

**Mémoire présenté devant le jury de l'ENSAE en vue de l'obtention du
Diplôme d'Actuaire ENSAE
et de l'admission à l'Institut des Actuaire**

le 9 Juillet 2013

Par : Sylvain DETROULLEAU et Sandrine MOURET

Titre : Modèle ALM : Apport de la Logique Floue dans la modélisation des comportements

Confidentialité : non.

***Membres présents du jury de l'Institut
des Actuaire***

Pierre MATHOULIN

Signature :

Xavier MILHAUD

Signature :

Entreprise

Mazars Actuariat

Directeur de mémoire en entreprise

Alice THOU et David FITOUCHI

Signature :

Membres présents du jury de l'ENSAE

Invité

Signature :

***Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion
de documents actuariels***

Signature du responsable entreprise

Signature du candidat

Bibliothèque :

Secrétariat :

Résumé

Mots-clés : Best Estimate, logique floue, rachats conjoncturels, modèle ALM, modélisations comportementales, Solvabilité II, politique de taux servis, ensembles flous

Dans le cadre réglementaire de Solvabilité II, les méthodes de calculs des provisions techniques, des fonds propres, et du capital réglementaire vont au cœur des contrats en reproduisant l'incertitude liée à leurs évolutions futures afin de refléter la réelle exposition de l'assureur. En épargne, les interactions entre l'actif et le passif introduites par les options et garanties du contrat, nécessitent l'utilisation d'un outil ALM stochastique pour calculer le Best Estimate. Cet outil projette l'activité de l'assureur, notamment à travers des hypothèses sur le comportement des assurés, mais aussi sur le management établi par les assureurs. Les lois comportementales relèvent donc d'un enjeu important pour la compagnie et méritent une modélisation proche de la réalité.

Lorsqu'ils cherchent à résoudre des problèmes, les êtres humains utilisent des données approximatives de par une connaissance imparfaite de l'environnement qui les entoure. Leurs raisonnements se basent alors sur des critères plus qualitatifs que quantitatifs. La théorie des ensembles flous généralise la théorie classique en permettant à un élément d'appartenir à un ensemble selon un certain degré d'appartenance. Les imprécisions et les incertitudes des raisonnements humains peuvent ainsi être modélisées. La logique floue mélangeant expertise et bon sens, dans un cadre conceptuel rigoureux, se révèle être une alternative de modélisation des comportements.

C'est à ce titre que nous modélisons par la logique floue, le comportement des assurés en matière de rachats conjoncturels et celui des assureurs en ce qui concerne le taux de revalorisation ciblé par le management. Le modèle construit permettra d'aboutir à une décision chiffrée tout en simulant une réflexion humaine où les critères sont exprimés de façons linguistiques.

Dans ce mémoire, nous aboutissons à des résultats encourageants. Nous démontrons que l'approche floue permet à la fois de justifier et généraliser la fonction de rachats conjoncturels de l'ACP et, qu'une modélisation floue de la politique de taux servis allie optimisation et représentation réelle de la politique du management.

Abstract

Keywords : Best Estimate, Fuzzy logic, surrender rates, ALM model, behavioral modeling, Solvency II, crediting rates policy, fuzzy sets

In the Solvency II regulatory framework, calculation methods of technical reserves, stockholders' equity and regulatory capital replicate the uncertainty of insurance policies' future evolution, thus reflecting insurer's real exposure. In life insurance, interactions between asset and liability introduced by the policy's options and guarantees require the use of a stochastic tool like an ALM model to compute the Best Estimate. This tool projects the insurer's activity with several assumptions on policyholders' behavior and insurers' management decisions. Behavioral laws are thus an important issue for the company and deserve a realistic modeling.

Human beings use rough data when they try to solve problems, due to an imperfect knowledge of their surrounding environment. Their reasonings are based on criterions more qualitative than quantitative. Fuzzy set theory expands classical theory by allowing an element to belong to a set according to a grade of membership. Human reasoning's imprecisions and doubts can be modeled. By combining expert assessment with common sense, fuzzy logic proves to be an alternative modeling of policyholders' and insurers' behavior.

This is why we use fuzzy logic to model policyholders' behavior regarding lapses and insurers' behavior regarding the revaluation rate targeted by management. The implemented module will enable to make a real world decision while simulating reasoning in a fuzzy universe.

In this master thesis, the methodology provides encouraging results. We indicate that the fuzzy approach serves to justify and expand the ACP's surrender function and that a modeling of the crediting rates policy by fuzzy logic combines optimization and representation of reality.

Remerciements

Nous tenons à remercier David FITOUCHI et Alice THOU, membres de l'équipe Mazars Actuariat, pour leur accueil ainsi que pour la qualité et l'intérêt du sujet qu'ils nous ont confié. Nous les remercions tout particulièrement pour leur grande disponibilité tout au long de cette étude et leurs réponses relatives à nos questions et à nos doutes.

Merci encore pour la confiance qu'ils nous ont accordée dès le début de notre mémoire, pour les connaissances qu'ils nous ont transmises ainsi que pour leurs précieux conseils, qui ont fait de ce mémoire une expérience enrichissante tant au niveau professionnel que personnel.

Nous remercions également Xavier MILHAUD, responsable de la filière Actuariat de l'EN-SAE, pour son aide, sa disponibilité et toutes les réponses qu'il a apportées à nos difficultés et qui ont vivement contribuées à l'élaboration de ce mémoire.

Nos derniers remerciements iront à toutes les personnes qui nous ont soutenues et qui ont contribuées de près ou de loin à la réussite de ce mémoire.

Table des matières

Introduction	5
1 Réglementation en terme de solvabilité	7
1.1 Le contexte actuel : Solvabilité I	7
1.2 La directive Solvabilité II	8
1.2.1 Des exigences quantitatives : le Pilier 1	9
1.2.2 Des exigences de contrôle interne : le Pilier 2	11
1.2.3 Des exigences de communications : le Pilier 3	11
2 Assurance vie et contrats d'épargne	12
2.1 L'assurance vie	12
2.1.1 Le placement préféré des français	12
2.1.2 Le principe de l'assurance vie	13
2.1.3 Contrats monosupports et contrats multisupports	13
2.2 Caractéristiques des contrats d'épargne euros	14
2.3 Quelques éléments de comptabilité en assurance vie	19
2.4 Les risques liés à l'activité épargne	21
2.4.1 Les risques de marché	21
2.4.2 Le risque de rachat	22
3 Le modèle ALM	23
3.1 Fonctionnement général de l'outil	23
3.2 Modélisation du passif	25
3.2.1 Hypothèses liées à la modélisation du passif	25
3.2.2 Composition du Passif	26
3.2.3 Modélisation des passifs apparaissant au bilan	28
3.2.4 Modélisation des « cash flows »	29
3.3 Modélisation de l'actif	31
3.3.1 Hypothèses liées à la modélisation de l'actif	31
3.3.2 Composition du portefeuille d'actifs	32
3.3.3 Construction du portefeuille obligataire	33
3.3.4 Modélisation des scénarios économiques	34
3.3.5 Modélisation du « taux concurrent »	41
3.4 Modélisation des actions du management	44
3.4.1 Action 1 : Revalorisation des PM	45
3.4.2 Action 2 : Versements des prestations	50
3.4.3 Action 3 : Réallocation	50

3.5	Résultats du modèle ALM « standard »	52
3.5.1	Les Tests de convergences	52
3.5.2	Présentation du Best Estimate	52
3.5.3	Sensibilité du Best Estimate	55
4	La logique floue	61
4.1	Pourquoi la logique floue ?	61
4.2	Éléments de la théorie de la logique floue	62
4.2.1	Ensembles flous et fonctions d'appartenance	62
4.2.2	Les variables floues	63
4.2.3	Les opérateurs flous	63
4.2.4	Les règles de décisions	65
4.3	Le raisonnement en logique floue	66
4.3.1	La fuzzification	66
4.3.2	L'inférence floue	68
4.3.3	La défuzzification	72
5	Modélisation des comportements humains par la logique floue	75
5.1	Raisonnement flou appliqué aux rachats conjoncturels	76
5.1.1	La fuzzification	76
5.1.2	L'inférence floue	83
5.1.3	La défuzzification	96
5.2	Sensibilités des rachats conjoncturels	99
5.2.1	Sensibilités aux différentes méthodes d'implication et de défuzzification	99
5.2.2	Impact de la matrice de décisions	102
5.3	Raisonnement flou appliqué au management action	106
5.3.1	La fuzzification	107
5.3.2	L'inférence floue : la matrice de décisions	111
5.4	Sensibilités du management action par rapport aux variables floues	112
6	Analyses et réflexions sur les résultats	117
6.1	Best Estimate avec modélisation floue des rachats	117
6.1.1	Résultat du Modèle central	117
6.1.2	Sensibilité du Best Estimate à la structure du passif (âge et ancienneté)	118
6.1.3	Sensibilité du Best Estimate à l'hypothèse de réactivité des assurés	122
6.2	Best Estimate avec modélisation floue de la politique de taux servis	124
6.3	Limites et alternatives techniques de la logique floue	126
6.3.1	Les bornes de l'univers de discours	126
6.3.2	Les jeux d'activation et d'agrégation	128
6.3.3	De nouvelles fonctions d'appartenance	132
6.3.4	Remarques et améliorations	132
6.4	Apport de la logique floue dans le cadre du modèle ALM	133
6.4.1	L'apport de la logique floue à la modélisation des rachats conjoncturels	133
6.4.2	L'apport de la logique floue à la modélisation des actions des managements	134
6.4.3	Nos recommandations en terme d'industrialisation de la logique floue dans les modèle ALM	135
6.4.4	La place possible de la logique floue dans l'ORSA	136

Conclusion	138
Bibliographie	140
A Paramètres de l'algorithme de MORO	141
B Démonstrations du modèle de Hull & White	142

Introduction

La directive Solvabilité 2 introduit de nouvelles normes de valorisation du bilan des sociétés d'assurance. Les assureurs doivent appliquer le principe de la « juste valeur » : les actifs financiers sont évalués à leur valeur de marché et les passifs selon leur « Meilleure Estimation » ou « Best Estimate ».

En assurance vie, il est préférable d'utiliser des méthodes de simulation afin de tenir compte des interactions entre l'actif et le passif. Un modèle ALM va notamment permettre de projeter dans le temps, les portefeuilles d'actifs et de passifs grâce à des hypothèses sur l'environnement financier, la sinistralité du portefeuille, le comportement des assurés, etc. Si certaines hypothèses peuvent être calibrées sur des données historiques (hypothèses financières, hypothèses de marge,...), les lois comportementales telles que les lois de rachats pour les assurés, la politique de taux servi ou le choix de l'allocation d'actif pour le management peuvent soulever des difficultés sur le calibrage, leur modélisation et plus largement sur leur justification. Pourtant, ces hypothèses sont structurantes dans la détermination de la valeur du Best Estimate.

Par ailleurs, l'être humain est confronté à des problèmes complexes qu'il doit résoudre à l'aide de données approximatives. Par conséquent, les décisions du management et des assurés devraient être fondées sur une expertise subjective et une connaissance imparfaite de l'environnement. Force est de constater que les modèles ALM actuels, modélisant le comportement des individus par des valeurs numériques précises, ne retranscrivent pas le raisonnement humain.

C'est dans ce contexte, que la logique floue, largement éprouvée dans de multiples secteurs peut constituer une alternative aux méthodes traditionnelles. La théorie de la logique floue généralise la théorie classique en permettant à un élément d'appartenir plus ou moins à un ensemble. Elle donne un cadre conceptuel pour retranscrire de manière rigoureuse le raisonnement de l'être humain basé sur des connaissances imprécises.

Dans ce mémoire, nous allons appliquer la théorie de la logique floue à la modélisation comportementale dans le cadre d'un modèle ALM épargne.

Après avoir rappelé l'environnement réglementaire, comptable et risqué de l'assurance vie, il s'agira dans un premier temps de présenter la modélisation de notre outil ALM qui permet de projeter l'évolution du bilan d'une société d'assurance vie et le calcul de son Best Estimate.

Ensuite, nous introduirons la théorie de la logique floue et l'appliquerons à deux comportements humains. L'un relatif aux comportements de l'assuré, le rachat pour raisons conjoncturelles, et l'autre relatif au comportement du management, l'objectif de taux servi.

Dans une dernière partie, les résultats obtenus par méthode floue et par méthode traditionnelle feront l'objet d'une analyse approfondie afin de dégager l'apport de la logique floue aux modélisations comportementales.

Chapitre 1

Réglementation en terme de solvabilité

L'assurance vie est depuis quelques années le placement préféré des français. L'importance de l'épargne gérée et collectée par les sociétés d'assurance a donc justifié la mise en place d'une instance de régulation afin de protéger les assurés mais aussi de veiller à la stabilité et l'équité des marchés européens.

Un contrat d'assurance vie est un accord selon lequel le souscripteur s'engage à verser une (ou des) prime(s) à l'assureur en échange de quoi l'assureur versera au bénéficiaire du contrat une (ou des) prestation(s) sous forme de capital ou de rente lors de la réalisation d'un risque lié à l'assuré. L'assureur doit donc être capable à tout moment d'honorer ses engagements vis-à-vis des assurés ; il doit être solvable. Pour cela, l'assureur doit disposer de provisions techniques couvrant l'intégralité de ses engagements mais aussi de fonds propres (marge de solvabilité) suffisant pour couvrir des événements imprévus. Afin de protéger les assurés, des règles ont donc été mises en place en matière de solvabilité des compagnies d'assurance.

Dans ce premier chapitre, nous présentons la réglementation en vigueur au sein de l'Union Européenne en terme de solvabilité en mettant en avant la réglementation actuelle (Solvabilité I) mais aussi le nouveau système de solvabilité (Solvabilité II) qui vient compléter et améliorer le premier.

1.1 Le contexte actuel : Solvabilité I

Les premières directives concernant les exigences en solvabilité ont été mise en place en 1973 pour l'assurance non-vie et 1979 pour l'assurance vie. Ces directives ont été modifiées dans les années 2000 pour créer le cadre réglementaire actuel de Solvabilité I. Dans la directive Solvabilité I, l'actif et le passif du bilan sont calculés en valeur comptable (historique).

Cette directive repose sur trois piliers :

- **Pilier 1** : Le calcul des provisions techniques se doit d'être prudent de manière à couvrir le règlement intégral des engagements des assureurs.
- **Pilier 2** : Les compagnies d'assurance doivent investir dans des actifs sûrs, liquides et rentables.

- **Pilier 3** : La marge de solvabilité (MSR) est calculée de manière proportionnelle au risque couvert. Pour l'assurance vie, elle est de 4% des provisions mathématiques pour les contrats à support euro et de 1% des provisions mathématiques pour ceux à support en unités de compte. Tandis que pour l'assurance non vie, elle est composée de 16% des primes acquises par l'assureur.

Soulignons que même si la marge de solvabilité se calcule de manière assez simple, elle présente néanmoins deux inconvénients majeurs :

- Plus les provisions techniques sont calculées de manière prudente, plus la marge de solvabilité est élevée.
- Deux entreprises bien distinctes qui ont les mêmes provisions techniques auront par conséquent les mêmes marges de solvabilité indépendamment de leur propre risque. Par exemple, deux compagnies qui proposent des Taux Minimal Garanti (TMG) différents et qui par conséquent ont des engagements différents vis-à-vis de leur assurés, peuvent avoir la même marge de solvabilité.

Le dispositif de Solvabilité I a l'avantage d'être simple, peu coûteux et efficace¹. Néanmoins de nombreuses « insuffisances » persistent :

- La marge de solvabilité est très forfaitaire, pas de notion de risque
- L'ensemble des risques n'est pas pris en compte : risques stratégiques, risques de gestion et risques spécifiques à certains assureurs
- La nécessité de prendre en compte les nouveaux produits d'investissement et les risques dus aux placements
- L'harmonisation européenne est insuffisante : les provisions techniques ne sont pas calculées de la même manière dans tous les pays européens
- Les interactions actif/passif ne sont pas prises en compte

Afin de remédier à ces faiblesses, un nouveau système de réglementation de solvabilité est mis en place : Solvabilité II.

1.2 La directive Solvabilité II

La réforme de Solvabilité II a pour objectif de pallier aux faiblesses de Solvabilité I, d'assurer la protection des assurés en incorporant l'ensemble des risques auxquels est confrontée une compagnie d'assurance et d'assurer l'équité des marchés européens. La directive Solvabilité II introduit de nouvelles normes d'évaluation du bilan des compagnies d'assurance et de réassurance et met en place de nouvelles exigences en terme de capital de solvabilité. De la même manière que Solvabilité I, la directive Solvabilité II est constituée de trois piliers, cependant ils n'ont pas les mêmes objectifs :

- **Pilier 1** - Exigences quantitatives : calcul du capital économique et valorisation du bilan économique

1. Peu de faillites en France et en Europe sous Solvabilité I (moins de 0.25% par an)

- **Pilier 2** - Exigences qualitatives : renforcement de la surveillance prudentielle (contrôle interne, gestion des risques)
- **Pilier 3** - Exigences de communication : amélioration de la communication financière et prudentielle

1.2.1 Des exigences quantitatives : le Pilier 1

Le pilier 1 a pour objectifs de calculer les provisions techniques et de définir l'exigence en capital de la compagnie d'assurance.

Sous Solvabilité II, les actifs et passifs sont évalués en « juste valeur » afin d'avoir une meilleure vision de la richesse réelle de l'entreprise : les actifs sont valorisés en valeur de marché tandis que les passifs sont évalués selon leur « Meilleure Estimation » ou « Best Estimate ». Nous ne parlons plus de bilan comptable mais de bilan économique.

1) Les provisions techniques

Les provisions techniques sont calculées comme la somme du « Best Estimate » (BE) et d'une marge pour risque.

Le Best Estimate

L'EIOPA (European Insurance and Occupational Pensions Authority) définit le Best Estimate comme *la moyenne pondérée par les probabilités d'occurrence des flux de trésoreries futurs (prestation, frais,...) en tenant compte de la valeur temps de l'argent, et en utilisant une structure par termes des taux d'intérêt.*

Autrement dit, le Best Estimate est l'actualisation au taux sans risque de l'ensemble des flux futurs relatifs aux engagements de l'assureur. Soulignons qu'il doit être calculé en run-off, c'est-à-dire les affaires nouvelles ne sont pas comptabilisées dans les flux de trésorerie, seul les flux associés aux contrats en cours sont pris en compte.

Il y a différentes méthodes pour évaluer le Best Estimate. En assurance non-vie, les méthodes déterministes (Chain-Ladder, Méthode des cadences,...) suffisent car les actifs n'ont pas d'influence sur les passifs et sur les engagements de l'assureur. A l'inverse, en assurance-vie, les actifs et les passifs interagissent sans arrêt. Par exemple la revalorisation des provisions mathématique (passif) dépendra du taux de rendement de l'actif. Il est nécessaire d'utiliser un outil de gestion actif-passif ou ALM (Asset Liability Management) afin de capter l'ensemble des interactions entre l'actif et le passif.

Le Best Estimate représente la valeur actuelle des engagements de l'assureur envers les assurés calculée selon une approche prospective. Par conséquent dans l'outil ALM, le Best Estimate varie selon les estimations que fait l'assureur sur le comportement des assurés dans le futur (rachats, décès) mais aussi selon les actions que prendra le management (politique de taux servis, allocation d'actifs,...). **La modélisation du comportement des assurés ainsi que celui du management est donc un enjeu important pour un assureur vie.**

Dans ce mémoire, nous serons amenés à mettre en place un modèle ALM afin de calculer le Best Estimate de notre compagnie. Le modèle ALM projette l'activité de l'entreprise dans le temps par l'intermédiaire d'hypothèses sur l'actif (scénarios économiques,...) et le passif (décès, rachats,...). Le fonctionnement du modèle ALM sera expliqué dans la partie sur la modélisation. De plus, de par l'enjeu que représente la modélisation des comportements pour une compagnie d'assurance, nous proposerons une méthode de modélisation alternative pour les assurés et le management des assureurs.

La marge pour risque

La marge pour risque est définie de manière à ce que la somme du Best Estimate et cette dernière représentent le montant dont les entreprises d'assurance et de réassurance auraient besoin pour reprendre et honorer les engagements de la compagnie. Lorsqu'une société d'assurance reprend les contrats d'une autre compagnie, elle doit lever les capitaux nécessaires pour faire face aux nouveaux engagements et nouvelles exigences (SCR). La marge pour risque est donc le coût d'immobilisation de ces capitaux².

Soulignons cependant, que le Best Estimate ne correspond pas à une vision prudente mais seulement à une vision 50/50 : c'est le montant de provisions qu'une compagnie doit détenir pour avoir 50% de chance d'honorer ses engagements. Dans le but d'être solvable à 99.5% et de se prémunir contre les scénarios catastrophiques qui arrivent 1 fois tous les 200 ans, des capitaux supplémentaires sont exigés.

2) L'exigence en capital : la marge de solvabilité

En plus de provisions techniques calculées sur le principe de la « juste valeur », la société d'assurance doit détenir des capitaux nécessaires pour couvrir ses risques. Une marge de solvabilité est donc constituée de manière à ce que la compagnie d'assurance ait une probabilité de faire faillite très faible à horizon 1 an.

L'exigence en capital se fait à deux niveaux :

- **Le Capital Minimum Requis** (Minimum capital requirement : MCR) : niveau de fonds propres nécessaire pour couvrir une probabilité de ruine de 10% à 20%. Si les fonds propres sont inférieurs à ce minimum requis, il y a intervention de l'Autorité de Contrôle Prudentiel (ACP) qui peut mettre en place un plan de restructuration ou retirer l'agrément de la compagnie.
- **Le Capital de Solvabilité Requis** (Solvency Capital Requirement : SCR) : niveau de fonds propres nécessaire à un assureur pour absorber les pertes imprévues (pire scénario sur 200) et qui donne aux assurés la certitude que les prestations seront versées avec une probabilité de 99.5% à horizon 1 an. Lorsque le SCR est respecté, la probabilité de ruine de l'assurance est de 0.5%. Pour le calculer, il existe deux possibilités : le modèle standard avec des paramètres communs à toute l'Europe³ ou un modèle interne.

2. La marge pour risque est calculée par la méthode du COC (cost of capital). Selon le QIS 5, le taux du coût du capital est de 6%.

3. Les paramètres reflètent un assureur « standard »

Le bilan économique d'une société d'assurance ou de réassurance sous Solvabilité II, se définit donc de la façon suivante :

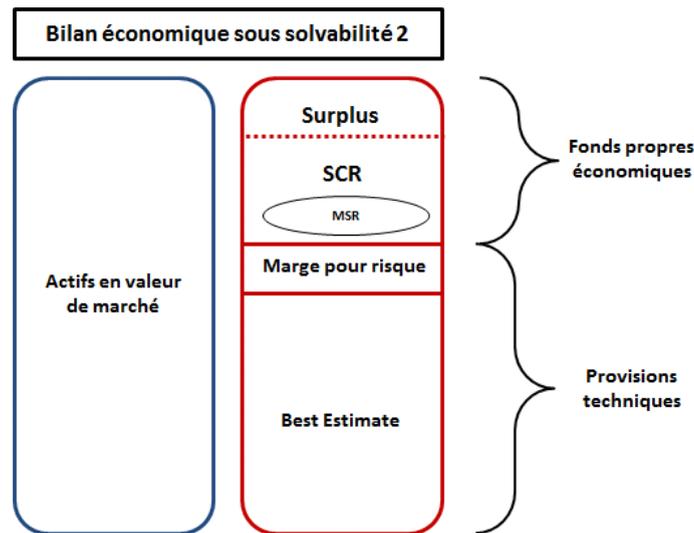


FIGURE 1.1 – Bilan économique sous Solvabilité II

1.2.2 Des exigences de contrôle interne : le Pilier 2

Le pilier 2 impose des exigences qualitatives en terme de contrôle interne et de gestion des risques dans les compagnies d'assurance.

L'outil de pilotage et d'aide à la décision mis en avant dans ce pilier est l'ORSA (Own Risk and Solvency Assessment). Les sociétés d'assurance doivent à travers ce dispositif interne évaluer et mesurer leur propre risque. C'est donc avant tout un outil de management qui permet aux compagnies de se poser des questions quant à la gestion des risques et de responsabiliser les organismes d'assurance quant à leurs projets.

1.2.3 Des exigences de communications : le Pilier 3

Sous Solvabilité II, les entreprises d'assurance et de réassurance se doivent de diffuser des informations détaillées au public pour plus de transparence et de discipline de marché; ainsi qu'aux superviseurs pour leur permettre un contrôle à la fois au niveau microéconomique et macroéconomique.

Chapitre 2

Assurance vie et contrats d'épargne

Après avoir présenté le contexte réglementaire et prudentiel dans lequel évolue le secteur de l'assurance nous allons maintenant détailler la ligne d'activité sur laquelle sera effectuée notre étude. Notre mémoire traitera de l'activité épargne en assurances vie et plus particulièrement nous nous focaliserons sur les contrats en fonds euros.

2.1 L'assurance vie

2.1.1 Le placement préféré des français

Historiquement l'assurance vie se développe au début du 20ème siècle mais les guerres associées aux périodes de fortes inflations des années 30 entravent son développement. Malgré tout, le chiffre d'affaires de l'assurance-vie est multiplié par 12 entre 1945 et 1960. Mais ce n'est qu'au début des années 80 que l'assurance vie croît exponentiellement grâce à la maîtrise de l'inflation¹. En 2006 le chiffre d'affaires français de l'assurance-vie représente 8% du Produit Intérieur Brut du pays.

Les principales raisons données par les détenteurs d'assurance vie sont généralement les suivantes :

- Se constituer un capital en vue de la retraite
- Epargner par précaution
- Valoriser son capital
- Transmettre son capital
- Epargner en vue d'un projet

Aujourd'hui, représentant environ 70% de l'épargne des ménages, l'assurance vie se pose comme le placement d'épargne préféré des français. La FFSA (Fédération Française des Sociétés d'Assurance) estime que 62% des ménages français détiennent un contrat d'assurance-vie. Soulignons tout de même, que les rendements de l'assurance-vie sont en baisse depuis les dix dernières années et ce à cause d'une baisse des taux et d'une décollecte importante.

1. Avec une inflation maîtrisée, les taux réels sont devenus positifs

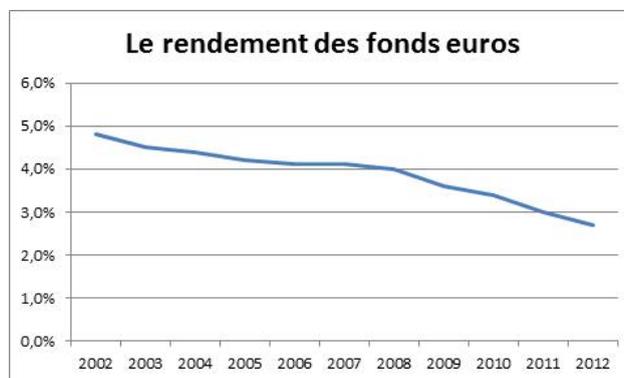


FIGURE 2.1 – Rendement moyen des fonds euros de 2002 à 2012

Source : www.ffsa.fr

2.1.2 Le principe de l'assurance vie

Historiquement, il existe deux types de contrats. **L'assurance en cas de vie** est un contrat souscrit individuellement ou par l'intermédiaire d'une entreprise, voir une association, qui permet la constitution d'une épargne et le versement d'un capital ou d'une rente si l'assuré est toujours en vie au terme du contrat. Inversement, **l'assurance en cas de décès** est un contrat où l'assureur s'engage à verser un capital ou une rente en cas de décès de l'assuré au bénéficiaire désigné par le contrat. Ce que nous appelons communément « assurance-vie » en France est en réalité un contrat d'assurance en cas de vie assorti d'une contre assurance en cas de décès. Par conséquent, si l'assuré meurt avant le terme de son contrat son capital² sera reversé aux bénéficiaires du contrat. Ainsi un tel produit d'assurance est parfaitement assimilable à un produit d'épargne, mais doté d'une réglementation et fiscalité propre à l'assurance.

Le principe de l'assurance vie repose sur le mécanisme d'épargne par capitalisation. En contrepartie du versement d'une prime périodique ou d'un versement libre, l'assureur va alimenter le compte³ dédié à l'assuré qui sera par la suite revalorisé chaque année par l'intermédiaire d'un taux. Par conséquent, tous les versements ainsi que les intérêts générés vont constituer le capital de sortie.

2.1.3 Contrats monosupports et contrats multisupports

L'assurance vie se distingue sous deux formes : les contrats monosupports, aussi appelés les contrats « en euros » et les contrats multisupports également appelés contrats en « unités de compte ».

Un contrat d'assurance vie en euros est un contrat où l'encours de l'assuré est placé sur le fond euro. Ce type de contrats permet à l'assuré d'épargner à un risque très faible puisque l'assureur garantit en permanence les sommes investies et les intérêts générés au cours du temps (TMG et participation aux bénéfices). Le capital investi sur le fond euro ne peut en aucun cas diminuer. Seul le risque de non solvabilité de l'assureur reste présent.

2. Après imposition

3. Ce compte est « la provision mathématique » de l'assuré

L'assuré peut aussi choisir un contrat d'assurance vie multisupport qui permet d'investir sur plusieurs fonds. Parmi ces fonds figure le fond euros (ou fond garanti) et les fonds en unités de compte qui permettent d'accéder aux marchés financiers. La garantie de l'assureur ne porte pas sur le montant total du fond mais sur le nombre de parts (d'unités de compte) dont dispose l'assuré. Le principe est le suivant, à chaque versement l'assuré disposera d'un nombre de parts selon le cours du fond, par conséquent la valeur des titres de l'assuré varie selon le cours des marchés financiers. Au moment où l'assuré désire retirer son capital l'assureur liquide les parts garanties à l'assuré, le capital de sortie dépend alors non pas de la performance de l'assureur mais du cours du fond.

Remarques :

- Sur les supports en unités de compte le risque résidant des marchés financiers est entièrement porté par l'assuré. L'assureur doit essentiellement s'assurer de disposer des parts qu'il a promis à l'assuré. Par conséquent, un contrat multisupport muni d'un fond euros et de fonds en UC est un contrat où l'assureur et l'assuré se partagent le risque. Soulignons que les épargnants, en général avertis aux risques, restent encore majoritairement à l'écart des contrats multisupports et continuent à privilégier les fonds en euros.
- Le choix de l'assuré entre ces deux types de contrats dépendra de l'objectif qu'il recherche. En effet, si l'assuré désire se constituer une épargne de précaution ou bien transmettre un patrimoine, il penchera davantage pour une assurance vie en euro (monosupport). En revanche, si l'objectif recherché est de valoriser son épargne à moyen ou long terme, un contrat multisupport sera mieux adapté.

2.2 Caractéristiques des contrats d'épargne euros

Après avoir présenté l'assurance vie, nous allons maintenant nous focaliser sur les contrats d'assurance vie en euro puisqu'il s'agit des contrats traités dans le cadre de ce mémoire. Voici un panorama des différents éléments qui caractérisent un contrat d'assurance vie en euros.

Le taux minimum garanti (TMG)

Chaque année l'encours de l'assuré est revalorisé par un taux qui dépend de deux éléments, le taux minimum garanti (TMG) et la participation aux bénéfices (PB).

Le taux minimum garanti est un élément contractuel qui définit le taux de revalorisation minimum et obligatoire que l'assureur doit appliquer à l'encours de l'assuré. Le TMG est exprimé sur une base annuelle et prévaut pour une durée continue au moins égale à six mois.

Le TMG est une garantie de l'assureur envers l'assuré qui comporte des risques non négligeables pour l'assureur. En effet, si le rendement moyen des actifs de l'assureur est inférieur au taux minimum garanti, l'assureur devra abandonner les produits financiers associés aux fonds propres des actionnaires pour respecter son engagement. S'il ne peut toujours pas, il devra alors enregistrer une perte.

Afin d'éviter que des assureurs pratiquent un taux minimum garanti attrayant pour les assurés mais inatteignable, l'article A132-3 du code des assurances définit un seuil réglementaire que le TMG ne doit pas dépasser :

« Les taux garantis ne peuvent excéder le minimum entre 150% du taux d'intérêt technique maximal défini par référence à 75% du taux moyen des emprunts d'Etat (TME) à la date d'effet de la garantie et le plus élevé des deux taux suivants :

- 120% de ce même taux d'intérêt technique maximal*
- 110% de la moyenne des taux moyens servis aux assurés lors des deux derniers exercices précédant immédiatement la date d'effet de la garantie (MTS). »*

Autrement dit :

$$TMG_{max} = \min(150\% \times 75\% \times TME; \max(120\% \times 75\% \times TME; 110\% \times MTS))$$

Par exemple, pour l'année 2012 le taux minimum garanti ne doit pas dépasser le seuil réglementaire de 3,375%.

Bien que le TMG soit un moyen non négligeable pour attirer de nouveaux clients, l'assureur n'a pas nécessairement intérêt à proposer un TMG trop attrayant à ses clients. En effet, pratiquer un taux minimum garanti élevé entraîne des répercussions sur la gestion d'actifs de l'assureur. Plus le TMG est élevé, plus l'assureur sera contraint d'investir dans des actifs à revenus certains du type obligations d'Etat afin de respecter ses engagements. Pratiquer un TMG faible permet, au contraire, d'obtenir plus de liberté dans la gestion d'actifs, en dirigeant par exemple une partie des encours sur des actifs offrant des opportunités de rendements plus élevés comme les obligations privées ou les actions. Le choix du TMG doit donc être un choix stratégique et optimal de la part du management.

La participation aux bénéfices (PB)

Les produits financiers des assureurs proviennent en grande majorité de l'épargne des assurés. Par soucis d'équité, il est donc normal que ces derniers reçoivent une grande partie de ces bénéfices. On appelle **la participation aux bénéfices (PB)**, la part des produits financiers reversée aux assurés. Les contrats d'assurance vie sont soumis à l'obligation légale de participation au bénéfice⁴, et l'Article A331-3 du code des assurances exige qu'au minimum 90% des résultats techniques⁵ et 85% des résultats financiers soient reversés aux assurés. Cependant, rien n'empêche à l'assureur de distribuer un taux de participation aux bénéfices supérieur au taux minimum réglementaire. Le marché de l'épargne étant un secteur très concurrentiel, il est habituel d'observer des assureurs qui reversent plus de 95% des produits financiers.

Remarque : Dans le cas où 100% des bénéfices financiers sont distribués, les seules marges de l'assureur sont les prélèvements sur encours. Nous constatons aujourd'hui que c'est le cas de nombreux assureurs sur les fonds euros.

4. Article L331-3 du code des assurances

5. Nous admettons que l'on peut négliger le résultat technique pour un portefeuille d'épargne en fonds euro.

L'assureur dispose tout de même d'une légère flexibilité dans l'attribution des participations aux bénéficiaires. Dans un premier temps, les attributions peuvent intervenir dans un délai d'au plus 8 ans à compter de leurs constitutions⁶. Dans un second temps, les assureurs doivent faire globalement participer leurs assurés aux bénéficiaires, c'est-à-dire qu'il n'y a aucune obligation d'attribuer les bénéfices aux assurés qui ont permis de les constituer. La répartition des bénéfices financiers est donc laissée à la libre appréciation de l'assureur dans un délai légal de 8 ans. Lorsqu'à la fin de l'exercice, l'assureur décide de ne pas payer immédiatement aux bénéficiaires la participation aux bénéfices, le montant est doté à la provision pour participation aux excédents (*c.f.* 2.3).

Remarques :

- Le dispositif de droit des participations aux bénéficiaires en France pose un problème d'équité entre les assurés, puisque les bénéfices ne parviennent pas nécessairement à ceux qui ont contribué à leur réalisation.
- L'assureur peut s'engager lors de la signature du contrat d'assurance à verser un taux de participation minimal à l'assuré du contrat. On parle alors de participation aux bénéfices contractuelle.

Les primes

L'assuré verse des **primes** à l'assureur tout au long du contrat. Ces versements de primes peuvent être uniques ou libres, périodiques ou non. Dans notre étude nous supposons que nos assurés versent une prime unique en début de contrat. Cependant, il arrive que l'assureur exige un versement minimum à respecter afin d'optimiser ses coûts de gestion. Chaque versement effectué par l'assuré bénéficiera alors des conditions contractuelles en vigueur (TMG, frais d'acquisition, chargement sur encours,...). De plus, l'assureur peut prélever des frais sur versements lors des versements de primes effectués par l'assuré.

Les frais relatifs au contrat

Tous les contrats d'assurance-vie comportent des frais qui peuvent varier d'une compagnie à l'autre. Les frais sont nécessaires pour payer les coûts de l'assureur (lié à la gestion du contrat, à l'utilisation d'intermédiaire,...) et le rémunérer.

Les frais sur versements (ou frais d'entrée)

Ces frais sont des prélèvements effectués sur les versements des primes et exprimés en pourcentage du montant versé. Appelés aussi frais d'entrée, ils permettent généralement de rémunérer les apporteurs d'affaires et de couvrir les frais des réseaux commerciaux. Notons qu'ils sont souvent négociables lors de la souscription du contrat en fonction du montant du versement de l'assuré.

Remarque : Les frais sur versement sont généralement compris entre 1 et 5%, excepté pour l'assurance vie directe (via internet) qui peut se permettre de pratiquer des taux à 0%.

6. Article A331.9 du code des assurances

Les prélèvements sur encours (ou frais de gestion)

Chaque année l'assureur prélève un pourcentage de la provision de mathématique de l'assuré au titre des frais de gestion. Ce prélèvement permet à l'assureur de couvrir les frais liés à la gestion du contrat de l'assuré mais aussi de se constituer une marge avec le surplus.

Remarques :

- Généralement les prélèvements sur encours oscillent entre 0,5% et 1% selon les assureurs.
- Si un assureur distribue 100% de ses produits financiers, son revenu dépend uniquement de la marge effectuée à partir des frais de gestion.

L'option de rachat

On parle de **rachat « partiel »** ou bien **« total »** du contrat lorsque l'assuré décide de récupérer une partie ou bien la totalité de son épargne. L'assuré dispose de ce droit de rachat tout au long du contrat. Cependant, certains assureurs pratiquent des pénalités de rachat exprimées en pourcentages de la provision mathématique rachetée. Conformément au code des assurances la pénalité de rachat est applicable seulement durant les 10 premières années du contrat et ne doit pas dépasser 5% de la provision mathématique de l'assuré.

Remarque :

- Un rachat total met un terme au contrat.
- Il est généralement difficile de voir l'assurance vie française comme un véritable contrat d'assurance puisque la contrepartie assurance décès semble retirer tout aléa au contrat. Pourtant un aléa est bien présent du côté de l'assureur, ce sont les dates de rachat. En effet l'assureur ne sait pas à l'avance quand l'assuré désirera récupérer une partie ou la totalité de son épargne. Nous verrons dans la suite de ce chapitre (*c.f.* 2.4.2) que l'estimation des rachats est un facteur primordial pour les assureurs vie.

Le décès

Lorsque l'assuré décède son épargne est transmise aux bénéficiaires désignés du contrat. L'épargne sera soumise aux droits de succession avantageux de l'assurance-vie (*c.f.* 2.2).

La fiscalité appliquée aux contrats en euros

L'assurance-vie n'est plus le produit miracle en matière de réduction d'impôt mais reste tout de même doté d'un régime fiscal encore avantageux.

Les prélèvements sociaux

Les plus-values issues d'un contrat d'assurance vie sont soumises aux prélèvements sociaux chaque année. Depuis le 1er Juillet 2012, le taux global de ces prélèvements sociaux s'élève à 15,5% et se répartit de la façon suivante :

- 8,2% de contribution sociale généralisée (CSG)
- 0,5% de contribution au remboursement de la dette sociale (CRDS)
- 5,7% de prélèvement sociaux
- 1,1% de contribution pour le financement du RSA (Revenu de solidarité active)

Impôts sur le revenu / Prélèvements forfaitaires

Lorsque l'assuré retire son épargne par l'intermédiaire d'un rachat partiel ou total, les gains sont soumis soit au barème progressif de l'impôt sur le revenu, soit à un prélèvement forfaitaire de :

- 35% entre 0 et 4 ans d'ancienneté de contrat
- 15% entre 4 et 8 ans d'ancienneté de contrat
- 7,5% après 8 ans d'ancienneté de contrat

D'autre part, après huit ans, l'assuré peut retirer sans payer d'impôts 4600€ par an pour une personne seule et 9200€ pour un couple.

Les droits de succession

Au décès de l'assuré, le capital qui a été épargné sur le contrat revient aux bénéficiaires désignés. Si le bénéficiaire est le conjoint ou le partenaire d'un Pacs, il sera exonéré d'impôts. Pour les versements effectués avant l'âge de 70 ans, les autres bénéficiaires profiteront d'un abattement de 152500€. Passé ce montant, une taxe de 20% puis de 25% s'applique. Pour les versements effectués après 70 ans, les bénéficiaires profitent d'un abattement de 30500€. Au-delà de ce seuil, seul les versements sont intégrés à la succession (les gains sont exonérés de droit).

Versements avant 70ans	Versements après 70ans
<ul style="list-style-type: none">• Exonération pour le conjoint ou le pacsé• <u>Autres bénéficiaires</u> : exonération jusqu'à 152500€ puis taxe de 20% de 152501€ à 1055338€ et 25% au-delà	<ul style="list-style-type: none">• Exonération pour le conjoint ou le pacsé• <u>Autres bénéficiaires</u> : Droit de succession sur les primes taxables après un abattement commun de 30500€

Les arbitrages

Les assureurs permettent aux assurés de déplacer leurs encours d'un fond à un autre durant le contrat. Par exemple, si l'assuré avait investi initialement la totalité de son épargne sur un fond en euros, il peut à tout moment décider de déplacer une partie de son épargne vers des supports en unités de comptes. L'assuré effectue alors **un arbitrage**. L'assureur se réserve le droit de prélever au titre de frais d'arbitrages une partie de l'épargne déplacée, le plus souvent à travers un taux.

Remarque : Dans notre mémoire nous considérons uniquement des contrats d'assurance-vie en euros. Nous négligerons donc la possibilité de faire un arbitrage.

2.3 Quelques éléments de comptabilité en assurance vie

Dans cette partie, nous allons aborder les éléments comptables qui se rapportent à l'assurance vie et qui nous seront utiles à la compréhension des décisions du management et de la gestion actif-passif.

La provision mathématique (PM)

La provision mathématique correspond à la différence entre la valeur actuelle des engagements respectivement pris par les assureurs et les assurés⁷. Dans un contrat d'assurance-vie, la provision mathématique est égale à l'encours de l'assuré revalorisé à la date actuelle.

La provision pour participation aux excédents (PPE)

La provision pour participation aux excédents est définie comme le montant des participations aux bénéfices attribuées aux assurés qui n'est pas reversé immédiatement après la liquidation de l'exercice qui les a produits.

Conformément au code des assurances toutes les sommes affectées à la provision pour participation aux excédents doivent être restituées aux assurés sous un délai de 8 ans. La répartition temporelle de cette provision est donc laissée à la libre appréciation des assureurs, ce qui leur permet, par exemple, de lisser le taux servis aux assurés⁸ ou bien d'attirer de nouveaux clients en proposant un taux de revalorisation plus élevé que la moyenne pendant les premières années du contrat grâce à un taux de participation aux bénéfices attractif.

Remarque : La PPE ne peut pas être utilisé pour servir le TMG aux assurés de l'exercice en cours.

La provision pour aléa financier (PAF)

La provision pour aléa financier est une provision destinée à compenser la baisse du rendement de l'actif qui risquerait d'entraîner une inadéquation entre le taux de rendement des actifs et la rémunération contractuelle que l'assureur s'est engagé à servir : le TMG et la PB contractuellement garantie si elle existe.

La provision est calculée de manière globale pour tous les actifs de l'entreprise. Plus précisément elle est constituée quand les intérêts garantis sont supérieurs à 80% du taux rendement de l'actif général de l'assureur. Le montant de la provision est la différence entre les provisions mathématiques recalculées avec le taux de rendement réel des actifs diminués d'un cinquième et les provisions mathématiques à l'inventaire.

7. La valeur actuelle désigne la valeur actualisée des engagements de chacun (assureur et assuré) pondérés par la probabilité d'occurrence.

8. Lors d'exercices où les produits financiers sont élevés, l'assureur affecte une partie de ces produits financiers à la PPE, inversement les années où les revenus financiers sont mauvais l'assureur utilise la PPE pour servir un taux de revalorisation correcte.

La provision globale de gestion

La **provision globale de gestion** est une provision destinée à couvrir l'ensemble des charges de gestion futures des contrats non couvertes par des chargements sur primes ou par des prélèvements sur encours. Selon le code des assurances, elle est calculée de manière globale sur tout le portefeuille concerné.

Remarque : Cette provision ne concerne pas les frais d'acquisition des contrats et les frais de gestion des placements.

Les actifs « R.332-19 » et « R.332.20 »

Les actifs sur lesquels les assureurs ont le droit d'investir pour faire face à leurs engagements sont énumérés dans l'article R.332-2 du code des assurances. On retrouve parmi eux deux grandes catégories : les actifs relevant de l'article R332-19 et ceux relevant de l'article R332-20 :

Actifs « R.332-19 »	Actifs « R.332-20 »
Obligations	Valeurs mobilières (actions)
Obligations à coupons indexés	Immobilier et SCI
	Fonds commun de placement
	Prêts

L'appartenance d'un actif à tel article plutôt qu'un autre influe directement sur la manière dont celui-ci doit être comptabilisé dans les comptes. D'autre part, certaines provisions sur les actifs ne concernent qu'une des deux catégories.

La réserve de capitalisation

Le code des assurances prévoit qu'en cas de vente d'un actif R.332-19 (une obligation par exemple), un versement ou un prélèvement est effectué sur la **réserve de capitalisation** en fonction du prix de vente de l'actif et de sa valeur nette comptable.

Plus précisément :

- Si une plus-value⁹ est réalisée, la différence entre le prix de vente et la valeur nette comptable est versée à la réserve de capitalisation.
- Si une moins-value¹⁰ est réalisée, la différence entre la valeur nette comptable et le prix de vente est prélevée à la réserve de capitalisation.

L'objectif de cette provision est de compenser les moins-values sur les cessions d'actifs R.332-19 et en particulier sur les actifs obligataires représentant plus de la majorité de l'actif des assureurs.

Remarque : La particularité de la réserve de capitalisation est qu'elle fait partie des fonds propres à la différence de la plupart des provisions. Ainsi la réserve de capitalisation est éligible pour constituer une partie de la marge de solvabilité de l'assureur (SCR et MCR).

9. Prix de vente supérieur à la valeur nette comptable

10. Prix de vente inférieur à la valeur nette comptable

La provision pour dépréciation durable (PDD)

Lorsqu'un actif R.332.20 (notamment une action) est évalué « durablement » en moins-values latentes, une provision pour dépréciation à caractère durable (PDD) est comptabilisée. Par exemple, une action subit une dépréciation durable si pendant les 6 mois qui ont précédé l'arrêté des comptes, sa valeur de marché a été inférieure à 80% (respectivement 70%) de sa valeur comptable lorsque les marchés sont peu volatils¹¹ (respectivement volatils).

La provision pour risque d'exigibilité (PRE)

Conformément au code des assurances, une provision pour risque d'exigibilité doit être constituée lorsqu'une moins-value latente est constatée sur l'ensemble des actifs R.332-20.

Le montant de la provision est inscrit au passif et correspond à la moins-value latente nette des actifs R.332-20. Cependant si l'assureur satisfait les règles prudentielles imposées par son régulateur, en particulier l'exigence de marge de solvabilité, le montant de la provision peut alors être égal à un tiers de la moins-value latente nette des actifs R.332-20.

Remarque : Il ne faut pas confondre la PRE avec la PDD qui couvre la dépréciation durable actif par actif.

2.4 Les risques liés à l'activité épargne

Après avoir décrit les caractéristiques des contrats d'épargne euros ainsi que les provisions qui rentrent en jeu lors des modélisations de ces contrats; nous allons dans cette dernière partie présenter un échantillon de risques¹² auxquels sont exposés les assureurs dans leur activité d'assurance vie en euros.

2.4.1 Les risques de marché

Risque action et immobilier

On identifie le risque action (respectivement immobilier) comme le risque lié au changement affectant le niveau ou la volatilité de la valeur de marché des actions (respectivement des actifs immobiliers).

Un assureur est nécessairement affecté par ce risque de par la composition variée de son portefeuille d'actifs. En cas d'une baisse significative de la valeur des actions ou des actifs immobiliers, l'assureur peut être dans l'incapacité d'honorer son TMG ou bien de revaloriser correctement les encours aux yeux de certains assurés. Il devra alors abandonner une partie de sa marge et éventuellement vendre des actifs même si ces derniers se trouvent en moins-values latentes.

Risque de taux

Le risque de taux d'intérêt concerne les actifs et passifs de l'assureur dont la valeur est sensible à la structure de la courbe des taux d'intérêts. Avec un portefeuille d'actifs composé à plus

11. Déterminé par l'autorité des marchés financiers (AMF)

12. Les risques essentiels pour la compréhension de notre mémoire

de 80% de produit de taux (obligations,...), les assureurs sont fortement exposés au risque de taux.

Plus particulièrement :

- Une hausse de taux peut entraîner une vague de rachats conjoncturels. En effet les taux servis seront plus élevés pour les nouveaux entrants que pour les contrats en cours. Par conséquent, certains assurés seront amenés à racheter leur contrat et verser leur épargne chez un concurrent afin de bénéficier d'un taux servi plus élevé.
- Une baisse des taux entraîne une hausse de la valeur de marché des obligations et donc de l'actif. Mais parallèlement cela va diminuer à long terme le rendement financier de l'assureur, puisque les nouvelles obligations achetées auront un rendement inférieur. Le TMG étant fixé dans le contrat d'assurance, il ne subit pas la baisse des taux. Par conséquent, l'assureur pourrait manquer de ressources financières pour honorer son engagement si le rendement financier de ses actifs est fortement impacté par le mouvement de taux. Il sera alors encore une fois obligé de diminuer sa marge et vendre des actifs (susceptibles d'être en moins-values latentes).

2.4.2 Le risque de rachat

Les contrats d'épargne permettent en général aux assurés de racheter de manière partielle ou totale leur épargne.

Nous pouvons distinguer deux types de rachats en assurance-vie :

- **Les rachats conjoncturels** : ce sont les rachats liés à la conjoncture économique et à la performance de l'assureur. Ils sont généralement estimés à partir de la différence entre le taux servi par l'assureur et le taux servi de la concurrence.
- **Les rachats structurels** : ce sont les rachats liés aux caractéristiques du contrat ou des assurés. Par exemple, on constate habituellement une vague de rachat structurel après la huitième année. Ce phénomène s'explique par la fiscalité de l'assurance-vie, qui devient plus favorable en matière de rachats à partir de 8 ans. Ils sont le plus souvent estimés à partir de l'historique des assureurs.

L'assureur effectue son allocation d'actif en fonction des caractéristiques de son passif (duration, TMG,...). Si les rachats réels sont supérieurs aux rachats prévus, par souci de liquidité, l'assureur sera obligé de vendre des actifs qui ne sont pas arrivés à maturité, ce qui peut être d'autant plus pénalisant si ces actifs sont en moins-values latentes. Par conséquent, le risque de rachat est un risque majeur pour les assureurs vie qui résulte d'une modification du comportement des assurés. La modélisation de ces comportements relève donc d'un enjeu primordial quant à la gestion actif-passif d'une compagnie d'assurance ainsi qu'à la valeur de cette dernière.

Chapitre 3

Le modèle ALM

Dans le chapitre suivant nous allons présenter la mise en uvre de notre modèle ALM. Il s'agit d'un outil Excel capable d'estimer selon une approche stochastique le Best Estimate d'une compagnie d'assurance vie commercialisant des produits d'épargne « en euro ».

Nous détaillerons dans un premier temps le fonctionnement de l'outil, les différentes modélisations mises en œuvre ainsi que les simplifications effectuées. Ensuite, nous présenterons et analyserons les résultats obtenus.

3.1 Fonctionnement général de l'outil

Notre modèle évalue le Best Estimate sous une approche stochastique. Rappelons qu'en assurance vie, il est nécessaire d'utiliser des techniques de simulation afin de capter les interactions Actif/Passif. Dans le cadre particulier de notre société d'assurance vie l'approche stochastique permet de valoriser le coût des « options et garanties » des contrats, l'option de rachat, le TMG et la PB contractuelle.

Ci-dessous un exemple de valorisation du TMG dans une approche déterministe :

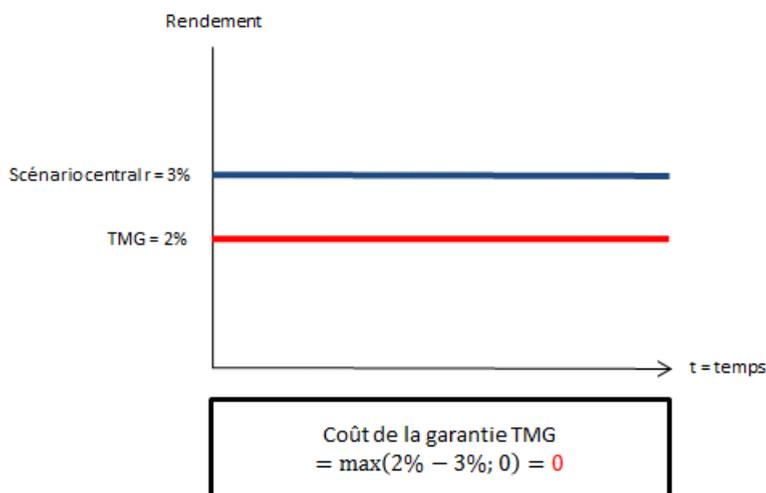


FIGURE 3.1 – Valorisation du TMG selon une approche déterministe

En se basant sur une situation moyenne, un modèle de scénario déterministe ne valorise pas le coût du TMG à sa juste valeur comme l'illustre la figure 3.1 ci-dessus. En revanche lorsque l'on considère un ensemble de scénarios déterminés de façon aléatoire autour d'une moyenne (c.f. figure 3.2) l'impact du TMG n'est pas négligé.

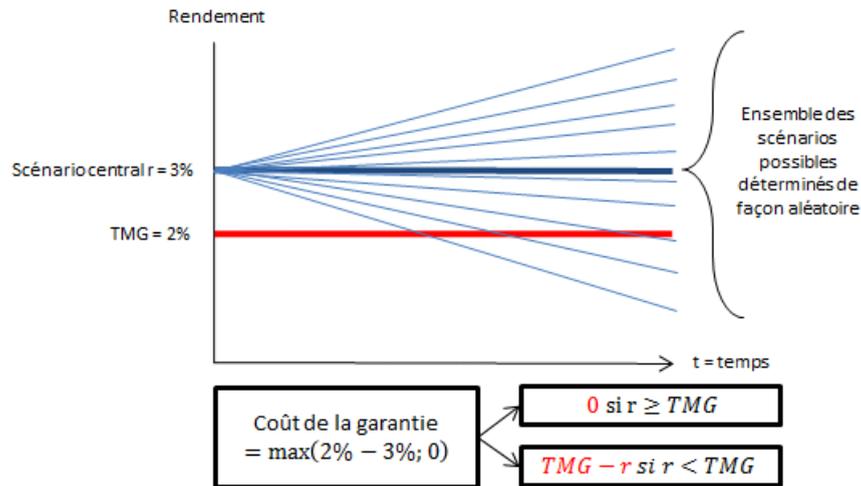


FIGURE 3.2 – Valorisation du TMG selon une approche stochastique

La technique de simulation choisie dans notre outil est la méthode de Monte-Carlo qui repose sur la loi des grands nombres. Il s'agit d'effectuer un grand nombre de scénarios de façon indépendante, afin d'obtenir une approximation proche de la vraie valeur du Best Estimate.

L'outil prend en entrée 1000 scénarios économiques risque neutre générés par notre ESG¹. Pour chaque scénario l'outil projette l'actif et le passif de la société d'assurance sur 30 ans², tout en effectuant les interactions actif/passif (taux servis, rachats, réallocations,) selon un algorithme prédéfini. Le Best Estimate de la société se calcule alors selon la formule :

$$\text{Best estimate} = E^{Q \otimes P} \left(\sum_{n=1}^{30} \delta_n \times C_n \right) \approx \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} \sum_{n=1}^{30} \delta_n^i \times C_n^i$$

où

- δ_n^i est le facteur d'actualisation en zéro intervenant l'année n dans le scénario i
- C_n^i est la somme des cash flows intervenant l'année n dans le scénario i

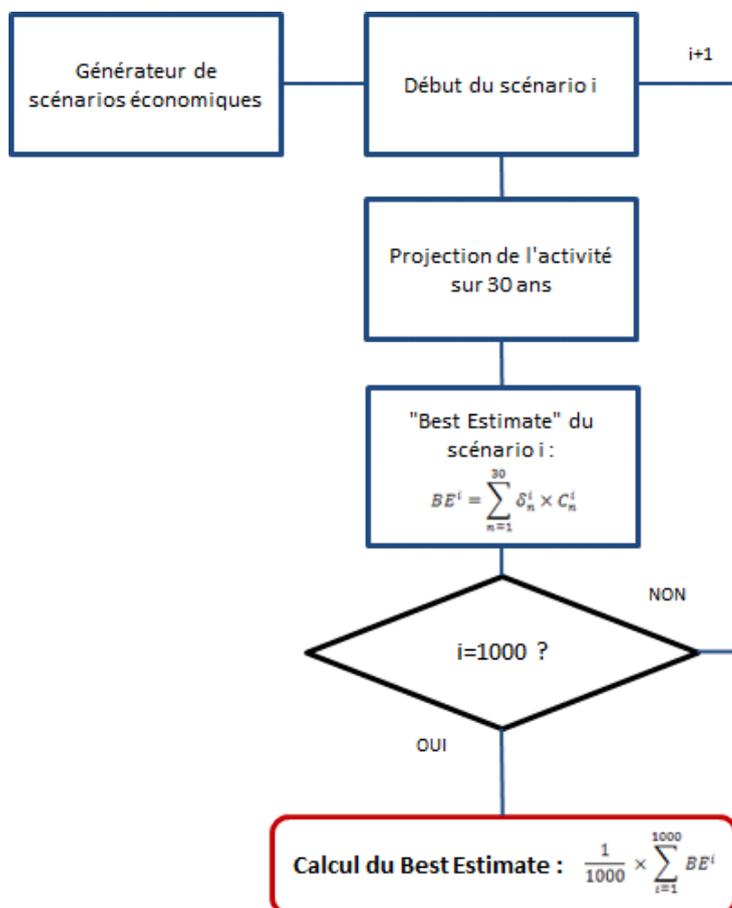
Par ailleurs le périmètre des cash flows recouvre dans notre modèle :

- **Les prestations** : les rachats des contrats et les capitaux décès.
- **Les frais** : les frais de placements financiers, de gestion de sinistres et d'administration.
- **Les taxes** : principalement les prélèvements sociaux.

1. Générateur de scénarios économiques

2. Il y a extinction forcée du passif après 30 ans

Ci-dessous l'architecture de calcul du Best Estimate de notre modèle ALM :



3.2 Modélisation du passif

Cette sous partie concerne la modélisation du Passif. Nous commençons par exposer les hypothèses simplificatrices en séparant les hypothèses liées aux spécifications techniques du Best Estimate de celles liées à notre outil.

3.2.1 Hypothèses liées à la modélisation du passif

L'estimation d'un Best Estimate repose d'abord sur des hypothèses théoriques. Afin de déterminer les engagements actuels de l'assureur, aucune nouvelle police n'est souscrite durant la projection. On dit alors que la société d'assurance fonctionne en run-off. Par conséquent, seules les primes futures des polices en cours doivent être prises en compte. Pour plus de simplicité nous faisons l'hypothèse qu'il n'y a pas de primes futures sur notre stock de contrat. Enfin, nous considérons, que la société d'assurance ne fait pas appel à la réassurance pour céder une partie de son risque.

Explicitons maintenant les hypothèses générales supplémentaires que nous avons optées dans la modélisation du passif. L'objectif étant de construire un modèle ALM pour étudier l'apport du module « logique floue » par la suite.

Les hypothèses simplificatrices sont les suivantes :

- La mortalité des assurés est supposée déterministe en fonction de l'âge de l'assuré.
- Les décès et les rachats ont lieu en fin d'année.
- Les polices d'assurances sont regroupées en groupes homogènes (model points) selon des critères discriminants que nous détaillons dans la sous partie suivante.
- Nous ne modélisons pas l'ensemble des éléments du bilan. En outre, nous faisons abstraction de certaines provisions telles que la provision pour dépréciation durable, la provision pour risque d'exigibilité et la provision globale de gestion.
- Au bout de 30 ans, l'activité de l'entreprise prend fin, c'est-à-dire que l'ensemble des assurés restants rachète leur contrat et la provision mathématique de l'assureur devient nulle.

3.2.2 Composition du Passif

Construction des « model points »

Notre passif d'assurance est entièrement fictif. Il a été construit à partir de cinq produits d'épargne proches de ceux qu'on pourrait trouver dans le passif d'un assureur vie aujourd'hui.

Dans notre société d'assurance vie un contrat d'épargne euro est caractérisé par le triplet : TMG / PB contractuelle / frais d'acquisition.

Contrat n°	TMG	PB contractuelle	Frais d'acquisition
1	2,40%	95%	3,00%
2	0,80%	100%	2,00%
3	1,40%	95%	2,25%
4	3,00%	90%	4,00%
5	0,00%	100%	1,00%

Nous ajoutons, comme critère discriminant à ce triplet, l'ancienneté en années de l'assuré afin d'affiner nos model points. En faisant varier cette ancienneté de 0 à 8 ans, nous obtenons 45 model points :

Model Points n°	Ancienneté	TMG	PB contractuelle	Frais d'acquisition
1	0	2,40%	95%	3,00%
2	1	2,40%	95%	3,00%
3	2	2,40%	95%	3,00%
...
45	8	0,00%	100%	1,00%

Nous avons défini par la suite pour chaque model point l'âge moyen des assurés le composant. Cet âge permettra de projeter les décès mais aussi les rachats lorsque le modèle ALM sera muni de son module logique floue. Chaque model point se voit donc attribuer un âge moyen selon la plage suivante [20; 30; 40; 50; 60; 70]. Dans le cadre de ce mémoire la cohérence des âges choisis n'a pas de réelle importance. Cependant, en vue de nos études futures portant sur la logique floue où l'âge est au cœur de la modélisation, il est nécessaire de parcourir l'ensemble des âges afin de mesurer concrètement l'apport du module. Après avoir renseigné l'âge de chaque model point nous obtenons une moyenne d'âge global d'environ 47 ans.

Afin de simplifier davantage nos model points, les autres caractéristiques nécessaires à la projection du passif sont identiques.

Ainsi pour chaque model point :

- Nombre de polices à la date initiale = 1000
- Montant de la provision mathématique d'ouverture = 20M€³
- Frais sur encours = 0,6%
- TMG après 8 ans d'ancienneté = 0%⁴

Répartition du Passif

En agrégeant les provisions mathématiques des model points nous atteignons une provision mathématique globale de 900M€. Nous déterminons alors les principaux éléments figurant au passif du bilan comptable en pourcentage des provisions mathématiques.

Ainsi :

- Les fonds propres représentent 6% de la provision mathématique globale, soit 63M€
- La PPE représente 1% de la provision mathématique globale, soit 9M€
- La réserve de capitalisation représente 1% de la provision mathématique globale, soit 9M€

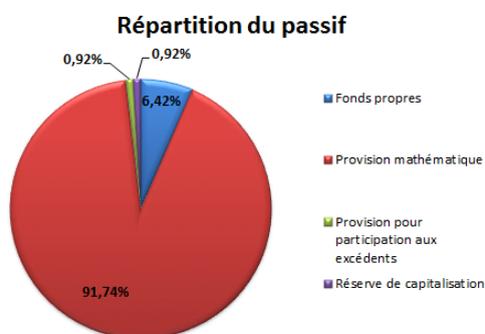


FIGURE 3.3 – Répartition du passif

-
3. Soit une provision mathématique moyenne de 20K€ par police
 4. Après 8 ans d'ancienneté, le taux d'intérêt minimum garanti est ramené à 0%

3.2.3 Modélisation des passifs apparaissant au bilan

Nous abordons maintenant la modélisation des principaux éléments apparaissant au passif du bilan.

1) Les fonds propres

Du point de vue comptable, à la fin d'un exercice, les fonds propres d'un assureur sont composés du capital social, de la réserve (correspondant aux bénéfices des exercices précédents non redistribués aux actionnaires) et du résultat de l'année.

Durant la projection de l'activité de notre compagnie d'assurance fictive, les bénéfices ne sont jamais redistribués aux actionnaires, par conséquent dans notre outil les fonds propres deviennent le capital de départ auquel on ajoute l'ensemble des résultats ayant eu lieu. Cette hypothèse permet alors de calculer les fonds propres à la fin de chaque année de la manière suivante :

$$FP_N = FP_{N-1} + R_N$$

Où

- FP_N sont les fonds propres de la compagnie d'assurance lors de l'année N
- R_N est le résultat comptable de l'année N
- $FP_{2012} = 63M\text{€}$

2) La provision mathématique

A la fin de chaque année de projection, la provision mathématique de clôture est calculée de la manière suivante :

$$PM_{cloture} = PM_{ouverture} + \text{Revalorisation} - \text{Prélèvements sociaux} - \text{Commission sur encours} - \text{Rachats} - \text{Décès}$$

Afin de mettre un terme à l'activité de notre compagnie d'assurance, nous supposons qu'après le 30^{me} exercice la provision mathématique devient nulle. On considère dans notre modèle, que l'ensemble des assurés restants rachètent leur contrat.

3) Réserve de capitalisation

La réserve de capitalisation fait partie des provisions que nous modélisons dans notre modèle ALM. Tout au long de la projection, lorsque le management cède des obligations, la provision est dotée par les plus-values réalisées ou bien reprise lorsque des moins-values sont réalisées. Son montant ne peut pas être négatif.

4) La provision pour participation aux excédents

La PPE est un élément indispensable du modèle ALM. Nous verrons par la suite comment cette provision est utilisée⁵ par le management.

5. Comme toute provision elle est soit dotée soit reprise

Notons cependant que :

- Afin de satisfaire sa contrainte temporelle⁶, chaque année nous nous obligeons de reverser au minimum 15% de la PPE à nos assurés.
- A la fin de la projection, si la PPE est positive, elle est reversée entièrement sous forme de prestations à l'ensemble des assurés restants.

3.2.4 Modélisation des « cash flows »

1) Les rachats

Notre outil ALM comprend à la fois une modélisation structurelle et conjoncturelle des rachats. Concernant les simplifications liées aux rachats, nous supposons qu'un rachat est total et intervient en fin d'année, après que le management ait revalorisé l'encours de l'assuré.

Fonction de l'ancienneté de l'assuré et exprimés en pourcentage de la provision mathématique du model point, les rachats structurels suivent la loi suivante :

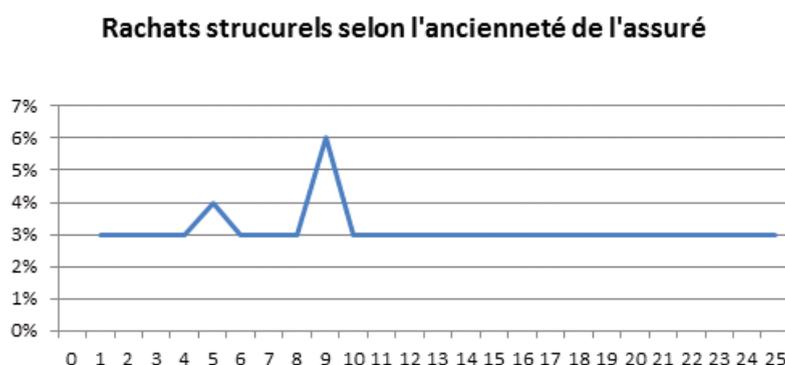


FIGURE 3.4 – Courbe des rachats structurels

Remarque : Nous supposons à travers ce graphique que notre compagnie d'assurance a constaté à travers d'études statistiques un rachat structurel constant de l'ordre de 3% excepté lorsque l'ancienneté de l'assuré est égale à 5 ou 8 ans. Dans ces deux cas de figure l'historique de la compagnie indique un rachat structurel de 4% et respectivement 6%. Les deux pics de rachat sont entièrement expliqués par la fiscalité de l'assurance vie.

Comme expliqué dans le chapitre précédent, les rachats conjoncturels (ou dynamiques) sont les rachats expliqués par les conditions actuelles des marchés financiers. Plus précisément, modéliser ces rachats suppose la prise en compte des assurés, qui, réactifs à la conjoncture économique rachèteront leur contrat s'ils estiment pouvoir obtenir un meilleur rendement sur un produit concurrent.

La modélisation de rachat conjoncturel pose un problème aux compagnies d'assurance. Ces dernières ne peuvent pas établir d'historique comme elles font pour les rachats structurels. Pour

6. La PPE d'un exercice doit être redistribuée sous 8 ans

y remédier, l'ACP a proposé dans les orientations nationales complémentaires du QIS 5, une loi de rachat conjoncturel en fonction du spread de taux qui peut exister entre le taux servis par l'assureur et le taux attendu par l'assuré.

$$RC = \begin{cases} RC_{max} & \text{si } TS - TA < \alpha \\ RC_{max} \times \frac{TS - TA - \beta}{\alpha - \beta} & \text{si } \alpha \leq TS - TA < \beta \\ 0 & \text{si } \beta \leq TS - TA < \gamma \\ RC_{min} \times \frac{TS - TA - \gamma}{\delta - \gamma} & \text{si } \gamma \leq TS - TA < \delta \\ RC_{min} & \text{si } TS - TA \geq \delta \end{cases}$$

A travers la valeur de 6 paramètres, l'ACP propose deux lois de rachats conjoncturels, l'une correspondant à un plancher minimum de rachat, l'autre à un plancher maximum. Il est recommandé aux assureurs de choisir les paramètres de leur loi dans l'intervalle délimité par le « plafond minimum » et le « plafond maximum ». Dans notre outil nous avons retenu pour chaque paramètre, la moyenne entre les deux plafonds.

Paramètres loi de rachat conjoncturel proposé par l'ACP			
	Plafond min	Plafond max	Outil ALM
α	-6%	-4%	-5%
β	-2%	0%	-1%
γ	1%	1%	1%
δ	2%	4%	3%
RC_min	-6%	-4%	-5%
RC_max	20%	40%	30%

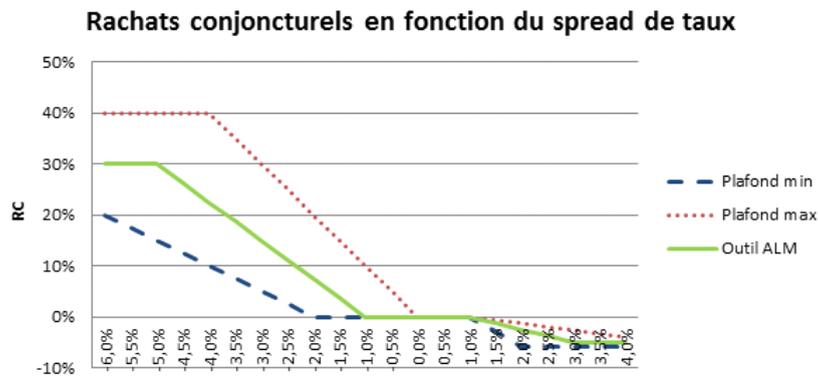


FIGURE 3.5 – Courbe des rachats conjoncturels

Le taux de rachat total RT du modèle se calcule alors par la somme du taux de rachat conjoncturel RC et du taux de rachat structurel RS :

$$RT = MIN(1; MAX(0; RS + RC))$$

Additionner les deux taux de rachats revient à supposer que :

- Si le taux servi par l'assureur est inférieur aux attentes des assurés, ils auront tendance à racheter plus que ne l'indique le taux de rachats structurels.
- A l'inverse, lorsque le taux servi par l'assureur est supérieur au taux attendu par les assurés, la compagnie d'assurance aura à traiter moins de rachats qu'initialement prévu.

Remarque : Puisque les rachats conjoncturels concernent les assurés sensibles aux taux pratiqués sur le marché, le taux attendu par l'assuré est le plus souvent interprété comme le « taux concurrent », c'est-à-dire le taux pratiqué par les autres acteurs du marché. Nous verrons par la suite que le choix de la modélisation du taux concurrent est le plus souvent subjectif et impacte significativement les rachats et par conséquent le Best Estimate.

2) Les décès

Comme pour les rachats, les décès interviennent en fin d'année après revalorisation des PM. Nous rappelons que nous avons supposé les décès déterministes en fonction de l'âge de l'assuré. Par ailleurs, nous faisons l'hypothèse que la prestation décès d'un assuré est égale à sa provision mathématique de clôture et est immédiatement payée par la société d'assurance.

La table de mortalité utilisée dans le modèle ALM est la table « TF 00-02 ».

3) Les frais

L'ensemble des frais modélisés de notre société d'assurance est payé en fin d'année et calculé de la façon suivante :

- Les frais de placement sont calculés en pourcentage de la valeur comptable de l'actif.
- Les frais de gestion sont calculés en pourcentage des prestations (rachats et décès).
- Les frais d'administration sont calculés en pourcentage des provisions mathématiques.

3.3 Modélisation de l'actif

Nous allons maintenant présenter la modélisation de la partie Actif.

3.3.1 Hypothèses liées à la modélisation de l'actif

Comme nous l'avons évoqué pour le passif, l'estimation même du Best Estimate implique des hypothèses théoriques sur la modélisation. Concernant l'actif, nous allons considérer durant toute la projection que l'on se trouve dans un univers « risque-neutre ». Nous rappelons qu'en univers risque-neutre, les investisseurs sont « neutres » face au risque et n'exige pas de prime de risque comme surplus de rentabilité face au taux sans risque. Ainsi dans un tel univers :

- **Chaque classe d'actifs rapporte en espérance le même rendement : le taux sans risque.**
- **Evaluer la valeur de marché d'un actif revient à actualiser ses flux futurs au taux sans risque.**

Encore une fois, afin de ne pas alourdir la modélisation et de se consacrer sur la logique floue nous avons simplifié davantage la modélisation de l'actif avec les hypothèses suivantes :

- Le portefeuille d'actifs de la compagnie d'assurance est composé uniquement des classes d'actifs suivantes :
 - Les actions
 - L'immobilier
 - Le monétaire
 - Les obligations (à taux fixe uniquement)
- La corrélation existante entre les actifs n'est pas modélisée.
- Les actifs sont supposés sans risque. Nous ne modélisons pas de risque de spread.
- Les marchés financiers dans lesquels se trouvent nos actifs sont supposés parfaitement liquides. De plus les actifs sont infiniment divisibles et s'achètent sans coût de transaction. Autrement dit, notre compagnie d'assurance peut vendre ou acheter des actifs à tout instant dans les quantités qu'elle souhaite.
- Tout au long de la projection, la compagnie d'assurance garde la même allocation du portefeuille. Ainsi, à la fin de chaque année, la répartition du portefeuille en valeur de marché est identique à celle de départ ⁷.

3.3.2 Composition du portefeuille d'actifs

Le portefeuille d'actifs est réparti de la manière suivante :

- Actions cotées (10%)
- Obligation à taux fixe AAA (70%)
- Immobilier (15%)
- Monétaires (5%)

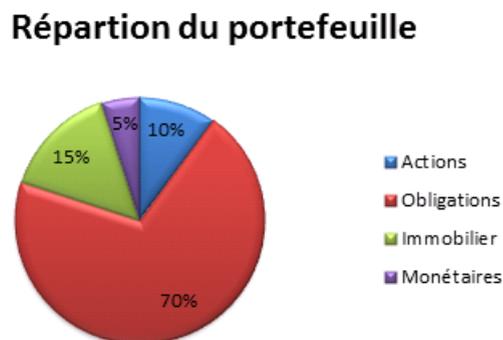


FIGURE 3.6 – Répartition de l'actif

7. L'allocation de départ est un paramètre du modèle.

3.3.3 Construction du portefeuille obligataire

Nous avons supposé que notre portefeuille obligataire était composé uniquement d'obligations à taux fixe émises par des Etats de la zone euro notée AAA.

Comme pour les polices d'assurance nous regroupons nos obligations sous forme de groupes homogènes (model points). En particulier, les obligations sont caractérisées dans notre modèle par :

- Le nominal⁸, noté N
- Le taux de coupon, noté T_c
- La valeur comptable (la valeur d'achat pied de coupons), noté V_c
- La valeur de marché, noté V_m
- La maturité, notée T

Nous avons estimé que le passif avait une durée de vie moyenne de 8 ans. Par conséquent nous avons construit un portefeuille obligataire cohérent de maturité résiduelle moyenne d'environ 8 ans où chaque année les obligations qui ont été achetées étaient de maturité 15 ans. En partant de cette hypothèse nous avons pu construire nos model points de la façon suivante :

Model points n°	Maturité	Maturité résiduelle	Valeur comptable (en % de la valeur comptable de la classe obligation)
1	15 ans	1 an	5%
2	15 ans	2 ans	6%
3	15 ans	3 ans	6%
4	15 ans	4 ans	6%
5	15 ans	5 ans	7%
6	15 ans	6 ans	7%
7	15 ans	7 ans	7%
8	15 ans	8 ans	7%
9	15 ans	9 ans	7%
10	15 ans	10 ans	7%
11	15 ans	11 ans	7%
12	15 ans	12 ans	7%
13	15 ans	13 ans	7%
14	15 ans	14 ans	7%
15	15 ans	15 ans	7%

Précisons que la valeur nette comptable des obligations est calculée comme la valeur actualisée des flux futurs aux taux actuariel à l'achat (noté a) :

$$VNC = \sum_{i=1}^T \frac{T_c \times N}{(1+a)^i} + \frac{N}{(1+a)^T}$$

8. Le nominal sera toujours supposé égal à la valeur de remboursement

Par ailleurs, nous supposons dans notre modélisation que :

- Les coupons font l'objet d'un unique versement en fin d'année, avant la revalorisation des PM.
- Les obligations présentes dans le portefeuille à la date initiale ont été achetées au pair. Par conséquent la valeur comptable est égale à la valeur nominale. En revanche la valeur de marché à la date initiale peut être différente de la valeur comptable. Le portefeuille obligataire se trouve alors en plus-value ou en moins-value selon le scénario économique.

3.3.4 Modélisation des scénarios économiques

Dans cette nouvelle partie, nous abordons la modélisation de l'évolution des actifs financiers qui interviennent dans notre modèle ALM.

1) Générateur de scénario économique

L'ESG du model ALM est le support qui nous permet de disposer de l'évolution :

- Des courbes des taux
- Du rendement monétaire
- Des facteurs d'actualisations
- De l'indice action
- De l'indice immobilier

Dans notre modèle, les simulations générées par l'ESG doivent vérifier les deux propriétés suivantes :

- Elles doivent être « **market-consistent** », c'est-à-dire refléter les conditions économiques du moment.
- Elles doivent être « **risque neutre** ». Le rendement espéré est égal au taux sans risque pour chaque classe d'actifs.

Nous allons maintenant voir plus en détail la construction de notre ESG.

2) Simulation des variables aléatoires

La première étape de l'ESG est de simuler des variables aléatoires et plus précisément les lois de distribution de ces variables aléatoires. La simulation de certaines lois de probabilité est indispensable pour l'implémentation des modèles financiers futurs. En particulier nous avons besoin de la loi uniforme et la loi normale centrée réduite.

Simulation de nombres pseudo-aléatoires : la loi uniforme.

Pour simuler les nombres pseudo-aléatoires, nous utilisons le générateur congruentiel⁹ proposé par Excel via la fonction Aléa. Cette fonction nous donne des nombres entre 0 et 1.

9. Un générateur congruentiel est un générateur périodique issu d'une valeur initiale, appelée « graine de générateur »

Simulation de lois de distribution : la loi normale centrée réduite.

Il existe de nombreuses méthodes pour simuler les lois de distributions. La plus connue est la méthode d'inversion qui repose sur la propriété suivante :

Si U est une variable aléatoire réelle uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$, alors la variable aléatoire $F^{-1}(U)$ a pour fonction de répartition F ¹⁰. De plus, si X est la variable aléatoire de loi F , alors $F(X)$ est une loi uniforme sur $[0, 1]$.

Ainsi, pour obtenir un n -échantillon de la loi normale centrée réduite, il convient de simuler un n -échantillon de lois uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$ et de lui appliquer la fonction de répartition inverse de la loi normale centrée réduite. Cependant, lorsqu'il n'existe pas d'expression analytique de la fonction de répartition inverse de la loi voulue, il est nécessaire d'utiliser des algorithmes d'approximations.

La fonction de répartition de la loi normale centrée réduite est de la forme suivante : $F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ Il n'y a pas d'expression précise de son inverse, nous utilisons alors l'Algorithme de Moro pour générer la loi normale centrée réduite. Le principe de cet algorithme est de trouver une approximation de la fonction de répartition inverse d'une $N(0, 1)$.

Remarque : Simuler une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ revient à simuler une loi $\mathcal{N}(0, 1)$. En effet, si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ alors $Y = m + \sigma X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

D'après l'article de PLANCHET ET JACQUEMIN DE 2003 (*c.f. référence*), l'algorithme d'inversion de Moro se définit de la manière suivante :

Soit u la valeur de loi uniforme générée, alors $u = \Phi(x)$ ¹¹ d'après la propriété précédente. Posons $z = u - 0.5$

- Si $|z| \leq 0.42$ alors x est approché par :

$$x = z \frac{\sum_{n=0}^3 a_n z^{2n}}{\sum_{n=0}^4 b_n z^{2n}} = \Phi_{MORO}^{-1}(u)$$

- Dans le cas contraire, si $|z| > 0.42$ alors x est approché par :

$$x = \xi \cdot \left(\sum_{n=0}^8 c_n T_n(t) \right) - \xi \frac{c_0}{2} = \Phi_{MORO}^{-1}(u)$$

avec ξ signe de z et $t = k_1 [2 \cdot \ln(-\ln(\frac{|z|}{2})) - k_2]$

La fonction $f(t) = (\sum_{n=0}^8 c_n T_n(t)) - \frac{c_0}{2}$ pouvant être approchée par l'algorithme suivant :

– Soit $d_{10} = 0$ et $d_9 = 0$

– Soit d_i les réels déterminés par la relation récursive : $d_i = 2td_{i+1} - d_{i+2} + c_i$ pour $i = 8, 7, , 1$.

Alors $f(t) = td_i - d_{i+2} + \frac{c_0}{2}$

Les valeurs des a_i, b_i, c_i et d_i sont données en annexe.

10. Preuve : $P(F^{-1}(U) < x) = P(U < F(x)) = F(x)$

11. Φ est la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite

3) Modélisation de la structure par terme des taux d'intérêts

L'objectif d'une structure par terme des taux d'intérêt est de reproduire l'évolution des prix d'une obligation zéro-coupon (ZC) pour toute date t et toute maturité T . Cette courbe nous sera utile lors des calculs de valeurs de marché des obligations en portefeuille et de la rémunération de certains actifs (action et immobilier).

Avant de se lancer dans la modélisation de la courbe des taux, revenons sur quelques définitions :

- Le taux court, noté r_t , est le taux qui s'applique à la date t pour une durée infinitésimale. Il est parfois appelé « taux court instantané ».
- Nous notons $P(t, T)$, le prix à la date t d'une obligation zéro-coupon (ZC) qui paye 1€ en T (la maturité) et $R(t, T)$, le taux d'intérêt d'un zéro-coupon, composé en continue, qui prévaut en date t et pour une durée de $T - t$. Nous avons alors :

$$P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}$$

La structure par termes des taux d'intérêts se définit donc de la manière suivante :

$$R(t, T) = -\frac{\ln(P(t, T))}{(T - t)}$$

Cette équation permet d'obtenir pour toute date t la structure par terme des taux d'intérêts à partir du prix d'un zéro-coupon.

- Nous appelons taux forward instantané, le taux constaté en t pour un prêt ou un emprunt entre T et $T + dt$ avec $dt \rightarrow 0$:

$$f(t, T) = -\frac{d\ln(P(t, T))}{dT}$$

Pour obtenir la structure par terme des taux d'intérêts, il faut procéder en **trois étapes** :

1. Modéliser la courbe des taux courts r_t .
2. Déterminer le prix des ZC
3. Dédurre la structure par terme des taux.

Modéliser la courbe des taux court r_t

Se pose la question du modèle à utiliser pour modéliser la courbe des taux courts. Deux approches sont possibles : les modèles d'équilibres et les modèles d'arbitrages. La différence majeure entre ces deux approches est que les modèles d'arbitrages considèrent comme des inputs la courbe des taux observée alors que ceux d'équilibres non. La courbe des taux observée et utilisée comme input du modèle est la courbe des taux $f(0, t)$ fournie par l'EIOPA ¹².

12. La courbe utilisée dans notre modèle ALM date du 31/12/2009

Nous avons décidé d'utiliser le modèle de Hull & White à un facteur pour modéliser la courbe des taux courts.

Ce modèle repose sur plusieurs hypothèses ¹³ :

- Absence d'opportunité d'arbitrage (AOA), *i.e.* impossibilité de faire des profits à partir d'un portefeuille de valeur nulle.
- Absence de coûts de transaction.
- Les titres sont parfaitement divisibles.
- Le marché est complet, *i.e.* chaque pay-off peut être répliqué par un portefeuille de répliation.
- Pas d'asymétrie d'informations : les acteurs disposent du même niveau d'information.
- Pas de dividendes : on prête et on emprunte au même taux

Le modèle de Hull & White suppose que sous la probabilité risque neutre Q , le taux court instantané est solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dr_t = (\theta_t - ar_t) dt + \sigma dW_t$$

avec a une constante, θ_t une fonction déterministe du temps et W_t le mouvement brownien sous Q , la probabilité risque neutre.

Ce modèle reproduit exactement la courbe des taux ZC, si :

$$\theta_t = \frac{d}{dt}f(0, t) + a.f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at})$$

Remarque : Toutes les démonstrations de cette partie sont détaillées en annexe.

En appliquant la formule d'Itô à $r_t e^{at}$ et en utilisant la fonction θ_t trouvée précédemment, nous pouvons conclure que le taux court est gaussien, de moyenne et de variance :

- $\mathbb{E}(r_t|F_s) = r_s e^{-a(t-s)} + \alpha(t) - e^{-a(t-s)}\alpha(s)$ où : $\alpha(t) = f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-at})^2$
- $\mathbb{V}(r_t|F_s) = \sigma^2 \frac{(1 - e^{-2a(t-s)})}{2a}$

Remarque : La probabilité d'avoir un taux court négatif est non nulle.

Nous pouvons donc approximer r_t par :

$$\forall s < t, r_t \approx r_s e^{-a(t-s)} + f(0, t) - e^{-a(t-s)}f(0, s) + \sigma \sqrt{\frac{(1 - e^{-2a(t-s)})}{2a}} \xi_t$$

où $\xi_t \hookrightarrow N(0, 1)$

Remarque : Les paramètres à estimer dans le modèle de Hull & White sont a et σ . Le calibrage de ces paramètres a été effectué par le pôle *Ingénierie Financière de Mazars Actuariat*.

13. Ces hypothèses sont nécessaires et restent vraies pour l'ensemble des modélisations des variables financières

Le modèle de Hull & White est calibré de manière à ce que les taux courts simulés suivent la courbe des taux donnée en input du modèle. Nous vérifions donc graphiquement que la moyenne des taux courts simulée par Hull & White est proche de la courbe des taux $f(0, t)$.

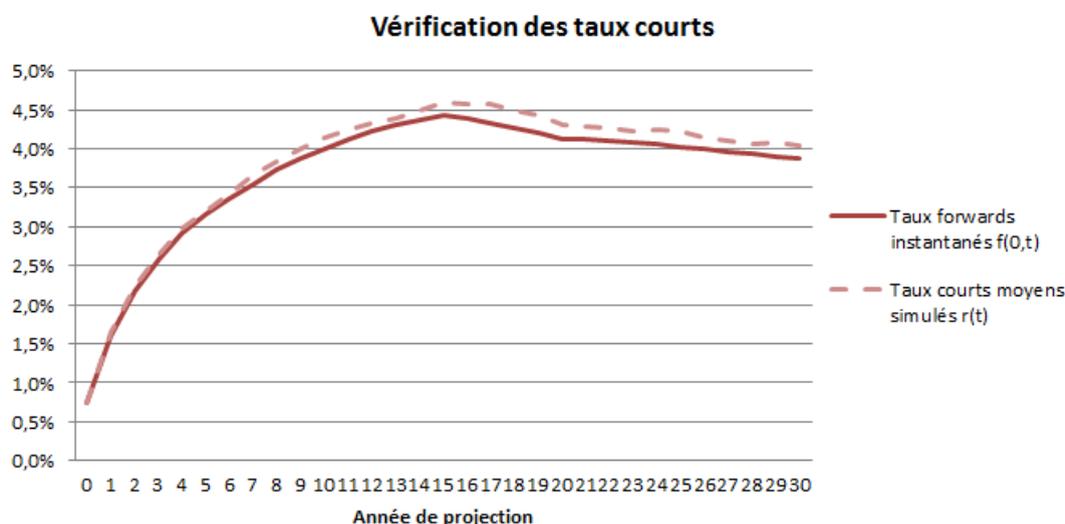


FIGURE 3.7 – Validation des taux courts simulés par le modèle Hull & White

Déterminer le prix des ZC

Une fois les taux courts instantanés déterminés, nous pouvons en déduire les prix des ZC grâce à la formule suivante :

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T) \times r_t}$$

Avec :

- $A(t, T) = \frac{P(0, T)}{P(0, t)} \times \exp[B(t, T)f(0, t) - \frac{\sigma^2}{4a}(1 - e^{-2at})B^2(t, T)]$
- $B(t, T) = \frac{(1 - e^{-a(T-t)})}{a}$

Remarque : $P(0, t) = \frac{1}{(1+f(0, t))^t}$

Déduire la structure par termes des taux

La structure par termes des taux se déduit du prix des obligation ZC par la formule suivante :

$$R(t, T) = -\frac{\ln(P(t, T))}{(T - t)}$$

Remarque : $\tau \mapsto R(t, \tau)$ est appelée la courbe des taux.

4) Modélisation de la valeur de marché des obligations

La valeur de marché des obligations est obtenue en actualisant les flux futurs par le taux zéro-coupon. Il faut considérer comme flux futurs les détachements de coupons des obligations et le remboursement du nominal.

La valeur de marché à la date t est :

$$VM(t) = \sum_{i=1}^{T-t} \frac{tx_coupon \times N}{(1 + R(t, t+i))^i} + \frac{N}{(1 + R(t, T))^{T-t}}$$

Où :

- N est le nominal de l'obligation
- T est la maturité de l'obligation
- tx_coupon est le taux de coupon de l'obligation
- $R(t, t+i)$ est le taux zéro-coupon à la date t et de maturité $t+i$

5) Modélisation du rendement des actions et de l'immobilier

Le rendement des actions

Nous avons décidé de modéliser le cours de nos actions par le modèle de Black & Scholes. Ce modèle définit la dynamique stochastique suivante pour les actifs :

$$dS_t = S_t(b dt + \sigma dB_t)$$

avec b la constante de drift, σ la volatilité et B_t le mouvement brownien sous la probabilité historique P .

En appliquant la formule d'Itô à $\ln(S_t)$, nous pouvons obtenir une solution explicite à l'équation différentielle stochastique ci-dessus :

$$S_t = S_0 e^{(b - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t}$$

Nous pouvons déduire que le rendement de l'actif entre t et $t+1$ est de la forme suivante :

$$S_{t+1} - S_t \approx S_t(b dt + \sigma(B_{t+1} - B_t))$$

Donc

$$\frac{S_{t+1} - S_t}{S_t} \approx b((t+1) - t) + \sigma(B_{t+1} - B_t)$$

or B_t est un mouvement brownien donc $B_{t+1} - B_t \hookrightarrow N(0, 1)$ d'où

$$\frac{S_{t+1} - S_t}{S_t} \approx b + \sigma \xi_t$$

où $\xi_t \hookrightarrow N(0, 1)$.

Soulignons que le rendement des actions est différent si l'on se place sous la probabilité historique P ou sous la probabilité risque neutre Q . En effet, en univers risque-neutre, tous les actifs

ont la même espérance de rendement : le taux sans risque.

Remarque : Dans notre modèle de taux sans risque est modélisé par le taux zéro-coupon de maturité 1 ans.

Le calibrage de la volatilité de l'indice action est possible selon deux méthodes :

- **La volatilité historique :** utiliser les données passées disponibles sur le marché pour déterminer la volatilité.
- **La volatilité implicite :** déduire la volatilité des prix de certaines options sur le marché.

Dans notre mémoire, nous retenons la volatilité implicite. La volatilité est alors obtenue à l'aide du prix d'un call¹⁴ sur CAC 40 au 04/01/2010¹⁵.

Le call sur CAC 40 au 04/01/2010 avait les propriétés suivantes :

- Prix du call : 305€
- CAC 40 au 04/01/2010 : 4013.97
- Taux sans risque : 1.61%
- Durée (T) : 1 ans
- Strike (K) : 4000

Le prix d'un call avec la formule de Black & Scholes s'écrit de la manière suivante :

$$C_0(S_0, K, r, T, \sigma) = S_0 \mathcal{N}(d_1) - Ke^{-rT} \mathcal{N}(d_2)$$

Où :

$$\begin{aligned} - d_1 &= \frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \\ - d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T} \end{aligned}$$

Ainsi, trouver la volatilité implicite se résume à inverser le prix du call. L'équation peut se résoudre par la fonction « Solver » d'Excel. Après application, nous avons obtenu une volatilité de 16.69%.

Le rendement de l'immobilier

L'immobilier est modélisé de la même manière que les actions à l'aide du modèle de Black & Scholes. La seule différence est que la volatilité implicite est supposée égale à 8%. Nous sommes toujours dans l'univers risque neutre lors de la modélisation de l'immobilier. Le rendement espéré de l'immobilier est donc le taux sans risque.

Dans la formule standard de Solvabilité II¹⁶, le besoin en capital est de 50% de l'actif pour les actions et 25% de l'actif pour l'immobilier. La volatilité de l'immobilier a donc été considérée deux fois moins grande que la volatilité de l'action comme le suggère le besoin en capital réglementaire de la formule standard de Solvabilité II. Ceci explique les 8%.

14. Un call est une option qui donne le droit et non l'obligation d'achat d'un sous-jacent à une date T (la maturité) pour un prix (strike) fixé aujourd'hui.

15. Rappelons que notre courbe des taux en input de notre modèle date du 31/12/2009, ce qui explique le choix de la date d'observation du CAC 40

16. Formule utilisée pour calculer le besoin en capital économique d'une société d'assurance : le SCR

6) Modélisation du rendement du monétaire

Le rendement du monétaire est indexé sur le taux sans risque.

7) Modélisation des produits financiers

A la fin de chaque période les produits financiers s'expriment de la manière suivante :

$$PF = \text{Coupons sur obligation} + \text{Intérêt sur monétaire} + 10\% \text{ PVL sur action} - \text{Frais de placement}$$

Comme le montre le calcul des produits financiers, nous avons défini une politique d'extériorisation des plus-values latentes. Lorsque la situation le permet nous nous obligeons à réaliser un minimum de 10% des plus-values latentes sur action. Ce taux de réalisation peut augmenter par la suite en fonction du niveau de produits financiers nécessaires à la revalorisation des provisions mathématiques.

Dans notre modèle nous ne différencions pas les actifs qui sont en représentation des capitaux propres et ceux en représentation des provisions mathématiques. Pourtant il est nécessaire de connaître l'assiette revenant aux actionnaires et celle revenant de droit aux assurés après application du taux de participation aux bénéfices. Pour résoudre ce problème, nous avons décidé de répartir les produits financiers au prorata de la part des actionnaires et des assurés dans le passif. Nous partons du principe que la provision mathématique et la provision pour participation aux excédents appartiennent aux assurés tandis que les fonds propres et la réserve de capitalisation sont les biens de l'assureur.

$$Part_{\text{assurés}}(t) = \frac{PM(t) + PPE(t)}{Passif(t)}$$

$$Part_{\text{assureur}}(t) = \frac{FP(t) + Res.(t)}{Passif(t)} = 1 - Part_{\text{assurés}}(t)$$

où $Res.(t)$ est le montant de la réserve de capitalisation au début de l'année t .

Les produits financiers sont par conséquent répartis de la façon suivante :

$$PF_{\text{assurés}} = PF(t) \times Part_{\text{assurés}}(t)$$

$$PF_{\text{assureur}} = PF(t) \times Part_{\text{assureur}}(t)$$

3.3.5 Modélisation du « taux concurrent »

Nous avons précédemment défini le taux concurrent comme le taux pratiqué par la concurrence sur lequel se fixe l'assuré pour comparer son taux de revalorisation. Indéniablement ce taux de référence n'existe pas dans la réalité. L'information dont dispose l'assuré est bien plus vaste étant donné la multitude d'assureurs mais aussi de produits d'épargne. Représenter la concurrence par un taux unique est une modélisation simpliste de la réalité.

Dans les modèles ALM la concurrence peut être représentée dans un premier temps par une référence purement obligataire. A ce sujet, dans la modélisation des rachats conjoncturels, l'ACP

propose d'utiliser le taux moyens des emprunts d'Etat comme estimateur du taux concurrent.

Une autre approche consiste à « construire » un taux composite, fonction de plusieurs références (taux d'emprunt long, taux d'emprunt court, rendement d'action, rendement immobilier). Nous avons opté pour cette approche qui sans trop alourdir la modélisation propose un taux plus représentatif de la diversité du marché de l'épargne.

La construction du taux composite s'est faite par l'identification de trois concurrents aux profils différents :

- L'assureur plus « agressif » dans son allocation d'actif
- Le nouvel entrant sur le marché
- La banque et son livret A.

L'assureur plus agressif correspond à une compagnie d'assurance dont l'allocation d'actif est plus orientée sur les actions. Dans les scénarios économiques où le rendement de l'action est au-dessus du taux sans risque ce concurrent aura la capacité de revaloriser à un taux supérieur que celui de notre société d'assurance. A l'inverse, si le rendement de l'action se situe au-dessous du taux sans risque nous servirons un meilleur taux à nos assurés. Nous lui avons défini une allocation en actions à hauteur de 30% et une allocation obligataire complémentaire de 70%. Le rendement du concurrent agressif à la date t est alors modélisé de la façon suivante :

$$Taux_{concurrent\ agressif}(t) = 0,3 \times rendement_{action}(t) + 0,7 \times taux_moyen_{ZC}(t, m) - taux_{marge}$$

- Le rendement de l'actif obligataire est estimé par la moyenne sur les cinq dernières années du zéro coupon de maturité m égal à 8 ans.
- Le $taux_{marge}$ représente la marge effectuée par le concurrent entre le rendement de son actif et le taux qu'il sert réellement à ses assurés. Le taux de marge est un paramètre fixé pour toute la projection.
- Le rendement action et le taux zéro coupon sont issus des scénarios économiques.

Le nouvel entrant est la société d'assurance qui est arrivée cette année sur le marché. Par sa présence récente il bénéficie d'un rendement obligataire différent. Il dispose d'obligations « neuves » achetées au cours de l'année et dont le rendement dépend du niveau de la courbe des taux actuels. Si lorsque le nouvel entrant achète ses obligations les nôtres sont en moins-values latentes alors son rendement sera plus élevé. Le nouvel entrant est caractérisé par, des obligations achetées au cours de l'année et de maturité moyenne supérieure, nous l'avons donc modélisé par le zéro coupon de maturité 10 ans :

$$Taux_{nouveau\ concurrent}(t) = taux_{ZC}(t, n) - taux_{marge}$$

- La maturité n du zéro coupon est égale à 10 ans.

Remarque : Nous supposons dans la modélisation de ces deux taux que le taux servi par la concurrence est uniquement dû au rendement financier de leur actif. En d'autres termes, le spread de taux servis entre notre société et un concurrent serait uniquement expliqué par une

structure de l'actif général différente. En réalité d'autres éléments peuvent en être la cause. Le plus important d'entre eux est le niveau de PPE du concurrent. Un concurrent dont le niveau de provision pour participation aux excédents est plus important pourra logiquement ajuster son taux de revalorisation en fonction de la conjoncture économique. Le niveau de PPE est même un critère de sélection pour l'assuré comme le suggère les sites internet comparant le ratio $\frac{PPE}{PM}$ des assureurs du marché.

Pour finir nous avons décidé de représenter le livret A puisqu'il est à ce jour le grand concurrent des assurances vie en euros. Le livret A est représenté par un taux d'emprunt court dans notre modèle, le zéro coupon de maturité 1 an :

$$Taux_{\text{livret A}}(t) = taux_{ZC}(t, k)$$

- La maturité k du zéro coupon est égale à 1 ans.

Remarque : De manière à lisser les trois taux, nous avons choisi de prendre à chaque fois la moyenne sur les cinq dernières années.

Etant donné notre représentation de la concurrence, le taux maximal distribué sur le marché par les concurrents est le maximum entre nos trois taux de références. Ainsi nous obtenons notre taux concurrent :

$$Taux_{\text{concurrent}} = MAX(Taux_{\text{concurrent agressif}}, Taux_{\text{nouveau concurrent}}, Taux_{\text{livret A}})$$

Représenter le taux concurrent par le taux maximal distribué sur le marché est une hypothèse logique, puisqu'en théorie un assuré voudra être revalorisé au meilleur taux du marché, c'est donc ce taux qui lui servira de comparaison avec le taux servi par son assureur.

3.4 Modélisation des actions du management

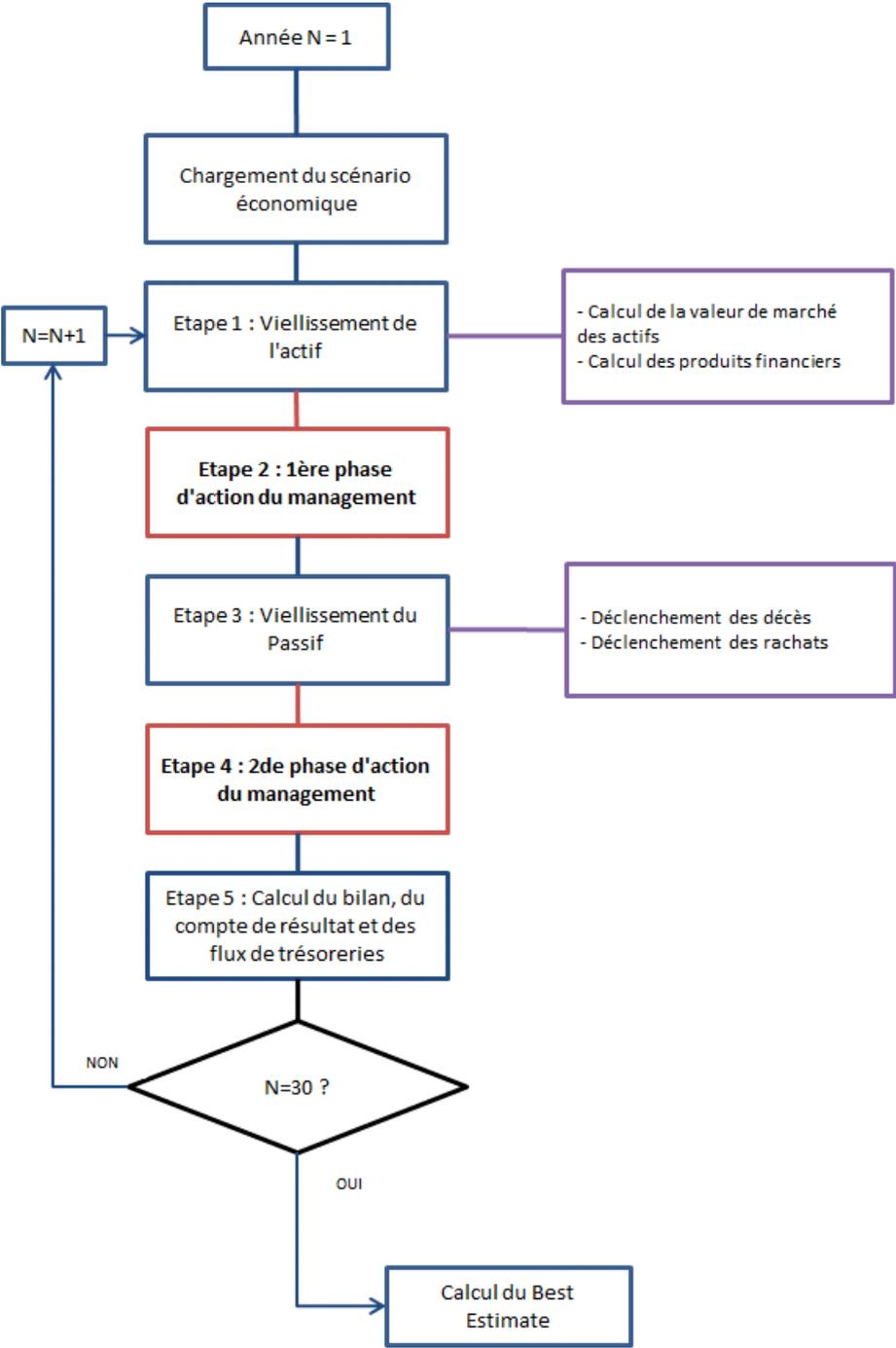
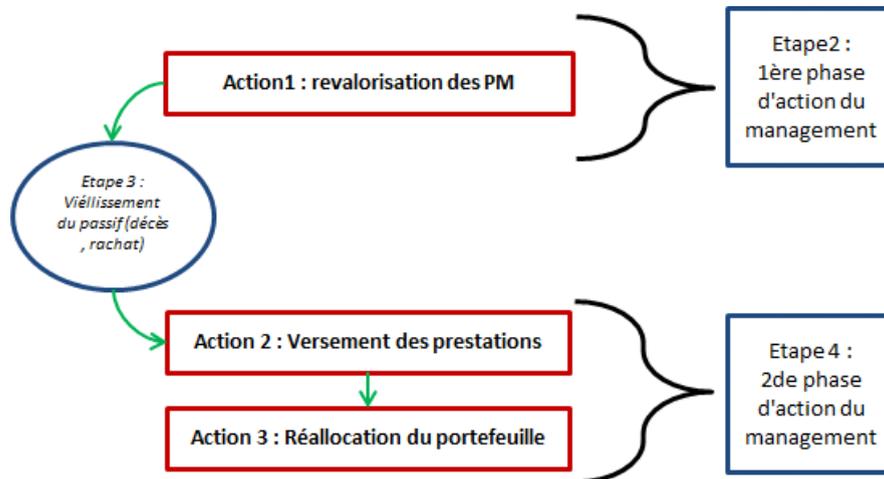


FIGURE 3.8 – Etapes des actions du management

Comme l'illustre le schéma ci-dessus, la projection d'un scénario dans l'outil ALM peut être représentée sous la forme d'un processus en 5 étapes. Le processus est répété n fois où n est le nombre d'années de projections.

Nous allons maintenant nous focaliser sur la modélisation de l'étape 2 et 4 du modèle : les phases d'actions du managements.

Le management effectue en fin d'année les trois actions suivantes dans l'ordre chronologique :



3.4.1 Action 1 : Revalorisation des PM

Cette action détermine le taux auquel la société d'assurance revalorise les PM des assurés. Elle va déterminer la capacité de servir le taux ciblé par le management. Pour cela, deux sous-étapes sont effectuées :

L'objectif du management :

Afin que le modèle s'exécute normalement et retranscrive la réalité, il est nécessaire de définir un objectif pour le management en terme de revalorisation. L'objectif de revalorisation ne peut être fixe (par exemple 3% chaque année) mais doit dépendre du scénario économique dans lequel se trouve la simulation.

Il est dans l'intérêt d'une compagnie d'assurance de servir un taux qui satisfait ses assurés car si elle ne le fait pas elle sera confrontée à des rachats conjoncturels. Nous pouvons facilement admettre qu'un assuré est satisfait lorsque son taux de revalorisation n'est pas inférieur à celui constaté sur le marché, en d'autres termes : le taux concurrent. C'est pourquoi nous avons fixé comme objectif à notre compagnie d'assurance de servir le « taux concurrent ».

Remarques :

- Nous aurions pu définir comme objectif celui de battre le taux concurrent afin de réduire les rachats structurels¹⁷. Cependant, un tel objectif n'est pas de toute logique. Le taux concurrent ayant été défini comme le meilleur taux pratiqué par la concurrence, battre le taux concurrent chaque année signifie être au-dessus du marché quel que soit le scénario

17. c.f. 3.2.4

économique.

- Avoir pour objectif d'atteindre le taux concurrent ne signifie pas revaloriser au taux concurrent à chaque période de la projection. Selon un algorithme prédéfini, le management effectuera des actions (réalisation de plus-values, reprise de PPE,...) dans le but d'atteindre son objectif, mais la réalisation de ce dernier dépendra avant tout des ressources financières de la société (produits financiers, niveau de PPE,...). Inversement, le management peut revaloriser à un taux supérieur du taux concurrent, en particulier lorsque le TMG d'un assuré est supérieur au taux concurrent.

La revalorisation « garantie » :

La revalorisation dite garantie (RG) représente dans notre modèle la revalorisation due aux engagements contractuels de l'assureur envers l'assuré. Le calcul doit être effectué pour chaque model point et dépend de deux paramètres : le TMG et la participation aux bénéfices contractuelle.

$$RG_i = MAX(PM_i \times TMG_i; PB_{contractuelle_i} \times PF_{assuré} \times \frac{PM_i}{PM})$$

Où :

- RG_i est la revalorisation garantie pour le model point i
- PM_i est la provision mathématique associée au model point i
- TMG_i est le taux minimum garanti associé au model point i
- $PF_{assuré}$ sont les produits financiers générés par la PM globale
- $\frac{PM_i}{PM}$ est la part de la provision mathématique du model point i dans la provision mathématique globale

Nous définissons également : $TG_i = \frac{RG_i}{PM_i}$ le taux de revalorisation garantie de l'assureur envers chaque assuré du model point i .

Passage de la revalorisation garantie à la revalorisation cible :

L'objectif du management et la revalorisation garantie maintenant définis nous pouvons déterminer la revalorisation cible (RC), c'est-à-dire le niveau de revalorisation que le management désire atteindre.

$$RC_i = PM_i \times MAX(TC; TG_i)$$

Où :

- TC est le taux concurrent

En introduisant le taux de participation aux bénéfices cible : $TPB_{cible_i} = MAX(TC - TG_i; 0)$. Nous obtenons une autre décomposition de la revalorisation cible séparant la partie garantie de la partie complémentaire :

$$RC_i = PM_i \times TPB_{cible_i} + PM_i \times TG_i$$

Avec :

- $PM_i \times TG_i = RG_i$, correspond au montant de revalorisation garanti par l'assureur.
- Tandis que $PM_i \times TPB_{cible_i} = PB_{cible_i}$ correspond au montant de bénéfices complémentaires que le management devra servir s'il désire atteindre le taux concurrent.

Ainsi :

- Si $TC > TMG_i$ alors $PB_{cible_i} = (TC - TG_i) \times PM_i$
- Si $TC \leq TMG_i$ alors $PB_{cible_i} = 0$

Exemple d'application à un assuré : Stéphanie a souscrit un contrat d'assurance-vie euro munie d'une garantie TMG à 3% et d'une clause de participation aux bénéfices à hauteur de 90% lui donnant le droit cette année à un taux de revalorisation à hauteur de 2,5%. Par ailleurs le taux concurrent est de 4%. Nous obtenons :

- $TG_{Stéphanie} = MAX(3\%; 2,5\%) = 3\%$
- $TPB_{Stéphanie} = MAX(4\% - 3\%; 0) = 1\%$
- $RC_{Stéphanie} = 3\% \times PM_{Stéphanie} + 1\% \times PM_{Stéphanie} = 4\% \times PM_{Stéphanie}$

Conclusion de l'exemple : L'assureur est obligé de revaloriser l'encours de Stéphanie à hauteur de 3% cette année. C'est en effet ce qu'il lui a promis dans son contrat. Si l'assureur souhaite servir à Stéphanie le taux concurrent, il devra compléter la revalorisation à hauteur de 1% de la provision mathématique de Stéphanie.

A la fin de cette étape le management connaît le niveau de revalorisation qu'il souhaite servir à ses assurés (RC_i), il en déduit le montant de revalorisation globale qu'il désire reverser :

$$RC = \sum_{i=1}^{45} RC_i$$

La prochaine étape consiste à trouver les ressources financières qui permettent d'atteindre ou d'approcher le mieux possible ce montant de revalorisation.

2) Politique de taux servis

Dans la plupart des cas, les produits financiers revenant aux assurés (définis dans la partie 3.3.4) ne suffisent pas à atteindre le montant de revalorisation cible RC. Le management va alors suivre une série d'action permettant de s'approcher au mieux de ce montant.

Réécrivons la revalorisation cible globale en séparant la partie garantie et la partie complémentaire :

$$RC = RG + PB_{cible}$$

Où :

- $RG = \sum_{i=1}^{45} RG_i$
- $PB_{cible} = \sum_{i=1}^{45} PB_{cible_i}$

La société a-t-elle les ressources pour servir la revalorisation garantie ?

Dans un premier temps, nous regardons si les produits financiers générés par l'argent des assurés ($PF_{\text{assurés}}$) suffisent à servir la revalorisation dite garantie RG par l'assureur.

- Si oui, le nouvel objectif est de servir la PB_{cible} .
- Si non voici comment procéder : nous réalisons des plus-values latentes supplémentaires sur action et si cela n'est pas possible ou ne suffit toujours pas alors nous abandonnons les produits financiers en face des fonds propres (PF_{assureur}).

La société a-t-elle les ressources pour servir la participation aux bénéfices cibles ?

Dans un second temps, nous nous intéressons à la PB_{cible} . Rappelons qu'afin de satisfaire la contrainte temporelle de la PPE (la PPE d'un exercice doit être redistribuée en 8 ans), chaque année 15% de la PPE est obligatoirement versée aux assurés.

- Si les 15% de PPE ainsi que les produits financiers générés par les assurés après abattement de la revalorisation garantie sont suffisants nous pouvons servir la PB_{cible} .
- Si cela ne suffit pas, nous pouvons, dans l'ordre suivant, réaliser des plus-values latentes supplémentaires sur action, reprendre de la PPE sans dépasser 80% de son montant et enfin abandonner les produits financiers en face des fonds propres.
- Si malgré cela, nous n'avons toujours pas atteint le taux concurrent, nous déclenchons alors des rachats conjoncturels (qui dépendent de l'écart entre le taux servi et le taux concurrent).

3.4.2 Action 2 : Versements des prestations

Cette action consiste à verser aux bénéficiaires des contrats l'encours des assurés qui sont décédés. Pour chaque model point nous calculons la PM qui doit être libérée pour les bénéficiaires des assurés décédés.

$$Prestation_{\text{décès}}(t) = \sum_{i=1}^{45} tx_{\text{décès}}(i) \times PM_i(t + \Delta)$$

Où :

- i est le numéro du model point
- $PM_i(t + \Delta)$ est le montant de la provision mathématique du model point i de l'année t après revalorisation par l'assureur.

A l'image des décès nous calculons pour chaque model point la part de PM qui a été rachetée par les assurés.

$$Prestation_{\text{rachats}}(t) = \sum_{i=1}^{45} tx_{\text{rachats}}(i) \times PM_i(t + \Delta)$$

La société d'assurance détermine alors la provision mathématique de clôture comme la provision mathématique revalorisée nette de prestations.

Remarque : Lors de la dernière année de projection nous considérons que tous les assurés rachètent leur PM.

3.4.3 Action 3 : Réallocation

La dernière étape du management consiste à réallouer le portefeuille d'actif.

1) Allocation actuelle du portefeuille

La revalorisation des provisions mathématiques ainsi que la prise en compte des prestations ont inévitablement changé la structure de notre actif. La valeur comptable et celle de marché des actions ont été affectées par la réalisation probable de plus-value latente lors de phase de revalorisation des provisions mathématiques.

Mais surtout l'actif monétaire, qui représente la trésorerie de la société, est impacté de toutes les entrées/sorties de cash qui ont eu lieu durant les précédentes étapes (vente d'actions, prestation décès, prestation rachats, frais d'administration etc). La valeur de cet actif à cette étape peut être négative (si plus de cash-flow sortant qu'entrant) comme positive (respectivement plus de cash-flow entrant que sortant).

Nous avons fait l'hypothèse dans notre modélisation que le management cherchait à retrouver son allocation cible de départ en valeur de marché : 70% d'obligations, 15% d'immobilier, 10% d'actions et 5% de monétaire. Par conséquent, la trésorerie en fin d'année est toujours positive

puisqu'elle représente 5% de l'actif en valeur de marché.

A partir des taux cibles d'allocation, le management détermine les flux financiers (en valeur de marché et en valeur comptable) qui doivent être effectués entre les actifs afin d'obtenir l'allocation cible. Le flux de transfert de l'actif obligataire nécessite un traitement particulier.

2) Ventes / Achats d'obligations dues à la réallocation

Ventes :

Si nécessaire le management doit vendre des obligations afin d'obtenir l'allocation cible. Nous avons fait l'hypothèse que le management vendait en priorité les obligations dont la date de maturité était la plus proche. Il en vend autant que nécessaire. Pour chaque model point d'obligation la vente est calculée en valeur comptable et en valeur de marché. Ensuite le management retraits le nominal des model points.

Remarque : Les obligations achetées avant la date d'évaluation cotaient le pair, par conséquent le nominal obtenu lors de la vente est égal à la valeur comptable de la vente.

Achats :

Le management peut acheter à la fin de l'année de nouvelles obligations afin de satisfaire l'allocation cible en actifs obligataires. Nous supposons que notre société d'assurance achète uniquement des obligations d'Etat AAA de maturité 15 ans cotant le pair. Pour s'assurer du dernier point, notre modèle attribue comme taux de coupon aux nouvelles obligations celui qui vérifie à l'achat : valeur comptable égale valeur de marché.

3) Nouvelle allocation

La compagnie d'assurance effectue les flux financiers entre les différents actifs¹⁸, et calcule les profits/ pertes associés à ces transferts qui résultent de l'état des marchés financiers au moment de l'opération. A ce sujet :

- Les plus ou moins-values réalisées sur les cessions d'obligations sont directement affectées à la réserve de capitalisation.
- Les plus values réalisées sur les cessions d'actions ou d'immobilier sont réparties entre l'assureur et l'assuré selon le même principe que les produits financiers (*c.f.* 3.3.4). La part destinée aux assurés est ensuite dotée à la provision pour participation aux excédents.
- Les moins values réalisées sur les cessions d'actions ou d'immobilier sont entièrement pris en charge par l'assureur.

18. Nous supposons que les marchés financiers sont parfaitement liquides et nous négligeons les coûts de transactions.

3.5 Résultats du modèle ALM « standard »

Dans cette dernière partie nous testons la fiabilité de notre modèle à travers différents tests et sensibilités sur les résultats.

3.5.1 Les Tests de convergences

La fiabilité du Best Estimate calculé par le modèle dépend de deux tests dont l'objectif est de s'assurer qu'il n'y a pas de création ou de fuite de richesse durant la projection d'un scénario.

1) Test de convergence au taux de rendement de l'actif / ou test déterministe

Le principe du test déterministe est d'actualiser au taux de rendement de l'actif l'ensemble des flux de sortie de la projection¹⁹. En principe, si le modèle ALM est bien construit la somme des flux actualisés correspond à la valeur de marché de l'actif à la date initiale. Le test est considéré comme satisfaisant lorsque pour chaque scénario aucun écart n'est signalé.

2) Test de convergence au taux sans risque / ou test stochastique

L'objectif du second test est de vérifier la propriété « risque-neutre » du modèle. Pour cela, il actualise les même flux que le test déterministe mais cette fois ci au taux sans risque. En univers « risque neutre » les actifs évoluent en espérance au taux sans risque, par conséquent, après avoir effectué l'opération sur chaque scénario, **en moyenne**, la somme des flux actualisés devrait être proche de la valeur de marché de l'actif à la date initiale²⁰.

Nous obtenons avec notre modèle un écart de convergence de 0,85%, que nous considérons acceptable dans le cadre de ce mémoire. Précisons que l'écart de 0,85% est probablement dû à un nombre de simulations insuffisant et à un générateur de nombre aléatoire imparfait.

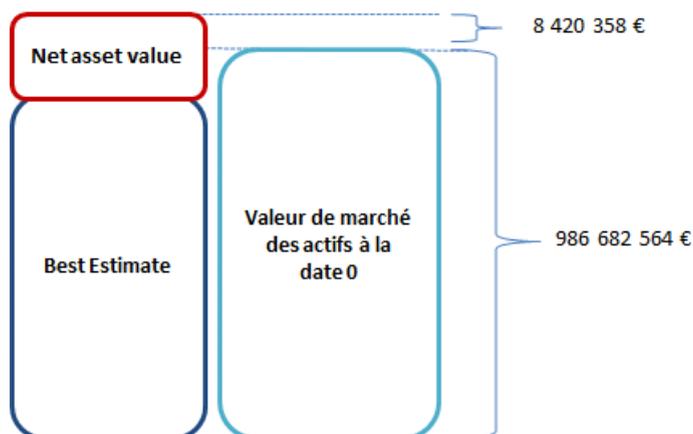
3.5.2 Présentation du Best Estimate

Après exécution de l'outil ALM nous obtenons un Best Estimate de 906,03M€ et une Net Asset Value de 89,08M€.

19. A la fin de la projection, les fonds propres restant et la réserve de capitalisation sont considérés comme un flux revenant aux actionnaires.

20. Autrement dit, il s'agit de vérifier que la valeur de marché initiale des actifs correspond bien à l'espérance des cash-flows actualisés à la date 0.

En théorie, en additionnant le Best Estimate et la Net Asset Value nous devrions retrouver la valeur de marché des actifs à la date 0. Or comme le montre le schéma ci-dessous, nous constatons un écart de 8,42M€ entre les deux montants.



Cette différence de montant est entièrement expliquée par l'écart de convergence que nous signale le test stochastique. Notre modèle n'est pas parfait, **en réalité il crée une richesse de 84,20M€, soit 0,85% de la valeur de marché initial de nos actifs**. Le problème, c'est qu'il nous est impossible de déterminer où se trouve le surplus de richesse. Le Best Estimate? Ou bien la Net Asset Value? Surement les deux, mais dans quelle proportion?

Une solution prudente serait, comme le suggère le schéma ci-dessous, d'amputer le surplus de valeur à la Net Asset Value. Un assureur prudent préférera surestimer le Best Estimate plutôt que de surévaluer sa richesse.

Nous avons préféré dans cette étude amputer l'écart convergence au Best Estimate et à la NAV de manière proportionnelle, c'est-à-dire au prorata de leur part respective dans la valeur de marché à la date 0 des actifs recalculés par le test stochastique.

$$BE_{\text{retraité}} = BE - \Delta \frac{BE}{VM(0)_{\text{recalculée}}} = 898,36M€$$

$$NAV_{\text{retraitée}} = NAV - \Delta \frac{NAV}{VM(0)_{\text{recalculée}}} = 88,32M€$$

Où $\Delta = VM(0)_{\text{projetée}} - VM(0)$

Comment interpréter ces deux grandeurs ?

Rappelons dans un premier temps le bilan comptable de notre société à la date 0 :

Bilan Solvabilité 1			
Actif	981 000 000	Passif	981 000 000
Obligation	686 700 000	Fonds propres	63 000 000
Action	98 100 000	Provision mathématique	900 000 000
Immobilier	147 150 000	PPE	9 000 000
Monétaire	49 050 000	Réserve de capitalisation	9 000 000

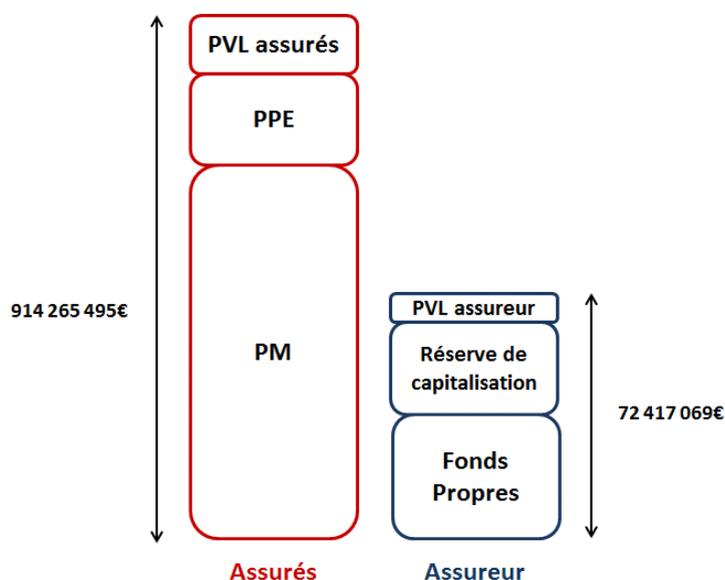
FIGURE 3.9 – Bilan sous Solvabilité I

Considérons désormais les plus-values latentes existantes sur les obligations à la date initiale. Une vision plus « économique » du bilan serait le schéma suivant :

Bilan S1 / vision "économique"			
Actif	986 682 564	Passif	986 682 564
Obligation	692 382 564	Fonds propres	63 000 000
Action	98 100 000	Provision mathématique	900 000 000
Immobilier	147 150 000	PPE	9 000 000
Monétaire	49 050 000	Réserve de capitalisation	9 000 000
		Plus-values latentes	5 682 564

FIGURE 3.10 – Bilan sous Solvabilité I vision « pseudo-économique »

Quelle est la véritable richesse de l'assureur ? Quel parti du bilan reviendra aux assurés ? Instinctivement, on attribuerait la PM et la PPE aux assurés, et on répartirait les plus-values latentes proportionnellement entre l'assureur et les assurés.



Répartir le patrimoine de la façon suivante reviendrait à une liquidation de la compagnie d'assurance au 31/12/2012, ou à un rachat immédiat de la provision mathématique globale par l'ensemble des assurés. Ceci est une approche statique, ne prenant pas en compte les marges futures éventuelles de l'assureur, ce que fait le bilan économique « Solvabilité 2 » :

Bilan économique S2			
Actif	986 682 564	Passif	986 682 564
Obligation	692 382 564	Net Asset Value	88 324 019
Action	98 100 000		
Immobilier	147 150 000	Best Estimate	898 358 545
Monétaire	49 050 000		

FIGURE 3.11 – Bilan sous Solvabilité II

En projetant l'activité de notre compagnie d'assurance sur 30 ans, nous constatons que les marges futures de l'assureur ($NAV - (FP + Res + PVL_{\text{assurés}})$) représente 1,77% des PM .

Le Best Estimate calculé par le modèle équivaut à 98,26%²¹ de son « équivalent » comptable ($PM + PPE + PVL_{\text{assurés}}$). Notons que ce résultat est satisfaisant puisqu'il est en adéquation avec le ratio habituellement observé chez les compagnies d'assurance vie : [97%;99%].

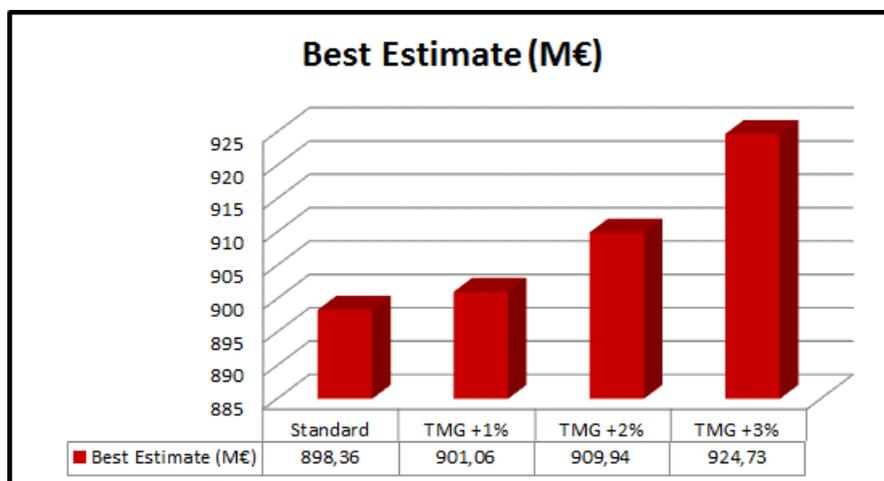
3.5.3 Sensibilité du Best Estimate

Dans la partie suivante nous allons étudier la sensibilité du Best Estimate aux différents inputs du modèle. En outre, le résultat des études qui vont suivre est la dernière étape de validation du modèle avant l'intégration de la logique floue.

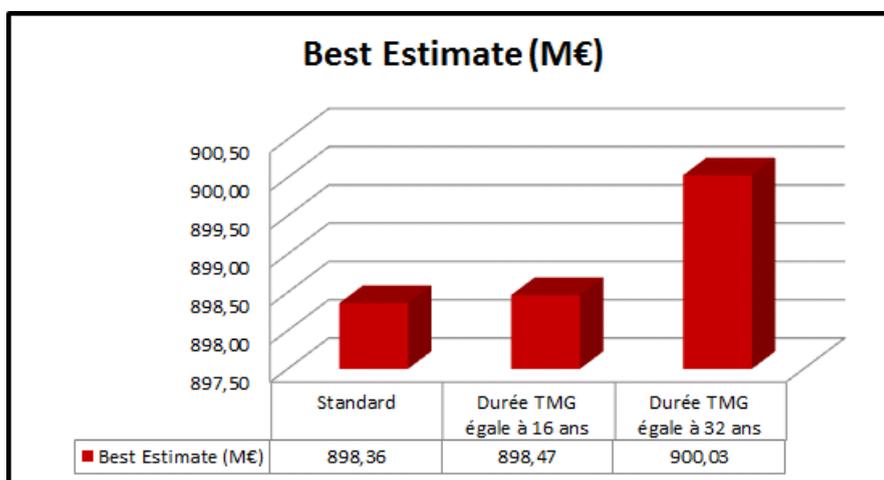
1) Sensibilité du Best Estimate aux TMG pratiqués

Commençons par regarder comment réagit notre Best Estimate aux TMG pratiqués par notre compagnie d'assurance. Rappelons que le TMG définit le taux minimum garanti par l'assureur envers l'assuré. En pratique une augmentation du TMG devrait traduire une augmentation des engagements de l'assureur envers les assurés (représentés par la provision Best Estimate). En effet, si le TMG d'un model point augmente, le nombre de scénarios défavorables où le taux de rendement financier de l'assureur est inférieur au TMG augmente également. Ce sont des scénarios où l'assureur abandonne une partie de sa marge, voir enregistre des pertes afin de revaloriser les assurés à hauteur du TMG.

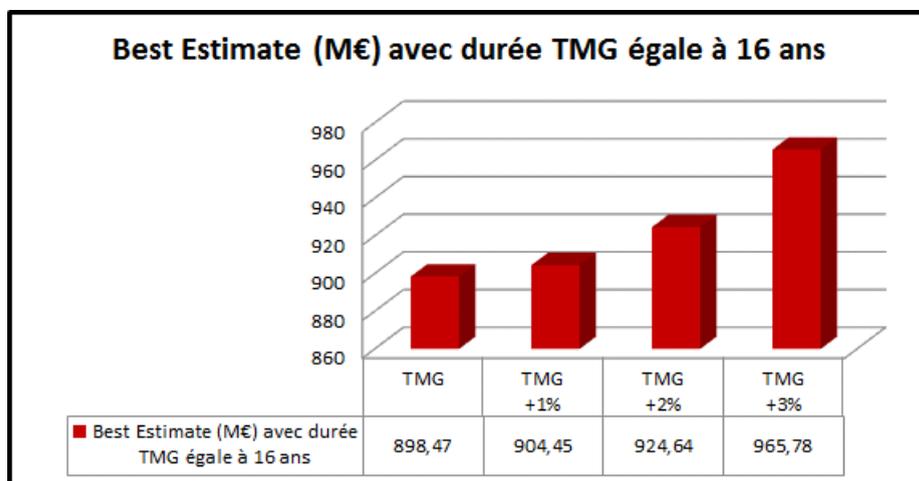
21. $\frac{BE}{(PM + PVL_{\text{assurés}} + PPE)} = 98,27\%$



Notre modèle traduit bien la croissance du Best Estimate en fonction du TMG. Augmenter de 1% l'ensemble de nos TMG n'a pas de grand impact sur le Best Estimate. Ceci s'explique par des TMG relativement faibles dans notre modèle central par rapport aux rendements financiers issus des scénarios économiques. En revanche, nous observons une croissance exponentielle du Best Estimate. Naturellement, en augmentant de 2% et de 3% nos TMG, nous augmentons et aggravons considérablement les scénarios défavorables.



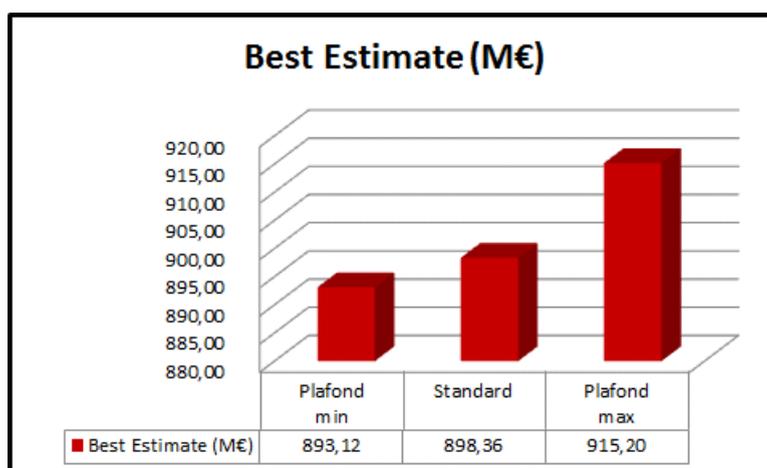
Passée leur durée d'application de 8 ans dans le modèle standard, nos TMG sont ramenés à 0. L'étude ci-dessus traduit l'évolution du Best Estimate si notre société d'assurance modifie la durée d'application des TMG. Le Best Estimate augmente logiquement avec la durée d'application mais légèrement puisque nos TMG sont faibles.



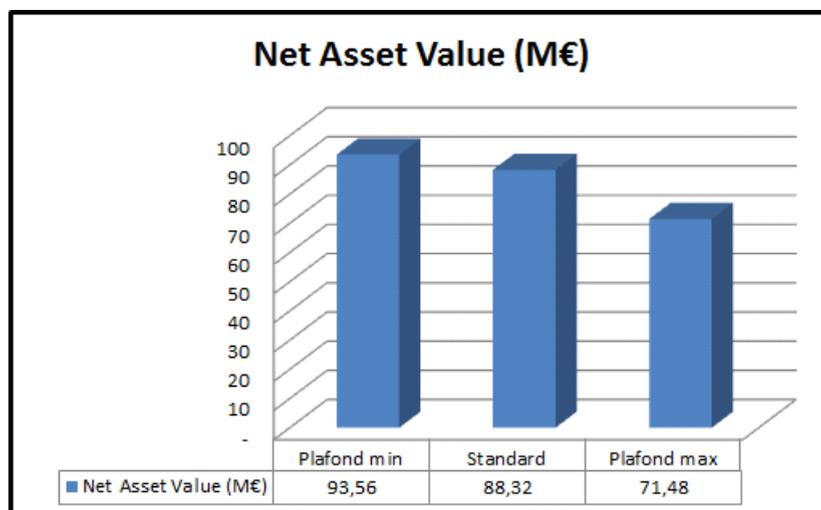
Augmenter à la fois la durée et le niveau des TMG fait décrocher notre Best Estimate. Cela démontre encore une fois, que malgré les arguments commerciaux, il n'est pas dans l'intérêt d'un assureur de proposer des TMG de niveau trop élevé et/ou de durée d'application trop longue.

2) Sensibilité du TMG par rapport à la loi de rachat conjoncturel de l'ACP

Regardons désormais le Best Estimate selon les paramètres de la loi de rachat conjoncturel fournie par l'ACP dans les orientations nationales complémentaires du QIS 5. Rappelons que nous avons dans le modèle standard calibré la loi de rachat conjoncturel sur les paramètres moyens (*c.f.* 3.2.4).



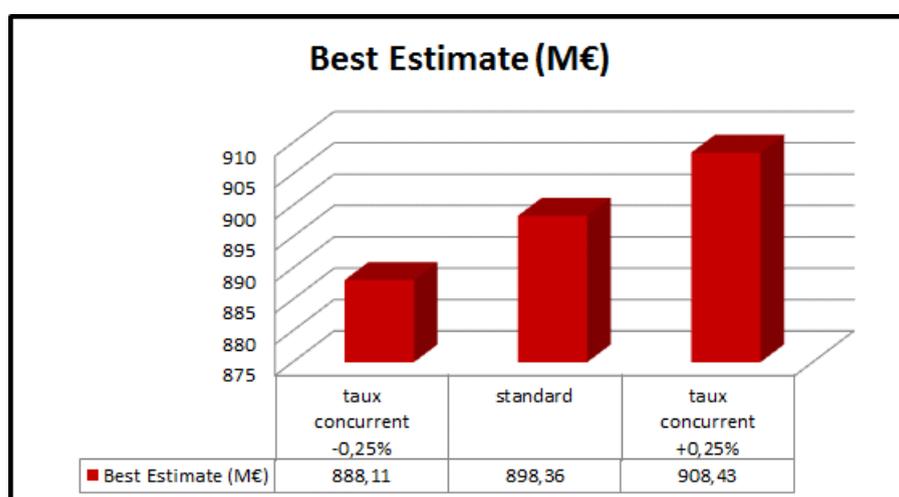
Plus les assurés rachèteront tôt leur contrat, moins l'assureur pourra se faire de marge sur les produits financiers en représentation des PM. Le modèle calibré avec le plafond maximum est le modèle qui entraîne le plus de rachats, puisqu'il suppose l'assuré plus réactif à l'écart de taux existant entre le taux servi et le taux concurrent. Le Best Estimate est alors plus élevé que le modèle standard. Inversement, le Best Estimate calibré avec le plafond minimum est quant à lui inférieur à celui du modèle standard.

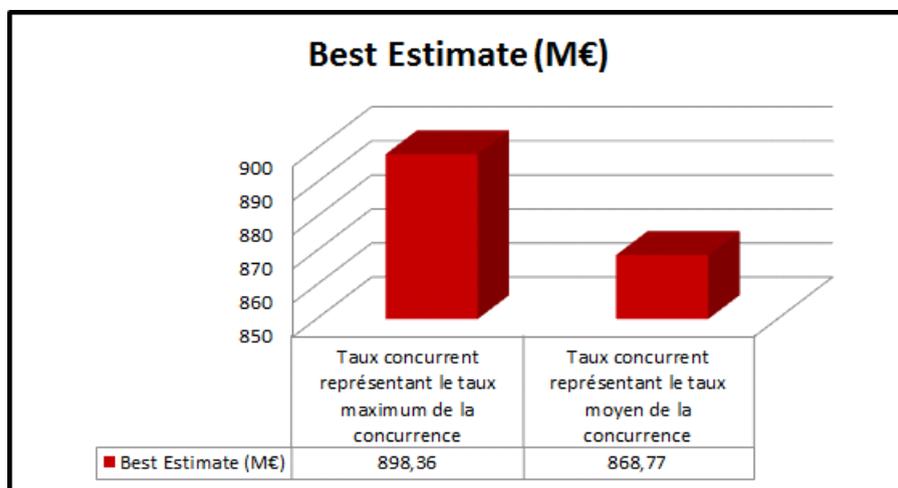


Il nous semble important de signaler les écarts considérables de Best Estimate et de Net Asset Value selon la sévérité choisie de la fonction de rachat conjoncturel fournie par l'ACP. Nos résultats démontrent, qu'un calibrage différent de la fonction de rachat conjoncturel, peut entraîner pour un même passif d'assurance un écart de NAV égal à 23.6%. **Les montants du Best Estimate et de la Net Asset Value sont très sensibles aux hypothèses de rachats. Le calibrage de la fonction de rachat conjoncturel préconisée par l'ACP devrait être plus précis en se basant notamment sur les caractéristiques du passif de l'assureur.**

3) Sensibilité du Best Estimate selon le taux concurrent

Les deux schémas ci-dessous montrent la sensibilité du Best Estimate selon le niveau du taux concurrent.





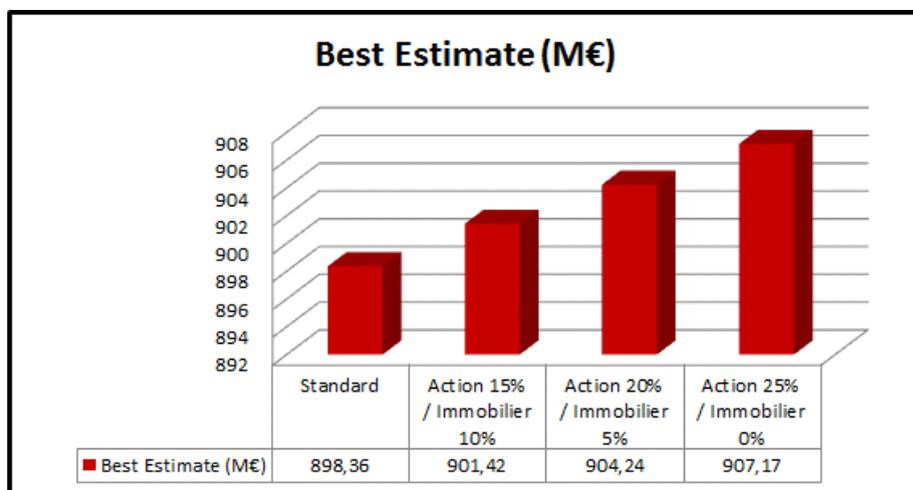
En toute logique nous voyons qu'un taux concurrent globalement plus élevé entrainera un Best Estimate supérieur et vice-versa.

Le deuxième graphique suscite davantage notre intérêt puisqu'il souligne la portée que peut avoir l'interprétation du taux concurrent sur le Best Estimate. Dans le modèle standard nous considérons le taux concurrent comme le meilleur taux pratiqué par la concurrence. Si nous l'avions interprété comme le taux moyen pratiqué par la concurrence alors la valeur des engagements de notre société d'assurance envers nos assurés aurait diminué de 30M€.

De par la sensibilité du Best Estimate et de la Net Asset Value au taux concurrent, le choix de modélisation de ce dernier par les compagnies d'assurance est un sujet à approfondir.

4) Sensibilité par rapport à l'allocation en action

En univers risque neutre, tous les actifs ont le même rendement espéré mais se différencient par leur volatilité. De manière à mesurer l'impact de la volatilité des actifs sur le Best Estimate, nous avons modifié la structure de notre actif en substituant de l'immobilier au profit des actions dont la volatilité est supérieure.



Nous constatons ci-dessus que la provision Best Estimate augmente avec la volatilité de l'actif. Effectivement, une structure d'actif plus volatile hausse le coût des « options et garanties », augmentant alors la valeur des engagements de l'assureur envers l'assuré.

Conclusion du chapitre

Nous venons de détailler la construction de notre modèle ALM « standard » permettant le calcul de la provision Best Estimate de notre compagnie d'assurance fictive. Afin de prendre en compte les spécificités de l'activité épargne de la société nous avons opté pour une modélisation stochastique. Nous avons ensuite « validé » notre modèle au travers de différents tests et sensibilités du Best Estimate. Certaines hypothèses sont structurantes dans la détermination du Best Estimate, en particulier celles concernant les lois comportementales. Pour autant, la loi de rachat conjoncturel des assurés, la politique de taux servis ou l'allocation d'actif peuvent soulever des questions sur leur modélisation, leur calibrage et plus largement sur leur justification. C'est pourquoi nous allons envisager dans la suite de ce mémoire une modélisation différente des lois comportementales : **une modélisation floue**.

Chapitre 4

La logique floue

L'être humain est confronté à des problèmes complexes qu'il doit résoudre à l'aide de données approximatives. La théorie des ensembles flous permet de définir un cadre conceptuel à ces méthodes de raisonnement. Plutôt que de modéliser le comportement de l'être humain par des valeurs numériques et précises, la logique floue permet de décrire de façon qualitative les variables approximatives. L'objectif de notre mémoire est de mettre en place une nouvelle façon de modéliser les comportements humains comme les rachats mais aussi les prises de décisions du management via la logique floue. Cette théorie pourra être testée et comparée aux méthodes traditionnelles grâce au modèle ALM précédemment construit.

Dans ce chapitre, nous présentons les éléments essentiels à la compréhension de la logique floue : la théorie de la logique floue et le raisonnement à adopter pour la mettre en place.

4.1 Pourquoi la logique floue ?

La plupart des problèmes auxquels sont confrontés les êtres humains sont modélisables mathématiquement, mais est-ce vraiment une manière de représenter la réalité ? Les problèmes en monde réel nécessitent parfois des informations imprécises et incertaines. Prenons par exemple, le comportement adopté par un individu à l'approche d'un feu tricolore. L'humain ne se dira pas « si le feu est rouge, si je suis à moins de 50 mètres du feu et si ma vitesse est de 46.52km/h, alors j'appuie sur la pédale de frein » ; mais plutôt « si le feu est rouge, si je suis proche du feu et si ma vitesse est moyenne, alors je freine doucement ». Le fait d'apprécier les données de manières approximatives et imprécises et non de manières quantitatives est un raisonnement flou. Le cerveau humain fonctionne donc en logique floue.

Cette approche floue a été développée à partir de 1965 par Lofti A. Zadeh, professeur à l'Université de Californie (Berkeley), grâce à sa théorie des ensembles flous (*fuzzy sets*) généralisant la théorie mathématiques des ensembles classiques. Lofti A. Zadeh prend en compte les imprécisions et les incertitudes des raisonnements en permettant à un élément d'appartenir à un ensemble non pas avec certitude mais avec un certain degré d'appartenance (*c.f.* [L.A65]).

De nombreuses applications de la logique floue se sont développées dans l'électroménager ou encore l'électronique grand public où l'imprécision dans les données rend l'automatisation par les méthodes classiques impossible. C'est au Japon que l'essor de la logique floue fut le plus important. En effet, à partir de 1980, des machines à laver sans réglages ou des appareils photos

autofocus utilisant l'approche floue apparaissent. Ayant faite ses preuves dans d'autres domaines comme la finance ou le diagnostic médical, la logique floue est aujourd'hui une réalité que nous avons décidé d'appliquer aux comportements humains, dans l'objectif de les modéliser au mieux au vue des incertitudes qu'ils représentent.

Dans la suite de ce chapitre, nous développons dans un premier temps la théorie des ensembles flous, puis le raisonnement à adopter en logique floue.

4.2 Éléments de la théorie de la logique floue

Comme tout concept mathématique, il est important de connaître la théorie et les notions principales de la logique floue pour appréhender au mieux son fonctionnement.

4.2.1 Ensembles flous et fonctions d'appartenance

Avant de définir de manière théorique les ensembles flous, il est intéressant de s'arrêter sur quelques exemples. Prenons comme premier exemple, une panier de fruits. Nous pouvons rapidement distinguer les pommes dans cette panier (ensemble classique), mais il est plus difficile de trouver les pommes mûres (ensemble flou). Prenons un deuxième exemple, la taille des individus. A partir de quel moment peut-on dire qu'un individu est grand ? La réponse à cette question est difficile car définir une taille minimale pour appartenir à cette catégorie est une décision subjective. En effet, la taille minimale peut être 1m71, 1m75 ou encore 1m80. L'ensemble « individus grands » est donc flou. Dans cette partie, nous utiliserons cet exemple tout au long de l'explication de notre théorie ainsi que de l'exemple présenté précédemment sur le comportement d'un individu à l'approche d'un feu tricolore.

La logique floue repose sur la théorie des ensembles flous qui est une généralisation de la théorie des ensembles classiques (théorie booléenne). Un ensemble flou est un ensemble auquel on peut appartenir selon un certain degré. Un ensemble flou A dans X est caractérisé par une fonction d'appartenance $\mu_A(x)$ qui à chaque point x dans X associe un nombre réel dans l'intervalle $[0, 1]$. $\mu_A(x)$ représente le degré d'appartenance de x dans A .

$$\boxed{\forall x \in X, \mu_A(x) \in [0, 1]}$$

Un ensemble flou est totalement caractérisé par sa fonction d'appartenance. Si $\mu_A(x) = 0.40$ alors x appartient à A avec un degré d'appartenance de 40%. Avec les fonctions d'appartenance, nous pouvons donc appartenir à un ensemble seulement à 40% (pas totalement), alors que dans la théorie classique, il ne peut pas y avoir de juste milieu : soit « on appartient à l'ensemble », soit « on n'y appartient pas ».

Pour avoir une vision plus claire des fonctions d'appartenance, nous revenons sur l'exemple des tailles des individus. Voici un exemple de fonctions d'appartenance pour trois ensembles flous : « personnes de petite taille », « personnes de taille moyenne » et « personnes de grande taille ».

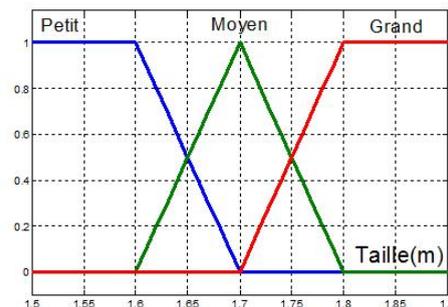


FIGURE 4.1 – Fonctions d'appartenance pour les ensembles flous associés à la taille d'un individu

Source : Présentation de M. Lesclieux sur la logique floue (c.f. [Les])

Dans cet exemple, Jason qui mesure $1m725$ est grand avec un degré de 25% et moyen à 75%.

Remarque : Les fonctions d'appartenance peuvent théoriquement prendre toutes les formes possible. Néanmoins, elles sont souvent linéaires par morceaux pour simplifier les calculs.

4.2.2 Les variables floues

Dans chaque théorie mathématique, il est nécessaire de définir des variables. Il en est de même pour la logique floue. Cette théorie est basée sur des variables floues que nous appelons **variables linguistiques**. Une variable linguistique correspond à un triplet (U, X, R) :

- U : l'univers du discours (ex : unité de longueur : le mètre)
- X : la variable (ex : la taille)
- R : les ensembles flous (ex : « personnes de petite taille », « personnes de taille moyenne » et « personnes de grande taille »)

Lors du raisonnement en logique floue, il faudra déterminer avec beaucoup d'attention ces variables linguistiques.

4.2.3 Les opérateurs flous

Comme dans la théorie classique, des opérateurs sont utilisés afin d'établir les liens logiques entre les ensembles flous et de les manipuler aisément. Nous appelons ces opérateurs : **les opérateurs flous**. Nous pouvons alors définir les opérateurs « ET », « OU » et la négation pour faire des calculs sur les degrés d'appartenance et créer de nouveaux ensembles flous. En effet, nous pouvons appartenir à un ensemble :

- « ET » à un autre
- « OU » à un autre
- ou « NE PAS » y appartenir.

Nous présentons ici, les opérateurs flous de Zadeh qui sont les plus utilisés ainsi que leurs correspondances en théorie des probabilités :

	Opérateurs de Zadeh	Opérateurs probabilistes
Intersection : ET	$\mu_{A \cap B}(x) = \text{Min}(\mu_A(x), \mu_B(x))$	$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \times \mu_B(x)$
Réunion : OU	$\mu_{A \cup B}(x) = \text{Max}(\mu_A(x), \mu_B(x))$	$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \times \mu_B(x)$
Négation : NON	$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$	$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$

Pour comprendre au mieux l'utilité de ces opérateurs flous, revenons à notre exemple concernant les tailles des individus, nous pouvons alors déterminer l'ensemble des personnes petites OU moyennes par la fonction d'appartenance suivante

$$\mu_{A \cup B}(x) = \text{Max}(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

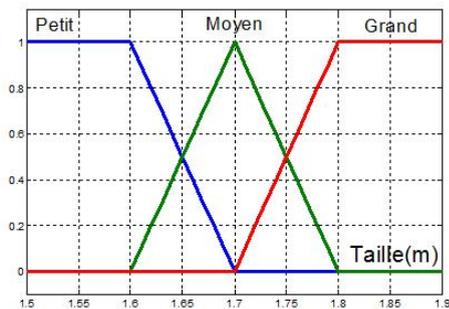


FIGURE 4.2 – Univers flou

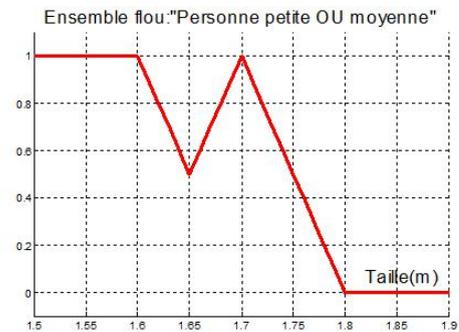


FIGURE 4.3 – Ensemble flou : « Personnes petites OU moyennes »

Nous pouvons aussi déterminer l'ensemble des personnes petites ET moyennes par la fonction d'appartenance suivante

$$\mu_{A \cap B}(x) = \text{Min}(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

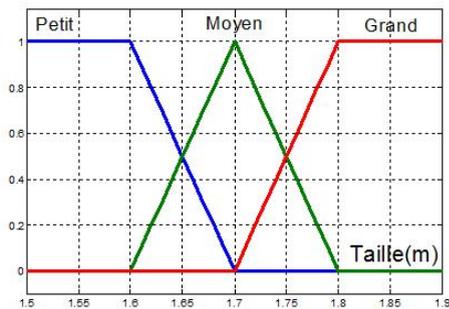


FIGURE 4.4 – Univers flou

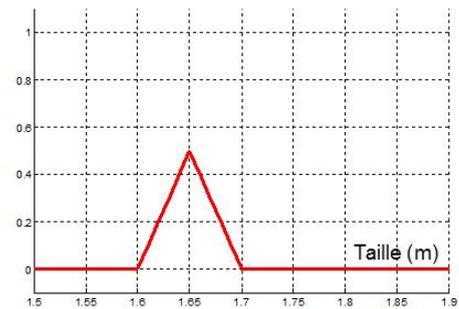


FIGURE 4.5 – Ensemble flou : « Personnes petites ET moyennes »

De même, l'ensemble flou des personnes **NON** petites se définit de la manière suivante

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

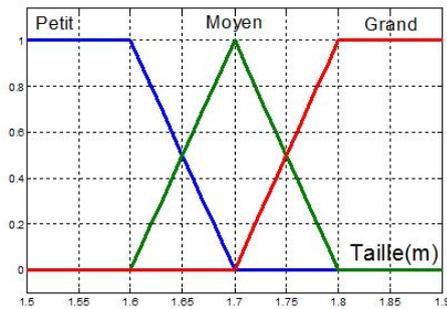


FIGURE 4.6 – Univers flou

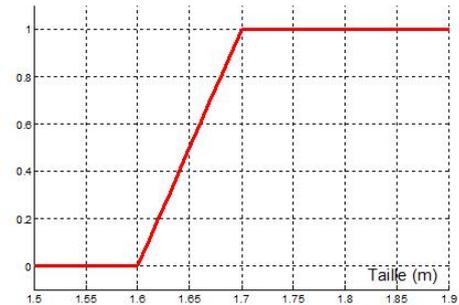


FIGURE 4.7 – Ensemble flou : « Personnes NON petites »

Remarques :

- En logique floue, on peut appartenir à A et \bar{A} en même temps *i.e.* $\mu_{A \cap \bar{A}} \neq 0$
- En logique floue, $A \cup \bar{A} \neq U$

Nous avons donc pu créer d'autres ensembles flous à partir de ceux déjà connus.

4.2.4 Les règles de décisions

En logique classique, le système de raisonnement s'effectue par **implication**. Une proposition implique une conclusion :

$$\text{si } p \text{ est vraie alors } q \text{ est vraie}$$

La logique floue doit quant-à elle mettre en avant la façon de raisonner des êtres humains. Pour ce faire, elle s'appuie sur des **règles de décisions** floues dans lesquelles les propositions ne sont pas vraies ou fausses mais peuvent-être vraies selon un certain degré (le degré d'appartenance).

Pour construire l'ensemble de ces règles floues que nous appèlerons **matrice de décisions**, il est nécessaire d'avoir recours à des experts ou des statistiques dans les différents domaines étudiés. Si nous reprenons notre exemple du comportement des individus face à un feu tricolore, nous pouvons déterminer la matrice de décision suivante :

SI le feu est rouge	ET si ma vitesse est élevée	ET si le feu est proche	ALORS je freine fort
SI le feu est rouge	ET si ma vitesse est faible	ET si le feu est loin	ALORS je maintiens ma vitesse
SI le feu est orange	ET si ma vitesse est moyenne	ET si le feu est loin	ALORS je freine doucement
SI le feu est vert	ET si ma vitesse est faible	ET si le feu est proche	ALORS j'accélère

Remarque : Notons que la logique floue permet d'énoncer les règles de décisions en « langage naturel ».

Une règle floue s'articule donc de la manière suivante :

SI prémisses ₁ ET/OU/NON prémisses ₂ ... ALORS conclusion
--

ET, OU et NON sont les opérateurs flous qui lient les prémisses entre-elles tandis que ALORS est l'**implication floue** qui nous donne la conclusion à adopter.

Notons que « prémisses₁ **ET/OU/NON** prémisses₂... » est la proposition de l'implication floue et « conclusion » la conséquence de cette implication.

Remarque : Les opérateurs flous ont deux fonctions. Ils permettent de relier les ensembles flous entre eux pour en créer de nouveaux comme nous l'avons vu dans la section précédente. Ils servent aussi à relier les prémisses d'une implication floue entre-elles. Cette deuxième fonction sera utilisée par la suite pour déterminer le niveau de vérité de la proposition.

L'ensemble des éléments théoriques que nous venons d'énoncer sont les bases fondamentales pour comprendre le raisonnement en logique floue ainsi que le cheminement pour arriver à des résultats réels en passant par l'univers flou. Nous pouvons désormais étudier le raisonnement flou.

4.3 Le raisonnement en logique floue

A partir de données réelles, l'objectif de la logique floue est de travailler dans l'univers du flou pour modéliser au mieux les comportements humains face à certains problèmes. La logique floue devra néanmoins repasser dans l'univers des réels pour répondre à ces problèmes.

Le mécanisme de la logique floue s'articule autour de trois grandes étapes : la fuzzification, l'inférence floue et la défuzzification. Afin d'illustrer au mieux cette nouvelle partie, nous mettons en place le raisonnement flou pour le calcul d'une note d'un élève qui vient de faire un exposé et est jugé sur la méthode et la présentation. Au lieu d'appliquer des coefficients pour trouver sa note globale, nous appliquons la logique floue.

4.3.1 La fuzzification

Lorsque nous sommes en possession des notes de présentation et de méthode de notre élève, données réelles, nous devons rentrer dans l'univers du flou.

La **fuzzification** est l'étape qui permet de passer du monde réel au monde flou, c'est-à-dire d'affecter à des données réelles ($\in \mathbb{R}$), une qualification dans le « langage naturel ». L'objectif est de quantifier le flou : transformer des valeurs numériques en données floues. Pour ce faire, il est nécessaire de déterminer les variables d'entrée (variables qui permettront de faire des choix quant à la conclusion) et de sortie (variable relative à la conclusion) du modèle qui nous serviront à définir les prémisses et les conclusions de chacune des règles de décisions. Pour chaque variable, nous devons préciser : l'univers du discours et les ensembles flous associés à chacune d'elles. La fuzzification consiste alors à trouver les fonctions d'appartenance de chacun des ensembles flous.

Ces dernières sont déterminées à partir de jugements d'experts.

Pour résumer :

Comment fuzzifier ?

- Déterminer les variables floues d'entrée et de sortie du modèle
- Déterminer pour chacune de ces variables leurs ensembles flous associés (plusieurs ensembles flous par variable) ainsi que leur univers de discours
- Déterminer la fonction d'appartenance de chacun des ensembles flous

Remarque : Il faut trouver les fonctions d'appartenance des ensembles flous des variables d'entrée mais aussi de celles de sortie. Attention à ne pas en oublier.

Dans notre exemple, nous distinguons trois variables floues : deux variables d'entrée (la présentation et la méthode) et une variables de sortie (la notation). La note de présentation et celle de méthode sont les variables qui permettront de faire des choix quant à la notation finale de l'élève. Pour chacune de ces variables, l'univers du discours est $[0, 20]$, l'espace des notes possibles. Nous devons trouver les ensembles flous associés à ces variables. Nous avons retenu les ensembles suivants :

- Présentation \in {Médiocre, Moyenne, Excellente}
- Méthode \in {Médiocre, Moyenne, Excellente}
- Notation \in {Mauvaise, Moyenne, Excellente}

La dernière étape de la fuzzification consiste à définir les fonctions d'appartenance de chaque ensemble flou. Ici, nous avons donc 9 fonctions d'appartenance à spécifier.

Les fonctions d'appartenance des ensembles flous associés aux variables d'entrée sont les suivantes :

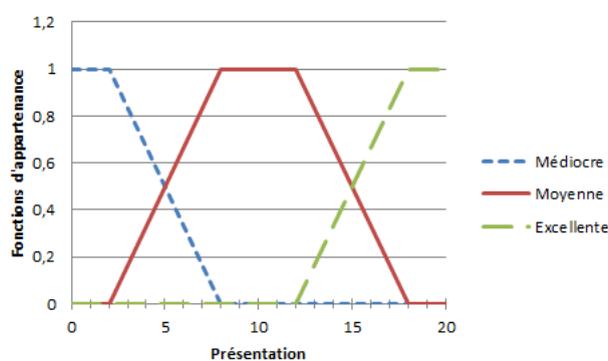


FIGURE 4.8 – Présentation

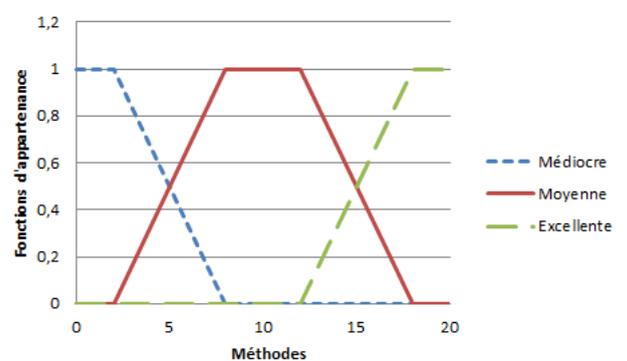


FIGURE 4.9 – Méthode

Les fonctions d'appartenance des ensembles flous associés à la variables de sortie sont les suivantes :

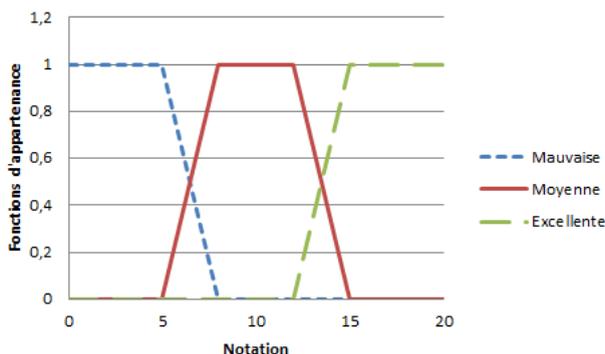


FIGURE 4.10 – Notation

Une fois cette étape effectuée nous pouvons dire que nous sommes dans l'univers flou...

4.3.2 L'inférence floue

L'objectif de l'inférence floue est de construire des règles de décisions et de trouver pour chacune d'entre-elles la fonction d'appartenance de la conclusion. Il faudra alors agréger les fonctions d'appartenance des conclusions de chaque règle pour obtenir la fonction d'appartenance de la conclusion finale.

Il y a quatre étapes à suivre lors de l'inférence floue :

1) Déterminer la matrice de décision

Lors de cette étape, nous devons déterminer l'ensemble des règles de décisions. Le calibrage de la matrice de décision est l'une des étapes les plus importantes de la logique floue car il faut pouvoir justifier chaque règle floue mais aussi ne pas en oublier. Le choix des règles étant basé sur l'expertise humaine, il est nécessaire d'émettre des hypothèses et de se fier aux avis des experts pour créer notre matrice de décision.

Pour notre exemple, nous avons construit la matrice de décision suivante :

Notation	Méthode		
Présentation	Médiocre	Moyenne	Excellente
Médiocre	Mauvaise	Mauvaise	Moyenne
Moyenne	Mauvaise	Moyenne	Excellente
Excellente	Moyenne	Excellente	Excellente

FIGURE 4.11 – Matrice de décision pour le choix de la notation

Cette matrice se lit de la manière suivante :

- SI la présentation est moyenne ET la méthode excellente ALORS la notation sera excellente
- SI la présentation est médiocre ET la méthode moyenne ALORS la notation sera mauvaise

La matrice décision a été construite de telle manière à ce que la présentation et la méthode influence conjointement la notation ; c'est pourquoi les liaisons entre les prémisses sont des « ET » logiques.

Nous notons x_0 , les données numériques que nous donnerons en entrées du module de logique floue. Dans notre cas, $x_0 = (\text{note de présentation}, \text{note de méthode})$. Pour chaque x_0 , plusieurs règles de décisions peuvent être déclenchées si les données initiales n'appartiennent pas à 100% à un ensemble flou. En effet, comme nous l'avons vu lors de la fuzzification, pour un x_0 donné, il peut y avoir plusieurs fonctions d'appartenance non nulles : $\mu_i(x_0) \neq 0$. Par conséquent, l'individu peut appartenir à deux ensembles flous de la même variable et vérifier plusieurs propositions.

Comme précédemment (cf. 4.2.4), chaque règle s'exprime de la manière suivante :

$$\boxed{\text{SI prémisses}_1 \text{ ET/OU prémisses}_2 \text{ ET/OU prémisses}_3 \text{ ALORS conclusion}_{R_i}}$$

Nous notons R_i la règle de décision numéro i et N le nombre de règles déclenchées par x_0 .

Si nous prenons comme exemple, un élève ayant eu 19 à sa présentation et 13.5 pour sa méthode : $x_0 = (19, 13.5)$. Regardons à quels ensembles appartient cet élève.

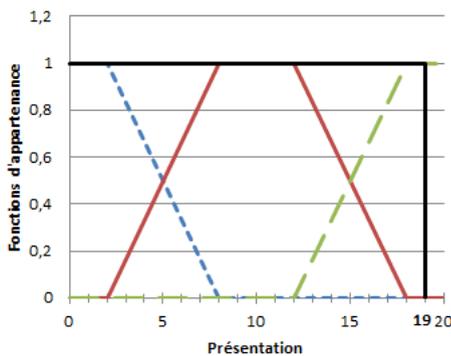


FIGURE 4.12 – Présentation

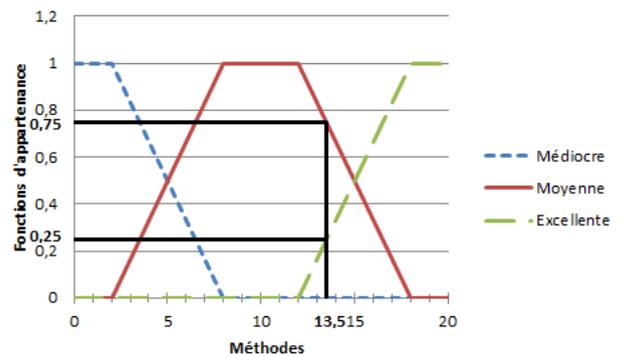


FIGURE 4.13 – Méthode

La présentation de notre élève est donc 100% excellente. Cependant, sa méthode est à 75% moyenne et 25% excellente. De tels résultats déclenchent alors deux règles de décisions $R1$ et $R2$:

- $R1$: SI la présentation est 100% excellente ET la méthode 75% moyenne ALORS la notation est excellente
- $R2$: SI la présentation est 100% excellente ET la méthode 25% excellente ALORS la notation est excellente

2) Calculer le degré d'activation de chaque règle : l'activation

Nous venons de voir que plusieurs règles floues peuvent être activées pour une donnée x_0 . Cela traduit le fait qu'un être humain a plusieurs options. En effet, il peut appartenir à plusieurs ensembles flous d'une même variable et par conséquent, avoir le choix entre plusieurs décisions (matérialisées par les règles de décisions). Il convient donc pour le décisionnaire d'analyser la

pertinence de chacune de ces options. Chaque règle de décisions est composée d'une proposition et d'une conclusion, le tout formant une implication. Le niveau de vérité de la proposition est appelé **le degré d'activation**. Plus le degré d'activation est élevé, plus la proposition est vraie et donc plus la règle déclenchée est pertinente.

Prenons la règle R_i , nous devons relier ses prémisses grâce aux opérateurs flous, *i.e.* trouver les liaisons entre les conditions de vérification de la règle R_i à l'aide des opérateurs flous pour trouver le niveau de vérité de la proposition. Si les prémisses sont reliées par un « ET », nous utiliserons l'opérateur « MIN » pour déterminer le degré d'activation. En effet, avec la liaison « ET », toutes les prémisses doivent être vérifiées pour que l'implication ait lieu. Si l'une d'entre-elles n'est vraie qu'à 20%, par exemple, alors la proposition globale (formée par l'ensemble des prémisses) ne pourra pas être vraie à plus de 20%. Le degré d'activation de la règle floue sera alors de 20%.

A l'inverse, si les prémisses sont reliées par un « OU », nous utiliserons alors l'opérateur « MAX » pour déterminer le degré d'activation. En effet, avec la liaison « OU », seulement l'une des prémisses doit être vérifiée pour que l'implication ait lieu. Si l'une des prémisses est vraie à 80%, par exemple, alors la proposition globale sera vraie à au moins 80%. Le degré d'activation de la règle floue sera alors de 80%. Notons $\mu_{R_i}(x_0)$ le degré d'activation de la règle R_i pour les données x_0 .

Dans notre exemple, les liaisons entre les prémisses sont des « ET » logique. Pour trouver le degré d'activation il va donc falloir utiliser l'opérateur « MIN », et ce pour chaque règle de décision déclenchée :

- **R1** : $MIN(1, 0.75) = 0.75$ est le degré d'activation de $R1$. La proposition de $R1$ est vraie à 75%.
- **R2** : $MIN(1, 0.25) = 0.25$ est le degré d'activation de $R2$. La proposition de $R2$ est vraie à 25%.

Une règle de décisions est donc plus ou moins activée.

Il est nécessaire de répéter cette opération autant de fois qu'il y a de règles de décisions déclenchées par nos données numériques initiales x_0 . Nous obtenons donc N degrés d'activation (ici $N = 2$).

3) Rechercher la fonction d'appartenance pour la conclusion de chaque règle : l'implication

Pour chaque règle de décision, nous devons désormais déterminer la fonction d'appartenance de sa conclusion. Pour cela, nous allons utiliser le degré d'activation calculé précédemment. Il existe deux méthodes principales d'implication floue :

- **La méthode de Mamdani :**

$$\mu_{conclusion'_{R_i}}(y) = MIN_y(\mu_{R_i}(x_0), \mu_{conclusion_{R_i}}(y))$$

• **La méthode de Larsen :**

$$\mu_{conclusion'_{R_i}}(y) = \mu_{R_i}(x_0) \times \mu_{conclusion_{R_i}}(y)$$

Avec $\mu_{R_i}(x_0)$, le degré d'activation de la règle R_i , $\mu_{conclusion_{R_i}}(y)$, la fonction d'appartenance de l'ensemble flou de sortie en fonction de la règle de décision et $\mu_{conclusion'_{R_i}}(y)$, la fonction d'appartenance de la conclusion de la règle floue R_i .

Dans notre exemple, nous avons : $\mu_{conclusion_{R_1}}(y) = \mu_{Excellente}(y)$, la fonction d'appartenance de l'ensemble flou « notation excellente ».

Remarque : Ces méthodes d'implication respectent la règle suivante : si la proposition de l'implication est vraie avec un certain niveau de vérité (le degré d'activation), alors la valeur la plus élevée de la fonction d'appartenance de conclusion de la règle sera nécessairement ce degré de vérité. En effet, nous pouvons nous imaginer que si la proposition est vraie à 20% alors la conclusion peut être vraie au maximum à 20%.

Afin d'illustrer l'implication, regardons l'implication de Mamdani pour la première règle de décisions de notre exemple (R_1). Nous avons vu que pour R_1 , $\mu_{R_1}(x_0) = 0.75$. La fonction d'appartenance de conclusion pour R_1 a pour équation :

$$\mu_{Excellente'}(y) = \text{MIN}_y(0.75, \mu_{Excellente}(y))$$

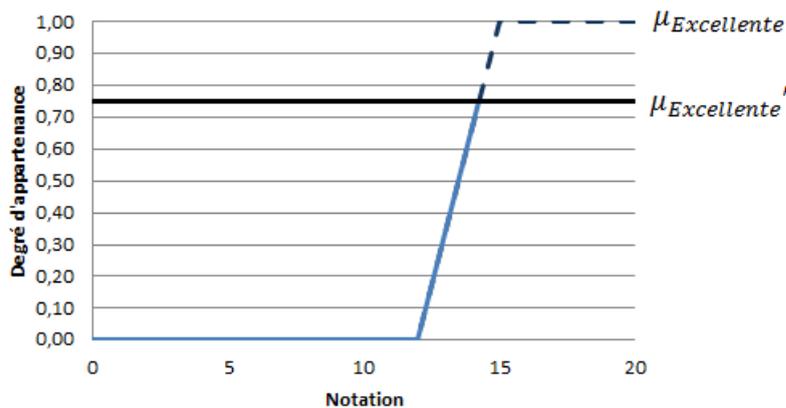


FIGURE 4.14 – Fonction d'appartenance de conclusion de la règle R_1

Nous avons donné l'exemple pour R_1 mais il faut bien évidemment faire la même chose pour toutes les règles de décisions déclenchées par nos données.

A ce stade, nous connaissons toutes les fonctions d'appartenance des conclusions des règles déclenchées par nos inputs. Il ne reste plus qu'à choisir la conclusion finale adoptée.

4) Rechercher la fonction d'appartenance résultante globale : l'agrégation

L'agrégation pour connaître la fonction d'appartenance de conclusion finale se fait lorsque les étapes précédentes sont effectuées pour chaque règle de décision R_i en supposant que les fonctions d'appartenance des conclusions cibles, $\mu_{conclusion'_{R_i}}$, sont reliées entre elles par un « OU » logique donc par un « MAX » en logique floue :

$$\mu_{FINALE}(y) = MAX_y(\mu_{conclusion'_{R_i}}(y)) \forall 1 \leq i \leq N$$

Remarque : Cette méthode d'agrégation peut sembler intuitive puisque, certes les données numériques d'entrée déclenchent plusieurs règles de décisions mais en réalité une seule décision sera prise à la fin du processus : il faudra donc choisir entre l'une OU l'autre des conclusions. Un « OU » logique est bien traduit par un « MAX » en logique floue.

Si nous continuons avec notre exemple et avec l'implication de Mamdani pour les règles de décisions, nous obtenons la fonction de conclusion finale en prenant le maximum des fonctions d'appartenance de conclusion de chaque règle.

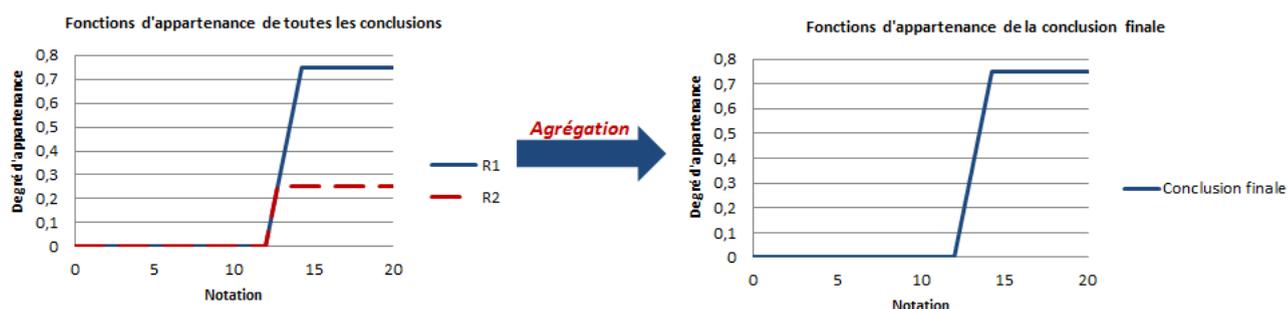


FIGURE 4.15 – Agrégation après implication de type Mamdani

La fonction d'appartenance de la conclusion finale étant choisie, nous devons en déduire une notation. Pour cela, il faut revenir au monde réel grâce à la défuzzification.

4.3.3 La défuzzification

Cette dernière étape permet de repasser du monde flou au monde réel. En effet, la défuzzification permet une prise de décision réelle à partir de la fonction d'appartenance de conclusion finale qui n'est pas interprétable directement. Il faut dans notre exemple, utiliser la fonction d'appartenance de conclusion finale pour trouver la note que nous attribuerons à l'élève.

Différentes méthodes sont applicables lors de cette étape : la méthode du centre de gravité (COG : *center of gravity*) qui consiste à prendre pour décision l'abscisse du centre de gravité de la surface sous la fonction d'appartenance de conclusion finale ou la méthode de la moyenne des maxima (MM : *mean of maxima*) qui consiste à prendre pour décision l'abscisse de la moyenne des valeurs de sorties ayant le degré d'appartenance le plus élevé.

Mathématiquement, ces deux méthodes se retranscrivent de la manière suivante :

- **Méthode du centre de gravité (COG) :**

$$x_G = \frac{\int_U x\mu(x) dx}{\int_U \mu(x) dx} = \frac{\sum_{i=0}^n x_i\mu(x_i)}{\sum_{i=0}^n \mu(x_i)}$$

où U est l'univers du discours de la variable de sortie.

- **Méthode de la moyenne des maxima (MM) :**

$$x_{MM} = \frac{\int_S x dx}{\int_S dx} = \frac{\sum_{i=0}^N x_i}{N} \text{ où } S = \{x_1 \in U \text{ tel que } \mu(x_1) = \text{SUP}_{x \in U}(\mu(x))\}$$

et N le nombre de point appartenant à S .

La défuzzification COG est souvent utilisée car elle prend en compte l'ensemble des valeurs proposées par la variable floue de sortie à travers l'utilisation de toute la fonction d'appartenance de la conclusion finale et non seulement d'une partie comme dans la méthode MM. Par conséquent, la méthode par COG est plus stable dans les résultats qu'elle propose. Nous verrons dans la partie suivante que les résultats obtenus par la défuzzification MM sont très sensibles à des petites variations des données numériques d'entrée.

La défuzzification nous permet d'attribuer une note à notre élève.

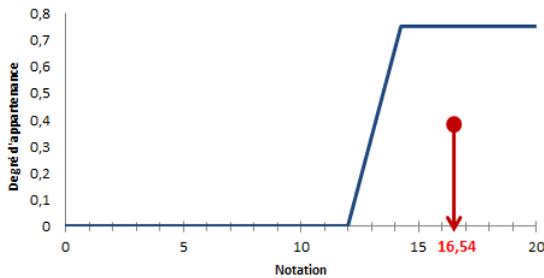


FIGURE 4.16 – Par la méthode du centre de gravité

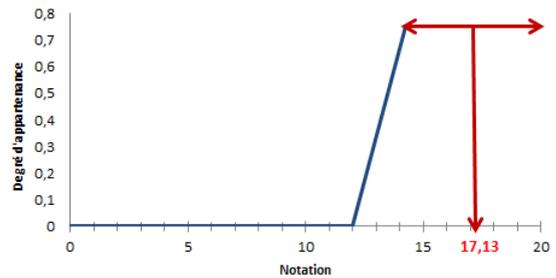


FIGURE 4.17 – Par la méthode de la moyenne des maxima

Avec la méthode du centre de gravité, l'élève obtiendrait une note de 16.54/20 pour son exposé. Tandis qu'avec la méthode de la moyenne des maxima, il obtiendrait 17.13/20.

Conclusion du chapitre :

La logique floue semble très intéressante pour résoudre les problèmes auxquels sont confrontés les êtres humains. Le raisonnement flou a pour objectif de partir d'inputs réelles ; de les manipuler dans l'univers du flou pour donner des solutions réelles aux problèmes. Il se décompose en plusieurs étapes :

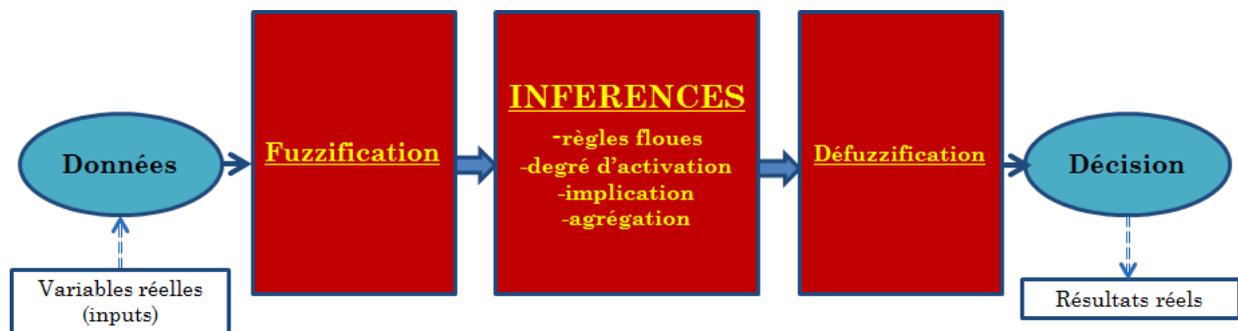


FIGURE 4.18 – Le raisonnement flou

Notre objectif est désormais d'appliquer ce raisonnement flou aux comportements humains de rachat de contrat ou au management action dans les compagnies d'assurance. Nous analyserons donc dans le chapitre suivant : pourquoi et comment appliquer la logique floue pour modéliser les rachats conjoncturels et la politique de taux servis.

Chapitre 5

Modélisation des comportements humains par la logique floue

Le risque de rachat évolue avec Solvabilité 2. En effet, sous Solvabilité 1 les provisions techniques sont calculées avec des hypothèses prudentes définies par le code des assurances. L'assureur doit imaginer un taux de rachat de 100% à chaque instant. Désormais, sous Solvabilité 2, les provisions techniques sont calculées selon une vision « Best Estimate » (vision 50/50) qui se veut plus proche des réalités observées par les assureurs. Les probabilités de rachats font désormais parties des hypothèses nécessaires au calcul du bilan économique des assureurs notamment lors du calcul du Best Estimate (BE), mais servent aussi à simuler le comportement des assurés dans les différents stress tests utilisés pour calculer le SCR. Soulignons, que l'assureur dégage des marges à travers les produits financiers qu'il réalise sur le placement des PM mais aussi éventuellement via les frais de gestion. Les rachats peuvent donc avoir un fort impact sur les résultats de l'activité de l'entreprise.

Comme nous l'avons vu dans les chapitres précédents, il existe deux formes de rachats : les rachats structurels, indépendants des conditions de marché et les rachats conjoncturels lorsque l'assuré rachète son épargne pour profiter de meilleures rémunérations. Les rachats structurels étant le reflet de l'historique de la compagnie, nous ne chercherons pas à les modéliser. Les rachats conjoncturels sont avant tout un risque de comportements humains. Les assureurs se doivent donc de modéliser au mieux ces comportements. La théorie de la logique floue apparaît alors comme une alternative de modélisation du comportement des assurés face aux rachats conjoncturels car elle a pour objectif de modéliser les raisonnements du cerveau humain.

La logique floue peut aussi servir à modéliser le comportement des assureurs par rapport aux objectifs qu'ils se fixent. Tout assureur décide d'une politique de taux servis : un objectif à atteindre. Dans notre modèle ALM, l'objectif est de servir 100% du taux concurrent. En vue, d'adapter le raisonnement humain à la politique de taux servis et de la rendre plus flexible aux résultats de la compagnie, nous avons décidé de modéliser ce management action par la logique floue.

Dans ce chapitre, nous reviendrons donc sur nos choix quant aux hypothèses à retenir pour appliquer la logique floue aux rachats conjoncturels, mais aussi sur les taux de rachats obtenus grâce à cette dernière. Puis nous proposerons une deuxième utilisation de la logique floue à travers la modélisation du management action.

5.1 Raisonnement flou appliqué aux rachats conjoncturels

En assurance-vie, certains facteurs jouent un rôle important dans la décision que prend l'assuré de racheter son épargne ou non. Notre objectif étant de modéliser les rachats conjoncturels, nous avons décidé de retenir trois variables explicatives du comportement de rachat de l'assuré : l'écart des rendements (taux servi - taux concurrent), l'âge de l'assuré et l'ancienneté du contrat.

- **L'écart des rendements** est la variable qui permet d'appréhender l'évolution des conditions des marchés face aux rendements proposés par l'assureur. Nous obtenons cette variable en faisant la différence entre le taux servi par l'assureur et le taux concurrent. L'écart des rendements permet de savoir si l'assuré a intérêt à racheter son épargne pour obtenir une meilleure rémunération ou non. C'est l'essence même des rachats conjoncturels. De plus, cette variable est utilisée par l'ACP pour décrire les rachats conjoncturels. Au vue de ces constats, il est donc indispensable de le prendre en compte.
- La fiscalité et le niveau des pénalités appliquées lors des rachats étant dégressifs en fonction de **l'ancienneté du contrat**, cette variable peut influencer les rachats. Bien que l'ancienneté du contrat soit souvent utilisée pour modéliser le taux de rachats structurels, elle peut néanmoins servir à modéliser les rachats conjoncturels. En effet, un individu qui détient son contrat depuis presque 8 ans, sera sûrement moins sensible à l'écart des rendements qu'un autre, car dans peu de temps, il pourra racheter son contrat dans des conditions fiscales plus avantageuses.
- **L'âge de l'assuré** peut impacter le comportement de l'assuré. En effet, en fonction de son âge, l'assuré n'a pas nécessairement le même objectif quant à l'utilisation de son épargne. Un jeune sera peut-être plus dans une logique de fructification de son épargne et un retraité pensera davantage à transmettre son épargne à ses successeurs. Ils auront donc une sensibilité aux rachats différente. De plus, selon nous, l'âge rend compte de la connaissance d'un individu quant au marché de l'assurance vie.

Nous aurions pu ajouter d'autres facteurs explicatifs des rachats tels que le taux Euribor 1 mois, les pénalités de rachats, le sexe ou encore les frais d'acquisition (*c.f.* [Sur11] et [Mil10]); mais cela complexifierait le modèle. De plus, en vue d'intégrer la logique floue dans notre modèle ALM, il était nécessaire de choisir des variables que l'assureur possède ou qu'il peut obtenir facilement.

Nos variables d'entrée de la logique floue, désormais sélectionnées, nous pouvons entamer le processus de raisonnement flou.

5.1.1 La fuzzification

Nous avons sélectionné précédemment nos variables explicatives du comportement de rachat des assurés : l'écart des rendements, l'ancienneté du contrat et l'âge de l'assuré. Nous avons donc trouvé les variables d'entrée de notre module de logique floue. La variable de sortie, quant à elle, est le taux de rachat conjoncturel des assurés.

Lors de la fuzzification, il faut dans un premier temps déterminer les ensembles flous et l'univers du discours associés à chacune de nos variables d'entrée comme de sortie.

Chaque variable sélectionnée peut avoir plusieurs ensembles flous :

- Nous avons décidé de créer cinq ensembles flous pour **l'écart des rendements** afin de prendre totalement en considération les changements de comportements des assurés face à une petite variation des rendements. L'écart des rendements peut donc être fortement négatif, faiblement négatif, proche de zéro, faiblement positif ou fortement positif.
- **L'ancienneté du contrat** peut être faible, moyenne ou forte.
- L'assuré peut être un jeune adulte, un adulte ou un retraité en fonction de son **âge**. Quand nous parlons d'âge des assurés, les catégories « adultes » et « retraités » semblent naturelles. Mais nous avons voulu faire une différence au sein des adultes en créant la classe des jeunes adultes. Cette différence vient du fait que les adultes peuvent adopter un comportement bien singulier face aux rachats de par leur nature plus réactive que les jeunes adultes qui portent moins d'intérêt à leur épargne. De plus, nous souhaitons faire une différence entre adultes et jeunes adultes car leur niveau d'épargne n'étant généralement pas identique, ils adoptent un comportement différent face aux rachats.
- **Le taux de rachat** est divisé en cinq catégories : les rachats très négatifs, négatifs, proches de zéro, positifs ou très positifs. Ces cinq catégories nous permettent d'adopter des conclusions bien distinctes en fonction des hypothèses tout en restant près du raisonnement humain.

Les univers de discours sont très dépendants des variables.

Pour déterminer l'univers du discours de l'écart des rendements, nous avons étudié les rendements servis d'une centaine de fonds euros sur les années 2011 et 2012. Prenant comme taux concurrent, la valeur la plus probable que les rendements puissent prendre (le mode) ; nous avons calculé l'écart minimal (taux servi le plus bas - taux concurrent) et maximal (taux servi le plus haut - taux concurrent) qu'il existe entre les taux servis et le taux concurrent. Les résultats observés sont regroupés dans le tableau suivant :

	2011	2012
Taux concurrent	3,72%	3,42%
Moyenne	3,37%	3,24%
Taux min	1,90%	2,00%
Taux max	4,05%	4,15%
Ecart min	-1,82%	-1,42%
Ecart max	0,33%	0,73%

Source : www.francetransactions.com/assurance-vie

En ajoutant une marge de prudence quant à l'évolution possible des conditions des marchés, nous avons retenu un univers du discours allant de -2% à 2% d'écart. Cependant, de par l'utilisation d'une méthode stochastique pour calculer les BE, notre modèle ALM impose une forte

volatilité dans les cas extrêmes. En effet, nous remarquons des écarts de rendements pouvant être supérieurs à 2% et inférieurs à -2%. En vue d'intégrer la logique floue au modèle ALM, nous avons alors établi l'univers du discours pour les écarts de rendements : -6% à 4% d'écart.

Pour l'âge des assurés, nous faisons l'hypothèse que seul un individu majeur peut souscrire un contrat d'assurance vie en euro. L'univers du discours pour l'âge des assurés est donc l'ensemble des individus âgés de 18 à 100 ans.

L'ancienneté du contrat peut être infinie puis que dans les contrats d'assurance vie en euro, il n'y a pas de clause de fin de contrat. Cependant, nous faisons l'hypothèse que l'ancienneté maximale d'un contrat est de 40 ans. En effet, après 40 ans d'ancienneté, nous dirons que soit l'individu a racheté son contrat, soit il est décédé. Dans ce cas, l'univers du discours pour l'ancienneté du contrat est de 0 à 40 ans.

Pour finir, il nous reste à déterminer l'univers du discours de notre variable de sortie, le taux de rachat. Nous avons convenu d'un univers de discours de -5% à 20% de rachats conjoncturels.

Pour résumer, voici l'ensemble de nos variables linguistiques :

Variables	Entrées			Sortie
	<i>Ecart de rendements</i>	<i>Ancienneté du contrat</i>	<i>Age de l'assuré</i>	<i>Taux de rachats</i>
Ensembles flous	Fortement négatif Faiblement négatif Proche de 0 Faiblement positif Fortement positif	Faible Moyenne Importante	Jeune-Adulte Adulte Retraité	Très négatif Négatif Proche de 0 Positif Très positif
Univers du discours	[-6%; 4%]	[0 ans; 40 ans]	[18 ans; 100 ans]	[-5%; 20%]

FIGURE 5.1 – Les variables linguistiques

Nos variables linguistiques correctement définies, l'étape suivante consiste à trouver les fonctions d'appartenance de chaque sous-ensembles flous.

A l'aide de jugements d'experts, nous avons opté pour les fonctions d'appartenance suivantes.

Les variables d'entrée

Ecart des rendements

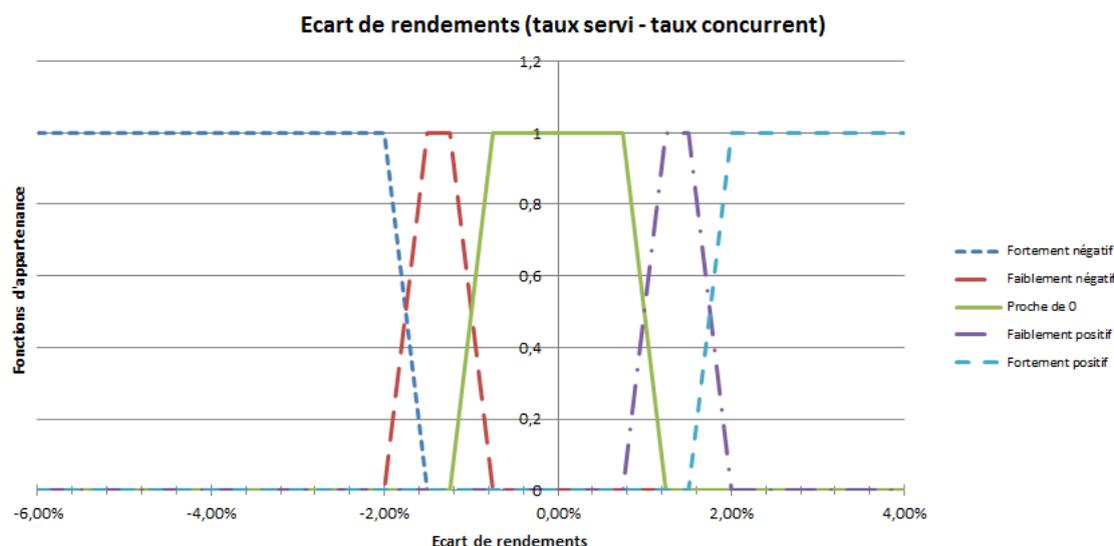


FIGURE 5.2 – Fonctions d'appartenance relatives à l'écart des rendements

Comme énoncé précédemment, nous avons décidé de créer cinq sous ensembles flous pour la variable écart de rendements. D'après les rendements des contrats en euros constatés lors des années 2011 et 2012, nous pouvons dire avec prudence que l'essentiel des écarts des rendements se situent entre -2% et 2% . Si l'écart dépasse ces bornes, il pourra alors être considéré comme « Fortement négatif » ou « Fortement positif ». C'est pourquoi un écart de rendements est 100% « Fortement négatif » s'il est inférieur à -2% et 100% « Fortement positif » s'il est supérieur à 2% .

Pour définir les autres fonctions d'appartenance, nous nous sommes posés la question suivante : A partir de quel écart de rendements, entre le taux servi par notre assureur et celui servi par la concurrence, nous envisagerions la possibilité de racheter notre contrat ? En répondant à cette question nous pouvons alors déterminer si l'écart des rendements est « Faiblement négatif », « Proche de 0 » ou « Faiblement positif ».

Les individus commencent à s'intéresser à un autre contrat s'il leur propose au moins 1% de rendements en plus de celui servi par leur assureur. Dans ce cas-là, ils voient comme une éventualité le rachat de leur contrat. Avant 1% , ils seront plus perplexes et ne trouveront pas nécessaire de racheter leur contrat (gains possibles trop faibles et frais d'acquisition du nouveau contrat à prendre en compte). Pour mettre en avant ce changement d'attitude autour de 1% , nous avons décidé que si l'écart des rendements était de -1% , il serait alors considéré comme 50% « Proche de 0 » et 50% « Faiblement négatif »¹. Néanmoins, pour que le passage de l'ensemble « Proche de

1. Rappelons que l'écart de rendements est défini de la manière suivante : $\text{taux servi} - \text{taux concurrent}$. C'est pourquoi ici nous avons : $\text{Taux servi} = \text{Taux concurrent} - 1\%$ et nous parlons de l'ensemble « Faiblement négatif ».

0 » à « Faiblement négatif » soit graduel, la fonction d'appartenance pour l'écart de rendements « Faiblement négatif » commence à partir -0.75% d'écart.

Concernant la fonction d'appartenance pour l'écart de rendements « Faiblement positif » ; nous répondons à la même question mais dans la situation inverse. En effet, si le taux servi par notre assureur est 1% plus élevé que le taux concurrent, l'écart de rendements nous semblera alors 50% « Proche de 0 » et 50% « Faiblement positif ». Pour que le passage d'un ensemble à un autre soit lisse, nous imaginons que l'écart de rendements est « Faiblement positif » à partir de 0.75% .

Ancienneté du contrat

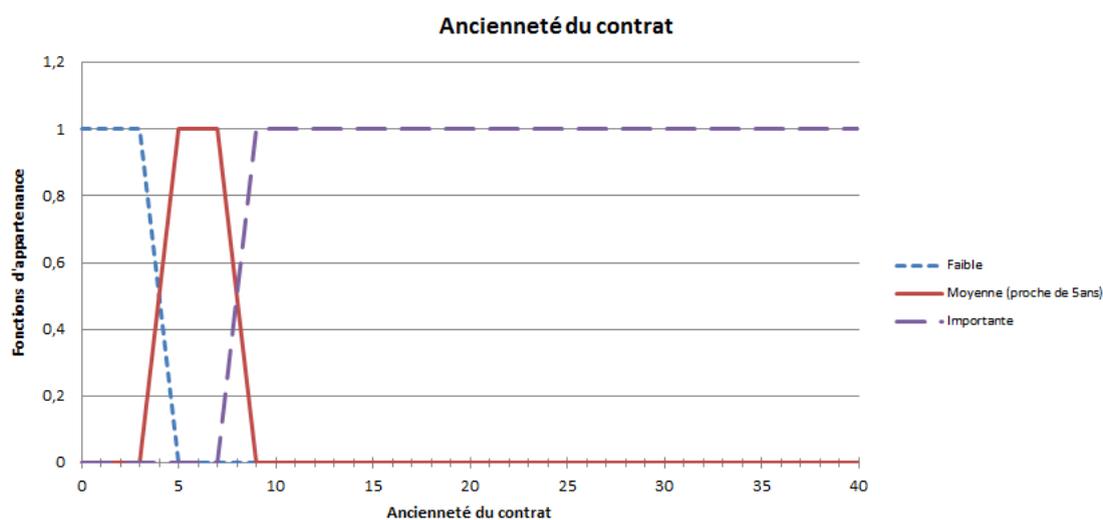


FIGURE 5.3 – Fonctions d'appartenance relatives à l'ancienneté du contrat

Les fonctions d'appartenance correspondantes à l'ancienneté du contrat ont été construites pour prendre en compte l'effet de la fiscalité sur le comportement des individus. L'objectif premier est donc de répondre à la question suivante : Sommes-nous plus ou moins sensibles à l'écart des rendements quand nous sommes défiscalisés ?

Comme expliqué précédemment, nous avons décidé de séparer notre univers du discours en trois classes : ancienneté du contrat faible, moyenne ou importante. Dans la réglementation assurantielle, il existe deux périodes d'abaissement de fiscalité pour les contrats d'assurance vie en euros : l'une après 5 ans et l'autre après 8 ans. Nos fonctions d'appartenance retranscrivent ce point puisqu'une ancienneté du contrat faible correspond à une personne n'ayant jamais eu d'abaissements de fiscalité ; une ancienneté du contrat moyenne correspond à un individu qui est proche de 5 ans ou plus ; tandis qu'une ancienneté du contrat importante correspond à un individu qui est proche de 8 ans ou plus.

Le choix des pentes des fonctions d'appartenance lors des transitions entre chaque ensemble flou (coefficient directeur de 0.5 ou -0.5) montre un passage rapide entre les ensembles. Prenons comme exemple, le passage d'ancienneté moyenne à forte. Lorsque l'ancienneté du contrat est

de 7 ans, nous la caractérisons encore d'ancienneté moyenne mais passé les 7 ans, elle rentre progressivement dans l'ensemble ancienneté forte, pour être caractérisée totalement d'ancienneté forte à 9 ans.

Age de l'assuré

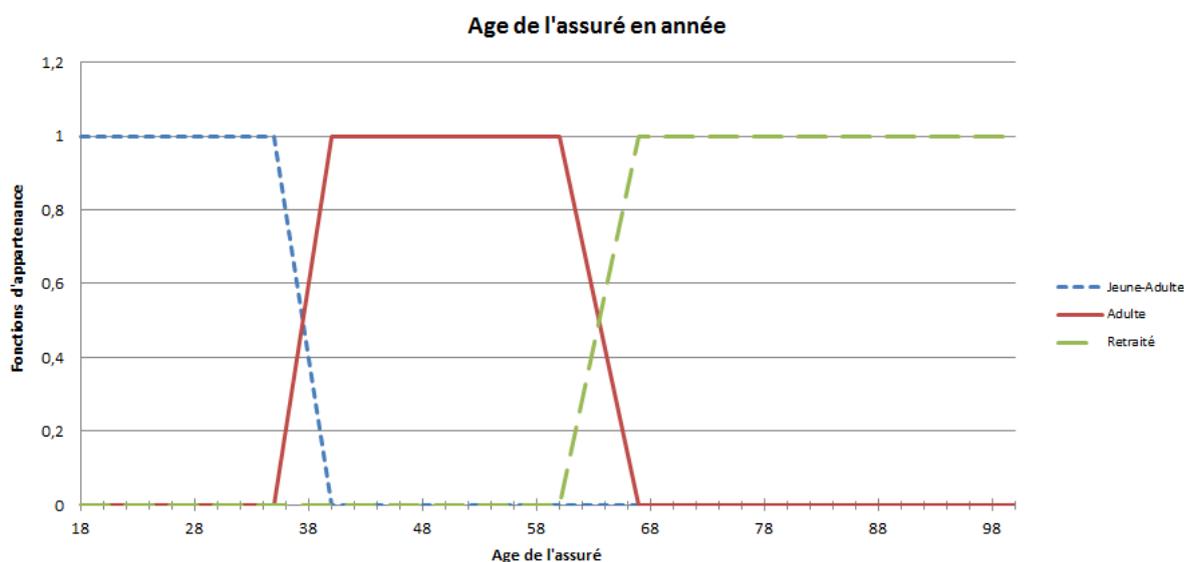


FIGURE 5.4 – Fonctions d'appartenance relatives à l'âge de l'assuré

L'importance ici était de savoir comment répartir les individus dans chacune des classes floues (jeunes adultes, adultes et retraité) en fonction de leur âge.

En Europe, l'âge légal du départ à la retraite s'étend de 60 à 66 ans et est de 62 ans pour la France. Les individus commencent donc à penser à la retraite dès 60 ans. Ces constats expliquent la fonction d'appartenance de l'ensemble flou « retraité » : à 60 ans nous sommes adultes à 100%, de 60 ans à 66 ans nous sommes de plus en plus considérés comme retraités et pour finir à partir de 67 ans nous sommes totalement retraités.

La différence entre les jeunes adultes et les adultes est leur expérience. Les adultes ont acquis des connaissances aux sujets des contrats d'assurances vie, des conditions des marchés et de la défiscalisation à laquelle ils ont droit. Les adultes sont donc plus soucieux de leur épargne et plus réactifs que les jeunes adultes. Par conséquent, ils sont plus sensibles aux rachats. Nous faisons l'hypothèse que les individus acquièrent cette expérience à partir d'environ 35 ans ; c'est pourquoi nous avons fait débuter notre fonction d'appartenance des adultes à partir de cet âge-là. A l'inverse, les individus ayant un âge inférieur à 35 ans sont considérés comme totalement jeunes adultes (à 100%).

La variable de sortie

Taux de rachat

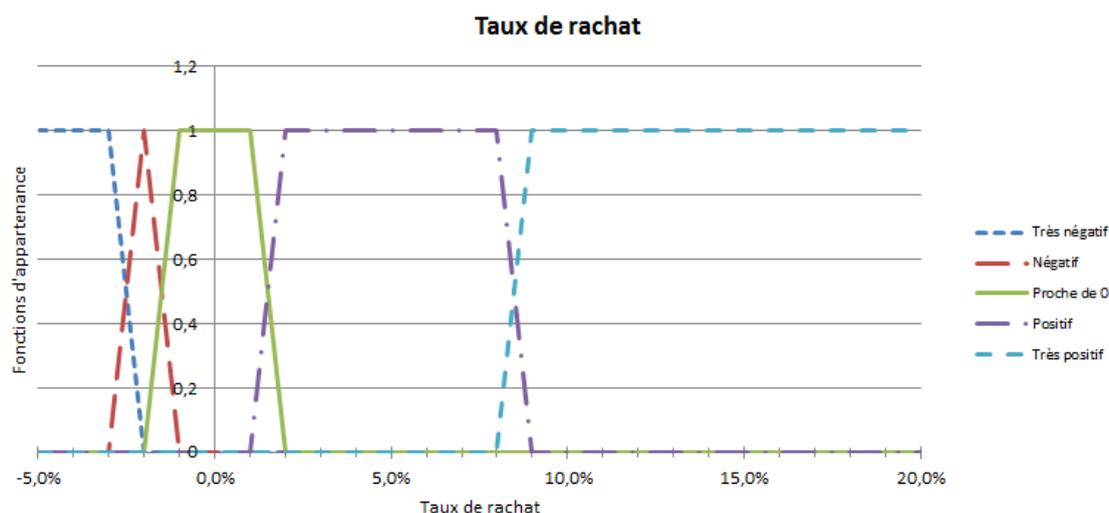


FIGURE 5.5 – Fonctions d'appartenance relatives aux taux de rachat

Les taux de rachat peuvent être considérés comme 100% proche de zéro s'ils restent dans un intervalle de $[-1\%, 1\%]$. Nous avons fait l'hypothèse qu'ils commencent à être très positifs à partir de 8 – 9% et nous en avons déduit les fonctions d'appartenance des ensembles « Proche de 0 », « Positif » et « Très positif ». Nous procédons de la même manière concernant les fonctions d'appartenance pour les ensembles « Négatif » et « Très négatif », en supposant que les taux de rachat sont 100% très négatifs à partir de -3% .

Attention, par abus de langage lorsque nous dirons qu'un individu adopte un taux de rachat de 5%. Il faut comprendre que dans un groupe de personnes ayant les mêmes caractéristiques que cet individu (écart de rendements, âge et ancienneté du contrat), 5% de la PM globale du groupe a été rachetée.

Remarque : Les fonctions d'appartenance nous donnent le degré d'appartenance à un ensemble flou pour une valeur donnée. Dans la littérature, il n'y a pas de contraintes quant à leurs formes. Cependant, nous nous en sommes imposés deux pour simplifier la compréhension des concepts et les étapes futures :

- Nous avons choisi de pouvoir déterminer, à chaque instant, 100% de l'appartenance de l'individu. Par exemple, un individu ne peut pas seulement être 50% adulte et 10% retraité.
- Nous avons choisi uniquement des fonctions d'appartenance linéaires par morceaux. Ce choix est une simplification en vue de la défuzzification future. En effet, lors de cette dernière, il est question de calculer des centres de gravité ou des moyennes de maxima et ce, grâce à des calculs d'intégrales. Les fonctions d'appartenance linéaires par morceaux permettent alors de simplifier ces calculs en utilisant des sommes pondérées. Nous reviendrons

sur ce point lors de la défuzzification.

Toutes les étapes de la fuzzification étant désormais réalisées, nous sommes dans l'univers du flou et nous pouvons passer à l'inférence floue.

5.1.2 L'inférence floue

Nous avons pu voir dans le chapitre précédent que l'inférence floue se décompose en quatre étapes bien distinctes. Au sein de cette partie, nous effectuons ces quatre étapes pour l'application aux rachats conjoncturels. Il est alors nécessaire d'expliquer chaque choix ou hypothèse faite au cours de l'inférence floue.

1) La matrice de décisions

A première vue, l'individu agit de manière rationnelle. Nous supposons qu'il rachète son épargne pour profiter des opportunités du marché. Cependant, cela ne se révèle pas totalement vrai : il y a une part d'inexpliqué dans son comportement. En effet, un individu peut racheter une partie ou la totalité de son épargne même si les conditions de marché lui sont favorables. De plus, il n'agit pas nécessairement de manière cartésienne car il n'existe pas d'indicateur précis pour lui révéler à quel moment racheter. Le comportement des individus est donc flou. Il est alors nécessaire d'introduire notre matrice de décisions pour définir un cadre général quant aux réactions des individus.

Pour un individu, la matrice de décisions joue un rôle important. En effet, un individu est défini dans notre logique floue par trois critères : l'écart de rendements, l'ancienneté de son contrat et son âge. Ces critères permettent de savoir à quels ensembles flous des variables d'entrée l'individu appartient ainsi que le degré d'appartenance à chacun de ces ensembles. Nous pouvons alors voir ces ensembles flous comme des groupes de personnes auxquels l'individu appartiendrait. L'individu doit appartenir à trois groupes (un groupe pour l'écart des rendements, un pour l'ancienneté du contrat et le dernier en fonction de son âge) pour que nous puissions lui attribuer une sensibilité aux rachats, *i.e.* un groupe de rachat. Notre matrice de décisions est alors construite de manière à ce que chaque groupe d'entrée influence conjointement le taux de rachat. L'opérateur flou retenu pour relier chaque prémisse est donc l'intersection : « ET ». L'objectif de la matrice de décision est alors d'associer à chaque combinaison de trois groupes d'entrée, un groupe de sortie correspondant à une décision que prend l'individu concernant le rachat.

En résumé :

Pour déclencher une règle de décisions via la matrice, l'individu doit appartenir à une combinaison de trois groupes. A chaque combinaison est alors attribué un groupe de rachat correspondant à sa décision concernant le rachat. Parmi ces groupes de rachats, nous distinguons : taux de rachat « Très positif », « Positif », « Proche de 0 », « Négatif » et « Très négatif ».

La matrice de décisions que nous avons établie est la suivante :

Taux de rachat	Ancienneté du contrat & Age de l'assuré								
	Faible			Moyenne			Importante		
Ecart de rendements	Jeune-Adulte	Adulte	Retraité	Jeune-Adulte	Adulte	Retraité	Jeune-Adulte	Adulte	Retraité
Fortement négatif	Proche de 0	Positif	Positif	Positif	Positif	Positif	Positif	Très positif	Positif
Faiblement négatif	Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0	Positif	Proche de 0	Proche de 0	Positif	Proche de 0
Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0
Faiblement positif	Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0	Négatif	Proche de 0	Proche de 0	Négatif	Proche de 0
Fortement positif	Proche de 0	Négatif	Négatif	Négatif	Négatif	Négatif	Négatif	Très négatif	Négatif

FIGURE 5.6 – Matrice des règles de décisions pour les rachats conjoncturels

Prenons un exemple où l'individu a les caractéristiques suivantes : -2% d'écart de rendements, 45 ans et 8.5 ans d'ancienneté.

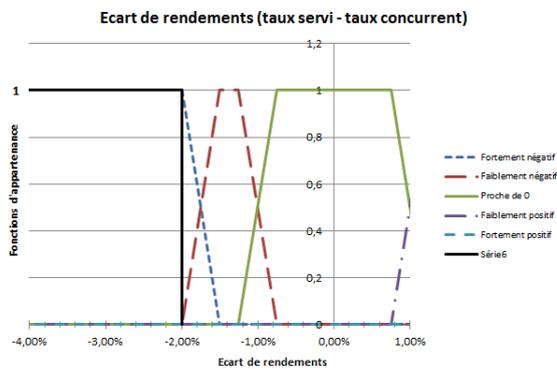


FIGURE 5.7 – Ecart de rendements

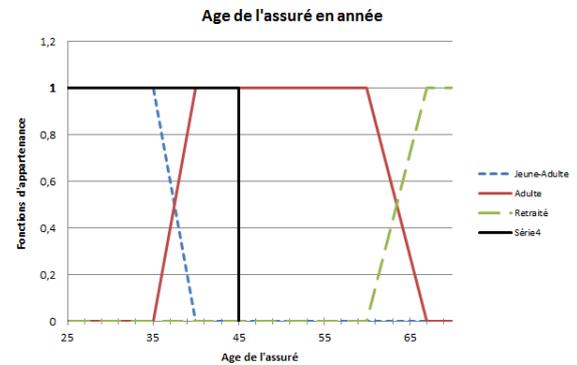


FIGURE 5.8 – Age

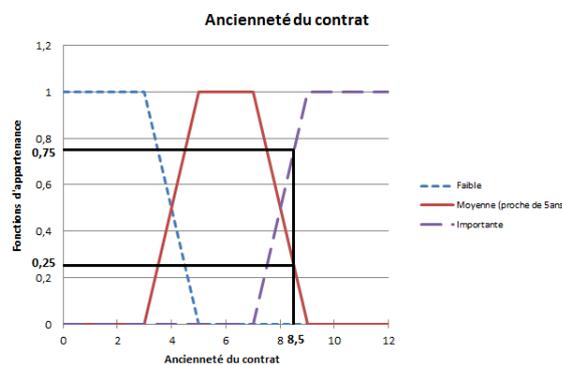


FIGURE 5.9 – Ancienneté du contrat

Il appartient alors aux groupes suivants : écart des rendements 100% fortement négatif, 100% adulte, ancienneté moyenne à 25% et ancienneté forte à 75%.

Ces caractéristiques déclenchent alors deux règles de décision :

- *R1* : SI l'écart des rendements est fortement négatif ET que l'individu est adulte ET que l'ancienneté de son contrat est moyenne ALORS le rachat est positif
- *R2* : SI l'écart des rendements est fortement négatif ET que l'individu est adulte ET que l'ancienneté de son contrat est forte ALORS le rachat est **très** positif

Dans la règle *R1* l'individu appartient bien à trois groupes : écart des rendements fortement négatif, adulte et ancienneté du contrat moyenne. Grâce à la matrice de décisions, c'est parce qu'il appartient à ces trois groupes que nous pouvons lui attribuer une sensibilité aux rachats (un groupe de rachat) : taux de rachat « Positif ».

La matrice de décision joue donc un rôle primordial quant à la modélisation du taux de rachats conjoncturels. Elle est calibrée grâce à des jugements d'experts. Cependant, de par son caractère en partie subjectif, une attention particulière doit être portée à l'argumentaire et à la justification des règles proposées. Il faut comprendre pourquoi les assurés rachètent leur contrat et émettre des hypothèses.

Afin d'être les plus méthodiques possible, nous allons analyser la sensibilité des individus aux rachats en les regroupant en fonction de leur âge.

Intéressons-nous tout d'abord aux **jeunes adultes**.

- Les jeunes adultes avec une ancienneté faible

Ils sont caractérisés par un encours faible et une faible connaissance du marché de l'assurance vie. Ils ne sont donc pas réactifs et ne s'intéressent pas nécessairement à leur épargne. Ils préfèrent investir dans des Livret A et des PEL. Qui plus est en tant que jeunes adultes, ils ne sont pas dans une logique de transmission de patrimoine mais dans une logique de prévention (ils ne cherchent pas à faire du profit ou des plus-values mais à mettre de l'argent de côté). Par conséquent, ils seront peu sensibles aux spreads de taux qui peuvent exister entre le taux servi et le taux concurrent : le rachat est donc « Proche de 0 » quel que soit l'écart des rendements.

- Les jeunes adultes avec une ancienneté moyenne

Leur encours est toujours faible car l'ancienneté n'est que moyenne. Cependant, ils ont une meilleure connaissance du marché et ils ont passé la première étape de fiscalité des 5 ans. Par conséquent, si les écarts de rendements sont minimales (« Proches de 0 », « Faiblement négatifs » ou « Faiblement positifs »), ils ne seront pas sensibles aux rachats : taux de rachat « Proche de 0 ». En revanche, si les écarts de rendements sont très importants, alors ils prendront peut-être la décision de racheter. Avec un écart de rendements « Fortement négatif », ils auront un taux de rachats « Positif ». Tandis qu'avec un écart des rendements « Fortement positif », leur taux de rachats sera « Négatif ».

– Les jeunes adultes avec une ancienneté importante

De par leur ancienneté importante nous pouvons nous demander s'ils sont suffisamment murs et s'ils ont un encours assez important pour réagir de manière plus vive que précédemment. Nous faisons ici l'hypothèse que seul le poids de l'encours impacte la sensibilité aux rachats des jeunes adultes. Ils réagissent certes, mais faiblement (les rachats sont seulement positifs ou négatifs) car leur encours est toujours faible. Malgré la fiscalité avantageuse, ils restent dans une optique de capitalisation à long terme et ne sont pas sensibles aux rachats si les écarts des rendements sont faibles. Si les écarts de rendements sont « Proches de 0 », « Faiblement négatifs » ou « Faiblement positifs », ils auront donc toujours un taux de rachat « Proche de 0 ». Cependant, si les écarts des rendements se creusent fortement, ils prendront la décision de racheter leur contrat ou au contraire resteront persuadés de ne pas le faire. Les rachats deviendront alors « Positifs » ou « Négatifs ».

Notons que nous testerons néanmoins dans la partie réservée aux sensibilités, l'hypothèse que l'information et la connaissance jouent un rôle plus important sur la réactivité des jeunes adultes. Ils seront donc très réactifs.

Dans un second temps, regardons le comportement des **adultes** face aux rachats conjoncturels.

– Les adultes avec une ancienneté faible

Les adultes sont dans une logique de fructification de leur épargne en vue de leur retraite. Ce sont donc les individus les plus réactifs aux spreads des taux. Cependant, de par leur faible ancienneté, ils n'auront pas nécessairement intérêt à racheter leur contrat car ils doivent tenir compte des frais d'acquisition du nouveau contrat et des pénalités possibles au titre du rachat. Par conséquent, si les écarts de taux sont faibles (« Proches de 0 », « Faiblement négatifs » ou « Faiblement positifs »), les adultes préféreront ne pas racheter leur épargne : taux de rachat « Proche de 0 ».

Néanmoins, si le taux servi est très inférieur au taux proposé par la concurrence, les adultes auront tendance à racheter de façon positive mais jamais de manière très positive car ayant une ancienneté faible, certains penseront à une mauvaise passe pour l'assureur ou resteront toujours retissant à l'idée de payer de nouveaux frais d'acquisition ou des pénalités de rachats. Si l'écart des rendements est « Fortement négatif », ils auront un taux de rachats « Positif ». A l'inverse, si l'écart des rendements est « Fortement positif », ils auront un taux de rachats « Négatif ».

– Les adultes avec une ancienneté moyenne

Les adultes possèdent depuis quelque temps déjà leur contrat et pensent à faire fructifier leur épargne. Ils vont être sensibles aux écarts de taux pour profiter des opportunités que le marché offre. Cependant, de par les pénalités qui pèsent encore sur les rachats et du fait qu'ils n'ont pas dépassé la défiscalisation des 8 ans, les taux de rachats ne tomberont jamais dans l'excès et par conséquent, ne seront jamais « Très positifs » ou « Très négatifs ». Si l'écart des rendements est « Fortement négatif » ou « Faiblement négatif », les rachats

seront donc « Positifs ».

A l'inverse, si l'écart des rendements est « Fortement positif » ou « Faiblement positif », les rachats seront « Négatifs ». Signalons tout de même que, quel que soit leur âge ou leur ancienneté, si le spread de taux est « Proche de 0 » alors les assurés n'auront toujours pas de raisons de racheter leur contrat car les frais dus aux changements de compagnie peuvent empêcher la rentabilité du transfert.

– Les adultes avec une ancienneté importante

Les adultes avec une ancienneté importante sont les plus réactifs de tous les assurés car ils ont un encours important et veulent s'assurer une bonne retraite. De plus, de par leur ancienneté, ils ne sont plus soumis à des pénalités de rachats et sont défiscalisés sur les plus-values. Nous pouvons alors supposer qu'ils ne seront pas retissant à payer de nouveaux frais d'acquisition. De plus, ils suivent l'évolution des marchés de l'assurance-vie avec intérêt et agissent en conséquence.

Pour finir, intéressons-nous aux **retraités**.

– Les retraités avec une ancienneté faible

Les retraités sont moins réactifs que les adultes mais plus réactifs que les jeunes adultes car ils sont dans une logique de transmission de leur patrimoine. Comme leur ancienneté est faible, si les spreads de taux sont faibles ou proche de 0, ils ne sont pas propices à racheter leur épargne pour les mêmes raisons que les adultes (coûts des nouveaux frais d'acquisition et pénalités possibles dues aux rachats). Si les écarts de rendements sont « Proches de 0 », « Faiblement négatifs » ou « Faiblement positifs », ils auront donc un taux de rachat « Proche de 0 ». Cependant, de par leur âge leur épargne est importante voir même très importante, c'est pourquoi lorsque l'écart des taux est très important, ils restent sensibles aux rachats : « Positif » si l'écart est « Fortement négatif » et « Négatif » si l'écart est « Fortement positif ».

– Les retraités avec une ancienneté moyenne

Nous faisons l'hypothèse que le comportement des retraités reste le même que son ancienneté soit faible ou moyenne. Ils ne sont pas plus réactifs si leur ancienneté est plus importante et n'ont toujours pas dépassé les 8 ans de la défiscalisation.

– Les retraités avec une ancienneté importante

Les retraités qui possèdent leur contrat depuis un nombre important d'années ne sont plus sensibles à l'écart des taux. Ils sont dans une logique de transmission de leur patrimoine et ne sont plus fiscalisés sur les plus-values réalisées. Ils ne se soucient donc plus réellement de leur assurance vie, savent qu'ils en ont une et que leur succession est assurée. C'est pourquoi, nous avons fait l'hypothèse que si les écarts des rendements sont vraiment très importants alors ils agiront de façon modérée sinon leur taux de rachat restera proche de 0. Remarquons finalement, que quel que soit l'ancienneté des retraités, leur comportement

face aux rachats reste inchangé.

A travers notre matrice de décision, nous connaissons désormais l'ensemble des règles floues. Nous pouvons désormais attribuer à chaque individu une sensibilité au rachat. Nous pouvons alors passer à la suite de l'inférence floue : l'activation.

2) L'activation

Comme nous l'avons vu précédemment, les trois critères qui caractérisent l'individu sont l'écart des rendements, l'ancienneté du contrat et l'âge de l'assuré. Ces critères permettent à l'individu d'appartenir à une combinaison de trois groupes : l'un caractérisant l'écart des rendements, l'autre l'ancienneté du contrat et le dernier l'âge.

Ces trois groupes forment la proposition de la règle floue qui permettra d'attribuer à notre individu un groupe de rachat en fonction de sa sensibilité aux rachats. L'avantage de la logique floue est qu'il est possible d'appartenir à un ensemble ou à un groupe que partiellement. L'individu peut donc appartenir à un groupe selon un certain degré d'appartenance. Nous dirons par exemple, que l'individu est adulte à 70% ou qu'il appartient au groupe (ensemble) adulte à seulement 70%. La question que nous pouvons nous poser est alors la suivante : si l'individu n'appartient pas totalement (à 100%) à l'un ou plusieurs des trois groupes, peut-on dire que la proposition est vraie à 100% ? Ici encore, nous mettons en avant un avantage de la logique floue, puisque même si la proposition n'est pas vraie à 100%, l'implication aura quand même lieu et nous pourrons trouver une conclusion à notre règle floue. L'activation est le moment où nous déterminons le niveau de vérité des propositions de chaque règle floue déclenchée par les données caractéristiques de l'individu. Le niveau de vérité de la proposition correspond alors au **degré d'activation** de la règle floue.

Comme vu dans le chapitre précédant, si les prémisses de l'implication d'une règle sont reliées par des « ET », alors pour trouver le degré d'activation de cette règle, nous prendrons le « MIN » des degrés d'appartenance de chaque ensemble flou déclenché par les données de l'individu. Pour plus de clarté, prenons un exemple numérique dans lequel nous possédons les trois critères associés à un individu et nous cherchons à déterminer les degrés d'activation de chaque règle déclenchée par ces critères.

Prenons comme données les paramètres suivants :

Paramètres	
Ecart des rendements	-1,700%
Ancienneté du contrat	3,5
Age de l'assuré	61

FIGURE 5.10 – Inputs numériques

Regardons les règles de décisions déclenchées par ces caractéristiques.

Remarque : De par la forme des fonctions d'appartenance de chaque ensemble flou, pour un jeu de données numériques nous devons prendre en compte jusqu'à $2^3 = 8$ règles de décisions.

Ecart des rendements		Ancienneté du contrat		Age de l'assuré	
Ensembles flous	Y_rdm	Ensembles flous	Y_ancien	Ensembles flous	Y_age
Fortement négatif	0,40	Faible	0,75	Jeune-Adulte	0,00
Faiblement négatif	0,60	Moyenne	0,25	Adulte	0,86
Proche de 0	0,00	Importante	0,00	Retraité	0,14
Faiblement positif	0,00				
Fortement positif	0,00				

FIGURE 5.11 – Ordonnées

Comment lire ce tableau ?

- L'écart des rendements est «fortement négatif» avec un degré de 40%
- L'écart des rendements est «faiblement négatif» avec un degré de 60%

L'individu appartient donc partiellement à 6 groupes : il appartient au groupe « écart des rendements fortement négatif » à 40%, à celui « écart des rendements faiblement négatif » à 60%, à celui « ancienneté moyenne » à 25% et « ancienneté faible » à 75% mais aussi aux « adultes » à 86% et aux « retraités » à 14%. Dans cet exemple, nous pouvons créer 8 combinaisons de trois groupes d'entrée. Il y a donc 8 règles de décisions à prendre en compte :

Règles	Ecart de rendements	ET	Ancienneté	ET	Age de l'assuré	ALORS	Rachat
R1	Fortement négatif	ET	Faible	ET	Adulte	ALORS	Positif
R2	Fortement négatif	ET	Moyenne	ET	Adulte	ALORS	Positif
R3	Fortement négatif	ET	Faible	ET	Retraité	ALORS	Positif
R4	Fortement négatif	ET	Moyenne	ET	Retraité	ALORS	Positif
R5	Faiblement négatif	ET	Faible	ET	Adulte	ALORS	Proche de 0
R6	Faiblement négatif	ET	Moyenne	ET	Adulte	ALORS	Positif
R7	Faiblement négatif	ET	Faible	ET	Retraité	ALORS	Proche de 0
R8	Faiblement négatif	ET	Moyenne	ET	Retraité	ALORS	Proche de 0

FIGURE 5.12 – Les 8 règles de décision

La première combinaison de trois groupes d'entrée (écart des rendements fortement négatif, ancienneté faible, adulte) correspond à la première règle de décisions : R1. D'après la matrice de décisions, dès qu'un individu appartient à cette combinaison de trois groupes, nous pouvons lui attribuer une attitude face aux rachats : « taux de rachat positif ». Cependant, nous avons remarqué que l'individu appartenait au groupe « écart des rendements fortement négatif » seulement à 40%, au groupe « ancienneté faible » à 75% et au groupe « adulte » à 86%. La proposition de R1 ne peut donc pas être vraie à 100%. L'activation consiste à dire qu'elle est vraie mais seulement à 40% = $MIN(40\%, 75\%, 86\%)$. Le degré d'activation de R1 est alors de 40%.

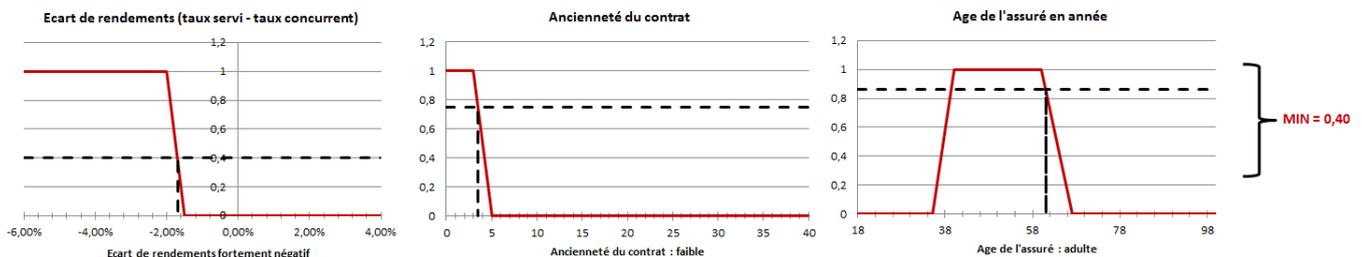


FIGURE 5.13 – Activation de la première règle de décisions (R1)

Il faut procéder de la même manière pour toutes les combinaisons de trois groupes possibles (i.e. pour toutes les propositions possibles) afin de trouver le degré d'activation de chaque règle floue.

Voici un tableau récapitulatif des degrés d'activation des 8 règles déclenchées par les données de l'individu :

Règles	Ecart de rendements	MIN	Ancienneté	MIN	Age de l'assuré	Degré d'activation	Rachat
R1	0,40	MIN	0,75	MIN	0,86	0,40	Positif
R2	0,40	MIN	0,25	MIN	0,86	0,25	Positif
R3	0,40	MIN	0,75	MIN	0,14	0,14	Positif
R4	0,40	MIN	0,25	MIN	0,14	0,14	Positif
R5	0,60	MIN	0,75	MIN	0,86	0,60	Proche de 0
R6	0,60	MIN	0,25	MIN	0,86	0,25	Positif
R7	0,60	MIN	0,75	MIN	0,14	0,14	Proche de 0
R8	0,60	MIN	0,25	MIN	0,14	0,14	Proche de 0

FIGURE 5.14 – Les degrés d'activation

3) L'implication

A ce stade du raisonnement flou, nous connaissons l'ensemble des règles activées grâce aux données de l'individu ainsi que leur degré d'activation. Il est temps désormais de connaître la conclusion de chaque règle de décision. Pour cela, nous devons évaluer les fonctions d'appartenance des conclusions de chaque règle de décision selon les deux méthodes proposées dans le chapitre précédent : la méthode de Larsen et celle de Mamdani. Ces deux méthodes nous aident à construire un ensemble flou de conclusion, dont nous sommes capables d'établir la fonction d'appartenance.

Rappelons la méthode d'implication proposée par **Larsen** :

$$\mu_{conclusion'_{R_i}}(y) = \mu_{R_i}(x_0) \times \mu_{conclusion_{R_i}}(y)$$

Comme $\mu_{R_1}(x_0) = 0.40$, la fonction d'appartenance de la conclusion pour la première règle de décision (R1) est de la forme suivante :

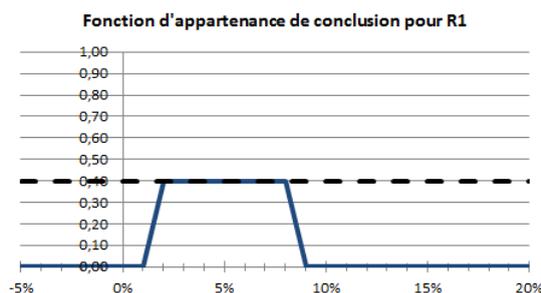


FIGURE 5.15 – Fonction d'appartenance de la conclusion de R1 selon Larsen

En procédant de la même manière pour toutes les règles de décisions, nous obtenons les fonctions d'appartenance de chaque conclusion.

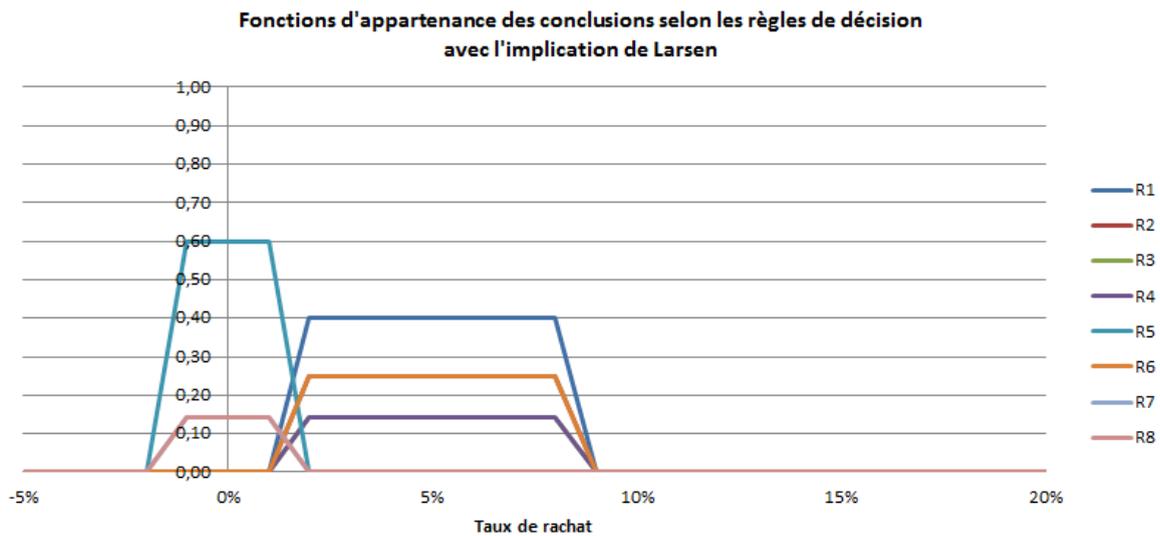


FIGURE 5.16 – Fonctions d'appartenance de conclusion de l'ensemble des règles de décision selon Larsen

Rappelons la méthode d'implication proposée par **Mamdani** :

$$\mu_{conclusion'_{R_i}}(y) = MIN_y(\mu_{R_i}(x_0), \mu_{conclusion_{R_i}}(y))$$

Comme $\mu_{R_1}(x_0) = 0.40$, la fonction d'appartenance de la conclusion pour la première règle de décision (R1) est de la forme suivante :

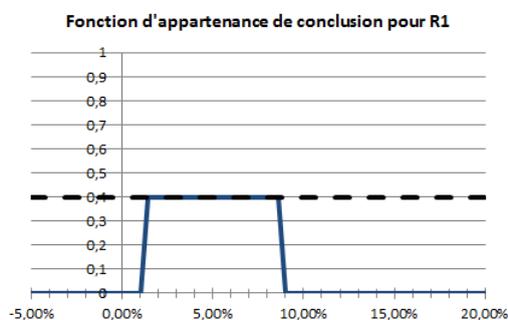


FIGURE 5.17 – Fonction d'appartenance de la conclusion de R1 selon Mamdani

En procédant de la même manière pour toutes les règles de décisions, nous obtenons les fonctions d'appartenance de chaque conclusion.

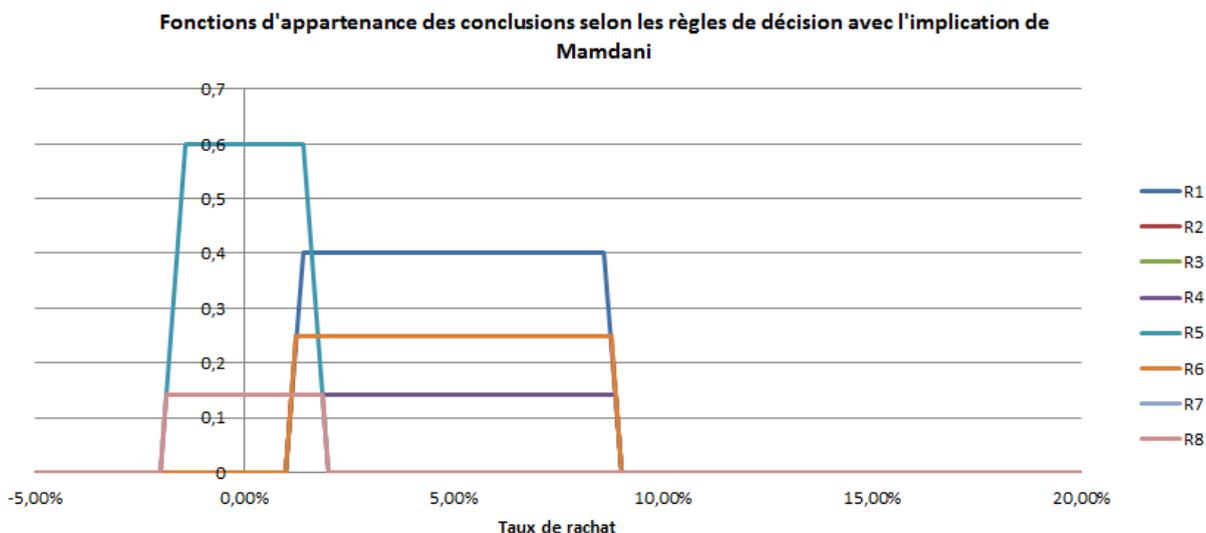


FIGURE 5.18 – Fonctions d'appartenance de conclusion de l'ensemble des règles de décision selon Mamdani

Avant toutes choses, lorsque vous regardez la fonction d'appartenance de conclusion d'une règle de décision ou celle de la conclusion finale, il faut imaginer un individu ayant le choix entre plusieurs groupes de rachat² qui caractériseront sa sensibilité aux rachats (*i.e.* leur taux de rachat). La fonction d'appartenance de conclusion est alors là pour déterminer à quel groupe et à quel degré maximal l'individu peut y appartenir.

Nous avons vu dans la partie sur l'activation que les propositions des règles floues n'étaient pas nécessairement vraies à 100% mais que le degré d'activation de chaque règle déterminait le niveau de vérité de la proposition. La matrice de décision associe à chaque proposition une conclusion. Cependant, si la proposition n'est pas vraie à 100%, la conclusion ne peut pas l'être à 100% non plus. Les deux méthodes d'implication permettent de respecter cette remarque. Les fonctions d'appartenance des conclusions proposées par ces deux méthodes ne seront jamais supérieures au degré d'activation des propositions.

Les différences entre l'implication de Larsen et celle de Mamdani se retranscrivent dans la « géométrie » des fonctions d'appartenance des conclusions. La méthode de Larsen consiste à prendre une réduction de la fonction d'appartenance du groupe de rachat auquel appartient l'individu. Le pourcentage de réduction est égal au degré d'activation de la règle. Tandis que la méthode de Mamdani tronque la fonction d'appartenance du groupe de rachat auquel appartient l'individu par le degré d'activation.

2. L'individu peut appartenir à plusieurs groupes de rachat : « Très négatif », « Négatif », « Proche de 0 », « Positif » ou « Très positif ».

Pour illustrer cette géométrie particulière, prenons l'exemple d'une maison dans un mauvais état. Nous supposons qu'il existe une fonction d'appartenance de conclusion par élément en mauvais état : le toit, les fenêtres et la porte. Avec la méthode de Larsen, nous réduisons les éléments en mauvais état proportionnellement au degré d'activation de la règle. Tandis qu'avec Mamdani, nous abattons une partie de chaque élément (troncature).

Supposons que :

- La règle avec pour conclusion « réduire le toit » a un degré d'activation de 0.5.
- La règle avec pour conclusion « réduire les fenêtres » a un degré d'activation de 0.2.
- La règle avec pour conclusion « réduire la porte » a un degré d'activation de 1³.

La maison est donc réparée de la manière suivante :

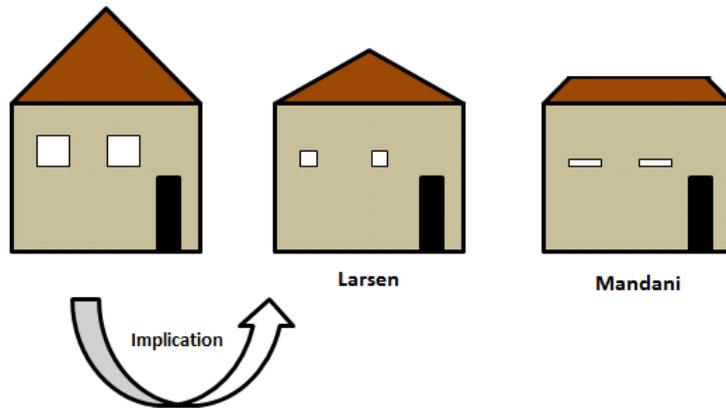


FIGURE 5.19 – Implication de Mamdani VS Implication de Larsen

Observons la géométrie des fonctions d'appartenance des conclusions en fonction des méthodes d'implication. Nous prenons comme exemple la règle R_1 . Rappelons que le degré d'activation est de 0.4 pour la règle R_1 .

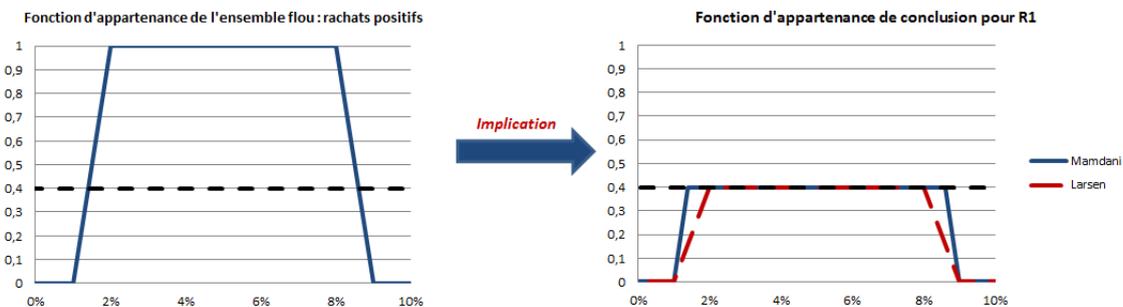


FIGURE 5.20 – Implication pour fonction d'appartenance avec « plateau »

Si les fonctions d'appartenance avaient été différentes, nous aurions eu les résultats suivants :

3. La porte restera donc inchangée

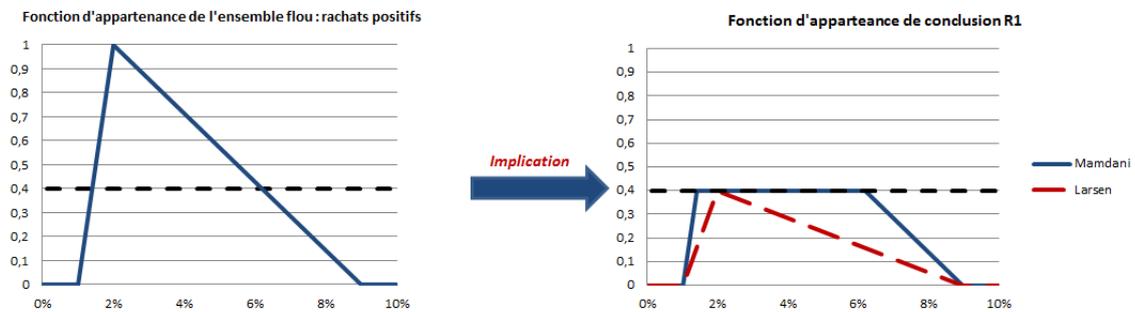


FIGURE 5.21 – Implication pour fonction d’appartenance sans « plateau »

En conclusion même si les deux méthodes sont très utilisées de par leur simplicité d’implémentation et restent très proches quant aux résultats qu’elles proposent, lors de l’intégration de la logique floue dans notre modèle ALM nous retiendrons uniquement l’implication de Mamdani.

Remarque : Nous remarquerons dans la partie suivante que malgré ces différences, les résultats obtenus par les deux méthodes d’implication sont semblables. C’est donc surtout la méthode de défuzzification qui impacte les résultats. Les différences soulevées sont donc négligeables aux vues des résultats.

4) L’agrégation

L’agrégation consiste finalement à rassembler l’ensemble des conclusions de chaque règle de décision. Pour cela, il est nécessaire d’imaginer que l’implication a attribué à notre individu un groupe de rachat pour chaque règle de décision mais qu’une seule d’entre-elles s’appliquera réellement. Nous allons donc choisir entre l’une « OU » l’autre des conclusions des règles floues. Or créer un nouvel ensemble flou à partir de plusieurs reliés par l’opérateur « OU », revient à prendre le maximum des fonctions d’appartenance des conclusions.

Nous obtenons donc :

- La fonction d'appartenance de la conclusion FINALE par la méthode de **Larsen** :

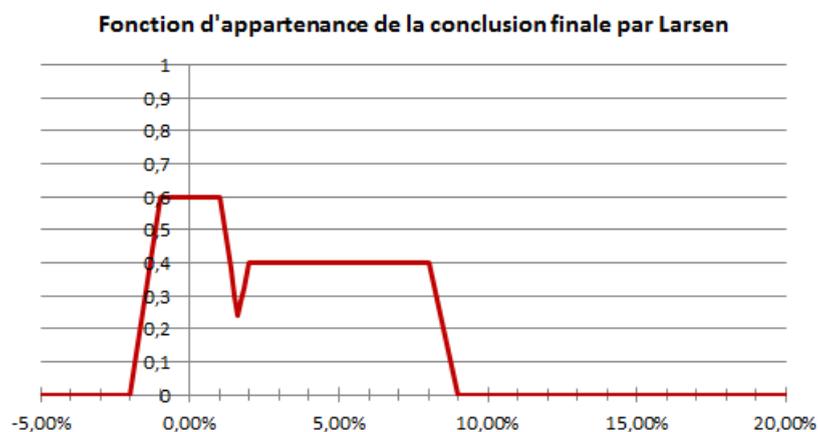


FIGURE 5.22 – Fonction d'appartenance de la conclusion FINALE par la méthode de Larsen

- La fonction d'appartenance de la conclusion FINALE par la méthode de **Mamdani** :

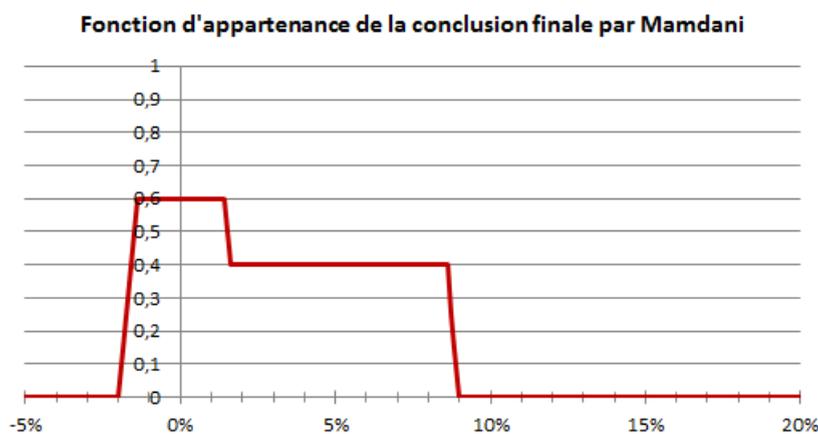


FIGURE 5.23 – Fonction d'appartenance de la conclusion FINALE par la méthode de Mamdani

Nous pouvons alors dire que l'individu a la possibilité d'appartenir à deux groupes de rachat « Proche de 0 » et « Positif ». Cependant, il ne sera jamais « Proche de 0 » à 100% mais au maximum à 60%.

Remarque : Attention, ces explications ne veulent pas dire que le groupe auquel appartient l'individu a 60% de chance d'être « Proche de 0 », mais que si le groupe adopte un taux de rachat de 0,3%, alors il sera considéré comme « Proche de 0 » à 60%.

Maintenant que nous avons les fonctions d'appartenance de la conclusion finale, nous devons revenir dans l'univers réel pour déterminer le taux de rachat de notre individu. Pour ce faire nous appliquons la défuzzification.

5.1.3 La défuzzification

La défuzzification est l'étape où l'on revient au monde réel. Nous utilisons la fonction d'appartenance de la conclusion finale pour déduire un taux de rachat réel. Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédant, il existe plusieurs méthodes de défuzzification.

Nous avons décidé d'implémenter dans notre module de logique floue, les deux méthodes les plus couramment utilisées : la méthode de la moyenne des maxima (MM : *Mean of Maxima*) et la méthode du centre de gravité (COG : *Center of Gravity*). Pour rappel, la défuzzification par moyenne des maxima prend pour valeur de sortie, la moyenne des abscisses des maxima. Tandis que la défuzzification par centre de gravité définit comme valeur de sortie, l'abscisse du centre de gravité de la surface sous la fonction d'appartenance de la conclusion finale.

Rappel des formules mathématiques :

- **Méthode du centre de gravité (COG) :**

$$x_G = \frac{\int_U x\mu(x) dx}{\int_U \mu(x) dx} = \frac{\sum_{i=0}^n x_i\mu(x_i)}{\sum_{i=0}^n \mu(x_i)}$$

où U est l'univers du discours de la variable de sortie.

- **Méthode de la moyenne des maxima (MM) :**

$$x_{MM} = \frac{\int_S x dx}{\int_S dx} = \frac{\sum_{i=0}^N x_i}{N} \text{ où } S = \{x_1 \in U \text{ tel que } \mu(x_1) = \text{SUP}_{x \in U}(\mu(x))\}$$

et N le nombre de point appartenant à S .

Le choix de la méthode a un fort impact sur les résultats. Il est donc nécessaire de cerner les avantages et les inconvénients de chacune d'entre-elles.

Regardons pour cela, les résultats de notre exemple en fonction de la méthode de défuzzification choisie. Supposons que nous nous intéressons à la fonction d'appartenance de la conclusion finale obtenue par l'implication de Mamdani.

En défuzzifiant par la méthode de **la moyenne des maxima**, nous obtenons :

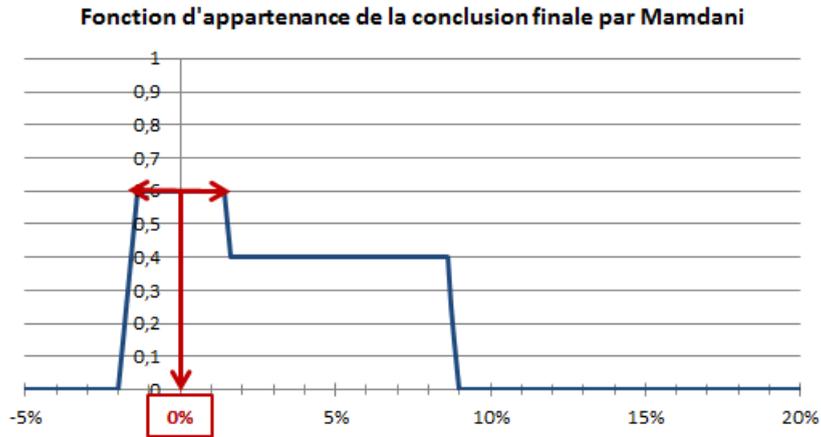


FIGURE 5.24 – Défuzzification par moyenne des maxima

La méthode de la moyenne des maxima a l'avantage d'être simple à implémenter. En effet, il suffit de relever le maximum de la fonction d'appartenance, de regarder les abscisses qui ont pour ordonnées ce maximum et d'en prendre la moyenne. Néanmoins, de forts inconvénients viennent contre balancer cette constatation. Nous remarquerons lors de sensibilités que les résultats obtenus à partir de cette méthode ne sont pas stables. En effet, la valeur du taux de rachat peut varier énormément face à des variations de données d'entrée très faible. Un taux de rachat peut, par exemple, passer de 10,5% à 0%, en ajoutant seulement un an d'ancienneté au contrat, toutes choses égales par ailleurs.

Mais ce qui nous a le plus gêné dans cette méthode est que nous n'avons pas l'impression d'utiliser l'ensemble de la fonction d'appartenance de conclusion finale. En choisissant de regarder seulement les maxima, nous faisons abstraction de toute une partie de la courbe. Nous pouvons donc imaginer, qu'une partie des intentions de l'individu n'est pas représentée. Nous forçons l'individu à n'appartenir qu'à un groupe de rachat alors qu'il a la possibilité d'appartenir à plusieurs. Dans notre exemple, finalement nous forçons notre individu à être dans le groupe « Proche de 0 », alors qu'il pourrait aussi bien appartenir au groupe « Positif ».

En défuzzifiant par la méthode du **centre de gravité**, nous obtenons :

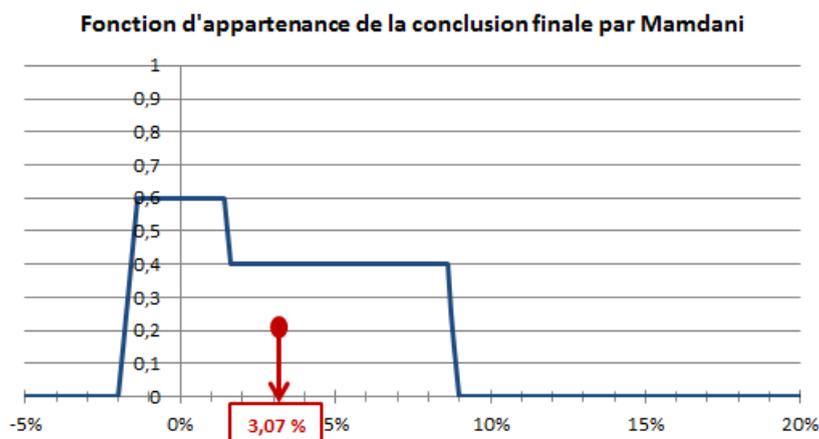


FIGURE 5.25 – Défuzzification par centre de gravité

La méthode du centre de gravité, à l'inverse de la méthode précédente, est stable par rapport aux variations des données d'entrée. De plus, elle permet de prendre en considération l'ensemble des données de sortie, comme si nous supposions que l'individu sélectionné via ses données d'âge, d'ancienneté de contrat et d'écart des rendements pouvait appartenir à plusieurs groupes. Dans notre exemple, l'individu peut appartenir à deux groupes. Finalement, c'est l'essence même du principe de la logique floue que de ne pas être dans un seul ensemble à la fois. C'est donc cette méthode que nous retiendrons. Soulignons tout de même que l'inconvénient de cette méthode est qu'elle nécessite de lourds calculs dus aux intégrales présentes dans la formule du centre de gravité. Il est cependant possible de contourner cette difficulté en utilisant des fonctions d'appartenance linéaires par morceaux. C'est pour cela que nous avons privilégié le choix de fonctions d'appartenance de formes triangulaires ou trapézoïdales.

Nous sommes revenu dans le monde réel.

Les taux de rachat préconisés par la logique floue dans notre exemple sont donc :

Méthode	Centre de gravité	Moyenne des maxima
Mamdani	3,07%	0,00%
Larsen	3,08%	0,00%

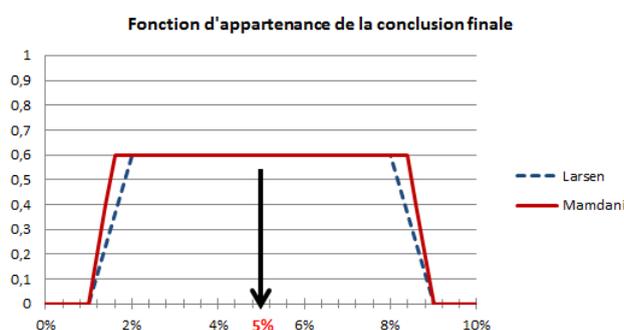
FIGURE 5.26 – Résultats

Remarque : Si les règles déclenchées par la matrice de décisions ont toutes la même conclusion (par exemple : rachats « Positifs ») et que la fonction d'appartenance de cette conclusion est symétrique alors la méthode de défuzzification ne change pas les résultats. Nous aurons alors les mêmes résultats quelle que soit la méthode d'implication et de défuzzification. Pour justifier cette remarque, prenons un exemple où l'individu a 51 ans (100% adulte), un contrat depuis 5 ans (ancienneté 100% moyenne) et l'écart de rendements observés est de -1.7% (40% fortement négatif et 60% faiblement négatif).

Deux règles sont déclenchées par ces caractéristiques :

Ecart de rendements	MIN	Ancienneté	MIN	Age de l'assuré	Degré d'activation	Règle
0,40	MIN	1	MIN	1,00	0,40	Positif
0,60	MIN	1	MIN	1,00	0,60	Positif

De par l'agrégation, la fonction d'appartenance de conclusion finale retenue sera alors la fonctions d'appartenance de l'ensemble flou « Positif » avec pour maximum 0.6 :



Que nous utilisons la méthode de la moyenne des maxima ou celle du centre de gravité nous obtenons un rachat de 5%. La symétrie de la fonction d'appartenance de sortie en est la cause.

Le raisonnement flou est donc un procédé long et complexe qui nécessite de nombreux choix et hypothèses. Au cours de notre cheminement jusqu'aux taux de rachat réel, nous avons décidé de ne garder pour l'intégration de la logique floue dans le modèle ALM, que les résultats obtenus à partir de l'implication de Mamdani et de la défuzzification par la méthode du centre de gravité.

5.2 Sensibilités des rachats conjoncturels

Après avoir expliqué en profondeur le raisonnement flou et modélisé les rachats conjoncturels, nous pouvons désormais analyser les résultats obtenus. Dans un premier temps nous étudierons les taux de rachats en fonction des différentes méthodes d'implication et de défuzzification énoncées dans la partie précédente. Dans un second temps, nous nous attarderons sur l'impact de la matrice de décisions.

5.2.1 Sensibilités aux différentes méthodes d'implication et de défuzzification

Dans le but d'analyser la sensibilité des résultats aux différentes méthodes, nous allons regarder les courbes de rachats obtenus selon les deux méthodes d'implication et de défuzzification.

Légende :

Noms	Méthode d'implication	Méthode de défuzzification
Mamdani_cog	Mamdani	Centre de gravité
Mamdani_mm	Mamdani	Moyenne des maxima
Larsen_cog	Larsen	Centre de gravité
Larsen_mm	Larsen	Moyenne des maxima

Remarque : La courbe « Rachat_acp_min » correspond à la courbe de rachat minimale proposée par l'ACP et « Rachat_acp_max » à la courbe maximale.

Nous présentons ici, trois profils d'individus bien distincts :

- Un jeune adulte avec une ancienneté moyenne : âgé de 35 ans et ancienneté du contrat de 7 ans

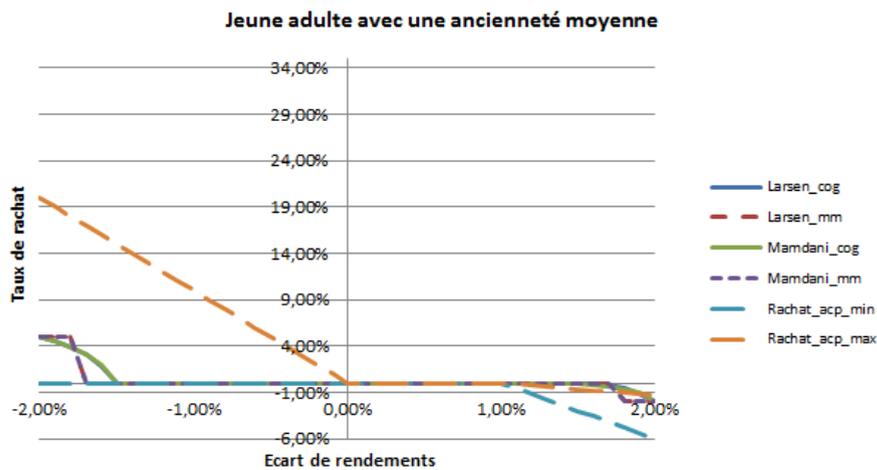


FIGURE 5.27 – Jeune adulte avec une ancienneté moyenne

- Un adulte avec une ancienneté importante : âgé de 45 ans et ancienneté du contrat de 9 ans

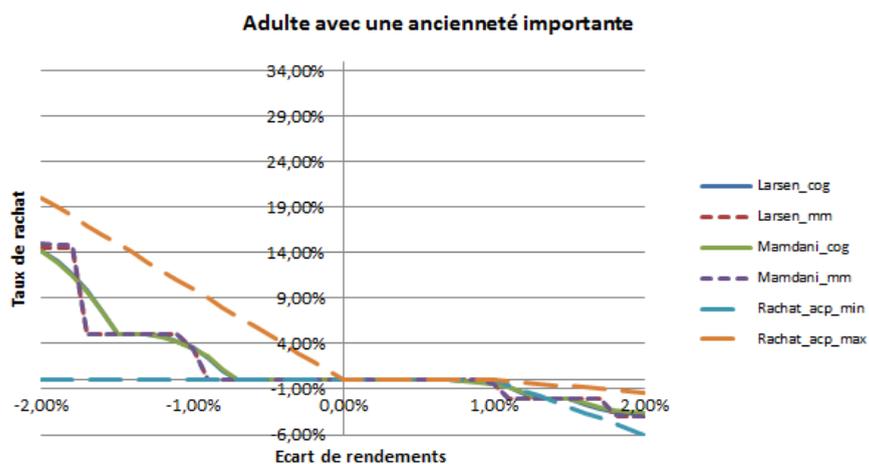


FIGURE 5.28 – Adulte avec une ancienneté importante

- Un retraité avec une ancienneté faible : âgé de 67 ans et ancienneté du contrat de 3 ans

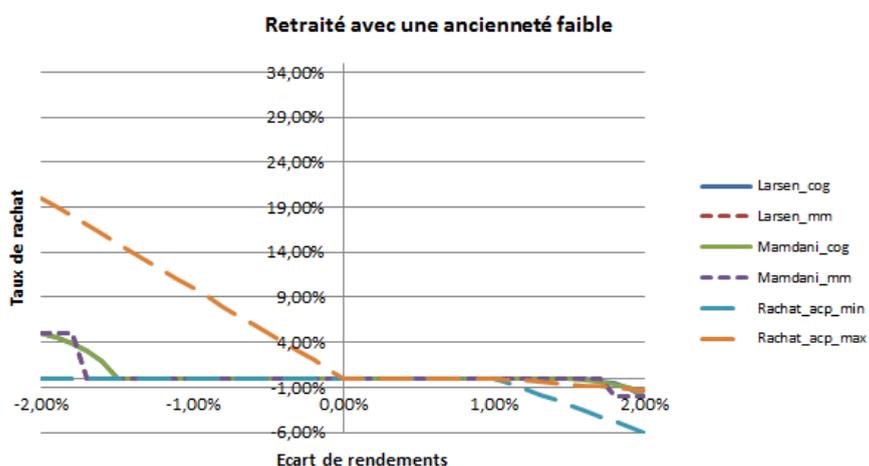


FIGURE 5.29 – Retraité avec une ancienneté faible

Remarque : Les graphes présentés ci-dessus ont pour abscisse un intervalle $[-2\%, 2\%]$ alors que l'univers du discours de l'écart des rendements est $[-6\%, 4\%]$. Nous avons fait ce choix pour mettre en avant les zones où les courbes varient. En effet, les résultats avant -2% sont les mêmes qu'en -2% et les résultats après 2% sont les mêmes qu'en 2% .

Plusieurs points importants sont à relever :

- Qu'importe les individus, nous remarquons que les courbes « Mamdani_cog » et « Larsen_cog » sont superposées ainsi que celles « Mamdani_mm » et « Larsen_mm ». Malgré les remarques faites dans la partie précédente pouvant différencier ces deux méthodes, elles

donnent des taux de rachats similaires après défuzzification. C'est donc la défuzzification qui impacte de manière plus marquée les résultats.

- Les courbes résultantes de la méthode de défuzzification du centre de gravité sont plus lisses que celles obtenues avec la moyenne des maxima (linéaires par morceaux). Les taux de rachats obtenus par le centre de gravité sont donc stables et progressifs. Prenons comme exemple l'adulte d'ancienneté importante. Avec la moyenne des maxima, si l'écart de rendements est de -1.80% , le taux de rachat est de 14.80% ; tandis que si l'écart de rendements est de -1.70% , le taux de rachat tombe à 5% . Avec la méthode du centre de gravité, si l'écart de rendements est de -1.80% , le taux de rachat est de 11.45% ; tandis que si l'écart de rendements est de -1.70% , le taux de rachat passe seulement à 9.72% . Avec la moyenne des maxima, une petite variation d'écart de rendements change donc totalement le taux de rachat, ce qui n'est pas le cas en utilisant le centre de gravité. Par conséquent, dans le cadre de la logique floue, le centre de gravité donne des résultats plus proches du raisonnement de l'être humain.
- Il est intéressant de remarquer que les courbes de rachat obtenues par la logique floue sont proches des bornes minimales et maximales proposées par l'ACP. En effet, elles sont comprises entre ces deux bornes, légèrement au-dessus ou en dessous.
- Tout changement d'allure des courbes est dû à une transition entre les ensembles flous d'écart des rendements qui implique un changement de conclusion dans la matrice de décisions. Les changements obtenus par la méthode du centre de gravité sont plus lisses que ceux obtenus par la moyenne des maxima.

Pour revenir sur ce dernier point nous étudierons l'impact de la matrice de décisions en fixant l'âge d'un individu et en analysant l'évolution des courbes de rachats en fonction de l'écart des rendements et l'ancienneté du contrat, dans la partie suivante.

Nous venons d'énoncer de nouvelles caractéristiques des méthodes d'implication et de défuzzification qui renforcent notre choix d'utiliser l'implication Mamdani et la méthode du centre de gravité lors de notre intégration de la logique floue dans le modèle ALM. Désormais nous ne travaillerons donc qu'avec ces deux méthodes.

5.2.2 Impact de la matrice de décisions

1) Analyses des résultats et cohérence avec la matrice de décisions

Afin d'étudier la cohérence des résultats avec les choix faits lors de la calibration de la matrice de décisions, nous allons regarder le comportement de l'individu le plus sensible aux rachats : l'adulte avec une ancienneté importante. La moyenne d'âge des assurés dans notre portefeuille étant de $46,5$ ans nous allons prendre un individu de 45 ans.

Voici le graphe représentant les taux de rachat de notre individu en fonction de l'écart des rendements et de l'ancienneté de son contrat :

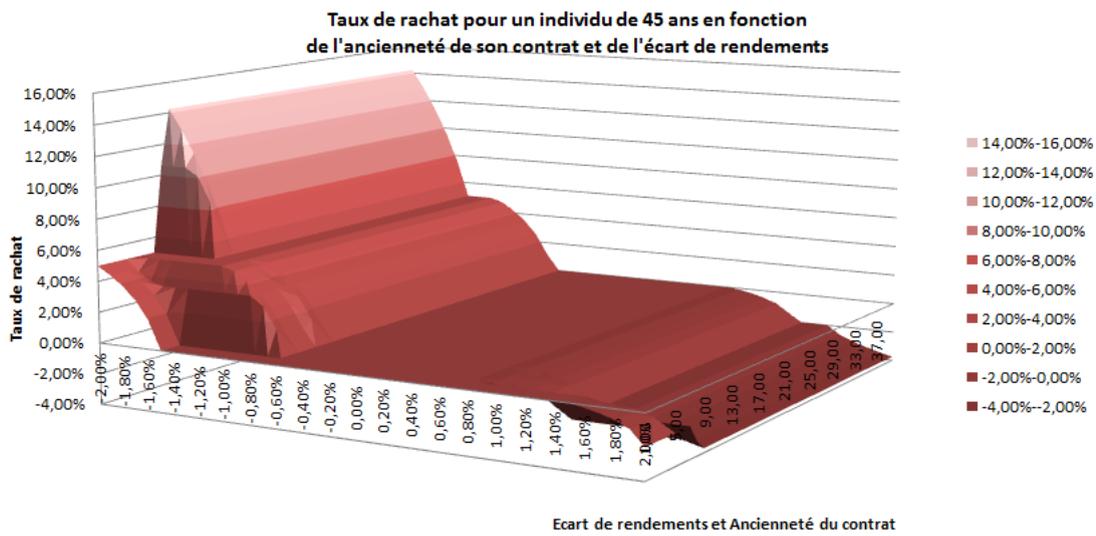


FIGURE 5.30 – Taux de rachat conjoncturels pour un adulte

Si nous fixons désormais l'ancienneté, voici une coupe des courbes de rachat :

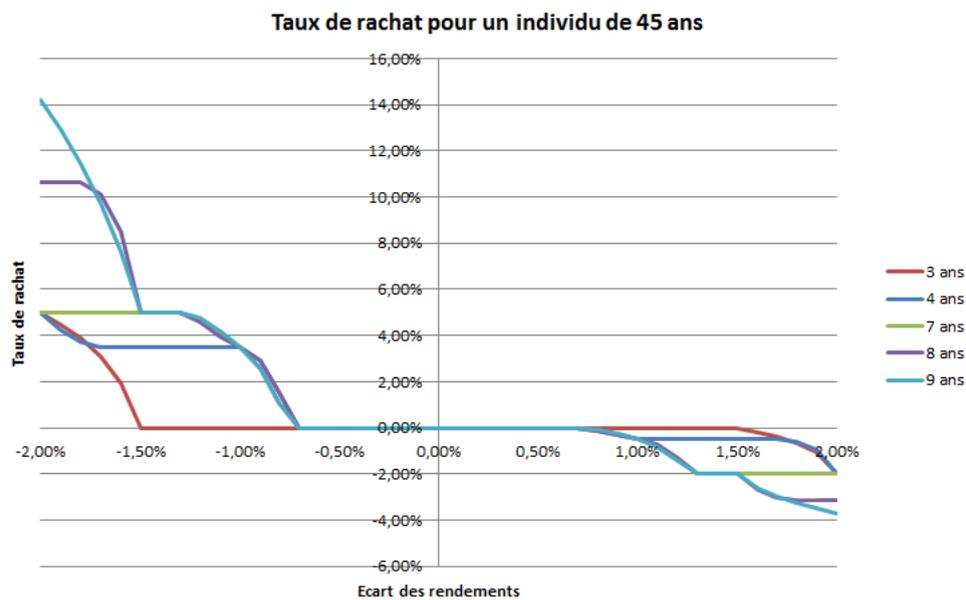


FIGURE 5.31 – Taux de rachat conjoncturels pour un adulte (2)

Afin de mieux comprendre ce graphe il est nécessaire de savoir à quel ensemble flou se rapporte une ancienneté de contrat :

Ancienneté du contrat	Ensemble(s) flou(s)
3 ans	100% faible
4 ans	50% faible & 50% moyenne
7 ans	100% moyenne
8 ans	50% moyenne & 50% forte
9 ans	100% importante

Plusieurs points importants sont à relever :

- Plus l’ancienneté du contrat est élevée, plus l’adulte est sensible aux rachats. En effet, si nous regardons les taux de rachat pour un écart de rendements de -2% , nous remarquons qu’ils sont croissants avec l’ancienneté du contrat. Ce constat est présent en tout point des courbes. La logique voulue lors de la construction de matrice de décisions qui était de rendre les adultes de plus en plus réactifs avec leur ancienneté de contrat est bien retranscrite dans ces résultats.
- Lorsque notre adulte est entre deux ensembles flous d’ancienneté du contrat, les taux de rachats sont encore cohérents. En effet, prenons par exemple une ancienneté du contrat de 4 ans, les taux de rachat augmentent par rapport à une ancienneté de 3 ans, sans pour autant atteindre ceux d’une ancienneté de 5 ans.

Les résultats obtenus sont donc cohérents avec les choix faits lors de la calibration de la matrice de décisions.

Remarque : Si nous regardons les taux de rachat d’un adulte avec une ancienneté de contrat de 5 ans et d’un autre adulte avec une ancienneté de contrat de 7 ans, ils seront identiques car c’est deux adultes ont une ancienneté 100% moyenne.

Regardons les taux de rachats pour un retraité, quelle que soit son ancienneté.

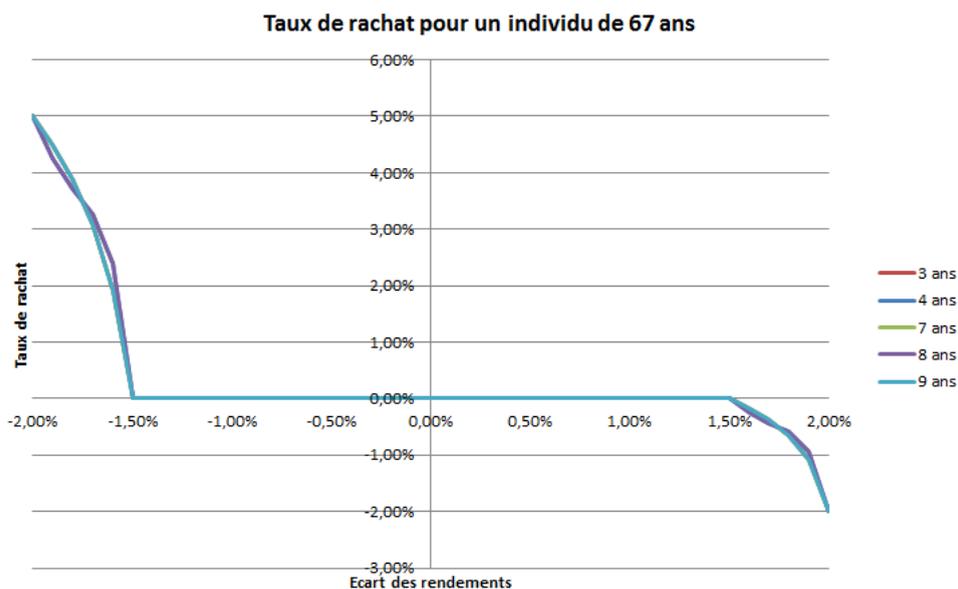
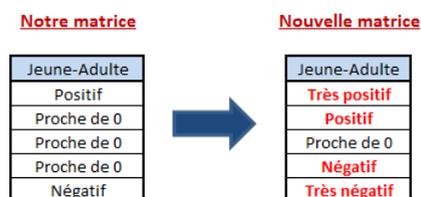


FIGURE 5.32 – Taux de rachat conjoncturels pour un retraité

L'ensemble des courbes se superposent. Ce constat était prévisible puisque d'après la matrice de décisions, quelle que soit l'ancienneté du contrat d'un retraité, il réagira toujours de la même manière. Le modèle de logique floue retranscrit donc convenablement les choix faits lors de la création de la matrice de décisions et ce même si l'individu est entre deux ensembles d'ancienneté du contrat.

2) Sensibilités aux changements de la matrice de décisions

Lors de la création de la matrice de décision, nous avons fait l'hypothèse suivante : pour les jeunes adultes d'ancienneté importante, la valeur de l'encours prime sur l'information et les connaissances qu'ils auraient pu acquérir de par leur ancienneté. Nous testons ici l'hypothèse que l'information et la connaissance jouent un rôle plus important sur la réactivité des jeunes adultes et supposons qu'ils sont très réactifs. Pour cela nous devons changer la colonne de la matrice de décisions correspondante aux jeunes adultes de maturité importante.



Les résultats obtenus pour cette catégorie d'individu sont les suivant :

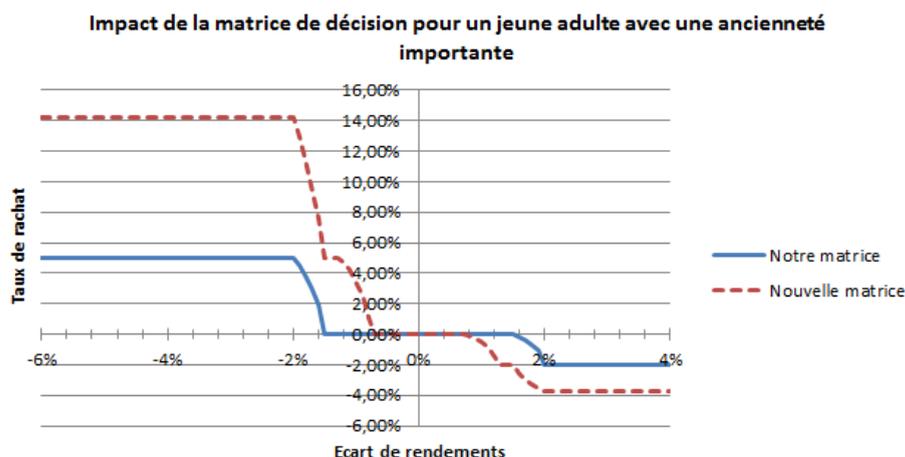


FIGURE 5.33 – Impact de la matrice de décisions pour un jeune adulte

Dans ce cas, l'impact de la matrice de décisions est immédiat. Les individus étant plus réactifs, ils réagissent de manière plus violente aux rachats avec des taux de rachat nettement plus élevés ou nettement plus bas. De plus, ils n'ont que plus rarement un taux de rachat nul car ils sont très sensibles aux variations d'écart de rendements.

L'impact de la matrice de décisions est réel et important. L'argumentation précise faite dans la partie précédente quant aux choix effectués lors de sa création était donc nécessaire. D'autres hypothèses auraient pu mener à d'autres résultats.

La logique floue reflète de manière cohérente les règles de décisions de la matrice de décisions et permet de trouver un taux de rachat juste par rapport aux caractéristiques d'un individu.

Après avoir modélisé les comportements des assurés par la logique floue, il nous a semblé intéressant d'adapter cette théorie aux comportements des assureurs et plus précisément à leurs choix quant au management action.

5.3 Raisonnement flou appliqué au management action

Le management action représente l'ensemble des décisions prises par l'assureur. Parmi ces décisions la politique de taux servis est l'une des plus importante impactant la fidélité des assurés et la venue éventuelle de nouveaux assurés dans une compagnie. La politique de taux servis est l'objectif de rendement servi que se fixe une compagnie d'assurance. Comme tout objectif, il sera soit atteint, soit non atteint. Dans notre modèle ALM, la politique de taux servis est de 100% du taux concurrent. Si la compagnie peut donner le taux concurrent alors elle le servira sinon elle fera de son mieux pour s'en approcher. Soulignons tout de même que si un assuré a un TMG supérieur au taux concurrent alors l'assureur sera obligé de lui servir son TMG et non le taux concurrent.

Cependant, qui dit prise de décisions pour l'assureur, dit nécessairement raisonnements humains. En effet, c'est l'assureur qui fixe la politique de taux servis en fonctions de certains critères.

La théorie de la logique floue apparaît de nouveau comme une alternative de modélisation du comportement humain et plus particulièrement celui des assureurs face à leur choix de politique de taux servis. Le nouvel objectif de la logique floue est donc de trouver le pourcentage du taux concurrent que l'assureur va essayer de servir à ses assurés.

Dans cette partie, nous révélerons les variables retenues comme critères explicatifs de la politique de taux servis mais aussi le raisonnement flou à appliquer pour trouver le pourcentage du taux concurrent à appliquer.

5.3.1 La fuzzification

Comme pour toute fuzzification, dans un premier temps, nous devons trouver les variables explicatives de notre variable de sortie : la politique de taux servis.

Pour expliquer les choix du management action, nous avons besoin d'indicateurs de richesse et de solvabilité de la compagnie. Nous avons donc choisi deux indicateurs de richesse que sont le niveau de PPE de la compagnie et ses produits financiers.

- **Le niveau de PPE** est exprimé en pourcentage de la provision mathématique globale :

$$\frac{\text{PPE}}{\text{PM}}$$

La PPE pourra alors être considérée comme « Faible », « Convenable (moyenne) » ou « Forte ». D'après une étude de *Good Value for Money* parue en 2012, la PPE représentait entre 0.20% et 3.4% de l'encours des assureurs en 2011 avec une moyenne de 1,14% et entre 0.20% et 3.72% en 2010 avec une moyenne de 1.78%. Pour se rapprocher au mieux des réalités du marché, nous avons donc pris comme univers de discours pour cette variable, un intervalle de 0% à 4% de PPE par rapport à l'encours global de la compagnie.

- L'indicateur des **produits financiers** est exprimé de la manière suivante :

$$\frac{\text{Rendements des produits financiers}}{\text{Taux concurrent}}$$

Les produits financiers seront alors « Faibles », « Appréciables » ou « Importants ». Nous supposons que ce ratio peut évoluer entre 20% et 130%. Cet intervalle met en avant le fait qu'une compagnie peut avoir fait de mauvais placements et avoir des rendements réellement plus bas que la concurrence. Néanmoins, si elle a fait de bons placements, elle pourra alors dépasser la concurrence en terme de rendement sans pour autant la surperformer à l'excès car les conditions des marchés sont les mêmes pour chaque acteur.

Nous avons pris comme indicateur de solvabilité, le taux de couverture « Solvabilité I ».

- **Le taux de couverture** de Solvabilité I est défini comme l'ensemble des fonds propres (FP) par rapport à la marge de solvabilité requise (MSR) :

$$\frac{FP}{MSR}$$

Comme nous travaillons sur des produits d'épargne en euro, le MSR représente 4% de la provision mathématique globale. Soulignons, que ce ratio dépend de l'appétence aux risques de l'assureur et que c'est la compagnie d'assurance qui décide d'avoir un ratio de solvabilité « Passable », « Bon » ou « Très bon ». Nous supposons donc que ce ratio peut évoluer entre 100% et 400%. En effet, il doit être au minimum de 100% pour que la compagnie soit solvable et respecte les contraintes réglementaires mais n'a pas d'exigences quant à son maximum.

Dans ce raisonnement flou, notre variable de sortie est exprimée en pourcentage du taux concurrent. La politique de taux servis est l'objectif que se fixe la compagnie en termes de revalorisation des PM des assurés. En fonction de la santé et des résultats de l'assureur, elle peut être « Peu concurrente », « Concurrente » ou « Très concurrente ». Nous venons donc de trouver nos trois ensembles flous associés à cette politique. L'objectif étant d'être proche du taux concurrent et de le dépasser quand les indicateurs de richesse et de solvabilité le permettent, son univers de discours s'étend de 85% du taux concurrent à 120%.

Pour résumer :

Variables	Entrées			Sortie
	PPE	Produits financiers	Ratio de solvabilité	Politique de taux servi
Ensembles flous	Faible Convenable (moyenne) Elevée	Faibles Appréciables Elevés	Passable Bon Très bon	Peu concurrente Concurrente Très concurrente
Univers de discours	[0%, 4%]	[20%, 130%]	[100%, 400%]	[85%, 120%]

FIGURE 5.34 – Variables linguistiques du management action

Une fois nos variables linguistiques correctement définies, nous devons trouver les fonctions d'appartenance de chaque ensemble flou. Les fonctions que nous avons retenues sont les suivantes.

Les variables d'entrée

La PPE

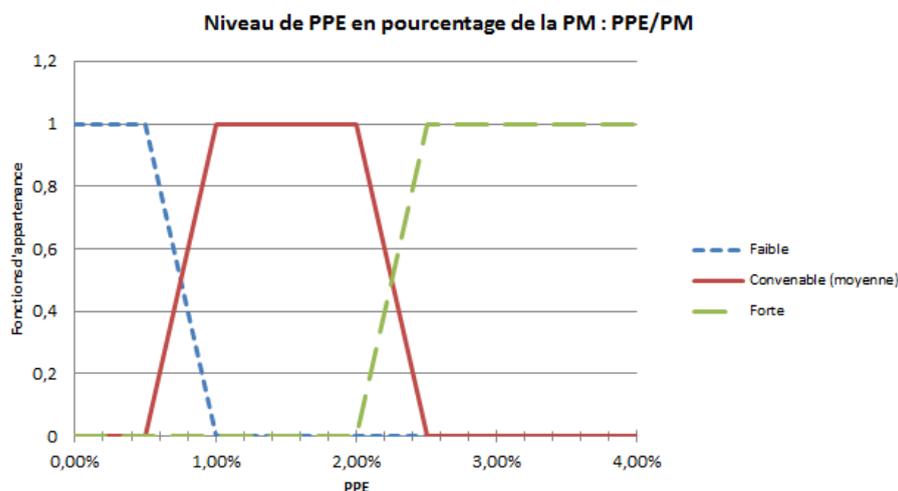


FIGURE 5.35 – Fonctions d'appartenance relatives à la PPE

Ayant observé une PPE moyenne par rapport à l'encours de 1,14% en 2011 et 1,78% en 2010, le niveau de PPE sera considéré comme 100% convenable de 1% à 2%. Pour que le passage d'un ensemble à un autre soit graduel, nous supposons que la PPE est forte à 100%, qu'à partir de 2.5%. A l'inverse, elle est faible à 100%, en dessous de 0.5%. La transition entre deux groupes se fait donc à la même vitesse.

Indicateur des produits financiers

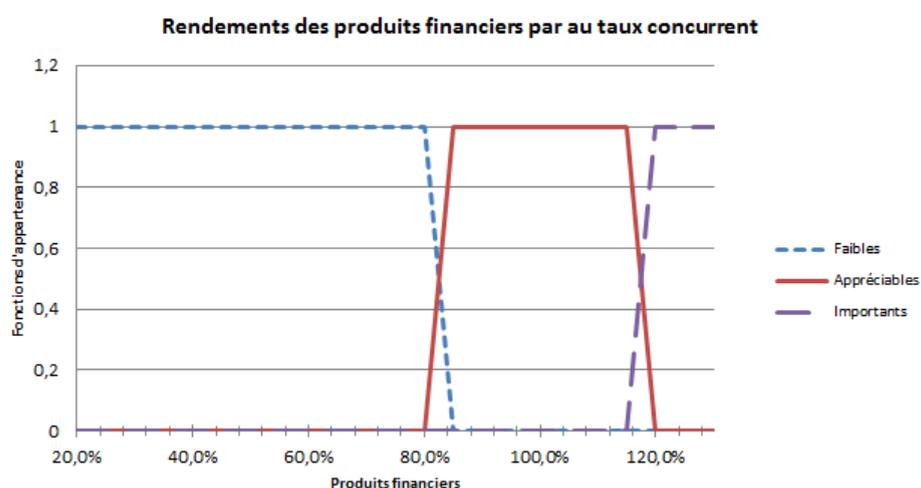


FIGURE 5.36 – Fonctions d'appartenance relatives aux produits financiers

Les produits financiers peuvent être considérés comme appréciables lorsque qu'ils sont proches de 100% du taux concurrent. Nous avons donc créé la fonction d'appartenance de l'ensemble flou « Appréciables » pour que lorsque les produits financiers sont entre 85% et 115% du taux concurrent ils soient 100% « Appréciables ».

La solvabilité : le taux de couverture

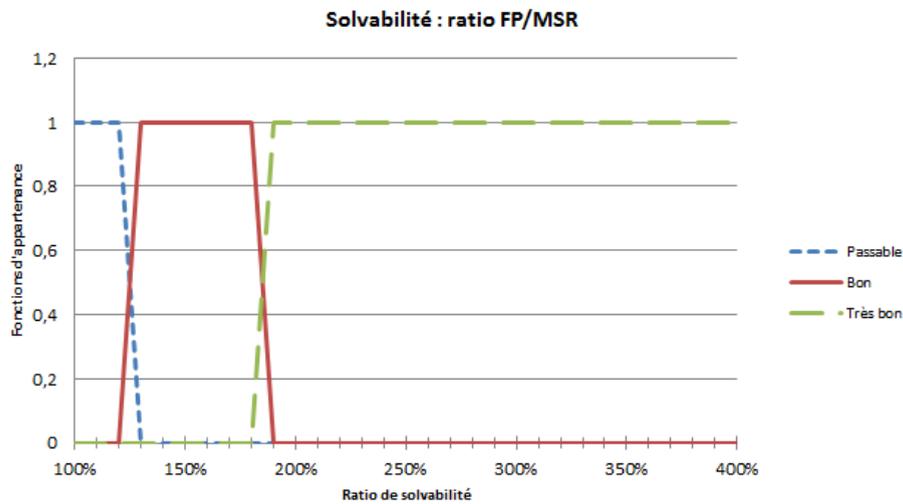


FIGURE 5.37 – Fonctions d'appartenance relatives au ratio solvabilité

Le ratio de solvabilité étant dépendant de l'appétence au risque de la compagnie, chaque compagnie doit définir ses propres fonctions d'appartenance pour les ensembles flous de cette variable. Dans notre compagnie par exemple, nous considérons que notre ratio de solvabilité est bon à 100%, s'il est compris entre 130% et 180%.

La variable de sortie

La politique de taux servi

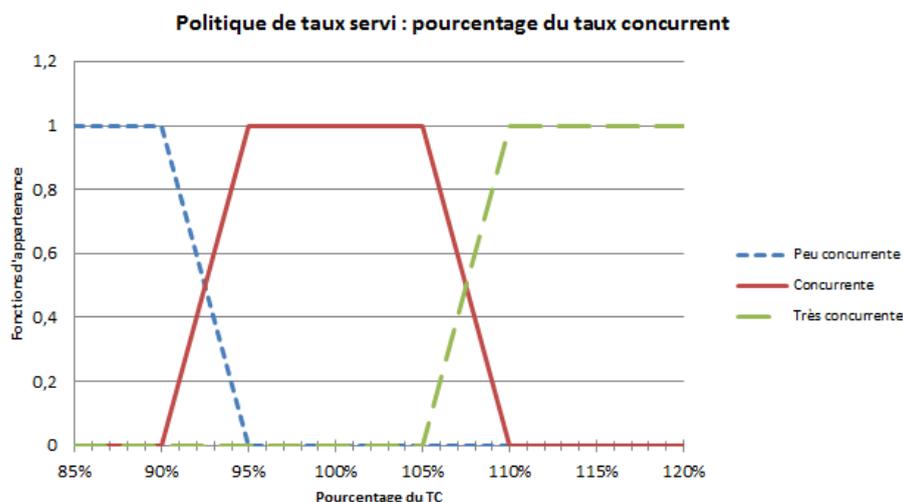


FIGURE 5.38 – Fonctions d'appartenance relatives à la politique de taux servi

Une politique de taux servi est dite 100% concurrente si elle est proche de 100% du taux concurrent : comprise entre 95% et 105%. De même, elle devient 100% très concurrente à partir de 110%. De plus, elle peut être considérée comme 100% peu concurrente si l'objectif est de servir un pourcentage du taux concurrent inférieur à 90%. Ce sont ces bornes qui nous ont aidées à construire les fonctions d'appartenance de notre variable de sortie.

La fuzzification désormais terminée, nous pouvons continuer le raisonnement flou avec l'inférence floue.

5.3.2 L'inférence floue : la matrice de décisions

Les étapes de l'inférence floue étant déjà expliquées en profondeur précédemment, nous reviendrons seulement sur la création de la matrice de décisions, étape fondamentale pour l'inférence floue.

La matrice de décisions retenue est la suivante :

Politique de taux servi	Produits financiers & PPE								
	Faibles			Appréciables			Importants		
	Faible	Convenable (moyenne)	Forte	Faible	Convenable (moyenne)	Forte	Faible	Convenable (moyenne)	Forte
Solvabilité (ratio MSR)									
Passable	Peu concurrente	Peu concurrente	Peu concurrente	Peu concurrente	Concurrente	Concurrente	Peu concurrente	Concurrente	Concurrente
Bon	Peu concurrente	Peu concurrente	Peu concurrente	Concurrente	Concurrente	Concurrente	Concurrente	Concurrente	Très concurrente
Très bon	Peu concurrente	Peu concurrente	Concurrente	Concurrente	Concurrente	Très concurrente	Concurrente	Très concurrente	Très concurrente

FIGURE 5.39 – Matrice de décisions de la politique de taux servi

Lorsque la compagnie a des produits financiers faibles, quel que soit son niveau de solvabilité, si elle a un niveau de PPE faible ou convenable, elle ne sera que peu concurrente car elle n'aura pas les finances pour servir un taux plus élevé. En effet, ce sont les produits financiers et la PPE qui permettent de revaloriser les PM. Si la PPE est forte, elle s'autorisera à être concurrente qu'en cas de ratio de solvabilité très bon.

Dans le cas où les produits financiers deviennent appréciables, la politique de taux servi sera concurrente quels que soient le niveau de PPE et la solvabilité de la compagnie, à deux exceptions près. Si la PPE est faible et la solvabilité passable, la compagnie préférera améliorer son état de santé et sera donc peu concurrente. A l'inverse, si la PPE est forte et la solvabilité très bonne, elle se permettra d'être très concurrente pour attirer de nouveaux assurés et d'éviter le rachat d'une partie de son portefeuille⁴.

Quand les produits financiers deviennent importants, la compagnie sera concurrente ou très concurrente en fonction de sa solvabilité et de sa PPE. Remarquons tout de même que si la PPE est faible et la solvabilité seulement passable, la compagnie adoptera une politique de taux servi peu concurrente dans le but de réalimenter la PPE. En effet, les produits financiers qui ne seront pas redistribués immédiatement permettront alors de doter la PPE.

La matrice de décisions une fois créée, nous connaissons l'ensemble des règles floues à appliquer à notre problème. Pour les mêmes raisons que celles vues lors de l'inférence floue pour les rachats conjoncturels, la méthode d'implication retenue lors de l'inférence floue pour la politique de taux servi est celle de Mamdani et la technique de défuzzification est celle du centre de gravité (COG).

5.4 Sensibilités du management action par rapport aux variables floues

Dans cette dernière partie, nous analysons les résultats de la modélisation de la politique de taux servi par la logique floue. Rappelons que pour obtenir ces résultats, nous avons utilisé l'implication de Mamdani et la défuzzification du centre de gravité (COG).

Les résultats sont exposés de la manière suivante :

- Chaque graphe correspond à un niveau de solvabilité donné.
- Nous testons sur chaque graphe l'impact de la PPE.
- Les résultats de politique de taux servi sont donnés en fonction des produits financiers de la compagnie.

4. La composante structurelle

Il est intéressant de savoir à quels ensembles flous font référence les hypothèses :

Solvabilité	Ensemble(s) flou(s)
102%	100% passable
125%	50% passable & 50% bon
135%	100% bon
200%	100% très bon

Niveau de PPE	Ensemble(s) flou(s)
0.30%	100% faible
1.70%	100% convenable
2.25%	50% convenable & 50% forte
3%	100% forte

Commençons par un exemple où le ratio de solvabilité est 100% passable.

Ratio de solvabilité de 102% :

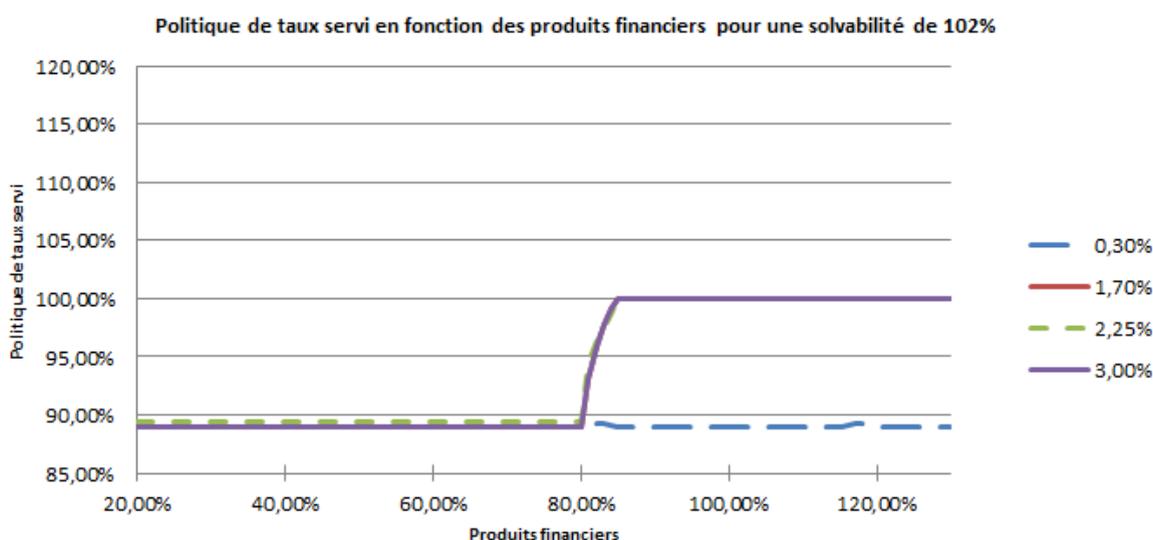


FIGURE 5.40 – Politique de taux servi pour une solvabilité de 102%

Les résultats sont cohérents avec notre matrice de décisions. En effet, lorsque la solvabilité est passable et la PPE faible, la compagnie est peu concurrente quel que soit le niveau des produits financiers. C'est pourquoi, avec une PPE de 0.30%, la courbe de la politique de taux servi est égale en tout point à 89% du taux concurrent. Dans les autres cas, nous observons un saut de la courbe juste après 80%. Ce saut est le reflet du passage d'une politique peu concurrente à concurrente qui se produit lorsque les produits financiers deviennent appréciables.

Ratio de solvabilité de 125% :

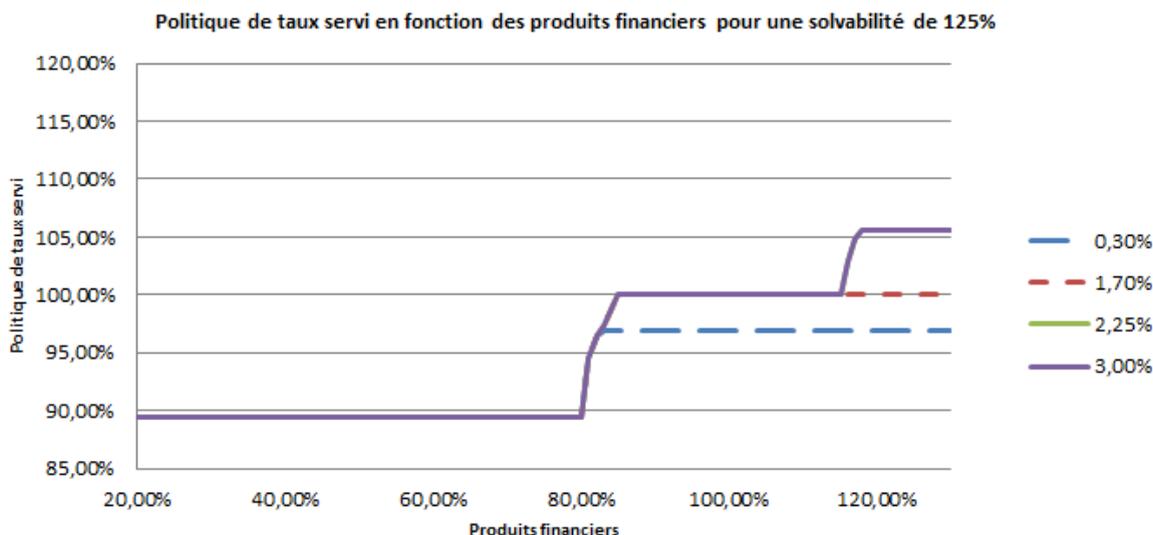


FIGURE 5.41 – Politique de taux servi pour une solvabilité de 125%

Désormais la solvabilité est 50% bonne et 50% passable et les résultats le traduisent correctement. En effet, en comparaison avec le graphe précédent, nous remarquons que la courbe pour une PPE de 0.30% a augmenté mais n'atteint pas encore celle où la PPE est de 1.70%. Cela s'explique par le fait que si la solvabilité est passable avec une PPE faible, la compagnie n'adopte jamais une politique concurrente, alors que si la solvabilité est bonne avec une PPE faible, la compagnie adopte une politique concurrente dès que les produits financiers sont appréciables. Le fait d'avoir ici une solvabilité 50% bonne, tire donc la courbe vers le haut.

De même, pour une PPE forte, le comportement de la compagnie reste le même tant que la solvabilité est passable ou bonne et que les produits financiers sont faibles ou appréciables. Néanmoins, lorsque les produits financiers sont importants, si la solvabilité est passable, la politique est concurrente alors que si la solvabilité est bonne, la politique devient très concurrente. Ce changement est mis en avant dans le graphe par une augmentation légère de la courbe représentant la PPE à 3% à partir de 115% de produits financiers. Le ratio de solvabilité bon à 50% impacte donc les résultats.

Ratio de solvabilité de 135% :

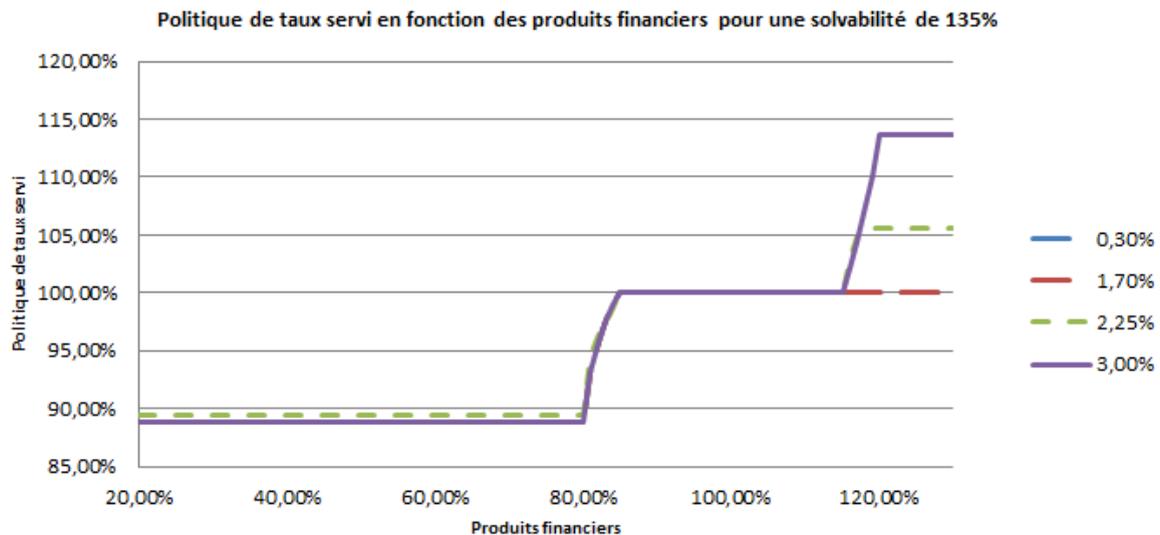


FIGURE 5.42 – Politique de taux servi pour une solvabilité de 135%

Encore une fois les graphes sont cohérents avec les choix fait dans la matrice de décisions. Lorsque la PPE est 100% faible, convenable ou forte ; les changements de la politique de taux servi interviennent seulement lors des passages d'une politique peu concurrente à concurrente ou concurrente à très concurrente.

Remarquons comment évolue la politique de taux lorsque la PPE est 50% convenable et 50% forte, i.e. une PPE de 2.25%. Tant que les produits financiers ne sont pas importants, la politique de taux servi évolue de la même manière que pour les autres niveaux de PPE (i.e. avant 115% de produits financiers). Cependant, si les produits financiers deviennent importants, elle augmente mais de manière moins significative que pour une PPE totalement forte. La logique floue propose donc une politique de taux servi adaptée à chaque situation.

Ratio de solvabilité de 200% :

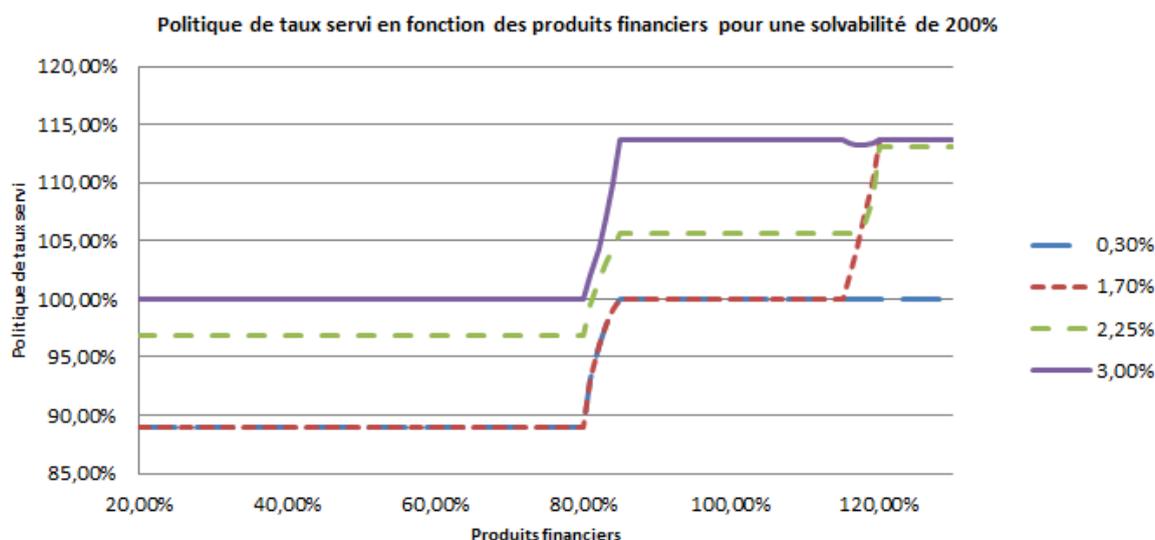


FIGURE 5.43 – Politique de taux servi pour une solvabilité de 200%

L’apport de la logique est le plus visible dans ce dernier graphe car pour chaque niveau de PPE, nous apercevons une courbe différente. La logique floue retranscrit donc parfaitement la santé de la compagnie et propose une politique de taux servi adaptée.

Les résultats obtenus pour la modélisation de la politique de taux servi par la logique floue sont satisfaisants. En effet, ils reflètent totalement les choix faits lors de la construction de la matrice de décisions. De plus, ils permettent de modéliser une compagnie d’assurance qui adapte correctement et intelligemment sa politique de taux servi en fonction de sa richesse et de sa solvabilité.

Conclusion du chapitre :

La théorie de la logique floue qui mélange expertise et bon sens pour simuler le comportement des assurés mais aussi des assureurs, apparaît comme une alternative aux modélisations traditionnelles. Nous avons présenté dans ce chapitre, les décisions prises lors des étapes essentielles que sont la fuzzification et l’inférence floue. La réactivité des taux de rachats quant aux changements de caractéristiques des individus est cohérente et celle de la politique de taux servi quant à la santé de la compagnie est satisfaisante. Après avoir sélectionné comme méthode d’implication, celle de Mamdani, et comme méthode de défuzzification, celle du centre de gravité, il nous faut introduire la logique floue dans notre modèle ALM pour évaluer l’impact de son utilité à travers les transformations du Best Estimate qu’elle opère.

Chapitre 6

Analyses et réflexions sur les résultats

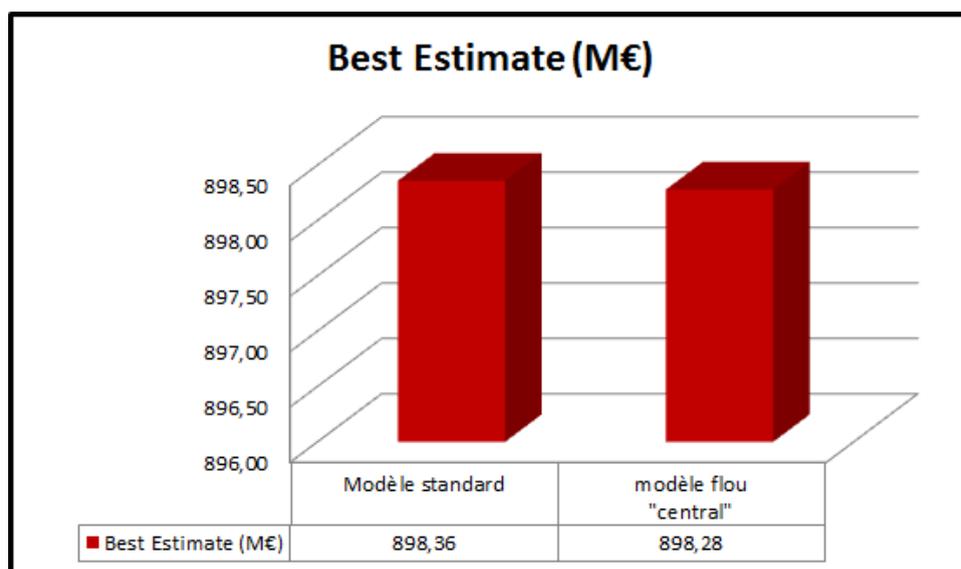
6.1 Best Estimate avec modélisation floue des rachats

Nous allons dans cette partie pouvoir mesurer l'apport d'une modélisation des rachats conjoncturels par logique floue sur le calcul du Best Estimate.

6.1.1 Résultat du Modèle central

Nous allons comparer maintenant le Best Estimate de notre compagnie selon le modèle standard (rachats conjoncturels déterminés par la fonction ACP) et le modèle logique floue « central » (rachats conjoncturels déterminés par la logique floue).

Pour chaque modèle le Best Estimate est le suivant :



Malgré une modélisation différente des rachats conjoncturels, nous arrivons à recoller « presque » parfaitement au Best Estimate du modèle standard. Nous obtenons les résultats attendus qui valident notre module de logique floue. En effet, comme nous avons pu le voir au travers du chapitre 5, le calibrage du module logique floue central repose sur la vision des rachats conjoncturels de l'ACP. Le graphique ci-dessus confirme donc, que le Best Estimate logique floue retranscrit

comme il se doit les hypothèses en entrée du module de logique floue.

Avec un écart de 0,01% entre les deux Best Estimate, nous pouvons affirmer que le modèle logique floue fonctionne correctement et qu'il est possible de calibrer la matrice de décisions afin de satisfaire l'exigence de l'ACP.

Rappelons que le module de logique floue détermine un taux de rachat selon l'âge et l'ancienneté de l'assuré. Dans la sous partie, suivante nous allons étudier la sensibilité du Best Estimate « floue » à ces deux variables.

6.1.2 Sensibilité du Best Estimate à la structure du passif (âge et ancienneté)

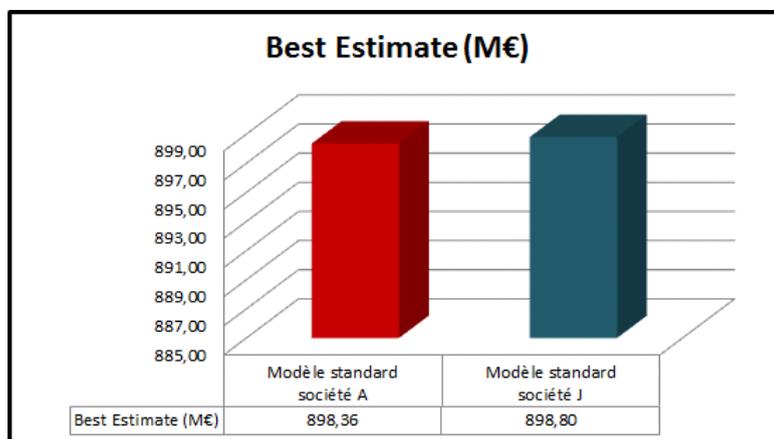
Nous avons à ce stade deux outils, le modèle standard et le modèle central « logique floue ». Ce dernier fournit un Best Estimate équivalent au modèle standard tout en proposant une modélisation plus fine des rachats conjoncturels. Cette sous partie a pour objectif d'étudier les variations du Best Estimate de ces deux modèles selon la structure du passif.

1) Variation des résultats selon l'âge moyen du passif

Nous allons désormais considérer le cas d'une compagnie d'assurance vie particulière, dont les assurés sont très jeunes. Pour effectuer cette étude nous avons abaissé l'âge moyen de tous les model points à 20 ans puis, nous avons fait tourner le modèle standard et le modèle logique floue « central ».

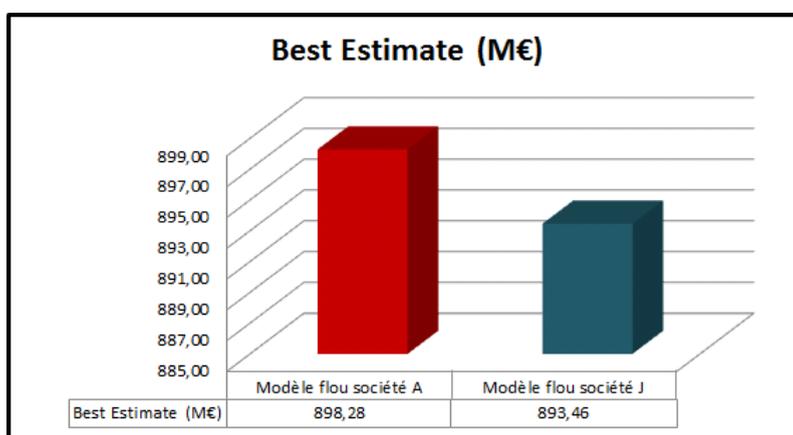
Dans les graphiques suivants :

- La société *A* est la compagnie d'assurance que nous considérons depuis le début, c'est-à-dire dont les assurés ont une moyenne d'âge de 47 ans.
- La société *J* est la nouvelle compagnie d'assurance où les assurés ont pour moyenne d'âge 20 ans.
- Le modèle standard est l'outil ALM avec la modélisation ACP des rachats conjoncturels.
- Le modèle floue est l'outil ALM avec la modélisation floue des rachats conjoncturels.

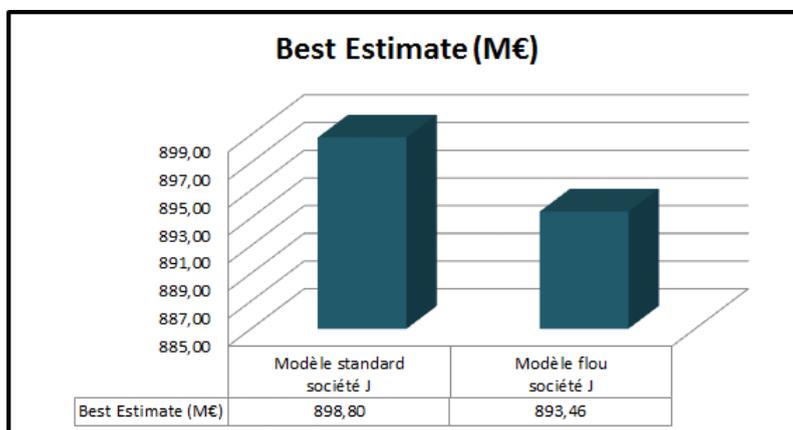


Avec utilisation du modèle standard aucun écart de Best Estimate significatif se constate entre la société A et la société J. La fonction de rachat conjoncturel fournie par l'ACP et utilisée dans le modèle standard suppose que les assurés de la compagnie A et J ont la même sensibilité face aux écarts de taux. Ceci revient à considérer un risque de rachats conjoncturels équivalent pour les deux compagnies. Le faible écart que nous constatons est en grande partie expliqué par le risque décès qui est, lui, différent.

Remarque : Pour modéliser un risque de rachats conjoncturels différent avec le modèle standard, il aurait fallu que le modèle intègre une deuxième fonction de rachat type « ACP » destinée à modéliser la sensibilité différente des jeunes face à l'écart de taux servis.

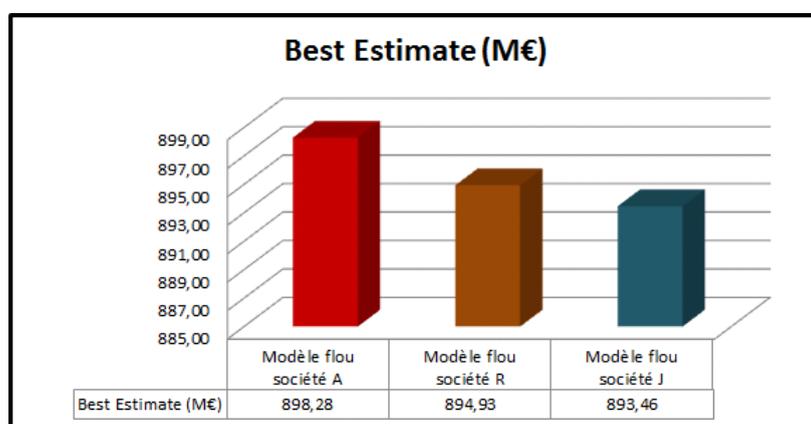


Avec une modélisation floue des rachats conjoncturels l'écart de Best Estimate existant entre les deux compagnies est bien présent. Selon notre modèle flou, le Best Estimate de la société J est inférieur à celui de la société A. En effet, nous avons supposé à travers la matrice de décisions que les jeunes étaient moins réactifs que les adultes à la conjoncture économique. Pour un scénario défavorable équivalent, la société J traitera moins de rachats conjoncturels que la société A, d'où le Best Estimate plus faible. Ainsi, les hypothèses lors du calibrage de la matrice de décisions se reflètent correctement dans le calcul du Best Estimate.



Logiquement, lorsqu'il s'agit de calculer le Best Estimate de la société J, le montant n'est pas le même entre le modèle flou et le modèle standard puisque la modélisation des rachats conjoncturels du modèle flou est plus fine que la modélisation des rachats conjoncturels du modèle standard.

Pour les mêmes raisons, si nous introduisons une troisième compagnie « R », composée d'assurés âgés¹, le Best Estimate de la société R s'écarte considérablement de celui calculé pour la société A.



2) Variation des résultats selon l'ancienneté moyenne

Toujours dans l'objectif de mesurer la sensibilité du Best Estimate sur des portefeuilles atypiques, nous allons cette fois-ci tester nos deux méthodologies sur des portefeuilles dont l'ancienneté moyenne des assurés est plus élevée ou plus basse.

Dans les graphiques suivants :

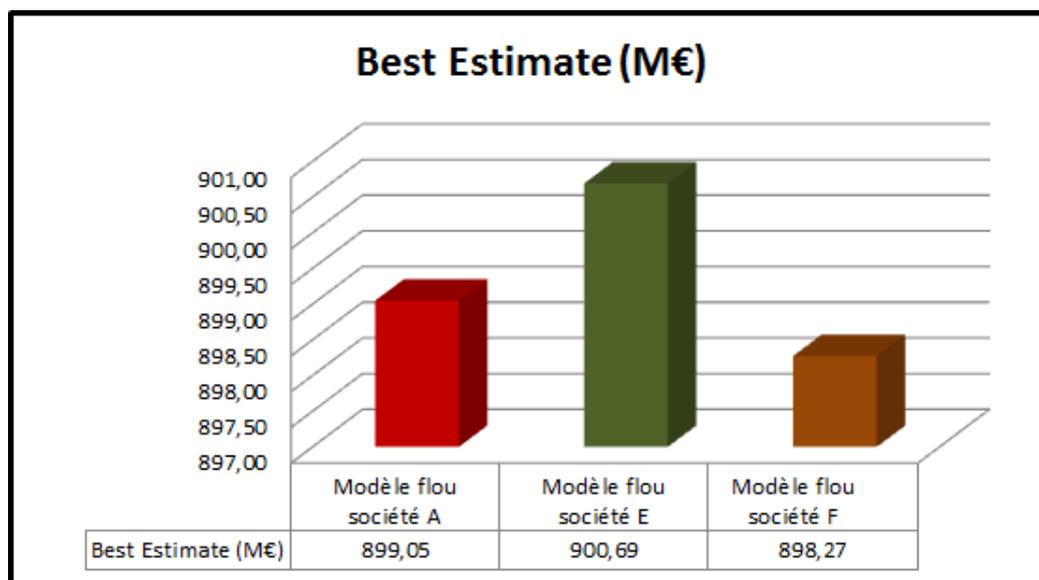
- La société A est la compagnie d'assurance que nous considérons depuis le début.

1. L'âge moyen de l'ensemble des model points a été fixé à 65 ans.

- La société E est une compagnie d'assurance où les assurés ont une ancienneté moyenne de 10 ans².
- La société F est une compagnie d'assurance où les assurés viennent de souscrire leur contrat (ancienneté nulle)³.
- Le modèle standard est l'outil ALM avec la modélisation ACP des rachats conjoncturels.
- Le modèle flou est l'outil ALM avec la modélisation floue des rachats conjoncturels.

Précisons que pour effectuer cette étude il est nécessaire de modifier deux hypothèses :

- La durée d'application des TMG : Dans la société que nous modélisons, après 8 ans d'ancienneté le TMG d'un model point est ramené à zéro. Si nous voulons étudier la sensibilité du Best Estimate par rapport à l'ancienneté mais uniquement via les rachats conjoncturels, il est nécessaire de corriger cette hypothèse. Pour les trois entreprises considérées, les TMG de départ sont appliqués durant toute la projection.
- La loi de rachats structurels : Dans cette étude, le taux de rachats structurels sera constant (3%). Ainsi l'ancienneté d'un model point jouera uniquement sur les rachats conjoncturels.



Nous avons supposé lors du calibrage de la matrice de décisions que la réactivité des individus augmentait globalement avec l'ancienneté. Si nous analysons les trois Best Estimate calculés par notre modèle flou, nous retrouvons bien notre hypothèse.

2. Pour chaque model point l'ancienneté est égale à 10 ans
3. Pour chaque model point l'ancienneté est égale à 0.

6.1.3 Sensibilité du Best Estimate à l'hypothèse de réactivité des assurés

Dans la partie précédente, nous avons testé la sensibilité du Best Estimate des deux modèles par rapport à des structures de passifs différentes. Dans l'étude qui suit nous allons garder intact le passif d'assurance mais nous allons considérer les assurés plus ou moins réactifs par rapport à la conjoncture économique. Pour cela nous allons modifier la matrice de décision.

Ensemble des individus

Imaginons un assureur « B », qui inversement à notre assureur « A », pense avoir des assurés très réactifs et ce, quels que soient leur âge ou leur ancienneté. Il va alors calibrer sa matrice de décision selon sa propre expertise.

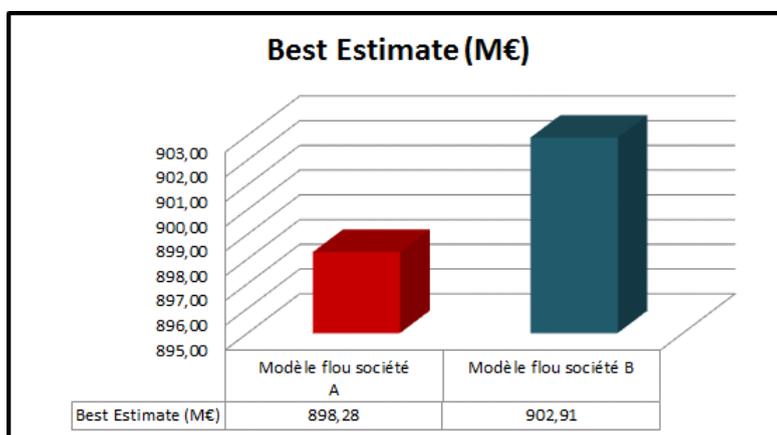
- Matrice de décision de l'assureur A :

Taux de rachat	Ancienneté du contrat & Age de l'assuré								
	Faible			Moyenne			Importante		
Ecart de rendement	Jeune-Adulte	Adulte	Retraité	Jeune-Adulte	Adulte	Retraité	Jeune-Adulte	Adulte	Retraité
Fortement négatif	Proche de 0	Positif	Positif	Positif	Positif	Positif	Positif	Très positif	Positif
Faiblement négatif	Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0	Positif	Proche de 0	Proche de 0	Positif	Proche de 0
Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0
Faiblement positif	Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0	Négatif	Proche de 0	Proche de 0	Négatif	Proche de 0
Fortement positif	Proche de 0	Négatif	Négatif	Négatif	Négatif	Négatif	Négatif	Très négatif	Négatif

- Matrice de décision de l'assureur B :

Taux de rachat	Ancienneté du contrat & Age de l'assuré								
	Faible			Moyenne			Importante		
Ecart de rendement	Jeune-Adulte	Adulte	Retraité	Jeune-Adulte	Adulte	Retraité	Jeune-Adulte	Adulte	Retraité
Fortement négatif	Très positif	Très positif	Très positif	Très positif	Très positif	Très positif	Très positif	Très positif	Très positif
Faiblement négatif	Positif	Positif	Positif	Positif	Positif	Positif	Positif	Positif	Positif
Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0
Faiblement positif	Négatif	Négatif	Négatif	Négatif	Négatif	Négatif	Négatif	Négatif	Négatif
Fortement positif	Très négatif	Très négatif	Très négatif	Très négatif	Très négatif	Très négatif	Très négatif	Très négatif	Très négatif

Comparons maintenant le Best Estimate « logique floue » de ces deux entreprises :



La vision différente de l'assureur A et B sur le risque de rachat se retranscrit dans les résultats. Via la matrice de décision, la logique floue permet de prendre correctement en compte l'appréciation différente de la réactivité des assurés entre la société A et la société B.

Catégorie d'individus

Lors du calibrage de la matrice de décisions (c.f. 5.1.2), nous avons supposés que les jeunes adultes, dont l'ancienneté était importante, étaient globalement peu sensibles à l'écart de taux. Nous avons supposé que la faible réactivité des jeunes primait sur la connaissance du marché due à leur ancienneté importante. Imaginons que l'assureur B suppose l'inverse, c'est-à-dire que les jeunes adultes avec une ancienneté importante sont plus réactifs car l'expérience l'emporte.

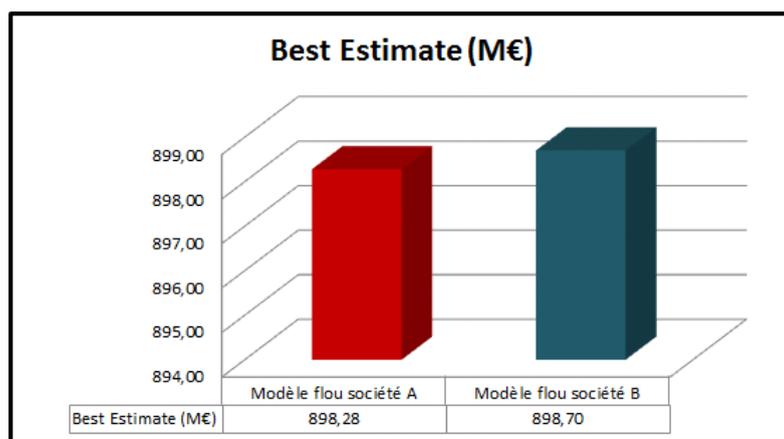
- Matrice de décision de l'assureur A :

Taux de rachat	Ancienneté du contrat & Age de l'assuré								
	Faible			Moyenne			Importante		
Ecart de rendement	Jeune-Adulte	Adulte	Retraité	Jeune-Adulte	Adulte	Retraité	Jeune-Adulte	Adulte	Retraité
Fortement négatif	Proche de 0	Positif	Positif	Positif	Positif	Positif	Positif	Très positif	Positif
Faiblement négatif	Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0
Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0
Faiblement positif	Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0	Négatif	Négatif	Négatif	Négatif	Négatif
Fortement positif	Proche de 0	Négatif	Négatif	Négatif	Négatif	Négatif	Négatif	Négatif	Négatif

- Matrice de décision de l'assureur B :

Taux de rachat	Ancienneté du contrat & Age de l'assuré								
	Faible			Moyenne			Importante		
Ecart de rendement	Jeune-Adulte	Adulte	Retraité	Jeune-Adulte	Adulte	Retraité	Jeune-Adulte	Adulte	Retraité
Fortement négatif	Proche de 0	Positif	Positif	Positif	Positif	Positif	Très positif	Très positif	Positif
Faiblement négatif	Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0	Positif	Proche de 0	Positif	Positif	Proche de 0
Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0
Faiblement positif	Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0	Proche de 0	Négatif	Proche de 0	Négatif	Négatif	Proche de 0
Fortement positif	Proche de 0	Négatif	Négatif	Négatif	Négatif	Négatif	Très négatif	Très négatif	Négatif

Comparons maintenant le Best Estimate « logique floue » de ces deux entreprises :



Même en travaillant sur une catégorie plus restreinte, un calibrage différent entre les deux matrices se retrouve dans nos résultats. Notons tout de même que modifier la sensibilité des jeunes adultes dont l'ancienneté est importante n'a pas d'impact très significatif sur le Best Estimate de la société considérée. Intuitivement, changer la sensibilité des catégories où les adultes sont impliqués devrait avoir plus d'impact.

Remarque importante : Il est tout à fait possible de prendre en considération la réactivité plus importante d'une catégorie d'assurés en utilisant la fonction de rachats conjoncturels pré-

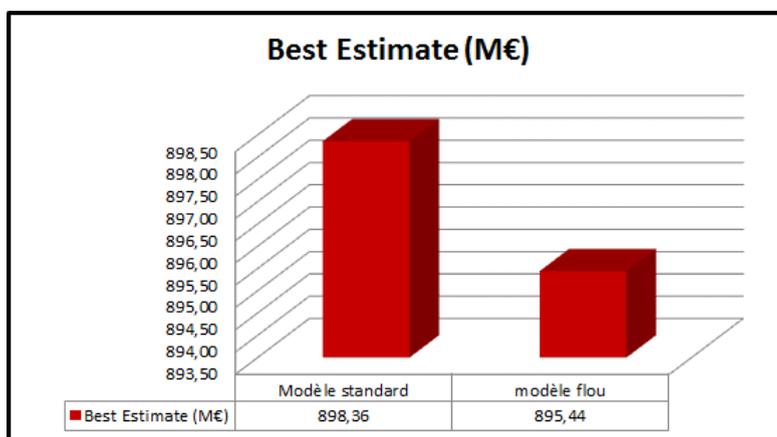
conisée par l'ACP. Par exemple, un assureur considérant les retraités peu réactifs devra dans le modèle standard utiliser deux fonctions de rachats conjoncturels « ACP » : l'une pour les retraités et l'autre pour le reste du portefeuille. Cependant, le choix précis des paramètres à utilisé dans les deux fonctions sera confus et nécessitera du temps avant d'obtenir le résultat voulu. Dans le modèle de logique floue, il suffit à l'assureur de modifier une colonne de la matrice de décision. D'ores et déjà, le module de logique floue semble se démarquer en étant un outil plus intuitif et plus simple.

6.2 Best Estimate avec modélisation floue de la politique de taux servis

A l'image des méthodes traditionnelles, notre modèle standard intègre un objectif de taux servis statique, formulé de manière qualitative : « atteindre le taux concurrent ». Ce type de modélisation soulève d'importants problèmes en termes de représentation cohérente des actions du management, notamment en univers stressé. D'une part, nous pouvons admettre que l'objectif de taux servis est une décision stratégique, renouvelée chaque année et non figée sur 30 ans et plus. D'autre part, c'est une décision fondée sur une connaissance de l'environnement propre de la compagnie d'assurance, comme par exemple le niveau PPE. Dans notre modèle standard nous interdisons tout de même au modèle de servir plus de 80% de la PPE pour atteindre le taux concurrent. Ce type de contraintes empêche les comportements irrationnels du management mais ne suffit pas à approcher le comportement réel.

Nous avons modélisé dans le chapitre précédent l'objectif de taux servis par la logique floue. Dans cette nouvelle modélisation, le management cible un pourcentage du taux concurrent en fonction de l'appréciation approximative qu'il a de la solvabilité de l'entreprise, des produits financiers et de la provision pour participation aux excédents.

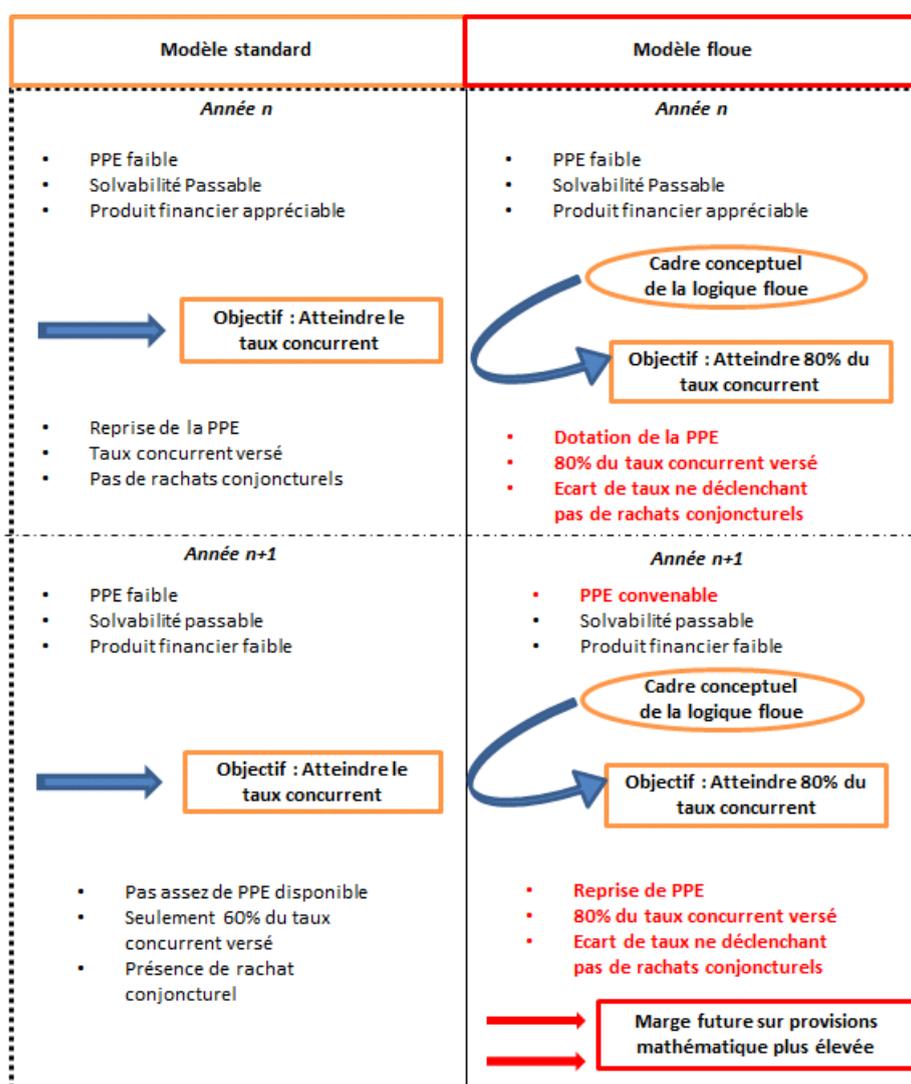
Nous avons fait tourner notre outil ALM avec la modélisation floue de la politique de taux servis, afin de comparer le Best Estimate avec celui de notre modèle standard basé lui, sur un objectif statique (100% du taux concurrent). Les résultats sont les suivants :



Intégrer la politique de taux servis type « logique floue » à notre modèle, permet de diminuer la valeur des engagements de l'assureur de 2,917M€ et d'augmenter ses fonds propres économiques du même montant. Un écart qui représente 0,3% du passif en « juste valeur ».

Un tel résultat révèle que la modélisation floue apporte une meilleure gestion du taux servi par le management que notre modèle standard. Ceci permet à notre compagnie d'assurance de dégager de nouvelles marges.

Voici un exemple simplifier illustrant de quelle manière la logique floue influe sur les marges de l'assureur :



Explication : Les indicateurs du modèle indiquent une solvabilité passable et une PPE faible. Malgré des produits financiers appréciables lors de l'année n , le raisonnement flou permet d'aboutir à la décision plus optimale de ne pas verser 100% du taux concurrent mais de verser moins et de doter le surplus à la PPE. C'est pourquoi, lors de l'année $n + 1$ alors que les produits financiers sont faibles, le management est dans la possibilité de se servir de la PPE pour atteindre

80% du taux concurrent, ratio suffisant dans notre exemple pour empêcher la présence de rachats conjoncturels.

Les résultats ne sont pas surprenants. Dans un premier temps, si nous obtenons une meilleure gestion du taux servi par le modèle logique floue c'est parce que les hypothèses ne sont pas les mêmes. Nous ne supposons pas dans le modèle standard que le management tient compte de la solvabilité, des rendements financiers et de la PPE puisqu'il s'agit d'un objectif fixe. Il est important de préciser qu'il serait possible de transposer les décisions du management sous forme de problème d'optimisation sous contraintes permettant aussi une meilleure gestion de la revalorisation que le modèle standard. **Par conséquent, l'intérêt de la logique floue ne réside pas dans le calcul d'un Best Estimate plus faible.**

L'intérêt de la modélisation floue d'une action du management réside dans le cheminement du calibrage de la matrice de décision. En effet, la construction de la matrice permet de faire le lien entre la politique réelle du management et sa modélisation.

6.3 Limites et alternatives techniques de la logique floue

Dans cette partie, nous mettons en avant certaines limites de la logique floue et proposons des alternatives ou des améliorations possibles.

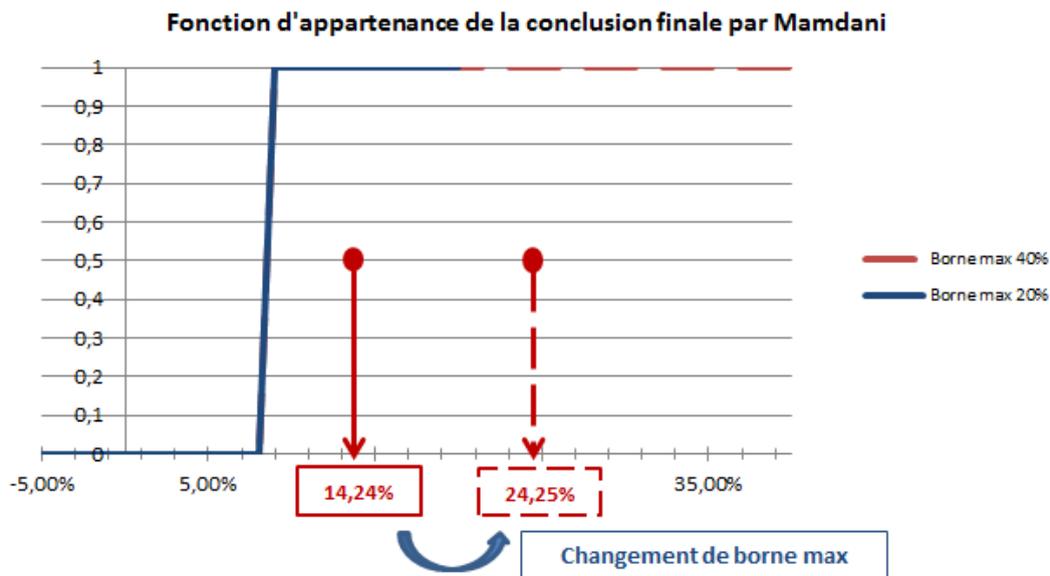
6.3.1 Les bornes de l'univers de discours

Lors de nos différentes sensibilités sur les résultats de la logique floue (rachats et politique de taux servi), nous avons remarqué que la géométrie des fonctions d'appartenance de la variable de sortie avait un impact sur les résultats. Prenons comme exemple : la logique floue appliquée aux rachats conjoncturels.

Les bornes inférieures et supérieures de l'univers de discours de la variable de sortie impactent les résultats extrêmes (taux de rachats très positifs ou très négatifs). Qu'importe la méthode de défuzzification retenue, ces bornes ne seront jamais atteintes mais elles modifieront considérablement les résultats des taux de rachats. Pour une compréhension plus claire du raisonnement, regardons les taux de rachats obtenus pour les adultes d'ancienneté importante, lorsque l'écart des rendements est fortement négatif. D'après la matrice de décisions, de tels individus ont des rachats « Très positifs ».

La borne supérieure de l'univers de discours pour la variable taux de rachat est de 20%. Avec la méthode d'implication de Mamdani, nous obtenons par la méthode de défuzzification du centre de gravité un rachat de 14.24% et celle de la moyenne des maxima 15%.

Supposons désormais que la borne supérieure ait été de 40%, la fonction d'appartenance de conclusion finale aurait alors eu la même forme mais s'étendrait jusqu'à 40%. En augmentant la borne supérieure, nous augmentons l'aire sous la courbe utilisée par la méthode du centre de gravité ainsi que le nombre d'abscisse avec une ordonnée maximale nécessaire à la moyenne des maxima.

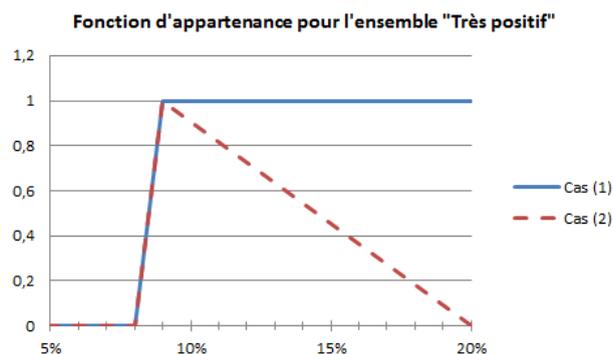


Par conséquent, pour le même individu le taux de rachats explose : 24.25% avec le centre de gravité et 25% avec la moyenne des maxima.

Une borne supérieure élevée tire donc vers le haut les taux de rachats. Inversement, une borne inférieure très faible diminue fortement les taux de rachats.

L'influence des bornes peut être vue comme une limite du modèle de logique floue. Le bon sens et l'expertise retenus lors de la création des fonctions d'appartenance sont remis en cause par un impact non négligeable dans les résultats.

Une alternative à ce problème aurait été de changer la forme des fonctions d'appartenance des ensembles flous extrêmes relatifs aux taux de rachats : « Très négatifs » et « Très positifs ». La fonction d'appartenance actuelle pour l'ensemble « Très positif » est représentée par le Cas (1) dans le graphe ci-dessous. Supposons une nouvelle fonction d'appartenance pour cet ensemble : Cas (2).



L'impact de la borne supérieure de l'univers de discours existe toujours mais est nettement moins important. De plus, de par cette nouvelle forme, les taux de rachats diminuent même pour une borne supérieure de 20%. Ce constat était prévisible puisque l'aire sous la courbe de la nouvelle fonction est moins importante que celle de la première, par conséquent l'abscisse du centre de gravité diminue. De plus, cette nouvelle forme engendre un nombre d'abscisses dont l'ordonnée est maximale toujours inférieur à celui de l'ancienne fonction : la moyenne des maxima diminue aussi. Si nous avions utilisé ce type de fonctions d'appartenance, nous aurions donc eu des taux de rachats plus faibles et par conséquent, le Best Estimate aurait diminué.

Cependant, de telles formes de fonctions d'appartenance pour les ensembles flous extrêmes ne nous semblent pas en accord avec la définition même d'une « fonction d'appartenance » s'il n'existe pas de nouvelles fonctions pour les cas supérieurs à 20% ou si le reste des taux de rachats n'est pas défini comme impossible. En effet, dans ce cas, lorsque le taux de rachat est de 9%, il est considéré « Très positif » à 100% alors que lorsqu'il est de 20%, il est considéré « Très positif » à 0% sans appartenir à aucun autre ensemble, l'ensemble des taux de rachats impossibles, par exemple.

En conclusion, les fonctions d'appartenance caractérisent les taux de rachats **possibles** et leur univers de discours a un impact considérable sur les résultats. Nous avons supposé une borne supérieure de l'univers de discours égale à 20% car dans le cadre d'une société d'assurance, nous pouvons imaginer que plus de 20% de rachats est impossible. Implicitement, en imposant cette borne, nous créons un ensemble de taux de rachats impossibles à partir de 20%. Cependant, la fonction d'appartenance reste cohérente jusqu'à 20% puisque le taux de rachat est toujours considéré « Très positif » à 100% lorsqu'il est de 20%. Le raisonnement est identique concernant la borne inférieure de l'univers de discours.

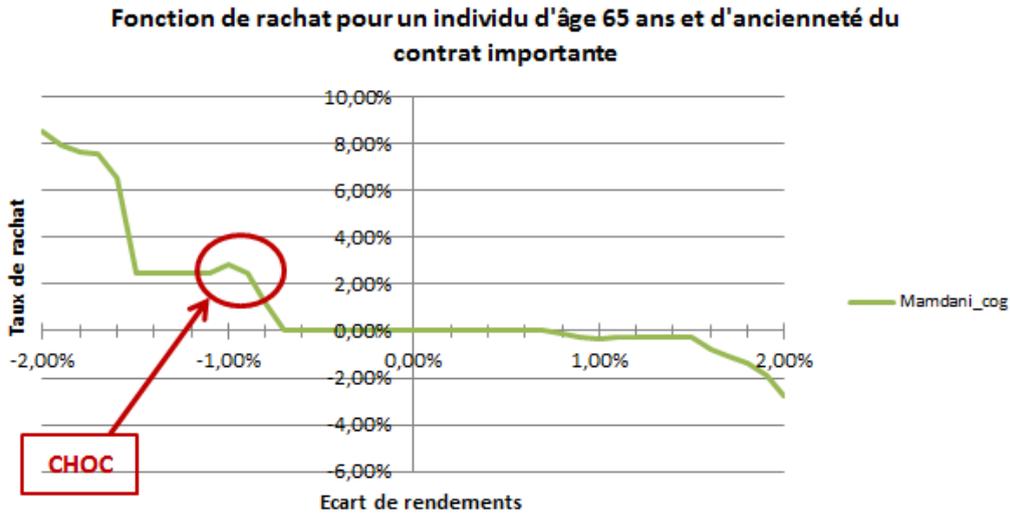
6.3.2 Les jeux d'activation et d'agrégation

Dans cette sous partie nous mettons en avant une limite théorique de la logique floue qui ne remet pas en cause sa véracité ni son fonctionnement mais qui peut déranger selon ce que l'on souhaite modéliser.

De par les mécanismes d'activation (par des « MIN ») et d'agrégation (par des « MAX »), nous pouvons observer certains chocs dans les courbes de rachats ou de politique de taux servi et ce lors d'une défuzzification par le centre de gravité .

Prenons comme exemple, les rachats conjoncturels. L'écart des rendements est la variable explicative du phénomène ; c'est pourquoi les courbes de rachats obtenues en sortie du module de logique floue prennent pour abscisse cet écart. Les deux autres variables sont vues comme des facteurs qui changent la sensibilité des individus à l'écart des rendements. Si l'individu n'est pas à 100% dans l'une des classes des variables alors nous observons un saut dans la courbe de rachats. Supposons un individu d'âge 65 ans et d'ancienneté 9. Il a une ancienneté 100% importante, mais n'est adulte qu'à 29% et retraité à 71%. Il n'est donc pas à 100% dans une classe d'âge.

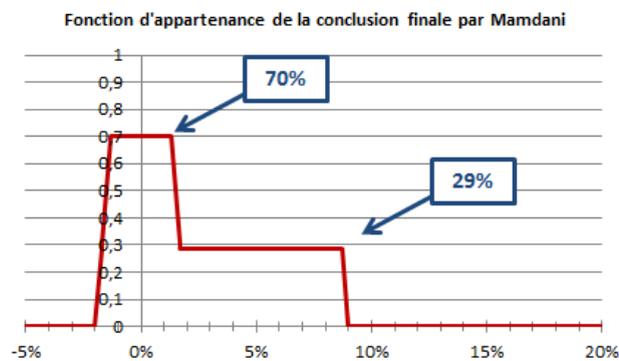
Sa courbe de rachats est la suivante :



Nous observons un choc autour de -1% d'écart de rendements. Ce choc de $+0.4\%$ est dû aux jeux des mécanismes d'activation et d'agrégation qui impacte le centre de gravité. Il n'est pas significatif d'un non fonctionnement du module de logique floue mais seulement des interactions entre les degrés d'appartenance aux ensembles flous, l'activation et l'agrégation.

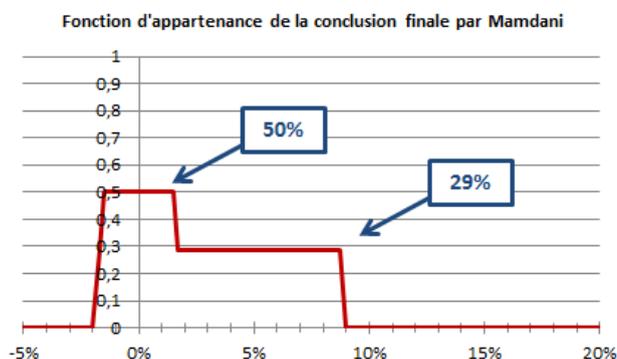
Explications : L'individu a une ancienneté importante mais n'est adulte qu'à 29% et retraité à 71% . Supposons que l'écart des rendements est de -1.1% . Cet écart est alors considéré comme faiblement négatif à 70% et proche de 0 à 30% . Quatre règles floues sont alors déclenchées. D'après la matrice de décisions, trois d'entre-elles concluent à un rachat proche de 0 et une à un rachat positif. Les degrés d'activation de chacune des règles sont trouvés en prenant le minimum des degrés d'appartenance aux différents ensembles flous.

Ecart de rendement	MIN	Ancienneté	MIN	Age de l'assuré	Degré d'activation	Règle
0,70	MIN	1	MIN	0,29	0,29	Positif
0,70	MIN	1	MIN	0,71	0,70	Proche de 0
0,30	MIN	1	MIN	0,29	0,29	Proche de 0
0,30	MIN	1	MIN	0,71	0,30	Proche de 0



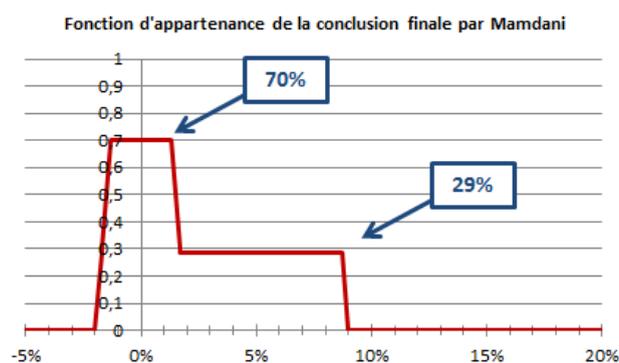
Si l'écart des rendements est de -1% . Cet écart est alors considéré comme faiblement négatif à 50% et proche de 0 à 50%.

Ecart de rendement	MIN	Ancienneté	MIN	Age de l'assuré	Degré d'activation	Règle
0,50	MIN	1	MIN	0,29	0,29	Positif
0,50	MIN	1	MIN	0,71	0,50	Proche de 0
0,50	MIN	1	MIN	0,29	0,29	Proche de 0
0,50	MIN	1	MIN	0,71	0,50	Proche de 0



Si l'écart des rendements est de -0.9% . Cet écart est alors considéré comme faiblement négatif à 30% et proche de 0 à 70%.

Ecart de rendement	MIN	Ancienneté	MIN	Age de l'assuré	Degré d'activation	Règle
0,30	MIN	1	MIN	0,29	0,29	Positif
0,30	MIN	1	MIN	0,71	0,30	Proche de 0
0,70	MIN	1	MIN	0,29	0,29	Proche de 0
0,70	MIN	1	MIN	0,71	0,70	Proche de 0



Dans les trois cas, une seule règle amène à un rachat positif, la première : si l'écart des rendements est faiblement négatif, que l'individu est un adulte avec une ancienneté importante alors le rachat est positif. De plus, l'individu est adulte à 29%. Pour que la règle soit déclenchée, il faut que l'écart de rendements soit faiblement négatif. Cependant, à chaque fois que l'écart de rendements sera faiblement négatif à un degré supérieur à 29%, le plateau de la partie « positive » restera inchangé car le degré d'activation sera toujours de 29%.

L'aire sous la courbe de la fonction d'appartenance finale va donc varier seulement grâce aux trois règles floues restantes. Ces règles concluent à des rachats proches de zéro. Par le jeu de

l'activation (minimum des degré d'appartenance) et de l'agrégation (maximum des degrés d'activation), nous remarquons que le plateau de la partie « proche de 0 » varie. La problème ici est que cette variation du plateau « proche de 0 » n'est pas compensée par une variation de celui « positif ». Ce problème disparaît dès lors que l'écart des rendements est faiblement négatif avec un degré de moins de 29%. En effet, dans ce cas la première règle de décision est activée à moins de 29%. Cette variation vient alors compenser l'augmentation du degré d'activation des autres règles et le taux de rachats diminuera.

Remarque : Si les pentes des fonctions d'appartenance des écart de rendements étaient moins raides, le problème soulevé existerait encore pour les mêmes raisons.

Changer la méthode d'activation ne serait pas cohérent. En effet, nous prenons comme degré d'activation le minimum des degrés d'appartenance pour spécifier que si un individu appartient à un ensemble qu'à $x\%$ alors la règle ne pourra pas être vraie à plus de $x\%$. Ne pouvant donc pas changer le degré d'activation de la première règle, une solution pour réduire ce problème aurait été de changer la méthode d'agrégation en prenant par exemple la moyenne des fonctions d'appartenance des trois conclusions cible restantes et non le maximum. Avec cette méthode, les taux de rachats pour les taux de rendements proposés ci-dessus auraient été identiques mais supérieur de +0.14% à ceux obtenus avec un écart de rendements de -1.2% ou -0.8% . Le choc serait donc toujours présent mais nettement diminué.

Ce phénomène de « choc » de la courbe se produit dès que l'individu répond à ces deux propositions :

- Il n'est pas à 100% dans une classe d'âge ou d'ancienneté du contrat
- Il n'est pas à 50% dans une classe et 50% dans une autre (âge ou ancienneté)

Autrement dit, ce problème apparaît lors des transitions entre les différentes classes d'âge ou d'ancienneté.

Si l'écart des rendements entre taux servi et taux concurrent augmente⁴, il n'est pas logique que le taux de rachats augmente. Ces chocs peuvent donc être vus comme une limite théorique à la logique floue.

Notons tout de même que les chocs produits sont minimes étant donné qu'ils ne dépassent jamais +0.4%. De plus, ils interviennent seulement si la méthode de défuzzification choisie est le centre de gravité. Cependant, nous avons précédemment démontré (partie 5.1.3) que le centre de gravité respectait mieux le raisonnement humain. L'impact étant négligeable car les sauts ne sont pas significatifs, nous avons gardé le modèle en l'état.

Remarque : Cette limite intervient, de façon similaire, lors de la modélisation de la politique de taux servi, lorsque la compagnie est entre deux classes de PPE ou de solvabilité.

4. Rappel : L'écart des rendements est défini de la manière suivante : taux servi - taux concurrent. Si cet écart augmente, cela signifie que les taux se rapprochent et que le taux servi est en devenir d'être supérieur au taux concurrent.

6.3.3 De nouvelles fonctions d'appartenance

L'une des hypothèses fortes faites dans notre module de logique floue est de considérer uniquement des fonctions d'appartenance linéaires par morceaux (trapézoïdales ou triangulaires). Les transitions entre les ensembles flous sont alors linéaires.

Comme nous l'avons vu dans les chapitres précédents, le choix de fonctions linéaires par morceaux a surtout été fait pour simplifier les calculs lors de la défuzzification. Nous aurions pu utiliser des fonctions d'appartenance avec des transitions entre les ensembles flous : hyperboliques (tangente hyperbolique), exponentielles, ou normales.

Si nous changeons la forme des fonctions d'appartenance :

- Il est toujours préférable d'utiliser la méthode d'implication de Mamdani.

La différence que nous avons évoquée entre l'implication de Mamdani et celle de Larsen vient essentiellement de la géométrie des fonctions d'appartenance de conclusion résultantes de l'implication. Le constat reste donc le même : Mamdani offre plus de possibilités de sortie et représente avec plus de cohérence le comportement des individus.

- La défuzzification par centre de gravité reste plus cohérente.

Si les règles de décisions déclenchent une unique conclusion et que la fonction d'appartenance de cette conclusion est symétrique, alors la méthode de défuzzification retenue n'aura pas d'impact sur les résultats. Cependant, si comme c'est souvent le cas, plusieurs règles de décisions sont déclenchées et que l'individu a le choix entre plusieurs groupes lors de la conclusion finale, les remarques faites dans le chapitre précédent (c.f. partie 5.1.3) restent vraies : la défuzzification par la moyenne des maxima contraint l'individu à n'appartenir qu'à un seul groupe. La particularité de la logique floue étant la possibilité d'appartenir à plusieurs ensembles, nous retiendrons toujours la défuzzification par centre de gravité.

6.3.4 Remarques et améliorations

- Nous pourrions augmenter le nombre d'ensemble flous caractérisant chaque variable linguistique. Lors de la modélisation des rachats conjoncturels, pourquoi ne pas prendre 5 classes d'âges ou d'ancienneté au lieu de 3 ? ou créer plus d'ensembles d'écart de rendements ? Rajouter des ensembles flous, permettrait d'affiner les résultats et de les lisser.

Remarque : Il est à noter qu'une augmentation du nombre d'ensembles flous peut complexifier le module de logique floue.

- Nous pourrions augmenter le nombre de variables linguistiques pour préciser le raisonnement humain en perfectionnant les propositions les règles floues.
- Nous pourrions changer la variable de référence : l'écart des rendements. Nous avons utilisé trois critères pour caractériser les assurés. Parmi eux, deux sont représentatifs de l'assuré lui-même (l'âge et l'ancienneté du contrat) et le dernier est un indicateur des conditions du marché (l'écart des rendements). Une nouvelle idée aurait été de lisser la variable des écarts de rendements en prenant en compte l'inertie des assurés. Dans ce cas, la variable

retenue n'est plus l'écart des rendements de l'année en cours mais une moyenne des écarts des années précédentes. En effet, nous pouvons penser qu'un individu ne rachète pas nécessairement son contrat si l'assureur lui sert un taux moins avantageux que la concurrence mais si cela fait plusieurs années qu'il propose des taux moins attractifs.

- Nous pourrions affiner le choix des fonctions d'appartenance de chaque ensemble flou.

6.4 Apport de la logique floue dans le cadre du modèle ALM

Dans cette dernière partie il est question de prendre du recul sur nos résultats et d'expliquer ce qui selon nous justifierait ou non l'utilisation de la logique floue.

6.4.1 L'apport de la logique floue à la modélisation des rachats conjoncturels

Au travers des résultats, nous avons constaté qu'il était possible de reproduire par la logique floue la vision de l'ACP en terme de rachats conjoncturels, via le choix des fonctions d'appartenance et le calibrage de la matrice de décisions. Ce dernier point, qui peut sembler anodin, est le premier argument en faveur de l'utilisation de la logique floue. Nous voyons à travers la logique floue une solution au premier problème que pose la fonction de rachats de l'ACP : **sa justification**.

La construction du module de logique floue rachats, c'est-à-dire la recherche des fonctions d'appartenance et l'élaboration de la matrice de décisions, justifie les taux de rachats conjoncturels appliqués. En effet, lors de nos sensibilités nous avons vu que chaque variation du taux de rachats conjoncturels et par conséquent chaque variation du Best Estimate, pouvait s'expliquer par les choix que nous avons faits lors de la création de la matrice de décision et des fonctions d'appartenance. En argumentant le calibrage de ces deux inputs, nous justifions donc tout simplement les taux de rachats conjoncturels. En d'autres termes, mettre en place une méthodologie floue, c'est faire un lien concret entre les taux de rachats conjoncturels d'un modèle et des hypothèses claires sur le comportement des assurés. Nous pouvons alors conclure que notre module de logique floue calibré sur la vision ACP apporte une justification au calibrage de la courbe de rachats conjoncturels ACP que nous avons utilisée dans le modèle standard.

Proposer une modélisation **fine des rachats conjoncturels** tout en restant fidèle à l'approche de l'ACP est la deuxième force de la logique floue. La logique floue permet pour les compagnies d'assurance au profil singulier de calculer un Best Estimate plus précis : prenant en compte les spécificités de leur passif, sans avoir à passer par le calibrage compliqué de plusieurs fonctions de rachats ACP. Nous avons confirmé cette hypothèse en étudiant la sensibilité du Best Estimate pour des portefeuilles atypiques de par l'âge et l'ancienneté des assurés. Le nombre de compagnies d'assurance pouvant bénéficier d'un Best Estimate plus fidèle grâce à la logique floue peut être élargi. Si une compagnie désire être plus proche des caractéristiques de ses contrats, elle pourra alors rajouter ou modifier des variables linguistiques à son module de logique floue. En effet, il n'est pas absurde de penser que les assurances directes, ne pratiquant pas de frais d'acquisition, ont un risque de rachat conjoncturel différent. Une telle société pourra rajouter la variable linguistique « niveau des frais d'acquisition » pour calculer un Best Estimate plus en accord avec la réalité de son activité et le justifier via un calibrage rigoureux du module de logique floue. **La logique floue se positionne alors comme une généralisation de la fonction de rachat de l'ACP, pouvant être appliquée à tout passif d'assureur vie.**

Par ailleurs, lorsqu'un assureur désire travailler à un niveau de détails précis en termes de rachats conjoncturels, c'est-à-dire attribuer des sensibilités de rachats selon des catégories précises d'individus : **la matrice de décisions apparait comme l'outil idéal**. La logique floue ne permet pas de travailler à un niveau plus fin que l'approche ACP, car comme nous l'avons évoqué, il est possible d'attribuer une fonction de rachats ACP différentes pour plusieurs catégories d'assurés. Ce qui différencie les deux approches, c'est la facilité avec laquelle l'assureur pourra attribuer ou modifier les sensibilités de ces catégories en utilisant un module de logique floue. Via la matrice de décisions, le module de logique floue endosse aussi le rôle d'outil de calibrage intuitif.

Pour résumer, la logique floue :

- Apporte une justification du calibrage de la courbe de rachats conjoncturels proposée par l'ACP.
- Généralise la fonction de l'ACP à l'ensemble des portefeuilles atypiques.
- Est un outil qui simplifie la modélisation des rachats conjoncturels lorsque l'assureur désire atteindre un niveau de précisions élevé.

Au final, la logique floue apporte un réel intérêt à la modélisation des rachats conjoncturels. Il ne faut pas la considérer comme une approche différente qui s'opposerait à la fonction de rachats proposée par l'ACP, mais comme une extension qui permet de résoudre certains problèmes comme la justification et le calibrage.

6.4.2 L'apport de la logique floue à la modélisation des actions des managements

Bien qu'une grande partie de notre étude porte sur les rachats conjoncturels nous avons pu tester la logique floue sur une phase action du management : l'objectif du taux servi.

Les modèles ALM transposent habituellement les décisions du management soit sous la forme de fonctions statiques soit sous la forme de problèmes d'optimisation.

Située entre les deux méthodes, la théorie de la logique floue est une alternative peu coûteuse en matière de modélisation, proche du comportement réel et qui allie à la fois optimisation et approximation dans la prise de décision.

D'autre part, le cadre conceptuel particulier de la logique floue, par le cheminement du calibrage des fonctions d'appartenance et de la matrice de décisions, oblige les compagnies d'assurance à exprimer concrètement avec des termes simples leur politique de gestion. Ainsi le régulateur trouvera dans le module de logique floue le lien qu'il recherche entre la politique réelle du management et sa modélisation.

La logique floue appliquée à la modélisation du management mérite d'être étendue sur d'autres actions du management. Par exemple, il serait particulièrement intéressant de tester une modélisation floue de l'allocation cible ou de la politique d'extériorisation des plus-values latentes sur actions. Prenons l'allocation cible, dans notre modèle, nous obligeons le management à réallouer son portefeuille selon une allocation fixée en début de projection. Une approche souvent privilégiée dans les modèles ALM qui conduit pourtant à des incohérences dans la projection puisque

parfois le management sera amené à réaliser de fortes moins-values latentes afin de satisfaire l'allocation cible. Le problème peut être résolu en intégrant une allocation dynamique, sous forme d'optimisation sous contraintes. Désormais, la logique floue apparaît comme une alternative plus simple et plus intuitive.

6.4.3 Nos recommandations en terme d'industrialisation de la logique floue dans les modèle ALM

L'utilisation de la logique floue pour modéliser les rachats conjoncturels imposerait aux assureurs des ajustements techniques et méthodologiques. Nous allons évoquer les principaux éléments qui sont ressortis durant le déroulement de notre étude.

Du point de vue technique, il nous semble indispensable d'optimiser le temps de calcul d'un taux de rachat logique floue. C'est une problématique propre aux rachats conjoncturels. Contrairement à la modélisation du taux cible nous ne modélisons pas une action (celle du management) mais une multitude de décisions (celles prises par les assurés). Dans notre modèle ALM cela équivaut à une décision par model point, soit 45 décisions par année, 1350 pour une simulation et 13500 pour le calcul d'un Best Estimate. Le passif d'assurance simplifié que nous avons construit nous a permis de bénéficier d'un temps de calcul tout à fait abordable. Indubitablement, le temps de calcul pour une compagnie réelle augmentera avec son nombre de model points⁵.

Le nombre des variables linguistiques ainsi que le pas utilisé, sont eux aussi, des éléments capables d'influencer le temps global de calculs. Dans notre modèle l'ancienneté et l'âge sont exprimés en années tandis que l'écart de taux (exprimé en pourcentage) est arrondi à un chiffre significatif. Concernant les outils ALM « Excel », nous recommandons dans un premier temps une intégration complète du module logique floue sous langage VBA. Cela devrait permettre un premier gain de temps de calculs. Reste à étudier l'intégration possible d'un module de logique floue sur les autres outils ALM du marché (Moses, ERM, Prophète,...).

Du point de vue méthodologique, si la logique floue venait à être utilisée pour modéliser les comportements, nous recommandons un cadre d'utilisation assez libre. Chaque société d'assurance aurait le choix dans le calibrage et les méthodes d'implications et de défuzzifications. En revanche, le régulateur veillerait à ce que chaque choix soit documenté. Afin de remplir leur rôle auprès des assureurs, il serait également nécessaire que les sociétés d'Audit et Conseil soit familières avec la méthodologie floue.

Le calibrage de la matrice de décisions doit être le résultat d'une expertise menée par la compagnie d'assurance sur le comportement de ses assurés. L'argumentation et la justification de cette matrice prend une place centrale dans le cadre d'utilisation de la logique floue que nous recommandons. Pour les rachats conjoncturels, il est donc nécessaire que l'assureur fasse la démarche de comprendre le comportement de ses assurés. A ce sujet nous avons envisagé deux axes qui permettraient aux compagnies d'assurance de pouvoir calibrer correctement cette matrice : un questionnaire de souscription destiné à orienter l'assureur sur le profil du nouvel assuré et des analyses plus précises par les assureurs pour expliquer les causes de rachats.

5. Pour une compagnie disposant de 1000 model points, il y a 30M de décisions floues modélisées si nous gardons 1000 scénarios projetés sur 30 ans.

Le questionnaire de souscription

Fortement utilisés pour la tarification en assurance non-vie, **les formulaires de souscription** permettent à l'assureur d'avoir une vision plus précise du risque que représente l'assuré, réduisant ainsi l'asymétrie d'information qui existe entre les deux contractants. L'idée est d'appliquer le même concept en assurance vie. L'assureur pourrait avoir une vision de son risque de rachats conjoncturels en faisant remplir à ses assurés un formulaire laissant transparaître la sensibilité de ces derniers à l'écart de taux servis entre son assureur et la concurrence.

Voici quelques questions que nous avons imaginées :

- Quels sont vos objectifs de placements (valoriser mon capital, préparer ma retraite, mettre de l'argent de côté, ...)?
- Avez-vous déjà souscrit un produit d'épargne?
- Avez-vous déjà racheté un contrat d'épargne? Si oui, pour quelles raisons? (besoin de liquidité, taux servi insuffisant,...)

Les résultats de ce formulaire serviront au calibrage de la matrice de décisions.

Les analyses sur les causes de rachats

Toujours dans l'objectif d'affiner le calibrage de la matrice de décisions, il serait important que les assureurs fassent la démarche de demander à leurs assurés les causes de rachats (placement sur un produit concurrent, consommation, abaissement de la fiscalité, ...). L'assureur pourra alors déterminer selon les variables linguistiques du module logique flou (âges, ancienneté, ...) les catégories sensibles aux rachats conjoncturels et ainsi justifier le calibrage de sa matrice de décisions.

6.4.4 La place possible de la logique floue dans l'ORSA

Dans cette dernière partie nous allons réfléchir sur les potentialités de la logique floue dans le cadre de la création d'outil de pilotage pour l'ORSA.

Dans un premier temps, rappelons succinctement ce que demande le régulateur à travers cette exigence. L'ORSA est le système d'évaluation interne des risques et de la solvabilité de l'entreprise. Sollicité sur chaque décision stratégique de l'entreprise, l'ORSA permet de faire le lien entre l'environnement risqué dans lequel évolue l'assureur et son plan stratégique à moyen terme. Il s'agit donc pour l'assureur d'évaluer :

- Son besoin en solvabilité, adapté à sa stratégie et aux spécificités de son activité (Capital ORSA).
- Sa capacité à mesurer et piloter son profil de risque.

Le capital ORSA peut être différent du SCR :

- D'une part puisqu'il tient compte du profil de risque de l'assureur (appétence au risque, capacité de prises de risques,...).
- D'autre part, sous réserve de justification, l'assureur a le choix, sur les risques couverts⁶, leur modélisation, l'horizon de projection (3 à 7 ans), le niveau et la mesure de risque utilisé.

Deux points attirent particulièrement notre attention :

Au travers de l'ORSA, le régulateur incite les compagnies d'assurance à mieux comprendre leurs risques. Or en épargne, les deux risques les plus coûteux en capital réglementaire sont : le risque financier et le risque d'anticipation du comportement des assurés (le rachat). Le fait même de modéliser les rachats conjoncturels par la logique floue, poussera les assureurs qui voudront calibrer rigoureusement leur matrice de décisions, à mieux comprendre le comportement de leurs assurés.

D'autre part l'ORSA demande aux compagnies d'assurances de mettre en relation leurs décisions stratégiques avec les risques propres à leur activité. Pour le management, la logique floue peut alors être utilisée comme un outil de pilotage et d'aide à la décision. Le management à la possibilité via la logique floue de modéliser sa politique de gestion pour ensuite tester sa robustesse en univers stressé. La flexibilité de la matrice de décisions permettra au management d'effectuer de nombreux stress tests destinés à dégager une politique de gestion conforme à l'appétence aux risques de l'assureur.

Si la logique floue est amenée à être utilisée par les assureurs, c'est par l'intermédiaire de l'ORSA qu'elle devrait apparaître. La logique floue a les qualités requises pour devenir un outil de pilotage ORSA récurrent. Par ailleurs, un calibrage rigoureux et argumenté comme nous l'avons précédemment décrit permettra de satisfaire le régulateur en terme de justification et d'adéquation de la modélisation et de ses hypothèses.

6. Il doit tout de même prendre en compte les risques de la formule standard.

Conclusion

Nous avons pour objectif d'appliquer la théorie de la logique floue à la modélisation comportementale dans la cadre d'un modèle ALM en épargne afin de capter les imprécisions de la pensée humaine.

Pour cela, nous avons d'abord construit un premier module de logique floue destiné à modéliser les rachats conjoncturels des assurés. Nous avons ensuite appliqué cette théorie à la modélisation d'une action du mangement : l'objectif de taux servis.

A travers la construction de ces deux modules, nous avons découvert une théorie rigoureuse, fondée sur une méthodologie précise, en trois phases : la fuzzification, l'inférence floue et la défuzzification. Cette théorie est articulée grâce à des règles de décisions floues regroupées au sein de la matrice de décisions. Lors du calibrage de cette matrice, pilier central de la logique floue, l'expertise est indispensable et les intuitions essentielles. Alors que dans la logique classique une proposition ne peut être vraie et fausse à la fois, l'univers du flou nous permet d'apporter une souplesse nécessaire pour retranscrire le raisonnement humain.

Nous avons ensuite comparé le Best Estimate d'une société d'assurance vie fictive obtenu par modélisation floue et modélisation standard grâce à un outil ALM préalablement construit. Toutes les hypothèses formulées dans la matrice de décisions se retranscrivent dans nos résultats. Par ailleurs, nous avons démontré que notre matrice de décisions permettait de retrouver la vision des rachats conjoncturels de l'ACP du modèle standard. Avec des hypothèses formulées de façon très simple, la logique floue a permis de justifier en partie le calibrage de la fonction de rachat de l'ACP.

La matrice de décision peut être considérée comme un outil idéal par sa simplicité d'utilisation. Elle est capable de généraliser l'approche ACP à tous types de portefeuilles et d'attribuer ou de modifier les comportements en matière de rachats pour des catégories d'individus très précises.

La politique de taux servis est initialement transposée sous forme de fonction statique dans notre modèle standard. La modélisation floue propose une meilleure représentation de la réalité tout en optimisant la revalorisation des assurés dans le modèle. Cependant, l'apport essentiel de la logique floue se trouve ailleurs. La logique floue est une méthodologie permettant au management d'exprimer clairement sa politique de gestion et de la retranscrire dans la modélisation des décisions du management. Naturellement la prochaine étape serait d'appliquer cette théorie à d'autres actions du management.

Ensuite, des axes de développement quant à une intégration de la logique floue au sein des compagnies d'assurance ont été abordés. Un cadre d'utilisation rigoureux et des améliorations techniques seront, tout de même, nécessaires pour appliquer la théorie au sein des modèles ALM.

Dans le contexte réglementaire de Solvabilité 2, la logique floue devrait trouver sa place au sein de l'ORSA comme outil de pilotage et d'aide à la décision.

Enfin, les actuaires sont bien placés pour jouer un rôle majeur dans l'essor de la logique floue au sein des modèles ALM. Après tout, il est du devoir de l'actuaire de trouver les solutions innovantes de demain.

Bibliographie

- [CG98] F. Chevrie and F. Guely. La logique floue. Collection Technique, Cahier technique 191, Groupe Schneider, 1998.
- [Gal06] L. Galliou. Réformes de l'assurance : Recherche d'une solution cohérente dans le cadre de l'assurance vie. Mémoire d'Actuariat - ISFA, 2006.
- [Ger10] G. Gerber. Allocation d'actifs sous Solvabilité 2 : Cas de l'assurance vie épargne. Mémoire d'Actuariat - Université Paris Dauphine, 2010.
- [GGG99] Todd P.M. Gigerenzer G. and ABC Research Group. Simple heuristics that make us smart. 1999.
- [L.A65] Zadeh L.A. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8 :338 – 353, 1965.
- [L.A68] Zadeh L.A. Fuzzy algorithm. *Information and Control*, 12 :94 – 102, 1968.
- [L.A73] Zadeh L.A. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. *IEE Trans. Systems, Man and Cybernetics*, 3 :28 – 44, 1973.
- [L.A75] Zadeh L.A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. information science. Part I : 8, 301 - 357 :Part III : 9, 43 – 80, 1975.
- [Les] M. Lescieux. Introduction à la logique floue - Application à la commande floue. Présentation.
- [Mil10] S. Loisel & X. Milhaud. Les comportements de rachat en Assurance Vie en régime de croisière et en période de crise. 2010.
- [Ohn08] E. Ohnouna. Evaluation Best Estimate de contrats d'épargne en euros. Mémoire d'Actuariat - ULP, 2008.
- [Ono11] R. Onomo. Projet de normes IFRS 4 phase 2 : Vers une nouvelle comptabilisation des contrats d'assurance. Mémoire d'Actuariat - ISUP, 2011.
- [Pil11] F. Henge & M. Pillaudin. Des copules à la logique floue. Présentation Optimind - Université d'été Solvabilité II - Journée technique, 2011.
- [Pla03] J. Jacquemin & F. Planchet. L'utilisation de méthodes de simulation en assurance - Partie I : Générer des nombres aléatoires. *Bulletin français d'actuariat*, Vol. 6, N 11 :3-35, 2003.
- [Sla07] N. Sladoje. Fuzzy sets and fuzzy techniques - Lecture 11 Defuzzification. Centre for Image Analysis - Uppsala University, 2007.
- [Sur11] A. Suru. Le rachat : modélisations et préconisations. Mémoire d'Actuariat - Université Paris Dauphine, 2011.
- [Tok11] Ioane Muni Toke. Modèles stochastiques de taux d'intérêt. *Bulletin français d'actuariat*, 2011.

Annexe A

Paramètres de l'algorithme de MORO

Paramètres de l'Algorithme de MORO	
a0	2,5066282388
a1	-18,6150062529
a2	41,3911977353
a3	-25,4410604964
b0	1,0000000000
b1	-8,4735109309
b2	23,0833674374
b3	-21,0622410183
b4	3,1308290983
c0	7,7108870705
c1	2,7772013534
c2	0,3614964129
c3	0,0373418233
c4	0,0028297143
c5	0,0001625717
c6	0,0000080173
c7	0,0000003841
c8	0,0000000130
k1	0,4179886425
k2	4,2454686881

FIGURE A.1 – Ensemble des paramètres de l'algorithme de MORO

Annexe B

Démonstrations du modèle de Hull & White

Le modèle de Hull & White est caractérisé par la propriété suivante : sous la probabilité risque neutre Q , le taux court instantané est solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dr_t = (\theta_t - ar_t) dt + \sigma dW_t$$

Démonstration de l'équation de θ_t

Le modèle de Hull & White reproduit exactement la courbe des taux ZC, si :

$$\theta_t = \frac{d}{dt}f(0, t) + a.f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at})$$

Démonstration :

Nous supposons que le prix du zéro-coupon en t de maturité T s'écrit comme une fonction de t et du taux court r_t . Nous avons donc : $P(t, T) = f(t, r_t)$.

Appliquons la formule d'Itô à f , dans le but de trouver une équation aux dérivées partielles vérifiée par f .

$$\begin{aligned} dP(t, T) &= df(t, r_t) \\ &= \frac{df}{dt} dt + \frac{df}{dr_t} dr_t + \frac{1}{2} \frac{df^2}{d^2r_t} d \langle r_t \rangle \\ &= \frac{df}{dt} dt + \frac{df}{dr_t} (\theta_t - ar_t) dt + \frac{df}{dr_t} \sigma dW_t + \frac{1}{2} \frac{df^2}{d^2r_t} \sigma^2 dt \\ &= \left(\frac{df}{dt} + \frac{df}{dr_t} (\theta_t - ar_t) + \frac{1}{2} \frac{df^2}{d^2r_t} \sigma^2 \right) dt + \frac{df}{dr_t} \sigma dW_t \end{aligned}$$

Or sous la probabilité risque neutre, $dP(t, T) = r_t P(t, T) dt$ car le ZC est considéré comme l'actif sans risque. Par unicité, nous obtenons l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\boxed{\frac{df}{dt} + \frac{df}{dr_t} (\theta_t - ar_t) + \frac{1}{2} \frac{df^2}{d^2r_t} \sigma^2 = r_t P(t, T)} \quad (1)$$

De plus, $f(T, r_t) = P(T, T) = 1$ par définition d'un zéro-coupon.

Nous cherchons alors à trouver une solution de cette équation de la forme :

$$f(t, r_t) = P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T) \times r_t}$$

En dérivant P en fonctions de t et r_t et en simplifiant par $e^{-B(t, T) \times r_t}$:

$$\frac{dA(t, T)}{dt} - \frac{dB(t, T)}{dt} A(t, T) r_t - \theta_t A(t, T) B(t, T) + a r_t A(t, T) B(t, T) + \frac{1}{2} \sigma^2 A(t, T) B^2(t, T) - A(t, T) r_t = 0$$

Avec : $A(T, T)e^{-B(T, T) \times r_T} = 1$

Et par conséquent, le système d'équations différentielles ordinaires suivant :

$$\begin{cases} \frac{dA(t, T)}{dt} - \theta_t A(t, T) B(t, T) + \frac{1}{2} \sigma^2 A(t, T) B^2(t, T) = 0 & (2) \\ 1 + \frac{dB(t, T)}{dt} - a B(t, T) = 0 & (3) \end{cases}$$

Avec : $A(T, T) = 1$ et $B(T, T) = 0$

En appliquant la méthode de variation de la constante pour résoudre le système suivant ((3) et $B(T, T) = 0$) :

$$\begin{cases} 1 + \frac{dB(t, T)}{dt} - a B(t, T) = 0 & (3) \\ B(T, T) = 0 \end{cases}$$

Nous obtenons

$$B(t, T) = \frac{1}{a}(1 - e^{-a(T-t)})$$

En intégrant l'équation (2) de t à T , nous obtenons :

$$\ln(A(t, T)) = - \int_t^T \theta_u B(u, T) du + \frac{1}{2} \sigma^2 \int_t^T B^2(u, T) du$$

Or,

$$\begin{aligned} \int_t^T B^2(u, T) du &= \frac{1}{a^2} \int_t^T (1 - e^{-a(T-u)})^2 du \\ &= \frac{1}{a^2} (T - t) - \frac{2}{a^2} \int_t^T e^{-a(T-u)} du + \frac{1}{a^2} \int_t^T e^{-2a(T-u)} du \\ &= \frac{1}{a^2} (T - t) - \frac{2}{a^2} \left[\frac{1}{a} e^{-a(T-u)} \right]_t^T + \frac{1}{a^2} \left[\frac{1}{2a} e^{-2a(T-u)} \right]_t^T \\ &= \frac{1}{a^2} (T - t) - \frac{2}{a^2} B(t, T) + \frac{1}{2a^3} (1 - e^{-2a(T-t)}) \\ &= \dots \\ &= \frac{1}{a^2} (T - t) - \frac{1}{a^2} B(t, T) + \frac{1}{2a} B^2(t, T) \end{aligned}$$

Et donc

$$\ln(A(t, T)) = - \int_t^T \theta_u B(u, T) du - \frac{\sigma^2}{2a} (B(t, T) - (T - t)) - \frac{\sigma^2}{4a} B^2(t, T)$$

Avec l'expression de A et B , nous avons l'expression des prix ZC dans Hull & White, nous pouvons en déduire une expression des taux forwards instantanés d'aujourd'hui pour toutes les maturités T :

$$\begin{aligned}
 f(0, T) &= -\frac{d}{dT} \ln(P(0, T)) \\
 &= -\frac{d}{dT} (\ln(A(0, T)) - B(0, T)r_0) \\
 &= \int_0^T \theta_u \frac{dB(u, T)}{dT} du + \frac{\sigma^2}{2a^2} \left(\frac{dB(0, T)}{dT} - 1 \right) + \frac{\sigma^2}{2a} B(0, T) \frac{dB(0, T)}{dT} + \frac{dB(0, T)}{dT} r_0 \\
 &= \int_0^T \theta_u \frac{dB(u, T)}{dT} du + \frac{dB(0, T)}{dT} r_0 - \frac{\sigma^2}{2a} B(0, T) + \frac{\sigma^2}{2a} B(0, T) \frac{dB(0, T)}{dT} \quad 1 \\
 &= \int_0^T \theta_u \frac{dB(u, T)}{dT} du + \frac{dB(0, T)}{dT} r_0 - \frac{\sigma^2}{2a} B(0, T) \left(1 - \frac{dB(0, T)}{dT} \right)
 \end{aligned}$$

Si nous dérivons par T , nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 \frac{df}{dT}(0, T) &= \theta_T + \int_0^T \theta_u \frac{dB^2(u, T)}{dT^2} du + \frac{dB^2(0, T)}{dT^2} r_0 - \frac{\sigma^2}{2a} \left(\frac{dB(0, T)}{dT} - \left(\frac{dB(0, T)}{dT} \right)^2 \right) - \frac{dB^2(0, T)}{dT^2} B(0, T) \\
 &= \dots \\
 &= \theta_T - af(0, T) - \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2aT})
 \end{aligned}$$

D'où

$$\theta_T = \frac{df}{dT}(0, T) + af(0, T) + \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2aT})$$

Finalement, nous pouvons considérer que le modèle est calibré sur les données de marché si pour toutes les maturités, $f(0, T)$ est le taux forward instantané observé sur le marché à la date 0. Nous avons donc bien :

$$\theta_t = \frac{d}{dt} f(0, t) + a.f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2at})$$

Montrons que le taux court est gaussien et calculons sa moyenne et sa variance

Rappelons la dynamique de r_t

$$dr_t = (\theta_t - ar_t) dt + \sigma dW_t$$

où W_t est un mouvement brownien sous la probabilité risque neutre Q .

Appliquons le lemme d'Itô au processus $r_t e^{at}$

$$\begin{aligned}
 d(r_t e^{at}) &= ar_t e^{at} dt + e^{at} dr_t \\
 &= \theta_t e^{at} dt + e^{at} \sigma dW_t
 \end{aligned}$$

D'où :

$$r_t e^{at} = r_s e^{as} + \int_s^t \theta_u e^{au} du + \sigma \int_s^t e^{au} dW_u$$

Autrement dit, le taux court peut s'écrire :

$$r_t = r_s e^{-a(t-s)} + \int_s^t \theta_u e^{-a(t-u)} du + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW_u$$

En remplaçant θ_u par la valeur trouvée précédemment et en remarquant que

$$\int_s^t \theta_u e^{au} du = [e^{au} \alpha(u)]_s^t$$

où $\alpha(t) = f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-at})^2$

Nous avons $\int_s^t \theta_u e^{au} du = e^{at} \alpha(t) - e^{as} \alpha(s)$

Par conséquent,

$$r_t = r_s e^{-a(t-s)} + \alpha(t) - e^{-a(t-s)} \alpha(s) + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW_u$$

Cette égalité montre que dans le modèle de Hull & White, le taux court est gaussien et de moyenne et de variance :

$$- \mathbb{E}(r_t | F_s) = r_s e^{-a(t-s)} + \alpha(t) - e^{-a(t-s)} \alpha(s)$$

$$- \mathbb{V}(r_t | F_s) = \sigma^2 \frac{(1 - e^{-2a(t-s)})}{2a}$$

Car :

$$- \mathbb{E}(\int_s^t e^{-a(t-u)} dW_u) = 0$$

$$- \mathbb{V}(\int_s^t e^{-a(t-u)} dW_u) = \int_s^t e^{-2a(t-u)} du$$

Nous pouvons donc approximer r_t par :

$$\forall s < t, r_t \approx r_s e^{-a(t-s)} + f(0, t) - e^{-a(t-s)} f(0, s) + \sigma \sqrt{\frac{(1 - e^{-2a(t-s)})}{2a}} \xi_t$$

où $\xi_t \leftrightarrow N(0, 1)$

Prix du zéro-coupon

Dans les démonstrations précédentes, nous avons montré que pour un prix de la forme $P(t, T) = A(t, T) e^{-B(t, T) \times r_t}$, nous avons :

$$B(t, T) = \frac{1}{a}(1 - e^{-a(T-t)})$$

$$\ln(A(t, T)) = - \int_t^T \theta_u B(u, T) du - \frac{\sigma^2}{2a}(B(t, T) - (T - t)) - \frac{\sigma^2}{4a} B^2(t, T)$$

L'expression de $B(t, T)$ est donc démontrée. Pour trouver la valeur de $A(t, T)$, il suffit de remplacer θ_t par la valeur trouvée lors de la première démonstration et remarquer que comme le taux forward instantané est défini de la manière suivante

$$f(t, T) = - \frac{d \ln(P(t, T))}{dT}$$

alors

$$\ln\left(\frac{P(0, T)}{P(0, t)}\right) = - \int_t^T f(0, u) du$$

Pour conclure, le prix est tel que :

$$\begin{aligned} - A(t, T) &= \frac{P(0, T)}{P(0, t)} \times \exp\left[B(t, T)f(0, t) - \frac{\sigma^2}{4a}(1 - e^{-2at})B^2(t, T)\right] \\ - B(t, T) &= \frac{(1 - e^{-a(T-t)})}{a} \end{aligned}$$