} n_{i,s} \bar{S}^* + \sum_f (n_{i,f} + \tilde{q} n_{i,f}^2) + \sum_f \tilde{q} n_{i,f} \bar{F}^* \right) \end{aligned} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_i \sum_j \tilde{q}^2 n_{i,j} \left(\sum_{h,k} n_{h,k} + \sum_{y,z} n_{y,z} + \sum_s n_{i,s} + \sum_t n_{i,t} \right) + \\ & \sum_i \sum_j \tilde{q}^2 n_{i,j} \left(\sum_{h,k} (\tilde{q} n_{h,k}^2 + \tilde{q} n_{h,k} \bar{H}^*) + \sum_{y,z} (\tilde{q} n_{y,z}^2 + \tilde{q} n_{y,z} \bar{Y}^*) + \sum_s (\tilde{q} n_{i,s}^2 + \tilde{q} n_{i,s} \bar{S}^*) + \sum_f (\tilde{q} n_{i,f}^2 + \tilde{q} n_{i,f} \bar{F}^*) \right) = \\ & \sum_i \sum_j \tilde{q}^2 n_{i,j} \Psi + \sum_i \sum_j \tilde{q}^3 n_{i,j} \Theta \end{aligned}$$

con

$$\Theta = \left(\sum_{h,k} (n_{h,k}^2 + n_{h,k} \bar{H}^*) + \sum_{y,z} (n_{y,z}^2 + n_{y,z} \bar{Y}^*) + \sum_s (n_{i,s}^2 + \tilde{q} n_{i,s} \bar{S}^*) + \sum_f (n_{i,f}^2 + n_{i,f} \bar{F}^*) \right) = \Psi^2.$$

Si ottiene infine:

$$E \left[\sum_i \sum_j \tilde{q}^2 n_{i,j} \Psi + \sum_i \sum_j \tilde{q}^3 n_{i,j} \Psi^2 \right] = E(\tilde{q}^2) \sum_i \sum_j n_{i,j} + E(\tilde{q}^3) \sum_i \sum_j n_{i,j} \Psi^2.$$

Il primo termine del momento centrale terzo, quindi, risulta essere:

$$\begin{aligned} & E \left[\left(\sum_i \sum_j \tilde{K}_{i,j} \right)^3 \right] = \\ & E(\tilde{q}^3) \left[\sum_i \sum_j n_{i,j}^3 + 2 \sum_i \sum_j n_{i,j}^2 \Psi + \sum_i \sum_j n_{i,j} \Psi^2 \right] + E(\tilde{q}^2) \left[3 \sum_i \sum_j n_{i,j}^2 + 3 \sum_i \sum_j n_{i,j} \Psi \right] + \sum_i \sum_j n_{i,j} = \\ & E(\tilde{q}^3) \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} \right)^3 + E(\tilde{q}^2) \left[3 \sum_i \sum_j n_{i,j}^2 + 3 \sum_i \sum_j n_{i,j} \Psi \right] + \sum_i \sum_j n_{i,j} = \\ & E(\tilde{q}^3) \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} \right)^3 + 3E(\tilde{q}^2) \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} \right)^2 + \sum_i \sum_j n_{i,j} \end{aligned}$$

dato che vale

$$\left(\sum_i \sum_j n_{i,j} \right)^2 = \left[\sum_i \sum_j n_{i,j}^2 + \sum_i \sum_j n_{i,j} \Psi \right]$$

e

$$\left[\sum_i \sum_j n_{i,j}^3 + 2 \sum_i \sum_j n_{i,j}^2 \Psi + \sum_i \sum_j n_{i,j} \Psi^2 \right] = \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} \right)^3.$$

Secondo termine

$$3\alpha_1 \left(\sum_i \sum_j \tilde{K}_{i,j} \right) \alpha_2 \left(\sum_i \sum_j \tilde{K}_{i,j} \right) = 3 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} \right) \left[\sum_i \sum_j n_{i,j} + \sigma_{\tilde{q}}^2 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} \right)^2 \right] =$$

$$3\left(\sum_i \sum_j n_{i,j}\right)^2 + 3\sigma_{\tilde{q}}^2 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j}\right)^3.$$

Terzo termine

$$\left[\alpha_1 \left(\sum_i \sum_j \tilde{K}_{i,j}\right)\right]^3 = \left[E\left(\sum_i \sum_j \tilde{K}_{i,j}\right)\right]^3 = \left(\sum_i \sum_j n_{i,j}\right)^3.$$

A.2

$$\mu_3 \left(\sum_i \sum_j \tilde{X}_{i,j}\right) = \alpha_3 \left(\sum_i \sum_j \tilde{X}_{i,j}\right) - 3\alpha_1 \left(\sum_i \sum_j \tilde{X}_{i,j}\right) \text{var} \left(\sum_i \sum_j \tilde{X}_{i,j}\right) - \left[\alpha_1 \left(\sum_i \sum_j \tilde{X}_{i,j}\right)\right]^3.$$

Di seguito si studiano separatamente i tre termini che compongono il momento centrale terzo.

Primo termine

Il primo termine del momento centrale terzo è pari alla media del cubo della somma di tutte le celle (i,j) oggetto di stima:

$$\alpha_3 \left(\sum_i \sum_j \tilde{X}_{i,j}\right) = \left[E\left(\sum_i \sum_j \tilde{X}_{i,j}\right)^3\right],$$

svolgendo il cubo del polinomio, applicando la linearità del valore atteso e la proprietà della media condizionata per sciogliere le medie del prodotto tra v.a. dipendenti, si ottiene:

$$\sum_i \sum_j E\left(\tilde{X}_{i,j}^3\right) + E\left\{E\left[\sum_i \sum_j (\tilde{X}_{i,j}) \left(\sum_{h,k} \tilde{X}_{h,k} + \sum_{y,z} \tilde{X}_{y,z} + \sum_s \tilde{X}_{i,s} + \sum_f \tilde{X}_{i,f}\right)^2 \mid \tilde{q}\right]\right\} + 2E\left\{E\left[\left(\sum_i \sum_j \tilde{X}_{i,j}^2\right) \left(\sum_{h,k} \tilde{X}_{h,k} + \sum_{y,z} \tilde{X}_{y,z} + \sum_s \tilde{X}_{i,s} + \sum_f \tilde{X}_{i,f}\right) \mid \tilde{q}\right]\right\}.$$

➤ Primo addendo

La somma delle medie cubiche di processi di Poisson composti misturati è la seguente:

$$\sum_i \sum_j E\left(\tilde{X}_{i,j}^3\right) = E\left(\tilde{q}^3\right) \sum_i \sum_j n_{i,j}^3 m_{i,j}^3 + 3E\left(\tilde{q}^2\right) \sum_i \sum_j n_{i,j}^2 m_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} + \sum_i \sum_j n_{i,j} a_{3,Z_{i,j}}.$$

➤ Secondo addendo

$$E\left\{E\left[\sum_i \sum_j (\tilde{X}_{i,j}) \left(\sum_{h,k} \tilde{X}_{h,k} + \sum_{y,z} \tilde{X}_{y,z} + \sum_s \tilde{X}_{i,s} + \sum_f \tilde{X}_{i,f}\right)^2 \mid \tilde{q}\right]\right\},$$

la media interna alla parentesi graffa può essere svolta nel modo seguente, notando che le v.a. sotto il condizionamento risultano essere tra loro indipendenti e descritte da processi di Poisson composti semplici:

$$E \sum_i \sum_j (\tilde{X}_{i,j}) E \left(\sum_{h,k} \tilde{X}_{h,k} + \sum_{y,z} \tilde{X}_{y,z} + \sum_s \tilde{X}_{i,s} + \sum_f \tilde{X}_{i,f} \right)^2 =$$

$$E \sum_i \sum_j (\tilde{X}_{i,j}) E \left(\sum_{h,k} \tilde{X}_{h,k}^2 + \sum_{h,k} \tilde{X}_{h,k} H + \sum_{y,z} \tilde{X}_{y,z}^2 + \sum_{y,z} \tilde{X}_{y,z} Y + \sum_s \tilde{X}_{i,s}^2 + \sum_s \tilde{X}_{i,s} S + \sum_f \tilde{X}_{i,f}^2 + \sum_f \tilde{X}_{i,f} F \right) =$$

$$\sum_i \sum_j \tilde{q} n_{i,j} m_{i,j} \left(\sum_{h,k} (\tilde{q}^2 n_{h,k}^2 m_{h,k}^2 + \tilde{q} n_{h,k} a_{2,Z_{h,k}}) + \sum_{h,k} \tilde{q} n_{h,k} m_{h,k} \bar{H} + \sum_{y,z} (\tilde{q}^2 n_{y,z}^2 m_{y,z}^2 + \tilde{q} n_{y,z} a_{2,Z_{y,z}}) + \sum_{y,z} \tilde{q} n_{y,z} m_{y,z} \bar{Y} \right. \\ \left. + \sum_s (\tilde{q}^2 n_{i,s}^2 m_{i,s}^2 + \tilde{q} n_{i,s} a_{2,Z_{i,s}}) + \sum_s \tilde{q} n_{i,s} m_{i,s} \bar{S} + \sum_f (\tilde{q}^2 n_{i,f}^2 m_{i,f}^2 + \tilde{q} n_{i,f} a_{2,Z_{i,f}}) + \sum_f \tilde{q} n_{i,f} m_{i,f} \bar{F} \right) =$$

con

$$\bar{H} = E(H) = \left(\sum_{p,r} \tilde{q} n_{p,r} m_{p,r} + \sum_{w,q} \tilde{q} n_{w,q} m_{w,q} + \sum_u \tilde{q} n_{i,u} m_{i,u} + \sum_d \tilde{q} n_{i,d} m_{i,d} \right) = \tilde{q} \bar{H}^*$$

da cui,

$$\sum_i \sum_j \tilde{q} n_{i,j} m_{i,j} \left(\sum_{h,k} (\tilde{q}^2 n_{h,k}^2 m_{h,k}^2 + \tilde{q} n_{h,k} a_{2,Z_{h,k}}) + \sum_{h,k} \tilde{q}^2 n_{h,k} m_{h,k} \bar{H}^* + \sum_{y,z} (\tilde{q}^2 n_{y,z}^2 m_{y,z}^2 + \tilde{q} n_{y,z} a_{2,Z_{y,z}}) + \sum_{y,z} \tilde{q}^2 n_{y,z} m_{y,z} \bar{Y}^* \right. \\ \left. + \sum_s (\tilde{q}^2 n_{i,s}^2 m_{i,s}^2 + \tilde{q} n_{i,s} a_{2,Z_{i,s}}) + \sum_s \tilde{q}^2 n_{i,s} m_{i,s} \bar{S}^* + \sum_f (\tilde{q}^2 n_{i,f}^2 m_{i,f}^2 + \tilde{q} n_{i,f} a_{2,Z_{i,f}}) + \sum_f \tilde{q}^2 n_{i,f} m_{i,f} \bar{F}^* \right) =$$

$$\sum_i \sum_j \tilde{q}^2 n_{i,j} m_{i,j} \left(\sum_{h,k} (\tilde{q} n_{h,k}^2 m_{h,k}^2 + n_{h,k} a_{2,Z_{h,k}}) + \sum_{h,k} \tilde{q} n_{h,k} m_{h,k} \bar{H}^* + \sum_{y,z} (\tilde{q} n_{y,z}^2 m_{y,z}^2 + n_{y,z} a_{2,Z_{y,z}}) + \sum_{y,z} \tilde{q} n_{y,z} m_{y,z} \bar{Y}^* \right. \\ \left. + \sum_s (\tilde{q} n_{i,s}^2 m_{i,s}^2 + n_{i,s} a_{2,Z_{i,s}}) + \sum_s \tilde{q} n_{i,s} m_{i,s} \bar{S}^* + \sum_f (\tilde{q} n_{i,f}^2 m_{i,f}^2 + n_{i,f} a_{2,Z_{i,f}}) + \sum_f \tilde{q} n_{i,f} m_{i,f} \bar{F}^* \right) =$$

$$\sum_i \sum_j \tilde{q}^3 n_{i,j} m_{i,j} \left\{ \sum_{h,k} (n_{h,k}^2 m_{h,k}^2 + n_{h,k} m_{h,k} \bar{H}^*) + \sum_{y,z} (n_{y,z}^2 m_{y,z}^2 + n_{y,z} m_{y,z} \bar{Y}^*) + \sum_s (n_{i,s}^2 m_{i,s}^2 + n_{i,s} m_{i,s} \bar{S}^*) + \sum_f (n_{i,f}^2 m_{i,f}^2 + n_{i,f} m_{i,f} \bar{F}^*) \right\} +$$

$$\sum_i \sum_j \tilde{q}^2 n_{i,j} m_{i,j} \left[\sum_{h,k} (n_{h,k} a_{2,Z_{h,k}}) + \sum_{y,z} (n_{y,z} a_{2,Z_{y,z}}) + \sum_s (n_{i,s} a_{2,Z_{i,s}}) + \sum_f (n_{i,f} a_{2,Z_{i,f}}) \right] =$$

$$\sum_{h,k} (n_{h,k}^2 m_{h,k}^2 + n_{h,k} m_{h,k} \bar{H}^*) + \sum_{y,z} (n_{y,z}^2 m_{y,z}^2 + n_{y,z} m_{y,z} \bar{Y}^*) + \sum_s (n_{i,s}^2 m_{i,s}^2 + n_{i,s} m_{i,s} \bar{S}^*) + \sum_f (n_{i,f}^2 m_{i,f}^2 + n_{i,f} m_{i,f} \bar{F}^*) =$$

dove

$$\left[\sum_{h,k} (n_{h,k} m_{h,k}) + \sum_{y,z} (n_{y,z} m_{y,z}) + \sum_s (n_{i,s} m_{i,s}) + \sum_t (n_{i,t} m_{i,t}) \right]^2 = \Phi^2,$$

quindi

$$\sum_i \sum_j \tilde{q}^3 n_{i,j} m_{i,j} \Phi^2 + \sum_i \sum_j \tilde{q}^2 n_{i,j} m_{i,j} \left[\sum_{h,k} (n_{h,k} a_{2,Z_{h,k}}) + \sum_{y,z} (n_{y,z} a_{2,Z_{y,z}}) + \sum_s (n_{i,s} a_{2,Z_{i,s}}) + \sum_f (n_{i,f} a_{2,Z_{i,f}}) \right] =$$

$$\sum_i \sum_j \tilde{q}^3 n_{i,j} m_{i,j} \Phi^2 + \sum_i \sum_j \tilde{q}^2 n_{i,j} m_{i,j} \Delta.$$

Infine applicando il valore atteso, inizialmente tralasciato, si ottiene:

$$E(\tilde{q}^3) \sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \Phi^2 + E(\tilde{q}^2) \sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \Delta$$

dove

$$\left[\sum_{h,k} (n_{h,k} a_{2,Z_{h,k}}) + \sum_{y,z} (n_{y,z} a_{2,Z_{y,z}}) + \sum_s (n_{i,s} a_{2,Z_{i,s}}) + \sum_t (n_{i,t} a_{2,Z_{i,t}}) \right] = \Delta.$$

➤ Terzo addendo

$$2E \left\{ E \left[\sum_i \sum_j \tilde{X}_{i,j}^2 \left(\sum_{h,k} \tilde{X}_{h,k} + \sum_{y,z} \tilde{X}_{y,z} + \sum_s \tilde{X}_{i,s} + \sum_f \tilde{X}_{i,f} \right) \right] \middle| \tilde{q} \right\},$$

il valore atteso interno alla parentesi graffa è pari al prodotto delle medie delle rispettiva v.a. che, sotto il condizionamento, sono indipendenti tra loro:

$$\begin{aligned} E \left(\sum_i \sum_j \tilde{X}_{i,j}^2 \right) E \left(\sum_{h,k} \tilde{X}_{h,k} + \sum_{y,z} \tilde{X}_{y,z} + \sum_s \tilde{X}_{i,s} + \sum_f \tilde{X}_{i,f} \right) = \\ \sum_i \sum_j (\tilde{q}^3 n_{i,j}^2 m_{i,j}^2 + \tilde{q} n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}}) \left(\sum_{h,k} \tilde{q} n_{h,k} m_{h,k} + \sum_{y,z} \tilde{q} n_{y,z} m_{y,z} + \sum_s \tilde{q} n_{i,s} m_{i,s} + \sum_f \tilde{q} n_{i,f} m_{i,f} \right) = \\ \sum_i \sum_j (\tilde{q}^3 n_{i,j}^2 m_{i,j}^2 + \tilde{q}^2 n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}}) \Phi, \end{aligned}$$

dove

$$\left(\sum_{h,k} n_{h,k} m_{h,k} + \sum_{y,z} n_{y,z} m_{y,z} + \sum_s n_{i,s} m_{i,s} + \sum_f n_{i,f} m_{i,f} \right) = \Phi.$$

Applicando il valore atteso si ottiene infine:

$$\begin{aligned} 2E \left\{ \sum_i \sum_j (\tilde{q}^3 n_{i,j}^2 m_{i,j}^2 + \tilde{q}^2 n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}}) \Phi \right\} = 2E \left[\sum_i \sum_j \tilde{q}^3 n_{i,j}^2 m_{i,j}^2 \Phi \right] + 2E \left[\sum_i \sum_j \tilde{q}^2 n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \Phi \right] = \\ 2E(\tilde{q}^3) \sum_i \sum_j n_{i,j}^2 m_{i,j}^2 \Phi + 2E(\tilde{q}^2) \sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \Phi. \end{aligned}$$

Il primo termine del momento centrale terzo quindi risulta essere:

$$\begin{aligned} E \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} \tilde{X}_{i,j} \right)^3 = \\ E(\tilde{q}^3) \left[2 \sum_i \sum_j n_{i,j}^2 m_{i,j}^2 \Phi + \sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \Phi^2 + \sum_i \sum_j n_{i,j}^3 m_{i,j}^3 \right] + \\ E(\tilde{q}^2) \left[2 \sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \Phi + \sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \Delta + 3 \sum_i \sum_j n_{i,j}^2 m_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \right] + \sum_i \sum_j n_{i,j} a_{3,Z_{i,j}} = \end{aligned}$$

$$E(\tilde{q}^3) \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^3 + E(\tilde{q}^2) \left[2 \sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \Phi + \sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \Delta + 3 \sum_i \sum_j n_{i,j}^2 m_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \right] + \sum_i \sum_j n_{i,j} a_{3,Z_{i,j}}$$

dato che $\left[2 \sum_i \sum_j n_{i,j}^2 m_{i,j}^2 \Phi + \sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \Phi^2 + \sum_i \sum_j n_{i,j}^3 m_{i,j}^3 \right] = \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^3$.

Osservando inoltre che $\sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \Phi = \sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \Delta$ si ottiene

$$E(\tilde{q}^3) \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^3 + E(\tilde{q}^2) \left[3 \sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \Phi + 3 \sum_i \sum_j n_{i,j}^2 m_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \right] + \sum_i \sum_j n_{i,j} a_{3,Z_{i,j}}.$$

Si noti infine che vale

$$3 \sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \Phi + 3 \sum_i \sum_j n_{i,j}^2 m_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} = 3 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right) \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \right),$$

da cui si ottiene:

$$E(\tilde{q}^3) \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^3 + 3E(\tilde{q}^2) \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right) \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \right) + \sum_i \sum_j n_{i,j} a_{3,Z_{i,j}}.$$

Secondo termine

Il secondo termine del momento centrale terzo è pari al prodotto tra la media e la varianza della somma delle v.a. considerate.

$$3\alpha_1 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} \tilde{X}_{i,j} \right) \text{var} \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} \tilde{X}_{i,j} \right) = 3 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right) \left[\sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} + \sigma_{\tilde{q}}^2 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^2 \right] =$$

$$3\sigma_{\tilde{q}}^2 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^3 + 3 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right) \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \right).$$

Terzo termine

L'ultimo addendo del momento centrale terzo è dato dalla media al cubo della somma delle v.a.,

$$\left[\alpha_1 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} \tilde{X}_{i,j} \right) \right]^3 = \left[E \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} \tilde{X}_{i,j} \right) \right]^3 = \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^3.$$

A.3

VARIABILE ALEATORIA GAMMA

Sia

$$\tilde{X} \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$$

con parametri $\alpha > 0$ e $\beta > 0$.

La funzione di densità è:

$$f_{\tilde{X}}(X) = \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta x} \quad \text{definita sui numeri reali (v.a. continua) non negativi, cioè } x \in \mathbb{R}^+,$$

dove $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ è la funzione gamma; per valori di α interi vale $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$.

La funzione di ripartizione è

$$F(x) = \frac{\gamma(\alpha, \beta x)}{\Gamma(\alpha)} \quad (\text{funzione gamma incompleta inferiore regolarizzata}),$$

dove $\gamma(\alpha, x) = \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ è la funzione gamma incompleta inferiore.

La funzione generatrice dei momenti (f.g.m.) risulta essere:

$$M_{\tilde{X}}(s) = \left(\frac{\beta}{\beta - s} \right)^\alpha.$$

Il calcolo della derivata di ordine j-esimo della f.g.m. nel punto $s=0$ permette di ottenere il momento semplice di ordine j della v.a., cioè la media di ordine j.

La derivata prima della f.g.m. nel punto $s=0$ fornisce la media:

$$M_{\tilde{X}}'(s) = \beta^\alpha \alpha (\beta - s)^{-(\alpha+1)}$$

$$M_{\tilde{X}}'(s=0) = E(\tilde{X}) = \frac{\alpha}{\beta} \quad (\text{media}).$$

La derivata seconda fornisce la media quadratica:

$$M_{\tilde{X}}''(s) = \beta^\alpha \alpha (\alpha + 1) (\beta - s)^{-(\alpha+2)}$$

$$M_{\tilde{X}}''(s=0) = E(\tilde{X}^2) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2} \quad (\text{media quadratica}).$$

La derivata terza fornisce la media cubica:

$$M_{\tilde{X}}'''(s) = \beta^\alpha \alpha (\alpha + 1) (\alpha + 2) (\beta - s)^{-(\alpha+3)}$$

$$M_{\tilde{X}}'''(s=0) = E(\tilde{X}^3) = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\beta^3} \quad (\text{media cubica}).$$

In generale, per la v.a. gamma, vale la seguente relazione per il momento semplice di ordine j:

$$E(\tilde{X}^j) = \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+j-1)}{\beta^j}.$$

La funzione generatrice dei cumulanti (f.g.c.) risulta essere:

$$\Psi_{\tilde{X}}(s) = \ln \left[\left(\frac{\beta}{\beta - s} \right)^\alpha \right].$$

Il calcolo della derivata di ordine j-esimo della f.g.c. nel punto $s=0$ permette di ottenere il cumulante di ordine j.

La derivata prima della f.g.c. nel punto $s=0$ fornisce il valore atteso. La derivata seconda invece fornisce la varianza:

$$\Psi'_{\tilde{X}}(s) = \frac{\alpha}{\beta - s}$$

$$\Psi'_{\tilde{X}}(s=0) = E(\tilde{X}) = \frac{\alpha}{\beta} \quad (\text{media}).$$

$$\Psi''_{\tilde{X}}(s) = \frac{\alpha}{(\beta - s)^2}$$

$$\Psi''_{\tilde{X}}(s=0) = \text{var}(\tilde{X}) = \frac{\alpha}{\beta^2} \quad (\text{varianza}).$$

La derivata terza della f.g.c. fornisce il momento centrale terzo:

$$\Psi'''_{\tilde{X}}(s) = \frac{2\alpha}{(\beta - s)^3}$$

$$\Psi'''_{\tilde{X}}(s=0) = \mu_3(\tilde{X}) = \frac{2\alpha}{\beta^3} \quad (\text{momento centrale terzo}).$$

In generale, per la v.a. gamma, vale la seguente relazione per il cumulante di ordine j:

$$\Psi^j_{\tilde{X}}(s=0) = K_j(\tilde{X}) = \frac{(j-1)!\alpha}{\beta^j}.$$

Altre caratteristiche di interesse della v.a. in esame sono l'indice di asimmetria:

$$\gamma(\tilde{X}) = \frac{2}{\sqrt{\alpha}},$$

la kurtosi:

$$\gamma_2(\tilde{X}) = \frac{6}{\alpha}$$

e il coefficiente di variazione:

$$CV(\tilde{X}) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}.$$

Nei casi studio presentati nel capitolo 3 si è ipotizzato che le v.a. che descrivono le *severity* in ogni cella (i,j) del triangolo siano descritte dalla seguente v.a. $\tilde{Z}_{i,j} \sim \text{Gamma}(\alpha_{i,j}, \beta_{i,j})$. La conoscenza del vettore dei coefficienti di variazione relativi ad ogni antidurata permette, grazie al metodo dei momenti, di stimare i parametri delle v.a. $\tilde{Z}_{i,j}$ nel seguente modo:

$$\alpha_{i,j} = \frac{1}{[CV_j(\tilde{Z})]^2} ; \quad \beta_{i,j} = \frac{\alpha_{i,j}}{E(\tilde{Z})}.$$

Nel caso in cui si consideri una v.a. gamma con parametri uguali, cioè:

$$\tilde{q} \sim \text{Gamma}(h, h)$$

la funzione di densità assume la seguente formulazione

$$f_{\tilde{q}}(q) = \frac{h^h q^{h-1}}{\Gamma(h)} e^{-hq}$$

mentre la funzione di ripartizione

$$F(q) = \frac{\gamma(h, hq)}{\Gamma(h)}.$$

La funzione generatrice dei momenti risulta essere:

$$M_{\tilde{q}}(s) = \left(\frac{h}{h-s} \right)^h$$

e la funzione generatrice dei cumulanti:

$$\Psi_{\tilde{q}}(s) = \ln \left[\left(\frac{h}{h-s} \right)^h \right].$$

Le caratteristiche della v.a. \tilde{q} risultano essere le seguenti:

$$E(\tilde{q}) = 1$$

$$\text{var}(\tilde{q}) = \frac{1}{h}$$

$$\gamma(\tilde{q}) = \frac{2}{\sqrt{h}} \text{ (pari al doppio della standard deviation)}$$

$$\gamma_2(\tilde{q}) = \frac{6}{h}$$

$$CV(\tilde{q}) = \frac{1}{\sqrt{h}}$$

$$E(\tilde{q}^2) = \frac{h(h+1)}{h^2} = 1 + \frac{1}{h}$$

$$E(\tilde{q}^3) = \frac{h(h+1)(h+2)}{h^3} = 1 + \frac{3}{h} + \frac{2}{h^2}$$

$$\mu_3(\tilde{q}) = \frac{2}{h^2}.$$

Stimando i parametri della v.a. \tilde{q} con il metodo dei momenti si ottiene: $h = \frac{1}{\sigma_{\tilde{q}}^2}$. La sola conoscenza

della varianza permette quindi di poter determinare tutte le caratteristiche della v.a. in esame.

Nei casi studio presentati nel capitolo 3, le analisi di sensibilità sulle imprese SIFA e AMASES sono state effettuate prevalentemente ipotizzando quattro valori di $\sigma_{\tilde{q}}$: 2%, 3%, 5% e 8%. In tali

circostanze il metodo dei momenti fornisce le seguenti caratteristiche per la v.a. \tilde{q} :

$\sigma_{\tilde{q}}$	h	$\gamma_{\tilde{q}}$
2%	2500	0,04
3%	1111,11	0,06
5%	400	0,10
8%	156,25	0,16

A.4

Nota:

Studio del segno del termine $[E(\tilde{p}^3)E(\tilde{q}^2) - E(\tilde{p}^2)]$:

le v.a. \tilde{q} e \tilde{p} sono state definite solo su supporto positivo, quindi, le rispettive medie cubiche sono sempre positive. Per una generica v.a. fattore di disturbo la media cubica è maggiore della media quadratica se e solo se:

$$\mu_3(\tilde{X}) = E(\tilde{X}^3) - 3E(\tilde{X})E(\tilde{X}^2) + 2[E(\tilde{X})]^3$$

$$E(\tilde{X}^3) = \mu_3(\tilde{X}) + 3E(\tilde{X})E(\tilde{X}^2) - 2$$

Da cui $E(\tilde{X}^3) > E(\tilde{X}^2)$ se

$$\mu_3(\tilde{X}) + 3E(\tilde{X})E(\tilde{X}^2) - 2 > E(\tilde{X}^2)$$

$$E(\tilde{X}^2) > 1 - \frac{1}{2}\mu_3(\tilde{X}).$$

Se le v.a. \tilde{q} e \tilde{p} sono delle v.a. Gamma vale sempre $E(\tilde{X}^3) > E(\tilde{X}^2)$, infatti

$$\underbrace{1 + \frac{3}{k} + \frac{2}{k^2}}_{E(\tilde{p}^3)} > \underbrace{1 + \frac{1}{k}}_{E(\tilde{p}^2)} \quad \text{se } h > -1$$

che vale sempre essendo $h > 0$ per definizione di v.a. Gamma.

Per poter determinare il segno del termine $[E(\tilde{p}^3)E(\tilde{q}^2) - E(\tilde{p}^2)]$ occorre infine sapere quando la media quadratica di \tilde{q} è maggiore o uguale all'unità:

$$E(\tilde{q}^2) > 1$$

se

$$1 + \frac{1}{h} > 1 \quad \text{che vale per ogni } h > 0, \text{ cioè sempre.}$$

Quindi nel caso in cui \tilde{q} e \tilde{p} sono delle v.a. Gamma il termine $[E(\tilde{p}^3)E(\tilde{q}^2) - E(\tilde{p}^2)]$ è sempre positivo.

Nota:

Se le v.a. \tilde{q} e \tilde{p} sono delle v.a. Gamma a parametri uguali e indipendenti tra loro vale $\gamma_{\tilde{p}\tilde{q}} > 0$, infatti: siano $\tilde{p} \sim \text{Gamma}(k, k)$ e $\tilde{q} \sim \text{Gamma}(h, h)$,

il momento centrale terzo della variabile aleatoria data dal prodotto tra le due v.a. è,

$$\mu_3(\tilde{p}\tilde{q}) = E(\tilde{p}^3)E(\tilde{q}^3) - 3\text{var}(\tilde{p}\tilde{q}) - 1$$

$$\mu_3(\tilde{p}\tilde{q}) = \underbrace{\frac{h^3 + 3h^2 + 2h}{h^3}}_{E(\tilde{q}^3)} \underbrace{\frac{k^3 + 3k^2 + 2k}{k^3}}_{E(\tilde{p}^3)} - 3 \underbrace{\left[\left(1 + \frac{1}{k}\right) \frac{1}{h} + \frac{1}{k} \right]}_{\text{var}(\tilde{p}\tilde{q}) = E(\tilde{p}^2)\sigma_{\tilde{q}}^2 + \sigma_{\tilde{p}}^2} - 1 =$$

Che dopo aver svolto i conti algebrici risulta essere

$\frac{2h^2 + 6hk + 6h + 2k^2 + 6k + 4}{h^2k^2} > 0$ che è sempre positivo. Anche l'asimmetria dunque è sempre positiva e pari a,

$$\gamma_{\tilde{p}\tilde{q}} = \frac{\mu_3(\tilde{p}\tilde{q})}{\sigma^3(\tilde{p}\tilde{q})} = \frac{2h^2 + 6hk + 6h + 2k^2 + 6k + 4}{\frac{h^2k^2}{\left[\frac{k+1+h}{hk}\right]^{\frac{3}{2}}}} = \frac{1}{\sqrt{hk}} \frac{2h^2 + 6hk + 6h + 2k^2 + 6k + 4}{(k+1+h)^{\frac{3}{2}}} > 0.$$

Se invece \tilde{q} e \tilde{p} sono due generiche v.a. fattore di disturbo, cioè con media unitaria, l'asimmetria della v.a. data dal prodotto tra i due fattori di disturbo è maggiore di zero se lo è il momento centrale terzo, cioè se $\mu_3(\tilde{p}\tilde{q}) = E(\tilde{p}^3)E(\tilde{q}^3) - 3E(\tilde{p}^2)E(\tilde{q}^2)E(\tilde{p})E(\tilde{q}) + 2[E(\tilde{p})E(\tilde{q})]^3 > 0$.

Nota:

Date due v.a. fattori di disturbo, indipendenti tra loro, e simmetriche, vale che l'asimmetria della v.a. data dal loro prodotto non è mai nulla, bensì positiva.

$$\mu_3(\tilde{p}\tilde{q}) = E(\tilde{p}^3)E(\tilde{q}^3) - 3E(\tilde{p}^2)E(\tilde{q}^2)E(\tilde{p})E(\tilde{q}) + 2[E(\tilde{p})E(\tilde{q})]^3.$$

Poiché le singole v.a. sono simmetriche vale che

$$\mu_3(\tilde{q}) = E(\tilde{q}^3) - 3E(\tilde{q}^2)E(\tilde{q}) + 2[E(\tilde{q})]^3 = 0$$

$$\mu_3(\tilde{q}) = E(\tilde{q}^3) - 3E(\tilde{q}^2) + 2 = 0$$

$$E(\tilde{q}^3) = 3E(\tilde{q}^2) - 2$$

e in modo analogo per \tilde{p}

$$E(\tilde{p}^3) = 3E(\tilde{p}^2) - 2.$$

Si può quindi scrivere

$$\mu_3(\tilde{p}\tilde{q}) = [3E(\tilde{q}^2) - 2][3E(\tilde{p}^2) - 2] - 3E(\tilde{p}^2)E(\tilde{q}^2) + 2$$

$$\mu_3(\tilde{p}\tilde{q}) = 9E(\tilde{q}^2)E(\tilde{p}^2) - 6E(\tilde{q}^2) - 6E(\tilde{p}^2) + 4 - 3E(\tilde{p}^2)E(\tilde{q}^2) + 2 = 6E(\tilde{q}^2)E(\tilde{p}^2) - 6E(\tilde{q}^2) - 6E(\tilde{p}^2) + 6$$

$$\mu_3(\tilde{p}\tilde{q}) = 0 \text{ se}$$

$$E(\tilde{q}^2)E(\tilde{p}^2) - E(\tilde{q}^2) - E(\tilde{p}^2) + 1 = 0$$

$$(\sigma_{\tilde{q}}^2 + 1)(\sigma_{\tilde{p}}^2 + 1) - (\sigma_{\tilde{q}}^2 + 1) - (\sigma_{\tilde{p}}^2 + 1) + 1 = 0$$

$$\sigma_{\tilde{q}}^2 \sigma_{\tilde{p}}^2 \neq 0$$

bensi

$$\sigma_{\tilde{q}}^2 \sigma_{\tilde{p}}^2 > 0 \quad \text{c.v.d.}$$

A.5

$$\mu_3 \left(\sum_i \sum_j^c \tilde{X}_{i,j} \right) = \alpha_3 \left(\sum_i \sum_j^c \tilde{X}_{i,j} \right) - 3\alpha_1 \left(\sum_i \sum_j^c \tilde{X}_{i,j} \right) \text{var} \left(\sum_i \sum_j^c \tilde{X}_{i,j} \right) - \left[\alpha_1 \left(\sum_i \sum_j^c \tilde{X}_{i,j} \right) \right]^3$$

Di seguito sono analizzati separatamente i tre termini che compongono il momento centrale terzo.

Primo termine

$$\alpha_3 \left(\sum_i \sum_j^c \tilde{X}_{i,j} \right) = \left[E \left(\sum_i \sum_j^c \tilde{X}_{i,j} \right)^3 \right] = E \left[\tilde{p}^3 \left(\sum_i \sum_j^c \tilde{X}_{i,j} \right)^3 \right] = E(\tilde{p}^3) E \left(\sum_i \sum_j^c \tilde{X}_{i,j} \right)^3$$

$$E \left(\sum_i \sum_j^c \tilde{X}_{i,j} \right)^3 :$$

$$= E \sum_i \sum_j (\tilde{X}_{i,j}^3) + E \sum_i \sum_j (\tilde{X}_{i,j}) \left(\sum_{h,k} \tilde{X}_{h,k} + \sum_{y,z} \tilde{X}_{y,z} + \sum_s \tilde{X}_{i,s} + \sum_t \tilde{X}_{i,t} \right)^2 +$$

$$2E \left(\sum_i \sum_j \tilde{X}_{i,j}^2 \right) \left(\sum_{h,k} \tilde{X}_{h,k} + \sum_{y,z} \tilde{X}_{y,z} + \sum_s \tilde{X}_{i,s} + \sum_t \tilde{X}_{i,t} \right)$$

➤ Primo addendo

$$E \sum_i \sum_j (\tilde{X}_{i,j}^3) = \sum_i \sum_j E(\tilde{X}_{i,j}^3) = \sum_i \sum_j (n_{i,j}^3 m_{i,j}^3 + 3n_{i,j}^2 m_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} + n_{i,j} a_{3,Z_{i,j}})$$

➤ Secondo addendo

$$E \sum_i \sum_j (\tilde{X}_{i,j}) \left(\sum_{h,k} \tilde{X}_{h,k} + \sum_{y,z} \tilde{X}_{y,z} + \sum_s \tilde{X}_{i,s} + \sum_t \tilde{X}_{i,t} \right)^2 =$$

$$\sum_i \sum_j E(\tilde{X}_{i,j}) E \left(\sum_{h,k} \tilde{X}_{h,k}^2 + \sum_{h,k} \tilde{X}_{h,k} H + \sum_{y,z} \tilde{X}_{y,z}^2 + \sum_{y,z} \tilde{X}_{y,z} Y + \sum_s \tilde{X}_{i,s}^2 + \sum_s \tilde{X}_{i,s} S + \sum_t \tilde{X}_{i,t}^2 + \sum_t \tilde{X}_{i,t} T \right) =$$

$$\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \left[\sum_{h,k} (n_{h,k}^2 m_{h,k}^2 + n_{h,k} a_{2,Z_{h,k}}) + \sum_{h,k} n_{h,k} m_{h,k} \bar{H} + \sum_{y,z} (n_{y,z}^2 m_{y,z}^2 + n_{y,z} a_{2,Z_{y,z}}) + \sum_{y,z} n_{y,z} m_{y,z} \bar{Y} \right] =$$

$$\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \left[\sum_s (n_{i,s}^2 m_{i,s}^2 + n_{i,s} a_{2,Z_{i,s}}) + \sum_s n_{i,s} m_{i,s} \bar{S} + \sum_t (n_{i,t}^2 m_{i,t}^2 + n_{i,t} a_{2,Z_{i,t}}) + \sum_t n_{i,t} m_{i,t} \bar{T} \right] =$$

$$\left[\sum_{h,k} (n_{h,k} m_{h,k}) + \sum_{y,z} (n_{y,z} m_{y,z}) + \sum_s (n_{i,s} m_{i,s}) + \sum_t (n_{i,t} m_{i,t}) \right]^2 = \Phi^2$$

$$\left[\sum_{h,k} n_{h,k} a_{2,Z_{h,k}} + \sum_{y,z} n_{y,z} a_{2,Z_{y,z}} + \sum_s n_{i,s} a_{2,Z_{i,s}} + \sum_t n_{i,t} a_{2,Z_{i,t}} \right] = \Delta$$

$$\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \Phi^2 + \sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \Delta$$

➤ Terzo addendo

$$2E \left(\sum_i \sum_j \tilde{X}_{i,j}^2 \right) \left(\sum_{h,k} \tilde{X}_{h,k} + \sum_{y,z} \tilde{X}_{y,z} + \sum_s \tilde{X}_{i,s} + \sum_t \tilde{X}_{i,t} \right) =$$

$$2 \sum_i \sum_j (n_{h,k}^2 m_{h,k}^2 + n_{h,k} a_{2,Z_{h,k}}) \left[\sum_{h,k} (n_{h,k} m_{h,k}) + \sum_{y,z} (n_{y,z} m_{y,z}) + \sum_s (n_{i,s} m_{i,s}) + \sum_t (n_{i,t} m_{i,t}) \right] =$$

$$2 \sum_i \sum_j (n_{h,k}^2 m_{h,k}^2 + n_{h,k} a_{2,Z_{h,k}}) \Phi$$

Da cui

$$E(\tilde{p}^3) \left\{ \begin{aligned} & \sum_i \sum_j n_{i,j}^3 m_{i,j}^3 + 3 \sum_i \sum_j n_{i,j}^2 m_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} + \sum_i \sum_j n_{i,j} a_{3,Z_{i,j}} + \sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \Phi^2 \\ & + \sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \Delta + 2 \sum_i \sum_j n_{i,j}^2 m_{i,j}^2 \Phi + 2 \sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \Phi \end{aligned} \right\} =$$

$$E(\tilde{p}^3) \left\{ \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^3 + 3 \sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \Phi + 3 \sum_i \sum_j n_{i,j}^2 m_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} + \sum_i \sum_j n_{i,j} a_{3,Z_{i,j}} \right\} =$$

$$E(\tilde{p}^3) \left\{ \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^3 + 3 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right) \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \right) + \sum_i \sum_j n_{i,j} a_{3,Z_{i,j}} \right\}.$$

Secondo termine

$$3\alpha_1 \left(\sum_i \sum_j^c \tilde{X}_{i,j} \right) \text{var} \left(\sum_i \sum_j^c \tilde{X}_{i,j} \right) = 3 \sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \left[\sigma_{\tilde{p}}^2 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^2 + E(\tilde{p}^2) \sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \right] =$$

$$3\sigma_{\tilde{p}}^2 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^3 + 3E(\tilde{p}^2) \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right) \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \right).$$

Terzo termine

$$\left[\alpha_1 \left(\sum_i \sum_j^c \tilde{X}_{i,j} \right) \right]^3 = \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^3.$$

A.6

$$\mu_3 \left(\sum_i \sum_j \tilde{X}_{i,j} \right) = \alpha_3 \left(\sum_i \sum_j \tilde{X}_{i,j} \right) - 3\alpha_1 \left(\sum_i \sum_j \tilde{X}_{i,j} \right) \text{var} \left(\sum_i \sum_j \tilde{X}_{i,j} \right) - \left[\alpha_1 \left(\sum_i \sum_j \tilde{X}_{i,j} \right) \right]^3.$$

Di seguito si analizzano separatamente i singoli termini che compongono il momento centrale terzo.

Primo termine

$$\begin{aligned} \alpha_3 \left(\sum_i \sum_j \tilde{X}_{i,j} \right) &= E \left[\left(\sum_i \sum_j \tilde{X}_{i,j} \right)^3 \right] = \\ &= \sum_i \sum_j E \left(\tilde{X}_{i,j}^3 \right) + 2E \left\{ \sum_i \sum_j \left(\tilde{X}_{i,j}^2 \right) \left(\sum_{h,k} \tilde{X}_{h,k} + \sum_{y,z} \tilde{X}_{y,z} + \sum_s \tilde{X}_{i,s} + \sum_f \tilde{X}_{i,f} \right) \right\} + \\ &= E \left\{ \left(\sum_i \sum_j \tilde{X}_{i,j} \right) \left(\sum_{h,k} \tilde{X}_{h,k} + \sum_{y,z} \tilde{X}_{y,z} + \sum_s \tilde{X}_{i,s} + \sum_f \tilde{X}_{i,f} \right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

➤ Primo addendo

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_j E \left(\tilde{X}_{i,j}^3 \right) &= \sum_i \sum_j E \left[E \left(\tilde{X}_{i,j}^3 \mid \tilde{p} \right) \right] = \sum_i \sum_j E \left[\tilde{p}^3 E \left({}^n \tilde{X}_{i,j}^3 \right) \right] = \\ &= E \left(\tilde{p}^3 \right) \sum_i \sum_j \left[E \left(\tilde{q}^3 \right) n_{i,j}^3 m_{i,j}^3 + 3E \left(\tilde{q}^2 \right) n_{i,j}^2 m_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} + n_{i,j} a_{3,Z_{i,j}} \right]. \end{aligned}$$

➤ Secondo addendo

$$2E \left\{ \sum_i \sum_j \left(\tilde{X}_{i,j}^2 \right) \left(\sum_{h,k} \tilde{X}_{h,k} + \sum_{y,z} \tilde{X}_{y,z} + \sum_s \tilde{X}_{i,s} + \sum_f \tilde{X}_{i,f} \right) \right\}.$$

Per poter scrivere la media di un prodotto di v.a. dipendenti tra loro a causa dei fattori di disturbo si deve ricorrere alle medie condizionate. In tale contesto è necessario ricorrere ad un doppio condizionamento in quanto le v.a. in esame risultano essere dei processi annidati a causa del doppio fattore di disturbo. Il primo condizionamento, quello rispetto alla v.a. \tilde{p} , permette di scrivere il costo sinistri per ogni cella (i,j) come un processo di Poisson composto misturato; il secondo condizionamento, rispetto alla v.a. \tilde{q} , infine, permette di sciogliere la dipendenza tra le v.a. in esame causata dal fattore di disturbo sui numeri dei sinistri e ottenere dei processi di Poisson composti semplici indipendenti tra loro.

Si ottiene dunque:

$$2E \left\{ E \left[E \left(\sum_i \sum_j \left(\tilde{X}_{i,j}^2 \right) \left(\sum_{h,k} \tilde{X}_{h,k} + \sum_{y,z} \tilde{X}_{y,z} + \sum_s \tilde{X}_{i,s} + \sum_f \tilde{X}_{i,f} \right) \mid \tilde{p} \right) \mid \tilde{q} \right] \right\} =$$

$$2E \left\{ E \left[\tilde{p}^3 \sum_i \sum_j (\tilde{X}_{i,j}^2) \left(\sum_{h,k} \tilde{X}_{h,k} + \sum_{y,z} \tilde{X}_{y,z} + \sum_s \tilde{X}_{i,s} + \sum_f \tilde{X}_{i,f} \right) \middle| \tilde{q} \right] \right\} =$$

$$2E \left\{ E(\tilde{p}^3) E \left[\sum_i \sum_j (\tilde{X}_{i,j}^2) \left(\sum_{h,k} \tilde{X}_{h,k} + \sum_{y,z} \tilde{X}_{y,z} + \sum_s \tilde{X}_{i,s} + \sum_f \tilde{X}_{i,f} \right) \middle| \tilde{q} \right] \right\},$$

ora le v.a., a seguito del condizionamento rispetto alla v.a. \tilde{q} , seguono dei processi di Poisson composti semplice, da cui si ottiene

$$2E \left\{ E(\tilde{p}^3) \sum_i \sum_j (\tilde{q}^2 n_{i,j}^2 m_{i,j}^2 + \tilde{q} n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}}) \left(\sum_{h,k} \tilde{q} n_{h,k} m_{h,k} + \sum_{y,z} \tilde{q} n_{y,z} m_{y,z} + \sum_s \tilde{q} n_{i,s} m_{i,s} + \sum_f \tilde{q} n_{i,f} m_{i,f} \right) \right\} =$$

$$2E(\tilde{p}^3) E(\tilde{q}^3) \sum_i \sum_j (n_{i,j}^2 m_{i,j}^2) \Phi + 2E(\tilde{p}^3) E(\tilde{q}^2) \sum_i \sum_j (n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}}) \Phi$$

$$\text{dove si è posto } \Phi = \left(\sum_{h,k} n_{h,k} m_{h,k} + \sum_{y,z} n_{y,z} m_{y,z} + \sum_s n_{i,s} m_{i,s} + \sum_f n_{i,f} m_{i,f} \right).$$

► Terzo addendo

$$E \left\{ \left(\sum_i \sum_j \tilde{X}_{i,j} \right) \left(\sum_{h,k} \tilde{X}_{h,k} + \sum_{y,z} \tilde{X}_{y,z} + \sum_s \tilde{X}_{i,s} + \sum_f \tilde{X}_{i,f} \right)^2 \right\},$$

ricorrendo, come fatto precedentemente, alla proprietà delle medie condizionate si ottiene:

$$E \left\{ E \left[E \left(\sum_i \sum_j \tilde{X}_{i,j} \left(\sum_{h,k} \tilde{X}_{h,k} + \sum_{y,z} \tilde{X}_{y,z} + \sum_s \tilde{X}_{i,s} + \sum_f \tilde{X}_{i,f} \right)^2 \middle| \tilde{p} \right) \middle| \tilde{q} \right] \right\} =$$

$$E \left\{ E \left[\tilde{p}^3 \sum_i \sum_j \tilde{X}_{i,j} \left(\sum_{h,k} \tilde{X}_{h,k} + \sum_{y,z} \tilde{X}_{y,z} + \sum_s \tilde{X}_{i,s} + \sum_f \tilde{X}_{i,f} \right)^2 \middle| \tilde{q} \right] \right\} =$$

$$E \left\{ E(\tilde{p}^3) E \left[\sum_i \sum_j \tilde{X}_{i,j} \left(\sum_{h,k} \tilde{X}_{h,k} + \sum_{y,z} \tilde{X}_{y,z} + \sum_s \tilde{X}_{i,s} + \sum_f \tilde{X}_{i,f} \right)^2 \middle| \tilde{q} \right] \right\} =$$

$$E \left\{ E(\tilde{p}^3) \left[E \sum_i \sum_j (\tilde{X}_{i,j}) E \left(\sum_{h,k} \tilde{X}_{h,k}^2 + \sum_{h,k} \tilde{X}_{h,k} H + \sum_{y,z} \tilde{X}_{y,z}^2 + \sum_{y,z} \tilde{X}_{y,z} Y + \sum_s \tilde{X}_{i,s}^2 + \sum_s \tilde{X}_{i,s} S + \sum_f \tilde{X}_{i,f}^2 + \sum_f \tilde{X}_{i,f} F \right) \right] \right\} =$$

$$E \left\{ E(\tilde{p}^3) \left[\sum_i \sum_j \tilde{q} n_{i,j} m_{i,j} \left(\sum_{h,k} (\tilde{q}^2 n_{h,k}^2 m_{h,k}^2 + \tilde{q} n_{h,k} a_{2,Z_{h,k}}) + \sum_{h,k} \tilde{q} n_{h,k} m_{h,k} \bar{H} + \sum_{y,z} (\tilde{q}^2 n_{y,z}^2 m_{y,z}^2 + \tilde{q} n_{y,z} a_{2,Z_{y,z}}) \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{y,z} \tilde{q} n_{y,z} m_{y,z} \bar{Y} + \sum_s (\tilde{q}^2 n_{i,s}^2 m_{i,s}^2 + \tilde{q} n_{i,s} a_{2,Z_{i,s}}) + \sum_s \tilde{q} n_{i,s} m_{i,s} \bar{S} + \right. \right. \\ \left. \left. \sum_f (\tilde{q}^2 n_{i,f}^2 m_{i,f}^2 + \tilde{q} n_{i,f} a_{2,Z_{i,f}}) + \sum_f \tilde{q} n_{i,f} m_{i,f} \bar{F} \right] \right\} =$$

$$\text{con } \bar{H} = E(H) = \left(\sum_{p,r} \tilde{q} n_{p,r} m_{p,r} + \sum_{w,q} \tilde{q} n_{w,q} m_{w,q} + \sum_u \tilde{q} n_{i,u} m_{i,u} + \sum_d \tilde{q} n_{i,d} m_{i,d} \right) = \tilde{q} \bar{H}^*$$

$$E(\tilde{p}^3)E(\tilde{q}^3)\left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j}\right)^3 + E(\tilde{p}^3)E(\tilde{q}^2)\left[3\sum_i \sum_j n_{i,j}^2 m_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} + 2\sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \Phi + \sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \Delta\right] + E(\tilde{p}^3)\sum_i \sum_j n_{i,j} a_{3,Z_{i,j}},$$

osservando che vale $\sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \Phi = \sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \Delta$, si ottiene

$$E(\tilde{p}^3)E(\tilde{q}^3)\left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j}\right)^3 + E(\tilde{p}^3)E(\tilde{q}^2)\left[3\sum_i \sum_j n_{i,j}^2 m_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} + 3\sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \Phi\right] + E(\tilde{p}^3)\sum_i \sum_j n_{i,j} a_{3,Z_{i,j}}$$

e poiché vale $\sum_i \sum_j n_{i,j}^2 m_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} + \sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \Phi = \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j}\right)\left(\sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}}\right)$ si ottiene:

$$E(\tilde{p}^3)E(\tilde{q}^3)\left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j}\right)^3 + 3E(\tilde{p}^3)E(\tilde{q}^2)\left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j}\right)\left(\sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}}\right) + E(\tilde{p}^3)\sum_i \sum_j n_{i,j} a_{3,Z_{i,j}}.$$

Secondo termine

$$\begin{aligned} \alpha_1 \left(\sum_i \sum_j \tilde{X}_{i,j} \right) \text{var} \left(\sum_i \sum_j \tilde{X}_{i,j} \right) &= \\ \sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \left[\sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}^2 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^2 + (\sigma_{\tilde{p}}^2 + 1) \sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \right] &= \\ \sigma_{\tilde{q}\tilde{p}}^2 \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^3 + (\sigma_{\tilde{p}}^2 + 1) \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right) \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} a_{2,Z_{i,j}} \right). \end{aligned}$$

Terzo termine

$$\left[\alpha_1 \left(\sum_i \sum_j \tilde{X}_{i,j} \right) \right]^3 = \left(\sum_i \sum_j n_{i,j} m_{i,j} \right)^3.$$

BIBLIOGRAFIA

- Beard R.E., Pentikainen T., Pesonen M. [1984], *Risk Theory – the stochastic basis of insurance*, Third Edition, USA, Chapman & Hall.
- Daykin C.D., Pentikainen T., Pesonen M. [1994], *Practical Risk Theory for Actuaries*, Monographs on Statistics and Applied Probability, 53, London, Chapman & Hall.
- Decreto Legislativo 26 maggio 1997, n.173.
- Decreto Legislativo 3 novembre 2003, n°307.
- Diers D. [2009], *Stochastic re-reserving in multi-year internal models – An approach based on simulations*, Ulm University, Germany
- Direttiva CEE 138/2009.
- Donati A. e Volpe Putzolu G. [2012], *Manuale di diritto delle assicurazioni*, X ed., Milano, Giuffrè Editore.
- Efron B., Tibshirani R.J. [1993], *An introduction to the bootstrap*, USA, Chapman & Hall.
- England P., Verrall R. [2002], *Stochastic Claims reserving in general insurance*, British Actuarial Journal 8, pp.443-544.
- England P., Verrall R. [2006], *Predictive distribution of outstanding liabilities in general insurance*, Annals of Actuarial Science, vol.1,n.2, pp.221-270.
- England P., Verrall R., Wuthrich M.V. [2010], *Bayesian Overdispersed Poisson Model and the Bornhuetter-Ferguson Claims Reserving Method*.
- Floreani A. [2011], *Economia delle imprese di assicurazione*, Bologna, Il Mulino.
- Friedland J. [2009], *Estimating unpaid claims using basic techniques*, Casualty Actuarial Society.
- Gisler A. [2010], *The insurance risk in the SST and in Solvency II: modelling and parameter estimation*, ETH Zurich.
- Hayne R.M. [1989], *Application of collective risk theory to estimate variability in loss reserves*, Proceedings of the Casualty Actuarial Society, pp 77-110.
- Klugman S.A., Panjer H.H., Willmot G.E. [2004], *Loss Models*, USA, Wiley, second edition.
- Legge 10 giugno 1978, n.295 .
- Mack T. [1993], *Distribution-free calculation of the standard error of Chain-Ladder reserve estimates*, ASTIN Bulletin, 23.
- Mack T. [1994], *Measuring the variability of Chain-Ladder reserve estimates*, Casualty Actuarial Society.

- Mack T. [1999], *The standard error of Chain-Ladder reserve estimates: recursive calculation and inclusion of a tail factor*, Austin Bulletin vol.29, pp. 361-366.
- Meyers G.G. [2007], *The common Shock model for correlated insurance losses*, Casualty Actuarial Society, Vol. 01/Issue 01, pp. 40-52.
- Meyers G.G., Klinker F.L., Lalonde D.A. [2003], *The aggregation and correlation of insurance exposure*, Casualty Actuarial Society.
- Meyers G.G., Schenker N. [1983], *Parameter uncertainty in the collective risk model*, Casualty Actuarial Society, LXX, pp. 111-143.
- Ohlsson E., Lauzenings [2008], *The one-year non-life insurance risk*, Astin Colloquium, Manchester.
- QIS 5 *technical specifications*, Bruxelles, 5 luglio 2010.
- Rantala J. [1982], *Solvency of insurers and equalization reserves: Vol. II – Risk theoretical model*, Helsinki, Insurance Publishing Company Ltd.
- Savelli N., Clemente G.P. [2009], *A collective risk model for claims reserve distribution*, Atti XVI Convegno di Teoria del Rischio, Università del Molise, pp.59-88 .
- Savelli N., Clemente G.P. [2009], *Stochastic claim reserving based on CRM for Solvency II purposes*, ASTIN Colloquium 2011, Madrid 19-22 June 2011.
- Savelli N., Clemente G.P. [2011], Dispense del corso “Matematica attuariale danni” a.a. 2012-2013, Università Cattolica del Sacro Cuore, Milano.
- Savelli N., Clemente G.P. [2013], Dispense del corso “tecnica attuariale delle assicurazioni danni” a.a. 2013-2014, Università Cattolica del Sacro Cuore, Milano.
- Savelli N., Clemente G.P. [2013], Dispense del corso “tecnica attuariale delle assicurazioni danni” a.a. 2013-2014, Università Cattolica del Sacro Cuore, Milano.
- Savelli N., Clemente G.P. [2013], *Lezioni di teoria del rischio per le assicurazioni*, Università Cattolica del Sacro Cuore, Milano.
- Wuthrich M.V., Merz M. [2007], *Prediction error of the expected claims development result in the Chain-Ladder method*, Bulletin of Swiss association of actuaries, vol.1, pp. 117-137.
- Wuthrich M.V., Merz M. [2008], *Modelling the claims development results for solvency purposes*, Cass E-Forum, pp. 542-568.