



**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE**

---

**FACOLTÀ DI ECONOMIA**  
Corso di Laurea in Scienze Statistiche ed Attuariali

Tesi di Laurea in Statistica Assicurativa

**Procedimenti ricorsivi per valutazioni su sistemi**  
**Bonus-Malus con franchigia e non**

*Laureando:*  
Roberto MALATTIA

*Relatore:*  
Prof. Luciano SIGALOTTI

*Correlatore:*  
Prof.ssa Patrizia GIGANTE

---

ANNO ACCADEMICO 1999-2000

# INDICE

	pag.
<b>Introduzione .....</b>	<b>i</b>
<b>Capitolo 1 Le valutazioni con procedimenti ricorrenti....</b>	<b>1</b>
1.1 Introduzione .....	1
1.2 Il procedimento ricorrente .....	2
1.3 Procedimento ricorrente per collettività aperte .....	5
1.4 Modelli probabilistici per i numeri di sinistri .....	7
1.4.1 Il procedimento ricorrente in ipotesi di processo markoviano omogeneo per gli arrivi di sinistri .....	8
1.4.2 Il procedimento ricorrente in ipotesi di processo Poisson-gamma per gli arrivi di sinistri .....	9
<b>Capitolo 2 Modelli con franchigia .....</b>	<b>12</b>
2.1 Introduzione .....	12
2.2 Descrizione della polizza con franchigia .....	13
2.3 Processo markoviano di arrivi. Collettività chiusa .....	15
2.3.1 Le ipotesi sul processo del risarcimento globale .....	15
2.3.2 L'esborso atteso nel periodo $t$ .....	16
2.3.3 Procedimento ricorrente .....	20
2.4 Processo markoviano di arrivi. Collettività aperta .....	25
2.5 Processo Poisson-gamma. Collettività chiusa .....	29

## **Capitolo 3 Autoliquidazione ..... 37**

3.1	Introduzione .....	37
3.2	Autoliquidazione e soglie di autoliquidazione .....	38
3.3	Processo delle denunce. Il procedimento ricorrente nel caso di autoliquidazione .....	40
3.3.1	Processo markoviano omogeneo .....	45
3.3.2	Processo Poisson-gamma .....	46
3.3.3	Generalizzazione del modello .....	46

## **Capitolo 4 Costruzione di scale adattate al portafoglio ...49**

4.1	Introduzione .....	49
4.2	Costruzione di scale di coefficienti di premio per portafogli omogenei .....	49
4.3	Le scale di coefficienti di premio adattate al portafoglio .....	51

## **Capitolo 5 Risultati di esperienze numeriche ..... 55**

5.1	Introduzione .....	55
5.2	Dati utilizzati nelle esperienze numeriche e stima delle distribuzioni ... ..	56
5.3	I sistemi Bonus-malus .....	58
5.4	Esperienze numeriche con il modello base (assenza di franchigia e autoliquidazione) .....	62
5.4.1	Coefficienti medi di premio e premi di equilibrio .....	63
5.4.2	Esborsi attesi e premi Bonus-malus .....	65
5.5	Esperienze numeriche in presenza di autoliquidazione .....	69
5.6	Esperienze numeriche in presenza di franchigia .....	71

## **Bibliografia ..... 110**

## **Introduzione**

I sistemi Bonus-malus con franchigia rappresentano una forma molto attuale di sistema di tariffazione in base all'esperienza. Sia la presenza delle penalizzazioni previste con i sistemi Bonus-malus che la presenza della franchigia sono forme di coinvolgimento dell'assicurato nella gestione del rischio.

L'assicuratore può essere interessato a valutarne l'impatto sul suo portafoglio di rischi, in varie ipotesi sui livelli delle franchigie e anche nell'ipotesi di cambiare sistema Bonus-malus per esempio cambiando i coefficienti di premio. L'andamento del portafoglio può essere studiato attraverso l'evoluzione della ripartizione degli assicurati nelle classi di merito al variare del tempo, del coefficiente medio di premio oppure attraverso gli interventi sul premio di riferimento generale necessari per mantenere l'equilibrio di gestione in termini attesi.

Per ottenere queste grandezze nella letteratura attuariale sono proposti diversi approcci. Molto usata è l'impostazione che si rifà al comportamento asintotico del sistema Bonus-malus, che in convenienti ipotesi raggiunge una stazionarietà. Un altro approccio è quello del calcolo simulativo. Un altro ancora è quello che consiste nello sviluppo di procedimenti ricorsivi (o ricorrenti) per il calcolo delle grandezze di interesse. Infatti la situazione di regime ben difficilmente viene raggiunta in pratica, perché si osserva che i sistemi Bonus-malus vengono cambiati abbastanza spesso e quindi è meglio pensare a valutazioni al finito.

In questa tesi sono presentati i procedimenti ricorsivi seguendo quanto fatto nel lavoro "Recursive Procedures to Evaluate Bonus-Malus Systems" (Gigante. P., Picech L., Sigalotti L.; 1999).

Gli elementi probabilistici necessari per effettuare le valutazioni sono il processo di arrivo dei sinistri e le distribuzioni di danno, elementi questi stimabili da parte dell'assicuratore.

I modelli proposti per i processi di arrivo dei sinistri sono il markoviano omogeneo ed il Poisson-gamma. Con il primo si ottengono procedimenti ricorsivi in modo esatto (senza approssimazioni), invece con il secondo il procedimento è ottenuto in via approssimata.

Dapprima la collettività degli assicurati è supposta chiusa ma successivamente si è considerato anche il caso di nuovi ingressi in percentuale prefissata.

I procedimenti si complicano quando si vuole tenere conto di franchigia e / o di autoliquidazione dei sinistri. Infatti, in questo caso si deve tenere conto che il processo di arrivo dei sinistri e delle denunce non sono più coincidenti. Le complicazioni sono tuttavia ad un livello ragionevole e i procedimenti ricorrenti si possono estendere, e una volta implementati consentono valutazioni numeriche delle grandezze di interesse. Inoltre si prestano ad analizzare di diversi livelli di franchigia ed anche l'effetto dell'introduzione di diverse forme di franchigia.

Lo studio dell'autoliquidazione ha interesse soprattutto quando si vuole capire quale può essere l'impatto di sistemi Bonus-malus particolarmente penalizzanti.

Sistemi di questo tipo possono essere pensati per ottenere una buona descrizione dei rischi con portafogli in equilibrio, in termini attesi, tra incassi ed esborsi. Ma l'autoliquidazione può ridurre, anche considerevolmente, gli aspetti auspicati.

I procedimenti ricorrenti offrono poi la strada per il calcolo di scale di coefficienti non asintotiche o asintotiche, disegnate in modo da dare premi vicini ai premi equi. Inoltre essi consentono di valutare le differenze attese tra premi equi e premi Bonus-malus nelle varie classi di merito e nelle varie epoche.

A questo proposito è interessante la proposta, dovuta a G. Taylor (1997), di usare scale di coefficienti adattate al portafoglio, che tengano conto della composizione a priori del portafoglio stesso. Queste scale pur essendo le stesse per ogni sottoportafoglio forniscono premi che si avvicinano a quelli equi.

Passiamo ora ad una breve indicazione dei contenuti dei diversi capitoli.

Nel Capitolo 1 si descrivono i procedimenti ricorrenti base per collettività chiuse e aperte per i due modelli per il processo di arrivo dei sinistri.

Nel Capitolo 2, che si rifà essenzialmente al lavoro di P. Gigante “Un modello per una tariffa RCA Bonus-malus con franchigia” (1996), viene affrontata la costruzione di procedimenti ricorrenti per sistemi Bonus-malus con franchigia. Nel Capitolo 3 si considera l'effetto dell'autoliquidazione di sinistri. Si parte con la descrizione del comportamento "ragionevole" di un assicurato "attento" che, dalle valutazioni sulle conseguenze di denunciare o non denunciare sinistri, ottiene le soglie di convenienza nell'autoliquidazione. Tenendo conto di queste soglie, che rappresentano una sorta di franchigia, si può descrivere il procedimento ricorrente. Nel Capitolo 4 si considera la costruzione di scale di coefficienti di premio. Infine, il Capitolo 5, è dedicato alla presentazione di alcune delle esperienze numeriche effettuate. I dati utilizzati per la stima delle grandezze probabilistiche relativi ad un portafoglio reale. E' stato considerato sia il caso di un sistema Bonus-malus assegnato, sia quello di sistemi Bonus-malus con scale disegnate opportunamente. In particolare, è stata considerata la scala adattata al portafoglio proposta nel Capitolo 4. Il portafoglio considerato è quello ottenuto ripartendo gli assicurati in base all'età.

Una notevole parte del lavoro presentato in questa tesi è stata svolta durante il periodo di stage presso l'Ufficio Studi delle Assicurazioni Generali di Trieste. Desidero ringraziare tutto lo staff dell'Ufficio Studi per il supporto fornitomi. In particolare il Dott. Stefano Ferri per le proficue discussioni ed i suggerimenti con i quali ha seguito la fase di impostazione del lavoro e la predisposizione delle elaborazioni numeriche.

# **CAPITOLO 1**

## **LE VALUTAZIONI CON PROCEDIMENTI RICORRENTI**

### **1.1 Introduzione**

Si consideri un assicuratore il quale voglia ottenere delle indicazioni sull'andamento di un proprio portafoglio di rischi R.C.A. con formula tariffaria Bonus-malus.

L'assicuratore ha informazioni sulla sinistrosità delle polizze del proprio portafoglio di rischi e vuole valutare, a fronte di un assegnato sistema Bonus-malus, quale sarà l'andamento nel tempo della collettività di assicurati.

In particolare sarà interessato alla ripartizione degli assicurati nelle classi di merito del sistema, al livello medio dei premi introitati, agli interventi sul premio (o sui premi) di riferimento necessari per mantenere l'equilibrio tra introiti ed esborsi attesi, nonché ad altre valutazioni di tipo tecnico-attuariale.

La letteratura attuariale che si è occupata di questi problemi ha adottato per lo più una impostazione in cui si studia il comportamento asintotico del sistema (vedi "Bonus malus systems in automobile insurance", Lemaire (1988)).

In altre impostazioni invece le grandezze di interesse sono calcolate attraverso procedimenti ricorrenti (vedi Pitacco (1978), Sigalotti (1991, 1994), Picech, Visintin (1996) e Gigante (1997)), in altre ancora sono seguiti procedimenti simulativi.

L'impostazione che qui viene seguita è quella proposta nel lavoro "Recursive Procedures to Evaluate Bonus-Malus Systems" (Gigante. P., Picech L., Sigalotti L.;

1999) dove sono presentati modelli per il calcolo in via ricorrente delle grandezze che interessano.

La descrizione probabilistica parte da un'ipotesi sul processo di arrivi dei sinistri e da essa con opportuni procedimenti ricorrenti si ottengono le grandezze di interesse al variare del tempo. Nel lavoro citato e in questa tesi sono considerate due diverse ipotesi per il processo di arrivi dei sinistri: la markoviana omogenea e l'ipotesi di processi Poisson-gamma.

Viene inoltre considerato il problema del calcolo ricorrente in presenza di collettività aperta a nuovi ingressi.

## 1.2 Il procedimento ricorrente

Un sistema Bonus-malus si definisce attraverso i seguenti elementi:

?? Le classi di merito, indicate con  $1, \dots, H$

??  $s$ , la classe di ingresso dei nuovi assicurati

?? le regole di ingresso di assicurati provenienti da altra forma assicurativa

?? le regole evolutive che informano in quale classe di merito viene posto un rischio assicurato sulla base della classe occupata e del numero dei sinistri riportati nel periodo precedente

?? la *scala di coefficienti di premio*, indicata con  $(\alpha_1, \dots, \alpha_H)$ : il premio per un rischio in classe  $h$  si ottiene moltiplicando un *premio di riferimento*,  $P_t$ , per il coefficiente  $\alpha_h$ .

Si consideri un portafoglio di rischi omogenei cioè appartenenti alla stessa classe tariffaria, portafoglio che viene supposto chiuso, ovvero senza nuovi ingressi o uscite di assicurati.

Si assumono le seguenti ipotesi probabilistiche.

Si ipotizza che la classe di merito nel primo anno sia il *parametro di rischio* del processo del numero dei sinistri di ogni rischio. La distribuzione degli assicurati tra le varie classi Bonus-malus nel primo anno è la distribuzione del parametro di rischio ovvero la funzione di struttura.

Al fine di determinare l'impatto del sistema Bonus-malus sul portafoglio di rischi, sotto queste ipotesi, è sufficiente lo studio di un unico rischio preso a caso nel portafoglio. Con riferimento a questo rischio nell'anno  $t$ , si indichi con  $N_t$  il numero dei sinistri, e con  $Z_{it}$ , l'importo del danno per l' $i$ -esimo sinistro,  $i = 1, 2, \dots$ , con  $X_t$  il risarcimento globale e con  $Y_t$  la classe di merito.

Si introducono, a questo punto, gli elementi di valutazione del sistema Bonus-malus.

Si inizia dalla distribuzione di probabilità di  $Y_t$ . Sotto le nostre ipotesi, essa fornisce anche la distribuzione degli assicurati tra le classi di merito nell'anno  $t$ . Il numero atteso di assicurati nelle classi è dato da:

$$(1.1) \quad n_h^{(t)} = n^{(1)} \Pr(Y_t = h) \quad h = 1, \dots, H,$$

dove  $n^{(1)}$  indica il numero di assicurati nel portafoglio. Inoltre, dalla distribuzione di probabilità di  $Y_t$  si può ottenere il *coefficiente medio di premio*, dato da

$$(1.2) \quad b_t = \sum_{h=1}^H \Pr(Y_t = h) \beta_h.$$

Si definisce *premio di equilibrio* per un portafoglio di rischi, il premio di riferimento che rende uguali l'introito globale atteso e l'esborso globale atteso. Nelle nostre ipotesi, il premio di equilibrio per l'anno  $t$  è la soluzione della seguente equazione in  $P_t$

$$(1.3) \quad P_t \sum_{h=1}^H \Pr(Y_t = h) \beta_h = E(X_t).$$

Sotto le solite ipotesi che portano alla distribuzione composta per  $X_t$  (per ogni  $n$ ,  $Z_{it} | N_t = n, \dots, Z_{nt} | N_t = n$  sono stocasticamente indipendenti e ugualmente distribuiti; e inoltre la distribuzione di  $Z_{it} | N_t = n$  non dipende da  $n$ ), l'esborso atteso nell'anno  $t$  è

$$(1.4) \quad E(X_t) = E(Z)E(N_t) + E(Z) \sum_{h=1}^H E(N_t | Y_t = h) \Pr(Y_t = h),$$

dove  $E(Z)$  rappresenta il costo atteso per singolo sinistro, supposto invariante nel tempo.

Per calcolare tutte queste quantità serve conoscere le distribuzioni di  $Y_t$  e  $(Y_t, N_t)$ . A questo punto si introduce il procedimento ricorrente per ottenere queste distribuzioni partendo dalle distribuzioni di  $Y_1$  e  $N_1 | Y_1 = h$ , che sono stimabili direttamente dai dati.

Sia  $\gamma(h, k)$  la classe di arrivo dopo un anno essendo  $h$  la classe di partenza e  $k$  il numero di sinistri denunciati. Si assume che il numero dei sinistri denunciati da un assicurato in un anno sia al più  $m$ , di solito si fissa  $m = 4$ .

Se si indica con  $\gamma(j) = \gamma(h, k) \in \{1, \dots, H\} \times \{1, \dots, m\} | \gamma(h, k) = j$ , ovvero l'insieme delle coppie (classe iniziale, numero di sinistri) che implicano il trasferimento della polizza dalla classe  $h$  in classe  $j$ , si ha:

$$(1.5) \quad \Pr(Y_{t+1} = j) = \sum_{(h, k_t) \in \gamma(j)} \Pr(Y_t = h_t, N_t = k_t),$$

e

$$(1.6) \quad \Pr(Y_{t+1} = j, N_{t+1} = k) = \sum_{(h_t, k_t) \in \gamma(j)} \Pr(Y_t = h_t, N_t = k_t, N_{t+1} = k)$$

$$= \sum_{(h_t, k_t) \in \gamma(j)} \Pr(Y_t = h_t, N_t = k_t) \Pr(N_{t+1} = k | Y_t = h_t, N_t = k_t).$$

Pertanto, le distribuzioni di  $Y_{t+1}$  e  $(Y_{t+1}, N_{t+1})$  relative al tempo  $t+1$ , si determinano dalle distribuzioni al tempo  $t$  di  $Y_t$  e  $(Y_t, N_t)$  e dalle distribuzioni di  $(N_{t+1} | Y_t = h_t, N_t = k_t)$ ,  $h_t = 1, \dots, H$ ;  $k_t = 0, \dots, m$ .

*Osservazione 1.2.a*

Con riferimento ai numeri aleatori  $(N_{t+1} | Y_t = h_t, N_t = k_t)$ , è opportuno osservare che, poiché  $Y_t$  è funzione di  $Y_1, N_1, \dots, N_{t-1}$ , per la proprietà di disintegrabilità della probabilità, si ottiene:

$$\Pr(N_{t+1} = k | Y_t = h_t, N_t = k_t) =$$

$$\sum_{i_1, \dots, i_{t-1}} \Pr(Y_1 = h_1, N_1 = k_1, \dots, N_{t-1} = k_{t-1}, N_t = k_t | Y_t = h_t, N_t = k_t)$$

$$\Pr(N_{t+1} = k | Y_1 = h_1, N_1 = k_1, \dots, N_{t-1} = k_{t-1}, N_t = k_t),$$

dove la sommatoria è estesa a tutte le  $t$ -tuple  $(h_1, k_1, \dots, k_{t-1})$  tali che l'evento  $(Y_1 = h_1, N_1 = k_1, \dots, N_{t-1} = k_{t-1}, N_t = k_t)$  implichi  $(Y_t = h_t, N_t = k_t)$ .

La proprietà di disintegrabilità qui applicata in questa particolare circostanza, si rivelerà utile anche nel seguito.

### 1.3 Procedimento ricorrente per collettività aperte

Si considera ora di avere una collettività di rischi omogenei aperta a nuovi ingressi.

Precisamente, si suppone che in ogni anno ci sia un incremento percentuale costante, di aliquota  $\alpha$ , per effetto di ingressi di nuovi rischi assicurati e che non ci siano uscite dalla collettività.

Si suppone ancora che i nuovi rischi siano tutti collocati nella classe d'ingresso  $s$ . Per quanto riguarda la struttura probabilistica del modello, si assume che per ogni assicurato, i processi del numero dei sinistri e delle entità di danno dei vari sinistri seguano le ipotesi che sono state assunte nel caso di collettività chiusa. Inoltre, si suppone che tutti i nuovi assicurati abbiano la stessa sinistrosità, quella attribuita a tutti gli assicurati presenti nella collettività all'epoca 0. Per il generico assicurato, si indica con  $a(k)$  la probabilità che  $k$  sia il numero dei sinistri nell'anno di ingresso.

Fissata un'epoca  $t+1$  e un generico assicurato presente in  $t+1$  nella collettività, la probabilità di appartenenza dell'assicurato alla classe  $h$  può essere descritta nella forma

$$\Pr(Y_{t+1} = h | H_{t+1}) = \Pr(H_t | H_{t+1}) \Pr(Y_{t+1} = h | H_t = H_{t+1}) \\ \Pr(\bar{H}_t | H_{t+1}) \Pr(Y_{t+1} = h | \bar{H}_t = H_{t+1}),$$

dove  $H_t$  indica l'evento "l'individuo è nella collettività nell'anno  $t$ ",  $t = t, t+1$ .

Analogamente

$$\Pr(Y_{t+1} = h = N_{t+1} = k | H_{t+1}) = \Pr(H_t | H_{t+1}) \Pr(Y_{t+1} = h = N_{t+1} = k | H_t = H_{t+1}) \\ \Pr(\bar{H}_t | H_{t+1}) \Pr(Y_{t+1} = h = N_{t+1} = k | \bar{H}_t = H_{t+1}).$$

In forza delle ipotesi fatte, possiamo porre

$$\Pr(\bar{H}_t | H_{t+1}) = \frac{?}{??1}.$$

Si ha poi

$$\Pr(Y_{t+1} = h | \bar{H}_t = H_{t+1}) = 1_{hs},$$

ove  $1_{hs}$  è 1 se  $h = s$ , 0 altrimenti;

$$\Pr(Y_{t+1} = h = N_{t+1} = k | \bar{H}_t = H_{t+1}) =$$

$$\Pr(Y_{t+1} = h | \bar{H}_t = H_{t+1}) \Pr(N_{t+1} = k | Y_{t+1} = h = \bar{H}_t = H_{t+1}) = 1_{hs} a(k).$$

Inoltre poiché non ci sono uscite dalla collettività,  $H_t$  implica  $H_{t+1}$  e quindi

$$\Pr(Y_{t+1} = h | H_t = H_{t+1}) = \Pr(Y_{t+1} = h | H_t) \text{ e}$$

$$\Pr(Y_{t+1} = h | N_{t+1} = k | H_t = H_{t+1}) = \Pr(Y_{t+1} = h | N_{t+1} = k | H_t).$$

Le precedenti relazioni diventano allora

$$(1.7) \quad \Pr(Y_{t+1} = h | H_{t+1}) = (1 - \frac{?}{??1}) \Pr(Y_{t+1} = h | H_t) + \frac{?}{??1} 1_{hs},$$

$$(1.8) \Pr(Y_{t+1} = h | N_{t+1} = k | H_{t+1}) = (1 - \frac{?}{??1}) \Pr(Y_{t+1} = h | H_t) + \frac{?}{??1} 1_{hs} a(k),$$

dalle quali si vede che, in definitiva le probabilità che interessano dipendono dalla  $\Pr(Y_{t+1} = h | H_t)$  e dalla  $\Pr(Y_{t+1} = h | N_{t+1} = k | H_t)$ . Queste ultime possono essere calcolate tramite il procedimento ricorsivo descritto nel paragrafo precedente.

## 1.4 Modelli probabilistici per i numeri di sinistri

Relativamente al processo di arrivi del numero di sinistri  $\{N_t, t > 0\}$  si considerano due ipotesi. Si suppone che, subordinatamente ad ogni classe di merito inizialmente occupata, sia una catena markoviana omogenea oppure un processo di tipo Poisson-gamma cioè mistura di processi Poissoniani con distribuzione misturante Gamma. Nei sottoparagrafi successivi viene descritta la procedura ricorrente per i due tipi di modelli probabilistico assunti per tale processo.

### 1.4.1 Il procedimento ricorrente in ipotesi di processo markoviano omogeneo per gli arrivi di sinistri

Si suppone che, per ogni  $h = 1, \dots, H$ ,  $\{N_t | Y_1 = h, t > 0\}$  sia un processo markoviano omogeneo con matrice di transizione  $P(h) = [p(h;k,g)]$ ,  $p(h;k,g) = \Pr(N_{t+1} = g | Y_1 = h, N_t = k)$ .

In questa prima ipotesi, è utile considerare la seguente relazione ricorrente analoga alla (1.6), scritta per le probabilità condizionate

(1.9)

$$\Pr(Y_{t+1} = j, N_{t+1} = k | Y_1 = h)$$

$$= \sum_{(h_t, k_t) \neq (j)} \Pr(Y_t = h_t, N_t = k_t | Y_1 = h) \Pr(N_{t+1} = k | Y_t = h_t, N_t = k_t, Y_1 = h).$$

Per la proprietà di disintegrabilità (vedi anche Osservazione 1.1.a) e per la proprietà markoviana, si ottiene

$$\Pr(N_{t+1} = k | Y_t = h_t, N_t = k_t, Y_1 = h) = p(h; k_t, k).$$

Assumendo che le matrici  $P(h)$ ,  $h = 1, \dots, H$ , siano note, in quanto stimate dai dati, la relazione (1.9) fornisce in modo ricorrente le distribuzioni di  $(Y_{t+1}, N_{t+1}) | Y_1 = h$ ,  $h = 1, \dots, H$ . La distribuzione congiunta di  $(Y_{t+1}, N_{t+1})$  perciò è

$$\Pr(Y_{t+1} = j, N_{t+1} = k) = \sum_{h=1}^H \Pr(Y_1 = h) \Pr(Y_{t+1} = j, N_{t+1} = k | Y_1 = h)$$

#### 1.4.2 Il procedimento ricorrente in ipotesi di processo Poisson-gamma per gli arrivi di sinistri

Si assume che il processo  $\{N_t | Y_1 = h, t > 0\}$  sia di tipo Poisson-gamma. Indicati con  $r_h, c_h$  i parametri della distribuzione misturante Gamma, risulta

$$E(N_t | Y_1 = h) = \frac{r_h}{c_h} \text{ e } \text{VAR}(N_t | Y_1 = h) = \frac{r_h}{c_h} \left( \frac{1}{c_h} + \frac{r_h}{c_h^2} \right), h = 1, \dots, H.$$

I parametri  $r_h, c_h$  si possono stimare dalla sinistrosità osservata per gli assicurati presenti in classe  $h$ , per esempio attraverso il metodo dei momenti. Poiché la distribuzione di  $(N_{t+1} | Y_1 = h_1, N_1 = k_1, \dots, N_{t-1} = k_{t-1}, N_t = k_t)$  è di tipo

binomiale negativa  $\{r_{h_1}, \dots, k_s, c_{h_1}, t\}$ , da Osservazione 1.2.a, si ha che la

distribuzione di  $(N_{t+1} | Y_t = h_t, N_{t+1} = k_t)$  è una mistura di binomiali negative i cui coefficienti dipendono dalla classe occupata al primo anno e dal numero dei sinistri riportati dall'assicurato, che fanno arrivare un rischio alla classe  $h_t$  al tempo  $t$ . Questo basta a far capire che al crescere di  $t$  i calcoli necessari per determinare le distribuzioni crescono in complessità così rapidamente da diventare ben presto praticamente impossibili. Si considera allora una approssimazione da applicarsi ad ogni passo del procedimento, volta ad ovviare a tale inconveniente. A questo punto risulta utile presentare in dettaglio la descrizione dei passi iniziali della procedura.

Al tempo 2, si ha

$$\Pr(Y_2 = j) = \sum_{(h_1, k_1) \in \mathcal{J}} \Pr(Y_1 = h_1, N_1 = k_1),$$

$$\Pr(Y_2 = j | N_2 = k) = \sum_{(h_1, k_1) \in \mathcal{J}} \Pr(Y_1 = h_1, N_1 = k_1) \Pr(N_2 = k | N_1 = k_1, Y_1 = h_1)$$

Queste distribuzioni possono essere calcolate facilmente; infatti, la distribuzione di  $(Y_1, N_1)$  è data e quella di  $N_2 | N_1 = k_1, Y_1 = h_1$  è una distribuzione binomiale negativa di parametri  $\{r_{h_1}, k_1, c_{h_1}, 1\}$ .

Al tempo 3, con la (1.5) e nota la distribuzione congiunta di  $(Y_2, N_2)$  si ottiene la distribuzione di  $Y_3$ . Per ottenere la distribuzione di  $(Y_3, N_3)$ , dalla (1.6), si vede che



---

Con queste probabilità e la distribuzione di  $(Y_2, N_2)$ , dalla (1.6), si ottiene la distribuzione di  $(Y_3, N_3)$ . Il procedimento continua secondo quanto visto al passo precedente.

*Osservazione 1.4.2.a*

E' interessante notare che le relazioni ricorrenti (1.5), (1.6) possono essere scritte anche per le probabilità  $\Pr(Y_{t+1} = j \mid Y_t = h)$ ,  $\Pr(Y_{t+1} = j \mid N_{t+1} = k \mid Y_t = h)$ ,  $h = 1, \dots, H$ .

Si è preferito considerare le probabilità non condizionate per evitare di approssimare le distribuzioni di  $N_{t+1} \mid Y_t = h$  ?  $Y_1 = h$  per ogni  $h$ . Così è infatti sufficiente approssimare le distribuzioni pesate di  $N_{t+1} \mid Y_t = h_t$ .

## CAPITOLO 2

### MODELLI CON FRANCHIGIA

#### 2.1 Introduzione

Il capitolo è dedicato a presentare procedimenti ricorrenti per valutazioni su sistemi Bonus-malus in cui sia prevista una franchigia.

Si fa riferimento ad un tipo di franchigia abbastanza generale cioè una franchigia assoluta, dipendente dalle classi di merito, e in forme particolari, dipendente anche dal tempo. Polizze con questa modalità di franchigia sono presenti nel mercato.

La presenza di franchigia fa sì che i processi di arrivi dei sinistri e delle denunce di sinistri non vengono più a coincidere, come avviene invece nei modelli del Capitolo 1. Il procedimento ricorrente diventa inevitabilmente più pesante, anche se in ipotesi particolari sui numeri di arrivi di sinistri rimane possibile implementare questi procedimenti.

L'impostazione seguita in questo capitolo si riconduce principalmente all'articolo "Un modello per una tariffa RCA bonus-malus con franchigia" di Gigante P. (1997).

Nel paragrafo 2.2 è descritta la tariffa Bonus-malus con franchigia considerata nei modelli successivi.

In 2.3 viene ripreso il procedimento per collettività aperte presentato nel Capitolo 1 e qui ulteriormente sviluppato per le analisi con la franchigia.

Successivamente, nel paragrafo 2.4 viene considerato il processo di arrivi markoviano. Infine, nel paragrafo 2.5, viene considerato il processo di arrivi Poisson-gamma. L'impostazione è un adattamento di quella del caso markoviano. Il caso di collettività aperta è considerato limitatamente al modello markoviano.

## 2.2 Descrizione della polizza con franchigia

Si considera un modello tariffario che combina un sistema di tipo Bonus-malus con un sistema a franchigia assoluta. Questa è variabile con la classe di merito, fissa per ogni sinistro di una annualità assicurativa ed espressa in percentuale del premio.

Si precisa fin d'ora che i premi qui si intendono al netto di caricamenti, sia per sicurezza, sia per spese.

La tariffa prevede di ripartire gli assicurati in  $H$  classi. Ad ognuna corrisponde un coefficiente di premio ed un'aliquota di franchigia. Si conviene di contrassegnare le classi con i numeri naturali da 1 a  $H$  e di indicare con  $\alpha_h, \beta_h$  rispettivamente l'aliquota da applicare al premio per ottenere la franchigia e il coefficiente di premio per un rischio di classe  $h$ ,  $h = 1, \dots, H$ . Si indica poi con  $q$ ,  $1 < q < H$ , la "classe di riferimento", caratterizzata dalla coppia  $(\alpha_q, \beta_q)$ , con  $\alpha_q, \beta_q = 1$ .

Si suppone ancora che i coefficienti che caratterizzano le classi soddisfino le condizioni

$0 < \alpha_h < \alpha_{h+1} < 1, \beta_h < \beta_{h+1}, h = 1, \dots, H-1, (\alpha_h, \beta_h) < (\alpha_j, \beta_j), h < j$ . Le classi sono pertanto ordinate per valori crescenti delle coppie  $(\alpha_h, \beta_h)$ .

Se si considera un portafoglio di polizze relative a rischi sufficientemente omogenei (per anzianità di patente, zona territoriale di circolazione, potenza fiscale e uso del veicolo, ...) e si indica con  $P$  il premio (equo) di riferimento relativo a questa categoria di rischi ad una fissata epoca, il premio e la franchigia per un assicurato di classe  $h$  sono, rispettivamente,  $\alpha_h P$  e  $\beta_h \alpha_h P$ .

Per quanto riguarda le regole evolutive del modello, l'attribuzione di un assicurato alle varie classi è effettuata tenendo conto della classe precedentemente occupata e del numero dei risarcimenti di cui l'assicurato usufruisce per sinistri causati nel corso del periodo precedente il rinnovo della polizza, secondo le modalità indicate in Tabella 1.

Sinistri di importo superiore alla franchigia nell'ultimo periodo di osservazione	Conseguenze
Nessun sinistro	Migliora di una classe fino al raggiungimento della classe 1
1 sinistro	Peggiora di due classi fino al raggiungimento della classe H
2 sinistri	Peggiora di cinque classi fino al raggiungimento della classe H
3 o più sinistri	Peggiora di otto classi fino al raggiungimento della classe H

Tabella 1

Tali regole evolutive erano previste per la tariffa Bonus-malus dopo l'ultima revisione della tariffa avvenuta nel 1991 e anche attualmente, in regime di liberalizzazione della tariffa RCA, sono applicate da molte Compagnie.

Si osserva che le regole evolutive possono essere descritte da

$$h = \begin{cases} \max(j - 1, 1) & \text{se } r = 0 \\ \min(H, j - 3r + 1) & \text{se } r = 1, 2, 3 \end{cases}$$

avendo indicato con  $h$  e  $j$  le classi di arrivo e di partenza e con  $r$  il minimo tra 3 e il numero dei risarcimenti a carico dell'assicuratore.

Per definire compiutamente il sistema, occorre ancora precisare le classi in cui vengono inseriti i nuovi assicurati e quelli provenienti da altre tariffe.

Si indica con  $s$ ,  $s \leq q$ , la classe di ingresso per i nuovi assicurati. Poiché in quanto segue si suppongono ingressi solo di nuovi assicurati, non sarà necessario precisare le regole di inserimento di assicurati provenienti da altra tariffa.

## 2.3. Processo markoviano di arrivi. Collettività chiusa

### 2.3.1 Le ipotesi sul processo del risarcimento globale

Al fine di analizzare gli effetti della tariffa descritta nel precedente paragrafo 2.2, si considera una collettività di rischi omogenei e si suppone in un primo momento che la collettività in esame sia “chiusa”, che non vi siano cioè né uscite, né ingressi di assicurati. Si suppone inoltre che ogni sinistro che supera la franchigia sia denunciato e che per ognuno l’assicuratore paghi l’eccedenza rispetto alla franchigia. Si misura il tempo in anni e si indica con 0 l’istante iniziale. Si introducono ora gli enti aleatori che permettono di descrivere la dinamica temporale del generico contratto.

Con i simboli già considerati nel Capitolo 1 si riprende la condizione di equilibrio tra esborso atteso e incasso atteso.

Il valore del premio di riferimento  $P_t^e$  per cui riesce  $E(X_t) = \sum_{h=1}^H \Pr(Y_t = h) P_t^e$ , è

il *premio di equilibrio* in  $t$ . Si noti che il premio di equilibrio compare implicitamente anche a primo membro: l’esborso atteso dipende infatti dal livello della franchigia che è espressa in percentuale del premio in  $t$  ed è quindi proporzionale al premio di riferimento.

Per quanto riguarda il processo di arrivi dei sinistri si suppone intanto che in un generico anno di contratto, una polizza possa essere colpita al più da  $m$  sinistri. Eventualmente  $N_t = m$  potrà indicare l’evento “nell’anno  $t$ , la polizza è colpita da  $m$  o più sinistri”. Usualmente si assume  $m = 4$ . Assumiamo per questo processo l’ipotesi markoviana omogenea, cioè che

$$\Pr(N_{t+1} = k | N_t = n, E) = \Pr(N_{t+1} = k | N_t = n) = p_{nk},$$

qualunque siano  $t > 0$ ,  $n, k = 0, \dots, m$  ed  $E$  un evento che descrive una qualunque informazione sui numeri dei sinistri che si sono verificati nelle epoche  $1, \dots, t-1$  (nel seguito per un evento di questo tipo, si dirà anche che  $E$  è un evento logicamente dipendente da  $N_1, \dots, N_{t-1}$ ).

Si suppone poi:

- (1) indipendenza stocastica tra processi  $\{N_t, t > 0\}$ ,  $\{Y_1, Z_{it}, i = 1, 2, \dots, t > 0\}$
- (2) indipendenza e uguale distribuzione per il processo dei danni  $\{Z_{it}, i = 1, 2, \dots, t > 0\}$
- (3) indipendenza stocastica tra  $\{Z_{it}, i = 1, 2, \dots, t > 0\}$  e  $Y_1$ .

È interessante osservare che tra le ipotesi accolte vi è l'indipendenza stocastica tra il processo del numero dei sinistri e  $Y_1$ , classe occupata dal rischio nel primo anno, e quindi anche tra  $N_1$  e  $Y_1$ . Poiché però l'evoluzione tra le classi è legata alla sinistrosità, è ragionevole pensare che ne risulti una dipendenza tra i processi  $\{N_t, t > 0\}$ ,  $\{Y_t, t > 0\}$ . Infatti una correlazione tra essi è indotta, nonostante l'ipotesi di indipendenza tra  $\{N_t, t > 0\}$  e  $Y_1$ , dal meccanismo di evoluzione e dall'ipotesi di dipendenza markoviana per il processo di arrivo dei sinistri.

Le altre ipotesi assunte sono usuali nei modelli adottati per lo studio della sinistrosità in assicurazioni RCA. Si osserva che in particolare due di tali ipotesi, l'indipendenza stocastica di  $N_t$  da  $\{Z_{it}, i = 1, 2, \dots\}$ , e l'indipendenza e uguale distribuzione dei numeri aleatori del processo  $\{Z_{it}, i = 1, 2, \dots\}$ , sono molto forti e spesso contrastano con le osservazioni statistiche. Esse rispondono principalmente all'esigenza di rendere trattabili analiticamente i modelli. L'ipotesi di omogeneità per il processo  $\{N_t, t > 0\}$  è abbastanza ragionevole per brevi orizzonti temporali.

### 2.3.2 L'esborso atteso nel periodo $t$

Dopo queste premesse, passiamo al calcolo delle quantità che interessano. Per l'esborso atteso in  $t$  si ha:

$$E(X_t) = \int_0^H \Pr(Y_t \geq h) E(X_t | Y_t \geq h) dh$$

Ponendo  $Z_{0t} = X_{0t} = 0$ , riesce

$$E(X_t | Y_t = h) = \sum_{k=0}^m \Pr(N_t = k | Y_t = h) E\left(\sum_{i=0}^k X_{it} | Y_t = h, N_t = k\right)$$

$$= \sum_{k=0}^m \Pr(N_t = k | Y_t = h) E(X_{it} | Y_t = h, N_t = k),$$

e quindi

$$E(X_t) = \sum_{h=1}^H \Pr(Y_t = h) \sum_{k=0}^m \Pr(N_t = k | Y_t = h) E(X_{it} | Y_t = h, N_t = k)$$

Si osserva che in questa somma, se in corrispondenza ad una coppia (h,k) di valori possibili per (Y\_t, N\_t) riesce  $\Pr(Y_t = h, N_t = k) = 0$ . Interesserà vedere allora come si possono rappresentare le  $E(X_{it} | Y_t = h, N_t = k)$ ,  $i = 1, \dots, k$ , se l'evento condizionante ha probabilità positiva.

Per il tipo di risarcimento cui siamo interessati si ha  $X_{it} = \max(0, Z_{it} - d_t)$ , essendo  $d_t$  il valore della franchigia per l'anno t. Conseguentemente,

$$(2.1) \quad E(X_{it} | Y_t = h, N_t = k) = E[\max(0, Z_{it} - d_t | P_t) | Y_t = h, N_t = k],$$

dove  $P_t$  è il premio di riferimento in t.

Consideriamo la distribuzione di  $Y_t$ . Se indichiamo con  $R_t$  il minimo tra 3 e il numero dei risarcimenti di cui l'assicurato usufruisce nell'anno t e con  $\mathcal{H}(h)$  l'insieme delle coppie dei valori di  $(Y_t, R_t)$  che in base alle regole evolutive permettono di raggiungere classe h in t+1:

$$\mathcal{H}(h) = \{(j, r) \in \{1, \dots, H\} \times \{0, 1, 2, 3\} | (Y_t = j, R_t = r) \Rightarrow (Y_{t+1} = h)\},$$

allora

$$(Y_t = h) = \sum_{(j,r) \in \mathcal{H}(h)} (Y_{t+1} = j, R_{t+1} = r).$$

Posto:

$$A_{jt}^{(0)}(k) = \sum_{n=1}^k (Z_{nt} \cdot \dots \cdot j P_t),$$

$$A_{jt}^{(1)}(k) = \sum_{n=1}^k [(Z_{nt} \cdot \dots \cdot j P_t) \cdot \sum_{s=n}^k (Z_{st} \cdot \dots \cdot j P_t)],$$

$$A_{jt}^{(2)}(k) = \sum_{n,v}^k [(Z_{nt} \cdot \dots \cdot j P_t) \cdot (Z_{vt} \cdot \dots \cdot j P_t) \cdot \sum_{s=n,v}^k (Z_{st} \cdot \dots \cdot j P_t)],$$

$$A_{jt}^{(3)}(k) = \sum_{\substack{n,v,s \\ n \neq v, n \neq s \\ v \neq s}}^k [(Z_{kt} \cdot \dots \cdot j P_t) \cdot (Z_{vt} \cdot \dots \cdot j P_t) \cdot (Z_{st} \cdot \dots \cdot j P_t)]$$

nell'ipotesi accolta che ogni sinistro superiore alla franchigia sia denunciato, si ha:

$$(Y_t \cdot j \cdot R_t \cdot r) = \sum_j Y_t \cdot j \cdot \sum_{k=0}^m [N_t \cdot k \cdot A_{jt}^{(r)}(k)].$$

Possiamo allora rappresentare  $(Y_t = h)$  nella forma

$$(Y_t = h) = \sum_{(j_{t-1}, r_{t-1}) \in (h)} (Y_{t-1} \cdot j_{t-1} \cdot \sum_{k=0}^m [N_{t-1} \cdot k \cdot A_{j_{t-1}, r_{t-1}}^{(r_{t-1})}(k)]).$$

Rappresentando ora in modo analogo  $(Y_{t-1} = j_{t-1})$ , si ottiene per  $(Y_t = h)$  la seguente espressione:

$$(Y_t = h) = \sum_{j'} \sum_{j''} Y_{t-2} \cdot j_{t-2} \cdot \sum_{k=0}^m [N_{t-2} \cdot k \cdot A_{j_{t-1}, r_{t-2}}^{(r_{t-2})}(k)] \cdot \sum_{k=0}^m [N_{t-1} \cdot k \cdot A_{j_{t-1}, r_{t-1}}^{(r_{t-1})}(k)]$$

dove la somma logica  $\sum_{j'}$  è estesa a tutte le coppie  $(j_{t-1}, r_{t-1}) \in (h)$  e la somma

logica  $\sum_{j''}$  è estesa a tutte le coppie  $(j_{t-2}, r_{t-2}) \in (j)$ .

Procedendo, si ottiene allora che  $(Y_t = h)$  è somma logica di eventi del tipo

$$(2.2) \quad (Y_t = j_t) = \bigcup_{k \geq 0} [N_1 = k \wedge A_{j_1,1}^{(r_2)}(k)] \wedge \dots \wedge \bigcup_{k \geq 0} [N_{t-1} = k \wedge A_{j_{t-1},t-1}^{(r_{t-1})}(k)].$$

Nella (2.1), l'evento ipotesi è pertanto somma logica (finita) di eventi del tipo

$$K = (Y_1 = j_1) \wedge (N_1 = k_1 \wedge \dots \wedge N_{t-1} = k_{t-1} \wedge N_t = k) \wedge (A_{j_1,1}^{(r_1)}(k_1) \wedge \dots \wedge (A_{j_{t-1},t-1}^{(r_{t-1})}(k_{t-1})))$$

in cui  $E = (N_1 = k \wedge \dots \wedge N_{t-1} = k_{t-1} \wedge N_t = k)$  è logicamente dipendente da  $N_1, \dots$

,  $N_t$  e  $A = (A_{i_1,1}^{(r_1)}(k_1) \wedge \dots \wedge A_{i_{t-1},t-1}^{(r_{t-1})}(k_{t-1}))$  è logicamente dipendente da  $Z_{i_s}, s = 1, \dots, t-1$ ,  $i$

$\geq k_s$ .

Poiché il numero aleatorio  $\max(0, Z_{it} - \sum_{h=1}^i P_t)$  è funzione di  $Z_{it}$  che non compare nella descrizione degli eventi del tipo  $K$ , per l'ipotesi (2) si ha che

$$E(\max(0, Z_{it} - \sum_{h=1}^i P_t) | K) = E(\max(0, Z_{it} - \sum_{h=1}^i P_t) | N_t = k)$$

per ogni  $K$  di probabilità positiva.

Conseguentemente,

$$(2.3) \quad E[\max(0, Z_{it} - \sum_{h=1}^i P_t) | Y_t = h \wedge N_t = k] = E[\max(0, Z_{it} - \sum_{h=1}^i P_t) | N_t = k]$$

Tenendo ancora conto dell'ugual distribuzione dei  $Z_{it} | N_t = k$ , ponendo

$E[\max(0, Z - \sum_{h=1}^i P_t)]$  per la speranza matematica a secondo membro della (2.3), si

ha

$$E(X_t | Y_t = h) = \sum_{k \geq 0} \Pr(N_t = k | Y_t = h) k E(\max(0, Z - \sum_{h=1}^i P_t))$$

$$= E(\max(0, Z - \sum_{h=1}^i P_t)) E(N_t | Y_t = h).$$

Si ottiene infine

$$(2.4) \quad E(X_t) = \sum_{h=1}^H \Pr(Y_t = h) E(\max(0, Z_{it} - P_t)) E(N_t | Y_t = h).$$

Per calcolare l'esborso atteso in  $t$  bisogna quindi risalire alle distribuzioni di  $Y_t$  e di  $N_t | Y_t = h, h=1, \dots, H$ . Note queste distribuzioni e assegnata la distribuzione del danno del singolo sinistro, se  $P_t$  è un premio di riferimento fissato (per es. fissato in 0 e costante nel tempo) la (2.4) fornisce l'esborso atteso in  $t$ , la

$$\sum_{h=1}^H \Pr(Y_t = h) P_t, \text{ fornisce il premio atteso in } t; \text{ per ottenere invece il}$$

premio di equilibrio, la  $E(X_t) = P_t$ , cioè la

$$\sum_{h=1}^H \Pr(Y_t = h) E(\max(0, Z_{it} - P_t)) E(N_t | Y_t = h) = \sum_{h=1}^H \Pr(Y_t = h) P_t,$$

va vista come equazione in  $P_t$ .

### 2.3.3 Procedimento ricorrente

Interessa ora mettere in evidenza che basta assegnare le distribuzioni di probabilità della classe  $Y_1$  di appartenenza nel primo anno, del danno  $Z_{1t}$  del singolo sinistro, del numero  $N_1$  dei sinistri nel primo anno e la matrice delle probabilità condizionate di transizione per il processo  $\{N_t, t > 0\}$ , per ottenere in modo ricorrente le distribuzioni che interessano.

Data la distribuzione del danno del singolo sinistro,  $F(z) = \Pr(Z_{it} \leq z | N_t = k)$ ,  $k > 1$ , la distribuzione di  $Y_{t+1}$  si può ottenere a partire dalle distribuzioni di  $Y_t$  e di  $(Y_t, N_t)$ . Si ha infatti

$$(2.5) \quad \Pr(Y_{t+1} = h) = \sum_{(h,r) \in (j)} \Pr(Y_t = h | R_t = r) \sum_{(h,r) \in (j)} \Pr(Y_t = h) \Pr(R_t = r | Y_t = h).$$

Osservato ora che

$$\Pr(R_t = 0 | Y_t = h) = \Pr\left(\sum_{k=0}^m [N_t = k \wedge A_{ht}^{(0)}(k)] | Y_t = h\right)$$

$$= \sum_{k=0}^m \Pr(N_t = k | Y_t = h) \Pr\left(\sum_{i=1}^k (Z_{it} = ?_h ?_h P_t) | Y_t = h, N_t = k\right)$$

$$= \sum_{k=0}^m \Pr(N_t = k | Y_t = h) \Pr\left(\sum_{i=1}^k (Z_{it} = ?_h ?_h P_t | N_t = k)\right),$$

dove l'ultima uguaglianza è dovuta all'ipotesi (2) (ciò si giustifica con considerazioni analoghe a quelle che hanno portato alla (2.3)).

Sfruttando l'ipotesi (1), si ottiene

$$\Pr(R_t = 0 | Y_t = h) = \sum_{k=0}^m \Pr(N_t = k | Y_t = h) F(?_h ?_h P_t)^k.$$

Analogamente, si ricavano poi le

$$\Pr(R_t = 1 | Y_t = h) = \sum_{k=0}^m \Pr(N_t = k | Y_t = h) k (1 - F(?_h ?_h P_t)) F(?_h ?_h P_t)^{k-1}$$

$$\Pr(R_t = 2 | Y_t = h) = \sum_{k=0}^m \Pr(N_t = k | Y_t = h) \binom{k}{2} (1 - F(?_h ?_h P_t))^2 F(?_h ?_h P_t)^{k-2}$$

e conseguentemente, per complemento a 1, la

$$\Pr(R_t = 3 | Y_t = h) = \sum_{k=0}^m \Pr(N_t = k | Y_t = h) F_h(P_t)^k (1 - F_h(P_t))^{m-k} \\ = \sum_{k=0}^m F_h(P_t)^k (1 - F_h(P_t))^{m-k}.$$

La sostituzione di queste espressioni nella (2.5) mostra, come detto, che la distribuzione di probabilità della classe di appartenenza in  $t+1$  rimane determinata se sono dati il premio di riferimento in  $t$ , la distribuzione di  $Y_t$  e la distribuzione congiunta di  $(Y_t, N_t)$ . Per quest'ultima si ha:

$$(2.6) \quad \Pr(Y_{t+1} = j | N_{t+1} = k) = \sum_{(h,r)} \Pr(Y_t = h | R_t = r | N_{t+1} = k).$$

Se  $r = 0$ , gli addendi a secondo membro sono del tipo

$$\Pr(Y_t = h | \sum_{n=0}^m [N_t = n | A_{ht}^{(0)}(n)] | N_{t+1} = k) = \\ = \sum_{n=0}^m \Pr(Y_t = h | N_t = n | A_{ht}^{(0)}(n) | N_{t+1} = k) \\ = \sum_{n=0}^m \Pr(Y_t = h | N_t = n) \Pr(A_{ht}^{(0)}(n) | Y_t = h | N_t = n) \Pr(N_{t+1} = k | Y_t = h \\ | N_t = n | A_{ht}^{(0)}(n)).$$

Come già osservato si ha

$$\Pr(A_{ht}^{(0)}(n) | Y_t = h | N_t = n) = F_h(P_t)^n.$$

Inoltre, se l'evento ha probabilità positiva, riesce

$$\Pr(N_{t+1} = k | Y_t = h, N_t = n, A_{ht}^{(0)}(n)) = \Pr(N_{t+1} = k | N_t = n),$$

cioè, condizionatamente alla conoscenza del numero di sinistri che si sono verificati in  $t$ , il numero dei sinistri dell'anno  $t+1$  è stocasticamente indipendente dalla classe occupata dal rischio in  $t$  e dalle entità dei danni dell'anno  $t$ . Questa uguaglianza si giustifica facilmente osservando che l'evento ipotesi si può rappresentare come somma logica (finita) di eventi del tipo  $(Y_t = j) \cap E \cap A$ , con  $E$  logicamente dipendente da  $N_1, \dots, N_{t-1}, N_t$  ed  $A$  logicamente dipendente da  $Z_{is}, s = t, i = n_s, n_t = n$  (in seguito alla rappresentabilità di  $(Y_t = h)$  come somma logica di eventi del tipo (2.2)).

Condizionatamente ad una generica di queste ipotesi di probabilità positiva, per l'ipotesi (3) si ha

$$\Pr(N_{t+1} = k | Y_t = j \cap E \cap A) = \Pr(N_{t+1} = k | E).$$

Ricordando ora che  $E$  è un evento del tipo  $(N_1 = k_1 \cap \dots \cap N_{t+1} = k_{t+1} \cap N_t = k)$ , per l'ipotesi markoviana sul processo di arrivo dei sinistri si ha

$$\Pr(N_{t+1} = n | Y_t = j \cap E \cap A) = \Pr(N_{t+1} = k | N_t = k)$$

e la probabilità finale è sempre la stessa, qualunque sia l'evento condizionante di probabilità positiva preso tra quelli di cui  $(Y_t = h, N_t = n, A_{ht}^{(0)}(n))$  è somma logica. Allora è pari a  $\Pr(N_{t+1} = k | N_t = n)$  anche la probabilità dell'evento condizionato alla somma logica. Pertanto,

$$\Pr(Y_t = h, N_t = n, R_t = 0, N_{t+1} = k) =$$

$$\sum_{n=0}^m \Pr(Y_t = h, N_t = n) F_h^n P_t^n \Pr(N_{t+1} = k | N_t = n).$$

Analogamente, per gli altri addendi si hanno le

$$\Pr(Y_t = h \mid N_t = n, R_t = 1, N_{t+1} = k)$$

$$= \sum_{n=0}^m \Pr(Y_t = h \mid N_t = n) \cdot \mathbb{1}_{\{F(h \mid P_t) \leq F(h \mid P_t)^{n+1}\}} \Pr(N_{t+1} = k \mid N_t = n),$$

$$\Pr(Y_t = h \mid N_t = n, R_t = 3, N_{t+1} = k)$$

$$= \sum_{n=0}^m \Pr(Y_t = h \mid N_t = n) \cdot \mathbb{1}_{\{1 \leq F(h \mid P_t) \leq n\}} \cdot \mathbb{1}_{\{F(h \mid P_t) \leq F(h \mid P_t)^{n+1}\}}$$

$$\cdot \mathbb{1}_{\{2 \leq F(h \mid P_t) \leq F(h \mid P_t)^{n+2}\}} \Pr(N_{t+1} = k \mid N_t = n),$$

Sostituendo nella (2.6) si ottiene che la distribuzione congiunta di  $(Y_{t+1}, N_{t+1})$  dipende dal premio di riferimento in  $t$  e dalla distribuzione congiunta di  $(Y_t, N_t)$ , oltre che dalla distribuzione del danno del singolo sinistro e dalle probabilità condizionate di transizione del processo  $\{N_t, t > 0\}$ .

Ci si deve preoccupare ora di assegnare le distribuzioni del danno del singolo sinistro. Quelle di  $Y_1$  e  $N_1$  e la matrice delle probabilità condizionate di transizione. Si possono pensare assegnate tali probabilità in quanto stimabili dai dati. Per l'indipendenza stocastica di  $Y_1$  e  $N_1$  è allora assegnata anche la distribuzione congiunta di  $(Y_1, N_1)$ . Tramite la (2.4) con  $t = 1$ , si può ottenere l'esborso atteso del primo anno in funzione del premio di riferimento  $P_1$ . Sempre in funzione di  $P_1$ , si può poi ottenere il premio atteso del primo anno. Dall'equazione,  $E(X_1) = \beta_1$  si può ricavare, almeno in via numerica, il premio di equilibrio del primo anno. Ricorrendo alla (2.6) e seguenti, con  $t = 1$ , possiamo ora risalire alla distribuzione congiunta della coppia  $(Y_2, N_2)$  e, tramite la (2.5) e seguenti, alla distribuzione di  $Y_2$  e quindi a quelle di  $N_2 \mid Y_2 = h, h = 1, \dots, H$ . Da esse si possono poi ottenere l'esborso atteso e il premio atteso del secondo anno in funzione del premio di riferimento del secondo anno. Se si pensa di conservare come premio di riferimento del secondo anno il premio di equilibrio del primo anno, si potrà

valutare la differenza tra premio atteso e esborso atteso. Si potrà inoltre, risolvendo l'equazione  $E(X_2) = P_2$  nell'incognita  $P_2$ , ricavare il premio di equilibrio del secondo anno.

Procedendo in modo iterativo si ottengono così le distribuzioni di  $Y_t$ , di  $(Y_t, N_t)$  e di  $N_t$ , tramite le quali, usando le (2.4) e le  $\sum_{h=1}^H \Pr(Y_t = h) P_t$ , si possono ricavare l'esborso ed il premio atteso in  $t$ , se  $P_t$  è assegnato, oppure ricavare il premio di equilibrio in  $t$ .

Si osserva che le distribuzioni di probabilità di  $Y_t$ , e di  $(Y_t, N_t)$  dipendono dalla sequenza dei premi di riferimento relativi alle epoche precedenti  $t$ . Potrà allora avere interesse confrontare le distribuzioni ottenute mantenendo costante il premio di riferimento (per esempio uguale al premio di equilibrio del primo anno), con quelle che si ottengono adottando in ogni anno il premio di equilibrio come premio di riferimento.

Si è già sottolineato che se la collettività è omogenea e chiusa le quantità che sono state determinate per il generico assicurato permettono di studiare l'evoluzione della collettività al variare del tempo. Per studiare l'evoluzione di una collettività "aperta" occorre apportare alcune modificazioni. Il problema viene affrontato nel prossimo paragrafo.

## 2.4 Processo markoviano di arrivi. Collettività aperta

Per affrontare il problema della franchigia nel caso della collettività aperta si può agevolmente recuperare il modello generale descritto al paragrafo 1.3. Pertanto con riferimento a tale modello ora si riportano i primi passi del procedimento, indicando, per il generico assicurato, con  $p_{nk}$  le probabilità condizionate di transizione per il processo del numero dei sinistri,  $k, n = 0, \dots, m$ . Per l'ipotesi di omogeneità della collettività iniziale si può supporre che gli individui presenti abbiano, nel primo anno, tutti la stessa probabilità di appartenere alla classe  $h$ , che indichiamo con  $p^{(1)}(h)$ . Indichiamo poi con  $p^{(1)}(h, k)$  la comune probabilità congiunta di appartenere alla classe  $h$  e di avere nel corso dell'anno  $k$  sinistri.

Per un assicurato presente nella collettività all'epoca 2, si ha (vedi (2.5))

$$\Pr(Y_2 = h | H_1) = \sum_{(j,r) \in \mathcal{H}} \Pr(Y_1 = j | H_1) \Pr(R_1 = r | Y_1 = j, H_1).$$

La  $\Pr(Y_1 = h | H_1)$  è la probabilità, condizionata alla presenza dell'assicurato nella collettività fin dall'inizio, di appartenere alla classe  $h$  nel primo anno. Poiché gli assicurati inizialmente presenti hanno tutti la stessa probabilità di appartenere alla classe  $h$ , possiamo porre  $\Pr(Y_1 = h | H_1) = p^{(1)}(h)$ ,  $h = 1, \dots, H$ .

Per il secondo fattore a secondo membro si ha

$$\Pr(R_1 = r | Y_1 = h, H_1) = \sum_{n=0}^m \Pr(N_1 = n | Y_1 = h, H_1) \Pr(A_{ht}^{(r)}(n) | Y_1 = h, N_1 = n, H_1)$$

dove le probabilità che compaiono a secondo membro riguardano un assicurato presente nella collettività nel primo anno. Per le ipotesi accolte e per quanto visto al paragrafo precedente, se  $F$  è la funzione di ripartizione del danno del generico sinistro e  $P_1$  il premio di riferimento del primo anno, per  $r = 0, 1, 2$  si ha

$$\Pr(A_{ht}^{(r)}(n) | Y_1 = h, N_1 = n, H_1) = \frac{F^{(n)}(P_1) - F^{(n-r)}(P_1)}{r!} F^{(n-r)}(P_1)^{n-r}.$$

Allora detta  $p^{(1)}(k | h)$  la probabilità condizionata di avere nel primo anno  $n$  sinistri essendo in classe  $h$  (comune per gli assicurati che fanno parte della collettività inizialmente), per  $r = 0, 1, 2$ , si ottiene

$$\Pr(R_1 = r | Y_1 = h, H_1) = \sum_{n=0}^m p^{(1)}(n | h) \frac{F^{(n)}(P_1) - F^{(n-r)}(P_1)}{r!} F^{(n-r)}(P_1)^{n-r},$$

dove  $p^{(1)}(n | h) = a(n)$ . La  $\Pr(R_1 = 3 | Y_1 = h, H_1)$  rimane determinata per complemento a uno.

Si ricava allora la  $\Pr(Y_2 = h | H_1)$  e sostituendo nella (1.7), con  $t = 1$ , la

$\Pr(Y_2 = h | H_2)$ .

La probabilità di appartenere nel secondo anno alla classe  $h$  così determinata per l'assicurato in esame, è comune a tutti gli assicurati presenti nella collettività nel secondo anno: indichiamola con  $p^{(2)}(h)$ ,  $h = 1, \dots, H$ .

Interessa ora considerare, per l'assicurato in esame, la distribuzione congiunta di  $(Y_2 | H_1, N_2 | H_1)$  (vedi (2.6)).

$$\Pr(Y_2 = h, N_2 = k | H_1) = \sum_{(j,r)} \Pr(Y_1 = j, R_1 = r, N_2 = k | H_1).$$

Gli addendi a secondo membro sono probabilità comuni a tutti gli assicurati presenti nella collettività fin dall'inizio e, come si è detto nel paragrafo precedente, sono immediatamente ricavabili dai dati. Riesce, per  $r = 0, 1, 2$ ,

$$\Pr(Y_1 = h, R_1 = r, N_2 = k | H_1) = \sum_{n=0}^m p^{(1)}(n, h) \binom{n}{r} F(d_h \beta_h P_1)^r F(d_h \beta_h P_1)^{n-r} p_{nk}.$$

Per complemento rispetto alla

$$\Pr(Y_1 = h, N_2 = k | H_1) = \sum_{n=0}^m p^{(1)}(h, n) p_{nk},$$

rimane determinata anche la  $\Pr(Y_1 = h, R_1 = 3, N_2 = k | H_1)$ .

Si ricava allora la  $\Pr(Y_2 = h, N_2 = k | H_1)$  che sostituita nella (1.8), con  $t = 1$ , permette di calcolare la  $\Pr(Y_2 = h, N_2 = k | H_2)$ . Tale probabilità, indicata con  $p^{(2)}(h, k)$ , è comune a tutti gli assicurati presenti nella collettività nel secondo anno. Si prosegue ora seguendo il procedimento sopra delineato. Se, per il generico assicurato presente nella collettività nell'anno  $t$ , si indica con  $p^{(t)}(h)$  la probabilità di appartenere alla classe  $h$  nell'anno  $t$ , con  $p^{(t)}(h, k)$  la probabilità congiunta di appartenere alla classe  $h$  e di avere nel corso dell'anno  $k$  sinistri e con  $p^{(t)}(k | h)$  la probabilità condizionata di avere nell'anno  $k$  sinistri essendo in classe  $h$ , si ottengono le seguenti relazioni ricorrenti:

$$p^{(t_1)}(h) = \frac{1}{1 + \sum_{(j,0) \neq (h)} p^{(t)}(j)} p^{(t)}(h) \sum_{n=0}^m p^{(t)}(n|j) F(j; j, P_t)^n$$

$$\sum_{(j,1) \neq (h)} p^{(t)}(j) \sum_{n=0}^m p^{(t)}(n|j) n! F(j; j, P_t)^n F(j; j, P_t)^{n+1}$$

$$\sum_{(j,2) \neq (h)} p^{(t)}(j) \sum_{n=0}^m p^{(t)}(n|j) \binom{n}{2} F(j; j, P_t)^n F(j; j, P_t)^{n+2}$$

$$\sum_{(j,3) \neq (h)} p^{(t)}(j) \sum_{n=0}^m p^{(t)}(n|j) F(j; j, P_t)^n n! F(j; j, P_t)^n F(j; j, P_t)^{n+1}$$

$$\sum_{n=0}^m \binom{n}{2} F(j; j, P_t)^n F(j; j, P_t)^{n+2} \frac{1}{1 + \sum_{(j,0) \neq (h)} p^{(t)}(j)}$$

Dove  $p^{(t)}(k|j) = \frac{p^{(t)}(h, j)}{p^{(t)}(j)}$ , ovviamente si  $p^{(t)}(j) \neq 0$ , altrimenti non serve

determinarla perché il corrispondente addendo è nullo in forza del fattore  $p^{(t)}(j) = 0$ .

Per le distribuzioni congiunte si ha

$$\begin{aligned}
p^{(t;1)}(h,k) &= \frac{1}{1} \sum_{n=0}^m p^{(t)}(h,n) F(h; P_t)^n p_{nk} \\
&= \sum_{n=0}^m p^{(t)}(h,n) n! F(h; P_t)^n F(h; P_t)^{n-1} p_{nk} \\
&= \sum_{n=0}^m p^{(t)}(h,n) \frac{n!}{2} F(h; P_t)^n F(h; P_t)^{n-2} p_{nk} \\
&= \sum_{n=0}^m p^{(t)}(h,n) \frac{n!}{3} F(h; P_t)^n F(h; P_t)^{n-3} p_{nk} \\
&= \sum_{n=2}^m \frac{n!}{2} F(h; P_t)^n F(h; P_t)^{n-2} p_{nk} \frac{1}{1} a(k).
\end{aligned}$$

Tramite le distribuzioni così ottenute si possono ora calcolare, analogamente a quanto fatto al paragrafo 2.3 le sequenze dei premi medi, degli esborsi medi e dei premi di equilibrio.

## 2.5 Processo Poisson-gamma. Collettività chiusa

Con riferimento allo stesso modello con franchigia presentato al paragrafo 2.2, limitatamente al caso della collettività chiusa e attribuendo lo stesso significato ai simboli, si considera la variante al modello assumendo che il processo  $\{N_t | Y_1 = h, t > 0\}$  sia di tipo Poisson-gamma. Come in precedenza indichiamo con  $r_h, c_h$  i parametri della distribuzione misturante Gamma. La situazione è analoga a quella descritto nel Capitolo 1 assumendo le stesse ipotesi sul processo  $\{N_t, t > 0\}$ ; ovvero i calcoli per ottenere la distribuzione di  $(N_{t+1} | Y_t = h, N_t = k)$  crescono in complessità al crescere del tempo.

Perciò, in modo analogo a quanto descritto nel paragrafo 1.2, si considera una approssimazione, da applicarsi ad ogni passo del procedimento. Come distribuzione di  $N_{t+1} | Y_t = h$  si prende una distribuzione binomiale negativa con gli stessi primi due momenti di quella ottenuta con le relazioni ricorsive e si ipotizza che il processo  $\{N_t | Y_t = h, t > 0\}$  sia di tipo Poisson-gamma. Con queste ipotesi, si possono calcolare agevolmente tutte le quantità che interessa valutare.

Entriamo ora più in dettaglio.

Le ipotesi di indipendenza subordinata che facciamo sono le seguenti. Manteniamo le ipotesi (1), (2) del paragrafo 2.3 e sostituiamo la (3) con la seguente

(3') condizionatamente ad  $Y_t = h$   $\{N_t = k, N_{t+1}$  sia stocasticamente indipendente da  $\{Z_{it}, t > 0, t = 1, 2, \dots\}$ .

Con riferimento ad un contratto e al  $t$ -esimo anno, se si considerano i processi  $\{Y_t, t > 0\}$  della classe Bonus-malus occupata,  $\{N_t, t > 0\}$  del numero dei sinistri e  $\{Z_{it}, t > 0\}$  degli importi di danno. Al posto del processo  $R_t$ , minimo tra 3 e numero dei risarcimenti, consideriamo direttamente il processo del numero dei risarcimenti che conveniamo ad indicare con  $R_t$ . La (1.5) si può riscrivere nel modo seguente

$$(2.7) \quad \Pr(Y_{t+1} = j) = \sum_{(h,r)} \Pr(Y_t = h | R_t = r).$$

E' facile provare che se sono noti  $F$ , la funzione di ripartizione del danno per singolo sinistro,  $\beta_h$ ,  $\gamma_h$ , rispettivamente il coefficiente del sistema bonus-malus e l'aliquota di franchigia, allora la distribuzione di  $Y_{t+1}$  è determinata dalla distribuzione di  $(Y_t, N_t)$ .

Infatti, indicando sempre con  $P_t$  il premio di riferimento per l'anno  $t$ , con passaggi analoghi a quelli effettuati in 2.3.3, si prova che per ogni  $r = 0, 1, \dots$ , vale la

$$\Pr(R_t = r | Y_t = h) = \Pr\left(\sum_{k=0}^m [N_t = k] A_{ht}^{(r)}(k) | Y_t = h\right)$$

$$= \sum_{k=0}^m \Pr(N_t = k | Y_t = h)$$

$$= \sum_{k=0}^m \Pr\left(\prod_{j=1}^k [(Z_{j,t} = ?_h P_t)] \dots (Z_{j,t} = ?_h P_t) \prod_{s=j_1, \dots, j_r}^k (Z_{s,t} = ?_h P_t) | N_t = k\right)$$

Se ora si pone

$$a(t, h, k, r) = \begin{cases} (1 - F(?_h P_t))^k F(?_h P_t)^{k-r} & r \leq k \\ 0 & r > k \end{cases}$$

per ogni  $k = 1, \dots, m$  ed  $r = 0, 1, \dots$  allora si ottiene

$$\Pr(R_t = r | Y_t = h) = \sum_{k=0}^m \Pr(N_t = k | Y_t = h) a(t, h, k, r).$$

Sussiste pertanto la relazione

$$(2.8) \quad \Pr(Y_{t+1} = j) = \sum_{(h,r)} \sum_{k=0}^m \Pr(Y_t = h, N_t = k) a(t, h, k, r).$$

Quest'ultima relazione mette in evidenza quanto si voleva verificare, visto che la probabilità  $a(t, h, k, r)$  dipende solo da  $F$  e da  $?_h, ?_h$ .

Con riferimento alla distribuzione congiunta di  $(Y_{t+1}, N_{t+1})$  si può scrivere

$$(2.9) \quad \Pr(Y_{t+1} = j \mid N_{t+1} = g) = \sum_{(h,r) \in \mathcal{J}} \Pr(Y_t = h \mid R_t = r \mid N_{t+1} = g).$$

Se  $r = 0$ , gli addendi a secondo membro della suddetta equazione sono del tipo

$$\begin{aligned} & \Pr(Y_t = h \mid \sum_{k=0}^m [N_t = k \mid A_{ht}^{(0)}(k)] \mid N_{t+1} = g) \\ &= \sum_{k=0}^m \Pr(Y_t = h \mid N_t = k \mid A_{ht}^{(0)}(k) \mid N_{t+1} = g) \\ &= \sum_{k=0}^m \Pr(Y_t = h \mid N_t = k) \Pr(A_{ht}^{(0)}(k) \mid Y_t = h \mid N_t = k) \Pr(N_{t+1} = g \mid Y_t = h \\ & \quad \mid N_t = k \mid A_{ht}^{(0)}(n)). \end{aligned}$$

Come già osservato si ha

$$\Pr(A_{ht}^{(0)}(k) \mid Y_t = h \mid N_t = k) = F(d_h \beta_h P_t)^k.$$

Inoltre, per l'ipotesi (3'), riesce

$$\Pr(N_{t+1} = k \mid Y_t = h \mid N_t = n \mid A_{ht}^{(0)}(n)) = \Pr(N_{t+1} = k \mid Y_t = h \mid N_t = n).$$

Pertanto,

$$\begin{aligned} & \Pr(Y_t = h \mid N_t = k \mid A_{ht}^{(0)}(k) = 0 \mid N_{t+1} = g) \\ &= \sum_{k=0}^m \Pr(Y_t = h \mid N_t = k) F(d_h \beta_h P_t)^k \Pr(N_{t+1} = g \mid Y_t = h \mid N_t = k). \end{aligned}$$

Analogamente, per gli altri addendi, ovvero per  $r = 1, 2, \dots$ , si ha

$$\Pr(Y_t = h, N_t = k, A_{ht}^{(r)}(k) = 1, N_{t+1} = g)$$

$$= \sum_{k=0}^m \Pr(Y_t = h, N_t = k) a(t, h, k, r) \Pr(N_{t+1} = g | Y_t = h, N_t = k),$$

Sostituendo nella (2.9) si ottiene che la distribuzione congiunta di  $(Y_{t+1}, N_{t+1})$  dipende dal premio di riferimento in  $t$  e dalla distribuzione congiunta di  $(Y_t, N_t)$ , oltre che dalla distribuzione del danno del singolo sinistro e dalla distribuzione di probabilità del processo  $\{N_{t+1} | Y_{t+1} = h, N_t = n, t > 0\}$ . Si ha infatti

$$(2.10) \quad \Pr(Y_{t+1} = j, N_{t+1} = g) = \sum_{(h,r)} \sum_{j=0}^m \Pr(Y_t = h, N_t = k) a(t, h, k, r) \Pr(N_{t+1} = g | Y_t = h, N_t = k)$$

Descriviamo in dettaglio i passi del procedimento ricorrente.

Al passo  $t = 1$ :

La distribuzione di  $Y_1$  è data. Poiché il processo  $\{N_t | Y_t = h, t > 0\}$  per ipotesi è di tipo Poisson-gamma, calcolo per ogni  $h$  e per ogni  $k$ , le probabilità

$$\Pr(N_t = k | Y_1 = h) = \frac{r_h^k}{r_h^k + c_h} \frac{c_h^r}{c_h^r + 1} \frac{1}{c_h + 1}$$

e pertanto il numero atteso di sinistri e la dispersione dal valore medio nel periodo  $t$ , nello stato di informazione iniziale è dato da

$$E(N_t) = \frac{r_h}{c_h} \quad \text{e} \quad \text{VAR}(N_t) = \frac{r_h}{c_h^2} (1 + c_h)$$

I parametri  $r_h, c_h$  della distribuzione, si possono stimare dall'osservazione del numero di sinistri riportati da assicurati presenti in classe  $h$ , per esempio attraverso il metodo dei momenti.

Allora la distribuzione congiunta si ottiene immediatamente dalla seguente relazione

$$\Pr(N_1 = k | Y_1 = h) = \Pr(N_1 = k | Y_1 = h) \Pr(Y_1 = h).$$

Determino i premio di equilibrio  $P_1$  risolvendo l'equazione in  $P$

$$P \sum_{h=1}^H \Pr(Y_1 = h) \sum_{k=1}^m E(X_1 | Y_1 = h) = \sum_{h=1}^H \Pr(Y_1 = h) E[\max(0, z - \sum_{h=1}^H P)] E(N_1 | Y_1 = h)$$

Calcolo per ogni  $h, h = 1, \dots, H$ :

$$a(1, h, k, r) = \begin{cases} (1 - F_h(P_1)) F_h(P_1)^{k+r} & r < k \\ 0 & r \geq k \end{cases}$$

per ogni  $k; k = 1, \dots, m$  e per ogni  $r; r = 0, 1, \dots$

Così per ogni  $r$  posso calcolare

$$\Pr(R_1 = r | Y_1 = h) = \sum_{k=0}^m \Pr(N_1 = k | Y_1 = h) a(1, h, k, r),$$

ed infine

$$\Pr(Y_1 = h | R_1 = r) = \Pr(R_1 = r | Y_1 = h) \Pr(Y_1 = h).$$

Al passo  $t = 2$ :

Calcolo  $\Pr(Y_t = j)$  con la (2.8). Per l'ipotesi Poisson-gamma,  $N_2 | Y_1 = h, N_1 = k$  è binomiale negativa di parametri  $(r_h+k, c_h+1)$ .

Calcolo quindi la  $\Pr(N_2 \leq g \mid Y_2 = j)$  con la (2.10).

Risolvendo l'equazione

$$P \sum_{h=1}^H \Pr(Y_2 = h) \sum_{h=1}^H \Pr(Y_2 = h) E[\max(0, z - \sum_{h=1}^H P)] E(N_2 \mid Y_2 = h)$$

calcolo il premio di equilibrio  $P_2$  e quindi  $a(2, h, k, r)$ .

Dalla distribuzione di  $(Y_2, N_2)$  calcolo i momenti primo,  $\mu$  e secondo,  $v$  della distribuzione di  $N_2 \mid Y_2 = h$  con una binomiale negativa di parametri  $\mu$  e  $v$ , e faccio l'ipotesi Poisson-gamma per il processo  $\{N_{2+t} \mid Y_2 = h, t \geq 0\}$ . I parametri della misturante si determinano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \mu = \frac{r}{c} \\ v = \frac{r}{c} \frac{1}{c} + \frac{1}{\gamma} \end{cases}$$

Al generico passo  $t$ , per  $t+1$ :

si calcola per ogni  $h, h = 1, \dots, H$ :

$$a(t, h, k, r) = \sum_{r=k}^{\infty} (1 - F(\mu, \gamma, P_t))^{r-k} F(\mu, \gamma, P_t)^{k+r} \quad r \geq k$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \quad r \geq k$$

per ogni  $k; k = 1, \dots, m$  e per ogni  $r$ .

Inoltre si determinano

$$\Pr(N_{t+1} \leq g \mid Y_t = h, N_t = k),$$

Applicando, per ogni classe di merito  $h$ , l'approssimazione descritta nel paragrafo 1.4.2, ovvero che il numero aleatorio  $N_{t+1} | Y_{t+1} = h, N_t = k$  si distribuisce secondo una binomiale negativa  $(r+k, c+1)$  con parametri  $c$  ed  $r$  soluzione del sistema seguente:

$$\begin{cases} \mu = \frac{r}{c} \\ \sigma^2 = \frac{r}{c} \frac{1}{c} + 1 \end{cases}$$

dove  $\mu$  e  $\sigma^2$  sono rispettivamente la speranza matematica e la varianza di  $N_t | Y_t = h$ . Si determina così la congiunta

$$\Pr(N_{t+1} = g | Y_{t+1} = j)$$

$$\sum_{(h,r) \in \mathcal{H}} \sum_{k=0}^m \Pr(Y_t = h | N_t = k) \Pr(N_{t+1} = g | Y_t = h, N_t = k) a(t, h, k, r).$$

Infine, dalle relazioni sopracitate, si possono calcolare le quantità a cui si è interessati:

$$\Pr(Y_{t+1} = j) = \sum_{(h,r) \in \mathcal{H}} \sum_{k=0}^m \Pr(Y_t = h | N_t = k) a(t, h, k, r)$$

e

$$\Pr(R_{t+1} = r | Y_{t+1} = h) = \frac{\Pr(R_{t+1} = r, Y_{t+1} = h)}{\Pr(Y_{t+1} = h)}.$$

---

## CAPITOLO 3

### AUTOLIQUIDAZIONE

#### 3.1 Introduzione

Fin qui si è trascurato un aspetto importante e cioè che regole evolutive fortemente penalizzanti inducono l'assicurato a trattenere sinistri di lieve entità in vista di evitare più onerosi aggravamenti di premio. Questo comportamento, definito mediante il termine "autoliquidazione di sinistri" (oppure, secondo la terminologia anglosassone, "Bonus hunger"), si riflette sulla distribuzione degli assicurati tra le classi Bonus-malus e sulla valutazione delle altre quantità presentate nei capitoli precedenti, per esempio sull'evoluzione nel tempo dei premi di equilibrio. Analisi su questo fenomeno permettono di indicare quale effetto può essere atteso dalla introduzione di sistemi Bonus-malus particolarmente penalizzanti, cioè per sistemi nei quali assume un concreto rilievo il fenomeno dell'autoliquidazione dei sinistri da parte degli assicurati.

In questo capitolo viene proposta una formalizzazione del comportamento dell'assicurato "attento" che fa della valutazione economica prima di denunciare o meno un sinistro. L'impostazione seguita si rifà direttamente in quella presentata nel lavoro "Recursive Procedures to Evaluate Bonus-Malus Systems" (Gigante. P., Picech L., Sigalotti L.; 1999). Nel paragrafo 3.2 viene descritto il comportamento "attento" dell'assicurato, viene introdotto il concetto di soglia di autoliquidazione e viene fatta una proposta di calcolo approssimato della stessa. Nel paragrafo 3.3 viene presentato il procedimento ricorrente per una collettività di rischi chiusa a nuovi ingressi ed uscite. Successivamente in 3.3.1 viene considerata l'ipotesi markoviana omogenea e in 3.3.2 l'ipotesi Poisson-gamma. In

3.3.3 il modello viene generalizzato togliendo la restrizione dell'autoliquidazione di al più un sinistro nel periodo di valutazione.

## 3.2 Autoliquidazione e soglie di autoliquidazione

In generale si può ritenere che la decisione di denunciare o meno uno o più sinistri venga presa mettendo a confronto l'importo dei sinistri con le conseguenze delle denunce.

Le conseguenze di una denuncia dipendono dalla classe occupata dall'assicurato, dalle regole evolutive del sistema Bonus-malus e dai coefficienti di merito. Per valutare convenienza o meno della autoliquidazione anziché ragionare in termini di comportamento ottimale, si considererà un "comportamento ragionevole" da parte degli assicurati (v. anche Gerber (1990), Pitacco (1978)).

Per arrivare a quantificare le conseguenze di una denuncia si suppone che (i) la decisione se denunciare o meno un sinistro venga presa alla scadenza del periodo contrattuale annuo, (ii) l'assicurato guardi alle conseguenze economiche delle sue decisioni solamente in un intervallo di tempo di  $T$  periodi (si può pensare a  $T = 5$  o anche meno), (iii) che in questi  $T$  periodi l'assicurato non riporti sinistri.

In queste ipotesi la sequenza delle classi occupate diventa certa e, assegnati i premi di riferimento, sono determinabili le conseguenze del denunciare o trattenere uno o più sinistri. Una ulteriore semplificazione che viene fatta per evitare calcolo troppo laboriosi, consiste nel (iv) valutare l'opportunità dell'autoliquidazione solamente nel caso in cui si sia verificato esattamente un sinistro e supponendo quindi che in presenza di due o più sinistri essi vengano lasciati all'assicuratore. Questa approssimazione non rende inattendibili i risultati essendo bassa la probabilità che in un periodo si verificano due o più sinistri. Comunque essa verrà rimossa nel sottoparagrafo 3.3.2.

Interesserà vedere a questo punto come si perviene, in queste ipotesi, alla soglia di autoliquidazione cioè all'importo massimo che conviene autoliquidare.

I ragionamenti che seguono, rispecchiano la situazione particolare di un assicurato sottoposto alla normativa italiana che si trovi in classe  $h$ , con  $h > T$ , al tempo  $t$

(entro  $T+t$  non raggiunge la classe 1) e che in tale periodo abbia riportato un sinistro. Allora due sono le azioni possibili:

?? trattenere il sinistro, e allora l'assicurato pagherà come premi nei periodi  $t+1$ , ...,  $t+T$  l'importo

$$P_h^{(t)}(0) = P_{t+1}^c ?_{h-1} + P_{t+2}^c ?_{h-2} v + \dots + P_{t+T}^c ?_{h-T} v^{T-1},$$

dove  $P_{t+i}^c$  rappresenta il premio di riferimento comprensivo dei caricamenti relativo al tempo  $t+i$ ;  $i = 1, \dots, T$  e  $v$  rappresenta il fattore finanziario annuo di attualizzazione;

?? lasciare il sinistro all'assicuratore, in questo caso l'assicurato pagherà negli stessi periodi,

$$P_h^{(t)}(1) = P_{t+1}^c ?_{+2} + P_{t+2}^c ?_{+1} v + \dots + P_{t+T}^c ?_{h+2-T+1} v^{T-1}.$$

All'epoca  $t$  i premi  $P_{t+1}^c, P_{t+2}^c, \dots, P_{t+T}^c$  non sono noti. Per fare una valutazione dei due importi ci si potrà servire delle approssimazioni seguenti:

$$P_h^{(t)}(0) = P_t^c (?_{h-1} + ?_{h-2} v + \dots + ?_{h-T} v^{T-1}),$$

e

$$P_h^{(t)}(1) = P_{t+1}^c (?_{h+2} + ?_{h+1} v + \dots + ?_{h+2-T+1} v^{T-1}),$$

dove per  $P_t^c = P_t (1+c)$  possiamo prendere il premio di equilibrio del periodo  $t$  opportunamente caricato, indicando con  $c$  l'aliquota media di caricamento forfettario.

La differenza tra questi due importi

$$(3.1) \quad ?_h^{(t)} = P_h^{(t)}(1) - P_h^{(t)}(0)$$

fornisce la *soglia di autoliquidazione* relativa alla classe  $h$  valutata al tempo  $t$ , cioè l'importo massimo che converrà autoliquidare. In particolare indicato con  $z$  l'importo di danno di un sinistro allora l'assicurato agirà secondo la seguente regola decisionale: se  $z > ?^{(t)}_h$  denuncia il sinistro, altrimenti per importi di danno inferiori alla soglia l'assicurato paga lui stesso il danno e perciò non denuncia il sinistro.

E' utile osservare che la soglia  $?^{(t)}_h$  viene a dipendere dalla classe di merito del sistema Bonus-malus e dal tempo tramite il premio di equilibrio caricato.

### 3.3 Processo delle denunce. Il procedimento ricorrente nel caso di autoliquidazione

Con riferimento ad un contratto e al  $t$ -esimo anno, oltre ai processi  $?Y_t, t > 0?$  della classe Bonus-malus occupata,  $?N_t, t > 0?$  del numero dei sinistri e  $?Z_{it}, t > 0?$  degli importi di danno; si considera anche il processo delle denunce  $?D_t, t > 0?$ .

Pertanto, la (1.5) si può riscrivere nel modo seguente

$$(3.2) \quad \Pr(Y_{t+1} = j) = \sum_{(h,d) \in ?(j)} \Pr(Y_t = h \cap D_t = d).$$

E' facile provare che se sono note la funzione di ripartizione del danno per singolo sinistro,  $F$  e le soglie di autoliquidazione al tempo  $t$ ,  $?^{(t)}_h$ , allora la distribuzione di  $Y_{t+1}$  è determinata dalla distribuzione di  $(Y_t, N_t)$ . Infatti sussiste la seguente relazione

$$(3.3) \quad \Pr(Y_t = h \cap D_t = d) = \sum_{k=0}^m \Pr(Y_t = h \cap N_t = k) \Pr(D_t = d | Y_t = h \cap N_t = k).$$

Nell'ipotesi che si sia verificato un sinistro, abbiamo le seguenti probabilità di denuncia

$$\Pr(D_t = 0 | Y_t = h, N_t = 1) = \Pr(Z_{1t} = z_h^{(t)} | Y_t = h, N_t = 1) = F_h^{(t)},$$

$$\Pr(D_t = 1 | Y_t = h, N_t = 1) = \Pr(Z_{1t} = z_h^{(t)} | Y_t = h, N_t = 1) = 1 - F_h^{(t)},$$

si osserva che tale espressione sussiste poiché si assume l'indipendenza degli importi dai danno dalla classe Bonus-malus. (Formalmente l'ipotesi è

$$\Pr(Z_{1t} = z | Y_t = h, N_t = 1) = \Pr(Z_{1t} = z | N_t = 1) = F(Z).$$

Nel caso che si siano verificati  $k \geq 1$  sinistri, si ha

$$\Pr(D_t = d | Y_t = h, N_t = k) = \begin{cases} 1 & k \geq 1, d = k \\ 0 & k \geq 1, d \neq k \end{cases}$$

dato che nel caso di due o più sinistri questi vengono lasciati all'assicuratore.

Se si pone

$$a(t, h, k, d) = \begin{cases} F_h^{(t)} & k \geq 1, d = 0 \\ 1 - F_h^{(t)} & k \geq 1, d = 1 \\ 1 & k \geq 1, d = k \\ 0 & k \geq 1, d \neq k \end{cases}$$

allora si ottiene

$$(3.4) \quad \Pr(Y_t = h, D_t = d) = \sum_{k=0}^m \Pr(Y_t = h, N_t = k) a(t, h, k, d)$$

e dunque sussiste la relazione

$$(3.5) \quad \Pr(Y_{t+1} = j) = \sum_{(h,d)} \sum_{k=0}^m \Pr(Y_t = h, N_t = k) a(t, h, k, d).$$

Quest'ultima relazione mette in evidenza quanto si voleva verificare, visto che la probabilità  $a(t, h, k, d)$  dipende solo da  $F$  e da  ${}^{(t)}_h$ .

Con riferimento alla distribuzione congiunta di  $(Y_{t+1}, N_{t+1})$ , si può scrivere

(3.6)

$$\Pr(Y_t = h, N_{t+1} = g) = \sum_{(h,d) \in \mathcal{J}} \Pr(Y_t = h, D_t = d, N_{t+1} = g)$$

$$= \sum_{(h,d) \in \mathcal{J}} \sum_{k=0}^m \Pr(Y_t = h, N_t = k, D_t = d, N_{t+1} = g)$$

$$= \sum_{(h,d) \in \mathcal{J}} \sum_{k=0}^m \Pr(Y_t = h, N_t = k) \Pr(D_t = d, N_{t+1} = g | Y_t = h, N_t = k).$$

Inoltre è facile verificare la validità della seguente uguaglianza:

$$\Pr(D_t = d, N_{t+1} = g | Y_t = h, N_t = k) =$$

(3.7)

$$= a(t, h, k, d) \Pr(N_{t+1} = g | Y_t = h, N_t = k).$$

Perciò è utile osservare che se  $F$  e  ${}^{(t)}_h$ ,  $h = 1, \dots, H$  sono noti al tempo  $t$  allora la distribuzione di  $(Y_{t+1}, N_{t+1})$  è determinata dalle distribuzioni di  $(Y_t, N_t)$  e  $N_{t+1} | Y_t = h, N_t = k$ ,  $h = 1, \dots, H$ ,  $k = 0, \dots, m$ .

Per determinare i premi di equilibrio (vedi (1.3)), bisogna prima determinare gli esborsi attesi:

$$E(X_t) = \sum_{h=1}^H \sum_{d=0}^m \Pr(Y_t = h, D_t = d) E(X_t | Y_t = h, D_t = d).$$

La distribuzione di  $(Y_t, D_t)$  è data dalla (3.4) e, in accordo con le ipotesi assunte, si ha:

$$E(X_t | Y_t = h, D_t = d) = \int_0^{\infty} E(Z | Z \leq z^{(t)}_h) dF(z) \quad d \geq 0$$

$$= \int_0^{\infty} E(Z) dF(z) \quad d \geq 1$$

$$= \int_0^{\infty} E(Z) dF(z) \quad d \geq 2$$

dove i valori attesi a destra sono calcolati secondo la funzione di ripartizione  $F$ .

Con semplici passaggi, si ottiene

$$(3.8) \quad E(X_t) = \sum_{h=1}^H \Pr(Y_t = h | N_t = 1) \int_0^{\infty} E(Z | Z \leq z^{(t)}_h) dF(z) + \sum_{k=2}^m \Pr(Y_t = h | N_t = k) k E(Z).$$

Ora, interesserà risolvere l'equazione (1.3) nell'incognita  $P_t$ , per determinare il premio di equilibrio nell'anno  $t$ .

E' opportuno osservare che diversamente a quanto accade nel Capitolo 1, ora anche  $E(X_t)$  dipende da  $P_t$ ; infatti le soglie di autoliquidazione,  $z^{(t)}_h$ ,  $h = 1, \dots, H$  variano al variare premio di riferimento  $P_t$  (vedi (3.1)). Dalla (3.8) si comprende immediatamente che l'equazione (1.3), a meno che la distribuzione degli importi di danno sia molto particolare, non può essere risolta in forma chiusa, ma solo utilizzando metodi numerici di ricerca della soluzione di un'equazione. A questo punto anziché risolverla per via numerica, si introduce l'ipotesi di calcolare le soglie di autoliquidazione di ogni anno in funzione del premio di riferimento dell'anno precedente, anziché in funzione di quello dell'anno corrente. In particolare si può considerare, per il primo anno, un premio di riferimento  $P_1^r$ , non necessariamente il premio di equilibrio, per esempio potrebbe essere il premio di equilibrio del primo anno ottenuto senza considerare il fenomeno dell'autoliquidazione.

Dalla (3.1), si possono calcolare le corrispondenti soglie di autoliquidazione  $z^{(1)}_h$ ,  $h = 1, \dots, H$ . Come nei capitoli precedenti, si assume che le distribuzioni di  $Y_1$  e di  $N_1 | Y_1 = h$  siano stimabili direttamente dai dati disponibili. Pertanto si può

calcolare il coefficiente medio di premio e l'esborso globale atteso del primo anno:

$$b_1 = \sum_{h=1}^H \Pr(Y_1 = h) z_h,$$

$$E(X_1) = \sum_{h=1}^H \Pr(Y_1 = h | N_1 = 1) \int_0^{\infty} F_h^{(1)}(z) E(Z | Z = z) dz$$

$$= \sum_{k=2}^m \Pr(Y_1 = h | N_1 = k) k E(Z),$$

e ottenere quindi il primo premio di equilibrio con la  $P_1^e = E(X_1)/b_1$ .

Il premio di equilibrio così ottenuto è assunto come premio di riferimento per l'anno successivo allo scopo di calcolare le soglie di autoliquidazione per il secondo anno:  $z_h^{(2)}$ ,  $h = 1, \dots, H$ . Si procede in maniera analoga anche per le epoche successive.

Se si assumono per il processo  $\{N_t, t > 0\}$ , i due modelli probabilistici finora considerati, precisamente il processo markoviano e il Poisson-gamma, si può provare che la distribuzione di  $Y_t$ , l'esborso globale atteso  $E(X_t)$ , e il premio di equilibrio  $P_t^e$ , si possono calcolare ricorsivamente.

Nel seguito si assumono le solite ipotesi di indipendenza tra gli importi di danno e il numero dei sinistri. Formalmente si assume

$$\Pr(N_{t+1} = g | Y_1 = h, N_1 = n_1, \dots, N_{t+1} = n_{t+1}, N_t = k) = \prod_{s=1}^t \prod_{h=1}^H Z_{hs} z_{hs}$$

$$= \Pr(N_{t+1} = g | Y_1 = h, N_1 = n_1, \dots, N_{t+1} = n_{t+1}, N_t = k).$$

### 3.3.1 Processo markoviano omogeneo

Si suppone che, per ogni  $h = 1, \dots, H$ ,  $\{N_t | Y_1 = h, t > 0\}$  sia un processo markoviano omogeneo. La relativa matrice di transizione è indicata con  $P(h) = [p(h;k,g)]$ ,  $p(h;k,g) = \Pr(N_{t+1} = g | Y_1 = h, N_t = k)$ .

Poiché  $Y_t$  dipende da  $Y_1, D_1, \dots, D_{t-1}$ , e quindi da  $Y_1, N_1, \dots, N_{t-1}$ , e da  $\{Z_i, i = 1, 2, \dots, t\}$  per la proprietà di disintegrabilità della speranza matematica e per l'ipotesi markoviana, si ottiene

$$\Pr(N_{t+1} = g | Y_t = h, N_t = k, Y_1 = j) = p(j;k,g).$$

Pertanto, con riferimento a (3.6) e (3.7) opportunamente adattate, sussiste la seguente relazione

(3.9)

$$\begin{aligned} \Pr(Y_{t+1} = j, N_{t+1} = g) &= \sum_{h=1}^H \Pr(Y_1 = h) \Pr(Y_{t+1} = j, N_{t+1} = g | Y_t = h) \\ &= \sum_{h=1}^H \Pr(Y_1 = h) \sum_{(i,d) \in (j) \times \mathbb{N}^0} \Pr(Y_t = i, N_t = k | Y_1 = h) a(t,i,k,d) p(h;k,g) \\ &= \sum_{h=1}^H \sum_{(i,d) \in (j) \times \mathbb{N}^0} \Pr(Y_t = i, N_t = k | Y_1 = h) a(t,i,k,d) p(h;k,g). \end{aligned}$$

A partire dalle matrici le matrici  $P(h)$ ,  $h = 1, \dots, H$ , supposte note, in quanto possono essere stimate dai dati, in modo analogo a quanto descritto nel paragrafo 1.2 e 1.4.1, si possono calcolare così tutte le quantità a cui si è interessati in modo ricorrente. Pertanto, partendo dalla distribuzione di  $(Y_t, N_t)$  e dalle soglie di autoliquidazione al tempo  $t$ , si ottiene: con (3.5) la distribuzione di  $Y_{t+1}$  e dalla equazione  $b_{t+1} = \sum_{h=1}^H \Pr(Y_{t+1} = h) b_h$ , il premio di equilibrio dell'anno  $t+1$ . Inoltre dalla (3.9), la distribuzione congiunta di  $(Y_{t+1}, N_{t+1})$  e dalla (3.8), l'esborso atteso dell'anno  $t+1$ . Infine, dalla  $P_{t+1} = E(X_{t+1}) / b_{t+1}$ , si ottiene il premio di equilibrio dell'anno  $t+1$ .

### 3.3.2 Processo Poisson-gamma

Si assume che il processo  $\{N_t | Y_1 = h, t > 0\}$  sia di tipo Poisson-gamma e indichiamo con  $r_h, c_h$  i parametri della distribuzione misturante Gamma, pertanto risulta,

$$E(N_t | Y_1 = h) = \frac{r_h}{c_h} e \text{VAR}(N_t | Y_1 = h) = \frac{r_h}{c_h} \left( \frac{1}{c_h} + \frac{r_h}{c_h^2} \right) \quad h = 1, \dots, H.$$

In questo caso la situazione, opportunamente adattata, è analoga a quella descritta nel paragrafo 1.2 e sottoparagrafo 1.4.2, assumendo le stesse ipotesi sul processo  $\{N_t, t > 0\}$ . I calcoli per ottenere la distribuzione di  $(N_{t+1} | Y_t = h, N_t = k)$  crescono in complessità al crescere del tempo.

Perciò, allo stesso modo in cui è stato descritto in 1.4.2, si considera l'approssimazione, da applicarsi ad ogni passo del procedimento, della distribuzione di  $N_{t+1} | Y_t = h$  mediante una distribuzione binomiale negativa con gli stessi primi due momenti. Inoltre si ipotizza che il processo  $\{N_t | Y_t = h, t > 0\}$  sia di tipo Poisson-gamma. Con queste ipotesi, si possono calcolare in modo ricorrente tutte le quantità che interessa osservare.

### 3.3.2 Generalizzazione del modello

Se si rilascia l'ipotesi (iv), allora l'assicurato in classe  $h$  al tempo  $t$  che commetta  $k$  incidenti di importo  $z_{(1)}, z_{(2)}, \dots, z_{(k)}$ , potrà adottare  $k+1$  strategie: denunciare  $d$  sinistri dove  $d = 0, \dots, k$ .

Se con  $P_h^{(t)}(d)$  si indica il valore attuale all'epoca  $t$  del costo per premi pagato dall'assicurato per i prossimi  $T$  anni nel caso in cui denunci  $d$  sinistri (supposti noti poiché si mantiene l'ipotesi che l'assicurato non commetta sinistri nei  $T$  anni successivi), la sua decisione si può sintetizzare nel modo seguente:

$$\min_{z_{(1)}, z_{(2)}, \dots, z_{(k)}} \{ P_h^{(t)}(0), \dots, z_{(1)}, z_{(2)}, \dots, z_{(k-d)}, P_h^{(t)}(d), \dots, P_h^{(t)}(k) \}$$

Inoltre egli denuncerà  $d$  sinistri solamente se

$$\sum_{s=1}^n Z_{(k-d)s} P_h^{(t)}(d) P_h^{(t)}(d+n) \quad n = 1, \dots, d$$

$$\sum_{s=0}^{n-1} Z_{(k-d-s)} P_h^{(t)}(d+n) P_h^{(t)}(d) \quad n = 1, \dots, d-k$$

Ora se con  $Z_{(1),t}, \dots, Z_{(k),t}$  si indica la statistica d'ordine del vettore aleatorio  $Z_{1t}, \dots, Z_{kt}$  e con  $A(t,h,k,d)$  l'evento

$$\sum_{s=1}^n Z_{(k-d)s,t} P_h^{(t)}(d) P_h^{(t)}(d+n) \quad n = 1, \dots, d$$

$$\sum_{s=0}^{n-1} Z_{(k-d-s),t} P_h^{(t)}(d+n) P_h^{(t)}(d) \quad n = 1, \dots, k-d$$

allora nella relazione (3.3) la  $\Pr(D_t = d | Y_t = h, N_t = k)$  diventa

$$(3.12) \quad \frac{\Pr(A(t, h, k, d))}{\Pr(A(t, h, k, d))} \quad \begin{matrix} d = k \\ d = k \end{matrix}$$

che può essere calcolata dalla distribuzione della statistica d'ordine.

Pertanto, in questo modello più generale, le relazione (3.5) e (3.7) rimangono ancora valide, con  $a(t,h,k,d)$  che si sostituisce con la (3.12).

La relazione (3.8), si generalizza nel modo seguente:

$$E(X_t) = \sum_{h=1}^H \sum_{k=0}^m \sum_{d=0}^k \Pr(Y_t = h, N_t = k) \Pr(A(t, h, k, d)) E(X_t | Y_t = h, N_t = k, D_t = d),$$

dove

$$E(X_t | Y_t = h, N_t = k, D_t = d) = \sum_{s=k-d+1}^k E(Z_{(s)t} | A(t, h, k, d)).$$

Si osserva che il modello potrebbe essere ulteriormente generalizzato, per esempio rimuovendo anche l'ipotesi (iii). In questo caso, la sequenza dei premi futuri è quindi una valutazione del costo futuro e può essere fatta in termini attesi. In questo modo, si possono valutare strategie decisionali da parte degli assicurati sempre più sofisticate. Comunque, va sottolineato che già il primo modello presentato è in grado di fornire valutazioni per il fenomeno dell'autoliquidazione sufficientemente realistiche.

---

## CAPITOLO 4

### COSTRUZIONE DI SCALE ADATTATE AL PORTAFOGLIO

#### 4.1 Introduzione

Utilizzando i procedimenti ricorrenti descritti nei precedenti capitoli è possibile definire nuove scale di coefficienti di premio avendo come obiettivo l'equità, cioè di ottenere premi Bonus-malus vicini ai premi equi. In questo capitolo viene prima considerato il caso di un portafoglio omogeneo, e successivamente il caso generale di portafogli non omogenei. La proposta di scala di coefficienti di premio per un portafoglio è dovuta al contributo di Taylor, "Setting a bonus-malus scale in the presence of the other rating factors" (1997).

#### 4.2 Costruzione di scale di coefficienti di premio per portafogli omogenei

Si consideri dapprima la costruzione di una scala di coefficienti di premio per ciascun periodo di tempo.

Con riferimento ad una collettività chiusa di rischi omogenea, il premio equo per il generico individuo assicurato che si trova in classe  $h$  al tempo  $t$  è dato dall'esborso atteso  $E(X_t | Y_t = h)$ . Così posto pari a 1 il coefficiente della classe di riferimento,  $q$ , gli altri coefficienti  $q_h^{(t)}$  si possono determinare con

$$\beta_h^{(t)} = \frac{E(X_t | Y_t = h)}{E(X_t | Y_t = q)}$$

Si determinano così, epoca per epoca, dei coefficienti tali che, preso come premio di riferimento  $E(X_t | Y_t = q)$ , con essi si ottengono i premi equi.

Nella definizione di un sistema Bonus-malus la scala dei coefficienti di premio è supposta invariante nel tempo ed è infatti una scala di questo tipo che si vuole ottenere. In particolare viene considerata una proposta, che si ottiene prima pensando in termini non asintotici e poi pensando in termini asintotici.

Per formulare il criterio che fornisce la scala del primo tipo, si parte dall'osservare che  $P(\cdot) = E(X_t | Y_t = \cdot)$  è la soluzione del problema

$$\min_{P(\cdot)} E(X_t - P(Y_t))^2$$

Questa funzione, della classe occupata, è quella che meglio approssima nel senso dei minimi quadrati l'esborso  $X_t$ .

Si può pensare di attribuire dei pesi alle epoche di un intervallo temporale  $[1, T]$ , cioè di considerare dei numeri non negativi  $\alpha_1, \dots, \alpha_T$  di somma unitaria.

Considerando la funzione

$$Q = \sum_{t=1}^T \alpha_t E(X_t - P(Y_t))^2$$

ed il problema

$$\min_{P(\cdot)} Q$$

il cui significato è quello di ricerca della funzione  $P$ , che consente di minimizzare le somme pesate delle speranze matematiche degli scarti quadratici tra gli esborsi

$X_t$  ed i numeri aleatori  $P(Y_t)$ . Si può facilmente verificare che, la funzione  $P$  che risolve questo problema di minimo ha la forma

$$P(h) = \frac{\sum_{t=1}^T \pi_t \Pr(Y_t = h) E(X_t | Y_t = h)}{\sum_{t=1}^T \pi_t \Pr(Y_t = h)} \quad h = 1, \dots, H.$$

Si tratta della media ponderata con pesi  $\pi_t \Pr(Y_t = h)$  dei valori attesi  $E(X_t | Y_t = h)$  che si ottengono alle varie epoche.

I coefficienti di premio si possono determinare con

$$\pi_h = \frac{P(h)}{P(q)} \quad h = 1, \dots, H.$$

La scelta dei pesi,  $\pi_t$  deve tenere conto delle esigenze di accostamento ai premi equi. Come caso limite, se interessa solamente l'accostamento ad una data epoca  $t$  si può prendere  $\pi_1 = 0, \dots, \pi_{t-1} = 0, \pi_t = 1, \pi_{t+1} = 0, \dots, \pi_T = 0$ .

Per  $\beta$  elevato, in condizione di regime, si ottiene una scala asintotica di coefficienti di premio.

Nell'espressione di  $P(h)$  compaiono grandezze che si possono calcolare iterativamente come descritto nel Capitolo 1.

### 4.3 Le scale di coefficienti di premio adattate al portafoglio

Consideriamo un portafoglio costituito da rischi ripartiti in  $s$  classi tariffarie, e conveniamo indicare con  $h(u)$  la percentuale di assicurati nella classe tariffaria  $u$ . Inoltre, facendo riferimento ad un assicurato preso a caso nel suddetto portafoglio, indichiamo con  $U$  la classe tariffaria, e con

$$N_1, N_2, \dots$$

il processo dei numeri aleatori di sinistri che lo colpiscono in successivi periodi di tempo e con

$$Y_1, Y_2, \dots$$

il processo delle classi di merito del sistema Bonus-malus occupate nei successivi periodi.

Indichiamo con  $\{N_t | U = u, t > 0\}$  il processo del numero dei sinistri condizionato alla classe tariffaria. Assumiamo per tale processo l'ipotesi Poisson-gamma, ovvero supponiamo che la legge temporale del processo dipenda da un parametro di rischio  $\lambda$  e che i numeri aleatori  $N_1 | U = u, \lambda = \lambda, N_2 | U = u, \lambda = \lambda, \dots$ , siano stocasticamente indipendenti e ugualmente distribuiti secondo una distribuzione di Poisson di parametro  $\lambda$ . In tal modo si assume quindi che la distribuzione di  $N_t | U = u, \lambda = \lambda$  sia indipendente da  $U$ . Inoltre  $\lambda | U = u$  abbia distribuzione Gamma di valor medio  $\mu(u)$ .

Infine indichiamo con  $\{Y_t | U = u, t > 0\}$  il processo delle classi occupate dal fissato rischio condizionatamente alla classe tariffaria  $u$ .

Viene esaminato il caso in cui oltre alle usuali ipotesi di indipendenza tra numeri di sinistri e importi di danno, da cui  $E(Z | Y_t = h, U = u) = E(Z | U = u)$ , valga anche  $E(Z | U = u) = E(Z) = 1$ .

Pertanto il premio equo per il generico assicurato, nell'ipotesi che al tempo  $t$  si trovi in classe Bonus-malus  $h$ , è

$$(4.1) \quad \lambda_h^{(t)} E(N_t | Y_t = h),$$

e si ha

$$E(N_t | Y_t = h) = \int_{u=1}^s E(N_t | Y_t = h, U = u) \Pr(U = u | Y_t = h) \\ = \int_{u=1}^s E(N_t | Y_t = h, U = u) \frac{h(u) \Pr(Y_t = h | U = u)}{\int_{u=1}^s h(u) \Pr(Y_t = h | U = u)}.$$

E' interessante osservare che in forza delle ipotesi sul processo di arrivo dei sinistri si ha

$$E(N_t | Y_t = h, U = u) = E(N_t | Y_t = h, U = u).$$

Si pone poi

$$r_h^{(t)} = \int_{u=1}^s E(N_t | U = u) \Pr(U = u | Y_t = h) \\ (4.2) \\ = \int_{u=1}^s E(N_t | U = u) \frac{h(u) \Pr(Y_t = h | U = u)}{\int_{u=1}^s h(u) \Pr(Y_t = h | U = u)},$$

che ha il significato di premio atteso pagato dal rischio assicurato se si trova in classe Bonus-malus  $h$  al tempo  $t$ , nell'ipotesi che i premi per le classi tariffarie siano quelli a priori.

Seguendo il suggerimento proposto da Taylor, nel suo lavoro "Setting a bonus-malus scale in the presence of the other rating factors" (1997), si definisce con

$$(4.3) \quad r_h^{(t)} = \frac{r_h^{(t)}}{r_h^{(t)}} = \frac{\int_{u=1}^s E(N_t | Y_t = h, U = u) \Pr(U = u | Y_t = h)}{\int_{u=1}^s E(N_t | U = u) h(u) \Pr(U = u | Y_t = h)}$$

il rapporto tra il premio atteso per la classe Bonus-malus  $h$  con i premi a posteriori e premio atteso per la classe Bonus-malus  $h$  con i premi a priori. Si ottiene così la seguente fattorizzazione del premio equo per un rischio in classe Bonus-malus  $h$  al tempo  $t$ :

$$\pi_h^{(t)} = \pi_h^{(t)} r_h^{(t)}.$$

Poiché  $\pi_h^{(t)}$  rappresenta il premio atteso pagato dai rischi di classe Bonus-malus  $h$  al tempo  $t$  sulla base dei premi valutati a priori, Taylor, nel suo articolo, interpreta  $r_h^{(t)}$  come il fattore tramite il quale il premio atteso di classe Bonus-malus  $h$  è aggiornato in seguito all'esperienza.

Fissata dunque una classe Bonus-malus di riferimento, sia  $q$ , Taylor suggerisce che una scala dei coefficienti di premio,  $\pi_1^{(t)}, \dots, \pi_H^{(t)}$ , che tenga conto solo della componente relativa alla sinistrosità osservata, dovrebbe assumere come coefficiente per un rischio in classe Bonus-malus  $h$  al tempo  $t$ .

$$(4.4) \quad \pi_h^{(t)} = \pi_q^{(t)} \frac{r_h^{(t)}}{r_q^{(t)}} \quad h = 1, \dots, H.$$

In condizioni di stazionarietà si ha:

$$(4.5) \quad \pi_h = \pi_q \frac{r_h}{r_q} \quad h = 1, \dots, H.$$

---

## CAPITOLO 5

### RISULTATI DI ESPERIENZE NUMERICHE

#### 5.1 Introduzione

In questo capitolo vengono presentati i risultati ottenuti applicando i procedimenti ricorsivi descritti nei capitoli precedenti. In particolare abbiamo pensato di

1. Usare le regole ed i coefficienti del vecchio sistema "Ministeriale" e di studiare l'evoluzione di cinque sottoportafogli in cui è stato diviso un portafoglio di rischi, chiuso a nuovi ingressi.  
L'evoluzione di ciascun sottoportafoglio è seguita attraverso i premi di equilibrio ed i coefficienti medi di premio.  
Si è ipotizzato separatamente di non considerare autoliquidazione e franchigia, di considerare solo la franchigia, e di considerare solo l'autoliquidazione.  
In particolare si sono analizzati diversi livelli di franchigia.
2. Le stesse analisi del punto 1 ma con una scala calcolata secondo il metodo proposto da Taylor, relativo all'intero portafoglio.
3. Con le regole evolutive del sistema "Ministeriale" si sono considerate cinque scale di coefficienti, ma per ogni sottoportafoglio, costruite secondo il criterio indicato nel paragrafo 4.2 per  $t = 40$  (asintotiche).  
Confronti tra i risultati ottenuti al punto 1., punto 2. e punto 3. sono proposti in vari scenari (con / senza autoliquidazione, con / senza franchigia).

In particolare si fanno analisi sulle differenze tra premi Bonus-malus e premi equi e si mettono in rilievo, dove ci sono, effetti di solidarietà.

Alle analisi si premette una breve descrizione dei dati e la stima dei parametri.

## 5.2 Dati utilizzati nelle esperienze numeriche e stima delle distribuzioni

Le esemplificazioni numeriche sono state condotte utilizzando un modello per i numeri di sinistri di tipo Poisson-gamma.

Nella determinazione delle soglie di autoliquidazione si è considerato un caricamento forfettario del premio pari al 30 %. Si è ancora supposto che la polizza assicurativa abbia un massimale pari a tre miliardi. La presenza di questo caricamento si fa sentire nelle valutazioni, mentre quello del massimale non alterano di molto i risultati che si ottengono senza considerare il massimale.

Le distribuzioni utilizzate nelle esperienze numeriche sono state ricavate da un portafoglio campione composto da oltre 184,000 polizze, la cui composizione è riportata in Tabella 5.1, ottenuto da un portafoglio più ampio realmente esistente. I cinque sottoportafogli sono ottenuti in base ai livelli della variabile tariffaria età dell'assicurato.

<b>Classe</b>	<b>Età</b>	<b>N° Polizze</b>	<b>Percentuale</b>
1	18-25	15994	0.0804265
2	26-35	38345	0.2016696
3	36-45	34131	0.1861283
4	46-60	73235	0.4028366
5	ALTRI	22578	0.128939
	Totale	184283	1

Tabella 5.1

A tutti gli assicurati si è attribuita inizialmente una sinistrosità media. Essa può essere ottenuta dalle stime che si dispone per ciascuna classe di rischio. Dalla

frequenza sinistri e varianza per ogni classe, riportate in Tabella 5.2, sono state stimati i parametri  $r$  e  $c$  dei modelli Poisson-gamma.

Classe	Frequenza sinistri	Varianza	$r$	$c$
1	0.136658762	0.14635	1.927143	14.101866
2	0.087977042	0.093955	1.294797	14.717439
3	0.082618213	0.087196	1.490930	18.046019
4	0.097638801	0.105474	1.216714	12.461382
5	0.086923804	0.094821	0.956761	11.006893

Tabella 5.2

Per quanto riguarda il danno del generico sinistro si è assunta una distribuzione di tipo Pareto:

$$F(z) = 1 - \frac{c^a}{c^a + z^a} \quad \text{dove } z \geq 0, a > 0, c > 0$$

e pertanto il valore atteso del danno diventa  $E(Z) = \frac{a}{a-1}$ .

Con i dati a disposizione si sono ottenute le stime, riportate in Tabella 5.3, per i parametri ed il conseguente valore atteso.

$a$	$c$	Danno atteso
2.124494	5,286,024	4,700,802
2.326033	4,712,421	3,553,774
2.440569	5,136,186	3,565,387
2.058410	4,462,370	4,216,107
2.120018	4,327,224	3,863,531

Tabella 5.3

### 5.3 I sistemi Bonus-malus

Nelle esperienze numeriche si è fatto riferimento a tre sistemi Bonus-malus, che sono stati chiamati: Sistema 1, Sistema 2, Sistema 3, che a parità di classi di

merito, di classe di ingresso e di regole evolutive differiscono per la scala dei coefficienti di premio. Le regole evolutive, comuni ai tre sistemi, sono riportate in Tabella 5.4.

I coefficienti di premio del Sistema 1, noto come sistema “Ministeriale”, sono in Tabella 5.5.

La scala dei coefficienti di premio del Sistema 2 è stata calcolata implementando il modello attuariale di Taylor (vedi Capitolo 4) assumendo il modello descritto al paragrafo 2.3 (Poisson-gamma, collettività chiusa, senza autoliquidazione e franchigia) e con i dati del precedente paragrafo 5.2. I coefficienti calcolati sono relativi all’epoca 40 (asintotici), e gli assicurati sono posti all’epoca 0, tutti in classe 14.

Il Sistema 3 è un insieme di sistemi Bonus-malus, uno per ciascuno dei cinque sottoportafogli che compongono l’intero portafoglio di polizze. I coefficienti sono determinati con la (4.4) per l’epoca  $t = 40$ , e dopo averli posti in classe 14 al tempo 0, usando di volta in volta i parametri del processo di arrivo stimati per il sottoportafoglio.

## Regole evolutive

Classe BM	Numero di sinistri				
	0	1	2	3	4 o più
1	1	3	6	9	12
2	1	4	7	10	13
3	2	5	8	11	14
4	3	6	9	12	15
5	4	7	10	13	16
6	5	8	11	14	17
7	6	9	12	15	18
8	7	10	13	16	18
9	8	11	14	17	18
10	9	12	15	18	18
11	10	13	16	18	18
12	11	14	17	18	18
13	12	15	18	18	18
14	13	16	18	18	18
15	14	17	18	18	18
16	15	18	18	18	18
17	16	18	18	18	18
18	17	18	18	18	18

Tabella 5.4

---

<b>Classe BM</b>	<b>Coefficienti</b>
1	0.50
2	0.53
3	0.56
4	0.59
5	0.62
6	0.66
7	0.70
8	0.74
9	0.78
10	0.82
11	0.88
12	0.94
13	1.00
<b>14</b>	1.15
15	1.30
16	1.50
17	1.75
18	2.00

*Tabella 5.5*

Sistema 2

<b>Classe BM</b>	<b>Coefficienti</b>
1	0.235
2	0.408
3	0.388
4	0.508
5	0.609
6	0.602
7	0.687
8	0.761
9	0.806
10	0.858
11	0.868
12	0.965
13	1.000
<b>14</b>	0.986
15	1.108
16	1.147
17	1.171
18	1.275

Tabella 5.6

Sistema 3

Classe BM	Classe a priori				
	1	2	3	4	5
	Coefficienti				
1	0.302	0.223	0.237	0.220	0.187
2	0.456	0.392	0.399	0.393	0.368
3	0.432	0.373	0.381	0.372	0.348
4	0.534	0.495	0.500	0.494	0.478
5	0.628	0.599	0.603	0.597	0.584
6	0.623	0.589	0.590	0.591	0.579
7	0.699	0.678	0.679	0.677	0.669
8	0.761	0.760	0.770	0.751	0.744
9	0.811	0.801	0.801	0.800	0.796
10	0.860	0.860	0.857	0.852	0.849
11	0.864	0.871	0.882	0.861	0.856
12	0.965	0.964	0.965	0.963	0.962
13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
14	0.984	0.987	0.990	0.985	0.985
15	1.108	1.107	1.101	1.113	1.118
16	1.147	1.143	1.133	1.154	1.162
17	1.170	1.162	1.148	1.179	1.191
18	1.272	1.265	1.245	1.287	1.304

Tabella 5.7

#### 5.4 Esperienze numeriche con il modello base (assenza di franchigia e autoliquidazione)

E' stato applicato il procedimento ricorrente, con le basi tecniche stimate come indicate in precedenza, ai tre sistemi Bonus-malus illustrati nel paragrafo 5.3.

Le valutazioni sono fatte su di un periodo di 40 anni ponendo in ciascuna esperienza al tempo 0 tutti gli assicurati nella classe di ingresso. Si è osservato in generale che, all'epoca 40, si ottiene una certa stabilità della distribuzione degli assicurati nelle classi di merito e quindi diciamo di essere in condizioni di stazionarietà o di regime.

#### 5.4.1 Coefficienti di premio e premi di equilibrio

Anzitutto si è posto l'attenzione sull'andamento nel tempo del coefficiente medio di premio,  $b_t$ , e dei premi di equilibrio,  $P_t^e$ , nelle varie classi di rischio a priori. (Vedi paragrafo 1.2 e paragrafo 2.2). Si tratta di due validi indicatori. Il primo può essere interpretabile come premio atteso nel periodo  $t$  dal generico assicurato quando il premio di riferimento è unitario. Il suo valore riflette la distribuzione degli assicurati nelle classi Bonus-malus. Il secondo riassume ancora più informazioni in quanto tiene conto anche degli esborsi attesi e dei premi attesi. Prima della liberalizzazione delle tariffe il premio di riferimento veniva fissato con un Decreto ministeriale tenendo conto dell'andamento tecnico del portafoglio di tutti i veicoli assicurati. Con la liberalizzazione, il premio di riferimento è fissato su base aziendale, e rivisto di anno in anno in dipendenza dell'andamento tecnico del portafoglio dell'Azienda.

In linea teorica il premio di riferimento globale di portafoglio deve essere pari al premio di equilibrio. Naturalmente per ragioni pratiche non sempre è possibile o opportuno fissare un premio di riferimento pari al premio di equilibrio. Nelle nostre valutazioni numeriche, abbiamo preso come premio di riferimento il premio di equilibrio. Precisamente con il Sistema 1 e il Sistema 2 abbiamo considerato il premio di equilibrio del portafoglio, con il Sistema 3 i premi di equilibrio per le classi di rischio, con ciò realizzando anche l'equilibrio a livello globale.

In questo modo si ottiene la massima personalizzazione.

Le conseguenze dei due diversi approcci alla determinazione del premio di riferimento non sono le stesse:

Se si prende un unico premio di riferimento pari al premio di equilibrio di portafoglio si introducono due diversi tipi di "solidarietà":

?? Solidarietà tra le diverse classi di rischio a priori.

?? Solidarietà tra le classi di merito del sistema Bonus-malus.

Solidarietà significa che in termini attesi qualcuno paga più dell'equo e qualcuno di meno mantenendo l'equilibrio generale.

In particolare solidarietà tra classi di rischio significa che in alcune classi gli assicurati pagano un premio superiore all'equo ed in altre inferiore.

Seguendo invece l'approccio di utilizzare distinti premi di riferimento nelle classi di rischio, in modo che si preservi l'equilibrio tecnico in ciascuna di esse; si introduce il solo tipo di solidarietà tra le diverse classi del di merito del sistema Bonus-malus.

Sistema 1. Con riferimento a Grafico 1 si osserva che i coefficienti medi di premio,  $b_t$  per ciascuna delle classi di rischio presentano un andamento decrescente. Ciò significa che con la sinistrosità stimata per le classi e con le regole evolutive date, si ottiene una maggiore incidenza di assicurati nelle classi di Bonus, rispetto a quelle di Malus. Di conseguenza già dal secondo anno la tariffa risulta insufficiente a meno di aumentare il premio di riferimento.

L'insufficienza tecnica è imputabile al fatto che le regole evolutive previste dal sistema "ministeriale" sono troppo poco penalizzanti rispetto alla frequenza media osservata in ciascuna classe di rischio, e ciò permette che si verifichi il cosiddetto fenomeno di "slittamento verso le classi di Bonus" da parte dei rischi assicurati nel corso degli anni.

Nella pratica la composizione delle collettività si modifica per effetto dei nuovi ingressi, e ciò influenza la ripartizione degli assicurati nelle classi. Visto che il portafoglio sotto esame è chiuso a nuovi ingressi, il fenomeno "slittamento" è più accentuato di quanto non si osservi nella pratica. Eventuali ingressi nella classe 14 contribuiscono infatti con un coefficiente di premio superiore al coefficiente medio e pertanto innalzano il livello medio dei premi introitati.

Un aspetto interessante è che nei primi anni la velocità di decrescenza del coefficiente medio di premio,  $b_t$  è più accentuata per le classi caratterizzate da una frequenza sinistri più bassa, riflettendo così la diversa velocità di concentrazione nelle classi di Bonus.

Per quanto riguarda il livello dei coefficienti medi di premio si vede che esso va da 1,15 a 0,5.

Grafico 2 riporta i premi di equilibrio al variare nel tempo per ciascuno dei cinque sottoportafogli. Si nota in tutti i casi un andamento crescente nel tempo.

Dal momento che si sta considerando un modello in cui si è supposta la costanza nel tempo sia della sinistrosità del generico individuo descritta dal processo di arrivi del numero di sinistri  $\{N_t, t > 0\}$ , che della distribuzione del singolo danno

$Z_{it}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ ,  $t > 0$  (vedi paragrafo 1.2), in assenza di autoliquidazione e franchigia, il danno totale atteso in un periodo coincide con l'esborso atteso dell'assicuratore e, nelle ipotesi indicate, risulta costante nel tempo.

Pertanto  $P_t^e \cdot b_t = E(X_t) = \text{costante}$  e quindi  $P_t^e$  è inversamente proporzionale a  $b_t$ .

Visto che con il Sistema 1, i coefficienti medi di premio crescono, ne risulta che i premi di equilibrio decrescono.

Si può ancora notare che i premi di equilibrio oltre a presentare un andamento crescente, descrivono una funzione concava, il che significa che l'aumento del premio di riferimento necessario per mantenere in equilibrio il Sistema 1, va riducendosi nel tempo.

Inoltre si vede che, dopo un conveniente numero di anni i premi di equilibrio sono pressoché stabili, e ciò riflette il fatto che si raggiunge una stazionarietà del sistema Bonus-malus.

Mettendo a confronto i premi di equilibrio di classi tariffarie diverse si nota che essi sono tanto più piccoli quanto minore è la frequenza sinistri di classe. Inoltre più bassa è la frequenza sinistri meno rapidamente crescono i premi di equilibrio. Infine si osserva che tra le cinque classi di rischio a priori, la classe 1 è l'unica a presentare un andamento dei premi di equilibrio che dopo 40 anni non si è ancora completamente stabilizzato.

#### 5.4.2 *Esborsi attesi e premi Bonus-malus*

Con riferimento a Grafico 3, per la classe tariffaria 1, sono messi a confronto all'epoca 40 gli esborsi attesi (premi equi) ed i premi Bonus-malus ottenuti moltiplicando il premio di equilibrio per il coefficiente di premio. Si ricorda che la classe tariffaria 1 è quella con più elevata sinistrosità attesa. Si vede che a tale epoca, l'esborso atteso in ciascuna classe Bonus-malus è superiore all'introito atteso, tranne che per le classi 1, 17 e 18.

Dal grafico in esame si può apprezzare l'effetto "solidarietà": i "buoni" rischi, quelli che hanno esperienza di sinistrosità bassa dopo 40 anni, finanziano parzialmente, pagando un premio  $P_{40}^e \cdot U = 1$  più alto del premio equo  $E(X_{40} | Y_{40})$

$= h \wedge U = 1$ ), i “cattivi” rischi ai quali viene fatto pagare un premio  $P_{40} \cdot ?_h \mid U = 1$

più basso dell’equo  $E(X_{40} \mid Y_{40} = h \wedge U = 1)$ ,  $h = 2, \dots, 18$ .

La giustificazione del risultato sta nei coefficienti di premio.

Il principio ispiratore dell’effetto “solidarietà” è: da una parte far pagare un poco di più ai “buoni rischi” poiché sono numerosi, e dall’altra ridurre il premio dei più rischiosi visti come più sfortunati.

Passando al Grafico 4, relativo alla classe tariffaria 4, si vede che l’effetto di “solidarietà” risulta ancora più marcato.

Infatti si può notare come le differenze tra esborso atteso nelle classi Bonus-malus e premio pagato da un sinistro appartenente alle stesse classi, risultino maggiori per la classe 1 rispetto a quelle che sussistono nella classe di rischio 4.

Ciò è naturale poiché la classe 4 è caratterizzata da rischi meno sinistrosi e di conseguenza l’effetto “slittamento”, a parità di durata (40 anni), risulta accelerato rispetto alla classe 1; ovvero la presenza di rischi nelle classi di Bonus è maggiore per la classe 4 rispetto alla classe 1.

Sistema 2. Questo sistema differisce dal Sistema 1 solo per la scala di coefficienti di premio.

Analizzando Grafico 5, si può osservare anche in questo caso un trend decrescente della successione dei coefficienti medi di premio,  $b_t$ , e questo riflette la tendenza degli assicurati a concentrarsi nelle classi di Bonus.

Si può notare anche che l’andamento dei coefficienti medi di premio non è monotono; ma presenta delle oscillazioni che vanno attenuandosi nel tempo, fino a scomparire quasi completamente intorno ai 20 - 25 anni. La spiegazione risiede nel fatto che i coefficienti di premio del Sistema 2 non godono della proprietà di essere crescenti con la classe di merito. Siccome si parte con tutti gli assicurati all’epoca 0 nella classe di ingresso, quando il gruppo di quelli che non hanno riportato sinistri scende in una classe a cui corrisponde un coefficiente maggiore di quello della classe occupata nel periodo precedente, il coefficiente medio di premio può aumentare.

Una seconda differenza rispetto al Sistema 1 riguarda il range di valori assunto nel tempo dal coefficiente medio; per il Sistema 1 va da 1.15 a 0,5, e per il Sistema 2 va da 1,02 a 0.3.

Queste differenze sono dovute alle diverse scale di coefficienti: quella del Sistema 1 presenta un campo di variazione dei valori più ridotto.

Grafico 6 riporta l'andamento dei premi di equilibrio. Dato che anche in questo caso valgono le ipotesi che portano alla costanza nel tempo dell'esborso atteso  $E(X_t)$ , l'andamento dei premi di equilibrio è deducibile da quello dei coefficienti medi di premio. In particolare, la successione dei premi non è monotona crescente, anche se le oscillazioni sono sempre più ridotte al crescere del tempo, e asintoticamente tendono a scomparire.

Dal confronto tra Grafico 6 e Grafico 1 emergono due principali differenze:

Mentre la successione dei premi di equilibrio nel Sistema 1 assume un andamento crescente e concavo, quella del Sistema 2 in un primo periodo (circa 15 anni) ha andamento convesso e successivamente concavo. Per il Sistema 1 le entità delle variazioni sono positive nel primo intervallo di tempo e negative nel secondo.

Passiamo ora ad analizzare le differenze tra premi Bonus-malus e premi equi con il Sistema 2. Si confrontino Grafico 7 e Grafico 8 con i rispettivi Grafico 3 e Grafico 4. Cominciamo dal confronto all'epoca 40 nella classe di rischio 1. Da Grafico 7 si osserva che per la classe di merito 1, il premio Bonus-malus,  $P_{40}^{?_1} | U = 1$  è inferiore all'equo,  $E(X_{40} | Y_{40} = 1 \wedge U = 1)$ .

Nelle altre classi di merito, cioè  $h \neq 1$ , viene fatto pagare invece un premio Bonus-malus,  $P_{40}^{?_h} | U = 1$  maggiore rispetto dell'equo,  $E(X_{40} | Y_{40} = h \wedge U = 1)$ .

Va però sottolineato che i premi di equilibrio nei primi anni crescono più rapidamente che con il Sistema 1 proprio in forza dei diversi coefficienti di premio.

Passando alla classe di rischio 4, e quindi riferendoci a Grafico 8, si può notare che i premi Bonus-malus,  $P_{40}^{?_h} | U = 4$  riproducono abbastanza fedelmente gli esborsi attesi,  $E(X_{40} | Y_{40} = h \wedge U = 4)$ . Si osservi inoltre che il "matching" tra esborso atteso e introito atteso all'epoca 40, è migliore nelle classi di merito più

basse. Si può allora affermare che nella classe di rischio 4, non è presente l'effetto solidarietà tra le classi di merito se non in misura molto limitata.

Essendo la scala di coefficienti del Sistema 2 disegnata per aver premi Bonus-malus vicini ai premi equi, ne risulta una minor solidarietà all'interno delle classi di rischio, mentre vi è una solidarietà tra classi di merito. Quelle a priori più rischiose sono finanziate in media dalle meno rischiose.

Sistema 3. In questo sistema Bonus-malus si hanno scale di coefficienti diversi per ogni classe di rischio. Si è interessati principalmente ai confronti con i risultati ottenuti con il Sistema 2.

Grafico 9 si presenta sostanzialmente analogo a Grafico 5, e valgono le osservazioni fatte per il Sistema 1 in particolare riguardo l'andamento non monotono e il range dei valori assunti dai coefficienti medi di premio.

Siccome si hanno scale di coefficienti diverse per ogni tipo di rischio, anche i valori asintotici sono diversi.

Le considerazioni riguardo il premio di equilibrio emergono dall'analisi del Grafico 10. L'andamento dei premi di equilibrio differisce molto per il Sistema 2 e il Sistema 3. I valori sono però diversi dato che si hanno scale di coefficienti diverse.

Con le scale del Sistema 3 si cerca di ottenere in ogni classe di rischio un premio Bonus-malus vicino all'equo. Perciò se si prendono due classi di rischio, una meno rischiosa (ad esempio la 4 che è la meno rischiosa tra le due considerate) ed una più rischiosa (ad esempio la 1 che è la più rischiosa tra le cinque), si ottengono diverse ripartizioni nelle classi di merito: più concentrazione nella classe migliore (per la classe di rischio 4) e di conseguenza diversi coefficienti medi di premio (più basso per la classe 4) e diversi premi di equilibrio (più alto per la classe 4). Risulta anche significativamente diverso il valore asintotico del premio di equilibrio per la classe a priori meno rischiosa (classe 4), rispetto al Sistema 2. Precisamente esso risulta più elevato.

Risulta utile osservare che Grafico 11 e Grafico 12 mettono chiaramente in evidenza che il Sistema 3 all'epoca 40 produce un perfetto abbinamento tra esborso ed introito attesi di ogni classe Bonus-malus e per ciascuna classe di rischio a priori. Di conseguenza l'effetto di solidarietà tra le diverse classi di

merito è assente asintoticamente. Dall'analisi dei due grafici si conferma che il Sistema 3 non offre solidarietà tra le diverse classi di merito.

In conclusione il Sistema 3 è quello più vicino alla tariffazione su basi eque.

## 5.5 Esperienze numeriche in presenza di autoliquidazione

Prima di passare alle analisi dei risultati numerici richiamiamo alcune ipotesi poste per ottenere le valutazioni per determinare le soglie di autoliquidazione, cioè gli importi massimi che conviene autoliquidare, si è ipotizzato il comportamento “ragionevole” dell'assicurato descritto nel paragrafo 3.2. Non si è considerato l'aspetto finanziario, ovvero si è posto il fattore di attualizzazione finanziaria  $v$ , pari a 1. Le conseguenze economiche delle decisioni dell'assicurato sono valutate nei successivi  $T$  periodi e si è assunto  $T = 5$ , durante i quali si è supposto che non riporti altri sinistri. Come abbiamo visto al paragrafo 3.2, ciò comporta che la sequenza delle classi occupate diventi certa e pertanto, assegnati i premi di riferimento, sono determinabili le conseguenze del denunciare o trattenere uno o più sinistri. Come premio di riferimento per l'anno  $t$  è stato preso il premio di equilibrio dell'anno  $t-1$ ; il premio di riferimento del primo anno è stato fissato pari al premio di equilibrio del primo anno ma calcolato a prescindere dall'autoliquidazione.

Tenendo conto dell'autoliquidazione di sinistri, diminuiscono le percentuali di assicurati nelle classi di Malus mentre si rileva un corrispondente aumento nelle classi di Bonus e rimangono sostanzialmente stabili le percentuali di assicurati nelle classi intermedie. Ciò provoca un abbassamento del livello dei coefficienti medi di premio.

L'effetto risulta ovviamente più accentuato nelle classi di rischio a priori più sinistrose. L'abbassamento del livello del coefficiente medio di premio è tanto più evidente quanto più penalizzante è la scala dei coefficienti adottata. Queste considerazioni possono essere verificate osservando Grafico 13 e Grafico 14 che si riferiscono all'andamento del coefficiente medio di premio rispettivamente del Sistema 1 e del Sistema 2. Grafico 15 e Grafico 16 riportano l'andamento dei

premi di equilibrio rispettivamente per il Sistema 1 e il Sistema 2. Si può notare che la successione dei premi di equilibrio presenta un andamento crescente. Questo non era a priori scontato, tenuto conto che se diminuiscono i coefficienti medi di premio diminuiscono anche gli esborsi attesi.

Confrontando ora il Grafico 2 e il Grafico 15 per il Sistema 1 oppure il Grafico 6 e il Grafico 16 per il Sistema 2, si vede che a parità di epoca i premi di equilibrio nel modello con autoliquidazione sono meno elevati rispetto a quelli ottenuti con il modello base. Se si guarda alle differenze tra i premi di equilibrio senza e con autoliquidazione queste sono più consistenti per le classi di rischio più sinistrose. Passiamo al confronto tra premi equi ed i premi Bonus-malus all'epoca 40 per le due classi di rischio, 1 e 4.

Sistema 1. Grafico 3 e Grafico 17 si riferiscono alla classe di rischio 1 rispettivamente in assenza e in presenza di autoliquidazione. Si nota che per le classi di merito più elevate i premi Bonus-malus sono superiori ai premi equi. Inoltre mentre l'andamento dei premi Bonus-malus riflette la scala dei coefficienti di premio, l'andamento dei premi equi è pressoché monotono nel caso senza autoliquidazione, mentre ha un massimo locale nel caso con autoliquidazione.

Grafico 4 e Grafico 18 si riferiscono invece alla classe di rischio 4.

Sistema 2. Grafico 7 e Grafico 19 che si riferiscono alla classe di rischio 1 rispettivamente con e senza autoliquidazione. L'autoliquidazione fa aumentare le differenze tra i premi Bonus-malus e premi equi. Grafico 20 e Grafico 8 si riferiscono alla classe di rischi 4 rispettivamente con e senza autoliquidazione. Dai confronti proposti si comprende che a seconda delle classi di rischio e classi di merito cambia l'effetto solidarietà tra classi di rischio a priori e classi di merito del sistema Bonus-malus.

## **5.6 Esperienze numeriche in presenza di franchigia**

Interessa a questo punto presentare qualche risultato numerico ottenuto considerando polizze con franchigia.

Sono stati considerati due soli livelli di franchigia assoluta, variabile con la classe Bonus-malus e costante nel tempo.

Si sono analizzati due casi:

?? Il caso A prevede una franchigia di £ 1,000,000 per tutte classi Bonus-malus, tranne che per le prime due classi di merito dove la franchigia è posta pari a £ 0.

?? Il caso B analogamente al caso A prevede franchigia nulla per le prime due classi Bonus-malus e fissa l'importo della franchigia pari a £ 500,000 per le altre classi di merito.

Il modello attuariale di valutazione nelle suddette circostanze è descritto al Capitolo 3; qui siamo in un caso particolare di quel modello.

E' opportuno osservare che analizzare la presenza della franchigia nella polizza assicurativa, è in qualche modo analogo allo studio dell'autoliquidazione, e la situazione è meno complessa dal punto di vista teorico.

Le valutazioni ove non diversamente precisato fanno riferimento al modello che prevede franchigia di tipo A, visto che i risultati qualitativamente sono gli stessi del modello con franchigia B, ma quantitativamente sono più apprezzabili.

Anzitutto conviene iniziare dal confronto di questo modello con il modello base. Si osserva che i coefficienti medi di premio assumono un andamento decrescente, e rispetto al modello base, si stabilizzano su di un valore più basso. Questo fatto abbastanza scontato può essere osservato mettendo a confronto Grafico 21, Grafico 22, e Grafico 23, relativi al modello con franchigia, con rispettivamente Grafico 1, Grafico 5, e Grafico 9 relativi al modello base.

I premi di equilibrio sono ovviamente più bassi in tutte le classi di rischio rispetto a quanto accade al modello base, con differenze, che a parità di classe di rischio, vanno attenuandosi nel tempo. Quest'ultimo aspetto si spiega proprio per il tipo di franchigia scelto, che prevede un livello nullo in corrispondenza delle prime due classi di merito, ovvero nelle classi Bonus-malus in cui tendono a concentrarsi tutti gli assicurati. Al crescere del tempo si riduce quindi l'effetto della franchigia. In particolare con il Sistema 1 il fenomeno è abbastanza ridotto come si vede dal confronto tra Grafico 25 che fa riferimento al modello con franchigia, e Grafico 2. Si può vedere invece che il fenomeno è più accentuato col Sistema 2, poiché il premio di equilibrio in entrambi i modelli posti a confronto, si stabilizza asintoticamente allo stesso valore. Si confronti Grafico 24 che fa riferimento al modello con franchigia, con Grafico 6.

Nel Sistema 3 invece, il suddetto fenomeno si manifesta a metà strada rispetto a quanto accade negli altri due sistemi. Si confronti Grafico 26 che fa riferimento al modello con franchigia, con Grafico 10.

Infine si osserva che nel Sistema 1 i premi di equilibrio presentano un andamento poco regolare, anche se le irregolarità si attenuano al crescere del tempo. Ciò è dovuto al tipo di franchigia ipotizzata e alla distribuzione iniziale degli assicurati. Torniamo al confronto all'epoca 40 tra esborsi attesi e premi Bonus-malus. Fissata una classe di rischio a priori  $u$ , si vede che la franchigia provoca, per ciascuna classe di merito, una diminuzione dei premi Bonus-malus  $P_{40}^h | U = u$ . Gli esborsi attesi invece aumentano nelle prime due classi mentre diminuiscono nelle altre. Ciò accade per ciascuno dei sistemi Bonus-malus considerati.

Confronti diretti per il Sistema 1 si possono fare tra Grafico 27 e Grafico 3 per la classe di rischio a priori 1, e tra Grafico 28 e Grafico 4 per la classe di rischio 4. Con riferimento al Sistema 2 i confronti, per la classe di rischio a priori 1, sono tra Grafico 29 e Grafico 7; mentre per la classe 4, tra Grafico 30 e Grafico 8. Infine per il Sistema 3 i confronti sono tra Grafico 31 e Grafico 11 per la classe di rischio 1, e tra Grafico 32 e Grafico 12 per la classe 4.

A parità di sistema Bonus-malus confrontiamo i risultati in classi di rischio diverse. Nelle classi di rischio più sinistrose, cioè di più alta frequenza sinistri, è più alto il numero atteso di sinistri di importo inferiore alla franchigia. Aumenta quindi il divario tra esborsi attesi con e senza franchigia.

Poniamo ora a confronto i risultati per i due diversi livelli di franchigia. Grafico 33 e Grafico 34 si riferiscono alla franchigia tipo B rispettivamente per le classi di rischio 1 e 4 col Sistema 2. Grafico 35 e Grafico 36, si riferiscono ancora alla franchigia tipo B, rispettivamente per la classi di rischio 1 e 4 ma col Sistema 3. I corrispondenti grafici per la franchigia di tipo A sono Grafico 29 e Grafico 30 per il Sistema 2, e Grafico 31 con Grafico 32 per il Sistema 3.

Dai suddetti confronti si comprende molto chiaramente che per esempio raddoppiando l'importo della franchigia, risultano, dal lato dell'assicuratore, due importanti effetti benefici ai fini dell'equilibrio tecnico.

Si vede che con la franchigia tipo B, diminuiscono sensibilmente gli esborsi attesi nelle classi di merito,  $E(X_{40} | Y_{40} = h \wedge U = u)$  per tutte le classi di rischio  $u$ .

I premi pagati dagli assicurati della classe di rischio  $u$  che all'epoca 40 si trovano in classe Bonus-malus  $h$ ,  $P_{40} \cdot ?_h | U = u$ , non cambiano percentualmente di molto con i due tipi di franchigia.

Facciamo infine alcune riflessioni riguardo il modello con franchigia e il modello con autoliquidazione che emergono, dal confronto di alcuni grafici.

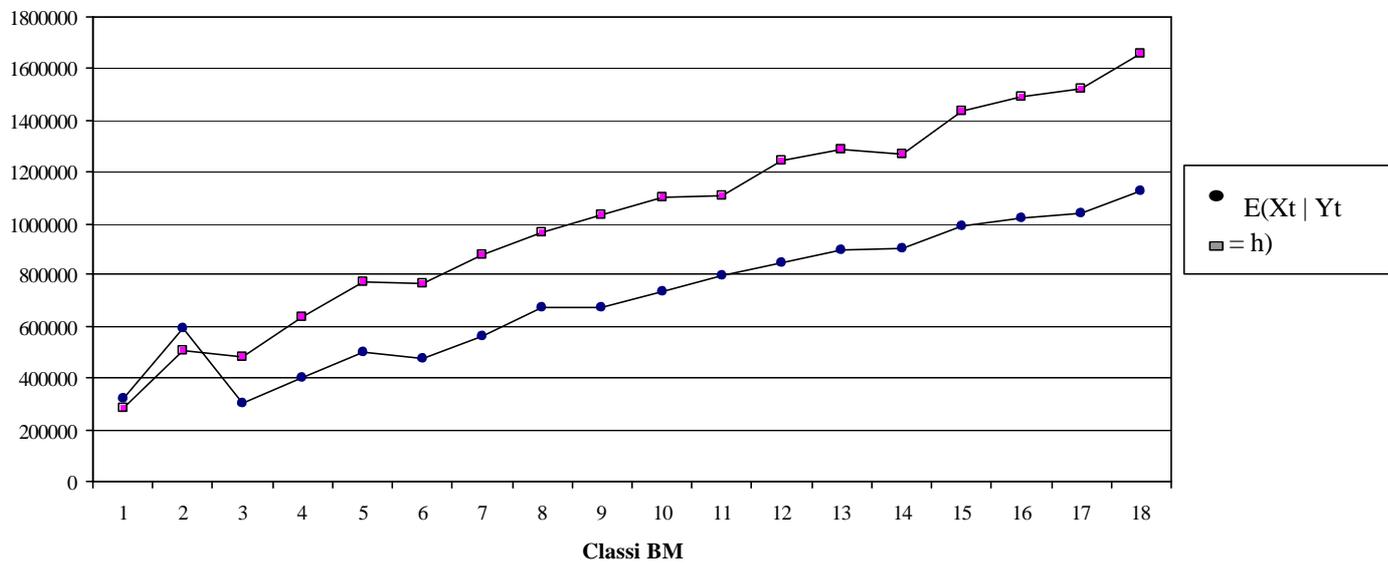
Con riferimento al coefficiente medio di premio si può osservare che il suo livello, ottenuto implementando i due suddetti modelli in questione, è sostanzialmente analogo. Per esempio si confrontino Grafico 21 e Grafico 13 per il Sistema 1, e Grafico 22 e Grafico 14 per il Sistema 2.

Invece per quanto riguarda i premi di equilibrio si possono notare alcune differenze. Col Sistema 1, in ciascuna classe di rischio, il premio di equilibrio ha un valore iniziale leggermente inferiore, nel caso con franchigia, rispetto al modello con autoliquidazione, mentre asintoticamente raggiungono valori simili. Si confrontino Grafico 25 e Grafico 14.

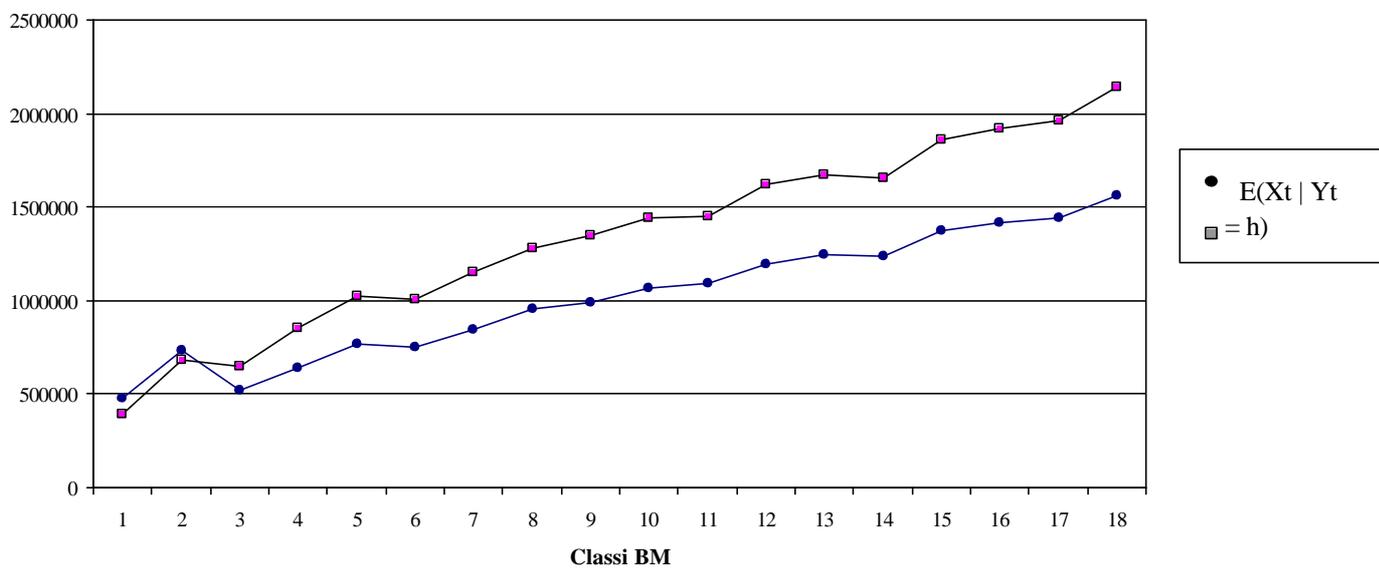
Col Sistema 2, in ciascuna classe di rischio il premio di equilibrio del modello con franchigia ha un valore più basso rispetto al modello con autoliquidazione, ma asintoticamente raggiunge un livello decisamente più alto, precisamente pari al livello raggiunto col modello base. Si confrontino Grafico 24, Grafico 16 e Grafico 6.

Infine, si comprende che adottando un modello con autoliquidazione equivale ad adottare un modello con franchigia con livello pari alla soglia di autoliquidazione. Si confrontino Grafico 15 e Grafico 27 relativi alla classe di rischio 1 e Grafico 16 con Grafico 28 relativi alla classe di rischio 4.

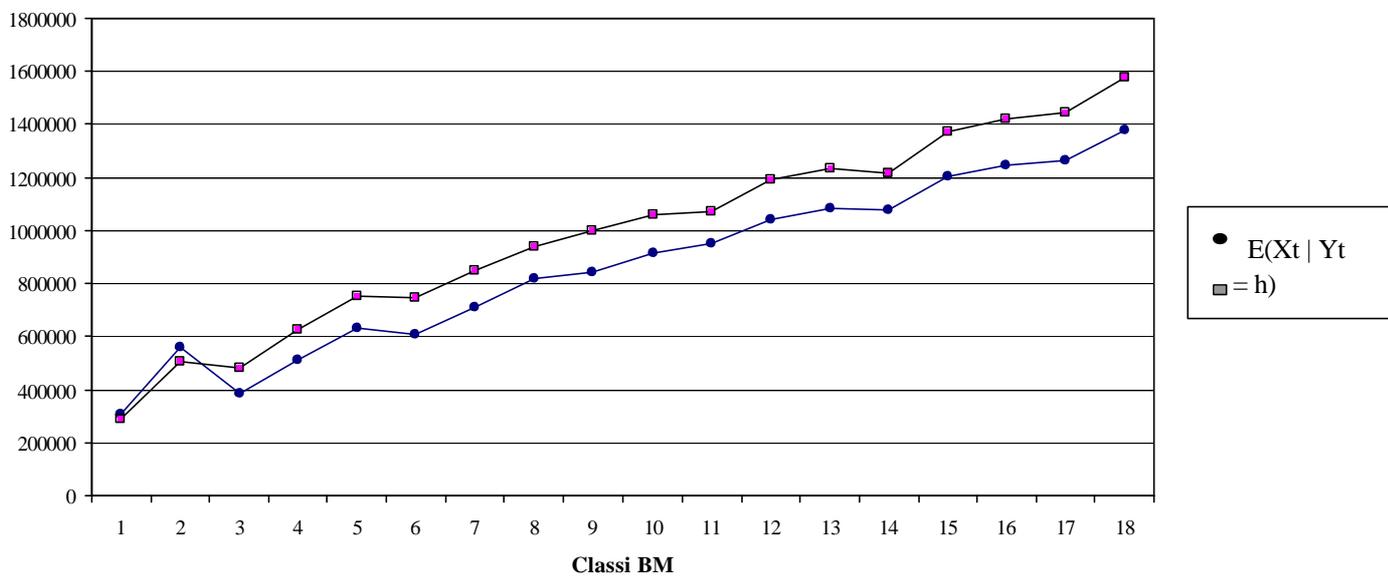
**Confronto premi equi e premi BM Sistema 3 Modello franchigia Tipo A  
classe 4, t=40**



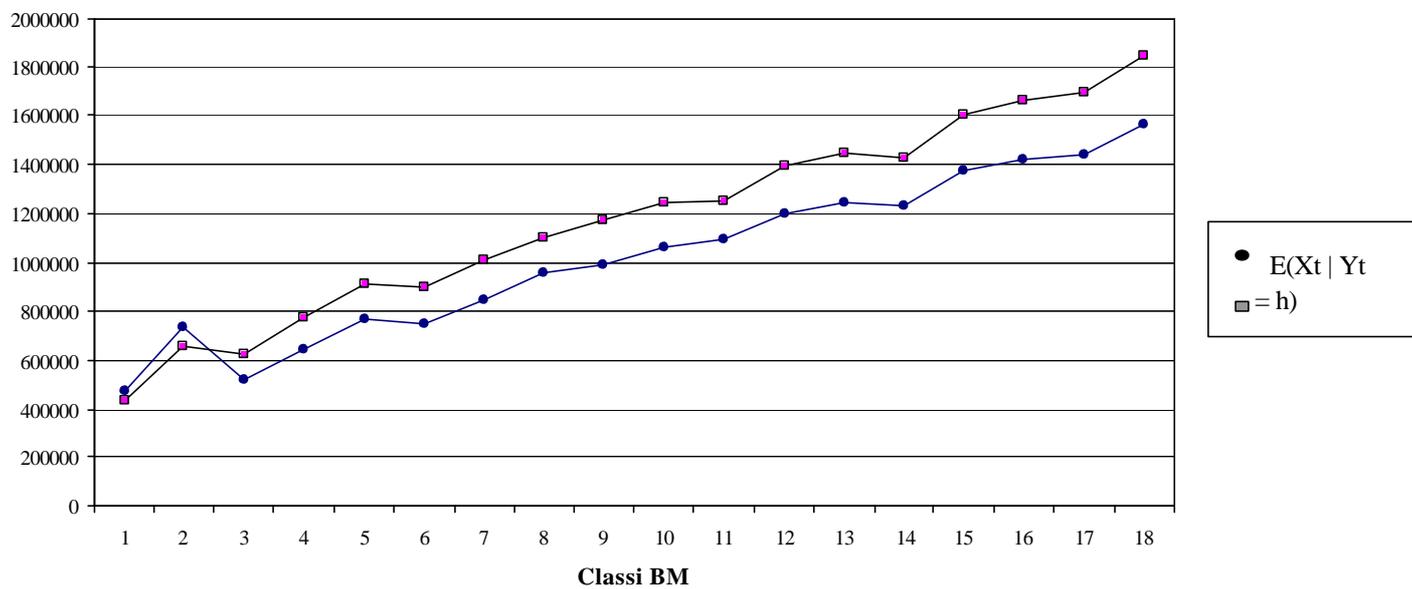
**Confronto premi equi e premi BM Sistema 2 Modello franchigia Tipo B  
classe 1, t=40**



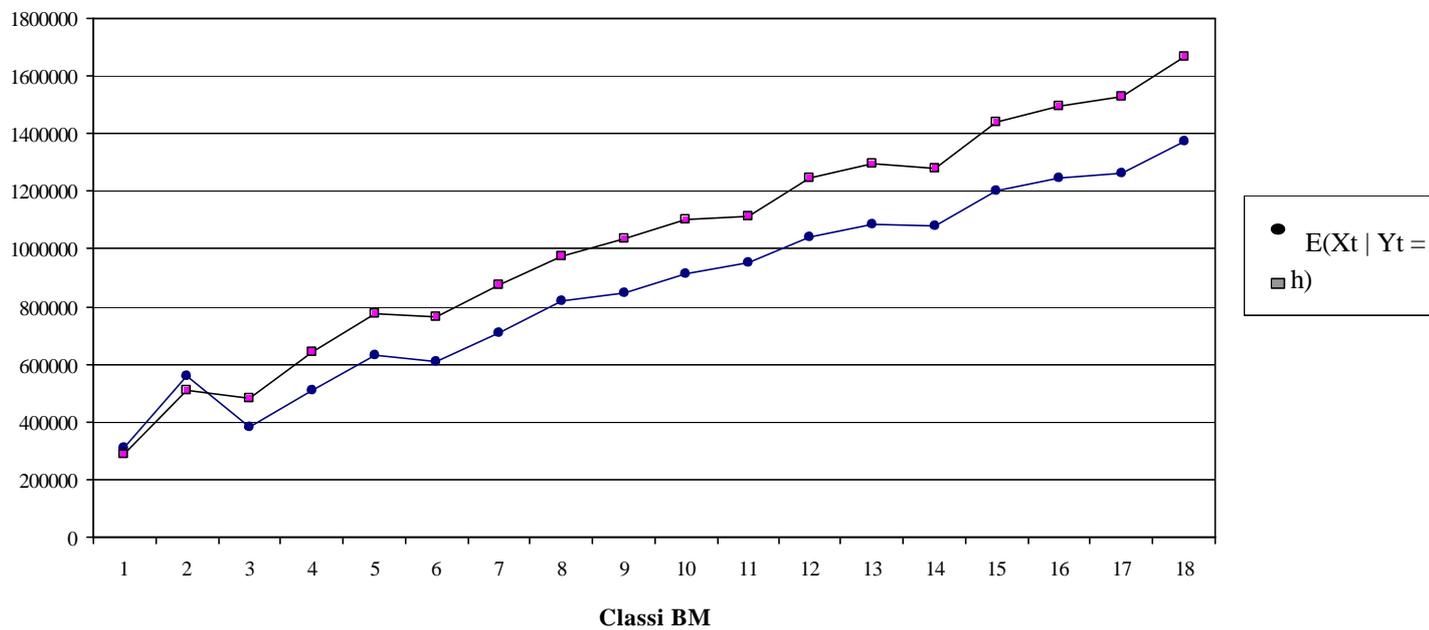
**Confronto premi equi e premi BM Sistema 2 Modello franchigia Tipo B  
classe 4, t=40**



**Confronto premi equi e premi BM Sistema 3 Modello franchigia Tipo B  
classe 1, t=40**



**Confronto premi equi e premi BM Sistema 3 Modello franchigia Tipo B  
classe 4, t=40**



## BIBLIOGRAFIA

DABONI L. (1993). "Lezioni di tecnica attuariale delle assicurazioni contro i danni". Edizioni LINT, Trieste.

GIGANTE P. (1997). "Un modello per una tariffa RCA Bonus-malus con franchigia". *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari*, LX(1-2), 29-42.

GIGANTE. P., PICECH L., SIGALOTTI L., (1996). "Valutazioni Attuariali per Sistemi Bonus Malus". *Atti del Congresso Nazionale di Scienze delle Assicurazioni. "L'Assicurazione alle soglie del 2000"* Torino 1-3 Dicembre 1996.

GIGANTE. P., PICECH L., SIGALOTTI L., (1999). "Recursive procedures to evaluate bonus-malus systems". *Quaderni del Dipartimento di Matematica Applicata alle Scienze Economiche Statistiche ed Attuariali "Bruno De Finetti"*. Università Trieste, 13/99.

GIGANTE. P., PICECH L., SIGALOTTI L., (2000). "Bonus Malus Experience Rating and Rating Factors". *Quaderni del Dipartimento di Matematica Applicata alle Scienze Economiche Statistiche ed Attuariali "Bruno De Finetti"*. Università Trieste, 03/00.

GISLER A. (1996). "Bonus- malus and Tariff Segmentation". *Transaction of the XXVII ASTIN Colloquium*, Copenhagen.

LEMAIRE J., (1995). "Bonus malus systems in automobile insurance". *Huebner International Series in Risk, Insurance and Economic Security 19*, University of Pennsylvania, USA.

PICECH L., SIGALOTTI L., (1996b). "Valutazioni Attuariali su Sistemi Bonus malus. La personalizzazione" *Università Bocconi, CERAP, Working Paper n° 13*.

PICECH L., SIGALOTTI L., VISINTIN S., (1996). "Tariffe R. C. Auto: valutazioni attuariali su alcuni sistemi bonus-malus europei". *Università Bocconi, CERAP, Working Paper n° 11*.

SAS INSTITUTE INC. (1990), "SAS/IML Software: Usage and Reference". *Version 6*". First Edition, Sas Institute Inc., Cary, NC.

SAS INSTITUTE INC. (1994), "SAS/STAT User's guide Volume 1". *Version 6. Fourth Edition*, Sas Institute Inc., Cary, NC.

SAS INSTITUTE INC. (1994), "SAS/STAT User's guide Volume 2". *Version 6. Fourth Edition*, Sas Institute Inc., Cary, NC.

TAYLOR G., (1997). "Setting a bonus-malus scale in the presence of the other rating factors". *ASTIN Bulletin* 27, 319-327.