ENSAE

Année 2002

Mémoire d'actuariat

Garanties implicites d'un contrat d'assurance-vie en euros

Hélène de CAYEUX
Guillaume AUTIER

Animateurs : Philippe TAFFIN et Christophe FRITSCH
AXA Investment Managers

Correspondant ENSAE : Nathalie PISTRE

Table des matières

Introduction

Les contrats d'assurance-vie de type "épargne" dont les garanties sont libellées en euros occupent une place de choix au sein de la littérature financière de ces dernières années (voir par exemple Grosen-Jorgensen [1], Bryis et Varenne [6]). De nombreux travaux se sont efforcés de décrire les garanties attachées à ces contrats et à souligner les risques liés à la commercialisation du "placement préféré des Français".

La **théorie des options** a profondément renouvelé ces réflexions. En effet, la plupart des stipulations d'un contrat peuvent être représentées sous la forme d'options figurant au bilan (au passif, mais aussi, nous le verrons, à l'actif) de l'assureur. Il s'ensuit que l'exacte tarification du contrat impose la prise en compte de ces options. En outre la description optionnelle du contrat permet la mise en oeuvre par l'assureur d'une couverture plus exacte des risques auxquels il est exposé.

Les modèles développés par la littérature[1] s'appuient en général sur l'analyse optionnelle de la firme développée par Merton (1974). Sur cette base, un grand nombre de travaux montrent l'insuffisance de la provision mathématique à refléter l'ensemble des engagements de l'assureur. Celle-ci représente le montant d'épargne accumulée par le contrat, mais ignore les engagements optionnels.

Cependant, la plupart de ces travaux se préoccupent assez peu du **cadre comptable et réglementaire** applicable aux compagnies d'assurance. On peut en citer plusieurs exemples :

- Les modèles se concentrent en général sur l'étude d'une**unique génération de contrats**. Il s'ensuit que sont négligés les phénomènes de mutualisation des produits financiers entre différentes générations. De plus, un tel cadre ne prend pas en compte la possibilité offerte aux assureurs de transférer des montants de participation bénéficiaire de certaines générations sur d'autres par le jeu de la provision pour participation aux excédents (PPE).
- Les problèmes liés aux **règles de comptabilisation des placements**, et notamment le principe du coût historique, sont, eux aussi, le plus souvent négligés. Ceux-ci exercent pourtant une influence qui peut être déterminante sur le calcul du taux de rendement du contrat.

[1] dont on trouvera une liste d'exemples dans la bibliographie.

– Enfin le **circuit comptable aboutissant au calcul de la participation bénéficiaire** s'écarte le plus souvent de la réalité. Parmi l'une des illustrations très concrètes de cet aspect, nous verrons que l'écriture de la participation bénéficiaire qui correspond le mieux au cadre comptable est d'une forme trés différente de celle qu'on trouve dans la plupart des modèles de la littérature[2].

Ces exemples soulignent assez l'importance des contraintes liées au cadre comptable et réglementaire. La description du contrat sous forme d'options implicites, de même que la couverture de ces options, ne peuvent s'affranchir des règles qu'il prescrit. L'objet de ce mémoire consiste, dès lors, en la **construction d'un modèle de contrat qui s'inscrive dans le cadre comptable applicable à l'assurance-vie**. Il s'agit d'exposer la forme que prennent, sous ces contraintes, les options implicites des contrats et les moyens de les couvrir.

*

*   *

Au cours d'un premier chapitre à caractère introductif, nous rappelons les éléments réglementaires applicables au contrat étudié.

La première partie de ce mémoire présente un modèle de contrat isolé et de durée fixe. Nous y décrivons les options implicites liées à la revalorisation minimale du contrat ainsi que la stratégie de couverture de telles options.

La deuxième partie place le contrat décrit précédemment au sein d'un modèle de bilan où plusieurs générations de contrats sont présentes simultanément. La mutualisation de la rémunération entre différents contrats modifie la nature des options implicites et, partant, la couverture des risques du contrat.

Enfin, la troisième partie du mémoire relâche l'hypothèse de durée fixée. Le rachat du contrat est désormais possible et s'effectue selon une loi exogène. Par ailleurs, des risques de même nature sont liés à la faculté pour les assurés de choisir le moment de leur souscription.

---

[2] Respectivement de la forme $(\delta.\text{Produits Financiers} - \text{Intérêts techniques})^+$, contre $\delta(\text{Produits Financiers} - \text{Intérêts techniques})^+$

Chapitre 1

Le contrat étudié et son cadre réglementaire

Nous présentons dans ce chapitre les caractéristiques principales des contrats d'assurance-vie de type "épargne" dont les garanties sont libellées en francs. Nous nous limitons à celles qui seront utiles pour la construction de notre modèle.

Ces contrats donnnent lieu à la constitution d'une épargne dont la revalorisation s'appuie sur le résultat financier dégagé par l'assureur (1.1). En outre, la compagnie d'assurance est soumise à un cadre réglementaire très strict(1.2).

1.1 Caractéristiques générales du contrat

1.1.1 La constitution de l'épargne

Provision mathématique, actifs placés en représentation

La compagnie d'asuurance-vie qui commercialise des contrats d'épargne constitue en son passif une provision mathématique égale à son engagement envers l'assuré (art. R 331-3 du Code des assurances). A l'actif du bilan, des placements sont destinés à couvrir cet engagement.

Au cours du temps, cette provision s'apprécie sous l'effet, d'une part des versements successifs qui viennent abonder l'épargne, d'autre part, de la revalorisation de l'épargne acquise selon un taux variable.

Ce taux de revalorisation (en principe identique pour tous les assurés) dépend du rendement dégagé par les actifs placés en représentation de cet engagement. Il est la somme d'un **taux technique**, qui en constitue le plancher et d'une **participation bénéficiaire**, positive ou nulle.

Taux technique

A la souscription du contrat, l'assureur fixe un taux minimum annuel de revalorisation qui s'appliquera pour toute la durée de celui-ci. Aux termes de l'article

A 132-1 du Code des assurances, ce taux ne peut excéder :

- 75% du TME pour les contrats dont la durée maximale est inférieure à 8 ans ;
- $min(3,5\%, 60\%$ du $TME)$ pour les contrats dont la durée est supérieure à 8 ans.

où "TME" désigne le taux moyen des emprunts d'Etat à long terme calculé sur les six mois précédant la souscription[1].

Dans le cadre de notre étude, le contrat est de durée viagère et est donc soumis au second de ces deux régimes.

Pour autant, ce taux technique est, le plus souvent, très inférieur à la rémunération finale du contrat, laquelle s'effectue selon le mécanisme dit de "participation aux bénéfices".

Participation aux bénéfices

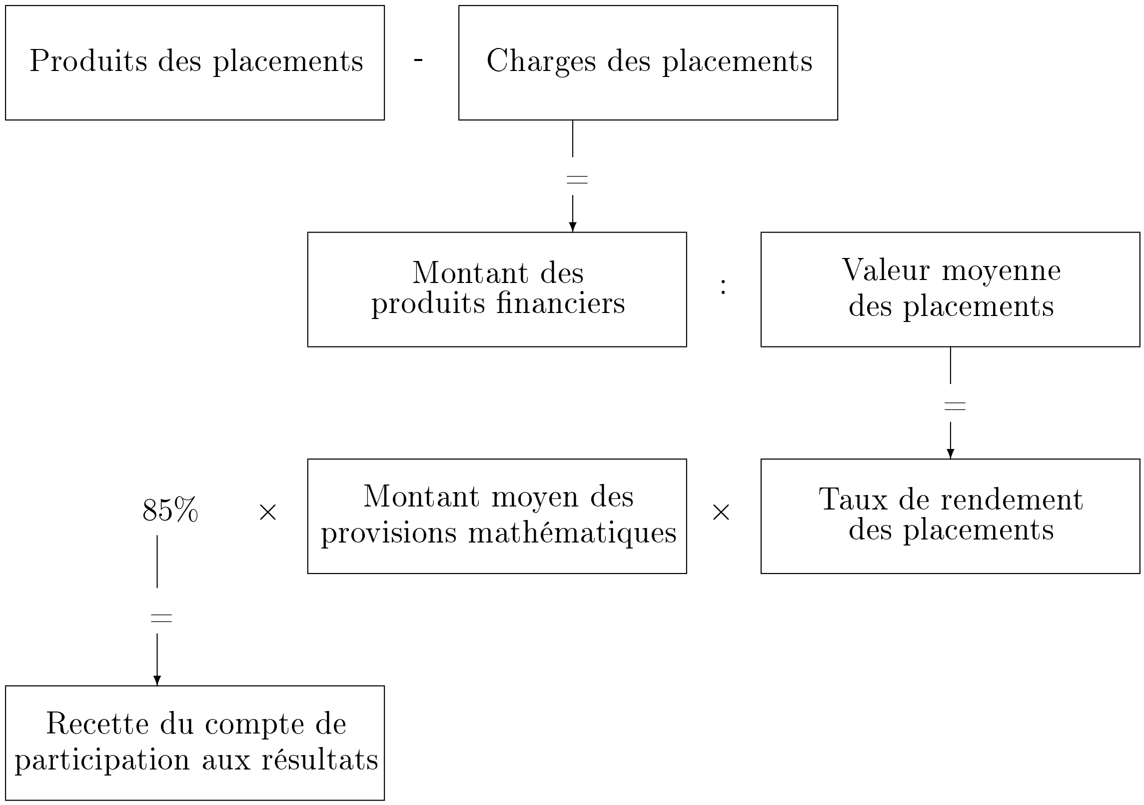
L'article A. 331-4 du Code des assurances précise les règles de calcul de la participation bénéficiaire. Il dispose que "le montant minimal de la participation aux bénéfices à attribuer au titre d'un exercice est déterminé globalement à partir d'un compte de participation aux résultats". Ce compte reçoit :

- **en recettes** : "85% du solde d'un compte financier". Ce solde s'exprime lui même comme le "produit du montant moyen au cours de l'exercice des provisions mathématiques (...) par le taux de rendement des placements" (art. A.331-7). On voit donc que le montant des produits financiers affectés en recette du compte de participation aux résultats est égale à une part de ceux-ci calculée **au prorata celle des provisions mathématiques dans le passif de l'assureur**. Le tableau (1.1.1) retrace le calcul correspondant.
- **en recette** également, le solde de la gestion technique, égal à la variation des provisions techniques avant revalorisation des contrats. En pratique,ce solde est égal à l'opposé de la variation pour risque d'exigibilité (voir plus bas).
- **en dépense** : la "participation de l'assureur aux bénéfices de la gestion technique" (art.A. 331-4), qui est égale à 10% du solde créditeur de la gestion technique[2].

On définit alors la **participation aux bénéfices** comme la différence positive entre la participation aux résultats, solde du compte précédent, et les intérêts versés au contrat selon le taux technique.

[1] L'article A 132-1-1 du Code des assurances précise en outre que ce taux n'est modifié que lorsque les variations de sa référence excèdent 25 points de base

[2] Le solde de la gestion technique impacte donc la participation bénéficiaire à hauteur de 100% s'il est négatif, mais seulement de 90% s'il est positif.



Tab. 1.1 – Recette du compte de participation aux résultats

Destination de la participation bénéficiaire, provision pour participation aux excédents

Le montant de participation bénéficiaire obtenu à la suite du calcul précédent peut être utilisé pour revaloriser les contrats au-delà du taux technique.

Néanmoins, le Code autorise les assureurs à différer cette distribution d'une durée n'excédant pas 8 ans. Les bénéfices financiers ainsi mis en attente sont placés dans une Provision pour participation aux excédents.

Une telle disposition permet, le cas échéant, de lisser le taux de revalorisation des contrats. Il faut néanmoins remarquer que même dans le long terme, le choix entre distribution immédiate ou différée n'est pas neutre pour les assurés. En effet, les sommes incorporées aux provisions mathématiques capitalisent immédiatement à leur profit ("effet cliquet"), ce qui n'est pas le cas de celles reçues par la provision pour participation aux excédents.

1.1.2 Chargement sur encours, chargement sur flux

Chaque versement donne lieu à un prélèvement destiné à financer les frais de gestion et d'acquisition. Il s'élève à quelques pour-cent du flux (en général de l'ordre de3%). Ce chargement est destiné à financer les frais associés à l'acquisition de cette prime et à sa gestion par l'assureur.

En outre, l'épargne constituée est affectée d'un prélèvement annuel sur encours. Celui-ci est de l'ordre de $0,5\%$ de la provision mathématique. Le taux de revalorisation annuelle correspondant à la somme des intérêts techniques et de la participation bénéficiaire est brut de ce prélèvement[3].

1.1.3 Sortie du contrat, indemnité de rachat

La sortie du contrat s'effectue par le décès de l'assuré ou le rachat du contrat. Ce dernier est possible à tout moment mais peut donner lieu à la retenue d'une indemnité par l'assureur. Celle-ci (article R 331-5) ne peut excéder 5% de la provision mathématique et est en tout état de cause nulle après dix ans. Le rachat partiel est possible.

Le comportement de rachat des assurés est principalement déterminé par le régime fiscal applicable.

1.1.4 Un cadre fiscal avantageux

Les intérêts acquis sont soumis, au moment de la sortie, à prélèvements sociaux (CSG et RDS) de 10%. S'y ajoute un prélèvement fiscal qui dépend de l'ancienneté du contrat :

- entre 0 et 4 ans, 35% des intérêts acquis ;
- entre 4 et 8 ans, 25% des intérêts acquis ;
- après 8 ans : $7,5\%$ des intérêts acquis au-delà d'un abattement de 30 000 francs pour un célibataire et 60 000 francs pour un couple marié.

Mais c'est surtout la possibilité de désigner un bénéficiaire en cas de décès, qui sera destinataire des sommes en franchise d'impôt sur les succesions, qui explique le succès de ce type de produit. Le capital et les intérêts sont alors exclus de la succession et ne sont pas soumis aux règles de partage afférentes. Il faut néanmoins signaler une évolution jurisprudentielle récente (jurisprudence *Leroux*) tendant à faire échec à l'abus de droit en la matière et visant à réincorporer certains contrats d'épargne dans le périmètre des successions.

[3] Plusieurs conventions existent, selon que le chargement est effectué avant ou après versement des intérêts techniques ou de la participation bénéficiaire, selon que le taux technique s'entend lui-même brut ou net de ce prélèvement, etc.

1.2 Dispositions réglementaires applicables à la compagnie et à son bilan

Outre la provision mathématique et la provision pour participation aux excédents déjà mentionnées, le Code impose aux assureurs le respect d'une marge de solvabilité (1.2.2) et de certaines règles relatives à leur actif (1.2.1 et 1.2.3).

1.2.1 Règles relatives aux obligations et Réserve de capitalisation

Les placements des assureurs-vie se composent pour une large part de titres obligataires. Les mouvements de la courbe des taux engendrent des variations du prix de marché de ces titres. Néanmoins, la plupart d'entre eux sont destinés à être détenus par l'assureur jusqu'à leur remboursement à leur valeur d'émission. Aussi, les plus-values susceptibles d'être réalisées en cas de baisse des taux présentent-elles un caractère largement illusoire. Le Code impose donc aux assureurs de ne pas distribuer ces plus-values, qui viennent constituer une "réserve de capitalisation" à leur passif [4].

A l'inverse, les moins-values obligataires font l'objet d'une reprise sur cette réserve, sous la condition que son montant demeure positif[5].

1.2.2 Les capitaux propres et la marge de solvabilité

Afin de garantir le respect de ses engagements par l'assureur, la réglementation le contraint à disposer d'un montant de fonds propres qui ne peut être inférieur à une "marge de solvabilité" définie à l'article R 334-13 du Code. Celle-ci est égale, pour les contrats d'épargne dont les garanties sont libellées en euros, à4% des provisions mathématiques auxquelles on retranche le montant de la réserve de capitalisation et celui des plus-values latentes sur la partie non obligataire de l'actif [6].

1.2.3 Règles relatives à la composition de l'actif

Afin de minimiser les risques de marché pesant sur l'actif des compagnies, la réglementation les soumet à des règles de composition et de dispersion.

S'agissant de la composition de l'actif, les règles les plus importantes sont celles qui limitent à 65% la part des actions et à 40% celle des actifs immobiliers au bilan (art. R 332-3).

[4]Les dispositions du Code prennent en compte le cas où le titre obligataire revendu n'a pas été acquis à son montant nominal. La dotation à la réserve de capitalisation est égale à la différence entre le prix de réalisation et la valeur actuarielle du titre

[5]En cas de réserve de capitalisation insuffisante, les moins-values sur obligations affectent le résultat de l'assureur

[6]Sous réserve que la quantité obtenue soit positive

S'agissant de la dispersion de l'actif, la part des titres provenant d'un même émetteur autre qu'un Etat de l'OCDE est limitée à 5%, et celle des actions d'une même société à 50% du capital de l'émetteur.

Première partie

Modèle monogénérationnel

Chapitre 2

Risque associé au taux minimum de revalorisation pour une unique génération de contrats

Le cadre réglementaire applicable au contrat étant posé, nous pouvons exposer un premier modèle. Dans celui-ci, nous ne considérons qu'une seule génération de contrats. Autrement dit, nous supposons que tous les contrats figurant au bilan de l'assureur ont été commercialisés à la même date. Nous supposons, de plus que la durée de ce contrat est fixe. Dans nos applications, elle sera de huit ans.

La présence d'une unique génération simplifie considérablement l'étude des options implicites. Elle fait, en effet, disparaître les phénomènes de mutualisation entre différentes cohortes d'assurés, des rémunérations versées. Par ailleurs, elle assigne à l'entreprise un terme naturel, qui est celui du contrat en question.

Nous nous proposons d'étudier les options implicites attachées à un tel contrat. Ces options sont liées principalement au taux minimal de revalorisation annuelle de la provision mathématique, le taux technique du contrat. On peut ensuite s'intéresser à la manière de couvrir ces options. Nous verrons que cette couverture nécessite la mise en place d'un prélèvement sur encours qui rétablit l'équilibre *ex ante* des garanties.

Nous envisageons d'abord le cas simple dans lequel la distribution de la participation bénéficiaire n'a lieu qu'à la fin de la vie du contrat (2.1), avant de nous intéresser au cas plus complexe où la provision mathématique est revalorisée à la fin de chaque exercice (2.2). Enfin, des corrections successives sont apportées au modèle obtenu, qui nous permettent de nous rapprocher du cadre réglementaire applicable (2.3).

2.1 Cas d'une revalorisation *in fine* de la provision mathématique : option européenne

2.1.1 Prix des garanties, prix du contrat

Considérons un modèle très simple dans lequel un contrat à prime unique est commercialisé pour une durée fixée, disons 8 ans, sans possibilité de rachat. Il est assorti d'un taux minimum de revalorisation annuelle, le taux technique du contrat noté "R_{techn}" et d'une clause de participation bénéficiaire. On note P la prime unique versée à la souscription et $\tilde{P}$ la provision mathématique initiale. La différence $P - \tilde{P}$ correspond à un chargement sur prime. On néglige les autres postes du passif et notamment les fonds propres.

On suppose par ailleurs que deux actifs peuvent être échangés sur un marché parfait : un actif sans risque associé à un taux d'intérêt constant r, et un actif risqué S_t. Nous supposons dans un premier temps que l'actif de l'assureur ne comprend que des actifs risqués[1]. Nous notons A_t l'actif de l'assureur placé en représentation de la provision mathématique. On a donc $A_0 = \tilde{P}$. On note n la quantité d'actif S_t correspondante, soit $A_0 = nS_0$.

Au terme des 8 ans, **le montant versé à l'assuré** est au minimum égal à $A_0(1 + R_{techn})^8$. A cette valeur minimale s'ajoute une participation aux bénéfices de l'assureur, définie comme une part δ de la différence positive entre les produits financiers et les intérêts techniques. Le paiement final reçu par l'assuré s'écrit donc :

$$V_8^{assuré} = A_0(1 + R_{techn})^8 + \delta \left(A_{8^-} - A_0(1 + R_{techn})^8 \right)^+ \qquad (2.1)$$

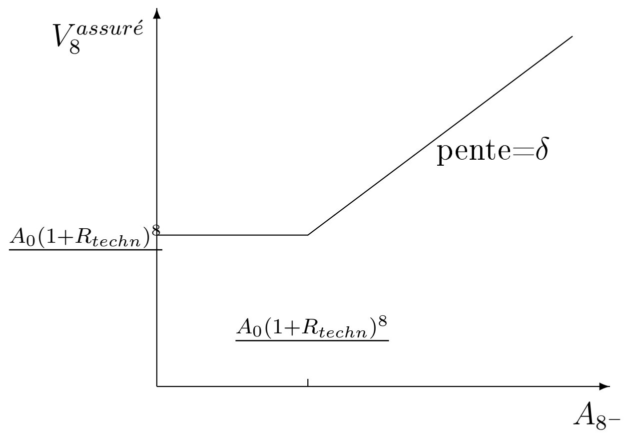
où A_{8^-} désigne la valeur finale de l'actif avant revalorisation du contrat, c'est-à-dire dont la variation est due seulement à celle du prix unitaire des titres détenus par l'assureur. On a donc $A_{8^-} = nS_8$. Le paiement donné par l'équation (2.1) est celui d'un zéro-coupon augmenté d'une option européenne d'achat portant sur le sous-jacent A, de prix d'exercice $A_0(1 + R_{techn})^8$ et de date d'exercice l'échéance du contrat. Le graphique suivant représente sa valeur en fonction de celle de A_{8^-}.

Au terme du contrat, **l'actionnaire** reçoit, quant à lui, la différence entre la valeur finale de l'actif et le paiement versé à l'assuré, soit, après transformation :

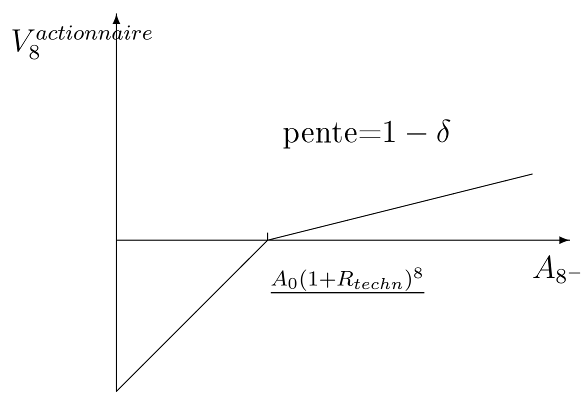
$$V_8^{actionnaire} = -(A_0(1 + R_{techn})^8 - A_{8^-})^+ + (1 - \delta)(A_{8^-} - A_0(1 + R_{techn})^8)^+ \quad (2.2)$$

dont la représentation graphique est la suivante :

[1] On peut contourner les prescriptions réglementaires relatives à la dispersion de l'actif en supposant que l'actif S_t est la réplication d'un indice de marché.



TAB. 2.1 – paiement reçu par l'assuré



TAB. 2.2 – Paiement reçu par l'actionnaire

On vérifie graphiquement que la somme de ces deux paiements est égale à la quantité A_{8^-}. Ceux-ci correspondent en effet à un partage de l'actif réalisable à la date 8, selon des règles qui garantissent à l'assuré un paiement minimal. La souscription du contrat s'assimile donc à **un échange d'options entre l'assureur et l'assuré** :

- **l'assuré acquiert auprès de l'assureur une option de taux garanti** (ou "de revalorisation minimale"). Celle-ci, que nous notons Gar, correspond à la **partie négative du paiement de l'actionnaire** Elle s'assimile donc à une option européenne de vente (ou put européen), portant sur le sous-jacent A, de prix d'exercice $\widetilde{P}(1+R_{techn})^8$ et de date d'exercice 8 ans.
- **l'assureur acquiert auprès de l'assuré une option de rétention de participation bénéficiaire**, que nous notons RPB. Elle correspond au contraire à la **partie positive de la rémunération de l'actionnaire** et s'assimile à $(1-\delta)$ fois le call européen de mêmes caractéristiques que le

put précédent.

Par absence d'arbitrage, les valeurs respectives du contrat pour l'assuré et pour l'entreprise peuvent s'écrire à toute date t :

$$V_t^{assuré} = A_0(1+R_{techn})^8 B(t,8) + \delta Call_E(A_t, A_0(1+R_{techn})^8, 8-t) \tag{2.3}$$

et

$$V_t^{actionnaire} = -Put_E(A_t, A_0(1+R_{techn})^8, 8-t) + (1-\delta) Call_E(A_t, A_0(1+R_{techn})^8, 8-t) \tag{2.4}$$

où $Put_E(S_t, K, T-t)$ (respectivement $Call_E(S_t, K, T-t)$) désigne le prix à la date t du put (repectivement du call) européen portant sur le sous-jacent S, de prix d'exercice K et de date d'exercice T, et $B(t,T)$ désigne la valeur en t du zéro-coupon délivrant 1 en T.

L'option de revalorisation minimale du contrat, détenue par l'assuré, peut s'écrire, avec les mêmes notations :

$$Gar_t = Put_E(A_t, A_0(1+TMG)^8, 8-t) \tag{2.5}$$

tandis que l'option de rétention de PB, détenue par l'assureur, a pour valeur :

$$RPB_t = (1-\delta) Call_E(A_t, A_0(1+TMG)^8, 8-t) \tag{2.6}$$

Si l'on suppose que S, et par conséquent A suivent une dynamique de type Black-Scholes :

$$\frac{dA_t}{A_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

on peut appliquer la formule de valorisation de l'option européenne obtenue par ces deux auteurs (1973) :

$$\begin{aligned} Put_E(S_t, K, 8-t) &= Ke^{-r(8-t)}\mathcal{N}(-d_2) - S_t\mathcal{N}(-d_1) \\ Call_E(S_t, K, 8-t) &= S_t\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-r(8-t)}\mathcal{N}(d_2) \end{aligned}$$

où :

$$\mathcal{N}(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d} e^{\frac{-x^2}{2}} dx$$

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(8-t)}{\sigma\sqrt{8-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{8-t}$$

Le tableau suivant énumère les valeurs que nous obtenons pour les valeurs initiales du contrat pour l'assuré et l'assureur dans le cadre Black-Scholes, avec $r = 5\%$, $R_{techn} = 3\%$, $\delta = 85\%$ et pour différentes valeurs de σ. Nous supposons pour l'instant que $P = \tilde{P}$.

σ	12%	14%	16%
Valeur en 0 de la garantie de revalorisation (en % de la prime)	6,32	8,17	10,06
Valeur en 0 de l'option de rétention de PB (en % de la prime)	3,21	3,49	3,78
Valeur en 0 du contrat du point de vue de l'assuré (en % de la prime)	103,11	104,68	106,28
Valeur en 0 de l'entreprise du point de vue de l'actionnaire (en % de la prime)	-3,11	-4,68	-6,28

On vérifie que la somme des valeurs en zéro du contrat et de l'entreprise est bien égale à celle de la prime versée. On constate en outre :

- d'une part, que le prix initial du contrat pour l'assuré est strictement supérieur au montant de la prime versée ;
- d'autre part que la valeur initiale du contrat pour l'entreprise est négative.

Ceci n'est guère étonnant, puisque l'échange des options s'effectue jusqu'à présent sur la base de la **gratuité** de l'une et de l'autre. Cette gratuité est défavorable à l'assureur, puisque ce dernier reçoit une option de moindre valeur que celle qu'il cède. Il existe plusieurs moyens de rétablir l'équilibre du contrat. Ceci suppose que l'assuré finance la situation favorable qu'il acquiert du fait de l'échange gratuit des options.

2.1.2 Financement des options

Caractère équilibré du contrat et représentation comptable des options

Un contrat d'assurance équilibré *ex ante* peut être défini comme celui dans lequel les engagements contractés par l'assureur sont compensés en moyenne[2] par les chargements qu'il opère, de manière à obtenir l'égalité :

$$\overline{V_0^{actionnaire}} = 0 \tag{2.7}$$

où le surlignement indique que les grandeurs s'entendent après prélèvements destinés à assurer le financement des garanties. On voit donc que cette condition d'équilibre du contrat s'assimile à une hypothèse de non arbitrage sur un marché

[2] On sait que cette moyenne sera calculée sous la probabilité risque-neutre du modèle d'actif. Or l'équilibre d'un contrat d'assurance s'apprécie habituellement sous la probabilité historique. Cependant l'égalisation à 0 du prix de l'entreprise implique que la moyenne historique de ses flux est strictement positive. Cette quantité pourra alors être considérée comme la prime de risque exigée habituellement par les assureurs

où seraient échangés ce contrat, le sous-jacent sur lequel il porte et l'actif sans risque.

Lorsque l'équilibre est rétabli, la valeur initiale du contrat est indépendante du mode de prélèvement et s'établit à[3] :

$$\overline{V_0^{assuré}} = P$$

Dans ce cas, on suppose que l'actif A et la provision mathématique du contrat forment un **fonds cantonné**. Les options détenues par l'assuré et l'assureur ainsi que les prélèvements destinés à les couvrir ne figurent pas dans le bilan réglementaire. Nous les faisons apparaître dans un bilan *ad hoc*, appelé ci-dessous "bilan hors fonds du contrat".

Le rétablissement de l'équilibre peut être réalisé d'au moins trois façons : par prélèvement sur prime ou sur encours, ou, en l'absence de prélèvement, par égalisation du prix des deux options.

Chargement sur prime

L'équilibre peut être, tout d'abord, rétabli au moyen du chargement sur la prime versée. Celui-ci est alors calculé de façon à réaliser l'égalité :

$$\begin{aligned} P - \tilde{P} &= Put_E\left(A_0, A_0(1+R_{techn})^8, 8\right) - (1-\delta)Call_E\left(A_0, A_0(1+R_{techn})^8, 8\right) \\ &= Put_E\left(\tilde{P}, \tilde{P}(1+R_{techn})^8, 8\right) - (1-\delta)Call_E\left(\tilde{P}, \tilde{P}(1+R_{techn})^8, 8\right) \end{aligned}$$

On en déduit, par homogénéité du prix de l'option par rapport au prix initial et au prix d'exercice[4] :

$$P - \tilde{P}^* = P\frac{Put_E\left(1,(1+R_{techn})^8,8\right) - (1-\delta)Call_E\left(1,(1+R_{techn})^8,8\right)}{1 + Put_E\left(1,(1+R_{techn})^8,8\right) - (1-\delta)Call_E\left(1,(1+R_{techn})^8,8\right)} \tag{2.8}$$

Prélèvement sur encours

A la différence du chargement sur prime, la présence d'un prélèvement sur encours α fait évoluer la valeur du sous-jacent au cours de la vie du contrat, qui se trouve chaque année multiplié par $1-\alpha$. Sous l'hypothèse que les prélèvements successifs sont placés au taux de marché jusqu'à l'échéance du contrat, le flux final perçu par l'assureur s'écrit :

[3] toujours en vertu du "principe de Lavoisier" utilisé plus haut, qui implique que la somme des deux valeurs initiales ne peut être différente de la prime versée

[4] Cette propriété, qui sera utilisée abondamment dans ce chapitre, s'assimile à une absence d'illusion monétaire. Elle est valable y compris en dehors du cadre Black-Scholes.

$$
\begin{aligned}
\overline{V_8^{actionnaire}} &= -(1-\alpha)^8(A_0(1+R_{techn})^8 - A_{8^-})^+ + (1-\alpha)^8(1-\delta)(A_{8^-} - A_0(1+R_{techn})^8)^+ \\
&\quad + \sum_{t=1}^{8} \alpha A_t (1-\alpha)^{t-1} e^{r(8-t)}
\end{aligned}
$$

où A est la valeur de l'actif en l'absence de prélèvement sur encours. Les valeurs en 0 des différents termes de cette équation s'écrivent :

$$
\begin{aligned}
0 &= -(1-\alpha)^8 Put_E(A_0, A_0(1+R_{techn})^8, 8) + (1-\alpha)^8(1-\delta) Call_E(A_0, A_0(1+R_{techn})^8, 8) \\
&\quad + A_0 \sum_{t=1}^{8} \alpha (1-\alpha)^{t-1}
\end{aligned}
$$

Or :

$$
\sum_{t=1}^{8} \alpha (1-\alpha)^{t-1} = 1 - (1-\alpha)^8
$$

D'où l'on déduit :

$$
\alpha^* = 1 - \left(\frac{1}{1 + Put_E(1, (1+R_{techn})^8, 8) - (1-\delta) Call_E(1, (1+R_{techn})^8, 8)} \right)^{\frac{1}{8}} \tag{2.9}
$$

Nous calculons $P - \tilde{P}^*$ et α^* dans la cadre Black-Scholes pour différentes valeurs de la volatilité des actions, pour $r = 5\%$ et $R_{techn} = 3\%$ et pour $\delta = 85\%$.

	$\delta = 85\%$			$\delta = 90\%$			$\delta = 95\%$		
σ	12%	14%	16%	12%	14%	16%	12%	14%	16%
Prélèvement sur flux (en % de la prime)	17,21	17,39	17,62	17,22	17,41	17,66	17,23	17,44	17,70
Prélèvement sur encours (en % de l'encours)	2,33	2,36	2,39	2,33	2,36	2,40	2,34	2,37	2,40

TAB. 2.3 – Valeurs des prélèvements qui assurent l'équilibre *ex ante* du contrat

Ces valeurs apparaissent comme très supérieures à celles qui peuvent être observées en pratique. Ceci s'explique par le fait que la garantie de revalorisation minimale est ici un engagement fort coûteux pour l'assureur, l'actif étant composé en totalité de titres risqués.

Financement par la rétention de Participation bénéficiaire

Enfin, on peut supposer que la **rétention de participation bénéficiaire** est calculée de façon à rémunérer l'assureur, en cas de résultats favorables, contre le risque qu'il encourt lorsque ceux-ci sont mauvais. On peut donc calculer un taux de participation bénéficiaire δ qui annule le prix initial de l'entreprise, et ce en l'absence de prélèvement sur flux ou sur encours, soit :

$$V_0^{actionnaire} = -Put_E(A_0, A_0(1+R_{techn})^8, 8) + (1-\delta)Call_E(A_0, A_0(1+R_{techn})^8, 8) = 0$$

ce qui implique :

$$\delta^* = 1 - \frac{Put_E(1,(1+R_{techn})^8, 8)}{Call_E(1,(1+R_{techn})^8, 8)} \tag{2.10}$$

Ce mode de financement revient à égaliser le prix des deux options que s'échangent l'assuré et l'assureur. La rétention de participation bénéficiaire finançant alors la totalité de la garantie, on peut s'attendre à trouver, là encore, des valeurs très élevées par rapport à la pratique. On rappelle que la réglementation limite d'ailleurs cette rétention à 15%. On obtient dans le cadre Black-Scholes, toujours avec $r = 5\%$ et $R_{techn} = 3\%$, les valeurs suivantes :

σ	12%	14%	16%
Rétention de participation bénéficiaire ($1-\delta^*$, en % du bénéfice)	29,52	35,13	40,00

Couverture

La connaissance du prix de la garantie et, partant, d'un montant de prélèvement ou d'un pourcentage de rétention destiné à assurer l'équilibre *ex ante* du contrat, ne suffisent pas pour couvrir les risques de l'assureur. En effet, les engagements de nature optionnelle donnés ou reçus n'équilibrent, par définition, les engagements réciproques qu'à la date 0. On a ainsi, en 0 :

– Dans le cas d'un prélèvement sur flux

Engagements reçus	Engagements donnés
Option de rétention de PB	Option de taux garanti
Chargement sur prime	

TAB. 2.4 – Bilan en 0 hors fonds du contrat, dans le cas d'un chargement sur prime

– Dans le cas d'un prélèvement sur encours

<table>
<tr><th>Engagements reçus</th><th>Engagements donnés</th></tr>
<tr><td>Option de
rétention de PB</td><td rowspan="2">Option de
taux garanti</td></tr>
<tr><td>Créance sur les assurés
relative au prélèvement sur encours</td></tr>
</table>

TAB. 2.5 – Bilan en 0 hors fonds du contrat, dans le cas d'un prélèvement sur encours

– Dans le cas d'un financement sans prélèvement

Engagements reçus	Engagements donnés
Option de rétention de PB	Option de taux garanti

TAB. 2.6 – Bilan en 0 hors fonds du contrat, dans le cas d'un financement par rétention de PB

Mais l'assureur ne peut se contenter de convertir, au cours du temps, les engagements reçus en prélèvements investis dans un actif risqué ou non. En effet, une telle stratégie d'investissement le priverait du caractère certain de son revenu. Seule la couverture des engagements qu'il a contractés, réalisée au moyen de ces prélèvements, lui permet de retrouver un rendement certain.

Cette stratégie de couverture est particulièrement simple dans les premier et dernier cas : il s'agit alors tout simplement de répliquer en 0 la différence des deux options. L'assureur achète le put et vend le call. Le prix de cette stratégie est exactement celui du prélèvement sur flux dans le premier cas et est nul dans le troisième. Une fois la couverture mise en place, le bilan hors fonds du contrat devient :

<table>
<tr><th>Engagements reçus</th><th>Engagements donnés</th></tr>
<tr><td>Option de
rétention de PB</td><td rowspan="2">Option de
taux garanti</td></tr>
<tr><td>Réplication de
$Put - (1-\delta)Call$</td></tr>
</table>

TAB. 2.7 – Bilan en 0^+ hors fonds du contrat, dans le cas d'un chargement sur prime

Dans le cas du prélèvement sur encours, la stratégie est un peu plus complexe car l'assureur ne dispose en zéro que d'une créance sur les assurés. La stratégie consiste alors à s'endetter pour répliquer les deux options (put moins call). Cet endettement est ensuite récupéré sur les assurés par l'intermédiaire du prélèvement. Mais celui-ci est lié à la valeur du sous-jacent A. L'endettement doit donc se faire en **vendant à découvert une quantité d'actif** A telle que la somme reçue équilibre le prix des deux options. Une fois cette stratégie mise en place, les engagements réciproques s'écrivent :

Engagements reçus	Engagements donnés
Option de rétention de PB	Option de taux garanti
Réplication de $Put - (1-\delta)Call$	
Créance sur assurés	Vente à découvert d'actifs A

TAB. 2.8 – Bilan hors fonds du contrat, dans le cas d'un prélèvement sur encours

Au cours du temps, la créance sur les assurés et la quantité d'actifs vendue à découvert diminuent toutes deux sous l'effet, pour la première, du réglement du prélèvement, pour la seconde, de l'utilisation de ce prélèvement pour rembourser la dette. De cette façon, le bilan reste constamment équilibré.

2.2 Cas d'une revalorisation annuelle de la provision mathématique : options exotiques

Dans la pratique, cependant, la présentation du prix du contrat sous la forme (2.1), qui suppose une distribution de la participation bénéficiaire en fin de contrat, n'est pas possible. En effet, cette distribution doit s'effectuer annuellement et elle est alors définitivement acquise au contrat ("effet de cliquet").

En outre, les assureurs peuvent différer l'incorporation aux provisions mathématiques de la participation bénéficiaire dégagée au cours d'un exercice en utilisant la provision pour participation aux excédents prévue à cet effet. A ce stade de notre étude, nous négligeons cette possibilité, qui sera considérée dans le cadre d'un modèle multigénérationnel.

2.2.1 Dynamiques de la provision mathématique et de l'actif

On fait l'hypothèse que les souscriptions se produisent au début de l'exercice comptable 0.

Nous notons A_{t^-} la valeur de l'actif de l'assureur à la date t avant distribution de dividende et revalorisation du contrat. La notation A_t (en omettant l'exposant "+") désignera sa valeur après ces opérations.

Avec cette notation, la revalorisation de la provision mathématique entre deux exercices obéit à une relation de récurrence de la forme :

$$\begin{cases} PM_0 = \tilde{P} \\ PM_t = PM_{t-1}(1 + R_{techn}) + \delta \left(A_{t^-} - PM_{t-1}(1 + R_{techn})\right)^+ \end{cases} \tag{2.11}$$

En outre, l'équilibre du bilan s'écrit à toute date :

$$PM_t = A_t$$

On voit que l'actif A_t évolue sous l'effet de deux types d'opérations :
- L'évolution stochastique du prix des titres au cours de chaque exercice $[t-1, t[$. Dans nos applications numériques, cette évolution sera décrite par une dynamique de type Black-Scholes ;
- La variation du nombre de titres détenus destinée à assurer l'équilibre du bilan à l'inventaire. Celle-ci induit une discontinuité dans la trajectoire de A_t à chaque date t entière.

La valeur finale du contrat est égale à celle de la provision mathématique à la date 8, soit PM_8. Elle dépend donc de toutes les valeurs de A entre les dates 0 et 8, et non pas seulement de la valeur finale A_8. Il s'ensuit que la valeur du contrat ne fait plus intervenir une simple option européenne d'achat, mais une option exotique portant sur le sous-jacent A et dont le prix dépend de toute la trajectoire de A.

$$\begin{aligned} V_t^{assuré} &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(PM_8 | \mathcal{F}_t\right) \\ &= \tilde{P}(1 + R_{techn})^8 B(t, 8) + Option\left((A_s)_{s\in[0,t]}, \tilde{P}, \delta, ...\right) \end{aligned}$$

Là encore, le contrat peut être analysé comme un échange d'options entre l'assureur et l'assuré : le premier vend au second une option de revalorisation minimale (dont la valeur est notée Gar) et acquiert auprès de lui une option de rétention de PB (notée RPB). On a toujours :

$$V_t^{actionnaire} = RPB_t - Gar_t \tag{2.12}$$

On souhaite alors obtenir l'expression de chacune de ces deux options. On s'aperçoit qu'au moins deux points de vue peuvent être défendus.

2.2.2 Deux points de vue pour la décomposition du contrat en options implicites

Ces deux points de vue sont liés à l'ajustement de l'actif nécessité par la revalorisation annuelle de la provision mathématique. Celui-ci peut être effectué de deux façons :

– soit annnuellement, de façon à égaliser à toute date actif et passif ;
– soit à la fin de la vie du contrat.

A chacun de ces deux procédés correpond une décomposition de la valeur du contrat en options implicites.

Premier point de vue : le coût des augmentations successives de l'actif

Notons S_t le prix unitaire des titres détenus par l'assureur et n_t la quantité de ces titres détenue au cours de l'exercice $[t, t+1]$. On a donc $A_t = n_t S_t = PM_t$. Le rendement de l'actif au cours de l'exercice $[t, t+1]$, que nous notons $rend_t$ s'écrit : $rend_t = \dfrac{S_{t+1} - S_t}{S_t}$.

A la fin d'un exercice donné, deux cas sont possibles :

– soit $rend_t \geq R_{techn}$, ce qui signifie que le rendement de l'actif suffit à payer le taux garanti du contrat. Dans ce cas, une partie δ du surplus est incorporée aux provisions mathématiques en plus du taux garanti. L'égalité entre actif et passif s'écrit donc :

$$\underbrace{n_t S_t}_{A_t} = (1 + R_{techn} + \delta(rend_{t-1} - R_{techn}))\underbrace{n_{t-1} S_{t-1}}_{A_{t-1}}$$

On constate alors que l'inégalité $\delta \leq 1$ implique

$$1 + R_{techn} + \delta(rend_{t-1} - R_{techn}) \leq 1 + rend_t = \frac{S_t}{S_{t-1}}$$

d'où $n_t \leq n_{t-1}$. L'assureur procède donc à une **vente d'actif**, dont le produit est distribué à l'actionnaire sous forme de dividende. Ce dernier s'écrit :

$$div_t = (n_{t-1} - n_t) S_t \geq 0$$

– soit $rend_t \leq R_{techn}$ ce qui signifie que le rendement de l'actif ne suffit pas à assurer le respect des engagements de la compagnie. Dans ce cas, au contraire, l'achat de nouveaux titres est nécessaire pour compenser l'augmentation du passif au taux R_{techn} :

$$\underbrace{n_t S_t}_{A_t} = (1 + R_{techn})\underbrace{n_{t-1} S_{t-1}}_{A_{t-1}}$$

qui implique $n_t \geq n_{t-1}$. L'actionnaire est alors contraint de fournir les sommes nécessaires à l'achat de ces titres (c'est-à-dire est destinataire d'un flux négatif) que nous appellerons également "dividende" :

$$div_t = -(n_t - n_{t-1}) S_t$$

Au total, l'actionnaire reçoit à chaque date le dividende algébrique[5] :

$$div_t = (n_{t-1} - n_t)S_t \tag{2.13}$$

où la suite n_t est définie par la relation de récurrence :

$$n_t S_t = \left(1 + R_{techn} + \delta \left[\frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} - R_{techn}\right]^+\right) n_{t-1} S_{t-1} \tag{2.14}$$

La valeur du contrat pour l'entreprise s'écrit donc :

$$V_t^{actionnaire} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\sum_{s=1}^{8} e^{-r(8-s)} div_s | \mathcal{F}_t\right) \tag{2.15}$$

L'assuré reçoit à la fin du contrat la somme $A_8 = n_8 S_8 = PM_8$, dont la valeur en t est donc :

$$V_t^{assuré} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(n_8 S_8 | \mathcal{F}_t\right) \tag{2.16}$$

Le prix de la garantie de revalorisation peut alors s'exprimer comme la **somme actualisée des flux négatifs reçus par l'actionnaire**, qui sont consentis par lui pour permettre à l'assureur de tenir, à chaque date, ses engagements, soit :

$$Gar_8 = \sum_{t=1}^{8} (n_{t-1} - n_t)^+ S_t e^{(8-t)r}$$

On peut interpréter l'actualisation au taux r en présentant la situation un peu différemment : l'actionnaire est destinataire des flux positifs ; en revanche, les flux négatifs sont empruntés au taux de marché, et remboursés par l'actionnaire à la fin de la vie du contrat, c'est-à-dire aussi au moment de la liquidation de l'entreprise.

La valeur en t de cette garantie s'écrit, enfin :

$$Gar_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r(8-t)}\left(\sum_{s=1}^{8} (n_{s-1} - n_s)^+ S_s e^{(8-s)r} | \mathcal{F}_t\right)\right] \tag{2.17}$$

L'option de rétention de PB s'écrit alors nécessairement comme la somme actualisée des dividendes positifs reçus, de manière à réaliser l'égalité (2.12). Sa valeur en t est donc :

$$RPB_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r(8-t)}\left(\sum_{s=1}^{8} (n_s - n_{s-1})^+ S_s e^{(8-s)r}\right) | \mathcal{F}_t\right] \tag{2.18}$$

[5] On peut vérifier que, conditionnellement à la situation en $t-1$, le profil du paiement reçu en t par l'actionnaire est, en fonction de S_t, en tous points semblable à celui de la figure (2.2), dans laquelle on remplace l'abscisse de rupture par $S_t = S_{t-1}(1 + R_{techn})$.

Second point de vue : la situation finale du contrat

Dans ce deuxième point de vue, on fait l'hypothèse que les différents résultats financiers enregistrés au cours des exercices ne donnent lieu à **aucune variation du nombre des actifs détenus en regard du contrat** Celui-ci reste constant, égal à n_0. On se trouve donc dans une situation où le fonds du contrat est **non équilibré** au cours de la vie du contrat et où l'actionnaire ne reçoit de paiement (éventuellement négatif) qu'à la fin de la vie du contrat. Ce point de vue correspond à une situation dans laquelle les bénéfices dégagés au cours de la vie du contrat sont placés en "report à nouveau" dans le bilan. Le montant reçu par l'assuré demeure lui inchangé. Nous notons les grandeurs obtenues dans ce cadre avec un "$\widehat{-}$"

Le paiement final reçu par l'assuré s'écrit :

$$\widehat{V_8^{assuré}} = n_8 S_8 = A_8$$

qui est par définition égal à celui reçu dans le cadre du "premier point de vue", la suite n_t étant la même que ci-dessus. Sa valeur à toute date est **indépendante du cadre adopté** et s'établit à :

$$\widehat{V_t^{assuré}} = V_t^{assuré} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(e^{-r(8-t)} PM_8 | \mathcal{F}_t)$$

Le paiement final reçu par l'actionnaire correspond à la différence entre la provision mathématique finale et le montant des titres détenus à la date 8, soit :

$$\widehat{V_8^{actionnaire}} = (n_0 - n_8) S_8 \tag{2.19}$$

Sa valeur à une autre date s'écrit donc :

$$\widehat{V_t^{actionnaire}} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(e^{-r(8-t)}(n_0 - n_8) S_8 | \mathcal{F}_t\right) \tag{2.20}$$

Il faut remarquer, en outre, que l'on a, à toute date, la relation :

$$\widehat{V_t^{actionnaire}} + V_t^{assuré} = n_0 S_t \tag{2.21}$$

Le second point de vue nous ramène à une situation proche de celle du contrat revalorisé *in fine* : l'actionnaire est réputé ne recevoir de dividende qu'à la fin de la vie du contrat. La garantie de revalorisation est alors égale à la composante négative de ce paiement, soit :

$$\widehat{Gar_8} = (n_8 - n_0)^+ S_8$$

dont le prix en t s'écrit :

$$\widehat{Gar_t} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(e^{-r(8-t)}(n_8 - n_0)^+ S_8 | \mathcal{F}_t) \tag{2.22}$$

tandis que l'option de rétention de PB a pour valeur :

$$\widehat{RPB_t} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(e^{-r(8-t)}(n_0 - n_8)^+ S_8 | \mathcal{F}_t) \tag{2.23}$$

2.2.3 Indépendance à l'égard du point de vue adopté de la valeur initiale du contrat pour l'entreprise

On peut vérifier que **la valeur en 0 de l'entreprise est la même dans chacun des deux cadres**. L'utilisation du deuxième point de vue permet alors d'obtenir une formule fermée pour la valeur du contrat pour l'entreprise, sous réserve que la dynamique de l'actif soit markovienne. La démonstration de ces résultats figure en annexe A.1. On obtient sous cette hypothèse :

$$V_t^{\widehat{actionnaire}} = \tilde{P}\left(1 - \left(e^{-r}(1 + R_{techn}) + \delta Call_E(1, 1 + R_{techn}, 1)\right)^{8-t}\right),$$

En particulier :

$$\boxed{V_0^{actionnaire} = V_0^{\widehat{actionnaire}} = \tilde{P}\left(1 - \left(e^{-r}(1 + R_{techn}) + \delta Call_E(1, 1 + R_{techn}, 1)\right)^{8}\right)} \tag{2.24}$$

2.2.4 Prix de la garantie : différence des deux points de vue

Néanmoins, les prix fixés pour la garantie dans chacun des deux cadres ne coïncident pas. En effet, le prix Gar prend en compte l'ensemble des flux négatifs tandis que $\widehat{Gar}$ s'appuie sur la compensation entre flux positifs et négatifs pour ne retenir que la situation finale du bilan. On a évidemment[6] :

$$\widehat{Gar_0} \leq Gar_0 \tag{2.25}$$

Cette inégalité est stricte dès qu'il existe une date t pour laquelle $rend_t < R_{techn}$. Dans ces conditions, il est difficile de faire un choix entre les prix qu'on peut proposer pour la garantie. Il semble en effet excessif de prendre en compte l'ensemble des flux négatifs, sans tenir compte du fait que ceux-ci peuvent être compensés par des flux positifs et ne représentent donc pas une perte nette ; mais il semble tout autant irréaliste de négliger la nécessité où se trouve l'assureur d'ajuster annuellement son bilan.

Nous proposons de considérer la différence $Gar_0 - \widehat{Gar_0}$ comme un "coût réglementaire" de la garantie, qui s'ajoute à son "coût pur", lequel vaut $\widehat{Gar_0}$. Ce coût réglementaire n'est pas une perte consentie par l'actionnaire, puisqu'en tout état de cause, le prix en 0 de son paiement final est, comme nous l'avons montré, indépendant du cadre dans lequel nous nous plaçons. On s'attend à ce que l'écart relatif entre Gar_0 et $\widehat{Gar_0}$ soit d'autant plus grand que la volatilité de l'actif est élevée.

[6] ce qui peut être montré en effectuant un calcul identique à celui qui vient d'être fait, mais en remplaçant chacun des termes par sa partie positive et la deuxième égalité par une inégalité.

Il faut remarquer que la réglementation impose aux assureurs de justifier à toute époque, et non pas seulement aux dates d'inventaire, d'actifs supérieurs au passif revalorisé. On pourrait ainsi calculer un coût règlementaire associé à la couverture continue des engagements.

2.2.5 Valeur du contrat

Si l'on fait l'hypothèse que la dynamique de l'actif est markovienne, on peut obtenir la valeur à toute date du contrat, dont nous rappelons qu'elle est indépendante du point de vue adopté. On procède pour cela à un calcul analogue à celui qui nous a permis d'obtenir la valeur du contrat pour l'entreprise, et on obtient :

$$V_t^{assuré} = PM_t \left(e^{-r}(1 + R_{techn}) + \delta Call_E(1, 1 + R_{techn}, 1)\right)^{8-t} \tag{2.26}$$

En particulier (voir démonstration à l'annexe A.2) :

$$\boxed{V_0^{assuré} = \tilde{P} \left(e^{-r}(1 + R_{techn}) + \delta Call_E(1, 1 + R_{techn}, 1)\right)^{8}} \tag{2.27}$$

On retrouve donc bien, en l'absence de chargement sur prime (soit avec $P = \tilde{P}$) :

$$\begin{aligned} & V_0^{assuré} + V_0^{actionnaire} \\ = \; & V_0^{assuré} + V_0^{\widehat{actionnaire}} \\ = \; & P \end{aligned}$$

La tableau suivant compare les valeurs obtenues pour $V_0^{assuré}$ et $V_0^{actionnaire}$ dans le cadre Black-Scholes. On suppose toujours que l'assureur n'opère aucun chargement destiné à financer la garantie. Par ailleurs, nous indiquons la valeur obtenue pour l'entreprise et le coût de la garantie selon chacun des deux points de vue. On suppose toujours $r = 5\%$, $R_{techn} = 3\%$, $\sigma = 14\%$, $\delta = 85\%$.

	$\delta = 85\%$			$\delta = 90\%$			$\delta = 95\%$		
σ	12%	14%	16%	12%	14%	16%	12%	14%	16%
$V_0^{assuré}$	125,90	132,52	139,46	128,77	135,94	143,45	131,70	139,42	147,55
$V_0^{actionnaire}$	-25,90	-32,52	-39,46	-28,77	-35,94	-43,45	-31,70	-39,42	-47,55
Gar_0	33,63	41,28	49,79	34,06	42,03	50,36	34,41	42,33	51,10
RPB_0	7,73	8,76	10,33	5,29	6,09	6,91	2,71	2,91	3,55
$\widehat{Gar}_0$	26,54	33,06	40,22	29,14	36,28	43,83	31,87	39,42	47,73
$\widehat{RPB}_0$	0,64	0,54	0,76	0,37	0,34	0,38	0,17	0	0,18

TAB. 2.9 – Valeurs du contrat et de l'entreprise en cas de revalorisation annuelle de la provision mathématique

Comme au paragraphe précédent, le caractère gratuit des garanties échangées explique que la valeur initiale du contrat pour l'assuré soit supérieure à la prime versée. L'écart observé est plus important que dans le cas d'une revalorisation *in fine* du contrat, ce qui est la traduction d'une garantie de revalorisation plus généreuse.

On peut constater, en outre, l'importance de l'effet cliquet, qui se traduit, d'une part par des valeurs sensiblement plus négatives pour la valeur du contrat du point de vue de l'actionnaire, et, d'autre part, par une influence positive de δ sur le prix de la garantie toutes choses égales par ailleurs. En effet, lorsque δ augmente, une proportion plus élevée des bénéfices est définitivement acquise au contrat et accroît le coût de la garantie pour les exercices futurs.

Par ailleurs, on remarque que le prix de l'option de rétention de participation bénéficiaire, acquise par l'assureur, est très dépendant du point de vue adopté. En particulier, celui-ci est très proche de 0 (inférieur à 1 % de la prime dans le tableau ci-dessus) si l'on adopte le deuxième point de vue. Sa dépendance en σ ne fait pas apparaître de monotonie particulière.

Enfin, comme au paragraphe précédent, les prix qui figurent dans le tableau sont valables dans le cadre d'un échange gratuit des options. Là encore, on souhaite rétablir l'équilibre du contrat au moyen de prélèvements destinés à financer l'échange des options.

2.2.6 Financement de l'échange des options et couverture

On peut appliquer tous les modes de financement vus au paragraphe précédent au contrat avec revalorisation annuelle. Pour cela, on peut s'appuyer sur la formule fermée qui vient d'être obtenue pour la valeur du contrat pour l'entreprise. Nous ne décrivons pas les stratégies de couverture à mettre en place dans ce cadre, ce qui sera fait plus bas, dans un cadre légèrement amendé. Nous nous contentons de calculer les valeurs des prélèvements qui assurent l'équilibre du contrat.

Par analogie avec les équations (2.8) et (2.9), on obtient les niveaux de prélèvement sur flux ou sur encours qui assurent la couverture du risque :

$$P - \tilde{P}^* = P\left(1 - \frac{1}{\left(e^{-r}(1+R_{techn}) + \delta Call_E(1, 1+R_{techn}, 1)\right)^8}\right) \tag{2.28}$$

$$\alpha^* = 1 - \left(\frac{1}{\left(e^{-r}(1+R_{techn}) + \delta Call_E(1, 1+R_{techn}, 1)\right)}\right) \tag{2.29}$$

Le tableau suivant exprime les valeurs obtenues pour les taux de chargement dans le cadre Black-Scholes :

	$\delta = 85\%$			$\delta = 90\%$			$\delta = 95\%$		
σ	12%	14%	16%	12%	14%	16%	12%	14%	16%
$P - \tilde{P}^*$ (en % de la prime)	20,57	24,54	28,29	22,34	26,43	30,29	24,07	28,27	32,22
α^* (en % de l'encours)	2,83	3,46	4,07	3,11	3,16	4,41	3,38	4,07	4,75

On peut, là encore, être surpris des valeurs obtenues pour le prix de la garantie et des prélèvements destinés à en assurer la couverture. Ceux-ci apparaissent en effet comme excessivement élevés. Néanmoins, des amendements successifs apportés au modèle permettent de retrouver des résultats nettement plus conformes à la réalité. Ceux-ci concernent :

- les règles de calcul de la participation bénéficiaire ;
- la composition de l'actif et la comptabilisation des titres qu'il contient.

2.3 Amendements au modèle avec revalorisation annuelle

2.3.1 Formule réglementaire de distribution des bénéfices

Mise en conformité des règles de calcul de la participation bénéficiaire avec les dispositions du Code des assurances

Les règles adoptées dans les deux modèles précédents pour la participation bénéficiaire s'écartent de celles qui résultent des dispositions du Code des assurances (article A. 331-4). Une formule telle que :

$$\begin{cases} PM_0 = \tilde{P} \\ PM_t = PM_{t-1}(1+R_{techn}) + PM_{t-1}\left(\delta rend_t - R_{techn}\right)^+ \end{cases} \tag{2.30}$$

en est moins éloignée[7], qui compare, comme le prévoit le Code, une certaine part (au moins 85 %) des produits financiers au taux technique du contrat, c'est-à-dire remplace le terme $\delta\,(rend_t - R_{techn})^+$ par $(\delta rend_t - R_{techn})^+$.

Avec cette nouvelle règle de distribution, les dividendes reçus par les actionnaires selon le "premier point de vue" prennent toujours la forme (2.13) mais où la quantité n_t vérifie la relation de récurrence :

$$\begin{cases} n_0 S_0 = \tilde{P} \\ n_t S_t = n_{t-1} S_{t-1}\left(1 + R_{techn} + [\delta rend_t - R_{techn}]^+\right) \end{cases} \tag{2.33}$$

Options implicites dans le nouveau cadre, analyse du contrat en terme de transactions successives

La correction du mode de calcul de la PB a pour effet de modifier la nature et le nombre des titres et options échangés entre l'assuré et l'assureur. En effet, l'équation (2.30) peut se réécrire, après quelques manipulations :

$$\begin{aligned} PM_t \;=\;& PM_{t-1}(1 + rend_t) \\ & - PM_{t-1}\left(\frac{R_{techn}}{\delta} - R_{techn}\right) \\ & + PM_{t-1}\left(\frac{R_{techn}}{\delta} - rend_t\right)^+ \\ & - (1-\delta) PM_{t-1}\left(rend_t - \frac{R_{techn}}{\delta}\right)^+ \end{aligned}$$

Les quatre termes qui décomposent la revalorisation de la provision mathématique s'interprètent successivement comme les paiements délivrés en t par les actifs suivants :

- (plus) l'actif de l'assureur dans sa composition de la date $(t-1)^+$ à sa valeur à la date t ;

[7] Afin de rendre cette expression plus exacte encore, on peut calculer, comme le prévoit le Code, le rendement de l'actif en rapportant les produits financiers à la valeur moyenne des placements et non à leur valeur à la fin de l'exercice précédent, soit :

$$rend_t = \frac{S_t - S_{t-1}}{\overline{S_{[t-1,t]}}} \tag{2.31}$$

où

$$\overline{S_{[t-1,t]}} = \int_{t-1}^{t} S_u du \tag{2.32}$$

Cette deuxième correction est de portée moindre que la première. De plus, le Code n'impose pas de règle concernant la périodicité à utiliser pour le calcul de la valeur moyenne, ce qui relativise l'impact qu'elle peut exercer sur les résultats obtenus. Ceci justifie que nous n'en tenions pas compte et que nous calculions le rendement de l'actif en rapportant ses produits à sa valeur en début d'exercice et non à sa valeur moyenne.

– (moins) un zéro-coupon délivrant $PM_{t-1}(\frac{R_{techn}}{\delta} - R_{techn})$ en t ;
– (plus) une option européenne de vente portant sur l'actif de l'assureur dans sa composition de la date $(t-1)^+$, de prix d'exercice $PM_{t-1}(1+\frac{R_{techn}}{\delta})$ et de date d'exercice t ;
– (moins) $(1-\delta)$ fois l'option européenne d'achat de mêmes caractéristiques que l'option de vente précédente.

Le dividende reçu par l'actionnaire correspond à l'opposé de la somme des trois derniers termes :

$$\begin{aligned} div_t &= PM_{t-1}\left(\frac{R_{techn}}{\delta} - R_{techn}\right) \\ &\quad -PM_{t-1}\left(\frac{R_{techn}}{\delta} - rend_t\right)^+ \\ &\quad +(1-\delta)PM_{t-1}\left(rend_t - \frac{R_{techn}}{\delta}\right)^+ \end{aligned}$$

Il apparaît à ce stade[8] naturel de présenter le contrat avec revalorisation annuelle de la participation bénéficiaire sous la forme de**transactions successives, nouées fictivement à chaque date comprise entre 0 et 7**. A chacune de ces dates :

– l'assuré liquide la provision mathématique qu'il a obtenue à l'issue de la période précédente (ou apporte une prime si on est à la date 0). Il affecte obligatoirement le produit de cette opération à l'achat, sur le marché, de l'actif risqué, sous-jacent des options. Par ailleurs il fournit à l'assureur une option d'achat et un zéro-coupon, et reçoit de lui une option de vente ;
– symétriquement, l'actionnaire reçoit de l'assuré l'option d'achat et le zéro-coupon et lui fournit l'option de vente.
– le marché évolue durant une période au terme de laquelle les options sont,le cas échéant, exercées. Le pay-off total reçu par l'actionnaire constitue son dividende algébrique, celui reçu par l'assuré sa nouvelle provision mathématique.

La même opération est alors répétée juqu'à la date 8, à laquelle le contrat prend fin. L'absence de rachat signifie que la poursuite du processus est obligatoire pour les deux parties.

Il faut remarquer que dans ce nouveau cadre, les options en présence ne s'interprètent plus directement en terme de garanties attachées au contrat. En particulier l'option de vente ne correspond plus à la garantie de revalorisation et l'option d'achat à la rétention de PB. Le contrat doit donc s'analyser **globalement**, selon l'ensemble des options qu'il comporte, mais sans correspondance

[8]Le point de vue qui va être exposé aurait pu être adopté dès le paragraphe précédent (2.2). Cependant la complexité des options échangées n'était pas telle qu'il apparaissait comme indispensable à la compréhension des stratégies de couverture.

entre ces options et les garanties. C'est la raison pour laquelle nous abandonnons dans la suite de ce chapitre les notations Gar, $\widehat{Gar}$, RPB et $\widehat{RPB}$.

La valeur initiale du contrat s'écrit, comme dans les cadres précédents :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(e^{-8r}PM_8)$$

Le processus des dividendes perçus par l'actionnaire est toujours de la forme (2.13) et la valeur du contrat pour l'entreprise s'écrit toujours indifféremment sous la forme (2.15) ou (2.20).

On peut obtenir les valeurs initiales de l'entreprise et du contrat au moyen de simulations de Monte Carlo. Nous supposons pour cela l'absence de tout prélèvement et prenons les mêmes valeurs que précédemment pour les paramètres du modèle d'actif :

	$\delta = 85\%$			$\delta = 90\%$			$\delta = 95\%$		
σ	12%	14%	16%	12%	14%	16%	12%	14%	16%
$V_0^{assuré}$	118,5	123,4	128,5	121,6	127,0	132,4	124,9	130,6	136,5
$V_0^{actionnaire}$	-18,5	-23,4	-28,5	-21,6	-27,0	-32,4	-24,9	-30,6	-36,5

On constate à partir de ce tableau que la présence d'un nouvel actif (zéro-coupon cédé gratuitement, à chaque date, par l'assuré à l'assureur) rétablit une situation moins défavorable à l'actionnaire. Ceci se traduit par des valeurs en zéro de l'entreprise qui sont "moins négatives" que celles obtenues au tableau (2.9) toutes choses égales par ailleurs.

Couverture

En l'absence de prélèvement sur flux ou sur encours, l'échange des options et du zéro-coupon a lieu, à chaque date, gratuitement pour les deux parties. Il en résulte une situation défavorable à l'actionnaire. L'équilibre du contrat peut, là encore, être rétabli par des chargements dont le produit est affecté, comme en (2.1.2) à la couverture en hors-bilan des options. Cependant, c'est ici le prélèvement sur encours qui est le plus adapté, en raison de la décomposition possible du contrat en transactions successives. Nous nous concentrons donc sur ce mode de financement.

Calcul du taux de prélèvement sur encours qui assure l'équilibre du contrat

Supposons que le contrat permet à l'assureur de modifier au début de chaque exercice le taux de prélèvement sur encours qui sera appliqué à la fin de l'exercice. Ce taux de prélèvement doit être calculé de façon à rétablir l'équilibre du contrat pour l'exercice à venir.

Le prélèvement α_t calculé en $t-1$ et qui sera appliqué en t doit réaliser l'égalité :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r}\left(\prod_{i=1}^{t-1}(1-\alpha_i)div_t + \alpha_t\prod_{i=1}^{t-1}(1-\alpha_i)PM_t\right)|\mathcal{F}_{t-1}\right] = 0 \tag{2.34}$$

où div et PM sont les dividende et provision mathématique existant en l'absence de prélèvement. $\prod_{i=1}^{t-1}(1-\alpha_i)div_t$ et $\prod_{i=1}^{t-1}(1-\alpha_i)PM_t$ sont donc les quantités respectives obtenues après prélèvements successifs[9].

Conditionnellement à la situation en $t-1$, le dividende actualisé reçu en t s'écrit :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-r}div_t|\mathcal{F}_{t-1}] \\
= \; & B(t-1,t)PM_{t-1}\left(\frac{R_{techn}}{\delta} - R_{techn}\right) \\
- \; & Put_E(PM_{t-1}, PM_{t-1}(1+\frac{R_{techn}}{\delta}), 1) \\
+ \; & (1-\delta)Call_E(PM_{t-1}, PM_{t-1}(1+\frac{R_{techn}}{\delta}), 1)
\end{aligned}$$

tandis que la valeur en $t-1$ de la provision mathématique en t est[10] :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-r}PM_t|\mathcal{F}_{t-1}] \\
= \; & PM_{t-1} \\
- \; & B(t-1,t)PM_{t-1}\left(\frac{R_{techn}}{\delta} - R_{techn}\right) \\
+ \; & Put_E(PM_{t-1}, PM_{t-1}(1+\frac{R_{techn}}{\delta}), 1) \\
- \; & (1-\delta)Call_E(PM_{t-1}, PM_{t-1}(1+\frac{R_{techn}}{\delta}), 1)
\end{aligned}$$

Le taux de prélèvement à appliquer vérifie donc, en utilisant l'homogénéité des options :

$$\boxed{\alpha_t = 1 - \frac{1}{1-(\frac{R_{techn}}{\delta} - R_{techn}) + Put_E(1, 1+\frac{R_{techn}}{\delta}, 1) - (1-\delta)Call_E(1, 1+\frac{R_{techn}}{\delta}, 1)}} \tag{2.35}$$

[9] avec la convention $\prod_{i=1}^{0} = 1$

[10] Le calcul qui suit utilise :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-r}(1+rend_t)|\mathcal{F}_{t-1}] = 1$$

On remarque que ce taux ne dépend pas de t. On peut donc énoncer que **lorsque la provision mathématique est revalorisée annuellement, le taux de prélèvement sur encours, calculé en zéro de manière à équilibrer les engagements réciproques de l'assuré et de l'assureur sur toute la durée du contrat, est identique à celui qui assure l'équilibre du contrat pour le seul exercice à venir.** En particulier, le taux de prélèvement qui équilibre le contrat sur toute sa durée est indépendant de cette durée.

Le calcul du taux de prélèvement donne les valeurs suivantes, qui demeurent assez élevées :

	$\delta = 85\%$			$\delta = 90\%$			$\delta = 95\%$		
σ	12%	14%	16%	12%	14%	16%	12%	14%	16%
Taux de prélèvement annuel sur encours (en %)	2,34	2,96	3,58	2,80	3,45	4,10	3,24	3,92	4,60

Stratégie de couverture

Grâce à la décomposition du contrat sous forme de transactions annuelles successives, on peut représenter les postes de notre hors-bilan sous forme d'engagements contractés, fictivement, pour un an et liquidés à la fin de chaque exercice. Leur représentation est analogue à celle donnée par le tableau 2.5. Aussi, on a à chaque date $t-1$ comprise entre 0 et 7 les positions dérivées suivantes, qui ont pour échéance t :

Engagements reçus	Engagements donnés
Option d'achat	Option de vente détenue par l'assuré
Zéro-coupon	
Créance sur assuré	

TAB. 2.10 – Bilan en $t-1$ hors fonds du contrat dans le cas d'un prélèvement sur encours

La stratégie de couverture de ces engagements consiste alors à contracter en $t-1$ un endettement sous forme de vente à découvert d'actif S. Cette vente à découvert doit être effectuée pour un montant égal au prix en $t-1$ de la somme "Option de Rétention+Zéro-coupon-Option de taux garanti". Le recouvrement de la créance détenue sur les assurés est effectuée à la date t par l'intermédiaire du prélèvement. Il est utilisé pour rembourser la vente à découvert d'actif, de sorte que le bilan reste constamment équilibré entre $t-1$ et t.

En t, toutes les positions sont liquidées et de nouveaux engagements sont contractés pour l'exercice $[t, t+1]$.

2.3.2 Modification de la composition de l'actif

Actif et risques de l'assureur

Les valeurs très excessives obtenues jusqu'à présent pour le coût des garanties et pour les prélèvements destinés à les couvrir s'expliquent en grande partie par la composition de notre actif. En effet, celui-ci comprend en totalité des titres risqués. Supposons maintenant que cet actif soit alloué au début de chaque exercice comptable entre deux types de titres :

- pour une part a, des titres dont la dynamique est de type Black-Scholes, assimilables à des actions ;
- pour $1-a$, des titres de rendement certain égal à r^*. Dans un premier temps, ces titres ne sont pas supposés être des obligations produisant des coupons, mais des "actions de rendement certain", dont la valeur croît annuellement au taux r^*. Par absence d'opportunité d'arbitrage, r^* doit être le taux à composition annuelle équivalent à r, soit $r^* = exp(r) - 1$.

La dynamique de revalorisation de la provision mathématique s'écrira dans ce cas :

$$\begin{cases} PM_0 = P \\ PM_t = PM_{t-1}(1 + R_{techn}) + PM_{t-1}\left(\delta rend_t - R_{techn}\right)^+ \end{cases} \tag{2.36}$$

avec :

$$rend_t = a\frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} + (1-a)r^* \tag{2.37}$$

L'équation (2.37) suppose implicitement que l'actif est entièrement réalloué au début de chaque exercice comptable. Les quantités de titres détenus vérifient les relations suivantes :

$$n_t^{actions} S_t = aPM_t \tag{2.38}$$

$$n_t^{sans\ risque}(1+r^*)^t = (1-a)PM_t \tag{2.39}$$

La valeur du dividende reçu en t par l'actionnaire s'écrit :

$$div_t = (n_{t-1}^{actions} - n_t^{actions})S_t + (n_{t-1}^{sans\ risque} - n_t^{sans\ risque})(1+r^*)^t \tag{2.40}$$

On peut, comme ci-dessus, montrer que la valeur initiale de l'entreprise s'écrit indifféremment :

$$V_0^{actionnaire} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\sum_{s=1}^{8} e^{-r(8-s)} div_s\right)$$

ou :

$$V_0^{actionnaire} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} e^{-8r} \left((n_0^{actions} - n_8^{actions}) S_8 + (n_0^{sans\ risque} - n_8^{sans\ risque})(1+r^*)^8 \right)$$

Enfin, la valeur du contrat demeure simplement $V_t^{assuré} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(e^{-8r} PM_8 | \mathcal{F}_t)$

Le changement de la composition de l'actif modifie profondément les résultats obtenus. Les tableaux suivants retracent les résultats obtenus pour plusieurs allocations stratégiques de l'actif :

	$\delta = 85\%$			$\delta = 90\%$		
σ	12%	14%	16%	12%	14%	16%
$V_0^{assuré}$	96,2	97,0	97,8	97,9	98,7	99,5
$V_0^{actionnaire}$	3,78	3,02	2,16	2,11	1,30	0,49

	$\delta = 95\%$			$\delta = 100\%$		
σ	12%	14%	16%	12%	14%	16%
$V_0^{assuré}$	99,6	100,4	101,2	101,9	102,7	103,7
$V_0^{actionnaire}$	0,42	-0,41	-1,20	-1,88	-2,76	-3,71

TAB. 2.11 – 80% d'actifs non risqués

	$\delta = 85\%$			$\delta = 90\%$		
σ	12%	14%	16%	12%	14%	16%
$V_0^{assuré}$	95,2	95,7	96,2	96,9	97,3	97,9
$V_0^{actionnaire}$	4,81	4,27	3,80	3,14	2,66	2,15

	$\delta = 95\%$			$\delta = 100\%$		
σ	12%	14%	16%	12%	14%	16%
$V_0^{assuré}$	98,6	99,1	99,6	100,7	101,2	101,8
$V_0^{actionnaire}$	1,37	0,94	0,42	-0,75	-1,21	-1,77

TAB. 2.12 – 85% d'actifs non risqués

	$\delta = 85\%$			$\delta = 90\%$		
σ	12%	14%	16%	12%	14%	16%
$V_0^{assuré}$	94,5	94,6	94,9	96,2	96,3	96,6
$V_0^{actionnaire}$	5,78	5,39	5,15	3,78	3,63	3,43

	$\delta = 95\%$			$\delta = 100\%$		
σ	12%	14%	16%	12%	14%	16%
$V_0^{assuré}$	98,1	98,2	98,3	100,1	100,2	100,4
$V_0^{actionnaire}$	1,95	1,83	1,65	-0,09	-0,23	-0,41

TAB. 2.13 – 90% d'actifs non risqués

On remarque que, malgré l'absence de prélèvement et de couverture, la valeur en 0 du contrat pour l'entreprise n'est plus systématiquement négative. L'introduction de titres de rendement certain apporte donc une modification substantielle à la valeur des options échangées. Elle rétablit une situation plus favorable à l'assureur, et ce d'autant plus que la part de ces titres dans l'actif de l'assureur est plus élevée.

Pour des actifs comprenant une forte part de titres non risqués, la valeur du contrat pour l'entreprise n'est plus négative que pour des valeurs très élevées du taux de participation bénéficiaire, voisines de 100 %. **La mise en place d'un prélèvement destiné à couvrir les risques de l'assureur n'est justifiée que lorsque la valeur initiale du contrat du point de vue de l'actionnaire est négative. Cependant, il n'en va pas de même de la couverture qui est nécessaire même lorsque celle-ci est positive**

Prélèvement et couverture

La décomposition de la provision mathématique revalorisée en une somme de quatre termes demeure applicable dans le cadre où l'assureur dispose de deux actifs. Cependant, l'interprétation optionnelle des deux derniers termes de cette décomposition est modifiée. En effet, les options échangées entre l'assuré et l'assureur deviennent des options portant sur un sous-jacent mixte, composé pour une part a d'actifs risqués et pour une part $1 - a$ d'actif sans risque.

Le taux de prélèvement doit donc être calculé selon la formule (2.35) dans laquelle les prix des options sur sous-jacent risqué sont remplacées par les options sur sous-jacent mixte. Nous notons $Call$ (respectivement Put) le prix des options sur sous-jacent risqué et $\tilde{Call}$ (respectivement ($\tilde{Put}$) celles qui portent sur sous-jacent mixte.

On a alors :

$$\begin{aligned}\widetilde{Call_E}(1, 1+\frac{R_{techn}}{\delta}, 1) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(e^{-r}\left[a(1+\frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}) + (1-a)(1+r^*) - 1 + \frac{(R_{techn})}{\delta}\right]^+ |\mathcal{F}_t\right) \\ &= aCall_E(1, \frac{1}{a}(1+\frac{R_{techn}}{\delta} - (1-a)(1+r^*)), 1)\end{aligned}$$

et de la même façon :

$$\widetilde{Put_E}(1, 1+R_{techn}, 1) = aPut_E(1, \frac{1}{a}(1+\frac{R_{techn}}{\delta} - (1-a)(1+r^*)), 1)$$

Le taux de prélèvement sur encours s'écrit donc :

$$\alpha = 1 - \frac{1}{A}$$

où :

$$\begin{aligned}A &= 1 - \left(\frac{R_{techn}}{\delta} - R_{techn}\right) \\ &\quad + \widetilde{Put_E}(1, 1+R_{techn}, 1) \\ &\quad - (1-\delta)\left(\widetilde{Call_E}(1, 1+R_{techn}, 1)\right)\end{aligned}$$

Cependant, on sait que la valeur obtenue pour α sera négative dans tous les cas où celle du contrat était positive pour l'assureur dans le tableau précédent. Nous nous limitons donc au cas d'une participation aux bénéficices proche de 100 %, situation dans laquelle un prélèvement demeure nécessaire.

Nous obtenons, pour les différentes composition de l'actif, les valeurs suivantes pour le taux de prélèvement sur encours à appliquer :

	$\delta = 95\%$								
	20% d'actions			15% d'actions			10% d'actions		
σ	12%	14%	16%	12%	14%	16%	12%	14%	16%
Taux de prélèvement annuel sur encours (en % de l'encours)	0,01	0,12	0,23	<0	<0	<0	<0	<0	<0

	$\delta = 100\%$								
	20% d'actions			15% d'actions			10% d'actions		
σ	12%	14%	16%	12%	14%	16%	12%	14%	16%
Taux de prélèvement annuel sur encours (en % de l'encours)	0,23	0,34	0,46	0,09	0,15	0,22	0,01	0,03	0,05

TAB. 2.14 – Prélèvement sur encours assurant l'équilibre du contrat, dans le cas d'une revalorisation annuelle de la provision mathématique et en présence d'actifs sans risque

L'ordre de grandeur des valeurs obtenues est désormais nettement plus conforme à la réalité.

2.3.3 Problèmes liés à la comptabilisation des placements

Remplacement des actifs de rendement certain par des obligations

Nous avons introduit au paragraphe précédent un actif sans risque destiné à constituer la majeure partie du bilan de l'assureur. En pratique, les placements délivrant un rendement certain ne se présentent pas sous la forme d'"actions sans risque", dont la valeur croît à taux constant au cours du temps, mais d'obligations dont la valeur reste constante en l'absence de variation des taux, et qui délivrent des coupons certains.

La prise en compte de cette remarque modifie l'écriture du dividende de l'actionnaire et de la composition de l'actif. En supposant que les obligations sont de nominal 1, l'équation (2.39) devient :

$$n_t^{obligations} = (1-a)PM_t$$

tandis que le dividende reçu s'écrit :

$$div_t = (n_{t-1}^{actions} - n_t^{actions})S_t + (n_{t-1}^{obligations}(1+r^*) - n_t^{obligations})$$

Il faut remarquer que cette modification a pour effet de faire augmenter le nombre d'actifs sans risque détenus par l'assureur. En effet, $n_t^{obligations}$ est calculé sur la base de titres de valeur 1, inférieure à $(1+r^*)^t$, la valeur des titres sans risque du paragraphe précédent. Un nombre plus important de titres est donc nécessaire au rétablissement de l'allocation stratégique.

Cependant, ce nombre plus important de titres sans risque dégage le même montant global de produits financiers que précédemment, soit $(1-a)r^*PM_{t-1}$. Il s'ensuit que seule l'écriture du dividende est modifiée. Sa valeur (de même que celle du contrat) n'est pas affectée par le remplacement des titres de rendement certain par des obligations. De même, ni le montant du prélèvement sur encours destiné à couvrir les options du contrat, ni la stratégie de couverture que nous avons exposée au paragraphe précédent ne sont modifiées.

Sensiblement plus délicat apparaît le traitement du problème posé par la comptabilisation des placements au coût historique.

Comptabilisation des placements risqués à leur coût historique

Position du problème

Dans les modèles précédents, nous avons supposé que les titres qui composent l'actif de l'assureur figurent à son bilan pour leur valeur de marché. On sait que telle n'est pas la situation dans laquelle se trouvent les assureurs-vie français qui commercialisent des contrats en euros. Leur bilan doit, en effet, faire figurer les placements **à leur coût historique**. En présence d'un taux sans risque constant, comme c'est notre cas jusqu'à présent, cette règle n'a d'impact que sur la comptabilisation des actions.

Elle aboutit à conférer à l'assureur, pour chaque titre risqué acheté, une option d'achat américaine, perpétuelle, de prix d'exercice le coût historique du titre. Cette option de "plus-value latente" ne figure pas au bilan mais constitue, en quelque sorte, une créance sur le marché.**Cette contrainte réglementaire modifie de façon sensible l'écriture des options attachées au contrat**

La situation se complique encore davantage si l'on tient compte de l'obligation réglementaire où se trouve l'assureur de constituer une provision pour risque d'exigibilité des engagements techniques (PRE) lorsque la valeur globale de son portefeuille d'actions fait apparaître une moins-value.

Règle d'exercice de l'option perpétuelle de plus-value

Le calcul du montant de la participation bénéficiaire doit désormais incorporer un montant de plus-values réalisées et, le cas échéant, une dotation à la PRE. Il nous faut donc adopter une règle de réalisation des plus-values sur actions.

La règle optimale est, en théorie, déterminée par la frontière d'exercice d'une option américaine perpétuelle. Néanmoins, plusieurs arguments militent pour le rejet de cette approche :

- le Code impose que la cession de titres de même nature est réputée porter en priorité sur les titres les plus anciens (règle dite du "FIFO"). L'assureur n'est donc pas libre du choix des lignes de titres qu'il peut vendre.
- l'utilisation de la frontière d'exercice optimal de l'option perpétuelle serait pertinente pour un agent qui percevrait effectivement le pay-off délivré par une telle option. Tel n'est pas le cas de l'assureur du fait de la distribution aux assurés d'une partie de ses bénéfices.
- l'option perpétuelle fictivement détenue par l'assureur ne peut jamais être revendue en tant que telle sur le marché. Elle ne peut être que conservée ou exercée, ce qui rend peu pertinente l'application à cette option des méthodes de valorisation des options financières[11].

[11] lesquelles sont basées sur des arguments d'arbitrage entre l'exercice de l'option et sa revente sur le marché.

Pour toutes ces raisons, nous sommes conduits à adopter une règle de réalisation des plus-values qui s'écarte de l'optimum théorique. La pratique des assureurs-vie nous incite à adopter les règles suivantes :

1. la valeur du portefeuille d'actions est considérée globalement, avec compensation, le cas échéant, des moins-values par les plus-values. Ceci vaut tant pour la dotation à la PRE (conformément à la réglementation) que pour la définition de notre règle de réalisation des plus-values ;
2. lorsque la plus-value totale sur le portefeuille d'actions dépasse un certain pourcentage fixé, noté β, de la valeur inscrite au bilan, les titres les plus anciens (selon la règle du FIFO) sont vendus en tant que de besoin de manière à ramener la plus-value latente résiduelle en-dessous de ce seuil. Par simplification, nous supposerons que chaque ligne de titre concernée est alors vendue en totalité[12].
3. lorsque le portefeuille d'actions fait apparaître une moins-value, l'accroissement de celle-ci par rapport à l'inventaire précédent est doté à la PRE. Cette dotation affecte négativement le solde technique[13].
4. les liquidités produites par les coupons versés par les obligations et, le cas échéant, les ventes d'actions sont réinvesties, après rétention de PB, de manière à approcher autant que possible l'actif de son allocation stratégique.

En outre, les remarques qui viennent d'être faites conduisent à ne pas valoriser l'option de plus-value latente à une valeur supérieure à celle de ces plus-values. Dans la suite, nous utiliserons la notation PVL_t indifféremment pour la valeur des plus-values latentes sur actions et pour celle de l'option américaine associée. Cette "créance sur le marché" détenue par l'assureur, qui ne figure pas au bilan, est toujours positive : les moins-values sont, elles, prises en compte au bilan par l'intermédiaire de la provision pour risque d'exigibilité.

Calcul des produits financiers dégagés en application de cette règle

L'assureur détient désormais un portefeuille de titres risqués, dont chaque ligne correspond à des titres acquis à la même date. Nous notons $n_{i,t}^{actions}$ le nombre d'actions[14] détenues à la date t achetées à la date i.

Supposons connue la composition du bilan de notre assureur à la date $t-1$, c'est-à-dire, au passif, le montant de provisions mathématiques, PM_{t-1} et de provision pour risque d'exigibilité, PRE_{t-1} et, à l'actif, le nombre d'obligations détenues noté $n_{t-1}^{obligations}$ et la famille $(n_{i,t-1}^{actions})$ pour $i \in [0, t-1]$.

[12] On peut envisager d'assouplir cette règle d'exercice de manière à réaliser davantage de plus-values lorsque les produits financiers sont insuffisants. La règle du FIFO constitue néanmoins un encadrement incontournable

[13] Selon la réglementation, elle ne s'impute pas sur les produits financiers

[14] Le point 2 de la règle ci-dessus implique que l'on a $n_{i,t}$=constante=$n_{i,i}$ pour t inférieur à une certaine date, et $n_{i,t} = 0$ au-delà.

L'utilisation d'un montant de produits financiers est, désormais, plus commode que celle du "rendement de l'actif". Nous notons PF_t le montant des produits financiers dégagés au cours de l'exercice $[t-1, t]$. Ce montant est la somme de deux quantités :

En premier lieu, le portefeuille d'obligations produit un flux $r^* n_{i,t-1}^{obligations}$.

En second lieu, s'agissant des actions, trois cas sont possibles :

- soit $0 \leq \sum_{i=0}^{t-1} n_{i,t-1}^{actions}(S_t - S_i) < \beta \sum_{i=0}^{t-1} n_{i,t-1}^{actions} S_i$

  Cette condition signifie que les plus-values latentes en t^- sont positives, mais inférieures au seuil de réalisation. Dans ce cas, aucune plus-value n'est réalisée et le montant des produits financiers s'écrit :

$$PF_t = n_{t-1}^{obligations} r^*$$

  Par ailleurs, le portefeuille d'actions se trouvant en plus-value, le montant antérieur de PRE est, le cas échéant, repris, d'où $PRE_t = 0$.

- soit $\sum_{i=0}^{t-1} n_{i,t-1}^{actions}(S_t - S_i) \geq \beta \sum_{i=0}^{t-1} n_{i,t-1}^{actions} S_i$

  Dans ce cas, on définit $\widehat{i_t} = \min\{j | \sum_{i=j}^{t-1} n_{i,t-1}^{actions}(S_t - S_i) < \beta \sum_{i=0}^{t-1} n_{i,t-1}^{actions} S_i\}$.
  L'assureur procède, en application de la règle de réalisation des plus-values, à la vente des actions acquises avant la date $\widehat{i_t}$.
  Les produits financiers dégagés deviennent :

$$PF_t = n_{t-1}^{obligations} r^* + \sum_{i=0}^{\widehat{i_t}-1} n_{i,t-1}^{actions}(S_t - S_i)$$

  Il est alors possible (quoique fort improbable) que le portefeuille d'actions se trouve, après cette vente, en moins-value. Une PRE est, le cas échéant, constituée :

$$PRE_t = \left(- \sum_{i=\widehat{i_t}}^{t-1} n_{i,t-1}^{actions}(S_t - S_i) \right)^+$$

- soit $\sum_{i=0}^{t-1} n_{i,t-1}^{actions}(S_t - S_i) < 0$

  Cette condition signifie que le portefeuille d'actions fait apparaître une moins-value latente. Dans ce cas, aucune vente d'actifs n'est effectuée. Les produits financiers s'écrivent, comme ci-dessus :

$$PF_t = n_{t-1}^{obligations} r^*$$

Mais, de plus, une provision pour risque d'exigibilité doit être constituée, dont le montant égale celui des moins-values latentes :

$$PRE_t = -\sum_{i=0}^{t-1} n_{i,t-1}^{actions}(S_t - S_i)$$

Au total, les produits financiers peuvent s'écrire dans tous les cas

$$\boxed{PF_t = n_{t-1}^{obligations} r^* + \sum_{i=0}^{\widehat{i}_t - 1} n_{i,t-1}^{actions}(S_t - S_i)} \tag{2.41}$$

où $\widehat{i_t} = \min\{j | \sum_{i=j}^{t-1} n_{i,t-1}^{actions}(S_t - S_i) < \beta \sum_{i=0}^{t-1} n_{i,t-1}^{actions} S_i\}$.

tandis que la provision pour risque d'exigibilité s'écrit, dans tous les cas :

$$\boxed{PRE_t = \left(-\sum_{i=\widehat{i_t}}^{t-1} n_{i,t-1}^{actions}(S_t - S_i)\right)^+} \tag{2.42}$$

Dynamique de la provision mathématique et des dividendes

Pour écrire la dynamique suivie par la provision mathématique, on fait l'hypothèse que **l'assuré participe à hauteur de 100% au bénéfice** (positif ou négatif) **de la gestion technique**. Rappelons que le Code impose que cette participation soit de 100 % en cas de bénéfice négatif et d'au moins 90% en cas de bénéfice positif. Il faut remarquer que, dans le cadre de notre étude, le bénéfice de la gestion technique est, du fait de l'absence de frais de gestion, constitué de la seule variation de la PRE (ou, plus exactement, de l'opposé de cette quantité).

Par ailleurs, l'article A.331-4 du Code autorise les assureurs à reporter d'un exercice sur l'autre le solde débiteur du compte de participation aux résultats. Ce solde vient diminuer, le cas échéant, le montant minimal réglementaire de participation aux résultats.

En tenant compte de ces deux principes, on peut écrire la dynamique de la **provision mathématique** comme suit :

$$\begin{cases} PM_0 = P \\ PM_t = PM_{t-1}(1 + R_{techn}) + \left[\delta PF_t - (PRE_t - PRE_{t-1}) - PR_{t-1}^- - PM_{t-1}R_{techn}\right]^+ \end{cases}$$

où PF_t est défini par l'équation (2.41). PR_t^- désigne le solde négatif du compte de participation aux résultats de l'exercice $t-1$. Il suit la relation de récurrence suivante[15] :

[15] Cette relation néglige le terme $0,1(PRE_t - PRE_{t-1})^-$ à l'intérieur de la parenthèse. On peut néanmoins montrer, en raisonnant sur le signe des quantités en jeu, que cette approximation est légitime.

$$\begin{cases} PR_0^- = 0 \\ PR_t^- = \left(PR_{t-1}^- + \delta PF_t - (PRE_t - PRE_{t-1})\right)^- \end{cases}$$

La valeur initiale du contrat s'écrit de la même façon que précédemment, $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(e^{-8r}PM_8)$.

Le **dividende** versé à l'actionnaire s'écrit comme la différence entre les produits financiers et la revalorisation des provisions techniques :

$$div_t = PF_t + (PM_{t-1} + PRE_{t-1}) - (PM_t + PRE_t) \tag{2.43}$$

A la suite de la revalorisation des provisions techniques et de la distribution du dividende, le montant résiduel de liquidités est réinvesti de manière à approcher l'actif de son allocation stratégique. Les équations correspondantes n'ont pas d'intérêt pour l'étude des options implicites et sont développées en annexe A.6.

A la fin de la vie du contrat, l'actionnaire reçoit, outre son dernier dividende, la plus-value latente résiduelle sur les actifs. La valeur initiale de l'entreprise s'écrit donc : $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(e^{-8r}PVL_8 + \sum_{i=1}^{8} e^{-rt}div_t\right)$. Insistons à nouveau sur le fait que PVL désigne bien les plus-values latentes résiduelles, c'est-à-dire est nulle (et non pas négative) si le portefeuille d'actions se trouve en situation de moins-value.

Les deux tableaux suivants exposent les valeurs en 0 du contrat, respectivement pour l'assuré et l'assureur, pour deux politiques différentes de réalisation des plus-values, correspondant respectivement à $\beta = 10\%$ et $\beta = 15\%$ et en l'absence de prélèvement. Les résultats ont été obtenus au moyen de simulations de Monte Carlo conduites sur 100 000 scénarios.

Actif composé à 15 % d'actions

	$\delta = 85\%$			$\delta = 90\%$		
σ	12%	14%	16%	12%	14%	16%
$V_0^{assuré}$	95,19	95,72	96,43	96,88	97,45	98,05
$V_0^{actionnaire}$	4,81	4,28	3,57	3,12	2,65	1,95

	$\delta = 95\%$			$\delta = 100\%$		
σ	12%	14%	16%	12%	14%	16%
$V_0^{assuré}$	98,58	99,05	99,64	100,34	100,80	101,14
$V_0^{actionnaire}$	1,42	0,95	0,36	-0,34	-0,80	-1,14

Tab. 2.15 – Seuil de réalisation des plus-values sur actions : 10%

	$\delta = 85\%$			$\delta = 90\%$		
σ	12%	14%	16%	12%	14%	16%
$V_0^{assuré}$	94,92	95,47	96,06	96,51	97,03	97,66
$V_0^{actionnaire}$	5,08	4,53	3,96	3,49	2,97	2,34

	$\delta = 95\%$			$\delta = 100\%$		
σ	12%	14%	16%	12%	14%	16%
$V_0^{assuré}$	98,26	98,69	99,31	100,09	100,41	101,11
$V_0^{actionnaire}$	1,74	1,31	0,69	-0,09	-0,41	-1,11

Tab. 2.16 – Seuil de réalisation des plus-values sur actions : 15%

Actif composé à 30 % d'actions

	$\delta = 85\%$			$\delta = 90\%$		
σ	12%	14%	16%	12%	14%	16%
$V_0^{assuré}$	98,58	100,12	101,39	100,08	101,82	103,16
$V_0^{actionnaire}$	1,42	-0,12	-1,39	-0,08	-1,82	-3,16

	$\delta = 95\%$			$\delta = 100\%$		
σ	12%	14%	16%	12%	14%	16%
$V_0^{assuré}$	101,77	103,36	104,88	103,54	105,09	106,88
$V_0^{actionnaire}$	-1,77	-3,36	-4,88	-3,54	-5,09	-6,88

Tab. 2.17 – Seuil de réalisation des plus-values sur actions : 10%

	$\delta = 85\%$			$\delta = 90\%$		
σ	12%	14%	16%	12%	14%	16%
$V_0^{assuré}$	97,71	99,27	100,67	99,32	100,84	102,36
$V_0^{actionnaire}$	2,29	0,73	-0,67	0,68	-0,84	-2,36

	$\delta = 95\%$			$\delta = 100\%$		
σ	12%	14%	16%	12%	14%	16%
$V_0^{assuré}$	100,96	102,53	104,12	102,54	104,10	105,85
$V_0^{actionnaire}$	-0,96	-2,53	-4,12	-2,54	-4,10	-5,85

Tab. 2.18 – Seuil de réalisation des plus-values sur actions : 15%

On constate que le seuil de réalisation des plus-values sur actions (le paramètre β) exerce, toutes choses égales par ailleurs, une influence positive sur la valeur du contrat pour l'assureur. Le phénomène qui joue principalement est alors l'attribution à l'assureur des plus-values résiduelles à la fin de la vie du contrat. Celles-ci sont d'autant plus élevées qu'elles ont été moins souvent réalisées.

De plus, il faut signaler que, là encore, la valeur initiale du contrat du point de vue de l'entreprise peut, en raison de son signe positif, ne justifier aucun prélèvement sur encours supplémentaire. Celui-ci retrouve cependant sa justification lorsque le taux de participation aux bénéfices est proche de 100 %.

Afin de calculer dans les cas où celui-ci est nécessaire le taux de prélèvement sur encours qui assure l'équilibre du contrat et la stratégie de couverture, nous recourons à la décomposition du contrat sous forme de transactions successives nouées fictivement à chaque date entière, comme ci-dessus. Des positions dérivées sont donc échangées aux dates 0 à 7, et dénouées aux dates 1 à 8. La stratégie de couverture est mise en place au début de chaque exercice pour l'année à venir.

Nous traitons de la question de la couverture des options implicites, successivement pour le premier exercice du contrat puis pour un exercice ultérieur.

Options implicites et couverture à la date initiale

Si l'on procède comme au paragraphe (2.3.1), on constate que le taux de prélèvement sur encours calculé au début de chaque exercice et qui équilibre le contrat pour l'exercice à venir n'est plus indépendant de la date où l'on se place. On peut néanmoins calculer un **majorant** de ce taux, indépendant quant à lui de cette date. **La stratégie de couverture que l'on peut mettre en place repose alors en une sur-réplication des options échangées** Pour obtenir le majorant du taux de prélèvement sur encours, α^*, on émet les hypothèses suivantes :

1. on suppose que l'assureur calcule son tarif, d'une part, en n'escomptant que les coupons produits par la partie obligataire de son actif et, d'autre part, en négligeant la possibilité qui lui est offerte de reporter le solde négatif de la gestion technique
2. on suppose que toutes les plus-values sur actions sont réalisées et versées en totalité à l'assuré.

Le détail des calculs figure en annexe A.4.
On obtient :

$$\boxed{\alpha^* = \frac{aPut_E(1, \frac{\tilde{S}_0}{S_0}, 1) - B(0,1)\left[r^*.(1-a) - \max(R_{techn}, \delta(1-a)r^*)\right]}{(1+R_{tech})B(0,1)}} \tag{2.44}$$

où $\tilde{S}_0$ est défini par :

$$\tilde{S}_0 = S_0 - \frac{\delta r^*.n_0^{obligations} - P.R_{techn}}{n_0^{actions}}$$

Insistons sur le fait que ce α^* est doublement prudent, puisqu'il minore à la fois le dividende reçu et l'assiette du prélèvement. Si ce prélèvement est effectué et la couverture des options mise en place telle que nous allons maintenant la décrire, la valeur en 0 du flux reçu en 1 par l'actionnaire est alors strictement positive.

Le tableau suivant énumère les valeurs obtenues pour α^* :

	$\delta = 95\%$								
	20% d'actions			15% d'actions			10% d'actions		
σ	12%	14%	16%	12%	14%	16%	12%	14%	16%
Taux de prélèvement annuel sur encours (en % de l'encours)	0,08	0,20	0,33	<0	<0	0,06	<0	<0	<0

	$\delta = 100\%$								
	20% d'actions			15% d'actions			10% d'actions		
σ	12%	14%	16%	12%	14%	16%	12%	14%	16%
Taux de prélèvement annuel sur encours (en % de l'encours)	0,24	0,35	0,47	0,09	0,16	0,23	0,01	0,03	0,05

TAB. 2.19 – Prélèvement sur encours assurant l'équilibre du contrat, dans le cas d'une revalorisation annuelle de la provision mathématique lorsque les actifs risqués sont comptablisés au coût historique

On peut comparer les valeurs du tableau ci-dessus avec celles du tableau (2.14). On s'aperçoit qu'elles leur sont bien (légèrement) supérieures, ce qui montre que les minorations qui ont conduit calcul de α^* ne sont pas exagérément pessimistes.

Le bilan hors fonds du contrat à la date 0 prend la forme suivante :

Engagements reçus	Engagements donnés
Zéro-coupon	Option de vente détenue par l'assuré
Créance sur assuré	

TAB. 2.20 – bilan hors fonds du contrat en 0 (déséquilibré au profit de l'assureur)

La couverture à mettre en place consiste alors tout simplement à répliquer le put. Pour cela, un endettement en zéro est nécessaire, qui sera plus que remboursé à la date 1 par le zéro-coupon et le prélèvement sur encours. L'endettement doit donc se faire au taux sans risque et non plus par une vente à découvert d'actifs.

Prélèvement et couverture à une date ultérieure

Plaçons-nous à une date ultérieure de la vie du contrat, $t-1$ comprise entre 1 et 7, après revalorisation de la provision mathématique et distribution du dividende. On cherche, là encore, un majorant du taux de prélèvement à appliquer pour rétablir l'équilibre du contrat.

On obtient, tous calculs faits (voir annexe A.5) :

$$\boxed{\alpha^* = \frac{aPut_E(1,\tilde{K},1) - B(0,1)\left[r^*.(1-a) - \max(R_{techn}, \delta(1-a)r^*)\right]}{(1+R_{tech})B(0,1)}} \tag{2.45}$$

avec $\tilde{K} = \min\left(1, 1 - \dfrac{\delta r^*.(1-a) - R_{techn}}{a}\right)$
et où Put_E désigne la valeur du put européen dont le sous-jacent est consitué par un actif de même dynamique que l'action.

On considère à chaque date $t-1$ le put de sous-jacent l'action, de prix d'exercice $\widetilde{S_{t-1}}$ et de maturité 1, avec :

$$\widetilde{S_{t-1}} = \min\left(S_{t-1}, S_{t-1} - \frac{\delta r^*.\underline{n_{t-1}^{obligations}} - PM_{t-1}.R_{techn}}{\underline{n_{t-1}^{actions}}}\right) \tag{2.46}$$

. Deux cas sont possibles :

1. **Soit le α^* défini par l'équation (2.45) est négatif ou nul**

   Dans ce cas, aucun prélèvement sur encours n'est nécessaire.

   De plus, l'assureur couvre alors ses engagements par l'achat (ou la réplication) de $\underline{n_{t-1}^{actions}}$ puts, financé par un endettement au taux sans risque de la valeur correpondante.
   Au terme de l'exercice, il exerce le cas échéant les puts, et rembourse son emprunt en utilisant le dividende qu'il reçoit et le pay-off des puts.

2. **Soit le α^* défini par l'équation (2.45) est positif**

   Dans ce cas, l'assureur pratique chaque année en fin d'exercice comptable un prélèvement sur encours de taux α^*.
   Il réplique ou achète au début de chaque exercice $(1-\alpha^*)\underline{n_{t-1}^{actions}}$ puts par un emprunt au taux sans risque.
   Enfin, au terme de chaque exercice, il exerce ses puts et rembourse son emprunt en utilisant son dividende, le pay-off des puts ainsi que le prélèvement sur encours.

Cette stratégie lui assure un revenu positif ou nul à chaque date et dans tous les états du monde.

*

* *

Ce chapitre nous a permis d'introduire les premiers éléments de notre étude des options implicites. Nous nous sommes concentrés sur l'option associée au taux minimum de revalorisation lorsque le portefeuille de l'entreprise ne comprend qu'une seule génération de contrats. Il en résulte que :

- Le contrat d'assurance s'assimile à un **échange d'options** (et de zéro-coupons) entre l'assureur et l'assuré.

  Lorsque la provision mathématique du contrat est revalorisée annuellement, cet échange a lieu non seulement au moment de la souscription du contrat, mais encore (fictivement) à toute date entière intermédiaire.

  Il faut enfin remarquer que, dès lors qu'on souhaite adopter une représentation aussi réaliste que possible pour le contrat, il ne devient plus posible d'établir une correspondance exacte entre chacun des titres échangés et les garanties stipulées par le contrat. Celui-ci doit être considéré comme représenté de façon globale par l'ensemble des transactions.

- Si l'échange a lieu gratuitement, **la valeur initiale du contrat peut être supérieure au montant de la prime versée** tandis que celle de l'entreprise est négative. Il en résulte un déséquilibre au profit de l'assuré. L'adoption d'un actif composé majoritairement de titres non risqués permet de changer le signe de la valeur initiale du contrat du point de vue de l'entreprise. A défaut, l'équilibre *ex ante* du contrat peut être rétabli au moyen d'un **prélèvement annuel sur l'encours** des provisions mathématiques.

  En particulier, quelle que soit la composition de l'actif et pourvu que celui-ci ne se compose pas en totalité d'obligations[16], il existe toujours un taux de participation bénéficiaire, d'autant plus proche de 100% que la composition de l'actif est moins risquée, qui déséquilibre le contrat au profit de l'assuré et qui nécessite donc la mise en place d'un tel prélèvement.

  Il faut apporter à ce sujet l'importante précision suivante.

  Nous avons calculé au cours de ce chapitre la valeur du contrat ou du prélèvement sur encours pour différents taux de participation aux bénéfices. La réglementation fixant ce taux à un minimum de 85%, il peut paraître étrange de considérer des taux plus élevés. Mais ce serait négliger les contraintes autres que réglementaires auxquelles les assureurs sont soumis. En particulier, **l'environnement concurrentiel**[17] dans lequel ils évoluent les obligent à distribuer une part plus élevée de leurs bénéfices financiers que celle qu'impose le Code. On peut résumer cet aspect des choses en disant que les résultats que nous avons obtenus caractérisent un contrat soumis à un ensemble de contraintes, tant réglementaires que liées à l'environnement concurrentiel dans lequel évolue l'entreprise.

- Le rétablissement de l'équilibre initial du contrat, soit en composant l'actif de façon prudente, soit en mettant en place un prélèvement, ne suffit pas à garantir le revenu de l'assureur. Celui-ci n'assure en effet que l'équilibre initial du contrat. Pour que cet équilibre soit maintenu, l'assureur doit mettre

[16] supposées sans risque de défaut

[17] Masqué, à ce stade de notre modèle par le fait que les entrées et les sorties s'effectuent selon un processus exogène, indépendant des rémunérations servies.

en place une **stratégie de couverture qui assure à toute date l'équilibre des engagements donnés et reçus** ou leur déséquilibre au profit de l'assureur.

Cette stratégie consiste en la réplication d'options standards. Le financement de cette stratégie est assuré par la réalisation des créances détenues sur les assurés au fur et à mesure de la vie du contrat.

Lorsque les actions détenues par l'assureur figurent à son bilan pour leur coût historique, on peut calculer un taux de prélèvement sur encours et mettre en oeuvre une stratégie de couverture qui assurent que le dividende reçu à toute date sera positif ou nul. Ceux-ci s'appuient sur une évaluation prudente des risques liés au contrat, se traduisant par une minoration des revenus de l'assureur.

Deuxième partie

Modèle multigénérationnel

Chapitre 3

Risque de taux garanti en présence de plusieurs générations de contrats

Nous introduisons dans ce chapitre un élément important de notre modèle, à savoir la présence simultanée de plusieurs générations de contrats. Comme nous allons le voir, cette présence simultanée conduit à une modification de la nature et de la valeur des options représentatives du contrat, en raison de phénomènes "intergénérationnels".

Cependant, on peut, dans les cas les plus simples, contourner ces phénomènes en réalisant au sein du bilan des "**cantonnements fictifs**" destinés à isoler les différentes générations les unes des autres. Nous les qualifions de fictifs car ils permettent de décrire de façon simple le comportement du contrat sans modifier aucunement celui-ci. A défaut de telles constructions valables sur toute la durée du contrat, on peut réaliser des cantonnements valables sur un seul exercice comptable et conditionnels à la situation au début de celui-ci.

Le cadre général dans lequel nous nous plaçons est toujours celui d'un contrat de durée fixe égale à huit ans, n'offrant pas de possibilité de rachat ni de prolongation et ne comportant pas de risque viager. Partant d'un modèle développé au chapitre précédent, on l'enrichit progressivement des différentes contraintes comptables liées à la présence de plusieurs générations de contrats.

3.1 Actifs risqués comptabilisés à leur valeur de marché : absence d'effets intergénérationnels

Afin d'introduire progressivement les effets intergénérationnels, il nous semble profitable de revenir quelque peu en arrière par rapport à la fin du chapitre précédent. Le contrat utilisé dans ce premier paragraphe sera considéré à son avant-dernier stade de complexité, correspondant à la fin du paragraphe (2.3.3). Nous rappelons d'abord les différentes hypothèses qui s'y rapportent.

3.1.1 Rappel des hypothèses

Le contrat qu'on considère a les caractéristiques suivantes :

- on suppose que la provision mathématique et les actifs qui la couvrent forment un "fonds du contrat" isolé au sein du bilan de l'assureur. Les actions présentes dans cet actif sont comptabilisées à leur **valeur de marché**[1] ;
- la provision mathématique du contrat est revalorisée au terme de chaque exercice comptable, selon la dynamique décrite par les équations (2.36).

On suppose désormais que des souscriptions nouvelles peuvent avoir lieu, ce qui a pour effet de ne plus enfermer la vie de l'entreprise dans la durée définie par celle d'un contrat. Dans un souci de simplification, nous supposerons que ces souscriptions et, par conséquent[2] les sorties, se produisent **au début de chaque exercice comptable**. Cette hypothèse se trouve justifiée par le fait qu'à cette date, la provision mathématique vient d'être revalorisé à la suite des opérations d'inventaire de l'exercice précédent et ne le sera pas avant le prochain inventaire. Le moment est donc le plus propice à la sortie[3].

Nous supposons dans un premier temps que les différentes générations de contrats se voient toutes affecter le même taux technique[4]. En outre, ces générations versent toutes à la souscription **la même prime** P. Celle-ci s'entend désormais nette d'une éventuel chargement sur prime, dont on suppose qu'il compense exactement les frais d'acquisition et de gestion[5].

Il faut remarquer, enfin, que les souscriptions nouvelles et les sorties n'ont pas d'impact sur **le solde de la gestion technique**, qui **est constamment nul**. La revalorisation des contrats ne dépendra donc, dans ce premier paragraphe, que des produits financiers dégagés au cours de l'exercice.

[1] Il en est de même pour les obligations, mais le taux sans risque étant supposé constant, la valeur de marché de ces obligations ne varie pas et reste constamment égale à leur valeur comptable.

[2] en raison de la durée fixée à un nombre entier d'années de la vie du contrat

[3] En pratique, les revalorisations de provision mathématique se produisent, non pas annuellement mais avec une périodicité qui est en général de l'ordre de deux semaines, ce qui permet d'éviter cette concentration des flux.

[4] Cette hypothèse est justifiée par l'existence, à ce stade de notre modèle, d'un taux sans risque constant, identique pour toutes les maturités. La variation du taux garanti selon la date de souscription n'a, en effet, de sens que lorsque la courbe des taux évolue, ce qui fera l'objet de chapitres ultérieurs.

[5] Comptablement, cette hypothèse revient à supposer la compensation des frais de gestion et du chargement sur prime dans le calcul du solde de gestion technique.

3.1.2 Dynamique de la provision mathématique et dividende reçu par l'actionnaire

Notations, provision mathématique totale

Au sein de la provision mathématique, chaque génération, est repérée par sa date de souscription, notée i. Nous notons $PM_{i,t}$ l'encours de la provision mathématique à la date t pour la génération ayant souscrit son contrat à la date i. La provision mathématique totale s'écrit donc à cette date :

$$PM_t = \sum_{i=\max(0,t-7)}^{t} PM_{i,t} \tag{3.1}$$

La somme qui figure dans l'expression précédente comprend au maximum huit termes. Elle n'incorpore pas la génération qui a souscrit son contrat exactement huit ans auparavant et exprime donc la provision mathématique en t^+, c'est-à-dire **après enregistrement des souscriptions nouvelles et des sorties** Telle sera la convention que nous retiendrons systématiquement.

Répartition des produits financiers entre les différentes générations de contrats

On suppose que la participation aux résultats est incorporée à chaque génération de provision mathématique **au prorata du montant de celle-ci au début de l'exercice**. Par application de cette règle, on obtient alors la dynamique suivante pour chaque génération de provision mathématique :

$$\begin{cases} PM_{i,t} = 0 \text{ pour tout } t < i \\ PM_{i,i} = P \\ PM_{i,t} = PM_{i,t-1}(1 + R_{techn}) + \left(\delta \dfrac{PM_{i,t-1}}{PM_{t-1}} PF_t - R_{techn}.PM_{i,t-1}\right)^+ \ \forall i \ t-8 \leq i \leq t-1 \\ PM_{i,t} = 0 \text{ pour tout } i \leq t-9 \end{cases} \tag{3.2}$$

où PF_t désigne l'ensemble des produits financiers dégagés au cours de l'exercice $[t-1, t[$, dont nous cherchons maintenant l'expression.

Nous notons $n_t^{actions}$ et $n_t^{obligations}$ les quantités d'actifs détenues au cours de l'exercice $[t, t+1[$. On a donc :

$$PF_t = n_{t-1}^{actions}(S_t - S_{t-1}) + n_{t-1}^{obligations} r^*$$

Si l'on suppose que l'actif est, chaque année, réalloué entre les deux placements de manière à rétablir une allocation stratégique au sens du chapitre précédent, les quantités d'actifs détenues par l'assureur s'écrivent :

$$\begin{aligned} n_t^{actions} &= a\frac{PM_t}{S_t} \\ n_t^{obligations} &= (1-a)PM_t \end{aligned}$$

On peut donc réécrire les produits financiers comme suit :

$$PF_t = PM_{t-1}\left[a\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}-1\right)+(1-a)r^*\right] \tag{3.3}$$

tandis que la dynamique de la provision mathématique s'écrit finalement :

$$\begin{cases} PM_{i,t} = 0 \text{ pour tout } t < i \\ PM_{i,i} = P \\ PM_{i,t} = PM_{i,t-1}\left[(1+R_{techn}) + (\delta.pf_t - R_{techn})^+\right] \quad \text{pour tout } i \text{ tel que } t-8 \leq i \leq t-1 \\ PM_{i,t} = 0 \text{ pour tout } i \leq t-9 \end{cases}$$

où nous notons $pf_t = \left[a\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}-1\right)+(1-a)r^*\right]$, qui s'interprète comme un montant de produits financiers par unité d'actif.

Les différentes générations de contrat sont donc toutes**rémunérées au même taux**, lequel ne dépend que des paramètres de l'allocation stratégique, du taux de revalorisation des actions au cours de l'exercice et du taux de coupon des obligations.

Dividende versé à l'actionnaire

Comme au chapitre précédent, le dividende versé à l'actionnaire au terme d'un exercice est égal à la différence algébrique entre le flux dégagé par les actifs et la part de celui-ci employée à la revalorisation des contrats :

$$\boxed{div_t = PF_t - PB_t - PM_{t-1}.R_{techn}} \tag{3.4}$$

où :

$$PB_t = (\delta PF_t - PM_{t-1}.R_{techn})^+$$

L'équation (3.4) fait bien apparaître que celui-ci **ne dépend pas du montant des entrées et sorties enregistrées au début de l'exercice**[6], mais

[6]ce que pourrait laisser croire une autre écriture possible du dividende à savoir :

$$div_t = PF_t + P - PM_{t-9,t-1} - (PM_t - PM_{t-1})$$

seulement des produits financiers dégagés et du montant des intérêts techniques. Plus exactement, elle n'en dépend pas, conditionnellement à un encours de provision mathématique au début de l'exercice, ce qui n'est pas la même chose[7].

Valeur du contrat du point de vue de l'assuré et de l'assureur, valeur de l'entreprise

L'expression (3.4) ne permet pas de définir une "valeur du contrat du point de vue de l'assureur", car le dividende qu'elle exprime porte sur un ensemble de contrats dont le périmètre varie. Mais on peut aisément construire la "contribution" fictive de la génération i au dividende total par la formule :

$$div_{i,t} = PF_{i,t} - (PM_{i,t} - PM_{i,t-1})$$

où l'on note

$$PF_{i,t} = PM_{i,t-1}.pf_t$$

qui s'interprète comme la quantité de produits financiers affectés à la génération i.

On vérifie qu'en sommant sur i les $div_{i,t}$, on retrouve bien la forme donnée par l'équation (3.4).

Cette contribution de la génération i au dividende de l'exercice t permet de construire la valeur du contrat pour cette génération au moment de sa souscription :

$$V_{i,t}^{actionnaire} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\sum_{j=1}^{j=8} e^{-(i+j-t).r} div_{i,i+j} | \mathcal{F}_t\right)$$

De la même façon, la valeur en t du contrat du point de vue de l'assuré d'un contrat souscrit à la date i s'écrit :

$$V_{i,t}^{assuré} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(e^{-(i+8-t).r} PM_{i,i+8} | \mathcal{F}_t\right) \tag{3.5}$$

L'horizon temporel de l'entreprise n'est désormais plus circonscrit par la durée d'un contrat. Le calcul de la valeur de l'entreprise suppose donc la prise en compte de l'ensemble des flux à venir[8], soit :

$$V_0^{actionnaire} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\sum_{j=1}^{\infty} e^{-j.r} div_j\right) \tag{3.6}$$

[7]Comme on le verra lorsque nous introduirons des risques de rachat et de souscription, le résultat d'indépendance à l'égard des flux, conditionnellement à la situation qui prévaut une fois qu'ils se sont produits, est alors conservé. Mais ce n'est pas à dire que le dividende soit purement et simplement indépendant de ces entrées et sorties.

[8]ce qui donne l'"appraisal value" de la société

3.1.3 Options implicites et couverture

Isolement des générations

Nous venons de voir que, dans le cadre simplifié dans lequel nous nous sommes placés, la revalorisation des contrats est identique pour toutes les générations de provision mathématique. De plus, cette revalorisation ne dépend que des paramètres de l'allocation stratégique, du taux sans risque et de l'évolution du prix des actions, ainsi qu'il résulte de l'équation.

Elle est, par conséquent, indépendante d'une caractéristique quelconque attachée aux autres générations, c'est-à-dire du montant de provision mathématique des autres contrats. Au total, **chaque génération de contrats se comporte exactement comme si elle était seule**. Une conséquence de ce phénomène - en même temps que sa meilleure traduction - est qu'on peut construire un cantonnement à l'intérieur du fonds du contrat destiné à isoler les générations les unes des autres.

Cantonnement fictif des actifs

Pour chaque génération i, on peut introduire les quantités $n_{i,t}^{actions}$ et $n_{i,t}^{obligations}$ d'actifs placés fictivement en représentation du contrat souscrit par la génération i. Nous définissons ces quantités de façon à avoir dans chaque canton la même allocation stratégique que dans l'ensemble du fonds du contrat, soit :

$$\begin{aligned} n_{i,t}^{actions} &= a\frac{PM_{i,t}}{S_t} \\ n_{i,t}^{obligations} &= (1-a)PM_{i,t} \end{aligned}$$

Cette décomposition de l'actif permet de recréer à l'intérieur du bilan des sous-ensembles équilibrés qui se comportent exactement comme le contrat du paragraphe (2.3.3). Il en résulte que, pour chacun de ces cantons, on peut reprendre la décomposition sous forme d'options implicites qu'on avait exposée alors. Rappelons que celle-ci fait intervenir la description du contrat sous forme de transactions nouées à chaque date entière et qui consistent en l'échange obligatoire d'options européennes et de zéro-coupons.

Enfin, la couverture de ces risques liés à ces échange d'options s'effectue, à l'intérieur de chaque canton, sans aucune différence avec celle à laquelle fait référence le paragraphe (2.3.3).

*

Nous venons de voir dans ce paragraphe que, dans un cadre simple où les actifs sont comptabilisés à leur valeur de marché et le taux technique du contrat est fixe, la présence simultanée de plusieurs générations ne modifie en rien les résultats obtenus. Chaque génération se comporte comme si elle était seule et on peut lui attribuer, pour toute la durée de sa présence, une portion de l'actif qui se comporte comme le bilan global.

Cependant, cet état des choses est perturbé dès qu'on introduit le premier degré de complexité supplémentaire dans la représentation du contrat, à savoir la comptabilisation des placements risqués à leur coût historique.

3.2 Comptabilisation des actions à leur coût historique

Nous nous plaçons désormais dans le cadre décrit au paragraphe (2.3.3) du chapitre précédent, dans lequel les actions détenues par l'assureur sont comptablilisées à leur coût historique.

3.2.1 Nature des changements induits

Rappel des principes généraux

Nous avons pu constater au chapitre précédent que la comptabilisation des titres à leur coût historique avait pour effet de compliquer substantiellement l'analyse du contrat et la couverture des risques. Il s'ensuit en effet, rappelons-le, plusieurs modifications fondamentales :

- les produits financiers dégagés au cours d'un exercice comptable sont dépendants d'une règle de réalisation des plus-values sur actions ;
- la vente des actions est soumise à la règle du "FIFO" selon laquelle les titres les plus anciens doivent être vendus les premiers ;
- l'assureur doit constituer en cas de moins-value latente sur la valeur globale de son portefeuille d'actions une Provision pour risque d'exigibilité (PRE) qui reçoit le montant de cette moins-value latente ;
- le solde de la gestion technique cesse d'être constamment nul. Il reçoit en effet l'opposé des variations de la provision pour risque d'exigibilité. Il faut donc appliquer les règles de participation afférentes à ce solde, qui diffèrent de celles qui sont applicables aux produits financiers.

Dans un cadre multigénérationnel, il s'ensuit, en outre, des phénomènes de mutualisation que nous décrivons maintenant.

Non neutralité des entrées et sorties

Lorsque les actifs sont comptabilisés à leur valeur de marché, la vente ou l'achat d'un titre n'induit pas par elle-même de variation des produits financiers. Tel n'est plus le cas si l'on applique le principe du coût historique, car alors la vente d'actions signifie la réalisation de plus ou moins-values latentes.

Il s'ensuit que le flux net "entrées moins sorties" perd désormais son caractère de "neutralité" qu'il pouvait revêtir au paragaphe précédent. Lorsque ce solde est négatif, une vente nette d'actif est nécessaire, qui peut désormais modifier le montant des produits financiers dégagés au cours de l'exercice où elle a lieu[9].

En conséquence, nous supposerons que la partie de ce solde qui ne peut être financée par les liquidités disponibles s'effectuera au moyen d'une **vente d'obligations**. De cette façon, un solde négatif n'affecte pas les produits financiers de l'exercice.

Effets intergénérationnels

Nous avons vu au paragraphe précédent que, dans un cadre où les actions sont comptabilisées à leur valeur de marché, chaque génération se conduit comme si elle était seule. Nous avons relié en fin de paragraphe cette propriété à la possibilité de réaliser au sein du bilan un "cantonnement fictif" de chaque génération de contrats, sans perturbation du comportement d'ensemble du bilan.

Ce cantonnement n'est désormais plus possible pour deux raisons :

- la réalisation des plus-values sur actions est contrainte par la règle du FIFO, qui porte sur l'ensemble des titres du portefeuille et n'est pas, si l'on peut dire, "décentralisable" au sein d'un sous-actif ;
- la provision pour risque d'exigibilité reçoit le montant total de la moins-value latente sur actions, qui, elle non plus, n'est pas invariante par isolement de sous-actifs ;

Il en résulte que **le comportement d'une génération de contrats est tributaire de la composition du bilan de la compagnie**, non seulement au moment où la souscription a lieu, mais encore à toute autre date ultérieure. Autrement dit, chaque génération **ne se comporte plus comme si elle était seule**.

Néanmoins, comme nous allons le voir, il est possible de contourner cet obstacle en recourant à la décomposition du contrat sous forme de transactions nouées fictivement à chaque date entière, qui a été décrite au chapitre précédent.

3.2.2 Dynamique de la provision mathématique, dividende reçu

Dynamique de la provision mathématique

On suppose toujours que la participation bénéficiaire est distribuée à chaque génération au prorata de son montant de provisions mathématiques au début de l'exercice. La présence de la provision pour risque d'exigibilité modifiant la forme

[9]Il faut souligner qu'à ce stade du modèle, le flux "entrées moins sorties" sera systématiquement négatif à partir de la huitième année de la vie de l'entreprise.

de la participation aux bénéfices, la dynamique de la provision mathématique devient donc :

$$\begin{cases} PM_{i,t} = 0 \text{ pour tout } t < i \\ PM_{i,i} = P \\ PM_{i,t} = PM_{i,t-1}(1 + R_{techn}) + \dfrac{PM_{i,t-1}}{PM_{t-1}} PB_t \\ \ \forall i \ t-8 \leq i \leq t-1 \\ PM_{i,t} = 0 \text{ pour tout } i \leq t-9 \end{cases} \tag{3.7}$$

où :

$$PB_t = [\delta PF_t + (PRE_{t-1} - PRE_t) - R_{techn}.PM_{t-1}]^+$$

Pour obtenir l'expression des **produits financiers** qui interviennent dans la dynamique (3.7), nous supposons connue la valeur des différents postes du bilan à la date $(t-1)^+$ après souscriptions nouvelles et sorties, soit :

- au passif, le montant de provisions mathématiques, PM_{t-1} et sa décomposition en chacune des générations $PM_{i,t-1}$;
- au passif également, la provision pour risque d'exigibilité, PRE_{t-1} ;
- à l'actif, le nombre d'obligations détenues noté $n_{t-1}^{obligations}$;
- à l'actif, enfin, la famille[10] $(n_{j,t-1}^{actions})$ pour $j \in [0, t-1]$.

Les produits financiers dégagés au cours de l'exercice résultent de l'application de la règle qui a été exposée au paragraphe (2.3.3). Nous rappelons que celle-ci s'appuie sur la définition d'un seuil de réalisation des plus-values sur actions, noté β. Lorsque les plus-values latentes sur actions dépassent une proportion β de leur valeur inscrite au bilan, les lignes d'actions les plus anciennes sont revendues de façon à ramener les plus-values latentes en-dessous de ce seuil.

Le montant de produits financiers dégagés par l'exercice et la provision pour risque d'exigibilité sont alors donnés respectivement par les équations (2.41) et (3.15). Les liquidités disponibles après entrées et sorties sont réinvesties de manière à rapprocher l'actif de son allocation stratégique.

Dividende reçu

Comme au paragraphe précédent, le dividende versé à l'actionnaire au terme de l'exercice s'écrit simplement :

$$div_t = PF_t - PM_{t-1}.R_{techn} - PB_t$$

[10] Nous adoptons l'indice j pour les différentes lignes du portefeuille d'actions afin d'éviter la confusion avec l'indice i désignant les générations de contrats.

3.2.3 Options implicites et couverture

Construction d'un cantonnement annuel

La dynamique de la provision mathématique qui vient d'être exposée (équation 3.7) repose sur le partage de la participation bénéficiaire selon un coefficient de proportionnalité qui est le ratio $\dfrac{PM_{i,t-1}}{PM_{t-1}}$. Ce coefficient est parfaitement connu en $(t-1)^+$. On peut donc **l'appliquer à l'ensemble des postes du bilan** à cette date et obtenir des sous-ensembles équilibrés à l'intérieur du bilan[11].

De cette façon, on construit un cantonnement fictif du bilan de l'assureur, tel que chaque canton contienne au passif une génération de provision mathématique et se comporte exactement comme le bilan tout entier au cours de l'exercice $]t-1,t]$. En particulier, la règle d'exercice des plus-values et la comptabilisation de la provision pour risque d'exigibilité, qui dans le cas général ne sont pas invariantes par "découpage" du bilan, demeurent, dans ce cas particulier, inchangées.

On peut remarquer que ce cantonnement est d'une nature différente de celui du paragraphe précédent[12], car il n'associe pas son actif et son passif pour toute la vie du contrat, mais seulement pour une année. L'exercice qui suit, les quantités d'actions et d'obligations mises en couverture d'une génération donnée de contrats ne seront plus les mêmes, car calculées à partir du nouveau coefficient d'homothétie $\frac{PM_{i,t}}{PM_t}$.

En résumé, lorsque les actions sont comptabilisées à leur coût historique, **chaque génération se comporte pour un an et conditionnellement à la situation en $t-1^+$, comme si elle était seule**. Ceci signifie que sur chaque exercice comptable, conditionnellement à la situation qui prévaut en $t-1$, on peut lui allouer en propre un actif qui générera pour elle la même revalorisation en t qu'un partage des produits financiers de l'actif global.

Le cantonnement qui vient d'être construit nous permet maintenant de décrire les options implicites dont se compose le contrat, ainsi que la stratégie de couverture à mettre en oeuvre.

---

[11]Précisons bien que l'homothétie doit être appliquée à l'ensemble des éléments de l'actif, c'est-à-dire aussi à l'intérieur des différentes générations d'actions, et à la provision pour risque d'exigibilité. En revanche, les générations de provision mathématique sont incorporées chacune à leur canton.

[12]A titre d'application de la remarque précédente, on peut considérer la conséquence suivante de la construction des deux cantonnements. Au cours des premières années de la vie de l'entreprise ne se produisent que des souscriptions nouvelles et pas de sortie. Dans le cantonnement exposé au paragraphe (3.1), l'actif mis en représentation de la nouvelle génération se compose exactement des titres achetés avec la prime versée. Au contraire, dans celui qui vient d'être décrit, d'une part les titres achetés avec cette prime sont répartis entre tous les cantons, et, d'autre part, le canton de la nouvelle génération reçoit des titres que contenait le bilan avant sa souscription.

Options échangées et couverture

Fixons la situation de la compagnie en $t-1^+$ (après souscriptions nouvelles et sorties) et construisons le cantonnement précédent.

Sur l'exercice $]t-1,t]$, chaque génération de provision mathématique se voit affecter un actif composé d'obligations et d'actions comptabilisées à leur valeur historique. Les produits financiers que cet actif cantonné dégage servent de base au calcul d'une participation bénéficiaire allouée au contrat de la même façon que si la génération considérée était seule.

Il en résulte que, sur un exercice fixé et conditionnellement à la situation en $t-1^+$, chaque génération **se comporte comme le contrat du paragraphe (2.3.3)**. On peut donc lui appliquer les résultats obtenus quant au niveau de prélèvement sur encours et à la stratégie de couverture à mettre en place.

Il faut néanmoins remarquer que si chaque génération de contrat a, au cours d'un exercice donné, un comportement analogue à celui du contrat du paragraphe (2.3.3), il ne s'ensuit pas que ces générations de contrats ont, du point de l'assuré ou de l'assureur, un prix au moment de leur souscription qui est celui que donne le tableau (2.18) et suivants. En effet, ces prix correspondent au cas particulier dans lequel la souscription est la première.

*

La comptabilisation au coût historique des actions n'induit donc que des effets intergénérationnels qu'on peut qualifier d'"impurs", car ils n'empêchent pas la construction, sur chaque exercice, d'un cantonnement à l'intérieur du bilan, au sein duquel chaque génération se comporte comme si elle était seule.

On retrouve le même phénomène lorsque l'on introduit dans le bilan une provision pour participation aux excédents.

3.3 Introduction de la provision pour participation aux excédents

3.3.1 Rappel du fonctionnement comptable de la provision pour participation aux excédents

On sait que la réglementation autorise les assureurs à différer la distribution de la participation bénéficiaire pour une durée n'excédant pas huit ans. Celle-ci peut-être placée dans une Provision pour participation aux excédents (PPE). Cette mise en attente a deux conséquences :

- les sommes correspondantes ne capitalisent pas au profit des assurés. En effet, l'assiette du taux minimum de revalorisation est constituée des provisions mathématiques, qui ne comprennent que la participation bénéficiaire réellement incorporée aux contrats.

– l'assureur peut reprendre à cette provision afin d'améliorer le rendement des contrats au cours d'un exercice donné, lorsque celui-ci s'écarte par exemple du taux proposé par la concurrence ou de celui d'un placement alternatif.

La précision importante suivante soit être apportée : les sommes reprises, le cas échéant, à la PPE ne peuvent être utilisées pour atteindre une rémunération supérieure ou égale au taux technique au cas où les produits financiers de l'année n'y suffiraient pas. C'est dans ce cas à un dividende négatif qu'il doit être recouru, et c'est seulement une fois cette rémunération atteinte que la reprise à la PPE s'effectue et apporte, le cas échéant, une revalorisation supplémentaire au contrat.

De plus, les assurés dont le contrat prend fin n'ont alors aucun droit à percevoir la participation bénéficiaire mise en attente depuis moins de huit ans. Celle-ci appartient à la collectivité des assurés et non à telle ou telle génération de contrats.

On voit que cette provision a pour effet de transférer des montants de participation bénéficiaire d'un exercice sur un autre. Le périmètre des contrats présents dans le bilan entre ces deux exercices ayant varié, le transfert de PB s'effectue aussi **d'une génération de contrats à une autre**. Il s'ensuit, là encore des effets intergénérationnels, qui peuvent se résumer par la même formule que ci-dessus : chaque génération ne se comporte pas comme si elle était seule.

Cependant, comme nous allons le voir, un cantonnement de même nature que le précédent peut être construit, de sorte que chaque contrat se comporte pour un an comme s'il était seul. Nous pouvons donc qualifier d'"impurs" les effets intergénérationnels induits par la provision pour participation aux excédents.

3.3.2 Incorporation au modèle précédent

Modélisation du cadre comptable

Les dispositions réglementaires applicables à cette provision conduisent à sa représentation naturelle sous forme d'une pile à 8 étages. Chacun d'entre eux coïncide avec une génération de participation bénéficiaire mise en réserve.

Excédents mis en attente 1 exercice plus tôt
Excédents mis en attente 2 exercices plus tôt
⋮
Excédents mis en attente 8 exercices plus tôt

Tab. 3.1 – Provision pour participation aux excédents

A la fin de chaque exercice, les intérêts non distribués depuis 8 ans, qui occupent le bas de la pile, sont repris et incorporés aux provisions mathématiques. A l'inverse, la dotation de l'exercice à la PPE est placée en haut de la pile et les suivantes sont décalées vers le bas.

Le fonds du contrat a désormais la forme suivante :

Actif	**Passif**
Actions	Provisions mathématiques
Obligations	Provision pour risque d'exigibilité des engagements techniques
Trésorerie	Provision pour participation aux excédents

Tab. 3.2 – Fonds du contrat

à laquelle il convient d'ajouter les éléments ne figurant pas dans ce fonds et qui consistent, outre les options implicites échangées au début de l'exercice, en l'option de plus-value latentes détenue par l'assureur. Celles-ci figurent dans le "bilan hors fonds du contrat".

La ligne "trésorerie" est destinée à accueillir entre la clôture d'un exercice et l'ouverture du précédent, les liquidités détenues par l'assureur par suite du versement des coupons et de la réalisation des actions. Elle n'est donc non nulle que par instant et n'influence nullement le sous-jacent sur lequel portent les options implicites, lequel n'est consitutué que d'actions et d'obligations.

Participation bénéficiaire et dividende

La présence de la PPE **n'influence pas** le montant de participation bénéficiaire dégagée au cours d'un exercice comptable. Celle-ci s'écrit toujours :

$$PB_t = [\delta PF_t + (PRE_{t-1} - PRE_t) - R_{techn}.PM_{t-1}]^+ \tag{3.8}$$

Le dividende reçu en t s'écrit comme la différence entre les produits financiers dégagés par l'actif et la somme des intérêts techniques et du montant de la participation bénéficiaire :

$$div_t = PF_t - PM_{t-1}.R_{techn} - PB_t \tag{3.9}$$

On voit donc que ce dividende est **indépendant de l'usage qui est fait de la participation bénéficiaire** de l'année, soit incorporée au contrat, soit mise en attente. Cet usage n'influe qu'avec **un retard d'un an** sur son montant, par l'intermédiaire du nouveau montant de la provision mathématique qui sert de base au calcul des intérêts techniques.

Dynamique de la provision mathématique et de la PPE

Au terme d'un exercice comptable, la participation bénéficiaire dégagée peut connaître deux destinations :

- elle peut être directement incorporée aux contrats;
- elle peut consituer une dotation à la PPE.

Ce choix est tout à fait discrétionnaire.

A la différence du dividende, le taux de revalorisation de la provision mathématique dépend, lui de l'usage qui est fait de la participation bénéficiaire de l'année. La dynamique de la provision mathématique s'écrit en effet :

$$PM_t = PM_{t-1}(1 + R_{techn}) + (PB_t - DotPPE_t) + RepPPE_t \tag{3.10}$$

où $DotPPE_t$ (respectivement $RepPPE_t$) désigne la montant de la dotation (respectivement de la reprise) à la provision pour participation aux excédents.

L'écriture ci-dessus appelle les remarques suivantes :

- Tout d'abord, la quantité $(PB_t - DotPPE_t)$, ainsi que (cela va de soi) $RepPPE_t$, doivent être toutes deux positives ou nulles.
- On peut avoir conjointement une dotation et une reprise à la PPE toutes deux non nulles. En effet, la mise en attente de bénéfices depuis plus de huit ans implique une reprise obligatoire du montant correspondant. Mais parallèlement, une dotation peut être prélevée sur la participation bénéficiaire de l'année.
- Enfin, le fonctionnement de la PPE sous forme de pile implique que la dotation de l'année est placée en haut de la pile, tandis que la reprise s'effectue sur l'étage du bas de la pile, puis, en tant que de besoin sur les étages supérieurs en remontant.

  On, a ainsi, les équations et inéquations suivantes :

$$PPE_{1,t} = DotPPE_t$$

$$PPE_{8,t-1} \leq RepPPE_t \leq \sum_{i=1}^{8} PPE_{i,t-1}$$

3.3.3 Effets sur les options implicites

Construction du cantonnement annuel

Les équations qui précédent montrent qu'on peut tout à fait, en présence de la PPE, construire un cantonnement fictif des générations de contrat de même nature que celui du paragraphe précédent.

En effet, si l'on suppose que les différentes générations de provision mathématique sont revalorisées au prorata de la part qu'elles occupent dans le montant total au début de l'exercice (après sorties et souscriptions nouvelles, rappelons-le), soit :

$$PM_{i,t} = PM_{i,t-1}(1 + R_{techn}) + \frac{PM_{i,t-1}}{PM_{t-1}}(PB_t - DotPPE_t) + RepPPE_t)$$

on peut appliquer, comme au paragraphe précédent, le coefficient d'homothétie $\frac{PM_{i,t-1}}{PM_{t-1}}$ à l'ensemble des postes du bilan, c'est-à-dire, désormais, aussi à l'intérieur de chaque génération de PB mise en attente, et obtenir des cantons qui se comportent chacun comme le bilan global.

Nous sommes donc ramenés, pour l'étude de la forme optionnelle que prend désormais le contrat, à l'étude d'une génération isolée sur un exercice.

Minoration du dividende

Contrairement au paragraphe précédent, chacun des cantons qui vient d'être construit ne se comporte plus comme le contrat du paragraphe (2.3.3) en raison de la présence de la PPE. Néanmoins, la minoration du dividende donnée par l'équation A.8 écrite à l'annexe A.5 (page 121) est toujours valable.

En effet, la présence de la PPE au passif du fonds du contrat diminue le montant des intérêts techniques à actif fixé. Or les équations (3.8) et (3.9) montrent que le dividende dépend négativement de ces interêts.

Il en résulte que le taux de prélèvement donné par l'équation (2.45) constitue de nouveau un majorant de celui qu'il faut appliquer pour rétablir l'équilibre du contrat, tandis que la stratégie de couverture décrite à la fin du chapitre précédent (paragraphe (2.3.3))trouve de nouveau à s'appliquer.

3.3.4 Impact sur la valeur du contrat et de l'entreprise

Que la couverture décrite au paragraphe (A.5.1) trouve à s'appliquer ne signifie pas que la valeur du contrat soit inchangée par l'introduction de la PPE.

En effet, celle-ci modifie le taux de revalorisation annuelle de la provision mathématique dans le sens d'une diminution de sa volatilité. Elle influence donc sa valeur *in fine* et par là même celle du contrat. Nous étudions maintenant les effets de cette influence.

Exemple de règle

La règle qui guide l'utilisation par l'assureur de la PPE, doit avoir pour objet de lisser le rendement du contrat. Ceci s'effectue par transfert sur les exercices où les actions ont un rendement médiocre de la participation bénéficiaire qui peut être dégagée lors des bons exercices.

Dans ce qui suit, on appelle "rémunération potentielle du contrat" en t le ratio :

$$RemPot_t = \frac{IT_t + PB_t + PPE_{8,t-1}}{PM_{t-1}}$$

où IT_t désigne le montant des intérêts techniques de l'année.

On appelle en outre "rémunération minimale du contrat" le ratio :

$$RemMin_t = \frac{IT_t + PPE_{8,t-1}}{PM_{t-1}}$$

Nous supposons la PPE dotée selon la procédure suivante :

- lorsque la rémunération potentielle du contrat excède le taux sans risque de plus de Δ points, les contrats sont revalorisés au taux$(\max(r+\Delta\%, RemMin_t)$ et la participation bénéficiaire résiduelle est dotée à la PPE ;
- lorsque la rémunération potentielle du contrat est inférieure au taux sans risque, une reprise à la PPE est effectuée de manière à approcher autant que possible ce taux du taux sans risque.

On peut s'attendre à ce que le prix du contrat baisse, en raison d'une dynamique de revalorisation moins favorable à l'assuré. Des résultats chiffrés seront fournis à l'occasion de l'introduction des rachats aléatoires.

3.4 Taux d'intérêts variables : purs effets intergénérationnels

Les effets intergénérationnels que nous avons observés jusqu'à présent peuvent être qualifiés d'"impurs", car, s'ils influencent le contrat sur l'ensemble de sa durée de vie, ils peuvent être contournés par un isolement des différentes générations pour la durée d'un exercice, conditionnellement à la situation qui prévaut au début de celui-ci.

La situation est très différente lorsque le taux sans risque, et, partant, le taux technique du contrat cessent d'être constants. On observe alors des effets intergénérationnels qu'on peut qualifier de "purs".

3.4.1 Règle de distribution de la participation bénéficiaire

Lorsque tous les contrats ont le même taux technique, la distribution de la participation bénéficiaire au prorata de l'encours initial de la provision mathématique paraît la règle la plus naturelle. Elle aboutit, on le sait, à rémunérer au même taux tous les contrats.

Cela ne va plus de soi lorsque les taux techniques diffèrent, car alors la répartition proportionnelle de la participation bénéficiaire avantage les générations de contrats dont le taux technique est le plus élevé. Il faut alors adopter une règle de distribution de cette participation bénéficiaire, qui donne aux options implicites une forme excessivement complexe.

Calcul de la participation bénéficiaire

Nous supposons que chaque génération de contrats, repérée par l'année de sa souscription i, se voit affecter lors de sa souscription un taux technique noté R^i_{techn}. Le montant total des intérêts techniques s'écrit alors :

$$IT_t = \sum_{i=t-1-8}^{t-1} PM_{i,t-1}.R^i_{techn} \tag{3.11}$$

Comme le précise le Code, le montant de la participation bénéficiaire est "déterminé globalement" (article A.331-4), sans préjuger de sa répartition entre les différentes générations. Sa forme générale n'est pas modifiée :

$$PB_t = (PF_t - (PRE_t - PRE_{t-1}) - IT_t)^+$$

Distribution de la participation bénéficiaire

On suppose que l'assureur n'utilise pas la provision pour participation aux excédents. Dans le cas contraire, il suffit simplement de remplacer, dans les équations et schémas qui suivent, le terme "PB_t" par "$(PB_t - DotPPE_t) + RepPPE_t$".

Distribution proportionnelle de la provision mathématique

Si l'on suppose que la participation bénéficiaire est, comme précédemment répartie entre les différentes générations de contrat au prorata de leur encours initial, la dynamique des provisions s'écrit :

$$PM_{i,t} = PM_{i,t-1}(1 + R^i_{techn}) + \frac{PM_{i,t-1}}{PM_{t-1}} PB_t$$

pour tout i vérifiant $t - 8 \leq i \leq t - 1$.

On voit donc que l'application de cette règle conduit à rémunérer la génération i au taux $R^i_{techn} + \dfrac{PB_t}{PM_t}$. Il s'ensuit une inégalité entre générations qui apparaît difficilement acceptable et qu'une règle alternative permet de corriger.

Distribution non proportionnelle

L'assureur peut, en effet, s'assigner l'objectif d'égaliser autant que possible la rémunération des contrats. Aussi la participation bénéficiaire profitera en priorité aux générations dont le taux technique est le plus faible.

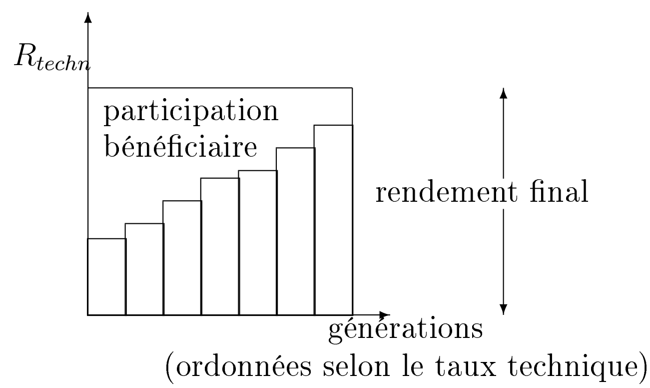
On voit cependant qu'un tel objectif ne peut pas toujours être atteint. Deux cas doivent en effet être distingués :

1. *Soit le montant de la participation bénéficiaire est suffisant pour égaliser la rémunération finale de tous les contrats*

   Cette condition s'écrit :

   $$PB_t \geq \sum_{i=0}^{t} \left(max_j(R^j_{techn}) - R^i_{techn} \right) \times PM_{i,t-1}$$

   Elle s'interprète aisément à l'aide du graphique suivant :

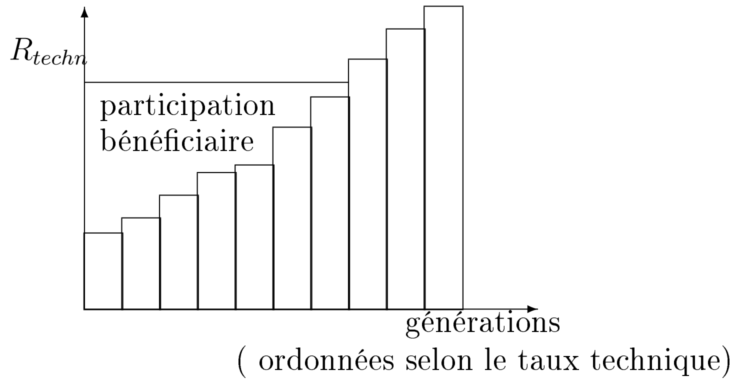
   Dans ce schéma, chaque génération occupe sur l'axe des abscisses une largeur égale à $PM_{i,t-1}$ (constante dans le schéma ci-dessus pour simplifier). La longueur de chaque rectangle est égale au taux technique de la génération i. La surface du rectangle est donc égale au montant des intérêts techniques de cette génération. La quantité PB_t est ensuite "versée" au-dessus des colonnes ainsi formées de manière à les "submerger". Le rendement final des contrats, identique pour toutes les générations s'écrira donc :

   $$TRC_t = \frac{PB_t + IT_t}{PM_{t-1}} \tag{3.12}$$

2. *Soit le montant de la participation bénéficiaire n'y suffit pas*, ce qui s'écrit :

   $$PB_t < \sum_{i=0}^{t} \left(max_j(R^j_{techn}) - R^i_{techn} \right) \times PM_{i,t-1}$$

   dont l'interprétation graphique est la suivante :



La revalorisation au-delà du taux technique bénéficie alors en priorité aux générations dont le taux technique est le plus faible. Chaque génération reçoit donc la rémunération la plus élevée entre son taux technique et cette revalorisation, soit :

$$\boxed{TRC_{i,t} = \max\left(R^i_{techn}, \frac{PB_t + \sum_j R^j_{techn} \times PM_{j,t-1}}{\sum_j PM_{j,t-1}}\right)} \tag{3.13}$$

où les deux sommes de l'équation précédente ont lieu sur l'ensemble des j vérifiant :

$$R^j_{techn} \leq R^{max}_{techn}$$

et R^{max}_{techn} est le plus petit taux technique vérifiant

$$\sum_{R^j_{techn} \leq R^{max}_{techn}} \left(R^{max}_{techn} - R^j_{techn} \times PM_{j,t-1}\right) > PB_t$$

Par convention, la grandeur retenue dans ce cas comme taux de rendement du contrat pour l'exercice t est la plus petite des rémunérations perçues, soit le second des deux termes du "max" dans l'équation (3.13).

3.4.2 Conséquence sur les options implicites et leur couverture

Impact des taux variables sur le bilan : Réserve de capitalisation

Le caractère variable des taux d'intérêt nous oblige à introduire un poste supplémentaire dans le bilan de l'assureur : la **Réserve de capitalisation**. Nous avons exposé le fonctionnement de cette provision au premier chapitre. Nous nous contentons donc de rappeler qu'elle est destinée à recevoir les plus-values réalisées sur obligations. Symétriquement, elle est amputée, le cas échéant, des moins-values.

Dans notre modèle, la réserve de capitalisation ne peut voir son encours modifié qu'au début de chaque exercice, lorsque se produisent sorties et souscriptions nouvelles. Tel est le cas si financement du flux négatif "entrée moins sortie" ne peut être financé par les seules liquidités disponibles à cette date[13]

Produits Financiers

Le fonds du contrat après inventaire en $t-1$, c'est-à-dire **avant souscriptions nouvelles et sorties** a désormais la forme suivante :

Actif	Passif
Actions	Provisions mathématiques
Obligations	Provision pour risque d'exigibilité des engagements techniques
Trésorerie	Provision pour participation aux excédents
	Réserve de capitalisation

Tab. 3.3 – Fonds du contrat

Le portefeuille d'obligations se compose désormais de lignes de titres qu'on suppose toujours perpétuels, mais dont le coupon dépend de la forme de la courbe des taux au moment où elles ont été émises. On suppose que cette émission a lieu le 31 décembre de chaque année et qu'elle est effectuée au pair. On note r_t^* le coupon de l'obligation émise le 31 décembre t. On note $n_{j,t-1}^{obligations}$ le nombre d'obligations émises le 31 décembre i détenues au cours de l'exercice[14] $]t-1, t]$.

Les obligations délivrent donc, en t, le flux $\sum_{j=0}^{t-1} n_{j,t-1}^{obligations}.r_j^*$. Le montant total des produits financiers est égal à la somme de ce flux et des plus-values réalisées sur les actions, soit :

$$\boxed{PF_t = \sum_{j=0}^{t-1} n_{j,t-1}^{obligations}.r_j^* + \sum_{j=0}^{\widehat{j}_t-1} n_{j,t-1}^{actions}(S_t - S_j)} \tag{3.14}$$

où $\widehat{j}_t = \min\{k | \sum_{j=k}^{t-1} n_{j,t-1}^{actions}(S_t - S_j) < \beta \sum_{j=0}^{t-1} n_{j,t-1}^{actions} S_i\}$.

tandis que la provision pour risque d'exigibilité s'écrit, dans tous les cas :

$$\boxed{PRE_t = \left(- \sum_{j=\widehat{j}_t}^{t-1} n_{j,t-1}^{actions}(S_t - S_j) \right)^+} \tag{3.15}$$

[13]Rappelons que ces liquidités sont égales aux produits financiers dégagés par l'exercice précédent, auxquelles s'ajoute, le cas échéant le prix historique des actions réalisées, et auxquelles on retranche le dividende de l'actionnaire (ou l'on ajoute un dividende négatif).

[14]On a donc $n_{j,t-1}^{obligations} = 0$ pour $j \geq t$.

Enfin, les plus ou moins values sur obligations réalisées en début d'exercice lors de la vente des obligations ont été neutralisées par une dotation ou une reprise à la réserve de capitalisation.

Absence de modification des risques pesant sur le dividende

Aucun cantonnement annuel permettant de décrire de façon simple les options implicites du contrat n'est plus possible dans ce nouveau cadre, car la rémunération de chaque génération dépend essentiellement des caractéristiques des autres. La description de ces options serait inutilement complexe et nous y renonçons.

Cependant, l'absence de connaissance précise sur la nature de ces options n'empêche pas la mise en oeuvre d'une stratégie de couverture. En effet, celle-ci est destinée à couvrir les risques qui pèsent sur le dividende de l'actionnaire, abstraction faite de ce que peut être leur impact sur la provision mathématique. Or la forme prise par ce dividende n'est que marginalement modifiée par rapport au paragraphe précédent, puisqu'elle est donnée par l'équation :

$$div_t = PF_t - IT_t - PB_t$$

Minoration du dividende

Appliquons de nouveau la méthode du paragraphe (2.3.3).

Le dividende reçu par l'actionnaire peut être minoré celui qu'on obtient en ne retenant que les produits financiers dégagés par les actions :

$$div_t \geq \sum_{j=0}^{t-1} n_{j,t-1}^{obligations}.r_j^* - IT_t - (\sum_{j=0}^{t-1} n_{j,t-1}^{obligations}.r_j^* - (PRE_t - PRE_{t-1}) - IT_t)^+$$

Mais ce minorant dépend lui même négativement des intérêts techniques. Or ceux-ci peuvent être majorés par 3% (taux que nous notons $\overline{R_{techn}}$) des provisions mathématiques en $t-1$. On obtient donc :

$$div_t \geq \sum_{j=0}^{t-1} n_{j,t-1}^{obligations}.r_j^* - \overline{R_{techn}} PM_{t-1} - (\sum_{j=0}^{t-1} n_{j,t-1}^{obligations}.r_j^* - (PRE_t - PRE_{t-1}) - \overline{R_{techn}} PM_{t-1})^+$$

Le minorant précédent, que nous notons $\underline{div_t}$ est de la forme de celui du paragraphe (2.3.3), nous pouvons donc lui appliquer les résultats alors obtenus. Il s'écrit finalement :

$$\underline{div_t} = A - B - \underline{n_{t-1}^{actions}} (\widetilde{S_{t-1}} - S_t)^+ \tag{3.16}$$

avec :

$$A = \sum_{j=0}^{t-1} n_{j,t-1}^{obligations}.r_j^*$$

$$B = \max\left(\overline{R_{techn}}PM_{t-1}, \delta \sum_{j=0}^{t-1} n_{j,t-1}^{obligations}.r_j^*\right)$$

$$\widetilde{S_{t-1}} = \min\left(S_{t-1}, S_{t-1} - \frac{\delta \sum_{j=0}^{t-1} n_{j,t-1}^{obligations}.r_j^* - \overline{R_{techn}}PM_{t-1}}{\underline{n_{t-1}^{actions}}}\right)$$

et $\underline{n_{t-1}^{actions}}$ la quantité d'actions détenues dans le bilan fictif décrit au paragraphe (A.5.1).

Afin de minorer l'assiette du prélèvement sur encours en t tout simplement par la valeur de la provision mathématique en $t-1$. Ce taux de prélèvement vérifie :

$$B(t-1,t)(A-B) - \underline{n_{t-1}^{actions}} Put_E(S_{t-1}, \widetilde{S_{t-1}}, 1) + \alpha^* B(t-1,t)PM_{t-1} = 0$$

soit :

$$\boxed{\alpha^* = \frac{\underline{n_{t-1}^{actions}} Put_E(S_{t-1}, \widetilde{S_{t-1}}, 1) - B(t-1,t)(A-B)}{B(t-1,t)PM_{t-1}}} \qquad (3.17)$$

Le problème auquel on se trouve alors confronté est que ce taux de prélèvement n'est pas constant. Il dépend de la date où l'on se trouve par l'intermédiaire de la courbe des taux.

Stratégie de couverture

On le voit, la stratégie de couverture est la même qu'au paragraphe (2.3.3). L'assureur réplique ou achète à chaque date $(1-\alpha^*)\underline{n_{t-1}^{actions}}$ Puts en s'endettant au taux sans risque à un an. Il exerce le cas échéant ceux-ci en t et rembourse son prêt grâce au pay off du put, au prélèvement sur encours et au dividende qui lui est versé.

Cependant, même évalué prudemment, le taux de prélèvement sur encours pourra, dans certains états du monde, ne pas suffire à ce remboursement. Les risques financiers ne sont donc pas parfaitement couverts, mais ils le sont sans doute à un niveau acceptable.

*

*   *

Ce chapitre nous a permis d'étudier l'impact sur l'étude du contrat de la présence simultanée de plusieurs générations. Nous avons vu que, dès que l'on adopte un modèle de contrat qui comporte des éléments réglementaires minimaux (comptabilisation des placements risqués au coût historique, utilisation de la provision pour participation aux excédents), des effets intergénérationnels se produisent. Ceux-ci se traduisent par le fait que la rémunération d'une génération donnée de contrats dépend des autres générations.

Néanmoins, nous avons pu, dans les deux premiers cas étudiés, montrer qu'un isolement de chaque génération pouvait être artificiellement recréé au sein du bilan. Cet isolement prend la forme d'un "cantonnement fictif" de chaque génération de contrat, à laquelle est associée, non seulement un actif, mais encore une part des autres postes du bilan, qui tous se comportent comme le bilan global. Ce cantonnement est obtenu par application sur l'ensemble des postes du bilan d'un coefficient d'homothétie égal au ratio entre l'encours de provision mathématique de la génération considérée et l'encours total de cette provision.

La validité est, dans le cas général, limitée à un exercice comptable et ne s'étend pas à toute la durée du contrat. Il permet néanmoins d'obtenir une décomposition du contrat sous forme d'options implicites échangées au début de l'exercice, exerçables à la fin de celui-ci et ne portant que sur des postes du canton de la génération, c'est-à-dire des options dont les effets intergénérationnels sont absents.

En présence de taux d'intérêts variables, une telle construction n'est plus possible. Il s'ensuit qu'on ne peut sans doute pas accéder aux options implicites dont se compose le contrat. Néanmoins, **la connaissance des options implicites qui interviennent n'est pas nécessaire à la mise en place d'une couverture de ces options**.

Troisième partie

Rachats et souscriptions aléatoires

Chapitre 4

Introduction du risque de rachat et de souscription

Lorsque la faculté est offerte aux assurés de demander à toute date le rachat de leur contrat, des risques nouveaux apparaissent pour l'assureur. Ceux-ci sont liés, d'une part à la diminution de la taille du bilan, et d'autre part, à la nécessité de réaliser éventuellement des placements en situation de moins-value latente.

Cependant, alors que le risque de rachat a fait l'objet d'un grand nombre d'études, dont on trouvera une liste sélective en bibliographie, on ne peut en dire autant d'une autre variable aléatoire : les souscriptions nouvelles. Cet état des choses est essentiellement lié au fait que les modèles de la littérature se concentrent le plus souvent sur l'étude d'une unique génération de contrats. Pourtant, les variations des souscriptions nouvelles font peser sur le bilan et les résultats de l'assureur des risques dont la nature est assez analogue au risque de rachat qu'on ne peut négliger. Aussi nous a-t-il semblé fructueux d'introduire conjointement ces deux risques dans notre modèle.

4.1 Présentation générale des risques de rachats et de souscriptions

4.1.1 Le rachat : un risque d'une double nature

La possibilité offerte aux assurés d'obtenir à toute date le rachat de leur contrat fait peser sur l'assureur deux types de risques.

Risque financier

Le premier est un **risque de marché**. Reprenons en effet le modèle avec revalorisation dynamique, dans lequel on incorpore une faculté de rachat à toute date précédant l'échéance prévue pour le contrat (8 ans dans le modèle précédent). Nous négligeons les pénalités de rachat et l'imposition des plus-values. La faculté de rachat s'apparente à **une option américaine de vente** détenue par l'assuré dont le sous-jacent est sa provision mathématique, c'est-à-dire aussi l'actif de l'assureur.

Le risque encouru par l'assureur est donc un **risque de hausse des taux**. Supposons en effet que l'actif de l'assureur se compose de titres obligataires in-fine de même maturité que le contrat. Lorsque se produit une remontée (parallèle pour simplifier) des taux, le rendement de l'actif peut devenir inférieur au niveau des taux. Les assurés sont alors incités à racheter leur contrat au profit de titres de court terme, mieux rémunérés. L'assureur est alors contraint à vendre les titres qu'il détient alors que ceux-ci se trouvent en moins-value. Il se trouve alors confronté à un véritable cercle vicieux.

Risque de volume

Le second de ces risques est lié à la taille du bilan. En effet, quand bien même l'assureur s'est couvert par des instruments idoines contre le risque précédent - et nous verrons comment cela est possible - un comportement de rachat massif conduit à une diminution de l'encours des provisions mathématiques. Dès lors les produits financiers dégagés par l'actif placé en représentation des provisions techniques connaît la même évolution. Il s'ensuit donc une baisse du dividende.

Dans les développements qui suivent, nous désignons ce risque par l'expression "risque de volume". On voit qu'il ne coïncide pas avec un "risque de chiffre d'affaires", qui correspondrait à l'affaissement des souscriptions nouvelles, mais qu'il est lié au contraire au comportement conjoint des rachats et des souscriptions nouvelles.

4.1.2 Risque lié aux souscription nouvelles

Les modèles présentés dans la littérature relative aux options implicites au bilan des compagnies d'assurance considèrent le plus souvent **une seule génération de contrats**[1]. Cette génération est revalorisée au moins à son taux garanti et amputée des rachats intervenant au cours de la vie du contrat, ce qui fait peser sur le bilan de la compagnie les deux risques qui viennent d'être décrits.

Cependant, on peut également prendre en compte la plus évidente des options dont sont détenteurs les agents économiques : celle de souscrire ou non un contrat, et ce à la date de leur choix. La prise en compte de cette "option de souscription" nous paraît nécessaire si l'on veut éviter de surestimer le risque de taille du bilan, qui vient d'être décrit. Celui-ci ne pèse en effet pleinement sur l'assureur que pour autant qu'aucune souscription nouvelle n'a lieu. Si les rachats se trouvent compensés en partie par des souscriptions nouvelles, il est atténué, voire compensé.

[1] Il en est ainsi notamment des modèles de Chérif et Pras, et de Berthelot, Bossy et Pistre qu'on étudie plus loin.

Nous exposons plus bas (4.2.2) un modèle dans lequel les provisions mathématiques rachetées sont remplacées dans le bilan de l'assureur par de la dette. On voit que cette méthode contourne le risque de taille du bilan. Mais la prise en compte de souscriptions nouvelles jouit sans doute d'un réalisme supérieur.

De plus, les souscriptions nouvelles ne sont pas neutres en terme de rémunération du contrat. En effet, les effets intergénérationnels qui ont été décrits au chapitre précédent pourront modifier la rémunération des générations encore présente dans le bilan. Ce phénomène sera d'autant plus sensible que les souscriptions nouvelles représentent un montant non négligeable devant l'encours des provisions mathématiques.

4.2 Modélisation des comportements de rachat et de soucription

4.2.1 Modélisation "théorique" : options américaines perpétuelles

Le premier point de vue qu'on peut adopter pour la modélisation des options de rachat et de souscription repose sur l'exercice par les assurés d'options financières, dont les caractéristiques sont d'être américaines et perpétuelles.

Option de rachat

Replaçons-nous dans un cadre monogénérationnel. Nous reprenons le contrat décrit au paragraphe (2.3.1). rappelons que la dynamique de la provision mathématique connaît une dynamique de la forme :

$$\begin{cases} PM_0 = P \\ PM_t = PM_{t-1}(1 + R_{techn}) + PM_{t-1} \left(\delta rend_t - R_{techn}\right)^+ \end{cases} \tag{4.1}$$

où P est la prime versée à la date 0 et $rend_t$ le rendement de l'actif sur l'exercice $]t-1, t]$. Dans le cas où le terme du contrat est fixé à huit ans, la valeur en 0 du contrat du point de vue de l'assuré s'écrit en prenant en compte, cette fois l'ensemble des flux :

$$V_0^{assuré} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(e^{-8r} PM_8) - P$$

Lorsque l'assuré peut à toute date demander le rachat de son contrat, elle devient :

$$V_0^{assuré} = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(e^{-\tau . r} PM_\tau) - P$$

où $\mathcal{T}$ désigne l'ensemble des temps d'arrêt à valeurs dans $[0, +\infty[$.

L'option de rachat s'interpréte donc comme une option américaine perpétuelle de sous-jacent la provision mathématique du contrat et de prix d'exercice 0.

Ajout du comportement de souscription

Lorsque l'assuré est, de plus, libre de décider du moment de sa souscription, la valeur de son contrat devient :

$$V_0^{assuré} = \sup_{\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T} | \tau_1 \leq \tau_2} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(e^{-\tau_2 . r} PM_{\tau_1, \tau_2}) - e^{-\tau_1 . r} P$$

où $PM_{i,j}$ désigne la valeur en j de la provision mathématique d'un contrat souscrit en i.

Ce double "max" rappelle la théorie des options réelles. L'assuré se trouve, en effet, exactement dans la situation d'un agent économique libre d'entreprendre un investissement au moment de son choix, et libre, une fois cet investissement réalisé, d'y renoncer au moment de son choix.

Commentaires sur le modèle théorique

L'application de la méthode théorique repose donc sur le calcul de la frontière d'exercice optimal de l'option américaine de rachat (ou du couple d'options si on lui adjoint l'option de souscription).

Mais cette méthode - du moins si elle est développée en s'appuyant sur les équations qui précèdent - suppose :

- que tous les assurés doivent avoir le même comportement, c'est-à-dire souscrire un contrat à la même date et le racheter à la même date ;
- que ce comportement est optimal au sens de la théorie des options américaines.

Il n'est nul besoin de préciser que la réalité s'écarte de cette situation. D'autres éléments interviennent en effet comme le besoin de liquidité (dans le rachat) ou au contraire la possession de liquidités (dans la souscription), le régime fiscal applicable. Ces phénomènes n'empêchent pas la mise en oeuvre de la méthode théorique, mais celle-ci soit alors être amendée.

Ainsi, par exemple, s'agissant du cadre fiscal, on peut distinguer selon que $\tau_2 - \tau_1$ est inférieur ou non à huit ans et modifier le pay-off délivré par l'option en conséquence.

De plus, le calcul de la frontière d'exercice optimal de l'option suppose la mise en oeuvre de méthodes *ad hoc*. En effet, dans le cas d'une option financière américaine, on recourt fréquemment à des arguments d'arbitrage entre l'exercice de l'option ou sa revente sur le marché. Cet argument implique que le prix de marché de l'option à une date donnée ne peut jamais être inférieur au pay-off qu'elle procure si elle est exercée à cette date. Or s'agissant d'un contrat d'assurance, un tel argument tombe en défaut, celui-ci appartenant en propre à son titulaire et ne pouvant pas être échangé sur un marché. En d'autres termes, les options américaines en présence ne peuvent être qu'échangées ou conservées, mais non revendues[2].

Aussi, la mise en oeuvre des méthodes reposant sur le calcul d'une frontière d'exercice optimale paraît-elle assez illusoire. On se reporte dès lors sur une autre méthode, sans doute moins séduisante sur le plan théorique, mais dont les résultats ne sont pas sujets aux critiques précédentes.

4.2.2 Modélisation par des lois exogènes et déterministes du comportement de rachat

Cette méthode consiste en l'obtention de lois **empiriques** (et non pas théoriques) d'exercice des options. La littérature foisonne véritablement de travaux sur le sujet. Nous présentons maintenant deux exemples de telles approches, qui nous semblent intéressants quant aux hypothèses qu'ils formulent et au cadre qu'ils adoptent.

Loi basée sur la comparaison du rendement du contrat et d'un taux de marché

Un premier modèle (Berthelot, Bossy, Pistre, 2001, [4]) adopte le cadre suivant :

- le bilan de la compagnie comprend, en son passif des provisions mathématiques, qui accueillent une unique génération de contrats, et des fonds propres, tandis que l'actif comprend des obligations, des actions et de l'immobilier. La composition de ce dernier est optimisée selon un critère moyenne-variance.
- le contrat est à prime unique, de durée maximale 8 ans et offre les deux garanties usuelles (taux garanti et rachat anticipé) ;
- en cas de rachat anticipé, il s'applique une pénalité fiscale et une retenue par l'assureur proportionnelle à l'encours des provisions mathématiques ;

Les auteurs supposent alors que les assurés comparent le rendement moyen de leur contrat depuis sa souscription au taux de marché d'échéance 8 ans. Le rachat s'effectue, compte tenu des pénalités appliquées, au premier instant τ tel que :

$$(PM_\tau - P_\tau)\exp\left(-(8-\tau)R(\tau, 8-\tau)\right) \geq \lambda PM_\tau \exp\left(-(8-\tau)\tilde{R}\right) \qquad (4.2)$$

où :

[2] On peut dans certains cas très particuliers, contourner cet argument, par exemeple par la mise en nantissemnt d'un contrat d'assurance-vie.

- PM_τ est la provision mathématique acquise à la date τ ;
- P_τ est la pénalité qui s'applique en cas de rachat à la date τ ;
- $\tilde{R}$ est le rendement moyen du contrat depuis sa souscription ;
- λ est un paramètre de latence tel que $\lambda \geq 1$, qui traduit la "vitesse" de réaction des assurés ;

Le rachat, s'il a lieu, s'effectue donc à la même date pour tous les assurés. Une fois que celui-ci a eu lieu, l'entreprise ne cesse pas de fonctionner, mais son passif ne se compose plus que de ses fonds propres. Ceux-ci ne sont alors plus rémunérés que par l'actif placé en face d'eux. La liquidation de l'entreprise intervient dans tous les cas au terme de la huitième année.

On peut donc appeler "risque de levier" le risque étudié dans le cadre de ce modèle. Il se matérialise par le fait que, lorsque le rachat s'effectue, le levier de l'entreprise tombe à 1, et la rémunération de ses fonds propres en pâtit.

Les auteurs étudient alors la distribution empirique, sous la probabilité historique, de la valeur des fonds propres à la fin de la vie de l'entreprise. Ils observent les déformations de cette distribution sous l'effet de la variation des paramètres du modèle : levier au début de la vie de l'entreprise, volatilité des actifs.

Cependant, comme nous l'avons indiqué (4.1.2), l'hypothèse selon laquelle, d'une part le rachat a lieu à la même date pour tous les assurés, d'autre part aucune souscription nouvelle ne vient plus alimenter le passif après qu'il a eu lieu, conduit à surestimer le risque de levier. Pour lever cette réserve, on peut imaginer de remplacer les provisions mathématiques par de la dette de manière à conserver le levier de l'entreprise. Tel est l'objet d'un second modèle.

Loi de rachat basée sur les seuls taux de marché

Celui-ci (Chérif, Pras, 1997, [14]) adopte le même cadre général : une unique génération de contrat, un terme fixe noté T.

Cependant, à la différence du modèle précédent, l'approche retenue par Cherif et Pras envisage la possibilité de rachats partiels. Leur démarche consiste en effet à obtenir, à partir de données historiques, une relation entre la proportion de rachats survenant au cours de l'exercice t, notée $P_f(t)$, et certaines variables aléatoires. Ces variables sont notamment relatives à la situation du marché (taux court et long, etc.) et de l'assuré (ancienneté dans le contrat, etc.).

La transformation du risque de levier en risque de marché

Les auteurs calculent les flux négatifs induits, pour l'assureur, par les rachats. Pour cela, ils font l'hypothèse que **ceux-ci sont financés par emprunt** sur le marché, au taux 0-coupon de maturité égale à celle du contrat. Finalement, le prix de la garantie s'exprime comme l'espérance actualisée de tous ces flux sous la probabilité risque-neutre :

$$V(t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\sum_{i=0}^{T-1} P_f(i) e^{-(8-i)R(i,8-i)} PM_i \prod_{j=0}^{i-1}(1 - P_f(j))|\mathcal{F}_t\right) \quad (4.3)$$

où :

- R désigne le taux zéro-coupon ;
- $P_f(t)$ est la proportion de contrats rachetés à la date t rapportés au nombre de contrats encore présents à l'exercice précédent[3], compte tenu d'une loi de rachat f ;

On voit que ce cadre repose sur **l'assimilation de l'option américaine de rachat à une somme d'options européennes**. En effet, dans ce modèle, les flux consécutifs aux rachats ont lieu à chaque date du modèle discret. Ces dates sont donc déterministes et les options en cause européennes. Seuls le prix d'exercice de l'option et le nombre (en réalité la proportion) d'options exercées sont aléatoires, c'est-à-dire dépendent de l'évolution du marché entre la souscription du contrat et la date t.

La fonction de rachat retenue par les auteurs

Pour modéliser la proportion $P_f(t)$, les auteurs réalisent une étude économétrique qui leur permet de sélectionner des variables pertinentes et une forme fonctionnelle adaptée. Celle-ci les conduit à ne pas retenir la rémunération du contrat comme variable influençant le rachat. Seuls l'ancienneté dans le contrat et deux taux de marché (long et court) sont dotés d'un pouvoir explicatif suffisant. On constate donc une différence marquée avec le modèle précédent, dans lequel la comparaison de la rémunération du contrat à un taux de marché guidait tout le comportement des assurés.

La fonction retenue par Cherif et Pras est de la forme suivante :

$$P_f(t) = \big(Sais.A(t) + a(\text{Pibor - Taux long})^+ + b.\text{Taux long} - c\big)^+ \quad (4.4)$$

où t désigne l'ancienneté dans le contrat et "$Sais$" est un paramètre dépendant du mois de l'année, destiné à capturer un effet de saisonnalité. La fonction A reflète la forte influence exercée par le régime fiscal du contrat. Elle est croissante avant huit ans (les auteurs retiennent un polynôme de degré 2 sur cet intervalle) puis décroissante (exponentiellement pour les auteurs) après cette date.

Autres approches

Les lois de rachats empiriques peuvent être raffinées à plaisir par l'introduction de variables sociologiques ou démographiques. Celles-ci sont destinées à capturer

[3] $P_f(t)\prod_{s=0}^{t-1}(1 - P_f(s))$ désigne donc le nombre de contrats rachetés rapporté au nombre initial de contrats.

les différentes nuances qui peuvent s'exprimer dans le comportement d'épargne (ou, en l'occurence, de désépargne) des agents économiques.

Cependant, pour des raisons de parcimonie du modèle, il ne nous a pas semblé fructueux de prendre en compte de tels effets.

La modélisation que nous retenons

Pour chaque génération de contrats indexée par sa date de souscription i, on définit un pourcentage de rachats intervenant au début de l'exercice t qu'on note $p_{i,t}$. Cette variable désigne le pourcentage de rachat **par rapport à l'encours résiduel de provision mathématique**[4] de la génération i :

De plus, en raison de l'improbabilité d'un rachat succédant immédiatement à la soucription, on a :

$$p_{t,t} = 0 \tag{4.5}$$

Choix des variables pertinentes

Nous modélisons la dépendance de la proportion de rachats aux caractéristiques du contrat et aux conditions de marché de la façon suivante :

$$p_{i,t} = f_{t-i}(TRC_{i,t-1}, R(t)), \tag{4.6}$$

où :
- i désigne la date de souscription du contrat ;
- t l'exercice au début duquel intervient le rachat ;
- p la proportion de rachats ;
- $TRC_{i,t-1}$ le taux de rendement servi à cette génération à l'issue de l'exercice qui vient de s'achever ;
- $R(t)$ désigne l'ensemble de la courbe des taux qui s'établit à la date t.

Forme fonctionnelle de la loi de rachats

On postule que le taux de rachat prend la forme suivante :

$$p_{i,t} = U(t-i) + f(TRC_{t-1}, R(t))$$

où la fonction U est constante sur les intervalles de largeur 1 à bornes entières. Les valeurs prises par U sont obtenues en calculant la valeur moyenne sur ces intervalles de la fonction A de l'équation (4.4).

A la différence du modèle de Chérif et Pras, on souhaite incorporer le taux de rendement du contrat dans la partie de cette fonction dépendant des taux. On s'appuie sur la loi psychologique selon laquelle les asssurés comparent le taux

[4] La forme fonctionnelle qui sera évoquée plus bas doit donc garantir que cette quantité reste comprise entre 0 et 1. Sous cette contrainte, on aurait également pu choisir la proportion de rachat par rapport à l'effectif initial. Cependant, on risquerait alors de se trouver dans une situation où la somme des rachats depuis le début du contrat dépasse 100%.

qui leur a été servi au cours de l'exercice précédent avec un taux de marché et rachètent davantage leur contrat en cas de sous-performance par rapport au marché.

Le choix du taux de marché

Nous choisissons de faire apparaître **le taux zéro-coupon à un an**. Certes ce choix peut être contesté notamment en raison de l'argument selon lequel, l'assurance-vie étant un placement à moyen ou long terme, c'est à un taux de même nature qu'il convient de le comparer.

Mais, en premier lieu, l'action du facteur stochastique d'évolution parallèle de la courbe des taux fait que l'ordre de grandeur de tous les taux de la courbe demeure sensiblement le même. En second lieu, la prise en compte d'un taux à moyen ou long terme ne peut être pertinente que pour des assurés dont la souscription est récente ; à l'inverse, il n'est pas absurde de supposer que les assurés qui ont dépassé le terme fiscal de leur contrat comparent le rendement de ce placement avec un taux à court terme. Le régime fiscal et les droits d'entrée attachés au contrat font que cette population d'assurés est sans doute la plus nombreuse.

Comparaison des taux et paramètre de latence

On postule que la partie de la fonction de rachat dépendant des taux prend la forme suivante :

$$f(TRC_{t-1}, R(t)) = a.(R(t,1) - \theta TRC_{t-1})^+ \tag{4.7}$$

Le paramètre $\theta \geq 1$ permet d'incorporer un effet de retard dans le comportement de sortie.

Finalement, notre fonction de rachat prend la forme suivante :

$$p_{i,t} = U(t-i) + a.(R(t,1) - \theta TRC_{t-1})^+ \tag{4.8}$$

4.2.3 Modélisation du comportement de souscription nouvelle

Malgré la rareté de la littérature sur le sujet, on peut sans doute regrouper les modélisations du comportement de souscription en deux catégories :

- celles qui sont fondées sur les engagements pris pour l'avenir par l'assureur. Dans ce cas, les souscriptions nouvelles sont reliées à un taux commercial garanti pour l'exercice à venir à ces souscriptions ;
- celles qui s'appuient en revanche sur les résultats antérieurs de la compagnie. Dans ce cas, les souscriptions nouvelles dépendent du taux de rémunération des contrats au cours du dernier exercice.

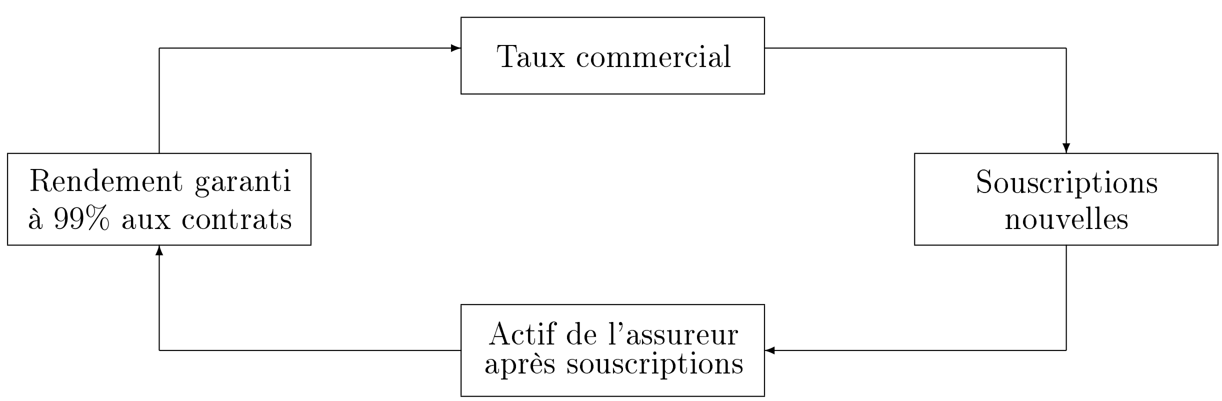
Méthode prospectives : taux minimum garanti

En début de chaque exercice, l'assureur annonce un **taux commercial** qu'il est prêt à garantir sur un an aux souscriptions nouvelles. On peut alors faire l'hypothèse[5] que le montant des souscriptions nouvelles est relié à ce taux commercial par une fonction de la forme :

$$PM_{t,t} = F(TauxCom_t, \text{Courbe des taux à la date } t) \tag{4.9}$$

Le calcul du taux commercial s'appuie quant à lui sur le rendement probable des actifs au cours de l'exercice. On suppose que l'assureur le définit comme le taux de rendement interne qu'il peut garantir avec un certain niveau de confiance (par exemple 99%), compte tenu de la composition de son actif en début d'exercice.

La difficulté du calcul tient alors au fait que le niveau de souscriptions influence lui-même le rendement final des contrats. Ceci est particulièrement vrai au début de la vie de la compagnie, où les nouvelles souscriptions représentent une fraction non négligeable de l'encours de provisions mathématiques. On se trouve donc en présence de la boucle suivante :



Tab. 4.1 – Boucle déterminant le taux commercial

[5] à laquelle l'abondante communication des compagnies d'assurance au sujet de ce taux garanti apporte grand crédit.

On peut alors faire l'hypothèse que **l'information est parfaite et symétrique entre l'assureur et l'assuré concernant la loi de souscription** L'assureur incorpore donc la loi de souscription dans son calcul du taux commercial. Il s'ensuit que le taux commercial annoncé par l'assureur sera le **point fixe** de la boucle précédente.[6]

L'avantage principal de cette méthode consiste en le fait que l'assureur qui l'applique contrôle le risque de souscription. En effet, son calcul du taux commercial lui garantit qu'il sera en mesure de le servir dans 99% des cas.

Cependant, la mise en oeuvre de cette modélisation suppose celle d'un calul assez long et complexe, car chaque étape de la boucle (4.2.3) repose sur l'estimation d'une VaR à 99%. De plus, la convergence de cet algorithme vers son point fixe n'est pas assurée.

Pour toutes ces raisons, on préférera une modélisation des souscriptions basée sur la rémunération versée dans le passé par l'assureur.

Méthode de la loi déterministe

Cette modélisation est plus simple que la précédente car le montant des souscriptions nouvelles ne nécessite aucun calcul prospectif. Elle consiste à supposer que les assurés potentiels comparent le taux servi par la compagnie au cours de l'exercice précédent à un taux de marché de maturité longue, qui correspond par exemple au terme fiscal du contrat, soit huit ans. On suppose qu'il existe une relation de la forme :

$$PM_{t,t} = f(\text{Rendement du contrat}_{t-1}, R(t, 8-t)) \quad \forall t \tag{4.10}$$

la fonction f pouvant prendre par exemple la forme suivante :

$$PM_{t,t} = \chi(TRC_{t-1} - R(t,1))^+ + \psi \quad \forall t \tag{4.11}$$

L'utilisation du taux à un an est bien entendu contestable. On peut néanmoins formuler les mêmes réponses que plus haut, concernant la loi de rachat. Nous verrons également plus loin, qu'il est très commode de prendre des taux de même maturité pour les lois de rachat et de souscription. Cette hypothèse simplifie considérablement l'étude des stratégies de couverture du risque correspondant.

Il faut remarquer que l'assureur est alors placé en situation de "suiveur". Comme le taux garanti aux souscriptions nouvelles ne dépend que des conditions de marché au moment de la souscription et au cours des six mois précédents, il n'est pas en mesure de contrôler son engagement futur.

[6] On sait que la réglementation (Code des assurances, Art A132−3, 1^{er} al.) impose à ce taux commercial d'être inférieur à 85% du taux de rendement des actifs des deux derniers exercices. Le taux commercial effectif sera donc le minimum de ce point fixe et du plafond imposé par le Code.

On peut enrichir cette forme par un paramètre de latence $\tilde{\theta} \geq 1$ qui traduit l'imperfection du marché :

$$N_{t,t} = \chi(TRC_{t-1} - \tilde{\theta}.R(t,1))^{+} + \psi \tag{4.12}$$

Telle est la forme que nous retiendrons.

4.3 Incorporation au modèle précédent

4.3.1 Hypothèses concernant les souscriptions nouvelles et les rachats

Celles-ci constituent essentiellement la reprise, avec quelques adaptations, de celles que nous avions formulées dans le cadre adopté au chapitre précédent. Elles revêtent cependant une importance cruciale pour la forme et la couverture des options implicites de rachat et souscription, qui justifie qu'on les réexpose.

Chronologie des opérations affectant le bilan

Nous maintenons les hypotèses formulées au chapitre précédent relativement à la chronologie de l'exercice comptable. On suppose donc que **les entrées et sorties se produisent instantanément au début de chaque exercice comptable**.

Cette hypothèse est particulièrement importante, car elle nous permet de maintenir la description et la couverture du risque de revalorisation minimale. Rappelons en effet que celles-ci s'appuient sur la composition du bilan **après** rachats et souscriptions (et s'effectuent conditionnellement à cette composition). Elles ne sont donc en rien affectées par le fait que les entrées et sorties prennent un caractère stochastique.

En résumé, **on peut couvrir les deux risques indépendamment l'un de l'autre**.

Impact comptable des rachats et soucriptions

Au terme de l'exercice comptable $]t-1,t]$, l'assureur dispose de liquidités égales à la somme : coupons + valeur des actions revendues - div_t.

Au début de l'exercice suivant, se produisent rachats et souscriptions , qui lui apportent (ou lui demandent en cas de signe négatif) la liquidité : entrées - sorties.

On note $cash_t$ les liquidités résultant de l'ensemble de ces opérations. Deux cas sont possibles :

1. soit $cash_t \geq 0$

   Ce montant est alors réinvesti de manière à approcher l'actif autant que possible de son allocation stratégique. Les équations correspondantes (à la définition de "$cash_t$" près) sont exactement celle de l'annexe ().

2. soit $cash_t < 0$

   Dans ce cas l'assureur doit réaliser des actifs. **On suppose, si tel est le cas, qu'il ne vend que des obligations**. En effet, la réalisation d'actions au début de l'exercice pourrait générer des produits financiers dont le traitement comptable serait délicat. Il n'en va pas de même pour les obligations, les plus ou moins-values réalisées étant immédiatement neutralisées par une dotation ou une reprise à la réserve de capitalisation.

   De plus, cette hypothèse permet de ramener les risques de rachat et de souscription (plus exactement, une partie de ces risques) à un **risque de taux**.

4.3.2 Dissociation du risque de marché et du risque de volume

Risque de volume

Rappelons que ce risque est lié à la possible diminution de la taille du bilan à la suite des souscriptions nouvelles et des rachats.

Le modèle de Chérif et Pras évoqué plus haut illustre une manière, pour l'assureur de se prémunir contre ce risque. On voit qu'il suffit pour cela d'émettre sur le marché une dette destinée à conserver la taille globale du bilan.

Risque de marché

Dans notre modèle, ce risque consiste en la nécessité pour l'assureur de réaliser des obligations en situation de moins-values latentes. Mais cette réalisation ne lui est préjudiciable (c'est-à-dire n'a d'impact sur le compte de résultat) que si la réserve de capitalisation est à un niveau insuffisant pour compenser ces moins-values par la reprise dont elle fait alors l'objet.

Il faut donc, pour que se réalise le risque de marché, que soient réunies les trois conditions cumulatives suivantes :
- **que le flux sorties moins entrées absorbent toutes les liquidités disponibles, de sorte que l'assureur se trouve dans l'obligation de procéder à la vente de placements obligataires ;**
- **que les placements ainsi réalisés dégagent une moins-value par suite d'une augmentation des taux ;**

– **que cette moins-value ne puisse être absorbée par une reprise à la réserve de capitalisation, par suite d'un montant insuffisant de celle-ci.**

Ces remarques doivent conduire à relativiser la probabilité d'occurence de ce risque. Il faut cependant insister sur le fait que les conditions qui précèdent sont nécessaires à la réalisation du risque de rachat-souscription au début d'un exercice donné et conditionnellement à la situation qui prévaut un an auparavant. Il va de soi que celui-ci peut être favorisé par les comportements de rachats et souscriptions des années antérieures, qui ont pu conduire à une baisse du montant de la réserve de capitalisation. Nous faisons néanmoins le choix de mettre en oeuvre une couverture du seul risque de rachat du prochain exercice[7], et non de l'ensemble du risque de rachat à venir. C'est ce que nous exposons maintenant.

4.3.3 Couverture du risque de marché

On se donne la composition du fonds du contrat au début de l'exercice $t-1^+$ **après rachats et souscriptions nouvelles** de la date $t-1$. Nous supposons que l'assureur cherche à se couvrir contre le risque de marché relatif aux flux d'entrées et de sorties qui se produiront en t, c'est-à-dire au début de l'exercice $]t, t+1]$. On voit donc que la couverture a le même fonctionnement que celle du risque de revalorisation : elle est mise en place annuellement et conditionnellement à la composition intiale du bilan.

En application du principe général de prudence, plusieurs fois utilisé dans la construction de nos couvertures des options implicites, nous cherchons maintenant un minorant au montant des liquidités disponibles en t.

Minoration des liquidités disponibles en t

Etant donné le bilan en $t-1^+$, l'assureur peut, à cette date et sur la base des lois empiriques d'entrées et de sorties qu'il a estimées, calculer la fonction :

$$(Entrees_t - Sorties_t)(R(t), TRC_t)$$

où R(t) désigne l'ensemble de la courbe des taux[8] en t. Cette quantité constitue la première partie des liquidités disponibles en t. Elle dépend positivement de TRC_t.

On minore alors le taux de rendement des contrats par celui qui est obtenu en ne tenant pas compte des produits financiers dégagés par les actions[9]. Ce minorant s'écrit :

---

[7] et même à sa seule composante "risque de marché".

[8] Si l'on utilise nos fonctions de rachats et de souscriptions, seul le taux à un an intervient.

[9] Signalons, par honnêteté, que lorsque tel est le cas, la quantité $\underline{TRC}$ ne constitue pas systématiquement un minorant du rendement de toutes les générations, car TRC désigne par convention le max des rémunérations reçues. Mais l'erreur qu'on fait par cette approximation est négligeable au regard de l'ensemble de minorations qui suivent.

$$\underline{TRC_t} = \frac{IT_t + \underline{PB_t}}{PM_{t-1}} \tag{4.13}$$

avec :

$$\underline{PB_t} = (\delta \sum_{j=0}^{t-1} r_j^* . n_{j,t-1}^{obligations} - (PRE_t - PRE_{t-1}) - IT_t)^+$$

Remarquons que, dans l'équation (4.13), seul le terme $(PRE_t - PRE_{t-1})$ n'est pas connu en $t-1^+$. Il dépend de la valeur des actions en t.

Le reste des liquidités disponibles en t^+ est consitué par la différence entre les produits financiers dégagés par l'actif[10] et le dividende. Comme cette différence dépend positivement des produits financiers, on peut la minorer en ne retenant que les liquidités dégagées par les obligations. On obtient de cette façon le minorant suivant des liquidités (algébriques) disponibles en t^+ :

$$\underline{cash_t} = (Entrees_t - Sorties_t)(R(t), \underline{TRC_t}) + \sum_{j=0}^{t-1} r_j^* . n_{j,t-1}^{obligations} - \underline{div_t} \tag{4.14}$$

où $\underline{div_t}$ est donné par l'équation (3.16) du chapitre précédent.

Risque assumé par l'actionnaire

Le risque de rachat-souscription en t se réalise si est vérifiée la condition :

$$-cash_t \geq RK_{t-1}$$

En effet, le risque supporté par l'assureur est lié au fait que la réserve de capitalisation peut être inférieure au montant des liquidités. Dans ce cas, le montant $(cash_t - RK_{t-1})$ est comptablement enregistré comme un produit financier (négatif) qui vient se soustraire aux produits financiers PF qu'aurait produit l'actif en l'absence de souscriptions et de rachats. La perte de dividende en t due à la partie financière du risque de rachat prend donc la forme suivante :

$$PerteDiv_t = PF_t - (\delta PF_t - IT_t)^+ - PF'_t + (\delta PF'_t - IT_t)^+ \tag{4.15}$$

où PF_t (resp. PF'_t) désigne les produits financiers dégagés par l'actif au cours de l'exercice t en l'absence (resp. en présence) de risque de rachat. On a ainsi :

$$PF'_t = PF_t - (cash_t - RK_{t-1})^- \tag{4.16}$$

En raisonnant sur le signe des quantités en jeu, la quantité $PerteDiv$ peut se majorer par :

[10] auquel il faut ajouter la valeur comptable des actions réalisées.

$$PerteDiv_t \leq (1-\delta)(PF_t - PF_t') \tag{4.17}$$

Finalement, l'utilisation conjointe des équations (4.15) et (4.17) donne :

$$\boxed{PerteDiv_t \leq (1-\delta)(-\underline{cash_t} - RK_{t-1})^+} \tag{4.18}$$

A la différence des options de revalorisation, cette option s'écrit**globalement** pour l'ensemble du bilan. Le risque porte sur le dividende de la date$t+1$.

La majorant qui vient d'être obtenu pour la perte de dividende consécutive au risque de rachat-souscription prend la forme d'une option portant sur un sous-jacent mixte composé d'actions et de produits de taux, de maturité un an et de prix d'exercice connu en t-1.

*

* *

On peut résumer de la façon suivante les résultats obtenus dans ce chapitre :

– les rachats et souscriptions font peser sur le résultat de l'assureur un risque global lié à un manque de liquidités disponibles. Ce risque peut faire l'objet d'une couverture parfaitement indépendant de celle du risque de revalorisation minimale.
– cette couverture s'effectue au moyen d'un deuxième prélèvement sur en-cours, qui s'ajoute à celui qui et utilisé pour la couverture du risque de revalorisation minimale. Il utilisé pour répliquer la forme optionnelle donnée par l'équation (4.18), qui constitue un minorant des pertes liées aux rachats et souscriptions.

Afin de mesurer l'impact de la déformation aléatoire de la courbe des taux sur les riques encourus par l'assureur à raison des garanties implicites (taux minimum garanti et rachat dans notre étude), la construction d'un modèle d'actif incorporant des taux d'intérêt stochastiques est nécessaire.

Chapitre 5

Modèle d'actif utilisé pour l'étude du risque de souscription et de rachat

5.1 Le modèle de taux

On se place dans un marché dans lequel existe à toute date un taux instantané sans risque r_t et qui traite, sans arbitrage et en temps continu, les zéros-coupons de toutes les maturités. Ces actifs ne comportent pas de risque de crédit.

5.1.1 Le cadre général Heath-Jarrow-Morton (1992)

Le modèle de taux proposé en 1992 par Heath, Jarrow et Morton (HJM) présente la caractéristique importante d'être compatible avec la courbe des taux zero-coupons observée au comptant. On spécifie pour cela la dynamique de l'ensemble de la courbe des **taux forward instantanés**.

Dynamique du taux forward instantané

On pose sous la probabilité historique $\mathbb{P}$ et pour tout $T > 0$:

$$\begin{cases} df(t,T) = \alpha(t,T)dt - \langle \gamma(t,T), dW_t \rangle \\ \\ f(0,T) = f(0,T)_{obs} \end{cases} \tag{5.1}$$

où :
- (W_t) est un mouvement brownien standard sous la probabilité $\mathbb{P}$, dont les composantes sont supposées indépendantes ;
- $f(0,T)_{obs}$ est le taux forward instantané observé à la date $t = 0$ sur la courbe des taux zéro-coupon au comptant.

Il faut remarquer que l'utilisation du taux forward instantané et non celle du prix du zéro-coupon, permet de ne faire apparaître qu'une seule condition terminale dans l'équation différentielle. En effet, le prix du zéro-coupon, outre la compatibilité avec la courbe au comptant qu'on souhaite imposer, doit vérifier $B(T,T) = 1$, ce qui rend le problème non résoluble.

Dynamique du zéro-coupon et forme de la probabilité risque-neutre

On cherche à exprimer la dynamique du prix du zéro-coupon sous une forme qui soit compatible avec (5.1). On utilise pour cela l'existence d'une probabilité risque neutre.

Supposons que le zéro-coupon possède, sous la probabilité historique, une dynamique de la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{dB(t,T)}{B(t,T)} = \mu(t,T)dt + \langle \sigma(t,T), dW_t \rangle \\ \\ B(0,T) = B(0,T)_{obs} \end{cases} \tag{5.2}$$

où :
- $\mu(t,T)$ est l'espérance du taux de rendement instantané ;
- $\sigma(t,T) = (\sigma_1(t,T), ..., \sigma_n(t,T))$ est le vecteur des volatilités instantanées du zero-coupon.

On obtient alors une forme nécessaire pour les paramètres de l'évolution de B. Le détail des calculs est développé à l'annexe B.1.

En résumé :
- Il existe un vecteur de primes de risque $\rho(t) = (\rho_1(t), ..., \rho_n(t))$ vérifiant $\forall T$:

$$\langle \rho(t), \sigma(t,T) \rangle = \mu(t,T) - r_t$$

- La probabilité risque-neutre se déduit de ce vecteur par :

$$L_t = \exp\left(-\int_0^t \langle \rho(s), dW_s \rangle - \frac{1}{2} \int_0^t \|\rho(s)\|^2 ds \right)$$

- La volatilité du taux forward instantané se déduit de celle du zéro-coupon par la relation :

$$\sigma(t,T) = \int_t^T \gamma(t,s) ds$$

- Sa tendance s'écrit :

$$\alpha(t,T) = \langle \frac{\partial \sigma(t,T)}{\partial T}, \rho(t) \rangle - \langle \frac{\partial \sigma(t,T)}{\partial T}, \sigma(t,T) \rangle$$

5.1.2 Le modèle de "Vasicek généralisé" à deux facteurs

Le modèle de taux que nous avons adopté se place dans le cadre précédent en adoptant pour la volatilité la forme suivante pour $i = 1, 2$:

$$\sigma_i(t,T) = \frac{\sigma_i}{\lambda_i}(1 - e^{-\lambda_i(T-t)})$$

soit de manière équivalente :

$$\gamma_i(t,T) = \sigma_i e^{-\lambda_i(T-t)}$$

Cette structure de volatilité confère au taux instantané un caractère markovien. En effet, on a :

$$\frac{\partial \gamma_i(t,T)}{\partial T} = -\lambda_i \gamma_i(t,T)$$

De l'équation (B.12) on déduit :

$$\int_0^t \langle \gamma(s,t), dW_s^{\mathbb{Q}} \rangle = r_t - f(0,t)_{obs} - \int_0^t \langle \gamma(s,t), \sigma(s,t) \rangle ds$$

Finalement, le taux court est solution de l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} dr(t) = \quad & \left[\frac{\partial f(0,t)}{\partial T} + \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i f(0,t) + \frac{\sigma_i^2}{2\lambda_i^2}(1 - e^{-2\lambda_i t}) - \lambda_i r(t) \right) \right] dt \\ & - \sum_{i=1}^{n} \sigma_i dW_i^{\mathbb{Q}}(t) \end{aligned}$$

On remarque que cette équation est du type "Ornstein-Uhlenbeck", étendue à des coefficients dépendant du temps. Ceci justifie l'appellation de "Vasicek généralisé" pour ce modèle.

La solution de cette équation s'écrit :

$$r_t = f(0,t)_{obs} + \sum_{i=1}^{2} \frac{\sigma_i^2}{2\lambda_i}(1 - e^{-\lambda_i t}) - \sum_{i=1}^{2} \int_0^t \gamma_i(s,t) dW_{i,s}^{\mathbb{Q}} \tag{5.3}$$

On introduit alors les deux facteurs de risque "synthétiques" $(F_i(t))$ pour $i = 1, 2$ associés à chacun des mouvements browniens :

$$F_i(t) = \int_0^t e^{-\lambda_i(t-s)} dW_i^{\mathbb{Q}}(s)$$

qui vérifient, sous la probabilité risque-neutre :

$$dF_i(t) = -\lambda_i F_i(t)dt + dW_i^{\mathbb{Q}}(t) \tag{5.4}$$

et sous la probabilité historique :

$$dF_i(t) = -\lambda_i F_i(t)dt + \rho_i(t)dt + dW_i(t) \tag{5.5}$$

L'équation (5.3) peut se réécrire :

$$r_t = f(0,t)_{obs} + \sum_{i=1}^{2} \frac{\sigma_i^2}{2\lambda_i}(1 - e^{-\lambda_i t}) - \sum_{i=1}^{2} \sigma_i F_i(t) \tag{5.6}$$

On obtient alors les formules suivantes pour :

- le prix du zéro-coupon d'échéance T à la date t, par application de la formule (B.9) :

$$\begin{aligned} B(t,T) = \quad & \frac{B(0,T)}{B(0,t)} \exp\left[\sum_{i=1}^{2} \frac{\sigma_i}{\lambda_i}\left(1 - e^{-\lambda_i(T-t)}\right) F_i(t) \right. \\ & - \sum_{i=1}^{2} \frac{\sigma_i^2}{4\lambda_i^3}\left(1 - e^{-\lambda_i(T-t)}\right) \\ & \left. \times \left(\left(1 - e^{-2\lambda_i t}\right)\left(1 - e^{-\lambda_i(T-t)}\right) + 2\left(1 - e^{-\lambda_i t}\right)^2\right)\right] \end{aligned}$$

- le taux zéro-coupon :

$$\begin{aligned} & R(t,T-t) = -\frac{1}{T-t}\ln(B(t,T) \\ & = F(0,t,T-t) - \frac{1}{T-t}\left[\sum_{i=1}^{2} \frac{\sigma_i}{\lambda_i}\left(1 - e^{-\lambda_i(T-t)}\right) F_i(t) \right. \\ & - \sum_{i=1}^{2} \frac{\sigma_i^2}{4\lambda_i^3}\left(1 - e^{-\lambda_i(T-t)}\right) \\ & \left. \times \left(\left(1 - e^{-2\lambda_i t}\right)\left(1 - e^{-\lambda_i(T-t)}\right) + 2\left(1 - e^{-\lambda_i t}\right)^2\right)\right] \end{aligned}$$

5.2 Les actions

On considère le marché précédent, sous sa forme générale avec n sources d'incertitude, dans lequel on insère des actions. On suppose respectée l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage sur le marché ainsi constitué.

5.2.1 Partie continue de la dynamique

Cas de sources d'incertitude indépendantes

La partie "actions" est représentée par un actif synthétique dont la dynamique est dans un premier temps décrite, sous la probabilité historique, par l'équation suivante :

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu_a(t)dt + \sigma_a(t)dW_a(t) \tag{5.7}$$

où $(W_a(t))$ un mouvement brownien standard sous la probabilité historique, indépendant de $(W_1(t), ..., W_n(t))$.

Nous montrons alors la propriété importante suivante : l'indépendance du $(n+1)^{eme}$ mouvement brownien autorise n'importe quelle forme pour $\mu_a(t)$ et $\sigma_a(t)$, sans contradiction avec l'absence d'opportunité d'arbitrage.

Considérons en effet le marché constitué de l'ensemble des zéros-coupons et des actions dans lequel on adopte le formalisme de la première partie. On peut alors écrire :

$$\begin{cases} \dfrac{dB(t,T)}{B(t,T)} = \mu(t,T)dt + \langle \sigma(t,T), dW_t \rangle \\ \\ B(0,T) = B(0,T)_{obs} \end{cases} \tag{5.8}$$

pour tout T appartenant à un ensemble *ad hoc* $\mathbb{R}^+ \bigcup \{a\}$, où, par convention :

$$B(t,a) = S(t)$$

et où $W_t = (W_1(t), W_2(t), ..., W_n(t), W_a(t))$ est un mouvement brownien de dimension $n+1$ dont les composantes sont indépendantes. Ce marché est exactement celui dans lequel nous nous sommes placé pourvu que les volatilités aient la forme suivante :

$$\sigma(t,T) = (\sigma_1(t,T), \sigma_2(t,T), ..., \sigma_n(t,T), 0) \text{ si } T \in \mathbb{R}^+ \tag{5.9}$$

$$\sigma(t,a) = (0, 0..., 0, \sigma_a(t)) \text{ si } T = a; \tag{5.10}$$

et que l'on ait $\mu(t,a) = \mu_a(t)$.

Un raisonnement analogue à celui effectué dans le paragraphe (5.1.1) nous permet d'obtenir, comme dans l'équation (B.7), un vecteur $\tilde{\rho}(t) = (\rho_1(t), ..., \rho_n(t), \rho_{n+1}(t))$ vérifiant $\forall T \in \mathbb{R}^+\{a\}$:

$$\langle \tilde{\rho}(t), \sigma(t,T) \rangle = \mu(t,T) - r_t \tag{5.11}$$

De plus, on sait alors que sous la probabilité $\tilde{\mathbb{Q}}$ dont la densité est donnée par :

$$\left.\frac{d\tilde{\mathbb{Q}}}{d\tilde{\mathbb{P}}}\right)_{\tilde{\mathcal{F}}_t} = \tilde{L}_t = \exp\left(-\int_0^t \langle\tilde{\rho}(s), dW_s\rangle - \frac{1}{2}\int_0^t \|\tilde{\rho}(s)\|^2 ds\right) \tag{5.12}$$

le prix des actions et celui des zéro-coupons sont des martingales.

Dans le cas où les mouvements browniens sont indépendants, la forme des volatilités donnée par les équations (5.9) et (5.10) implique que l'équation (5.11) est alors "séparable" et devient :

$$\begin{cases} \langle\rho(t), \sigma(t,T)\rangle = \mu(t,T) - r_t, \forall T \in \mathbb{R}^+ \\ \rho_{n+1}(t)\sigma(t,a) = \mu(t,a) - r_t \end{cases}$$

La séparabilité de (5.11) signifie donc que l'absence d'opportunité d'arbitrage sur le marché global ne génère pas de contrainte reliant les coefficients de la dynamique des actions à ceux des obligations. Les deux marchés sont en quelque sorte isolés l'un de l'autre. Il est donc légitime, car non contradictoire avec l'absence d'opportunité d'arbitrage de supposer, par exemple que la prime de risque liée à la détention d'actions est constante dans le temps. La dynamique des actions devient alors :

$$\mu_a(t) = r_t + \rho_a(t)\sigma_a(t) \tag{5.13}$$

Dans la pratique, cette prime est estimée à partir d'études macroéconomiques réalisées au sein de la compagnie d'assurances. Si de plus on pose$\sigma_a(t) = \sigma_a$ =constante, alors l'écart entre la tendance des actions et le taux instantané est constant par le seul fait que ρ_a l'est.

La situation est très différente lorsque les sources d'incertitudes ne sont plus indépendantes.

Corrélation entre les mouvements browniens

Lorsque les mouvements browniens $W_1(t), W_2(t), ..., W_n(t), W_a(t)$ sont corrélés, le raisonnement qui vient d'être tenu n'est plus valable. L'introduction d'actions dont la dynamique ne viole pas l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage suppose alors que la volatilité et la tendance des actions soient reliées à celles des zéros-coupons.

L'incorporation de corrélations entre les deux mouvements browniens est réalisée au moyen d'une décomposition de Cholevsky de la matrice de variance-covariance qu'on souhaite obtenir. On cherche pour cela une matrice R triangulaire inférieure vérifiant :

$$R.R^t = \Omega$$

où Ω est la matrice de variance-covariance des mouvements browniens. La méthode de calcul d'une telle décomposition est explicitée à l'annexe B.2. L'équation (5.8) peut alors se réécrire :

$$\begin{aligned}\frac{dB(t,T)}{B(t,T)} &= \mu(t,T)dt + \langle \sigma(t,T), dW_t \rangle \\ &= \mu(t,T)dt + \langle \sigma(t,T), R^t d\tilde{W}_t \rangle \\ &= \mu(t,T)dt + \langle R.\sigma(t,T), d\tilde{W}_t \rangle \\ &= \mu(t,T)dt + \langle \tilde{\sigma}(t,T), d\tilde{W}_t \rangle\end{aligned}$$

où $\tilde{W}_t$ est un mouvement brownien de dimension $n+1$ dont les composantes sont indépendantes. On est donc ramené au cas de sources de risque indépendantes, mais les volatilités n'ont plus la forme (5.9) et (5.10). L'équation (5.11) n'est alors plus "séparable" au sens précédent et exprime la liaison qui existe entre volatilité et tendance des actions et des zéro-coupons.

En particulier, si l'on suppose que $\sigma_a(t)$ est constante, et que l'on souhaite avoir un écart constant entre tendance des actions et taux instantané, il est nécessaire [1] de supposer que **tout le vecteur** des primes de risque est constant.

En résumé, la non-indépendance des mouvements browniens implique que la prime de risque des actions est liée à celle des obligations. En particulier si l'une est constante, l'autre doit l'être.

5.2.2 Introduction de chocs

Les équations précédentes décrivent la "partie continue" de la dynamique des actions. Cependant, on souhaite également prendre en compte des mouvements violents du marché, qui se produisent principalement à la baisse (krach) et induisent des discontinuités dans la trajectoire du prix des actions. Ceci est réalisé grâce à l'introduction de chocs dans la dynamique précédente.

Processus de Poisson

L'occurence des chocs est modélisée au moyen d'un processus de Poisson, qui compte le nombre de sauts survenant entre 0 et t. Nous rappelons les caractéristiques principales d'un tel processus.

Soient $(T_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et équidistribuées, qui suivent une loi exponentielle de paramètre λ. Les T_i représentent les durées séparant deux sauts.

On pose alors :

$$N_t = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_{\{\tau_n \leq t\}} \tag{5.14}$$

[1] En toute rigueur, cela est seulement suffisant...

avec $\tau_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$ et $\mathbb{I}_A$ est la fonction indicatrice de l'événement A .

N_t est alors un processus ponctuel sur $\mathbb{R}^+$, continu à droite, appelé **processus de Poisson d'intensité** λ qui vérifie :

- $\forall (t_1, t_2, ..., t_n)$ tels que $t_1 < t_2 < ... < t_n$, les variables $N_{t_1}, N_{t_2} - N_{t_1}, ..., N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$ sont indépendantes ;
- $\forall t > s$, $N_t - N_s \sim \mathcal{P}(\lambda(t-s))$.

où $\mathcal{P}(\mu)$ désigne la loi de Poisson de paramètre μ, dont la loi est donnée par $P(N=n) = e^{-\mu}\frac{\mu^n}{n!}$

Un tel processus peut, de façon équivalente, être décrit par son comportement infinitésimal :

- $P(dN_t = 0) = 1 - \lambda dt + o(dt)$
- $P(dN_t = 1) = \lambda dt + o(dt)$
- $P(dN_t \geq 2) = o(dt)$

Processus sauts-diffusion

On se donne un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, sur lequel sont définis $n+1$ mouvements browniens (W_t^i), un processus de Poisson (N_t) associé aux durées $(T_i)_{i=1,2,...}$ ainsi qu'une famille $(U_j)_{j=1,2,...}$ de variables aléatoires à valeur dans $]-1; +\infty[$. On note $(\mathcal{F}_t^W)_{t\in\mathbb{R}^+}$ la filtration naturelle associée aux $n+1$ mouvements browniens, $(\mathcal{F}_t^N)_{t\in\mathbb{R}^+}$ la filtration naturelle associée au processus de Poisson.

On définit, toujours en posant $\tau_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$, le processus I_t par :

$$I_t = \sum_{j=1}^{\infty} U_j \mathbb{I}_{\{\tau_{n-1} < t \leq \tau_n\}} \tag{5.15}$$

Ce processus continu à gauche s'interprète comme l'amplitude du premier saut se produisant après t. Cette interprétation permet d'expliquer le caractère **non adapté** du processus I_t relativement à la filtration naturelle du processus de prix, que nous introduirons plus bas.

Ce cadre permet d'enrichir la dynamique des actions. On pose sous la probabilité historique :

$$\frac{dS(t)}{St-} = \mu_a(t)dt + \sigma_a(t)dW_a(t) + I_t dN_t \tag{5.16}$$

L'écriture précédente signifie, par définition, que le processus $(S_t)_{t\in(R)^+}$ est continu à droite et vérifie, pour tout $\omega \in \Omega$:

$$S_t(\omega) = S_0(\omega) + \int_0^t \left(S_s(\mu_a(s)ds + \sigma_a(s)dW_a(s)\right)(\omega) + \sum_{j=1}^{N_t(\omega)} S_{\tau_j^-}(\omega)U_j(\omega)$$

Il faut remarquer que la définition précédente a un sens car les $(U_j)_{j=1,...,N_t}$ se déduisent de $(I_s)_{s\in[0,t]}$.

On peut alors faire application d'une formule d'Itô généralisée, qui donne :

$$S_t = s_0 \left(\prod_{j=1}^{N_t} (1+U_j) \right) \exp \left(\int_0^t (\mu_a(s) - \frac{\sigma_a(s)^2}{2}) ds + \sigma_a(s) dW_s \right) \tag{5.17}$$

On constate donc que la filtration naturelle de (S_t), qu'on note $(\mathcal{G}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ doit au moins contenir [2] les filtrations $(\mathcal{F}_t^W)_{t\in\mathbb{R}^+}$ et $(\mathcal{F}_t^N)_{t\in\mathbb{R}^+}$. Mais de plus, l'ampleur des sauts ayant **précédé** l'instant t (mais non, nous l'avons dit plus haut, celle du premier saut qui le suit) doivent être $\mathcal{G}_t$-mesurables. On est donc naturellement conduit à poser :

$$\mathcal{G}_t = \sigma\left((\mathcal{F}_s^W)_{s\in[0,t]}, (\mathcal{F}_s^N)_{t\in[0,t]}, (\mathcal{F}_s^S)_{t\in[0,t]} \right)$$

où $(\mathcal{F}_s^S)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est la filtration naturelle du processus $(U_j \mathbb{I}_{\{j\leq N_t\}})$.

dynamique saut-diffusion sous probabilité risque-neutre

Si l'on suppose que les actions qui suivent cette nouvelle dynamique ne contrarient pas l'absence d'opportunité d'arbitrage, il existe une probabilité risque-neutre, notée $\tilde{\tilde{\mathbb{Q}}}$, sous laquelle le prix actualisé des actions et celui des zéro-coupons sont des martingales [3]

On peut alors montrer que, sous cette probabilité risque-neutre, que nous notons de nouveau $\mathbb{Q}$, la dynamique des actions s'écrit :

$$\frac{dS(t)}{St-} = r_t dt + \sigma_a(t) dW_a^{\mathbb{Q}}(t) + I_t dN_t - \lambda k_t dt \tag{5.18}$$

où $k_t = \mathbb{E}(I_t)$.

Simulation d'un processus saut-diffusion

L'écriture infinitésimale de la dynamique (5.16) donne :

$$\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t} = \exp\left((\mu_a(t) - \frac{\sigma_a(t)^2}{2})\Delta t + \sigma_a(t)\sqrt{\Delta t} g \right) \prod_{j/t<\tau_j\leq t+\Delta t} (1+U_j)$$

où g est une variable aléatoire normale centrée réduite, indépendante de $\mathcal{G}_t$.

La procédure de simulation est donc la suivante :

- On simule la variable centrée réduite g ;

[2] L'inclusion s'entend à chaque date

[3] Il faut remarquer que cette probabilité ne peut être $\tilde{\mathbb{Q}}$, la probabilité risque-neutre du paragraphe précédent pour la raison que celle-ci n'est pas $\mathcal{G}_t$-mesurable, mais seulement $\tilde{\mathcal{F}}_t$-mesurable. Mais de plus, même la restriction de $\tilde{\tilde{\mathbb{Q}}}$ à la tribu $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ ne coïncide pas avec $\tilde{\mathbb{Q}}$, en raison de la présence d'une tendance induite par l'ajout des sauts.

- On simule N selon une loi de Poisson de paramètre $\lambda \Delta t$ de façon indépendante de g ;
- Selon la valeur de N, on simule N variables aléatoires (U_j) indépendantes dans $]-1; +\infty[$ et on applique la formule précédente. Dans notre modèle, ces variables suivent une loi log-normale, soit $ln(1+U) \sim \mathcal{N}(\gamma - \frac{1}{2}\delta^2, \delta^2)$.

Chapitre 6

Résultats obtenus

Nous avons implémenté sous C++ le modèle qui vient d'être décrit. Chacun des résultats qui suit a été obtenu en simulant 10 000 évolutions aléatoires des conditions de marché. Nous calculons la valeur de l'entreprise à la date 0 et étudions sa sensibilité aux paramètres de l'actif, au taux de participation bénéficiaire et aux paramètres des fonctions de rachat et de souscription.

On précise dans un premier temps le cadre général de cette simulation et les paramètres qui ont été retenus (6.1). On étudie ensuite la situation dans laquelle l'assureur n'est pas soumis au risque de rachat. Enfin, on introduit ce risque, associé au risque de souscription (6.3).

6.1 Le cadre et les paramètres des simulations

On observe cent années d'existence de notre modèle d'entreprise. Son démarrage, au début de la première année, s'effectue avec un bilan dont tous les postes sont vides.

6.1.1 Paramètres du modèle d'actif

Les paramètres du modèle de taux sont tirés de (Priaulet-Martellini, 2000, [9]). Ils sont les suivants :
- $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,01$
- $\lambda_1 = 0,02$
- $\lambda_2 = 0,9$

Ces valeurs sont telles que les deux facteurs de risque du modèle peuvent être approximativement assimilés aux deux premiers facteurs qui ressortent classiquement d'une analyse en composantes principales de la courbe des taux.

Les autres paramètres du modèle d'actif nous ont été fournis par AXA-IM.

Ils sont les suivants :
- Prime de risque nulle sur les obligations ;
- Prime de risque des actions=3% ;
- Volatilité des actions=14% ;
- λ, intensité du processus de Poisson$= 0,1$;
- $\gamma = -10,5\%$;
- $\delta = 5,6\%$.

6.1.2 Paramètres relatifs à l'entreprise et aux assurés

Les paramètres relatifs au comportement des assurés seront rappelés à chaque section.

Par ailleurs, nous utilisons la règle de dotation à la PPE qui a été exposée au chapitre 3, avec $\Delta = 1\%$.

Les grandeurs que nous ferons varier sont, pour des comportements de rachat et de souscription donnés :
- les paramètres de l'allocation stratégique de l'actif ;
- la volatilité des actions ;
- le taux de participation bénéficiaire.

Le seuil de réalisation des plus-values sera pris égal à $\beta = 10\%$.

6.2 Valeur de l'entreprise en l'absence de risque de rachat

On suppose que tous les rachats se produisent au terme fiscal du contrat, soit huit ans. Les souscriptions nouvelles sont supposées représentées par un flux déterministe et constant (100 au début de chaque exercice).

On observe les résultats suivants :

δ	85%	90%	95%	100%
$\sigma = 16\%$	6872	3771	529	-2898
$\sigma = 14\%$	8121	4960	1582	-1916

TAB. 6.1 – Valeur de l'entreprise en 0, avec 85% d'obligations et pas de risque de rachat

On vérifie que pour un niveau de volatilité des actions donné, la valeur en 0 de l'entreprise décroît avec le taux de dotation à la participation bénéficiaire. On observe aussi l'impact de l'absence de couverture des risques par l'assureur. En effet, la valeur de l'entreprise devient négative à partir d'un certain taux de distribution de Participation bénéficiaire δ_0 tel que $\delta_0 \in [95\%, 100\%]$. D'autre part, la valeur de l'entreprise est, toutes choses égales par ailleurs, une fonction décroissante de la volatilité des actions.

6.3 Valeur de l'entreprise en présence de risques de rachat et de souscription

Comme nous l'avons montré au chapitre 4, la faculté dont jouissent les assurés de demander le rachat de leur contrat fait peser un risque sur le bilan de l'assureur. Il en est de même des souscriptions aléatoires.

6.3.1 Risque de rachat

On introduit dans ce sous-paragraphe la fonction de rachat exposée dans le chapitre 4. La comparaison par les assurés du taux qui leur a été servi au cours de l'exercice précédent induit le cas échéant une accélération des rachats par rapport à une cadence déterministe notée U, soit :

$$p_{i,t} = a.(R(t,1) - \theta.TRC_{t-1})^{+} + U(t-i) \tag{6.1}$$

Absence de rachat avant la huitième année

On considère un premier cas dans lequel il n'y a pas de rachats avant 8 ans.

On prend ainsi pour partie déteministe de la fonction de rachat (fonction U ci-dessus) :

- 0 avant la huitième année,
- $x\%$ à partir de la huitième année.

Par ailleurs, les autres paramètres de la fonction de rachat sont : $a = 0$ avant 8 ans, $a = 1,5$ après 8 ans et $\theta = 1$.

Les résultats sont rassemblés dans le tableau suivant :

	$x = 10\%$				$x = 50\%$			
δ	85%	90%	95%	100%	85%	90%	95%	100%
$\sigma = 16\%$	12163	6850	876	-5625	8072	4427	541	-3545
$\sigma = 14\%$	14407	8847	2889	-3714	9433	5755	1839	-2365

TAB. 6.2 – 85% d'obligations, pas de risque de rachat avant huit ans

On peut comparer ces résultats à ceux obtenus dans la section précédente. Toutes choses égales par ailleurs, on observe, pour une valeur fixée de x, une dilatation de la valeur de l'entreprise en fonction de δ. Autrement dit, lorsque la valeur de l'entreprise était positive (resp. négative) lorsqu'il n'y avait pas de risque de rachat, elle l'est davantage (resp. davantage négative) lorsque sont introduits des rachats aléatoires au-delà de la huitième année. En effet, les rachats, outre leur aspect aléatoire, sont plus étalés dans le temps que lorsque les rachats se concentraient la huitième année. Ainsi, l'assureur bénéficie de l'effet de "taille du bilan" qui lui est favorable.

Si on modifie maintenant les paramètres de l'allocation stratégique, en considérant un actif composé à 80% d'obligations, on obtient, pour une cadence de rachats donnée (x=50%) :

δ	85%	90%	95%	100%
$\sigma = 16\%$	4339	683	-3170	-7212
$\sigma = 14\%$	6341	2624	-1273	-5309

TAB. 6.3 – 80% d'obligations, pas de risque de rachat avant 8 ans, x=50%

On vérifie que la valeur de l'entreprise dépend négativement de la part d'actifs risqués dans le portefeuille. En outre, l'examen de ces résultats montre que le risque de rachat est très sensible aux paramètres de l'allocation stratégique d'actifs.

Rachats possibles avant la huitième année

Etudions à présent le cas où des rachats sont possibles avant le terme de la huitième année. On suppose que la partie déterministe de la cadence de rachat prend quatre valeurs :
- 0 la première année ;
- 2% entre 1 et 7 ans ;
- 50% à la huitième année ;
- 10% après la huitième année.

Quant aux valeurs des paramètres de la partie dépendant des taux, elles sont fixées de la façon suivante :
- $a = 1,5$;
- $\theta = 1$.

Les résultats sont les suivants :

δ	85%	90%	95%	100%
$\sigma = 16\%$	11485	6373	833	-5362
$\sigma = 14\%$	13545	8439	2742	-3520

TAB. 6.4 – 85% d'obligations, risque de rachat avant la huitième année

Examinons maintenant l'impact des paramètres$a$ et θ sur les résultats obtenus précédemment en fonction de différentes allocations stratégiques d'actif et deδ.

Les résultats sont rassemblés dans le tableau suivant :

a	1	1,5	2	3
$\theta = 0,8$	-5220	-5146	-5023	-4881
$\theta = 1$	-5287	-5258	-5180	-5093
$\theta = 1,5$	-5481	-5442	-5404	-5349
$\theta = 2$	-5576	-5593	-5745	-5599

TAB. 6.5 – 80% d'obligations, $\delta = 100\%$

a	1	1,5	2	3
$\theta = 0,8$	-2642	-2526	-2443	-2284
$\theta = 1$	-2773	-2689	-2638	-2554
$\theta = 1,5$	-2961	-2941	-2889	-2866
$\theta = 2$	-3092	-3070	-3037	-3026

TAB. 6.6 – 85% d'obligations, $\delta = 100\%$

L'examen de ces trois tableaux montre qu'on retrouve l'effet de taille remarqué plus haut, en l'absence de couverture de l'assureur. En effet, la cadence des rachats est une fonction décroissante de la latence et croissante du paramètre a. Lorsque l'activité de l'entreprise est profitable, lorsque la latence augmente et le paramètre a diminue, la valeur de l'entreprise augmente. L'effet est inverse lorsque l'entreprise ne peut pas profiter des produits financiers dégagés par l'actif (c'est-à-dire lorsque $\delta = 100\%$).

6.3.2 Risque de souscription

Introduisons maintenant la fonction de souscription explicitée au chapitre 4 :

$$N_{t,t} = \chi(TRC_{t-1} - \tilde{\theta}.R(t, 8-t))^{+} + \psi$$

dans laquelle on formule l'hypothèse

$$\tilde{\theta} = \theta$$

Sous cette hypothèse, la latence associée à la comparaison des rendements n'est pas différente au sein des assurés et dans le reste de la population. On pourrait tout autant supposer, moins restrictivement et sans doute de façon plus plausible, que $\theta \leq \tilde{\theta}$, c'est-à-dire que les assurés observent les taux de marché et le rendement du contrat avec plus d'attention que le reste de la population. Cependant, la parcimonie du modèle s'en trouverait affectée.

Enfin dans ce qui suit, on supposera pour la fonction de rachat : $a = 1,5$ et U définie de la façon suivante :

- 0 la première année ;
- 2% entre 1 et 7 ans ;

a	1	1,5	2	3
$\theta = 0,8$	6438	6052	5743	5111
$\theta = 1$	6703	6494	6277	5780
$\theta = 1,5$	6924	7076	7110	7024
$\theta = 2$	7096	7107	7141	7200

TAB. 6.7 – 85% d'obligations, $\delta = 90\%$

– 50% à la huitième année ;
– 10% après la huitième année.

Pour ce qui concerne la fonction de souscription, on prend $\chi = 100$.

On fait varier le paramètre ψ de la fonction de souscription et le paramètre de latence commun des fonctions de souscription et de rachat.

$\psi = 100$ et $\chi = 1000$.

ψ	800	1000	1500	2000	3000
$\theta = 0,8$	6884	6988	7204	7239	7289
$\theta = 1$	6987	7102	7270	7571	7651
$\theta = 1,5$	7130	7134	7208	7469	7582
$\theta = 2$	7125	6997	7095	7161	7234

TAB. 6.8 – 85% d'obligations, $\delta = 90\%$

ψ	800	1000	1500	2000	3000
$\theta = 0,8$	-2884	-2855	-3045	-3112	-3150
$\theta = 1$	-2879	-2891	-3092	-3148	-3382
$\theta = 1,5$	-2886	-2959	-3085	-3102	-3161
$\theta = 2$	-2889	-3044	-3055	-3097	-3073

TAB. 6.9 – 85% d'obligations, $\delta = 100\%$

On constate que la valeur de l'entreprise ne dépend pas nécessairement de θ de façon monotone. En effet, un paramètre de latence élevé entraîne une moindre réactivité des assurés, tant dans leur comportement de souscription qu'au moment du rachat. Il s'ensuit un effet globalement ambigu. Pour $\delta = 90\%$, l'effet global semble davantage profiter à l'assureur pour des valeurs de θ proches de 1.

Conclusion

Les résultats que nous avons obtenus mettent en évidence le rôle joué par les contraintes réglementaires dans la forme des options implicites attachées aux contrats d'assurance-vie en euros.

Analyse des risques et couverture

Les risques relatifs au taux minimal de revalorisation du contrat d'une part, et aux comportements de rachat et de souscription d'autre part, **peuvent être étudiés et couverts séparément**. Ils sont le résultat de la vente par l'assureur d'options implicites. Celles-ci peuvent être construites à partir d'une représentation ficitive du contrat sous la forme de transactions nouées à chaque date entière. La couverture par l'assureur des risques auxquels il est exposé repose sur la réplication de la xomme globale des options et titres échangés avec l'assuré. Dans les cas complexes, les options et titres échangés sont sur-répliqués.

Impact des fonds propres

Le modèle qui précède peut être complété par l'introduction des fonds propres de l'assureur et des contraintes liées au respect de la marge de solvabilité. Néanmoins, cette modification ne remet pas en cause le principe des résultats obtenus. Le dividende effectivement reçu par l'assuré s'obtient en ajoutant à cette quantité un résultat non technique dont les variations sont le résultat de risques librement consentis par l'assureur. En effet, la quantité dénommée "dividende" dans notre mémoire est alors assimilable au résultat technique de l'exercice et peut se voir appliquer les analyses qui précèdent.

Annexe A

Annexes relatives au cadre monogénérationnel

A.1 Valeur de l'entreprise dans le cas d'une revalorisation annuelle de la provision mathématique

On rappelle que :

- si l'actif est réajusté annuellement, de manière à réaliser à chaque date entière l'égalité entre la valeur de l'actif et la valeur du passif, on a :

$$V_t^{actionnaire} = \left(\sum_{s=1}^{8} e^{-r(8-s)} div_s \right)$$

- si l'actif est réajusté au passif à la fin du contrat, on a :

$$\hat{V}_t^{actionnaire} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left((n_0 - n_8) e^{-r(8-t)} S_8 \right).$$

On montre ici que la valeur en 0 de l'entreprise est la même dans chacun des deux cas. En effet, en appliquant l'équation (2.19) écrite à la page 25 et en notant $\mathbb{Q}$ la probabilité risque-neutre du modèle d'actif, on obtient :

$$
\begin{aligned}
V_0^{actionnaire} &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left((n_0-n_8)e^{-r(8-t)}S_8\right)\\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\sum_{s=1}^{8}(n_{s-1}-n_s)e^{-r(8-t)}S_8\right)\\
&= \sum_{s=1}^{8}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left((n_{s-1}-n_s)e^{-r(8-t)}S_8\right)\\
&= \sum_{s=1}^{8}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}((n_{s-1}-n_s)e^{-r(8-t)}S_8|\mathcal{F}_s)\right)\\
&= \sum_{s=1}^{8}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(e^{-r(s-t)}(n_{s-1}-n_s)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(e^{-r(8-s)}S_8|\mathcal{F}_s)\right)\\
&= \sum_{s=1}^{8}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(e^{-r(8-s)}(n_{s-1}-n_s)S_s\right)\\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\sum_{s=1}^{8}e^{-r(8-s)}div_s\right)
\end{aligned}
$$

qui est bien le prix de la séquence de flux reçus par l'actionnaire dans le premier cadre[1] (équation 2.15écrite à la page 24).

L'utilisation du deuxième point de vue permet alors d'obtenir une formule fermée pour la valeur du contrat pour l'entreprise, sous réserve que la dynamique de l'actif soit markovienne :

$$
\begin{aligned}
V_t^{\widehat{actionnaire}} &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-r(8-t)}V_8^{actionnaire}|\mathcal{F}_t]\\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(e^{-r(8-t)}V_8^{actionnaire}|\mathcal{F}_7\right)|\mathcal{F}_t\right]\\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-(7-t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}e^{-r}\left((n_0-n_8)S_8|\mathcal{F}_7\right)|\mathcal{F}_t\right]\\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-(7-t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}e^{-r}\left((n_7-n_8)S_8+(n_0-n_7)S_8|\mathcal{F}_7\right)|\mathcal{F}_t\right]
\end{aligned}
$$

Or, on a, par définition de la probabilité risque neutre :

$$
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(e^{-r}S_8|\mathcal{F}_7\right) = S_7 \tag{A.1}
$$

et $n_0 - n_7$ est $\mathcal{F}_7$-mesurable. On en déduit donc :

$$
V_t^{\widehat{actionnaire}} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-(7-t)}(n_0-n_7)S_7 + e^{-(7-t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}e^{-r}\left((n_7-n_8)S_8|\mathcal{F}_7\right)|\mathcal{F}_t\right]
$$

[1] La différence entre les formules obtenues dans chacun des points de vue consiste donc en :
- une transformation, à chaque date, de l'éventuelle position courte sur les actions en un emprunt au taux sans risque ;
- une compensation intertemporelle entre flux positifs et négatifs.

Il faut remarquer que l'égalité entre les prix n'est plus vraie à une autre date que 0.

Par ailleurs, en utilisant l'équation (2.14) écrite page 24, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} e^{-r}\left((n_7 - n_8) S_8 | \mathcal{F}_7\right) \\
= \; & \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} e^{-r}\left(n_7 (S_8 - S_7(1+R_{techn}) - \delta (S_8 - S_7(1+R_{techn}))^+ | \mathcal{F}_7\right)
\end{aligned}$$

L'hypothèse d'une dynamique sans mémoire implique que la valeur du call européen ne dépend pas de la trajectoire du sous-jacent avant la date 7. On peut donc réécrire, en utilisant l'homogénéité du prix de l'option :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} e^{-r}\left((n_7 - n_8) S_8 | \mathcal{F}_7\right) \\
= \; & n_7 S_7 (1 - e^{-r}(1+R_{techn})) - n_7 \delta Call_E(S_7, S_7(1+R_{techn}), 1) \\
= \; & n_7 S_7 \left(1 - e^{-r}(1+R_{techn}) - \delta Call_E(1, 1+R_{techn}, 1)\right)
\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\widehat{V_t^{actionnaire}} = \; & \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\Big[e^{-(7-t)}(n_7 - n_0) S_7 \\
& + e^{-(7-t)} n_7 S_7 (1 - e^{-r}(1+R_{techn}) - \delta Call_E(1, 1+R_{techn}, 1)) | \mathcal{F}_t\Big]
\end{aligned}$$

Nous utilisons à nouveau l'équation (2.14) écrite à la page 24, qui nous donne :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(e^{-r} n_t S_t | \mathcal{F}_{t-1}) = n_{t-1} S_{t-1} (e^{-r}(1+R_{techn}) + \delta Call_E(1, 1+R_{techn}, 1)) \quad \text{(A.2)}$$

En conditionnant maintenant par $\mathcal{F}_6$, on obtient donc :

$$\begin{aligned}
\widehat{V_t^{actionnaire}} = \; & \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\Big[e^{-(6-t)}(n_6 - n_0) S_6 \\
& + e^{-(6-t)} n_6 S_6 (1 - e^{-r}(1+R_{techn}) - \delta Call_E(1, 1+R_{techn}, 1)) \\
& + e^{-(6-t)} n_6 S_6 (e^{-r}(1+R_{techn}) + \delta Call_E(1, 1+R_{techn}, 1)) \\
& \times (1 - e^{-r}(1+R_{techn}) - \delta Call_E(1, 1+R_{techn}, 1)) | \mathcal{F}_t\Big]
\end{aligned}$$

En conditionnant successivement par toutes les dates, on obtient finalement :

$$\begin{aligned}
\widehat{V_t^{actionnaire}} = \; & (n_t - n_0) S_t + n_t S_t (1 - e^{-r}(1+R_{techn}) - \delta Call_E(1, 1+R_{techn}, 1)) \\
& \times \sum_{s=t+1}^{8} \left(e^{-r}(1+R_{techn}) + \delta Call_E(1, 1+R_{techn}, 1)\right)^{8-s} \\
= \; & n_0 S_0 \left(1 - \left(e^{-r}(1+R_{techn}) + \delta Call_E(1, 1+R_{techn}, 1)\right)^{8-t}\right) \\
= \; & \tilde{P} \left(1 - \left(e^{-r}(1+R_{techn}) + \delta Call_E(1, 1+R_{techn}, 1)\right)^{8-t}\right)
\end{aligned}$$

En particulier :

$$\boxed{V_0^{actionnaire} = \widehat{V_0^{actionnaire}} = \tilde{P} \left(1 - \left(e^{-r}(1+R_{techn}) + \delta Call_E(1, 1+R_{techn}, 1)\right)^{8}\right)} \quad \text{(A.3)}$$

A.2 Valeur du contrat dans le cas d'une revalorisation annuelle de la provision mathématique

Si on fait l'hypothèse que la dynamique de l'actif est markovienne, on peut obtenir la valeur à toute date du contrat, dont nous rappelons qu'elle est indépendante du cadre adopté. On a :

$$\begin{aligned} V_t^{assuré} &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-r(8-t)}V_8^{assuré}|\mathcal{F}_t] \\ V_t^{assuré} &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-r(8-t)}PM_8|\mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(e^{-r(8-t)}PM_8|\mathcal{F}_7\right)|\mathcal{F}_t\right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-(7-t)}PM_7\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}e^{-r}\left(1+R_{techn}+\delta(rend_7-R_{techn})^+|\mathcal{F}_7\right)|\mathcal{F}_t\right] \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r}\left(1+R_{techn}+\delta(rend_7-R_{techn})^+|\mathcal{F}_7\right)\right] \\ = \; & e^{-r}(1+R_{techn})+\frac{\delta}{S_7}Call_E(S_7,S_7(1+R_{techn}),1) \\ = \; & e^{-r}(1+R_{techn})+\delta Call_E(1,1+R_{techn},1) \end{aligned}$$

d'où :

$$V_t^{assuré} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-(7-t)}PM_7\left(e^{-r}(1+R_{techn})+\delta Call_E(1,1+R_{techn},1)\right)|\mathcal{F}_t\right]$$

En conditionnant successivement par toutes les dates comprises entre t et 8, on obtient donc finalement :

$$V_t^{assuré} = PM_t\left(e^{-r}(1+R_{techn})+\delta Call_E(1,1+R_{techn},1)\right)^{8-t}$$

En particulier :

$$\boxed{V_0^{assuré} = \tilde{P}\left(e^{-r}(1+R_{techn})+\delta Call_E(1,1+R_{techn},1)\right)^{8}}$$

A.3 Rebalancement de l'actif dans un cadre monogénérationnel, avec comptabilisation au coût historique des placements

Le montant, noté $cash_t$, des liquidités à réinvestir à la date t^+ s'écrit comme la somme des coupons et du produit de la vente des actions, à laquelle on retranche le dividende versé. Ce montant, qui est positif ou nul par construction, s'écrit donc :

$$cash_t = \sum_{i=0}^{\widehat{i_t}-1} n_{i,t-1}^{actions} S_t + n_{t-1}^{obligations} r^* - div_t \tag{A.4}$$

Ce montant est alors consacré à l'achat d'obligations et d'actions de manière à approcher autant que possible l'allocation stratégique de l'actif. Trois cas sont alors possibles :

– soit $cash_t + \sum_{i=\widehat{i_t}}^{t-1} n_{i,t-1}^{actions} S_t < a \times \left(cash_t + n_{t-1}^{obligations} + \sum_{i=\widehat{i_t}}^{t-1} n_{i,t-1}^{actions} S_t \right)$
Cette condition signifie que les liquidités sont insuffisantes pour rééquilibrer la part des actions dans l'actif. Elles sont alors en totalité investies en actions, soit :

$$n_{i,t}^{actions} = 0 \text{ pour } i \leq \widehat{i_t} - 1$$
$$n_{i,t}^{actions} = n_{i,t-1}^{actions} \text{ pour } \widehat{i_t} \leq i \leq t-1$$
$$n_{t,t}^{actions} = \tfrac{cash_t}{S_t}$$
$$n_t^{obligations} = n_{t-1}^{obligations}$$

– soit $cash_t + n_{t-1}^{obligations} < (1-a) \times \left(cash_t + n_{t-1}^{obligations} + \sum_{i=\widehat{i_t}}^{t-1} n_{i,t-1}^{actions} S_t \right)$
Ce cas est le cas symétrique du précédent, dans lequel les liquidités sont insuffisantes à rééquilibrer la part des obligations dans l'actif. Elles sont alors totalement investies en obligations :

$$\begin{aligned}
n_{i,t}^{actions} &= 0 \text{ pour } i \leq \widehat{i_t} - 1 \\
n_{i,t}^{actions} &= n_{i,t-1}^{actions} \text{ pour } \widehat{i_t} \leq i \leq t-1 \\
n_{t,t}^{actions} &= 0 \\
n_t^{obligations} &= n_{t-1}^{obligations} + cash_t
\end{aligned}$$

– soit, enfin, on se trouve dans une situation intermédiaire, qui permet de rééquilibrer la composition de l'actif.
On achète alors la quantité d'actions et d'obligations exactement nécessaire à ce rééquilibrage, soit :

$$\begin{aligned}
n_{i,t}^{actions} &= 0 \text{ pour } i \leq \widehat{i_t} - 1 \\
n_{i,t}^{actions} &= n_{i,t-1}^{actions} \text{ pour } \widehat{i_t} \leq i \leq t-1 \\
n_{t,t}^{actions} &= \frac{1}{S_t} \left[a \left(cash_t + n_{t-1}^{obligations} + \sum_{i=\widehat{i_t}}^{t-1} n_{i,t-1}^{actions} S_t \right) - \sum_{i=\widehat{i_t}}^{t-1} n_{i,t-1}^{actions} S_t \right] \\
n_t^{obligations} &= (1-a) \left(cash_t + n_{t-1}^{obligations} + \sum_{i=\widehat{i_t}}^{t-1} n_{i,t-1}^{actions} S_t \right)
\end{aligned}$$

On peut vérifier qu'on a bien dans tous les cas :

$$n_{t,t}^{actions} S_t + n_t^{obligations} - n_{t-1}^{obligations} = cash_t$$

A.4 Couverture en 0 dans le cas d'une comptabilisation des actifs à leur coût historique

Plaçons-nous tout d'abord à la date de souscription. Les actifs acquis grâce à la prime versée (qu'on suppose n'avoir subi aucun chargement sur flux) figurent au bilan exactement à la valeur de marché. Au terme du premier exercice, la provision mathématique revalorisée s'écrit, en l'absence de chargement sur encours :

$$PM_1 = P(1 + R_{techn}) + [\delta PF_1 - PRE_1 - P.R_{techn}]^+$$

et le dividende versé :

$$\begin{aligned} div_1 &= PF_1 + P - (PM_1 + PRE_1) \\ &= PF_1 - P.R_{techn} - PRE_1 - [\delta PF_1 - PRE_1 - P.R_{techn}]^+ \end{aligned}$$

Nous supposons alors que l'assureur **calcule son tarif, d'une part, en n'escomptant que les coupons produits par la partie obligataire de son actif et, d'autre part, en négligeant la possibilité qui lui est offerte de reporter le solde négatif de la gestion technique** On obtient alors un minorant de son dividende en 1, que nous notons $\underline{div_1}$:

$$\begin{aligned} div_1 &= PF_1 - P.R_{techn} - PRE_1 - [\delta PF_1 - PRE_1 - P.R_{techn}]^+ \\ &\geq r^*.n_0^{obligations} - P.R_{techn} - PRE_1 - \left[\delta r^*.n_0^{obligations} - PRE_1 - P.R_{techn}\right]^+ \\ &= r^*.n_0^{obligations} - P.R_{techn} - n_0^{actions}(S_0 - S_1)^+ \\ &\quad - \left[\delta r^*.n_0^{obligations} - n_0^{actions}(S_0 - S_1)^+ - P.R_{techn}\right]^+ = \underline{div_1} \end{aligned}$$

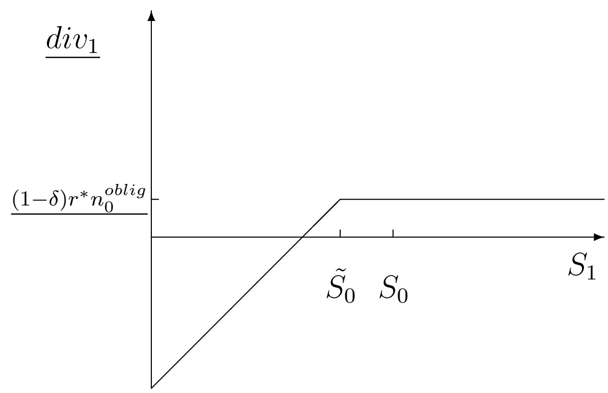
Deux cas sont alors possibles :

– soit $\delta r^*.n_0^{obligations} - P.R_{techn} > 0$

On peut alors écrire, après manipulations :

$$\underline{div_1} = (1 - \delta) r^*.n_0^{oblig} - n_0^{actions}(\tilde{S}_0 - S_1)^+$$

où $\tilde{S}_0 = S_0 - \dfrac{\delta r^*.n_0^{obligations} - P.R_{techn}}{n_0^{actions}}$. Sa représentation en fonction de la valeur de S_1 a l'allure suivante :



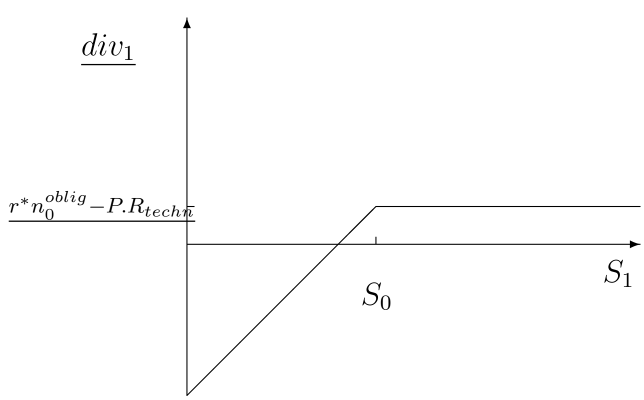
Remarque : on peut même distinguer le sous-cas $\tilde{S}_0 \leq 0$ Dans ce cas, $\underline{div_1}$ est indépendant de S_1 et vaut $(1-\delta)r^*n_0^{oblig}$.

– soit $\delta r^*.n_0^{obligations} - P.R_{techn} < 0$

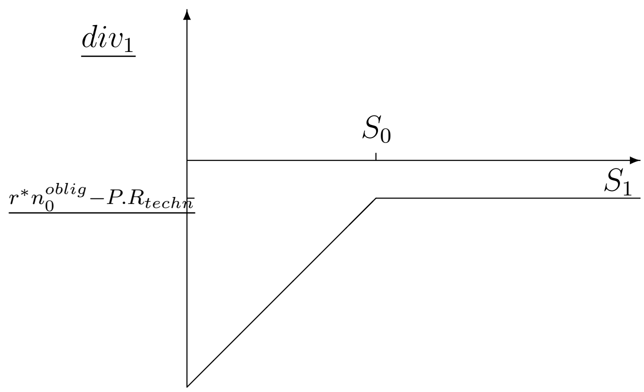
On a alors $\delta r^*.n_0^{obligations} - n_0^{actions}(S_0 - S_1)^+ - P.R_{techn} < 0$ quel que soit S_1. $\underline{div_1}$ se réécrit alors :

$$\underline{div_1} = r^*.n_0^{obligations} - P.R_{techn} - n_0^{actions}(S_0 - S_1)^+$$

dont la représentation graphique est la suivante si $r^*n_0^{oblig} - P.R_{techn} > 0$



Si $r^* n_0^{oblig} - P.R_{techn} < 0$, elle peut même devenir :



Cette situation correspond à une composition peu prudente de l'actif, telle que les revenus générés par la partie obligataire ne suffisent pas à assurer le respect des engagements de l'assureur.

Ce paiement se réécrit comme la différence entre les paiements finaux d'un zéro-coupon, le cas échéant négatif, et d'un put de sous-jacent S_1 :

$$\boxed{\underline{div_1} = r^*.n_0^{obligations} - \max(P.R_{techn}, \delta r^*.n_0^{obligations}) - n_0^{actions}(\tilde{S}_0 - S_1)^+} \tag{A.5}$$

où $\tilde{S}_0$, prix d'exercice du put ci-dessus, est défini par l'équation :

$$\tilde{S}_0 = \min\left(S_0, S_0 - \frac{\delta r^*.n_0^{obligations} - P.R_{techn}}{n_0^{actions}}\right)$$

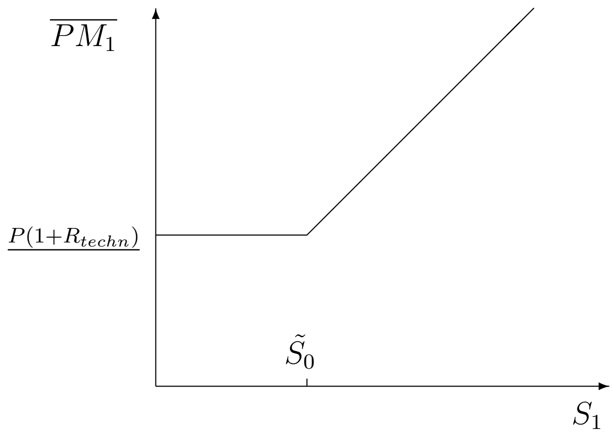
De même, symétriquement, la provision mathématique revalorisée peut être majorée par $\overline{PM_1}$, obtenue en supposant que toutes les plus-values sur actions sont réalisées et versées en totalité à l'assuré :

$$\begin{aligned} PM_1 &\leq \overline{PM_1} \\ &= P(1 + R_{techn}) + n_0^{actions}(S_1 - S_0)^+ \\ &\quad + \left[\delta r^* n_0^{obligations} - n_0^{actions}(S_0 - S_1)^+ - P.R_{techn}\right]^+ \end{aligned}$$

qui se réécrit, après manipulations et avec les mêmes notations que ci-dessus :

$$\boxed{\overline{PM_1} = P(1 + R_{techn}) + n_0^{actions}(S_1 - \tilde{S}_0)^+} \tag{A.6}$$

La représentation graphique de ce paiement est la suivante :



On peut vérifier que la somme de ces deux paiements constitue bien un partage de l'actif réalisable à la date 1 :

$$\begin{aligned}
\overline{PM_1} + \underline{div_1} &= P(1+R_{techn}) + n_0^{actions}(S_1 - \tilde{S}_0)^+ \\
&\quad + r^*.n_0^{obligations} - \max(P.R_{techn}, \delta r^*.n_0^{obligations}) - n_0^{actions}(\tilde{S}_0 - S_1)^+ \\
&= P(1+R_{techn}) - \max(P.R_{techn}, \delta r^*.n_0^{obligations}) + n_0^{actions}(S_1 - \tilde{S}_0) \\
&= n_0^{obligations}(1+r^*) + n_0^{actions} S_1
\end{aligned}$$

Afin de trouver un majorant au taux de prélèvement sur encours, il convient, au contraire, de minorer la provision mathématique de la date 1, qui constitue son assiette. Ce minorant est très simple, puisque :

$$PM_1 \geq \underline{PM_1} = P(1+R_{tech})$$

Les minorants des sommes reçues en 1 par l'assureur s'écrivent donc :

$$\begin{aligned}
& \underline{div_1} + \alpha \underline{PM_1} \\
= \ & r^*.n_0^{obligations} - \max(P.R_{techn}, \delta r^*.n_0^{obligations}) - n_0^{actions}(\tilde{S}_0 - S_1)^+ + \alpha P(1+R_{tech})
\end{aligned}$$

dont la valeur en 0 s'écrit :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} e^{-r} \left(\underline{div_1} + \alpha \underline{PM_1} \right) \\
= \ & \left(r^*.n_0^{obligations} - \max(P.R_{techn}, \delta r^*.n_0^{obligations}) \right) B(0,1) \\
& - n_0^{actions} Put_E(S_0, \tilde{S}_0, 1) + \alpha P(1+R_{tech}) B(0,1)
\end{aligned}$$

Le α qui assure la condition $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} e^{-r} \left(\underline{div_1} + \alpha \underline{PM_1} \right) = 0$ s'écrit donc :

$$\alpha^* = \frac{n_0^{actions} Put_E(S_0, \tilde{S}_0, 1) - B(0,1) \left(r^*.n_0^{obligations} - \max(P.R_{techn}, \delta r^*.n_0^{obligations}) \right)}{P(1+R_{tech}) B(0,1)}$$

soit, en notant a la part des actions dans l'actif telle qu'elle résulte de l'allocation stratégique :

$$\boxed{\alpha^* = \frac{aPut_E(1, \frac{\tilde{S}_0}{S_0}, 1) - B(0,1)\left[r^*.(1-a) - \max(R_{techn}, \delta(1-a)r^*)\right]}{(1+R_{tech})B(0,1)}} \quad \text{(A.7)}$$

Il faut remarquer que la quantité $\frac{\tilde{S}_0}{S_0}$ qui intervient dans l'équation (A.7) ne dépend pas de S_0 puisqu'elle s'écrit :

$$\frac{\tilde{S}_0}{S_0} = \min\left(1, 1 - \frac{\delta r^*.(1-a) - R_{techn}}{a}\right)$$

A.5 Couverture à une date positive dans le cas d'une comptabilisation des actifs à leur coût historique

Plaçons-nous à une date ultérieure de la vie du contrat, $t-1$ comprise entre 1 et 7, après revalorisation de la provision mathématique et distribution du dividende. Nous nous trouvons en présence d'un bilan équilibré comportant, en son actif, un portefeuille de titres. Le dividende algébrique reçu par l'assureur au terme de l'exercice $]t-1, t]$ s'écrit, par application de l'équation (2.43) écrite à la page 44 :

$$\begin{aligned} div_t &= PF_t - (PRE_t - PRE_{t-1}) \\ &\quad -(PM_{t-1}R_{techn} + \left[\delta PF_t - (PRE_t - PRE_{t-1}) - PR^-_{t-1} - PM_{t-1}R_{techn}\right]^+) \end{aligned}$$

On cherche, là encore, un majorant du taux de prélèvement à appliquer pour rétablir l'équilibre du contrat.On réitère donc les hypothèses analogues aux précédentes concernant la base du calcul par l'assureur de son tarif :

- en premier lieu, nous supposons que l'assureur néglige dans son calcul la possibilité qui lui est offerte de reporter le solde négatif du compte de participation aux résultats ;
- en second lieu, nous supposons, comme ci-dessus, que l'assureur ne prend pas en compte la rétention de participation bénéficiaire associée aux produits financiers qui résultent de plus-values sur actions.

Ces hypothèses nous conduisent à un minorant pour le dividende reçu en t, que nous notons $\underline{div_t}$ et qui prend la forme :

$$\begin{aligned} div_t \leq \underline{div_t} &= r^*.n_{t-1}^{obligations} - (PRE_t - PRE_{t-1}) \\ &\quad - \left(PM_{t-1}R_{techn} + \left[\delta r^*.n_{t-1}^{obligations} - (PRE_t - PRE_{t-1}) - PM_{t-1}R_{techn}\right]^+\right) \end{aligned}$$

Deux cas sont alors possibles :

1. **Soit le portefeuille d'actions en t-1 ne fait pas apparaître de moins-value**

   Dans ce cas on a $PRE_{t-1} = 0$.

   Considérons alors un actif "fictif" dont la valeur égalerait la provision mathématique du contrat, composé d'actions et d'obligations répartis selon l'allocation stratégique et ne faisant apparaître ni plus ni moins-value sur actions. Le nombre d'obligations contenues dans un tel actif est nécessairement égal à $\underline{n_{t-1}^{obligations}} = (1-a)PM_{t-1}$ tandis que le nombre d'actions vaudrait, lui $\underline{n_{t-1}^{actions}} = a\frac{PM_{t-1}}{S_{t-1}}$.

   Nous pouvons faire alors les deux remarques suivantes.

   En premier lieu, l'actif réel se trouvant par hypothèse en plus-value, il comporte plus d'obligations que l'actif fictif :

   $$n_{t-1}^{obligations} \geq \underline{n_{t-1}^{obligations}} = (1-a)PM_{t-1}$$

   d'où il suit que, $\underline{div_t}$ étant une fonction croissante de $n_{t-1}^{obligations}$, on peut le minorer par :

   $$\begin{aligned} div_t \geq &= r^*.\underline{n_{t-1}^{obligations}} - PM_{t-1}.R_{techn} - PRE_t \\ &\quad - \left[\delta r^*.\underline{n_{t-1}^{obligations}} - PRE_t - PM_{t-1}.R_{techn}\right]^+ \end{aligned}$$

   En second lieu, le nouveau minorant que nous venons de trouver dépend, toutes choses égales par ailleurs, négativement de PRE_t. Pour le minorer à nouveau, il faut donc majorer PRE_t. Or l'actif fictif ne faisant pas apparaître de plus-value, la provision pour risque d'exigibilité qu'il faudrait constituer à la fin de l'exercice t avec un tel actif est supérieure à PRE_t, qui correspond, elle à un actif qui se trouve en situation de plus-value. On peut donc majorer PRE_t par la PRE correspondant à notre actif fictif, soit :

   $$PRE_t \geq \underline{n_{t-1}^{actions}}(S_{t-1} - S_t)^+$$

   Nous obtenons finalement une troisième minoration pour le dividende reçu en t :

   $$\begin{aligned} div_t \geq &= r^*.\underline{n_{t-1}^{obligations}} - PM_{t-1}.R_{techn} - \underline{n_{t-1}^{actions}}(S_{t-1} - S_t)^+ \\ &\quad - \left[\delta r^*.\underline{n_{t-1}^{obligations}} - \underline{n_{t-1}^{actions}}(S_{t-1} - S_t)^+ - PM_{t-1}.R_{techn}\right]^+ \end{aligned}$$

On constate alors qu'on s'est ramené *mutatis mutandis* exactement à la forme obtenue pour le minorant du dividende en 1. Le seul changement consiste en une croissance de l'ensemble des grandeurs accompagnant celle de la provision mathématique, soit une homothétie de rapport $\frac{PM_{t-1}}{P}$. Il s'ensuit que le prélèvement sur encours à appliquer pour rétablir l'équilibre *ex ante* du contrat est majoré par celui que donne l'équation (2.45) et que la couverture que nous avions décrite après cette équation n'a pas à être modifiée.

2. **Soit le portefeuille d'actions en t-1 fait apparaître une moins-value**

   Nous introduisons le même actif fictif qu'au (1).

   La première majoration de $\underline{div_t}$ est ici une égalité.

   S'agissant de la seconde majoration, une étape supplémentaire est nécessaire pour nous ramener au cas de l'actif fictif. Elle consiste à majorer la différence $PRE_t - PRE_{t-1}$, dont dépend négativement $\underline{div_t}$ par $(PRE_t - PRE_{t-1})^+$. De cette manière on "neutralise" les cas où la moins-value latente vient à baisser entre $t-1$ et t, qui donnent lieu à une participation positive au solde de la gestion technique.

   On vérifie enfin que la quantité $(PRE_t - PRE_{t-1})^+$ est exactement égale à la PRE à constituer en t dans le cas de l'actif fictif.

   Il s'ensuit finalement que, là encore, on peut se ramener à une situation analogue à celle qui prévaut à la date 1, ce qui implique que le même taux de prélèvement peut être appliqué en $t-1$ qu'en 0 et la même stratégie de couverture mise en place.

A.5.1 Résumé des résultats et de la stratégie de couverture

On suppose fixés dans le contrat un taux technique R_{techn} la composition stratégique de l'actif (paramètre a) et un taux de participation aux bénéfices δ.

Minoration du dividende, majoration de la provision mathématique

Conditionnellement à la composition du bilan au début d'un exercice donné (date $t-1$), on peut minorer le dividende algébrique au terme de cet exercice (date t) par la quantité :

$$\boxed{div_t \geq r^*.\underline{n_{t-1}^{obligations}} - \max(PM_{t-1}.R_{techn}, \delta r^*.\underline{n_{t-1}^{obligations}}) - \underline{n_{t-1}^{actions}}(\widetilde{S_{t-1}} - S_t)^+} \tag{A.8}$$

où :

$$\widetilde{S_{t-1}} = \min\left(S_{t-1}, S_{t-1} - \frac{\delta r^*.\underline{n_{t-1}^{obligations}} - PM_{t-1}.R_{techn}}{\underline{n_{t-1}^{actions}}}\right) \tag{A.9}$$

et où $\underline{n_{t-1}^{obligations}}$ et $\underline{n_{t-1}^{actions}}$ sont les quantités d'actif qui figurent dans un bilan fictif dans lequel l'actif ne fait apparaître ni plus-value ni moins-value latente et respecte les paramètres de l'allocation stratégique, ce qui correspond à la situation de la date 0.

Symétriquement, on peut majorer la provision mathématique en t par :

$$\boxed{PM_t \leq PM_{t-1}(1 + R_{techn}) + \underline{n_{t-1}^{actions}}(S_t - \widetilde{S_{t-1}})^+}$$

Stratégie de couverture

On pose :

$$\boxed{\alpha^* = \frac{aPut_E(1, \tilde{K}, 1) - B(0,1)\left[r^*.(1-a) - \max(R_{techn}, \delta(1-a)r^*)\right]}{(1 + R_{tech})B(0,1)}} \tag{A.10}$$

avec $\tilde{K} = \min\left(1, 1 - \dfrac{\delta r^*.(1-a) - R_{techn}}{a}\right)$

et où Put_E désigne la valeur du put européen dont le sous-jacent est consitué par un actif de même dynamique que l'action.

A.6 Dynamique de la provision pour participation aux excédents

On se donne la composition de la PPE en $t-1$.

On suppose également connus (résultant d'une règle exogène de dotation) un montant de dotation et de reprise (respectivement $DotPPE_t$ et Rep_PPE_t) respectant les conditions :

$$DotPPE_t \leq PB_t$$

et :

$$PPE_{8,t-1} \leq RepPPE_t \leq \sum_{i=1}^{8} PPE_{i,t-1}$$

On a tout d'abord très simplement :

$$PPE_{1,t} = DotPPE_t,$$

puis on prélève en tant que de besoin sur les étages les plus élevés de la PPE.

Annexe B

Annexes relatives au modèle d'actifs

B.1 Le modèle d'évolution stochastique des taux de Heath, Jarrow et Morton (1992)

Nous nous plaçons dans le cadre exposé au début du chapitre 5.

Nous introduisons $\beta_t = \exp\left(\int_0^t r_s ds\right)$ où r_t désigne le taux instantané sans risque. On sait que l'absence d'opportunité d'arbitrage implique l'existence d'une probabilité $\mathbb{Q}$, dite risque-neutre, sous laquelle $\widetilde{B}(t,T) = \frac{B(t,T)}{\beta_t}$ est une martingale. Par la formule d'Itô, on obtient :

$$\frac{d\widetilde{B}(t,T)}{\widetilde{B}(t,T)} = (\mu(t,T) - r_t)dt + \langle \sigma(t,T), dW_t \rangle$$

On considère alors un portefeuille constitué de n+1 zéro-coupons de maturités différentes :

$$P = B_1 + \phi_2 B_2 + ... + \phi_{n+1} B_{n+1} \tag{B.1}$$

où l'on a adopté la notation abrégée "B_i" pour $B(t,T_i)$.

On suppose que ϕ_2, ...,ϕ_{n+1} sont choisis de telle sorte à rendre le portefeuille ainsi constitué localement sans risque, soit, $\forall i = 1, ..., n$:

$$\frac{\partial P}{\partial W_i} = \frac{\partial B_1}{\partial W_i} + \phi_2 \frac{\partial B_2}{\partial W_i} + ... + \phi_{n+1} \frac{\partial B_{n+1}}{\partial W_i} = 0$$

ce qui donne :

$$B_1 \sigma_i(t,T_1) + \phi_2 B_2 \sigma_i(t,T_2) + ... + \phi_{n+1} B_{n+1} \sigma_i(t,T_{n+1}) = 0$$

qu'on réécrit matriciellement :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1(t,T_2) & \dots & \sigma_1(t,T_{n+1}) \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_n(t,T_2) & \dots & \sigma_n(t,T_{n+1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_2 B(t,T_2) \\ \vdots \\ \phi_{n+1} B(t,T_{n+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B(t,T_1)\sigma_1(t,T_1) \\ \vdots \\ -B(t,T_1)\sigma_n(t,T_1) \end{pmatrix} \tag{B.2}$$

Comme le portefeuille P est sans risque, il doit, par absence d'opportunité d'arbitrage, rapporter localement le taux sans risque, soit :

$$\frac{dP}{P} = r_t dt$$

d'où :

$$\begin{aligned} &[B(t,T_1)\mu(t,T_1) + \phi_2 B(t,T_2)\mu(t,T_2) + \ldots + \phi_{n+1} B(t,T_{n+1})\mu(t,T_{n+1})]\, dt \\ &= [B(t,T_1) + \phi_2 B(t,T_2) + \ldots + \phi_{n+1} B(t,T_{n+1})]\, r_t dt \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{pmatrix} \mu(t,T_2) - r_t, & \dots & , \mu(t,T_{n+1}) - r_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_2 B(t,T_2) \\ \vdots \\ \phi_{n+1} B(t,T_{n+1}) \end{pmatrix} = -\left(\mu(t,T_1) - r_t\right) B(t,T_1) \tag{B.3}$$

Les lignes de la matrice de l'équation (B.2) constituent une base de l'espace$\mathbb{R}^n$. Le vecteur $(\mu(t,T_2) - r_t, ..., \mu(t,T_{n+1}) - r_t)$ s'écrit donc comme une combinaison linéaire de ces lignes. Il existe donc des scalaires $\rho_1, ..., \rho_n$, qui dépendent a priori de t et de $T_1, T_2, ..., T_n$ vérifiant, $\forall i = 2, ..., n+1$:

$$\rho_1\sigma_1(t,T_i) + \rho_2\sigma_2(t,T_i) + ... + \rho_n\sigma_n(t,T_i) = \mu(t,T_i) - r_t \tag{B.4}$$

Si l'on applique la combinaison linéaire aux termes de droite des équations (B.2) et (B.3), on obtient :

$$\rho_1\sigma_1(t,T_1) + \rho_2\sigma_2(t,T_1) + ... + \rho_n\sigma_n(t,T_i1) = \mu(t,T_1) - r_t \tag{B.5}$$

Finalement, $\rho_1, ...,$ et ρ_n sont les n solutions d'un système à n+1 équations :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1(t,T_1) & \dots & \sigma_n(t,T_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_1(t,T_n+1) & \dots & \sigma_n(t,T_{n+1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu(t,T_1) - r_t \\ \vdots \\ \mu(t,T_n+1) - r_t \end{pmatrix} \tag{B.6}$$

Il s'ensuit que ce système est équivalent à ses n premières équations, ce qui implique que les ρ_i ne dépendent pas de T_{n+1}. Le même raisonnement peut être effectué avec n autres lignes. Le vecteur ρ est donc indépendant de tous les T_i.

Finalement, l'absence d'opportunité d'arbitrage implique l'existence d'un vecteur de primes de risque $\rho(t) = (\rho_1(t), ..., \rho_n(t))$ vérifiant $\forall T$:

$$\langle \rho(t), \sigma(t,T) \rangle = \mu(t,T) - r_t \tag{B.7}$$

On a donc :

$$\frac{d\widetilde{B}(t,T)}{\tilde{B}(t,T)} = \langle \sigma(t,T), \rho(t) \rangle dt + \langle \sigma(t,T), dW_t \rangle$$

On pose alors :

$$L_t = \exp\left(-\int_0^t \langle \rho(s), dW_s \rangle - \frac{1}{2}\int_0^t \|\rho(s)\|^2 ds\right)$$

Par application du théorème de Girsanov, on sait que sous la probabilité $\mathbb{Q}$ de densité L_T par rapport à $\mathbb{P}$, le processus $(W_t^{\mathbb{Q}})$ défini par :

$$W_t^{\mathbb{Q}} = \int_0^t \rho(s) ds + W_t \tag{B.8}$$

est un mouvement brownien standard. Finalement :

$$\begin{aligned}\frac{dB(t,T)}{B(t,T)} &= r_t dt + \langle \sigma(t,T), \rho(t) \rangle dt + \langle \sigma(t,T), dW_t \rangle \\ &= r_t dt + \langle \sigma(t,T), dW_t^{\mathbb{Q}} \rangle\end{aligned}$$

dont la résolution donne, sous la probabilité risque-neutre :

$$B(t,T) = B(0,T) \times \exp\left[\int_0^t r(s) ds + \int_0^t \langle \sigma(s,T), dW^{\mathbb{Q}}(s) \rangle - \frac{1}{2}\int_0^t \|\sigma(s,T)\|^2 ds\right] \tag{B.9}$$

et sous la probabilité historique :

$$B(t,T) = B(0,T) \times \exp\left[\int_0^t r(s) ds + \int_0^t \langle \sigma(s,T), dW(s) \rangle + \int_0^t \langle \sigma(s,T), \rho(s) \rangle ds - \frac{1}{2}\int_0^t \|\sigma(s,T)\|^2 ds\right] \tag{B.10}$$

De la formule donnant le taux forward instantané $f(t,T) = -\dfrac{\partial \ln B(t,T)}{\partial T}$, on déduit alors :

$$\begin{aligned}f(t,T) &= f(0,T)_{obs} + \int_0^t \langle \frac{\partial \sigma(s,T)}{\partial T}, dW^{\mathbb{Q}}(s) \rangle - \int_0^t \langle \frac{\partial \sigma(s,T)}{\partial T}, \sigma(s,T) \rangle ds \\ &= f(0,T)_{obs} + \int_0^t \langle \frac{\partial \sigma(s,T)}{\partial T}, dW(s) \rangle + \int_0^t \langle \frac{\partial \sigma(s,T)}{\partial T}, \rho(s) \rangle ds - \int_0^t \langle \frac{\partial \sigma(s,T)}{\partial T}, \sigma(s,T) \rangle ds\end{aligned}$$

qui vérifie l'équation différentielle :

$$\begin{cases} df(t,T) = \left[\langle \frac{\partial \sigma(t,T)}{\partial T}, \rho(t)\rangle - \langle \frac{\partial \sigma(t,T)}{\partial T}, \sigma(t,T)\rangle\right] dt + \langle \frac{\partial \sigma(t,T)}{\partial T}, dW(t)\rangle \\ f(0,T) = f(0,T)_{obs} \end{cases}$$

Par identification avec l'équation (5.1), on a donc nécessairement :

$$\begin{cases} \alpha(t,T) = \langle \frac{\partial \sigma(t,T)}{\partial T}, \rho(t)\rangle - \langle \frac{\partial \sigma(t,T)}{\partial T}, \sigma(t,T)\rangle \\ \gamma(t,T) = \frac{\partial \sigma(t,T)}{\partial T} \end{cases}$$

On voit donc que la volatilité du zéro-coupon et celle du taux forward-neutre se déduisent l'une de l'autre par dérivation. $\sigma(t,T)$ est donc définie à une constante [1] additive près.

$$\sigma(t,T) = a(t) + \int_0^T \gamma(t,s)ds$$

La constante est choisie de manière à assurer la condition $B(t,t) = 1$. On montre finalement que :

$$\sigma(t,T) = \int_t^T \gamma(t,s)ds \tag{B.11}$$

On obtient donc :

$$f(t,T) = f(0,T)_{obs} + \int_0^t \langle \gamma(s,T), \sigma(s,T)\rangle ds - \int_0^t \langle \gamma(s,T), dW_s^{\mathbb{Q}}\rangle$$

Equation vérifiée par le taux instantané

Comme $r_t = f(t,t)$, le taux instantané vérifie :

$$r_t = f(0,t)_{obs} + \int_0^t \langle \gamma(s,t), \sigma(s,t)\rangle ds - \int_0^t \langle \gamma(s,t), dW_s^{\mathbb{Q}}\rangle \tag{B.12}$$

qui est solution de l'équation différentielle stochastique :

$$dr_t = \left(\frac{\partial f(0,t)}{\partial t} - \int_0^t \langle \frac{\partial \gamma}{\partial t}(s,t), dW_s^{\mathbb{Q}}\rangle + \int_0^t \langle \frac{\partial \gamma}{\partial t}(s,t), \sigma(s,t)\rangle ds + \int_0^t \langle \gamma(s,t), \frac{\partial \sigma}{\partial t}(s,t)\rangle ds\right) dt$$
$$-\langle \gamma(t,t), dW_t^{\mathbb{Q}}\rangle$$

soit :

[1] une constante en T, c'est-à-dire une fonction de la seule variable t

$$dr_t = \left(\frac{\partial f(0,t)}{\partial T} - \int_0^t \langle \frac{\partial \gamma}{\partial t}(s,t), dW_s^{\mathbb{Q}} \rangle + \int_0^t \langle \frac{\partial \gamma}{\partial t}(s,t), \sigma(s,t) \rangle ds + \int_0^t \|\gamma(s,t)\|^2 ds \right) dt$$
$$-\langle \gamma(t,t), dW_t^{\mathbb{Q}} \rangle$$

On constate donc que le taux court n'est, en général, pas markovien en raison de la présence du terme stochastique $\int_0^t \langle \frac{\partial \gamma}{\partial T}(s,t), dW_s^{\mathbb{Q}} \rangle$. On est donc conduit à adopter une structure particulière de volatilité qui garantisse le caractère markovien du taux court par rapport à un nombre fini de variables d'état.

B.2 Calcul de la racine carrée d'une matrice définie positive

Soit A une matrice carrée de taille n définie positive. Il existe une unique matrice triangulaire inférieure L, appelée "racine carrée" de A, vérifiant :

$$A = L.L^t$$

Il s'ensuit que les coeficients de ces matrices vérifient les relations :

$$\begin{aligned} a_{i,i} &= \sum_{k=1}^{i} L_{i,k}^2 \\ a_{i,j} &= \sum_{k=1}^{i} L_{i,k} L_{k,j} \text{ pour tout } i < j \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} L_{i,i} &= \left(a_{i,i} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{i,k}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ L_{j,i} &= \frac{1}{L_{i,i}} \left(a_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{i,k} L_{k,j} \right) \text{ pour tout } i < j \end{aligned}$$

Ces relations appliquées successivement pour i allant de 1 à N, permettent de calculer par récurrence les coefficients de L par récurrence.

Bibliographie

[1] P. L. JORGENSEN A. GROSEN. An analysis of insolvency risk, bonus policy, and regulatory intervention rules in a barrier option framework. University of Aarhus, Denmark, June 2001.

[2] P. Lochte JORGENSEN A. GROSEN. Fair valuation of life insurance liabilities : The impact of interest rate guarantees, surrender options, and bonus policies. Centre for analytical finance, University of Aarhus, 1999.

[3] A. GROSEN B. JENSEN, P. L. JORGENSEN. A finite difference approach to the valuation of path dependent life insurance liabiities. Centre for analytical finance, University of Aarhus, February 2000.

[4] C. BERTHELOT, M. BOSSY, and N. PISTRE. Risque associé au contrat d'assurance-vie pour la compagnie d'assurances. *Economie et Prévision*, 149 :pages 73 à 85, Juillet-Septembre 2001.

[5] B. LAPEYRE D. LAMBERTON.

[6] F. de VARENNE E. BRIYS. On the risk of th life insurance liabilities : debunking some sommon pitfalls. The Wharton School, University of Pennsylvania, November 1995.

[7] K. SANDMANN J. A. NIELSEN. Equity-linked life insurance : a model with stochastic interest rates, January 1995.

[8] S. A. PERSSON K. R. MILTERSEN. Guaranteed investment contracts : distributed and undistributed excess return. 4th Nordic Symposium on Contingent Claims Analysis in Finance and Insurance, Copenhagen Business School, Copenhagen, Denmark, 1999.

[9] P. PRIAULET L. MARTELLINI. *Produits de taux d'intérêt - Méthodes dynamiques d'évaluation et de couverture*. Economica, 2000.

[10] E. S. SCHWARTZ M. J. BRENNAN. Alternative investment strategies for the issuers of equity-linked life insurance policies with an asset value guarantee.

[11] E. S. SCHWARTZ M. J. BRENNAN. The pricing of equity-linked life insurance policies with an asset value guarantee. University of British Columbia, Canada, February 1976.

[12] R. C. MERTON. On the pricing of corporate debt : The risk structure of interest rates. *Journal of Finance*, 29 :pages 449 à 470, 1974.

[13] O. PEQUEUX S. MERLUS. Les garanties plancher dans les contrats d'assurance-vie en unités de compte. Mémoire d'actuariat, 2000.

[14] I. PRAS T. CHERIF. Evaluation de l'option de rachat anticipé dans les contrats d'assurance-vie, 1997.