

Université Catholique de Louvain
Faculté des sciences appliquées
Département d'ingénierie mathématique

MESURES DE RISQUE DE MARCHÉ ET PRÉFÉRABILITÉ UNIVERSELLE.

Karim Cheikh Benani

Mémoire présenté
en vue de l'obtention du
grade d'ingénieur civil
en mathématiques appliquées

Promoteur : Yves Smeers
Lecteurs : Pierre Ars et Michel Denuit

Louvain-La-Neuve, Novembre 2003

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier le Professeur Yves Smeers, promoteur de ce mémoire, pour le temps qu'il a accepté d'y consacrer et l'intérêt qu'il y a porté. Je tiens à le remercier pour les cours de recherche opérationnelle qu'il a dispensés à la Faculté de Sciences Appliquées et qui ont éveillé en moi un grand intérêt pour les mathématiques financières.

Je tiens également à remercier sincèrement Pierre Ars. D'abord, parce qu'il est aux origines du sujet de ce mémoire. Ensuite, pour les nombreux entretiens qu'il a accepté de m'accorder malgré un horaire chargé.

Je remercie évidemment le Professeur Michel Denuit pour avoir accepté d'être lecteur de ce mémoire.

"Seul le risque est sûr".
- W.Shakespeare-

Résumé

Le but de ce mémoire est de montrer d'une part comment calculer pratiquement des mesures du risque de marché pour un produit financier et d'autre part qu'à partir de ces indications sur le risque on peut construire une procédure permettant d'identifier parmi un panier d'investissements le produit financier le plus avantageux pour un investisseur rationnel.

Nous débutons ce mémoire en formalisant la notion de risque. La mesure du risque s'appuie sur le concept de *mesure du risque cohérente*. Une mesure du risque est fonction de la distribution statistique des profits et pertes du produit financier considéré. Or, bien souvent, la distribution des profits et pertes d'un produit financier n'est pas accessible sous sa forme analytique. Pour l'obtenir, il est nécessaire d'ajuster des modèles de prix aux cours des valeurs sous-jacentes du produit financier considéré. Dans ce mémoire, nous proposons un *modèle de prix à variance stochastique* modélisant les rendements par un processus AR(r)-GARCH(p, q). Le choix de ce modèle est justifié par le fait que, bien qu'étant relativement simple, il est compatible avec les propriétés statistiques essentielles observées des cours.

A partir des modèles de prix des valeurs sous-jacentes, il est possible de simuler les profits et pertes du produit financier considéré. Pratiquement, nous simulons les rendements. Le point clé de cette simulation est la modélisation de la dépendance stochastique entre les rendements. Une *t-copule* sera utilisée pour modéliser cette dépendance.

Nous nous attachons ensuite à l'estimation effective de deux mesures du risque couramment utilisées par les institutions financières : la *valeur risquée* (Value-at-Risk) et la *valeur risquée conditionnelle* (Conditional Value-at-Risk). Pour obtenir ces estimations nous utilisons essentiellement des estimateurs non paramétriques : la VaR et la CVaR empiriques que nous évaluons sur un échantillon de réalisations des profits et pertes du produit considéré. Pour la valeur risquée conditionnelle, il est possible de recourir sous certaines conditions à un estimateur de type Monte-Carlo. Afin d'accélérer la convergence de cet estimateur, nous pourrions avoir recours à des *techniques de réduction de la variance*. Ces estimations de la valeur risquée et de la valeur risquée conditionnelle n'ont d'intérêt que si on en connaît la précision.

Une mesure de cette précision est donnée par un intervalle de confiance. Malheureusement, nous ne disposons pas toujours de résultat asymptotique permettant la construction d'intervalles de confiance. Pour construire les intervalles de confiance de la valeur risquée et de la perte conditionnelle, nous aurons recours à une approche non-paramétrique : la méthode du *t-bootstrap*. A titre d'application, nous estimons la valeur risquée et la valeur risquée conditionnelle d'une option asiatique.

La fin du mémoire est consacrée à l'analyse du lien entre mesure de risque et préféralité. Nous montrons qu'il existe un lien entre la valeur risquée conditionnelle d'un produit financier et sa préféralité pour un investisseur rationnel. Nous construisons une méthode basée sur le calcul de la valeur risquée conditionnelle et sur le concept de *dominance stochastique* qui permet d'identifier des produits financiers possédant une préféralité supérieure à celle d'un produit de référence. Nous appliquons cette méthode à l'analyse de la préféralité d'un produit financier à capital garanti.

Table des matières

1 Mesures du risque.	17
1.1 Le concept de mesure de risque.	17
1.2 La valeur risquée (VaR)	18
1.3 La valeur risquée conditionnelle (CVaR)	19
1.4 Conclusions à ce chapitre.	22
2 Modèle de prix à variance stochastique.	23
2.1 Propriétés statistiques des taux de rendement des actions. . .	24
2.2 Modèle de prix.	27
2.2.1 Modèle de rendement.	27
2.2.2 Estimation des modèles de rendement de cinq actions.	28
2.3 Distribution conjointe et structure de dépendance.	29
2.3.1 Les limites de la covariance.	30
2.3.2 Le concept de copule, définition et propriétés.	30
2.3.3 Décomposition d'une distribution conjointe au moyen des copules	31
2.3.4 La copule comme structure de dépendance.	32
2.3.5 Approximation d'une distribution conjointe.	33
2.4 Modélisation de la dépendance entre les rendements des actifs.	33
2.4.1 Le vecteur student multivarié.	34
2.4.2 Simulation d'une student multivariée.	36
2.4.3 La copule student multivariée.	36
2.4.4 Estimation de la t-copule.	37
2.4.5 Application.	43
2.5 Simulation des rendements.	44
2.6 Simulation des variations de prix d'un actif sous-jacent. . . .	44
2.7 Simulation des variations de la valeur d'un produit financier.	45
2.8 Conclusions à ce chapitre.	45
3 Approximation thêta-delta-gamma des variations de la va- leur d'un produit financier.	49
3.1 Introduction.	49
3.2 Décomposition thêta-delta-gamma.	50

3.3	Sensibilités d'un produit dérivé.	50
3.4	Sensibilités d'un produit simple.	52
3.5	Sensibilités d'un portefeuille.	52
4	Calcul de la VaR d'un produit financier.	53
4.1	Calcul de la VaR.	54
4.1.1	Estimation non-paramétrique de la VaR.	54
4.1.2	Estimation de la VaR par une recherche de zéro.	55
4.2	Calcul de la distribution F_L	56
4.2.1	Lorsque l'horizon de risque est égal à la période d'ajustement du modèle de prix.	56
4.2.2	Lorsque l'horizon de risque est supérieur à la période d'ajustement du modèle de prix.	62
4.3	Défaut fondamental de l'estimation de la VaR par recherche de zéro.	64
4.4	Conclusions à ce chapitre.	64
5	Calcul de la CVaR d'un produit financier.	65
5.1	Introduction	65
5.2	Estimateur non-paramétrique de la CVaR.	66
5.3	Estimation de la CVaR quand la fonction de distribution des P&L est continue.	66
5.4	Conclusions à ce chapitre.	69
6	Application : mesure du risque inhérent à une position courte sur une option à sous-jacent multiple.	71
6.1	Introduction.	71
6.1.1	Options panier.	72
6.1.2	Options asiatiques.	73
6.2	Approximation du processus décrivant la valeur du portefeuille.	76
6.3	Mesure du risque sur la (re)vente d'une option panier.	76
6.3.1	Grecques d'options panier.	77
6.3.2	Estimation de la VaR et de la $CVaR$ d'une option panier.	78
6.4	Mesure du risque inhérent à une position courte sur une option asiatique à sous-jacent multiple.	84
6.4.1	Evaluation d'une option asiatique.	84
6.4.2	Risque encouru sur la vente d'une option asiatique.	85
6.5	Comparaison entre $\bar{\eta}_{cvar}^{srv}$ et η_{cvar}^m	88
6.6	Conclusions à ce chapitre.	89
7	Analyse de la préféralité d'un produit financier.	103
7.1	Introduction.	103
7.2	Le choix de l'investisseur rationnel.	104

7.3	Dominance stochastique.	104
7.3.1	Dominance stochastique de premier ordre.	105
7.3.2	Dominance stochastique de second ordre.	106
7.3.3	Dominance stochastique d'ordre n	108
7.3.4	Lien entre dominance stochastique et mesures du risque.	109
7.3.5	Test de dominance stochastique de second ordre de Duclos Davidson.	110
7.3.6	Remarque	115
7.4	Un cadre d'analyse général de la préféralité d'un investisse- ment.	117
7.5	Application : analyse de la préféralité du RL2011 de la société Remil Lynch.	119
7.5.1	Règle de rendement.	120
7.5.2	Analyse de la préféralité du RL2011.	122
7.6	Conclusions à ce chapitre.	128
8	Conclusions	131
A	Preuves de certains théorèmes.	135
A.1	Preuve du théorème 3.	135
A.2	Preuve du théorème 4.	136
B	Evaluation de fonction de distribution.	137
B.1	Introduction	137
B.2	Méthode du point de selle.	137
B.2.1	Fonction génératrice des cumulants.	137
B.2.2	Approximation de la distribution de X	139
B.3	L'inversion de Fourier.	141
B.3.1	Evaluation d'une fonction de distribution par inver- sion de Fourier.	141
B.3.2	Intégration numérique par quadrature de Gauss-Legendre.	144
B.4	Méthodes de Monte-Carlo.	149
B.4.1	Approximation d'intégrale par la méthode de Monte- Carlo.	150
B.4.2	Techniques de réduction de variance.	151
B.4.3	Faiblesse et avantage de l'approche par simulation de Monte-Carlo.	154
C	Test Chi-carrée.	157
D	Approximation d'une fonction de densité par lissage à noyaux.	159
E	Ajustement des modèles de rendement.	161
E.1	Analyse préliminaire des données.	161
E.2	Ajustement d'un modèle aux données.	168

F	Le calcul des grecques par différences finies.	203
G	Graphes de la fonction génératrice des moments de Q_x.	205
H	Convergence d'une suite de variables aléatoires.	213
I	Intervalle de confiance par la méthode t-bootstrap.	215
	I.1 Introduction	215
	I.2 Intervalles de confiance	216
	I.3 La méthode t-bootstrap itéré	216
	I.4 Précision des intervalles de confiance par t-bootstrap itéré . .	218
J	Rappels d'analyse fonctionnelle.	221
K	Test de Duclos-Davidson d'ordre n.	223
L	Choix du portefeuille A.	229
M	Consistance de l'estimateur non paramétrique de la CVaR.	233

Introduction : le risque financier.

Définition du risque

Une institution de banque/assurance est exposée à diverses catégories de risques. Tout d'abord, les risques propres aux instruments financiers qu'elle utilise pour réaliser des placements. Ces risques sont réunis sous l'appellation *risque de marché*. Le risque de marché est le risque de pertes de valeur des actifs résultant d'une évolution défavorable des paramètres de marché. Ensuite, viennent des risques qui ne sont pas liés à l'instrument de placement : le *risque de crédit* qui correspond à une défaillance de l'emprunteur et le *risque de liquidité* correspondant à la difficulté de réaliser rapidement une transaction visant à quitter une position défavorable. Dans ce mémoire nous nous intéresserons exclusivement au *risque de marché*.

Les facteurs de risque

Un facteur de risque (de marché) est une variable dont la valeur est fixée par le marché, dont l'évolution future est aléatoire et qui exerce une influence sur le prix de l'actif ou du portefeuille considéré. Pour définir formellement un facteur de risque, nous devons préalablement préciser le concept de *modèle financier*.

Définition 1 (Modèle financier)

On appelle *modèle financier* un espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) où Ω est l'ensemble des prix, des valeurs ou encore des rendements possibles d'un ou de plusieurs produits financiers. \mathcal{F} est une tribu¹ de Ω et $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ est une mesure de probabilité.

¹Pour rappel : une tribu est une collection de sous-ensembles de Ω qui contient l'ensemble vide \emptyset et qui satisfait les trois conditions suivantes : (i) Si B est dans \mathcal{F} alors son complémentaire $\{\omega \in \Omega : \omega \notin B\}$ est aussi dans \mathcal{F} . (ii) Si A_1, \dots, A_∞ sont dans \mathcal{F} leur union $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ est encore dans \mathcal{F} . (iii) $\Omega \in \mathcal{F}$.

Nous définissons formellement un facteur de risque comme suit.

Définition 2 (Facteur de risque)

Soit un modèle financier (Ω, \mathcal{F}, P) . On appelle facteur de risque toute v.a. \mathcal{F} -mesurable à valeurs réelles².

Illustrons ces formalisations sur des exemples. Pour un portefeuille composé d'actions, le modèle financier sera l'ensemble des variations possibles des prix de ces actions ou l'ensemble des variations possibles du portefeuille. Les facteurs de risque du portefeuille pourront être les variations de prix ou les rendements de ces actions. Ou bien encore la variation de valeur ou le rendement du portefeuille lui-même. De manière similaire, pour une option européenne dont le sous-jacent est le prix d'une action, les facteurs de risque de l'option sont la variation de prix de l'action ou le cash-flow à l'exercice de l'option. Le modèle financier sera l'ensemble des prix possibles de l'action ou l'ensemble des cash-flow de l'option.

Nous disposons donc d'un *objet mathématique*, une v.a. \mathcal{F} -mesurable, que nous identifions au *risque* auquel est soumise la valeur d'un produit financier. Ce risque se comprend dans le cadre d'un *modèle financier* qui est une "structure probabiliste" décrivant l'état des possibles.

Nous avons à ce stade *identifié* le risque. Pour le *quantifier*, nous devons décrire les caractéristiques statistiques de la v.a. qui l'identifie. C'est à ce stade qu'intervient le concept de *mesures du risque*. Nous l'abordons au second chapitre.

²Rappel : Soit un espace mesurable (Ω, \mathcal{F}) . On appelle v.a. sur (Ω, \mathcal{F}) , toute fonction $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$ l'ensemble $\{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq x\}$ est dans \mathcal{F} .
Si la fonction réelle X est une v.a. pour (Ω, \mathcal{F}) , on dit qu'elle est \mathcal{F} -mesurable.

Chapitre 1

Mesures du risque.

1.1 Le concept de mesure de risque.

Le risque de marché auquel est soumis, sur une période de temps $[t, t + \Delta t]$, un produit financier de valeur V est décrit par la variation de sa valeur sur cet intervalle de temps. Nous la noterons $L = V_{t+\Delta t} - V_t$. Cette variation de valeur L constitue un profit ou une perte (P&L) pour le détenteur du produit. Nous noterons indistinctement P&L ou L .

Il est impossible pour une institution financière de se couvrir complètement contre le risque de marché. Si dans un investissement, la perte de valeur encourue peut être sévère, elle cherchera à le quantifier. Une fois quantifiée la perte potentielle, l'institution financière pourra, soit refuser d'investir, soit mettre de côté un montant de capital qui lui servira de fond de garantie afin d'éviter le défaut de liquidité et la faillite.

Les mesures de risque sont des outils statistiques qui donnent des informations sur les pertes potentielles. Elles renvoient un nombre décrivant une caractéristique particulière de la distribution des pertes potentielle.

Dans ce chapitre, nous commençons par définir formellement ce qu'est une mesure de risque. Nous expliquons ensuite qu'elles sont les propriétés que doit posséder une mesure de risque pour être considérée comme cohérente. Enfin, nous présentons deux mesures de risque couramment utilisées actuellement : la *valeur risquée* (VaR) et la *valeur risquée conditionnelle* (CVaR).

Une mesure de risque se définit formellement comme suit [27, 28].

Définition 3 (Mesure de risque)

Soit (Ω, \mathcal{F}, P) un espace de probabilité et V un ensemble non vide de v.a. \mathcal{F} -mesurables à valeurs réelles. On appelle mesure de risque toute fonction $\rho : V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Mesures du risque cohérentes.

Pour être acceptable, une mesure du risque doit posséder certaines propriétés de cohérence. Ces propriétés de cohérence assurent que la mesure du risque considérée est compatible avec l'intuition que l'on a du risque. Delbaen, Artzer [27] définissent une mesure de risque comme suit :

Définition 4 (Mesure du risque cohérente (Delbaen 1999))

Soit L, L_1, L_2 les variations de valeur de trois produits financiers encourues à un horizon déterminé. Une mesure de risque $\rho : V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ au sens de la définition 3 est dite cohérente si

1. $L \geq 0 \Rightarrow \rho(L) \leq 0$,
2. $\forall a \in \mathbb{R} : \rho(a + L) = \rho(L) + a$ [invariance sous translation],
3. $\forall \lambda > 0 : \rho(\lambda L) = \lambda \rho(L)$ [homogénéité positive],
4. $\rho(L_1 + L_2) \leq \rho(L_1) + \rho(L_2)$ [subadditivité].

Ces propriétés de cohérence peuvent être lues comme suit :

1. L'invariance sous translation signifie que si on sait qu'il y aura un(e) gain (perte) certain(e) supplémentaire $a < 0$ ($a > 0$) à l'horizon T , alors la mesure de risque décroît (croît) exactement de a , et donc le risque diminue (augmente).
2. L'homogénéité positive implique que si un portefeuille est entièrement composé de a unités d'un même actif, alors le risque du portefeuille est exactement a fois plus grand que le risque encouru sur une unité de l'actif.
3. La propriété de subadditivité implique que la diversification d'un portefeuille doit entraîner une diminution du risque.

1.2 La valeur risquée (VaR)

La VaR est une mesure de risque largement utilisée pour mesurer le risque de marché. Elle est liée au concept de quantile d'une distribution.

Définition 5 (Plus grand α -quantile)

Soit F_X la fonction de distribution d'une v.a. réelle X sur l'espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) . Soit $0 < \alpha < 1$. Le réel

$$X^{(\alpha)} = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) > \alpha\}$$

est appelée le plus grand α -quantile de X

Définition 6 (VaR_α)

Supposons que nous nous trouvions à l'instant 0. Notons $V(0)$ la valeur présente d'un produit financier donné et $V(T)$ sa valeur à l'horizon T . Soit

$L = V(T) - V(0)$ la variation de valeur encourue à l'horizon T .
On appelle VaR à l'horizon T pour le niveau de rareté $\alpha \in (0, 1)$ le réel

$$VaR_\alpha(L) = \max(0, -L^{(\alpha)})$$

Où $L^{(\alpha)}$ est le plus grand α -quantile de la distribution de L .

Interprétation de la VaR.

La valeur risquée de L est paramétrée par deux données. L'horizon de temps considéré T et le niveau de confiance α . La VaR représente la plus petite des $\alpha 100\%$ pertes les plus importantes. C'est-à-dire le capital nécessaire pour couvrir les pertes dans $(1 - \alpha)100\%$ des cas.

Propriétés de la VaR.

La VaR n'est en général pas une mesure de risque cohérente. Elle possède les trois premières caractéristiques d'une mesure cohérente, mais n'est pas sous-additive. Ceci signifie que le capital de couverture pour un portefeuille peut être plus important que la somme des montants de couverture de chacun de ses composants pris séparément. Ceci est contre intuitif au point de vue économique.

Toutefois si la valeur du portefeuille peut être décrite comme la combinaison linéaire de v.a. dont la distribution conjointe est elliptique (c'est à dire une distribution dont la densité est constante sur des ellipsoïdes), la VaR sera une mesure de risque cohérente [35, 36]. Les distributions normales multivariées et les distributions student multivariées font partie des distributions elliptiques.

Remarque.

La VaR ne donne aucune indication sur la décroissance de queue de la distribution des pertes. Elle ne donne aucune indication quant à l'importance des pertes les plus graves. Elle ne peut répondre à la question "qu'elle est l'importance des pertes les plus importantes?".

Estimation de la VaR.

Le calcul de la $VaR_\alpha(L)$ se ramène au calcul du quantile $L^{(\alpha)}$.

1.3 La valeur risquée conditionnelle (CVaR)

La valeur risquée conditionnelle est une mesure de risque inventée en 1998 par Freddy Delbaen. Elle est définie comme suit :

Définition 7 ($CVaR_\alpha$) .

Supposons que nous nous trouvions à l'instant 0. Notons $V(0)$ la valeur présente d'un actif donné et $V(T)$ sa valeur à l'horizon T . Soit $L = V(T) -$

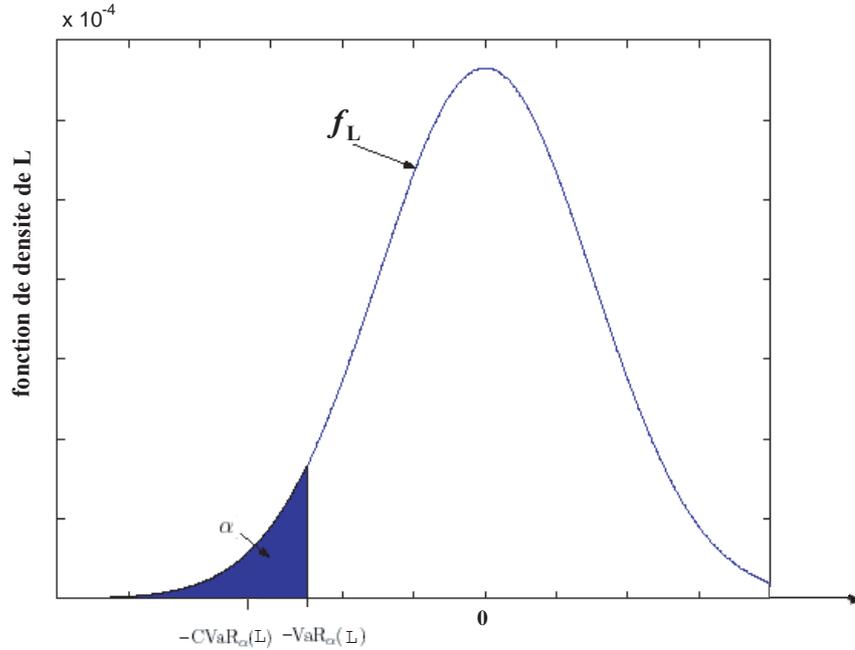


FIG. 1.1 – $VaR_\alpha(L)$ et $CVaR_\alpha(L)$.

$V(0)$ la perte encourue à l'horizon T . L est une variable aléatoire sur l'espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) .

Si L est une v.a. telle que $E[L^-] < \infty$ ¹, nous appellerons $CVaR_\alpha(L)$ à l'horizon T pour le niveau de rareté $\alpha \in (0, 1)$ le réel

$$CVaR_\alpha(L) = -\frac{1}{\alpha} \left(E[L \cdot I(L \leq L^{(\alpha)})] - L^{(\alpha)} \cdot (P[L \leq L^{(\alpha)}] - \alpha) \right) \quad (1.1)$$

où I représente l'indicatrice

Propriétés de la CVaR.

La $CVaR_\alpha$ est une mesure de risque cohérente [5].

Interprétation de la CVaR :

Une interprétation de la CVaR peut être tirée du résultat suivant :

Proposition 1 (Acerbi & Tasche 2001)

Supposons que L dans la définition 7 possède une fonction de distribution

¹ Où $x^- = \max(0, -x)$.

continue. Alors la $CVaR_\alpha(L)$ s'écrit

$$CVaR_\alpha(L) = -\frac{1}{\alpha} E[L \cdot I(L \leq L^{(\alpha)})] = -\frac{E[L \cdot I(L \leq L^{(\alpha)})]}{P(L \leq L^{(\alpha)})}$$

ou de manière équivalente

$$CVaR_\alpha(L) = -E[L | L \leq L^{(\alpha)}]$$

Preuve Cfr [7].

□

Dans le cas continu, la $CVaR_\alpha$ représente la moyenne des 100 α pourcents de pertes les plus grandes. Dans le cas particulier où $L^{(\alpha)} < 0$ alors $VaR_\alpha(L) = -L^{(\alpha)}$ et la $CVaR_\alpha(L)$ est la moyenne des pertes supérieures à la $VaR_\alpha(L)$. Dans le cas où la distribution des P&L est continue, la CVaR peut être redéfinie comme la moyenne des pertes au delà d'un *seuil* Y prédéfini. Elle est alors notée et définie comme suit :

$$CVaR_{[Y]}(L) = -E[L | L \leq Y]$$

La valeur risquée conditionnelle peut donc être interprétée intuitivement comme la moyenne des pertes extrêmes.

Revenons à la définition générale de la CVaR. On voit que le terme $L^{(\alpha)}$ ($(P[L \leq L^{(\alpha)}] - \alpha)/\alpha$ est nul si F_L est une fonction continue en $L^{(\alpha)}$. Si F_L est une fonction discontinue en $L^{(\alpha)}$, il peut être interprété comme l'excès de probabilité qu'il faut soustraire à $E[L \cdot I(L \leq L^{(\alpha)})]/\alpha$ quand l'évènement $\{L \leq L^{(\alpha)}\}$ a une probabilité supérieure à α .

Estimation de la CVaR.

Il existe un estimateur non-paramétrique simple de la $CVAR_\alpha$ telle que définie par Delbaen. Cet estimateur est consistant si $E[L^-] < +\infty$. Il est donné par le théorème suivant :

Théorème 1 (Acerbi & Tasche 2002) .

Soit $\alpha \in (0, 1)$ fixé, L une v.a. réelle telle que $E[L^-] < +\infty$. Soit (L_1, L_2, \dots) une séquence de réalisations indépendantes de L mises en ordre croissant. Alors

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P \left(-\frac{\sum_{i=1}^{\lfloor m\alpha \rfloor} L_i}{\lfloor m\alpha \rfloor} = CVaR_\alpha(L) \right) = 1$$

Et l'estimateur

$$-\frac{\sum_{i=1}^{\lfloor m\alpha \rfloor} L_i}{\lfloor m\alpha \rfloor}$$

est consistant.

Preuve Cfr. [6, 5].

□

1.4 Conclusions à ce chapitre.

Nous avons introduit dans ce chapitre le concept de mesure de mesure de risque. Le risque correspond aux profits et pertes ($P&L$) encourus sur une période donnée. Ces profits et pertes sont les variations L de la valeur du produit financier considéré.

Rappelons deux points essentiels de ce chapitre :

(i) Une mesure de risque est une fonction de la distribution d'une variable aléatoire. Il est préférable qu'une mesure de risque vérifie les propriétés de cohérence définies par Delbaen. En finance, les mesures de risque VaR et CVaR permettent de décrire des caractéristiques de la queue gauche de la distribution des P&L. Elles permettent de caractériser la probabilité qu'un produit financier puisse faire des pertes.

(ii) Nous voyons au travers de l'exemple de la VaR et de la CVaR, qu'une mesure de risque ne décrit en général qu'une *caractéristique, une dimension particulière du risque*. Comme nous le verrons par la suite², un produit A peut être jugé plus risqué qu'un produit B au regard de la VaR_{α_1} de ses P&L mais être jugé moins risqué que ce même produit B au regard de la VaR_{α_2} ou encore au regard de la $CVaR_{\alpha_1}$. Autrement dit, Le qualificatif "plus risqué que" peut dépendre de la mesure de risque particulière utilisée.

Pour une présentation extensive de la théorie des mesures de risque, nous renvoyons le lecteur aux travaux de Philippe Artzner, Freddy Delbaen [35, 36] sur les mesures de risque cohérentes et aux travaux de Carlo Acerbi et Dirk Tasche [3, 5, 6, 7, 8, 74, 75] ainsi qu'aux travaux de Rockafellar, Stanislav Uryasev [64, 63] et de Georg Pflug [58] sur la CVaR.

² Cfr. chapitre 6.

Chapitre 2

Modèle de prix à variance stochastique.

Dans ce mémoire, nous considérons des produits financiers dont les valeurs sous-jacentes sont des cours d'actions¹. Les mesures de risques sur un produit financier déterminé sont des fonctions de la distribution des variations de sa valeur.

Calculer la VaR_α et la $CVaR_\alpha$ d'un produit en recourant à une approche historique permet mal d'anticiper l'évolution des processus de prix. Il est nécessaire de pouvoir décrire l'évolution du prix du produit financier à partir d'un modèle dynamique intégrant non seulement les informations tirées des dernières valeurs des cours mais respectant également la dynamique des cours observée dans un passé plus lointain. Plutôt que d'ajuster directement un processus sur l'évolution des variations du produit financier, nous proposons d'ajuster des modèles de prix à chacune des actions sous-jacentes au produit. Ces modèles de prix donneront des informations sur la distribution des prix futurs et donc sur la distribution des pertes de valeur potentielles du produit.

Dans ce chapitre, nous commençons par expliquer les propriétés statistiques empiriques des cours des actions (paragraphe **2.1**). Ensuite, nous présentons un modèle de prix à variance stochastique compatible avec ces observations empiriques (paragraphe **2.2**). Dans ce modèle de prix, le processus de rendement est modélisé par un processus AR-GARCH dont l'innovation est une v.a. student. Nous décrivons la dépendance entre les rendements de chacune des actions par la dépendance stochastique entre les termes d'innovation. Ceux-ci possèdent une fonction de distribution conjointe que nous estimerons au moyen de la théorie des copules (paragraphe **2.3** et **2.4**).

¹Nous appelons produit financier par exemple une option dont les valeurs sous-jacentes sont des cours d'actions, ou un portefeuille composé d'actions, ou encore un portefeuille contenant à la fois des actions et des options sur actions,...

Enfin, nous montrons comment simuler les prix des actions sous-jacentes au produit financier considéré en tenant compte de la dépendance entre les rendements de chacune de ces actions (paragraphe 2.5 et 2.6).

2.1 Propriétés statistiques des taux de rendement des actions.

Propriétés statiques.

Dans les années soixante Mandelbrot [54] puis Fama [38] ont les premiers montré que les taux de rendement des produits financiers ne possèdent pas, en général, des distributions gaussiennes. Mandelbrot a montré que leur distribution empirique présente une kurtosis nettement supérieure à celle d'une gaussienne. Leur fonction de densité empirique possède des *queues plus épaisses et un mode plus dense* qu'une densité gaussienne.

Depuis lors, de nombreuses études empiriques ont confirmé ces résultats. En particulier Ernst Eberlein[31, 32, 33] a montré que, plus l'horizon de temps considéré pour le calcul du rendement est proche, plus les queues de la densité empirique du taux de rendement sont épaisses. Autrement dit, plus la période d'investissement est courte, plus l'investissement est sujet à des rendements extrêmes. Inversement, plus la période d'investissement considérée est longue, plus la distribution empirique du taux de rendement se rapproche d'une gaussienne.

La distribution du taux de rendement peut être considérée symétrique autour d'une moyenne pour la majeure partie des actifs. Toutefois, il a été mis en évidence que la distribution du taux de rendement de certaines actions présente une asymétrie significative [13]. Cette asymétrie est expliquée par le fait que le marché réagit de façon différente selon que le rendement réalisé est négatif ou positif. Une valeur négative du taux de rendement entraîne une baisse de sa variance tandis qu'une valeur positive entraîne un accroissement de sa variance.

Afin de tenir compte de la possibilité de rendements extrêmes, il est nécessaire de les modéliser par des distributions avec des queues plus épaisses que celles d'une gaussienne. Si on considère que l'asymétrie des taux de rendement est non significative, une distribution t-student est une candidate possible.

Si par contre, l'asymétrie est significative, une distribution hypergéométrique généralisée est une candidate préférable ².

² La fonction de distribution d'une v.a. hypergéométrique généralisée est caractérisée par quatre paramètres. Globalement, le premier et le second paramètres décrivent la

Propriétés dynamiques.

Les études empiriques menées sur les propriétés statistiques des taux de rendement ont également montré que ces derniers ne sont quasiment pas corrélés dans le temps. Cependant cela ne signifie pas qu'ils sont indépendants. En effet, les taux de rendements présentent une dépendance qui se manifeste par la présence d'autocorrélation entre les carrés des taux de rendements. Dans le cas de rendements journaliers, cette corrélation reste significativement positive sur plusieurs jours. Pratiquement, on observe qu'en valeur absolue, un grand taux de rendement est suivi par un grand taux de rendement et qu'un petit taux de rendement est suivi par un petit taux de rendement. Notons toutefois que si on peut anticiper l'ordre de grandeur du taux de rendement futur, son signe reste totalement imprévisible.

La dernière propriété essentielle mise en évidence par les études empiriques est que les taux de rendement ont un comportement hétéroscédastique. Leur variance suit une évolution "en cluster".

Afin de capturer le caractère hétéroscédastique des rendements et tenir compte de la possibilité de rendements extrêmes, nous modéliserons l'évolution du taux de rendement par un processus $AR(r)$ -GARCH(p,q) dont le terme d'erreur a une loi conditionnelle student. Ce modèle permet de capturer l'ensemble des propriétés empiriques du taux de rendement excepté l'asymétrie. Si l'asymétrie est significative, il faudra recourir à un autre type de processus. Par exemple un $AR(r)$ -EGARCH(p,q)³.

Dans le cadre de ce mémoire, nous ne présenterons pas l'ensemble des modélisations $AR(r)$ -GARCH(p,q) et $AR(r)$ -EGARCH(p,q) possibles pour des termes d'erreur de distribution conditionnelle hypergéométrique généralisée. Nous nous limiterons au développement d'un modèle de taux de rendement $AR(r)$ -GARCH(p,q) dont le terme d'erreur suit une distribution conditionnelle student. On peut tenter de justifier ce choix de façon théorique ou de façon pratique.

Du point de vue théorique, nous disposons de deux arguments. Tout d'abord, comme nous considérerons dans ce travail une période d'investissement de trois mois, la distribution empirique du taux de rendement trimestriels

moyenne et la variance de la v.a., le troisième paramètre décrit l'asymétrie par rapport à la moyenne et le quatrième paramètre décrit l'épaisseur des queues de la distribution. Les distributions hypergéométriques généralisées présentent donc, en théorie, une grande flexibilité dans leur ajustement à des données empiriques. Pour plus de détails, voir les travaux de Ernst Eberlein [31, 32, 33].

³Voir par exemple le travail de A. Louichi [53].

présentera des queues semi-épaisses⁴. La distribution student qui permet d'envisager les rendements extrêmes sans qu'ils soient 'trop extrêmes' est donc une candidate acceptable.

Ensuite, Bouchaud [13] a montré que, pour une période d'investissement supérieure à 50 jours, la corrélation entre les taux de rendement passés d'une action et la volatilité actuelle du taux de rendement n'est pas significativement différente de zéro. Par conséquent on peut considérer que l'asymétrie des taux de rendement sera inexistante pour une période d'investissement de trois mois. Toutefois ajuster le modèle de taux de rendement sur un historique de rendements trimestriels pose problème. En effet, comme les historiques de prix considérés en pratique par les analystes du risque ne couvrent pas plus de quatre années précédentes, le nombre de données disponibles pour l'ajustement est particulièrement réduit⁵. La qualité des estimations des paramètres du modèle de prix est faible. Nous voyons donc que la justification théorique du modèle conduit à une impasse pratique. Nous justifierons donc notre modèle par des arguments pratiques.

Si on désire ajuster le modèle de taux de rendement sur des données hebdomadaires, les estimées des paramètres seront de meilleure qualité. La période d'investissement considérée *dans le modèle* sera alors inférieure à un mois. Pour obtenir une réalisation du taux de rendement trimestriel futur, nous simulerons un scénario des taux de rendement hebdomadaires sur trois mois. Comme le modèle doit décrire l'évolution des taux de rendement hebdomadaires, il serait souhaitable de généraliser le modèle AR(r)-GARCH(p,q) au cas où le terme d'innovation suivrait conditionnellement une loi hypergéométrique généralisée. Toutefois, à la lecture des travaux de Ernst Eberlein et Karsten Prause[32], nous savons que l'ajustement d'un modèle de taux de rendement, dont le terme d'innovation a une loi conditionnelle hypergéométrique généralisée, présente de nombreuses difficultés numériques (problèmes d'optimisation raides,...) qui contribuent à une diminution de la qualité des estimées des paramètres.

Aussi bien que les lois hypergéométriques généralisées soient préférables en théorie, nous décidons d'utiliser dans ce mémoire un modèle AR(r)-GARCH(p,q) dont le terme d'innovation suit une distribution conditionnelle student pour décrire l'évolution de taux de rendement hebdomadaires. Ce faisant, nous négligerons l'asymétrie potentielle des taux de rendement hebdomadaires.

⁴c'est à dire des queues peu épaisses.

⁵ Par exemple pour un historique de 3 ans, nous ne disposerions que de 12 rendements trimestriels!

2.2 Modèle de prix.

Considérons le modèle de prix suivant

$$S_t = S_0 \exp(R_t) \quad \text{avec } t \in \mathcal{R} \quad (2.1)$$

Le taux de rendement R sur la période $[0, t]$ s'écrit

$$R_t = \log \left(\frac{S_t}{S_0} \right)$$

Le taux de rendement sur la période $[t, t + \Delta t]$ est noté

$$\Delta R_t \doteq R_{t+\Delta t} - R_t = \log \left(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t} \right)$$

Par conséquent, la variation de prix de l'actif sur la période $[t, t + \Delta t]$ donnée par

$$\Delta S_t = S_{t+\Delta t} - S_t$$

se réécrit

$$\Delta S_t = S_0 \exp(R_t) \cdot [\exp(\Delta R_t) - 1] = S_t [\exp(\Delta R_t) - 1] \quad (2.2)$$

2.2.1 Modèle de rendement.

Pour modéliser l'hétéroscédasticité des rendements, nous utiliserons un AR(r)-GARCH(p,q). Pour tenir compte des queues épaisses de la distribution des rendements, nous utiliserons un terme erreur possédant une distribution student.

Le modèle de rendement s'écrit comme suit

$$\Delta R_t = m_t + \epsilon_t \quad (2.3)$$

avec

$$m_t = \alpha + \beta_1 \Delta R_{t-\Delta t} + \beta_2 \Delta R_{t-2\Delta t}$$

$$\epsilon_t \doteq \sigma_t \sqrt{\frac{\nu-2}{\nu}} \cdot X_t$$

$$X_t \sim t_\nu$$

Où X_t est une student centrée à ν degrés de liberté et

$$\sigma_t^2 = c + a_1 \epsilon_{t-\Delta t}^2 + a_2 \epsilon_{t-2\Delta t}^2 + b_1 \sigma_{t-\Delta t}^2 + b_2 \sigma_{t-2\Delta t}^2$$

Le terme d'erreur ϵ_t représente le *rendement centré* sur l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$

$$\epsilon_t = \Delta R_t - m_t$$

et le terme $\sqrt{\frac{\nu-2}{\nu}} X_t$ représente le rendement centré dévolatilisé. Le modèle peut s'écrire comme suit

$$\Delta R_t = \alpha + \beta_1 \Delta R_{t-\Delta t} + \beta_2 \Delta R_{t-2\Delta t} + \sigma_t \sqrt{\frac{\nu-2}{\nu}} X_t \quad (2.4)$$

2.2.2 Estimation des modèles de rendement de cinq actions.

Pour estimer les paramètres du modèle de volatilité stochastique, nous utiliserons les routines implémentées dans le module GARCH de S-Plus.

Dans paragraphe, nous estimons les modèles de rendements de cinq actions : Solvay, Colruyt, Dexia, Agfa Gevaert et Interbrew. La figure [Fig.2.1] représente l'évolution du cours hebdomadaire⁶ de ces 5 actions du 7 janvier 2000 au 16 mai 2003. Le cours hebdomadaire de la cinquième action n'est disponible qu'à partir du premier décembre 2000. Les rendements hebdomadaires correspondants sont représentés par la figure [Fig.2.2]. Les modèles de rendement pour chacune de ces 5 actions sont⁷ :

Modèles de rendement					
Action	Modèle	α	β_1	β_2	c
Solvay	AR(0)-GARCH(1,0)	-0.001792	0	0	0.001018
Colruyt	AR(2)-GARCH(1,1)	0.00215610	-0.08264951	-0.29586084	0.00003645
Dexia	AR(1)-ARCH(1,1)	0.0030281	-0.1270446	0	0.0002004
Agfa Gevaert	AR(0)-GARCH(1,0)	-0.0004255	0	0	0.0027
Interbrew	AR(0)-GARCH(1,0)	0.0008961	0	0	0.0021814

Action	Modèle	a_1	a_2	b_1	b_2	ν
Solvay	AR(0)-GARCH(1,0)	0.157595	0	0	0	5
Colruyt	AR(2)-GARCH(1,1)	0.10957811	0	0.88287932	0	3
Dexia	AR(1)-ARCH(1,1)	0.2041863	0	0.7640311	0	4
Agfa Gevaert	AR(0)-GARCH(1,0)	0.1571	0	0	0	6
Interbrew	AR(0)-GARCH(1,0)	0.0961550	0	0	0	4

⁶Le cours est pris chaque vendredi à la clôture.

⁷Pour les développements, nous renvoyons le lecteur à l'annexe E.

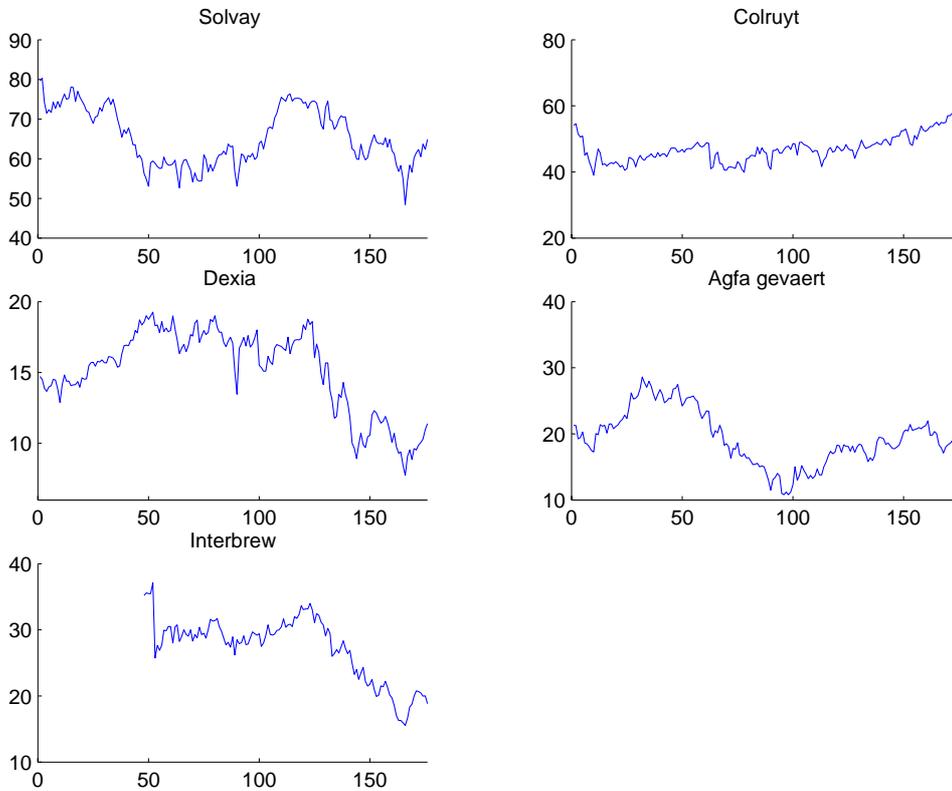


FIG. 2.1 – Evolution des cours.

2.3 Distribution conjointe et structure de dépendance.

Pour connaître la distribution des valeurs d'un portefeuille, il est nécessaire de pouvoir anticiper l'évolution conjointe des facteurs de risque. Les facteurs de risque d'un portefeuille sont les taux de rendement de ses sous-jacents. Ils constituent les composantes aléatoires des prix futurs. Il s'agit donc d'estimer la distribution conjointe d'une série de taux de rendement. Comme nous disposons déjà de la loi marginale de chacun de ces taux de rendement, il reste à déterminer la manière dont ils varient ensemble. C'est-à-dire le structure de dépendance entre ces taux de rendement.

2.3.1 Les limites de la covariance.

Une première solution serait d'utiliser la matrice de covariance⁸ pour approximer la dépendance entre les taux de rendement centrés.

Toutefois, la covariance ne permet pas de décrire correctement la dépendance entre des taux de rendement et ce pour deux raisons.

La première est d'ordre théorique. La covariance ne permet de caractériser qu'une dépendance linéaire entre deux variables. On peut rencontrer des situations où il n'y a pas de dépendance linéaire entre deux v.a. (et donc leur covariance est nulle) sans pour autant qu'elles soient indépendantes⁹. Pratiquement, supposons que, suite à une modélisation particulière, on obtienne une covariance nulle entre les taux de rendement de deux actions appartenant à un même secteur industriel. Il est évident qu'on ne peut pas conclure à l'absence de dépendance entre ces taux de rendement.

La deuxième raison est d'ordre empirique. Les taux de rendement présentent un comportement de dépendance extrême qui ne peut être modélisé par la covariance. Tant qu'ils ne prennent pas des valeurs trop grandes, les taux de rendement varient indépendamment. Mais lorsqu'ils prennent des valeurs extrêmes, les taux de rendement les prennent souvent tous en même temps. On parle de *dépendance extrême*. C'est typiquement le phénomène que l'on observe lors d'un crash boursier. Tous les prix chutent très fortement ensemble entraînant une forte baisse conjointe de tous les rendements.

On ne peut donc se contenter de modéliser la dépendance entre les taux de rendement par leur matrice de covariance. Il faut chercher à approximer plus précisément la distribution conjointe des taux de rendement. La théorie des copules présente des résultats qui permettent de modéliser une distribution conjointe. Et de parvenir à une description plus complète de la dépendance entre des variables aléatoires.

2.3.2 Le concept de copule, définition et propriétés.

Nous présentons maintenant le concept de copule (appelée aussi copula) et ses propriétés essentielles que nous utiliserons dans le cadre de ce mémoire.

Qu'est ce qu'une copule? Une copule est une fonction de distribution multivariée définie sur l'hypercube $[0, 1]^n$ dont les marginales unidimensionnelles sont uniformes.

Définition 8 (Copule) .

⁸Plus précisément le facteur de Cholesky de la matrice de covariance.

⁹Il suffit de considérer une v.a. normale standard Z et la v.a. produit $X=Y.Z$ où Y est une variable de Bernoulli qui vaut 1 avec une probabilité $1/2$ et -1 avec une probabilité $1/2$. Ces deux v.a. ont une covariance nulle mais ne sont pas indépendantes car leur somme n'est pas une normale.

Soit $\forall 1 \leq i \leq n : u_i \sim U_{[0,1]}$, une copule est une fonction de distribution multivariée

$$C : [0, 1]^n \longrightarrow [0, 1] : (u_1, u_2, \dots, u_n) \longrightarrow C(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

dont les marginales F_i sont uniformes. C'est-à-dire que $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ si toutes les coordonnées de u sont 1 sauf u_i alors $F_i(u_i) = C(u) = u_i$.

2.3.3 Décomposition d'une distribution conjointe au moyen des copules

Si on connaît les distributions marginales des composantes d'un ve.a., il est possible d'établir une correspondance unique entre la distribution conjointe et une copule. C'est le résultat du théorème de Sklar :

Théorème 2 (Sklar 1959) .

Soit F une distribution jointe de distributions marginales F_1, \dots, F_n . Il existe une copule C telle que

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in [-\infty, +\infty]^n : F(x) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$$

De plus, si les distributions marginales sont continues, alors C est unique. Inversément, si C est une copule et F_1, \dots, F_n sont des distributions univariées, alors F définie comme

$$F(x) \doteq C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$$

est une fonction de distribution dont les marginales sont F_1, \dots, F_n .

Preuve Cfr (Nels98) et (Sklar83)

□

Le théorème de Sklar est central dans la théorie des copules. Il élucide le lien que jouent les copules dans la relation entre les fonctions de distribution multivariées et leurs marginales.

En deux mots, le théorème de Sklar nous dit que si u est un ve.a. dont les distributions marginales des composantes sont connues, alors la distribution conjointe F définit une copule $C(u) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n))$. Où les F_i^{-1} sont les quasi-inverses des F_i .

Il dit également que si les lois marginales d'un ve.a. sont connues, chaque copule définit une et une seule distribution jointe. Autrement dit il existe une et une seule copule qui permet de reconstruire la distribution jointe à partir des distributions marginales.

2.3.4 La copule comme structure de dépendance

Soit le vecteur $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ des facteurs de risque de distribution jointe $F_X(x) = F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n)$. Que représente la copule C associée à la distribution jointe F_X ? Puisque F_X décrit à la fois les distributions marginales et la structure de dépendance des facteurs de risque alors, si les distributions marginales sont fixées, déterminer la copule revient à rechercher la structure de dépendance entre les facteurs de risque. Une copule définit donc une structure de dépendance. La copule associée à une distribution jointe F est la *structure de dépendance de F* . Toute l'information sur la dépendance contenue dans F est contenue dans la copule associée.

Définition 9 (copule associées à un ve.a.) .

On appelle copule associée au ve. a. (X_1, \dots, X_n) l'unique copule qui lie la fonction de distribution jointe de (X_1, \dots, X_n) à ses marginales F_1, \dots, F_n . La copule associée à (X_1, \dots, X_n) est donc la fonction de distribution du ve.a. $(F_1(X_1), \dots, F_n(X_n))$.

Une propriété essentielle des copules est leur invariance sous transformation strictement croissante. Cette propriété d'invariance des copules découle directement du théorème de Sklar.

Théorème 3 (Invariance sous transformation) .

Soit un vecteur aléatoire (X_1, \dots, X_n) . Soit $T_i : Im(X_i) \rightarrow Im(X_i) : x_i \rightarrow T_i(x_i)$ des transformations strictement croissantes.

(i) *La copule C associée au vecteur aléatoire (X_1, \dots, X_n) est également la copule associée au ve.a. $(T_1(X_1), \dots, T_n(X_n))$.*

Autrement dit $\forall (y_1, \dots, y_n) \in Im X_1 \times Im X_2 \times \dots \times Im X_n :$

$$F_{T(X)}(y_1, \dots, y_n) = C(F_{T_1(X_1)}(y_1), \dots, F_{T_n(X_n)}(y_n))$$

(ii) $F_X(x_1, \dots, x_n) = F_{T(X)}(T_1(x_1), \dots, T_n(x_n))$.

Preuve Cfr Annexe A.

□

Une conséquence importante de la propriété d'invariance des copules est que, si on applique des transformations T_i strictement croissantes aux facteurs de risques X_i , alors les images $T_i(X_i)$ possèdent encore la même structure de dépendance que les facteurs de risque X_i .

Autrement dit, la structure de dépendance est conservée sous transformation croissante.

Il existe différentes familles de copules qui se distinguent par les différents types de dépendance extrême qu'elles décrivent et le nombre de paramètres

qui les définissent. On distingue notamment les copules elliptiques, les copules archimédiennes et les copules aux va. extrêmes. Certaines présentent la même dépendance aux extrêmes positifs qu'aux extrêmes négatifs (exemple : les copules elliptiques). D'autres copules présentent une dépendance extrême asymétrique (exemple : copules archimédiennes).

Nous ne décrivons pas dans ce mémoire les différentes familles de copules. Pour une description de ces familles de copules, nous renvoyons le lecteur aux travaux de Roger B. Nelsen (Nels98), de Eric Bouyé¹⁰ et de Thierry Roncalli¹¹ (Ronc02).

2.3.5 Approximation d'une distribution conjointe.

Nous avons vu que le théorème de Sklar permet de reconstruire la distribution conjointe d'un vecteur aléatoire si on dispose des distributions marginales de ses composantes et si on connaît la copule particulière décrivant sa structure de dépendance. En pratique, on peut disposer facilement d'approximations paramétriques des marginales. Mais trouver la copule unique associée est un problème difficile. La forme même de cette copule peut être inconnue. Une solution consisterait alors à chercher parmi les familles de copules connues celle qui approximerait le mieux la structure de dépendance correspondant aux données. Toutefois, *"il n'existe pas de méthode rigoureuse pour choisir entre différentes familles de copules"* [30]. En pratique, on se contente donc d'approximer la structure de dépendance par une copule connue qui permet de modéliser en partie la dépendance extrême et dont on peut facilement estimer les paramètres.

2.4 Modélisation de la dépendance entre les rendements des actifs.

Soit un portefeuille de n actifs (S^1, \dots, S^n) . Nous décrivons la dépendance entre les variations des prix des actifs par la distribution conjointe entre les taux de rendement centrés dévolatilisés (*trcd*). Par le théorème de Sklar, nous pouvons décomposer cette distribution conjointe en deux parties : l'ensemble des marginales des différents *trcd* et la structure de dépendance entre ces rendements modélisée au moyen d'une copule C^n .

Comme les v.a. X_t^i sont obtenues en multipliant par des facteurs positifs les rendements centrés dévolatilisés, le vecteur (X^1, \dots, X^n) possèdent la même copule que les *trcd*. Et on décrira la dépendance entre les variations des

¹⁰Financial Econometrics Research Centre(FERC), <http://www.business.city.ac.uk/ferc/wpapers.html>

¹¹Groupe de Recherche opérationnelle du Crédit Lyonnais, <http://gro.creditlyonnais.fr>

prix des actifs par la distribution conjointe de (X^1, \dots, X^n) . Par soucis de clareté de l'exposé, nous appellerons dorénavant "rendements" les variables aléatoires X^1, \dots, X^n .

Pour des raisons de facilité de calibration et pour ses qualités dans la prise en compte des mouvements extrêmes, nous approximerons la copule C^n par une t -copule $C_{\nu, \Sigma}^n$.

La distribution conjointe $F(X^1, \dots, X^n)$ sera donc approximée par :

$$\hat{F}(X^1, X^2, \dots, X^n) = C_{\Sigma, \nu}^n(F_{\nu_1}(X^1), \dots, F_{\nu_n}(X^n)) \quad (2.5)$$

Pour expliquer la méthode d'estimation des paramètres de la t -copule, nous commençons par présenter une propriété de représentation des distributions student multivariées et nous rappelons ce qu'est une t -copule multivariée.

2.4.1 Le vecteur student multivarié.

La distribution student multivariée est une distribution elliptique. Les distributions elliptiques sont caractérisées par le fait que les occurrences de même densité forment des ellipsoïdes. On définit formellement une distribution elliptique comme suit.

Définition 10 (Distribution elliptique) .

Un vecteur aléatoire X à valeurs dans \mathcal{R}^n a une distribution elliptique si et seulement si il existe un vecteur $\mu \in \mathcal{R}^n$, une matrice $\Sigma \in \mathcal{R}^{n \times n}$ symétrique semi-définie positive et une fonction $\phi : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{R}$ tel que la fonction caractéristique $\Phi_{X-\mu}$ de $X - \mu$ s'écrit :

$$\Phi_{X-\mu}(t) = \phi(t^T \Sigma t) \quad , t \in \mathcal{R}$$

Le triplet (μ, Σ, ϕ) constitue les paramètres de la distribution elliptique. On note

$$X \sim E_n(\mu, \Sigma, \phi)$$

Les distributions gaussiennes et les distributions student constituent des exemples de distributions elliptiques univariées. La distribution student multivariée est définie comme suit.

Définition 11 (Student multivariée standard) .

On appelle student multivariée standard $t_{\nu, \Sigma}$ le vecteur aléatoire dont les

composantes sont des v.a. student standard ¹² à ν degrés de liberté et dont la valeur de la fonction de distribution en $x \in \mathcal{R}^n$ est

$$t_{\nu, \Sigma}^d(x) = \int_{-\infty}^x \frac{\Gamma((\nu + n)/2)}{\Gamma(\nu/2)(\nu\pi)^{n/2} |\Sigma|^{1/2}} (1 + y^T \Sigma^{-1} y / \nu)^{-(\nu+n)/2} dy \quad (2.6)$$

où $\Sigma \in \mathcal{R}^{n \times n}$ est symétrique et semi-définie positive. $|\Sigma|$ est son déterminant. Σ est appelée la matrice de paramètres de forme.

Si $\nu > 2$ la matrice Σ est la matrice de corrélation entre les composantes de $t_{\nu, \Sigma}^n$ et

$\frac{\nu}{\nu-2} \Sigma$ est la matrice de covariance de $t_{\nu, \Sigma}^n$.

Et si $\nu \leq 2$, alors les marginales n'ont pas de second moment et la matrice de corrélation n'est pas définie .

Définition 12 (Student multivariée) .

Soit $\Sigma \in \mathcal{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique et semi-définie positive, on appelle student multivariée à ν degrés de liberté, matrice de paramètres de forme Σ et moyennes μ le vecteur aléatoire X défini par $X = \mu + Y$ où $Y \sim t_{\nu, \Sigma}$.

Une student multivariée standard est simplement une student multivariée dont le vecteur des moyennes est nul.

La distribution conjointe d'une student multivariée est déterminée par les distributions marginales de ses composantes, par son degré de liberté ν et par les coefficients de corrélation linéaire entre chacune de ses composantes.

Le théorème suivant¹³ établit une propriété de représentation des distributions student multivariées. Cette propriété sera très utile pour la simulation de la distribution conjointe des rendements.

Théorème 4 (théorème de représentation) .

Soit $\mu \in \mathcal{R}^n$, soit $\nu > 2$ et soit Σ une matrice définie positive dont les éléments diagonaux sont tous égaux à un.

Le vecteur aléatoire X a une distribution student multivariée $t_{\nu, \Sigma}$ de moyennes μ et de matrice de covariance $\frac{\nu}{\nu-2} \Sigma$ si et seulement si il possède la représentation suivante

$$X \sim \mu + \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{\Upsilon}} Z \quad (2.7)$$

où $\Upsilon \sim \chi_{\nu}^2$ et $Z \sim N(0, \Sigma)$ indépendant de Υ .

Preuve Cfr. annexe A

□

¹²C'est-à-dire dont la moyenne est nulle.

¹³Ce théorème est énoncé dans [51].

2.4.2 Simulation d'une student multivariée.

La méthode de simulation d'une student multivariée est basée sur la propriété de représentation des students multivariées. Le théorème de représentation [4] fournit un algorithme de simulation pour une student multivariée dont la matrice de corrélation Σ est définie positive.

Algorithme

- (1) Réaliser la décomposition¹⁴. $C^T C = \Sigma$.
- (2) Simuler n normales standard indépendantes z_1, \dots, z_n .
- (3) Simuler une v.a. chi-carrée Υ à ν degrés de liberté.
- (4) Calculer $y = Cz$.
- (5) Calculer $x = \mu + \frac{\sqrt{\Upsilon}}{\sqrt{\nu}}y$.

Remarquons que pour garantir que la décomposition de Cholesky utilisée dans l'étape (1) existe, il est nécessaire d'imposer que Σ soit définie positive.

□

2.4.3 La copule student multivariée.

Définition 13 (copule student multivariée) .

La copule student multivariée, ou t -copule, est l'unique copule associée au vecteur student multivarié standard $t_{\nu, \Sigma}^n$.

Elle s'écrit

$$\begin{aligned} C(u_1, \dots, u_d; \nu, \Sigma) &= t_{\nu, \Sigma}^n(t_{\nu}^{-1}(u_1), \dots, t_{\nu}^{-1}(u_n)) \\ &= \int_{-\infty}^{t_{\nu}^{-1}(u)} \frac{\Gamma((\nu + n)/2)}{\Gamma(\nu/2)(\nu\pi)^{n/2} |\Sigma|^{1/2}} (1 + y^T \Sigma^{-1} y / \nu)^{-(\nu+n)/2} dy \end{aligned}$$

où $t_{\nu, \Sigma}^n(t_{\nu}^{-1}(u_1), \dots, t_{\nu}^{-1}(u_n))$ avec $(u_1, \dots, u_n) \in [0, 1]^n$

On note $c(\cdot; \nu, \Sigma)$ la densité¹⁵ de la t -copule $C_{\nu, \Sigma}$. Pour $u \in [0, 1]^n$, elle s'écrit :

$$\begin{aligned} c(u; \nu, \Sigma) &= \frac{\Gamma((\nu + n)/2) [\Gamma(\nu/2)]^{n-1}}{[\Gamma((\nu + 1)/2)]^n |\Sigma|^{1/2}} \\ &\quad \left[\prod_{i=1}^n (1 + (t_{\nu}^{-1}(u_i))^2 / \nu)^{(\nu+1)/2} \right] \cdot (1 + t_{\nu}^{-T}(u) \Sigma^{-1} t_{\nu}^{-1}(u) / \nu)^{-(\nu+d)/2} \end{aligned}$$

Dans la suite nous ne considérons plus que des v.a. student standard et des t -copule pour lesquelles $\nu > 2$.

¹⁴Cette décomposition peut être, par exemple, la décomposition de Cholesky si Σ est symétrique définie positive.

¹⁵ c'est-à-dire $c(\cdot, \nu, \Sigma) = \frac{\partial^n C(\cdot, \nu, \Sigma)}{\partial u_1 \dots \partial u_n}$

2.4.4 Estimation de la t-copule.

Supposons qu'on désire approximer par une t -copule la structure de dépendance d'un v.e. aléatoire de distribution inconnue mais dont les lois marginales sont connues. Supposons qu'on dispose d'un échantillon de réalisations $X = \{X_1, \dots, X_m\}$ avec $X_i = (x_i^1, \dots, x_i^n)$. Comment estimer les paramètres (Σ, ν) ?

Nous présentons ici une méthode proposée par Zeevi et Mashal sur base des résultats de Lindskog (2000, 2001a) pour estimer la matrice de corrélation d'une student multivariée.

Cette méthode utilise la fonction de vraisemblance de l'échantillon $G(X_i)$ où, $G(X_i) = (t_{\nu_1}(x_i^1), \dots, t_{\nu_n}(x_i^n))$ et t_{ν_i} est la fonction de distribution de la student univariée à ν_i degrés de liberté. Cette fonction de vraisemblance s'écrit

$$L_m(\nu, \Sigma) = \prod_{i=1}^m c(G(X_i); \nu, \Sigma) \quad (2.8)$$

Où c est la densité de la t-copule. La fonction de log vraisemblance de $G(X_i)$ s'écrit

$$l_m(\nu, \Sigma) = \sum_{i=1}^m \log [c(G(X_i); \nu, \Sigma)] \quad (2.9)$$

Zeevi et Mashal adoptent une approche différente du maximum de vraisemblance. Ils ne calculent pas les estimateurs du maximum de vraisemblance de (ν, Σ) .

Dans leur approche, la fonction de vraisemblance n'est pas simultanément maximisée suivant Σ et suivant ν . Ils commencent par estimer Σ . Ensuite, à partir de cette estimation $\hat{\Sigma}$, ils recherchent le nombre de dll ν qui maximise la fonction de vraisemblance.

Estimation de Σ .

L'estimation de la matrice de corrélation Σ d'un vecteur aléatoire à valeur dans \mathcal{R}^n se ramène à rechercher le coefficient de corrélation $\rho(X, Y)$ entre chaque couple (X, Y) de composantes.

Soit deux v.a. X et Y et soit un échantillon d'observations $\{(x_i, y_i) \mid i = 1..m\}$, la corrélation entre X et Y peut être estimée à l'aide de l'estimateur empirique

$$\hat{\rho}_{emp}(X, Y) = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^m (y_i - \bar{y})^2}}$$

Toutefois, cet estimateur présente un biais important si les v.a. X et Y possèdent des distributions à queues épaisses. De plus, il présente une variance élevée¹⁶. Par conséquent, il est utile de développer un autre estima-

¹⁶Lindskog (2000)

teur. L'estimateur proposé est construit à partir des propriétés des distributions students multivariées.

Dans les paragraphes suivant nous présentons des concepts de dépendance entre v.a. nécessaires à la construction de l'estimateur de ρ . Les définitions de ce paragraphe sont tirées de Nelsen(1999).

1-LE TAUX DE KENDALL.

Le taux de Kendall est utilisé pour décrire la relation entre deux variables aléatoires. Il est défini comme

Définition 14 (Taux de Kendall) .

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire à valeurs dans \mathcal{R}^2 . On appelle taux de Kendall de (X, Y) la constante réelle

$$\tau(X, Y) = P\{(X_i - X_j)(Y_i - Y_j) > 0\} - P\{(X_i - X_j)(Y_i - Y_j) < 0\} \quad (2.10)$$

où (X_i, Y_i) et (X_j, Y_j) sont des copies de (X, Y) , indépendantes entre elles.

Le taux de Kendall décrit les propriétés de concordance de la relation entre deux variables aléatoires X et Y . Définissons la concordance.

Définition 15 (Concordance entre deux réalisations) .

Soit (x_1, y_1) et (x_2, y_2) deux réalisations d'un même vecteur aléatoire (X, Y) dont les composantes sont continues. On dira que les réalisations (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont concordantes si $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) > 0$ et on dira que (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont discordantes si $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) < 0$.

Si $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) = 0$ parce que $x_1 = x_2$ et/ou $y_1 = y_2$, on dira que les couples (x_1, y_1) et (x_2, y_2) ne sont ni discordants, ni concordants. Si $x_1 = x_2$ ($y_1 = y_2$) on dira qu'il y a "un x (un y) de trop".

Par cette définition on voit que le taux de Kendall mesure l'importance de la probabilité de concordance par rapport à la probabilité de discordance entre (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) . Le taux de Kendall possède les propriétés suivantes :

Propriété 1 .

Pour chaque paire de v.a. continues (X, Y) ,

- 1. $\tau(X, Y)$ est défini et*
- 2. $-1 \leq \tau(X, Y) \leq 1$, $\tau(X, X) = 1$ et $\tau(X, -X) = -1$*
- 3. $\tau(X, Y) = \tau(Y, X)$*
- 4. Si X et Y sont indépendantes alors $\tau(X, Y) = 0$*
- 5. $\tau(-X, Y) = \tau(X, -Y) = -\tau(X, Y)$.*

6. Si Y est presque sûrement une fonction croissante de X alors $\tau(X, Y) = 1$ de même si Y est presque sûrement une fonction décroissante de X alors $\tau(X, Y) = -1$.

7. Si G et H sont des fonctions presque sûrement strictement croissantes¹⁷ définies respectivement sur l'ensemble des valeurs de la v.a. X et sur l'ensemble des valeurs de la v.a. Y , alors $\tau(X, Y) = \tau(G(X), H(Y))$.

Preuve Cfr [56] pp136.

□

2-MATRICE DE CORRÉLATION DE $t_{\Sigma, \nu}$.

Pour les vecteurs aléatoires elliptiques, il existe une relation liant le taux de Kendall à la matrice de corrélation Σ . Dans le cas de la student multivariée $t_{\Sigma, \nu}$, cette relation est donnée par le théorème suivant.

Théorème 5 . Si X est une student multivariée $t_{\Sigma, \nu}$ à valeurs dans \mathcal{R}^n alors

$$\Sigma = \sin\left(\frac{\pi}{2} \tau\right) \quad (2.11)$$

c'est-à-dire que le coefficient de corrélation linéaire entre X_i et X_j est donné par

$$\rho(X_i, X_j) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \tau(X_i, X_j)\right) \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (2.12)$$

Preuve La preuve est donnée par Lindskog(2001b, page 3) dans le cadre plus général des distributions elliptiques.

□

Par conséquent, estimer la matrice de corrélation Σ revient à estimer le taux de Kendall pour chacun des couples (X_i, X_j) , $i, j \in \{1..n\}$.

3-ESTIMATION DU TAUX DE KENDALL D'UN VECTEUR ALÉATOIRE QUELCONQUE.

Le taux de Kendall est la différence entre la probabilité de concordance et la probabilité de non-concordance. Par conséquent, pour un échantillon d'observations $\{(x_i, y_i) \mid i = 1..m\}$, l'estimateur empirique de $\tau(X, Y)$ est donné par

$$\hat{\tau} = \frac{c - d}{\sqrt{c + d + e_x} \sqrt{c + d + e_y}} \quad (2.13)$$

¹⁷ c'est-à-dire soit deux variables aléatoires X et Z . Si $P(X < Z) = 1 \Rightarrow P(G(X) < G(Z)) = 1$.

où $c = \sum_{i=1, j \neq i}^m \frac{1}{2} \text{Ind}\{(x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0\}$ représente le nombre de couple d'observations concordants. Et $d = \sum_{i=1, j \neq i}^m \frac{1}{2} \text{Ind}\{(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0\}$ représente le nombre de couple d'observations discordants. Et où e_x est le nombre de 'x de trop' et e_y le nombre de 'y de trop'. L'estimateur [2.13] de τ est sans biais [50].

$$E[\hat{\tau}] = \tau$$

Il importe de remarquer que la relation [2.12] ne garantit pas que l'estimateur $\hat{\Sigma} \doteq \sin\left(\frac{\pi}{2}\hat{\tau}\right)$ soit non biaisé. Cependant si on se réfère aux résultats obtenus par Lindskog(2000) pour des marginales de distribution student, cet estimateur se révèle bien meilleur que le coefficient de corrélation linéaire empirique Σ_{emp} à la fois en terme de variance et en terme de biais [50].

4-ESTIMATION DU PARAMÈTRE Σ D'UNE t -COPULE.

Supposons que l'on désire approximer par une t -copule la structure de dépendance d'un vecteur aléatoire $X \equiv (X_1, \dots, X_n)$ à valeurs dans \mathcal{R} de distribution jointe inconnue (et qui à priori n'est plus une student multivariée) mais dont les distributions marginales G_1, \dots, G_n sont connues. Par exemple $G_1 = t_{\nu_1}, \dots, G_n = t_{\nu_n}$. Et pour lequel on dispose d'un échantillon de réalisations.

La relation liant la matrice de corrélation et le taux de Kendall des distributions students multivariées permet elle encore d'estimer le paramètre Σ ? Oui! En effet, posons

$$(Y_1, \dots, Y_n) = (t_{\nu_1}^{-1}(t_{\nu_1}(X_1)), \dots, t_{\nu_n}^{-1}(t_{\nu_n}(X_n))) \quad (2.14)$$

Le vecteur aléatoire (Y_1, \dots, Y_n) a une distribution $t_{\nu, \Sigma}^n$. En effet, la propriété d'invariance sous transformation de copules implique que les ve.a. (X_1, \dots, X_n) et (Y_1, \dots, Y_n) ont la même copule $C_{\nu, \Sigma}$. Par conséquent (Y_1, \dots, Y_n) a la même copule que $t_{\nu, \Sigma}^n$. De plus comme $Y_i = t_{\nu_i}^{-1}(t_{\nu_i}(X_i)), \forall a \in \mathcal{R}$ on a

$$P(Y_i \leq a) = P(t_{\nu_i}^{-1}(t_{\nu_i}(X_i)) \leq a) = P(X_i \leq t_{\nu_i}^{-1}(t_{\nu_i}(a))) = t_{\nu_i}(t_{\nu_i}^{-1}(t_{\nu_i}(a))) = t_{\nu_i}(a)$$

Et donc les distributions marginales du ve.a (Y_1, \dots, Y_n) sont les distributions marginales de la student multivariée $t_{\nu, \Sigma}^n$. Par le théorème de Sklar, on conclut que $(Y_1, \dots, Y_n) \sim t_{\nu, \Sigma}^n$.

Par la septième propriété du taux de Kendall les ve.a. (X_1, \dots, X_n) et (Y_1, \dots, Y_n) ont la même matrice de taux de Kendall. Par conséquent on peut calculer la matrice des taux de Kendall du ve.a. (Y_1, \dots, Y_n) à partir des réalisations observées du ve.a. (X_1, \dots, X_n) .

Ensuite comme $(Y_1, \dots, Y_n) \sim t_{\nu, \Sigma}^n$, on peut utiliser la relation (2.12) pour

calculer Σ la matrice de corrélation linéaire de (Y_1, \dots, Y_n) qui est aussi paramètre de la copule du vecteur (X_1, \dots, X_n) .

5-CORRECTION DE L'ESTIMATION $\hat{\Sigma}$.

Pour pouvoir simuler la distribution conjointe, il est souhaitable d'obtenir une estimation définie positive de la matrice Σ . Or comme $\hat{\Sigma}$ est un estimateur biaisé de Σ , il se peut que l'estimation ne soit pas définie positive. Il faut donc corriger l'estimation $\hat{\Sigma}$ pour la rendre symétrique définie positive tout en évitant de trop s'éloigner de la valeur estimée initialement via le taux de Kendall.

Nous adaptons au cas des matrices définies positives l'heuristique proposée par Geert Molenberghs [67] pour l'estimation de matrices de corrélation semidéfinies positives.

(i) Obtenir une estimation $\hat{\Sigma}$ dont les valeurs propres sont distinctes.

Soit $\hat{\Sigma}$ la matrice obtenue par (2.11). On sait¹⁸ que pour toute matrice $\hat{\Sigma} \in \mathcal{R}^{n \times n}$ il existe des matrices unitaires¹⁹ U et V telles que

$$\hat{\Sigma} = U D V^T$$

Où $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_{n-r}, 0, \dots, 0) \in \mathcal{R}^{n \times n}$ avec $0 \leq r \leq n$ et $d_1 \geq \dots \geq d_{n-r} > 0$. Les valeurs (d_1, \dots, d_{n-r}) sont appelées valeurs singulières de $\hat{\Sigma}$. Puisque $\hat{\Sigma}$ est symétrique et réelle :

- (1) les valeurs propres de $\hat{\Sigma}$ sont réelles et
- (2) les valeurs singulières de $\hat{\Sigma}$ sont les valeurs absolues des valeurs propres de $\hat{\Sigma}$: $D = |\Lambda|$. Où on note $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-r}, 0, \dots, 0) \in \mathcal{R}^{n \times n}$ la matrice quasideagonale des valeurs propres de $\hat{\Sigma}$.
- (3) Les matrices U et V sont réelles et $U = V$. Et par conséquent $\hat{\Sigma} = V D V^T$. Pour que $\hat{\Sigma}$ soit définie positive, il faut que toutes ses valeurs propres soient distinctes et strictement positives.

Ceci implique que la matrice D doit avoir tous ses éléments diagonaux distincts et strictement positifs. A cette fin, nous corrigeons les valeurs singulières en remplaçant la matrice quasi diagonale D par la matrice diagonale \bar{D} définie comme suit :

- (1) Si $d_{i-1, i-1} > d_{i, i}$ et $d_{i, i} = d_{i+1, i+1}$ ($1 < i \leq n-r$) alors $\bar{d}_{i, i} = (1 + k_i).d_{i, i}$ avec $k_i = (d_{i-1, i-1} - d_{i, i}) / (10.d_{i, i})$. Sinon on pose $\bar{d}_{i, i} = d_{i, i}$.
- (2) Si $r > 0$ on pose $\bar{d}_{i, i} = c_i$ ($n-r+1 \leq i \leq n$) avec $c_i = (i - (n-r)).d_{n-r, n-r} / r$. On obtient donc $\bar{d}_{n-r+1} > \dots > \bar{d}_n$.

¹⁸ Cfr. [77] pp 37.

¹⁹ Pour rappel une matrice carrée complexe U est unitaire si $UU^* = I_n$.

Notons $\bar{\Sigma} = V \bar{D} V^T$. Cette matrice est encore symétrique réelle. Elle constitue une nouvelle estimation de Σ .

(ii) Obtenir une estimation dont les valeurs propres sont distinctes et strictement positives.

Toutes les valeurs propres de $\bar{\Sigma}$ sont distinctes et non nulles. Et $\bar{D} = |\bar{\Lambda}|$. Où $\bar{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est la matrice diagonale des valeurs propres de $\bar{\Sigma}$.

Puisque $\bar{\Sigma}$ est symétrique réelle, elle est diagonalisable par une matrice orthogonale ²⁰ $P \in \mathcal{R}^{n \times n}$ sous la forme

$$\bar{\Sigma} = P \bar{\Lambda} P^T \quad (2.15)$$

On sait que si les valeurs propres d'une matrice symétrique sont distinctes alors ses vecteurs propres sont orthogonaux entre eux²¹. Or, toutes les valeurs propres de $\bar{\Sigma}$ sont distinctes par hypothèse. Par conséquent, on peut prendre pour P dans (2.15) la matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres de $\bar{\Sigma}$ normalisés.

Si $\bar{\Sigma}$ est définie positive, alors toutes ses valeurs propres doivent être strictement positives. Si une valeur propre est négative, on la remplace par son opposée. On pose $\tilde{\Lambda} = |\bar{\Lambda}|$ et on obtient une nouvelle estimation de Σ :

$$\tilde{\Sigma} = P \tilde{\Lambda} P^T \quad (2.16)$$

$\tilde{\Sigma}$ est symétrique définie positive.

Comme Σ est la matrice de corrélation linéaire, il faut normaliser les éléments diagonaux de $\tilde{\Sigma}$ à 1. Pour ce faire, on applique la transformation suivante

$$\hat{\Sigma} = D_1 \tilde{\Sigma} D_1 = \tilde{P} \tilde{\Lambda} \tilde{P}^T \quad (2.17)$$

Où $D_1 = \text{diag}(1/\sqrt{\tilde{\Sigma}_{1,1}}, \dots, 1/\sqrt{\tilde{\Sigma}_{n,n}})$ et $\tilde{P} = D_1 P$. La matrice $\hat{\Sigma}$ est encore symétrique définie positive et sa diagonale est constituée de 1. Elle sera notre estimateur pour Σ .

Estimation de ν .

Pour estimer ν on recherche numériquement le maximant de la fonction de log vraisemblance sur l'ensemble

²⁰Cfr [77]pp 35.

²¹En effet soit λ_1 et λ_2 deux valeurs propres distinctes de $\bar{\Sigma}$ et x_1 et x_2 les vecteurs propres associés. $x_2^T \bar{\Sigma} x_1 = x_2^T (\bar{\Sigma} x_1) = \lambda_1 x_2^T x_1$ et $x_2^T \bar{\Sigma} x_1 = (x_2^T \bar{\Sigma}) x_1 = \lambda_2 x_2^T x_1$. Par conséquent $(\lambda_1 - \lambda_2) x_2^T x_1 = 0$ et donc puisque $(\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0$ on vérifie que x_1 et x_2 sont orthogonaux.

$$\diamond = \{3, 4, 5, \dots\}.$$

$$\hat{\nu} = \arg \max_{\nu \in \diamond} \left[\sum_{i=1}^m \log c(G_i(X_i); \nu, \hat{\Sigma}) \right] \quad (2.18)$$

2.4.5 Application.

Nous illustrons maintenant la méthode présentée dans le paragraphe précédent. Nous l'appliquons à l'estimation des paramètres Σ et ν de la copule des rendements dévolatilisés des actions Solvay, Colruyt, Dexia, Agfa-Gevaert et Interbrew que nous avons présentées au paragraphe 3.2.3. L'estimation du taux de Kendall obtenue est

$$\hat{\tau} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.2703 & 0.2081 & 0.2885 & -0.1123 \\ 0.2703 & 1.0000 & 0.1022 & 0.2715 & -0.0776 \\ 0.2081 & 0.1022 & 1.0000 & 0.1026 & -0.0380 \\ 0.2885 & 0.2715 & 0.1026 & 1.0000 & -0.1152 \\ -0.1123 & -0.0776 & -0.0380 & -0.1152 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

et l'estimée de la matrice de corrélation correspondante est

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.4119 & 0.3211 & 0.4378 & -0.1755 \\ 0.4119 & 1.0000 & 0.1599 & 0.4137 & -0.1216 \\ 0.3211 & 0.1599 & 1.0000 & 0.1605 & -0.0596 \\ 0.4378 & 0.4137 & 0.1605 & 1.0000 & -0.1799 \\ -0.1755 & -0.1216 & -0.0596 & -0.1799 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

Elle est bien symétrique définie positive et elle possède le facteur de Cholesky

$$\begin{bmatrix} 1.0000 & 0.4119 & 0.3247 & 0.4378 & -0.1674 \\ 00000 & 0.9112 & 0.0246 & 0.2561 & -0.0653 \\ 00000 & 00000 & 0.9455 & 0.0115 & -0.0005 \\ 00000 & 00000 & 00000 & 0.8618 & -0.0949 \\ 00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 0.9791 \end{bmatrix}$$

Pour les rendements dévolatilisés observés du premier décembre 2000 au 16 mai 2003, l'évolution de la fonction de vraisemblance 2.18 est représentée sur la figure [Fig.2.3]. Le ν optimal semble être infini. Ceci signifie que la structure de dépendance des rendements dévolatilisés des cinq actions est celle décrite par une copule gaussienne[56]. Nous prendrons $\hat{\nu} = 1100$. En effet, Mashal a montré [85] qu'à partir de $\nu = 1000$, une copule student est indistinguable de la copule gaussienne de même matrice de corrélation linéaire.

2.5 Simulation des rendements.

D'après le modèle de prix choisi, les rendements X^1, \dots, X^n des actifs sous-jacents suivent des distributions student standard $t_{\nu_1}, \dots, t_{\nu_n}$. Ces distributions student n'ont pas nécessairement le même nombre de degrés de liberté. Comme nous l'avons vu précédemment, la distribution conjointe des rendements peut être approximée par

$$\hat{F}(X^1, X^2, \dots, X^n) = C_{\hat{\nu}, \hat{\Sigma}}^n(t_{\nu_1}(X^1), \dots, t_{\nu_n}(X^n))$$

Où t_{ν_i} représente la fonction de distribution de X^i .

Par (2.14), on a

$$(X^1, X^2, \dots, X^n) = (t_{\nu_1}^{-1}(t_{\hat{\nu}}(Y^1)), \dots, t_{\nu_n}^{-1}(t_{\hat{\nu}}(Y^n))) \quad (2.19)$$

avec $(Y^1, \dots, Y^n) \sim t_{\hat{\nu}, \hat{\Sigma}}^n$ une student standard multivariée de degré de liberté $\hat{\nu}$ et de matrice de corrélation $\hat{\Sigma}$. Par conséquent, pour simuler les rendements X^i , il suffit de simuler la student standard multivariée $t_{\hat{\nu}, \hat{\Sigma}}^n$ au moyen de l'algorithme de la section précédente et de transformer les réalisations (y^1, \dots, y^n) obtenues en réalisations (x^1, \dots, x^n) au moyen de l'expression (2.19).

2.6 Simulation des variations de prix d'un actif sous-jacent.

Les équations [2.2] et [2.4] permettent d'obtenir la relation liant la variation de prix de l'actif i au rendement X^i de cet actif sur la période $[t, t + \Delta t]$.

$$\Delta S_t^i = S_t^i \left[\exp \left(\alpha^i + \beta_1^i \Delta R_{t-\Delta t}^i + \beta_2^i \Delta R_{t-2\Delta t}^i + \sigma_t^i \sqrt{\frac{\nu_i - 2}{\nu_i}} \cdot X_t^i \right) - 1 \right] \quad (2.20)$$

et par [2.19]

$$\Delta S_t^i = S_t^i \left[\exp \left(\alpha^i + \beta_1^i \Delta R_{t-\Delta t}^i + \beta_2^i \Delta R_{t-2\Delta t}^i + \sigma_t^i \sqrt{\frac{\nu_i - 2}{\nu_i}} \cdot t_{\nu_i}^{-1}(t_{\hat{\nu}}(Y_t^i)) \right) - 1 \right] \quad (2.21)$$

Plaçons-nous à l'instant t , la relation (2.21) peut s'écrire simplement

$$\Delta S_{i,t} = K_i(Y_{i,t}) \quad (2.22)$$

2.7 Simulation des variations de la valeur d'un produit financier.

Supposons que nous soyons à l'instant t . Supposons également que nous disposions de la formule d'évaluation du produit financier en $t + \Delta t$ en fonction de la valeur du prix des k actions sous-jacentes :

$$V_{t+\Delta t} = V(S_{t+\Delta t}^1, \dots, S_{t+\Delta t}^k, t + \Delta t) \quad (2.23)$$

Pour simuler la valeur $V_{t+\Delta t}$ du produit considéré, il suffit donc de simuler des réalisations des prix des actions sous-jacentes à l'instant $t + \Delta t$ et d'injecter ces réalisations dans la formule d'évaluation (2.23).

2.8 Conclusions à ce chapitre.

Dans ce chapitre, nous avons présenté les propriétés empiriques des rendements d'actions. Ces propriétés nous ont conduit à choisir pour *modèles de rendements* des processus AR(r)-GARCH(p,q).

Nous avons ensuite expliqué comment simuler des scénarios de prix pour un ensemble d'actions en tenant compte de la *dépendance* entre leurs rendements.

La dépendance entre les différents rendements s'exprime au travers leur fonction de distribution conjointe *inconnue*. Le *théorème de Sklar* a permis de décomposer cette distribution conjointe en deux parties. D'une part les distributions marginales de chacun des rendements et d'autre part une structure de dépendance proprement dite entre ces rendements. Cette structure de dépendance est modélisée par un objet mathématique particulier appelé *copule*. La séparation réalisée par le théorème de Sklar entre les comportements particuliers assimilés aux distributions marginales et la structure de dépendance assimilée à une copule nous a permis de résoudre de façon élégante le problème de l'approximation de la fonction de distribution conjointe des rendements.

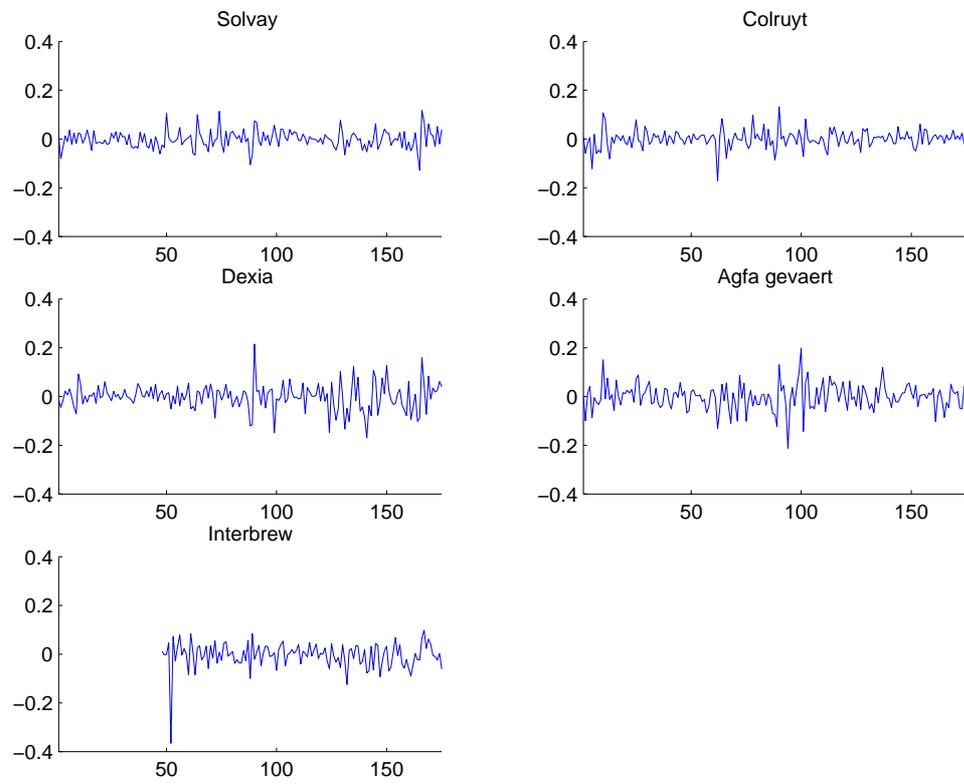


FIG. 2.2 – Evolution des rendements.

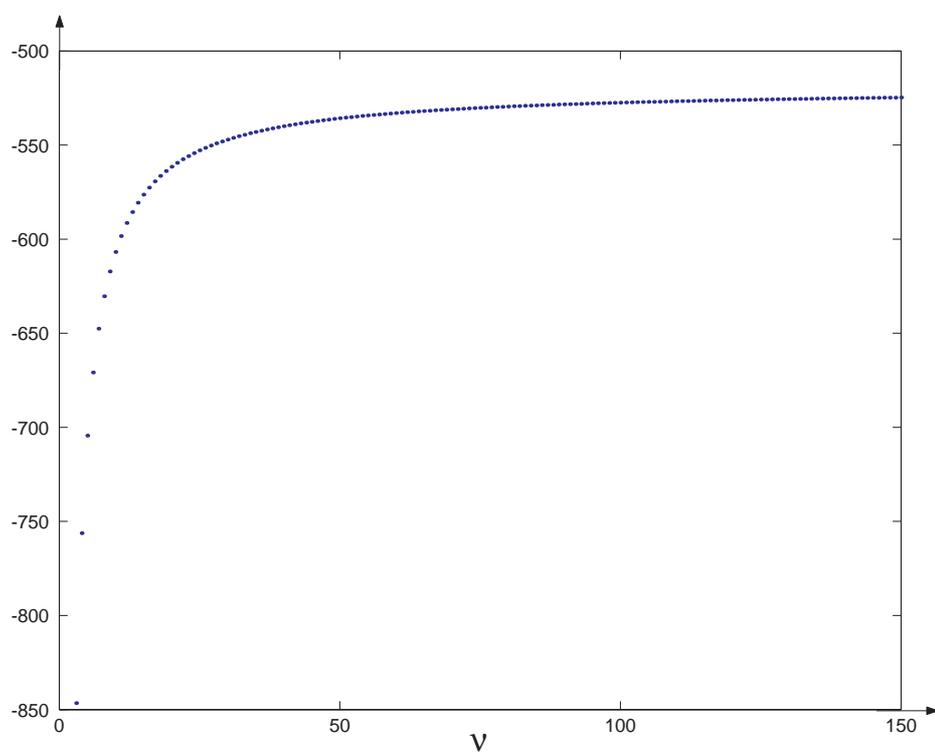


FIG. 2.3 – Fonction de log vraisemblance.

Chapitre 3

Approximation thêta-delta-gamma des variations de la valeur d'un produit financier.

3.1 Introduction.

Dans notre démarche, nous avons adopté une approche paramétrique. Nous avons modélisé les processus de rendement des actifs sous-jacents par des $AR(r)$ - $GARCH(p,q)$ dont les termes d'innovation ont des distributions student. Ensuite, nous avons modélisé la dépendance stochastique entre ces termes d'innovation au moyen d'une copule student.

Ces choix de modélisation ne permettent pas d'obtenir directement la forme analytique de la fonction de distribution des profits et pertes (P&L) associés à la variation de la valeur du produit à l'horizon de risque considéré. Or, nous verrons aux chapitres 4 et 5 que l'estimation d'une VaR ou d'une CVaR peut demander l'estimation de cette fonction de distribution en certaines valeurs.

Bien qu'on puisse facilement obtenir une distribution empirique des P&L à tout horizon fixé en simulant des réalisations des P&L à partir des modèles de rendement. Obtenir une distribution empirique suffisamment proche de la distribution réelle des P&L peut demander beaucoup de simulations. Et ce d'autant plus que la distribution réelle des P&L présente des queues épaisses. Il faut donc s'interroger sur les moyens dont nous disposons pour estimer cette fonction de distribution. Comme nous le verrons dans le chapitre 4, si les P&L d'un produit financier peuvent être représentés sous une forme thêta-delta-gamma dans laquelle les facteurs de risque ont une distribution conjointe student multivariée, alors nous disposons de résultats permettant d'évaluer avec précision la fonction de distribution des P&L.

Dans ce chapitre, nous expliquons ce qu'est une décomposition thêta-delta-gamma et nous rappelons des conditions nécessaires pour qu'un produit financier possède une telle décomposition. Nous montrons que, si les P&L d'un produit financier possèdent une décomposition thêta-delta-gamma dont les facteurs de risque sont les variations de prix des actions sous-jacentes, et qu'en même temps le modèle de prix utilisé est le modèle de prix à variance stochastique décrit au paragraphe 2.2, alors le produit financier possède une décomposition thêta-delta-gamma en fonction de facteurs de risque dont la distribution conjointe est une student multivariée.

3.2 Décomposition thêta-delta-gamma.

La décomposition thêta-Delta-Gamma est une approximation des variations de la valeur d'un produit financier par le développement de Taylor de second ordre par rapport aux variations de valeurs de ses sous-jacents. Ce développement des variations de valeur du produit financier par rapport aux variations des valeurs des sous-jacents pourra facilement être transformé en un développement de second ordre par rapport aux rendements des sous-jacents.

3.3 Sensibilités d'un produit dérivé.

Les sensibilités (ou grecques) permettent de décomposer les variations du prix d'un produit dérivé en fonction des variations des dimensions du risque de marché auxquelles sa valeur est soumis. Dans le cadre de ce mémoire, nous ne considérerons que trois grecques : le thêta, le delta, le gamma ¹. Ces trois grecques permettent de décrire l'influence du temps et des variations de prix des sous-jacents sur les variations de valeur du produit dérivé considéré. Le delta et le thêta ne sont parfaitement définis que si le produit dérivé possède une formule d'évaluation dont les dérivées partielles premières par rapport aux prix des sous-jacents et par rapport au temps existent. Le gamma n'est parfaitement défini que si cette formule d'évaluation possède des dérivées partielles secondes par rapport aux prix des sous-jacents.

LE DELTA

Le delta δ d'un produit dérivé est la sensibilité de la valeur de ce produit par rapport à l'actif sous-jacent. Le delta s'exprime mathématiquement comme la dérivée première de la valeur du dérivé par rapport au prix du sous-jacent évaluée en $(t, S(t))$, l'instant présent et aux prix actuels.

¹ Il existe d'autres grecques. Pour plus d'informations nous renvoyons le lecteur à *Hull et White (2002)*[43].

LE GAMMA

Le delta est fonction de la valeur du sous-jacent. Le gamma Γ est la sensibilité du delta à l'actif sous-jacent. Il s'exprime mathématiquement comme la dérivée seconde de la valeur du produit dérivé par rapport au cours du sous-jacent évaluée en $(t, S(t))$.

LE THÊTA

Le thêta θ mesure la variation attendue du prix du dérivé sur une courte période Δt , due au seul passage du temps. Le thêta est la dérivée de la valeur du dérivé par rapport au temps évaluée en $(t, S(t))$.

DÉCOMPOSITION THÊTA-DELTA-GAMMA

Soit ΔV_t les variations de valeur d'un produit dérivé sur la période $[t, t + \Delta t]$ c'est-à-dire $\Delta V_t = V_{t+\Delta t} - V_t$. La décomposition thêta-delta-gamma des variations de valeur ΔV_t s'écrit :

$$\Delta V_t \simeq \theta \Delta t + \delta^T \Delta S + \frac{1}{2} \Delta S^T \Gamma \Delta S \quad (3.1)$$

Où

$$\theta(t) = \frac{\partial V}{\partial t}(t) \quad , \quad \delta_i(t) = \frac{\partial V}{\partial S_i}(t) \quad , \quad \Gamma_{ij \neq i}(t) = \frac{\partial^2 V}{\partial S_i \partial S_j}(t) \quad , \quad \Gamma_{ii}(t) = \frac{\partial^2 V}{\partial S_i^2}(t)$$

Avec S_i le prix du i ème sous-jacent.

On peut également exprimer la variation ΔV_t en fonction des composantes (Y_t^1, \dots, Y_t^n) du vecteur student standard $Y \sim t_{\nu, \Sigma}$ lié aux $\Delta S_{i,t}$ par la relation (2.22).

$$\Delta V_t \simeq \theta \Delta t + \tilde{\delta}^T Y + \frac{1}{2} Y^T \tilde{\Gamma} Y$$

Où

$$\tilde{\delta}_i(t) = \frac{\partial V}{\partial Y_i}(t) = \delta_i(t) \frac{\partial K_i}{\partial Y_i}(t) \quad (3.2)$$

$$\tilde{\Gamma}_{ij \neq i}(t) = \frac{\partial^2 V}{\partial Y_i \partial Y_j}(t) = \Gamma_{ij}(t) \cdot \frac{\partial K_i}{\partial Y_i}(t) \cdot \frac{\partial K_j}{\partial Y_j}(t) \quad (3.3)$$

$$\tilde{\Gamma}_{ii}(t) = \frac{\partial^2 V}{\partial Y_i^2}(t) = \Gamma_{ii}(t) \cdot \left(\frac{\partial K_i}{\partial Y_i}(t) \right)^2 + \delta_i \frac{\partial^2 K_i}{\partial Y_i^2}(t) \quad (3.4)$$

Avec

$$\frac{\partial K_i}{\partial Y_i}(t) = [K_i(Y_i^t) + S_i^i] \cdot \sigma_i^i \sqrt{\frac{\nu_i - 2}{\nu_i}} \cdot \frac{\partial \mathbf{t}_{\nu_i}^{-1}(\mathbf{t}_{\hat{\nu}}(\mathbf{Y}_i^t))}{\partial \mathbf{Y}_i}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 K_i}{\partial Y_i^2}(t) &= [K_i(Y_i^t) + S_t^i] \cdot \sigma_t^i \sqrt{\frac{\nu_i - 2}{\nu_i}} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{t}_{\nu_i}^{-1}(\mathbf{t}_\rho(\mathbf{Y}_i^t))}{\partial \mathbf{Y}_i^2} \\ &\quad + \frac{\partial K_i}{\partial Y_i}(t) \cdot \sigma_t^i \sqrt{\frac{\nu_i - 2}{\nu_i}} \cdot \frac{\partial \mathbf{t}_{\nu_i}^{-1}(\mathbf{t}_\rho(\mathbf{Y}_i^t))}{\partial \mathbf{Y}_i} \end{aligned}$$

Pour calculer les termes $\frac{\partial \mathbf{t}_{\nu_i}^{-1}(\mathbf{t}_\rho(\mathbf{Y}_i^t))}{\partial Y_i}$ et $\frac{\partial^2 \mathbf{t}_{\nu_i}^{-1}(\mathbf{t}_\rho(\mathbf{Y}_i^t))}{\partial Y_i^2}$, nous utiliserons le *théorème de l'inverse local* ².

En notant $a_0 \doteq \theta \Delta t$, $a \doteq \tilde{\delta}$ et $A \doteq \frac{1}{2} \tilde{\Gamma}$, l'équation (3.1) se réécrit

$$\Delta V_t \simeq a_0 + a^T Y + Y^T A Y \quad (3.5)$$

Les profits et pertes considérés sont ceux associés à la variation de valeur du produit dérivé. Nous obtenons donc :

$$P\&L \simeq a_0 + a^T Y + Y^T A Y \quad (3.6)$$

3.4 Sensibilités d'un produit simple.

Par définition du thêta, du delta et du gamma d'un produit simple (c'est à dire un produit qui est son propre sous-jacent) sont

$$\theta = 0 \quad , \quad \delta = 1 \quad , \quad \Gamma = 0$$

3.5 Sensibilités d'un portefeuille.

La notion de thêta, delta et gamma s'applique également à un portefeuille de produits dérivés. Le thêta, le delta et le gamma du portefeuille étant respectivement la somme des thêta, delta et gamma de chaque produit dérivé exprimés en fonction de tous les sous-jacents de toutes les composantes du portefeuille.

² Voir Annexe J pour un rappel de ce théorème.

Chapitre 4

Calcul de la VaR d'un produit financier.

Dans ce chapitre nous expliquons comment estimer la VaR d'un produit financier dont la valeur est notée V et les profits et pertes ($V_{t+\Delta t} - V_t$) sur l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$ sont notées L^1 .

Il est rare que l'on puisse calculer analytiquement $L^{(\alpha)}$. En effet, il n'est en général pas possible d'obtenir une expression analytique de la fonction de distribution F_L des profits du produit financier à partir de la distribution conjointe des rendements X^i des valeurs sous-jacentes. Et ce même si la décomposition thêta-delta-gamma de ces profits est acceptable. Il faudra donc estimer $L^{(\alpha)}$. Dans ce chapitre, nous présenterons deux voies pour estimer le quantile supérieur $L^{(\alpha)}$.

La première voie consiste à prendre pour estimateur de $L^{(\alpha)}$ l'alpha quantile supérieur d'une distribution empirique des P&L du produit financier. L'estimateur de la VaR dont nous disposons alors est une "VaR empirique". C'est un estimateur utilisable quelle que soit la distribution des P&L considérée.

La seconde voie tente de rechercher $L^{(\alpha)}$ comme le zéro de la fonction $G(u) = P(L < u) - \alpha$. Cette approche n'est valable que si la fonction de distribution des profits et pertes est continue et strictement croissante. Dans cette recherche de zéro, le terme $P(L < u)$ est évalué au moyen d'un estimateur de Monte-Carlo. Des méthodes théoriques, dites de réduction de variance, permettent d'accélérer très fortement la convergence de ce type d'estimateurs². Il existe des résultats [41] qui montrent que de telles méthodes d'accélération de la convergence peuvent être appliquées pratiquement à

¹ Nous remplaçons la notation P&L par la notation L pour alléger l'écriture des développements présentés dans ce chapitre.

²Pour un rappel théorique sur ces méthodes nous renvoyons le lecteur à l'annexe B.

l'estimateur de Monte-Carlo de $P(L < y)$ sous certaines conditions. Ces résultats suggèrent que la précision atteinte sur les estimées de $P(L < y)$ est telle qu'elle valide l'estimation de $L^{(\alpha)}$ par le zéro de $G(u) = P(L < u) - \alpha$.

4.1 Calcul de la VaR.

Comme nous l'avons vu dans le premier chapitre :

$$VaR_{\alpha}(L) = \max(0, -L^{(\alpha)}) \quad (4.1)$$

Aussi, calculer la VaR du produit financier revient à déterminer le quantile supérieur de L défini comme

$$L^{(\alpha)} = \inf\{u \in \mathbb{R} : F_L(u) > \alpha\}$$

ou encore

$$L^{(\alpha)} = \inf\{u \in \mathbb{R} : P(L \leq u) > \alpha\} \quad (4.2)$$

Nous supposons dans la suite de ce chapitre que la fonction de distribution des P&L, notée F_L , est *strictement croissante*. Dans ce cas $L^{(\alpha)}$ peut s'écrire

$$L^{(\alpha)} = F_L^{-1}(\alpha)$$

4.1.1 Estimation non-paramétrique de la VaR.

Une seconde approche possible pour l'estimation de la VaR consiste à simuler m réalisations indépendantes de L (m grand). Et à calculer l'alpha quantile de la distribution empirique formée sur base de ces m réalisations.

Cette simulation est réalisée comme suit :

Supposons que nous soyons à l'instant t . Comme nous avons pris pour facteurs de risque les rendements X^1, X^2, \dots des actifs sous-jacents du produit financier (cfr (2.4)), pour simuler les profits et pertes du produit financier à l'horizon $t + \Delta t$, nous simulons des réalisations jointes des rendements X_1, X_2, \dots à partir de la relation (2.19). Ensuite, nous calculons les variations de prix ΔS^i correspondantes au moyen de la relation (2.20). Enfin, nous utilisons l'approximation thêta-delta-gamma (3.5) pour obtenir la réalisation de profits et pertes correspondante.

Nous calculons alors $(L^m)^{(\alpha)}$ le plus grand α -quantile de la distribution empirique \hat{F}_L^m comme suit :

(1) nous numérotions les réalisations des profits et pertes par ordre croissant : $L_1 \leq \dots \leq L_m$.

(2) nous prenons $L_{[\alpha m]}$ comme estimateur de $L^{(\alpha)}$.

Si la fonction de densité de L existe, la convergence du quantile empirique supérieur est quantifiée par le résultat suivant[24] :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P \left(\frac{(L^m)^{(\alpha)} - L^{(\alpha)}}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}/(\sqrt{m+2}.f_L(L^{(\alpha)}))} \leq x \right) = P(Z \leq x)$$

avec $Z \sim N(0, 1)$. C'est-à-dire

$$(L^m)^{(\alpha)} \sim AN \left(L^{(\alpha)}, \frac{\alpha(1-\alpha)}{(m+2).f_L^2(L^{(\alpha)})} \right)$$

Comme nous ne connaissons pas F_L , le terme $f_L^2(L^{(\alpha)})$ est indéterminé. Il pourrait être estimé par $(\hat{f}_L^m)^2((L^m)^{(\alpha)})$ où \hat{f}_L^m est obtenue par lissage à noyaux³. Mais ceci reviendrait à introduire des hypothèses sur la décroissance de queue des profits et pertes du produit financier. Ce qui est difficilement acceptable dans la mesure où nous cherchons justement à caractériser le comportement extrême de cette distribution. Par conséquent, nous n'utiliserons pas ce résultat asymptotique.

Pour connaître la précision de l'estimée $L_{[\alpha m]}$, nous construirons un intervalle de confiance en utilisant la méthode t-bootstrap⁴.

4.1.2 Estimation de la VaR par une recherche de zéro.

Cette seconde approche consiste à transformer la recherche de $L^{(\alpha)}$ en un **problème de recherche de zéro**.

Dans le cas où la fonction de distribution de L est continue et strictement croissante, $L^{(\alpha)}$ est l'unique valeur de v qui vérifie

$$P(L \leq u) = \alpha$$

et de plus

$$P(L \leq u) = P(L < u)$$

Par conséquent, trouver $L^{(\alpha)}$ revient à chercher l'unique valeur de $u \in \mathbb{R}$ qui annule l'expression

$$P(L < u) - \alpha \tag{4.3}$$

La recherche du zéro de (4.3) est réalisée par la *méthode de dichotomie*. Les premiers points d'itération seront $u_0 = L_{min}/50$ et $u_1 = 100.L_{max}$ où L_{min}

³Pour un rappel sur cette méthode nous renvoyons le lecteur à l'annexe D.

⁴ Pour les rappels sur cette méthode nous renvoyons le lecteur à l'annexe I.

est la plus petite réalisation et L_{max} la plus grande réalisation parmi les profits et pertes observés historiquement. Ce faisant, nous devons réévaluer plusieurs fois l'intégrale $F_L(u)$. Pour diminuer le temps de résolution de (4.3), il faudra chercher à accélérer la convergence de l'estimateur utilisé pour évaluer le terme $P(L < u)$.

4.2 Calcul de la distribution F_L .

Dans cette section, nous considérerons deux cas. Tout d'abord, l'estimation de $P(L < y)$ lorsque l'horizon de risque est égal à la période d'ajustement du modèle de prix. Ensuite, l'estimation de $P(L < y)$ lorsque l'horizon de risque est supérieur à la période d'ajustement du modèle de prix.

4.2.1 Lorsque l'horizon de risque est égal à la période d'ajustement du modèle de prix.

L'évaluation de $P(L < y)$ se réduit au calcul de l'intégrale

$$P(L < y) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(l < y) dF_L(l)$$

$P(L < y)$ peut donc être estimé par une méthode de Monte-Carlo. Bien que l'expression analytique de la fonction de distribution des profits et pertes L du produit financier soit inconnue, une série de résultats dus à Paul Glasserman [41] permettent d'appliquer une technique de réduction de variance à l'estimateur de Monte-Carlo de $P(L < y)$ si les profits et pertes L du produit financier peuvent être approximés par une expression du type :

$$L \simeq a_0 + a^T Y + Y^T A Y \quad (4.4)$$

où le vecteur Y a une distribution student multivariée.

Les techniques de réduction de variance développées par Glasserman s'appuient sur la statistique Q_x définie comme suit :

$$Q_x \doteq \frac{\Upsilon}{\nu} [a_0 - L - x] \text{ avec } x \in \mathbb{R} \quad (4.5)$$

Où $\Upsilon \sim \chi_\nu^2$ est telle que $Y = \frac{Z}{\sqrt{\Upsilon/DoF}}$ avec $Z \sim N(0, \Sigma)$. La fonction génératrice des moments de la v.a. Q_x est donnée par le résultat suivant.

Théorème 6 .

Soit Σ la matrice de corrélation du vecteur student standard $Y \sim t_{\nu, \Sigma}$ défini en (2.19) et A définie par la relation (3.5).

Soit B une matrice triangulaire inférieure qui constitue un facteur de Cholesky de Σ .

Soit U une matrice orthogonale qui diagonalise $(-B^T AB)$.

Posons $i = \sqrt{-1}$ et $b = -\tilde{\delta}^T C$ avec $C = BU$ et $\tilde{\delta}$ tel que défini en (3.2).

La matrice $(-\Sigma A)$ possède m valeurs propres notées $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_n$.

Et la fonction génératrice des moments de Q_x est définie sur

$$\mathbb{T}_x = \left\{ \theta \in \mathbb{R} \mid \lambda_1 \theta < 1/2, \lambda_n \theta < 1/2 \text{ et } 0 < 1 + \frac{2\theta x}{\nu} - \sum_{j=1}^n \frac{\theta^2 b_j^2 / \nu}{1 - 2\theta \lambda_j} \right\} \quad (4.6)$$

et a la forme

$$M_{Q_x}(\theta) = \left(1 + \frac{2\theta x}{\nu} - \sum_{j=1}^n \frac{\theta^2 b_j^2 / \nu}{1 - 2\theta \lambda_j} \right)^{-\nu/2} \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 - 2\theta \lambda_j}} \quad (4.7)$$

La fonction caractéristique de Q_x est

$$\phi_{Q_x}(\theta) = \left(1 + \frac{2i\theta x}{\nu} - \sum_{j=1}^n \frac{-\theta^2 b_j^2 / \nu}{1 - 2i\theta \lambda_j} \right)^{-\nu/2} \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 - 2i\theta \lambda_j}}$$

Preuve Cfr. [41] théorème 1.

□

La v.a. Q_x étant définie, nous pouvons aborder l'évaluation de l'intégrale $P(L < y)$.

Echantillonnage préférentiel.

L'évaluation de $P(L > y)$ se réduit au calcul de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I(l < y) dF_L(l) \quad (4.8)$$

Le théorème suivant dû à Glasserman, Heidelberger et Shababuddin[41] montre que, moyennant un changement de mesure de probabilité, l'intégrale (4.8) peut être réécrite comme l'espérance d'une v.a. de variance inférieure à celle de $I(L < y)$.

Théorème 7

Soit λ_1 la plus grande des valeurs propres de $(-\Sigma A)$.

Soit $x \in \mathfrak{R}$ et $\varphi_x \doteq \log(M_{Q_x})$ avec $Q_x = (\Upsilon/\nu)(a_0 - L - x)$ tel que défini dans la relation (4.5).

Soit $\bar{\theta}_Y$ tel que $\forall \theta \in (0, \bar{\theta}_Y) : M_Y(\theta) < \infty$ avec M_Y la fgm de la va $Y \sim \chi_\nu^2$. Si $\mathbb{D}_x = \mathbb{T}_x \cap \{\theta \mid -\frac{\theta x}{\nu} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\theta^2 b_j^2 / \nu}{1 - 2\theta \lambda_j} < \bar{\theta}_Y\}$ est non vide, alors pour tout $\theta \in \mathbb{D}_x$ nous obtenons :

(i) La fonction

$$F^\theta : [-\infty, +\infty] \times [0, +\infty] \rightarrow [0, 1] : (z, v) \rightarrow F^\theta(z, v)$$

définie par

$$dF^\theta(z, v) = e^{\theta Q_x - \varphi_x(\theta)} dF(z, v)$$

est une fonction de distribution.

(ii)

$$\begin{aligned} P(L < y) &= \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{I(L(z, v) < y)}{e^{\theta Q_x - \varphi_x(\theta)}} e^{\theta Q_x - \varphi_x(\theta)} dF(z, v) \\ &= \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\theta Q_x + \varphi_x(\theta)} I(L(z, v) < y) dF^\theta(z, v) \end{aligned}$$

$$P(L < y) = E[I(L < y)] = E_\theta[e^{-\theta Q_x + \varphi_x(\theta)} I(L < y)] \quad (4.9)$$

(iii) La v.a. Υ suit une loi gamma $\Gamma(\nu/2, 2/(1 - 2\alpha(\theta, x)))$ sous la distribution $F_\Upsilon^\theta = F^\theta(+\infty, \cdot)$.

Avec

$$\alpha(\theta, x) = -\frac{\theta x}{\nu} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\theta^2 b_j^2 / \nu}{1 - 2\theta \lambda_j} \quad (4.10)$$

Les λ_j sont les valeurs propres de $(-\Sigma A)$. Les matrices Σ , A et les scalaires b_j sont tels que définis dans le théorème 6.

(iv) Conditionnellement à Υ , la v.a. Z suit une loi $N(\mu(\theta), \text{diag}(\sigma^2(\theta)))$ avec

$$\mu_j(\theta) = \frac{\theta b_j \sqrt{\Upsilon / \nu}}{1 - 2\theta \lambda_j} \quad \text{et} \quad \sigma_j^2(\theta) = \frac{1}{1 - 2\theta \lambda_j} \quad 1 \leq j \leq n \quad (4.11)$$

Preuve Cfr. [41] théorème 2.

□

Reprenons la relation (4.9).

$$P(L < y) = E_\theta[e^{-\theta Q_x + \varphi_x(\theta)} I(L < y)] \quad (4.12)$$

Nous nous rappelons que l'estimation de Monte-Carlo est d'autant meilleure que la variance de la v.a dont on estime la moyenne est faible. Par conséquent, nous donnerons à θ la valeur qui minimise la variance de

$$e^{-\theta(\Upsilon/\nu)(a_0-L-x)+\varphi_x(\theta)} I(L < y)$$

sous la distribution P^θ et qui la rend inférieure à la variance de $I(L < y)$ sous P . Considérons Q_x tel que $x < a_0 - y$. Si nous prenons $\theta \in \mathbb{D}_x^+ = \mathbb{D}_x \cap \mathbb{R}^+$, nous vérifions que

$$\begin{aligned} \text{var}_{P_\theta} \left(e^{-\theta Q_x + \varphi_x(\theta)} I(L < y) \right) &= \text{var}_{P_\theta} \left(e^{-\theta(\Upsilon/\nu)(a_0-L-x)+\varphi_x(\theta)} I(L < y) \right) \\ &= E_\theta \left[e^{-2\theta(\Upsilon/\nu)(a_0-L-x)+2\varphi_x(\theta)} I(L < y) \right] - E_\theta^2 \left[e^{-\theta(\Upsilon/\nu)(a_0-L-x)+\varphi_x(\theta)} I(L < y) \right] \\ &= E \left[e^{-\theta(\Upsilon/\nu)(a_0-L-x)+\varphi_x(\theta)} I(L < y) \right] - E^2 \left[I(L < y) \right] \\ &\leq e^{\varphi_x(\theta)} E \left[I^2(L < y) \right] - E^2 \left[I(L < y) \right] \\ &\leq M_{Q_x}(\theta) E \left[I^2(L < y) \right] - E^2 \left[I(L < y) \right]. \end{aligned}$$

Pour diminuer la variance de $e^{-\theta Q_x + \varphi_x(\theta)} I(L < y)$ nous prendrons pour θ , la valeur θ_x^* qui minimise M_{Q_x} sur \mathbb{D}_x^+ . Nous supposons pour l'instant, que M_{Q_x} est convexe sur \mathbb{D}_x^+ . Comme M_{Q_x} est également convexe sur \mathbb{D}_x^+ et comme θ_x^* est un minimant local, soit la dérivée de M_{Q_x} s'annule en θ_x^* , soit la dérivée de M_{Q_x} est toujours positive sur \mathbb{D}_x^+ . Pour obtenir θ_x^* , nous chercherons le zéro de

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{Q_x}}{\partial \theta}(\theta) &= -\frac{\nu}{2} \left(1 + \frac{2\theta x}{\nu} - \sum_{j=1}^n \frac{\theta^2 b_j^2 / \nu}{1 - 2\theta \lambda_j} \right)^{-(\nu+2)/2} \\ &\quad \cdot \left(\frac{2x}{\nu} - \sum_{j=1}^n \frac{2\theta b_j^2 / \nu}{1 - 2\theta \lambda_j} - \sum_{j=1}^n \frac{2\theta^2 b_j^2 \lambda_j / \nu}{(1 - 2\theta \lambda_j)^2} \right) \cdot \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 - 2\theta \lambda_j}} \\ &\quad + \left(1 + \frac{2\theta x}{\nu} - \sum_{j=1}^n \frac{\theta^2 b_j^2 / \nu}{1 - 2\theta \lambda_j} \right)^{-\nu/2} \cdot \sum_{j=1}^n \left(\prod_{i=1, i \neq j}^n \frac{1}{\sqrt{1 - 2\theta \lambda_i}} \right) \frac{\lambda_j}{(1 - 2\theta \lambda_j)^{3/2}} \end{aligned}$$

sur \mathbb{D}_x au moyen de la méthode de dichotomie.

Nous égalons θ_x^* à ce zéro si ce dernier est positif. Sinon, nous posons $\theta_x^* = 0$. Dans les deux cas, nous obtenons $M_{Q_x}(\theta_x^*) \leq 1$ et donc

$$\text{var}_{P_\theta} \left(e^{-\theta Q_x + \varphi_x(\theta)} I(L < y) \right) \leq \text{var}_P(I(L < y))$$

Stratification de Q_x .

L'inspection du terme $e^{-\theta_x^* Q_x + \varphi_x(\theta_x^*)}$ suggère qu'il est encore possible de réduire la variance de $e^{-\theta_x^* Q_x + \varphi_x(\theta_x^*)} I(L < y)$. Nous augmenterions ainsi la précision de l'estimation de Monte-Carlo de (4.9).

⁵ Nous montrerons, au chapitre 6, que les produits financiers pour lesquels nous calculons la VaR vérifient cette hypothèse.

La méthode de réduction de variance que nous utiliserons est une affectation proportionnelle⁶ sur la variable Q_x . Pour réaliser cette affectation proportionnelle nous devons disposer d'une stratification de l'image de Q_x .

Il s'agit de définir sur l'image de Q_x des strates de probabilité connue. Ceci demande de pouvoir calculer la distribution de Q_x sous $P^{\theta_x^*}$. Cette distribution peut être calculée par inversion de la fonction caractéristique de Q_x sous $P^{\theta_x^*}$. Nous savons en effet que la fonction génératrice des moments de Q_x sous $P^{\theta_x^*}$ s'écrit

$$\begin{aligned} M_{Q_x}^{\theta_x^*}(s) &= E_{\theta_x^*}[e^s Q_x] = E[e^{\theta_x^* Q_x - \varphi_x(\theta_x^*)} e^s Q_x] \\ &= E[e^{(\theta_x^* + s) Q_x}] / M_{Q_x}(\theta_x^*) = M_{Q_x}(\theta_x^* + s) / M_{Q_x}(\theta_x^*) \end{aligned}$$

Aussi, la fonction caractéristique de Q_x sous $P^{\theta_x^*}$ s'écrit :

$$\phi_{Q_x}^{\theta_x^*}(s) = M_{Q_x}^{\theta_x^*}(i s) = M_{Q_x}(\theta_x^* + i s) / M_{Q_x}(\theta_x^*) \quad (4.13)$$

où $i = \sqrt{-1}$ et s est réel.

Par conséquent, si $\phi_{Q_x}^{\theta_x^*}$ était absolument intégrable, pour tout $q \in \mathbb{R}$, nous pourrions calculer $P^{\theta_x^*}(Q_x \leq q)$ en appliquant l'inversion de Fourier⁷. Toutefois, rien ne garantit que $\phi_{Q_x}^{\theta_x^*}$ ne possède aucun pôle. Or, si tel était le cas, $\phi_{Q_x}^{\theta_x^*}$ ne serait pas absolument intégrable, et nous ne pourrions pas pratiquer l'inversion de Fourier. Aussi, plutôt que de stratifier l'image de Q_x en utilisant l'inversion de Fourier, nous simulerons un échantillon de N réalisations de Q_x indépendantes sous $P^{\theta_x^*}$. Cet échantillon fournira une distribution empirique $\hat{P}^{\theta_x^*}$ dont nous calculerons $N_s - 1$ quantiles empiriques $q_1 < \dots < q_{N_s-1}$ dont les probabilités associées sont $0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{N_s-1} < 1$. Ces quantiles définiront N_s strates sur l'image de Q_x . La probabilité p_i associée à la strate i ($2 \leq i \leq N_s - 1$) est obtenue par $p_i = \alpha_i - \alpha_{i-1}$. Et $p_1 = \alpha_1$ et $p_{N_s} = 1 - \alpha_{N_s-1}$.

L'estimateur de Monte-Carlo de $P(L < y)$ (4.9) obtenu en combinant l'échantillonnage préférentiel et l'affectation proportionnelle pour n simulations est

$$\hat{P}(L < y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{j=1}^{n_i} e^{-\theta_x^* Q_x^{(ij)} + \varphi_x(\theta_x^*)} I(L^{(ij)} < y) \quad (4.14)$$

Où $n_i = p_i n$ et $Q_x^{(ij)}$ est la $j^{\text{ième}}$ réalisation de Q_x simulée dans la strate i et $L^{(ij)}$ est la perte de valeur du produit financier correspondant à cette

⁶ Pour un rappel sur cette méthode nous renvoyons le lecteur à l'annexe B.4.2.

⁷ Pour un rappel sur l'inversion de Fourier, nous renvoyons le lecteur à la formule (4.13) dans l'annexe B.5.

réalisation. Par la loi faible des grands nombres, nous savons que l'estimateur de Monte-Carlo (4.14) est un estimateur consistant de $P(L < y)$.

Algorithme pour le calcul de $P(L < y)$.

L'algorithme suivant calcule l'estimation de Monte-Carlo (4.14) de la probabilité de perte $P(L < y)$ du produit financier.

Algorithme d'estimation de la distribution des P&L.

Soit y fixé.

(0) Choisir x tel que $x < a_0 - y$ et tel que le réel θ_x^* qui minimise M_{Q_x} sur \mathbb{D}_x^+ vérifie $M_{Q_x}(\theta_x^*) < 1$.

(1) Délimiter les strates :

Pour N_s fixé et q_1, \dots, q_{N_s} , calculer, sous $P^{\theta_x^*}$, les probabilités p_i correspondant à chaque strate $[q_i, q_{i+1}]$. Calculer également les nombres de points $n_i = p_i n$ à simuler dans chacune des strates.

(2) Générer n scénarios $(\Upsilon^{(ij)}, Z^{(ij)})$ sous $P^{\theta_x^*}$.

Générer n réalisations $(\Upsilon^{(ij)}, Z^{(ij)})$ où $\Upsilon \sim \Gamma(\nu/2, 2/(1 - 2\alpha(\theta_x^*)))$ (4.10) et Z suit une loi $N(\mu(\theta_x^*), \sigma^2(\theta_x^*))$ (4.11). De manière à ce que les réalisations $Q_x^{(ij)}$ correspondants soient répartis proportionnellement entre les strates. C'est-à-dire simuler (Υ, Z) de façon à obtenir dans chaque strate i un nombre $n_i = n \cdot p_i$ de réalisations $Q_x^{(ij)}$ ($1 \leq j \leq n_i$).

Pour obtenir $Q_x^{(ij)}$ à partir de $(\Upsilon^{(ij)}, Z^{(ij)})$, nous procédons comme suit :

1. Calculer $Y^{(ij)} = CZ^{(ij)} / \sqrt{\Upsilon^{(ij)}} / \nu$.
2. Calculer la réalisation de L correspondante : $L^{(ij)} = a_0 + a^T Y^{(ij)} + Y^{(ij)T} A Y^{(ij)}$.
3. Calculer $Q_x^{(ij)} = (\frac{\Upsilon}{\nu})(a_0 - L^{(ij)} - x)$.

(3) Calcul de l'estimateur $\hat{P}(L > y)$.

Pour chaque scénario $L^{(ij)}$ évaluer $e^{-\theta_x^* Q_x^{(ij)} + \varphi_x(\theta_x^*)} I(L^{(ij)})$.

Calculer

$$\hat{P}(L < y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{j=1}^{n_i} e^{-\theta_x^* Q_x^{(ij)} + \varphi_x(\theta_x^*)} I(L^{(ij)} < y)$$

□

Intervalle de confiance pour $P(L > y)$.

Par la loi faible des grands nombres, nous disposons du résultat asymptotique suivant pour l'estimateur (4.14)

$$\hat{P}(L < y) \sim AN \left(P(L < y), \sum_{i=1}^{N_s} p_i^2 \frac{\sigma_i^2}{n_i} \right) \quad (4.15)$$

Où σ_i^2 est estimé par l'estimateur sans biais

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} \left(e^{-\theta^* Q_x^{(ij)} + \varphi_x(\theta^*)} I(L^{(ij)} < y) - \hat{\mu}_i \right)^2$$

avec

$$\hat{\mu}_i = \sum_{j=1}^{n_i} e^{-\theta^* Q_x^{(ij)} + \varphi_x(\theta^*)} I(L^{(ij)} < y)$$

On dispose donc d'un intervalle à $100.(1 - \alpha)$ pourcents de confiance⁸ asymptotique pour la $P(L < y)$

$$\left[\hat{P}(L < y) + z_{\alpha/2} \sqrt{\sum_{i=1}^{N_s} p_i^2 \frac{\sigma_i^2}{n_i}}, \hat{P}(L < y) - z_{\alpha/2} \sqrt{\sum_{i=1}^{N_s} p_i^2 \frac{\sigma_i^2}{n_i}} \right]$$

Où $z_{\alpha/2}$ est le $\alpha/2$ -quantile de $Z \sim N(0, 1)$. Les σ_i^2 sont estimés par $\hat{\sigma}_i^2$. Notons ϵ l'erreur relative définie par

$$P(L < y) = \hat{P}(L < y) + \epsilon$$

Comme

$$\sum_{i=1}^{N_s} p_i^2 \frac{\sigma_i^2}{n_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N_s} p_i \sigma_i^2}{n}$$

et que $\sum_{i=1}^{N_s} p_i \sigma_i^2$ décroît avec N_s ⁹, l'erreur ϵ sera d'autant plus faible que les strates seront nombreuses et le nombre de simulations sera élevé.

4.2.2 Lorsque l'horizon de risque est supérieur à la période d'ajustement du modèle de prix.

Si l'horizon de risque considéré est supérieur à la période d'ajustement des modèles de prix, Nous ne pouvons pas utiliser l'estimateur (4.14) car la

⁸ $0 < \alpha < 1$

⁹ Cfr. Annexe B.4.2.

représentation (4.4) n'est plus valide. L'estimateur de $P(L < y)$ que nous utiliserons est la probabilité empirique donnée par

$$\hat{P}(L < y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(L^i < y)$$

et l'intervalle à $100.(1-\alpha)$ pourcents de confiance asymptotique pour $P(L < y)$ s'écrit

$$\left[\hat{P}(L < y) + z_{\alpha/2}\sigma, \hat{P}(L < y) - z_{\alpha/2}\sigma \right] \quad (4.16)$$

où σ^2 est estimé par

$$\hat{s}_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n \left(I(L^j < y) - \sum_{i=1}^n I(L^i < y) \right)^2 \quad (4.17)$$

Où n est le nombre de simulations de Monte-Carlo. Notons ϵ l'erreur relative définie par

$$P(L < y) = \hat{P}(L < y) + \epsilon$$

Supposons $P(L < y)$ et $\hat{P}(L < y)$ non nuls. Compte tenu de (4.16) et (4.17), pour maintenir une erreur relative inférieure à $\epsilon_{max} > 0$, il faudra effectuer un nombre de simulations n tel que

$$-z_{\alpha/2}\hat{s}_n \leq \epsilon_{max}$$

c'est-à-dire

$$n \geq 1 + \frac{(z_{\alpha/2})^2}{\epsilon_{max}^2} \sum_{j=1}^n \left(I(L^j < y) - \sum_{i=1}^n I(L^i < y) \right)^2 \quad (4.18)$$

Les deux termes de (4.18) sont dépendants. Par conséquent n doit être évalué de manière adaptative. Supposons que nous ayons réalisé n_0 simulations. Si (4.18) n'est pas vérifiée, nous effectuons Δn simulations supplémentaires :

$$\Delta n(n_0) = 1 + \frac{(z_{\alpha/2})^2}{\epsilon_{max}^2} \sum_{j=1}^{n_0} \left(I(L^j < y) - \sum_{i=1}^{n_0} I(L^i < y) \right)^2 - n_0 \quad (4.19)$$

Ensuite, nous observons l'inégalité (4.18) pour $n_1 = \Delta n + n_0$. Si cette inégalité est vérifiée nous aurons atteint un nombre de simulations suffisant pour avoir une erreur relative sur l'estimée de la $P(L < y)$ inférieure à ϵ_{max} .

4.3 Défaut fondamental de l'estimation de la VaR par recherche de zéro.

Comme nous l'avons vu précédemment, le calcul de la Var des profits et pertes L se réduit au calcul d'un α -quantile. L'approche consistant à estimer un α -quantile des P&L en recherchant le zéro de

$$P(L < y) - \alpha \quad (4.20)$$

paraît astucieuse. Toutefois elle présente un défaut majeur : elle ne conduit pas toujours à une solution. En effet, comme la fonction de distribution de L est inconnue, la méthode de dichotomie ne cherche pas le zéro de (4.20) mais le zéro de

$$\hat{P}(L < y) - \alpha \quad (4.21)$$

Or, $\hat{P}(L < y)$ est une grandeur aléatoire. Ceci implique que la convergence de la méthode de dichotomie n'est pas garantie.

Nous en sommes donc réduits, faute de mieux, à utiliser l'alpha quantile empirique comme estimateur de $L^{(\alpha)}$. Pour augmenter la qualité de l'estimée de $L^{(\alpha)}$, nous ne pourrions que simuler un nombre plus élevé de réalisations de L et recalculer l'alpha quantile empirique.

4.4 Conclusions à ce chapitre.

Les discussions de ce chapitre aboutissent à deux résultats :

(i) Seule l'estimation non-paramétrique de la VaR_α basée sur l'évaluation de l'alpha quantile empirique est bien posée.

Malheureusement, nous ne pouvons pas accélérer la convergence de cet estimateur. Pour augmenter la qualité d'une estimée de la VaR, nous ne pourrions que recourir à un nombre plus élevé de réalisations de L pour calculer l'alpha quantile empirique. Il est toutefois possible de contrôler la qualité de l'estimée ainsi obtenue en construisant un intervalle de confiance t-bootstrap de la VaR.

(ii) Si les variations L de la valeur d'un produit financier peuvent s'écrire sous la forme $L = a0 + a^T Y + Y^T A Y$ (cfr (4.4)) où le vecteur Y à une distribution student multivarée, nous disposons de résultats théoriques permettant d'accélérer la convergence de l'estimateur de Monte-Carlo de $P(L < y)$.

Chapitre 5

Calcul de la CVaR d'un produit financier.

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous expliquons comment estimer la CVaR d'un produit financier dont la valeur est notée V et les profits et pertes ($V_{t+\Delta t} - V_t$) sur l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$ sont notés L .

De même que pour la VaR, il n'est en général pas possible d'obtenir une expression analytique de la CVaR car nous disposons rarement de la fonction de distribution des profits du produit financier sous forme analytique. Il faudra donc également estimer $CVaR_\alpha(L)$ par simulation. Nous distinguerons deux estimateurs.

Le premier estimateur est non-paramétrique. Nous ne disposons pas de résultat permettant de construire un intervalle de confiance asymptotique pour la CVaR à partir de cet estimateur. Nous aurons recours à une méthode t-bootstrap pour obtenir un intervalle de confiance. La construction d'un IC par une méthode t-bootstrap ¹ est coûteuse. Elle demande un nombre important de rééchantillonnages.

Le second estimateur est basé sur une estimation de type Monte-Carlo. Cet estimateur n'est valable, au sens strict, que si la fonction de distribution des P&L du produit financier est continue. Ce qui n'est pas toujours le cas en pratique. Toutefois, ce second estimateur possède un avantage théorique sur le premier car nous disposons d'une méthode de réduction de variance due à Glasserman et Heidelberger [40] qui permet d'en accélérer la convergence. Cette méthode n'est toutefois valable que si l'horizon de risque considéré est égal à la période d'ajustement du modèle de prix. Ceci signifie que, si les modèles de prix sont ajustés sur base de cours hebdomadaires, alors l'horizon

¹ Cfr. annexe I pour un rappel sur cette méthode.

de risque devra être d'une semaine. Un second avantage de cet estimateur, conservé quel que soit l'horizon de risque, est qu'il permet de construire rapidement un intervalle de confiance asymptotique pour la CVaR.

5.2 Estimateur non-paramétrique de la CVaR.

Rappelons la définition de la CVaR donnée par Freddy Delbaen :

$$CVaR_\alpha(L) = -\frac{1}{\alpha} \left(E[L \mid L \leq L^{(\alpha)}] - L^{(\alpha)} (P[L \leq L^{(\alpha)}] - \alpha) \right)$$

Le théorème 1 du chapitre 1 fournit l'estimateur suivant de $CVaR_\alpha(L)$

$$\eta_{cvar}^m(\alpha) = -\frac{\sum_{i=1}^{\lfloor m\alpha \rfloor} L_i}{\lfloor m\alpha \rfloor} \quad (5.1)$$

Où (L_1, L_2, \dots, L_m) est une séquence de m réalisations indépendantes de L numérotées par ordre croissant. L'estimateur $\eta_{cvar}^m(\alpha)$ est un estimateur consistant de $CVaR_\alpha(L)$ si $E[L^-] < \infty$ ².

En ce qui concerne la qualité des estimées fournies par cet estimateur non-paramétrique de la CVaR, nous ne connaissons aucun résultat asymptotique permettant de construire un intervalle de confiance sur la valeur de $VaR_\alpha(L)$. Nous construirons un intervalle de confiance en utilisant la méthode t-bootstrap³.

5.3 Estimation de la CVaR quand la fonction de distribution des P&L est continue.

Supposons maintenant que la distribution F_L soit continue et que le quantile $L^{(\alpha)}$ soit connu. Comme nous l'avons vu dans le chapitre 1, la CVaR peut s'écrire

$$\begin{aligned} CVaR_\alpha(L) &= -E[L \mid L \leq L^{(\alpha)}] \\ &= -E[L \mid L < L^{(\alpha)}] \\ &= -\frac{E[L \cdot I(L < L^{(\alpha)})]}{P(L < L^{(\alpha)})} \\ &= -\frac{E[L \cdot I(L < L^{(\alpha)})]}{\alpha} \end{aligned}$$

²Où $L^- = \max(0, -L)$

³Pour un rappel sur cette méthode nous renvoyons le lecteur à l'annexe I.

Par conséquent, si l'horizon de risque est égal à la période d'ajustement du modèle de prix, nous pouvons utiliser les résultats du théorème de changement de probabilité vu au paragraphe 4.2.1, et écrire

$$CVaR_\alpha(L) = -\frac{1}{\alpha} E_{\theta_x^*} \left[e^{-\theta_x^* Q_x + \varphi_x(\theta_x^*)} L I(L < L^{(\alpha)}) \right] \quad (5.2)$$

avec

$$\begin{aligned} & var_{P_{\theta_x^*}} \left(e^{-\theta_x^* Q_x + \varphi_x(\theta_x^*)} . L . I(L < L^{(\alpha)}) \right) \\ &= E_{\theta_x^*} \left[e^{-2\theta_x^* Q_x + 2\varphi_x(\theta_x^*)} . L^2 . I(L < L^{(\alpha)}) \right] \\ &\quad - E_{\theta_x^*}^2 \left[e^{-\theta_x^* Q_x + \varphi_x(\theta_x^*)} . L . I(L < L^{(\alpha)}) \right] \\ &= E \left[e^{-\theta_x^* (a_0 - x - L) + \varphi_x(\theta_x^*)} . L^2 . I(L < L^{(\alpha)}) \right] \\ &\quad - E^2 \left[L . I(L < L^{(\alpha)}) \right] \\ &\leq e^{\varphi_x(\theta_x^*)} E \left[L^2 . I(L < L^{(\alpha)}) \right] - E^2 \left[L . I(L < L^{(\alpha)}) \right] \\ &= M_{Q_x}(\theta_x^*) E \left[L^2 I(L < L^{(\alpha)}) \right] - E^2 \left[L . I(L < L^{(\alpha)}) \right] \end{aligned}$$

Où $x \in \mathbb{R}$ est tel que $x < (a_0 - L^{(\alpha)})$ et θ_x^* est la valeur de $\theta \in \mathbb{D}_x^+$ qui minimise M_{Q_x} (Cfr. paragraphe 4.2.1).

Nous estimons $CVaR_\alpha(L)$ en évaluant l'espérance (5.2) au moyen d'une simulation de Monte-Carlo sous $P_{\theta_x^*}$. Afin d'accélérer la convergence de l'estimateur, nous pratiquons une affectation proportionnelle sur Q_x . Notons $\eta_{quant}(\alpha)$ une estimation de $L^{(\alpha)}$. Nous obtenons l'estimateur de $CVaR_\alpha(L)$ suivant

$$\eta_{cvar}(\alpha) = -\frac{\sum_{i=1}^{N_s} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{p_i}{n_i} e^{-\theta_x^* Q_x^{(ij)} + \varphi_x(\theta_x^*)} . L^{(ij)} . I(L^{(ij)} < \eta_{quant}(\alpha))}{\alpha} \quad (5.3)$$

Où N_s est le nombre de strates, p_i est la probabilité associée à la i ème strate, $Q_x^{(ij)}$ est la j ème réalisation de Q_x simulée dans la strate i et $L^{(ij)}$ est la variation de valeur du produit financier correspondant à cette réalisation comme expliqué au paragraphe 4.2.1.

Dans la formulation (5.3) nous estimons une moyenne conditionnelle des profits et pertes au-delà d'un seuil précis $L^{(\alpha)}$. Si nous cherchons à calculer cette moyenne conditionnelle en deçà d'un seuil quelconque Y ,

$$CVaR_{[Y]}(L) = -\frac{E[L . I(L < Y)]}{P(L < Y)}$$

nous aurons recours à l'estimateur suivant

$$\bar{\eta}_{cvar}(Y) = - \frac{\sum_{i=1}^{N_s} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{p_i}{n_i} e^{-\theta_x^* Q_x^{(ij)} + \varphi_x(\theta_x^*)} .L^{(ij)} .I(L^{(ij)} < Y)}{\sum_{i=1}^{N_s} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{p_i}{n_i} e^{-\theta_x^* Q_x^{(ij)} + \varphi_x(\theta_x^*)} I(L^{(ij)} < Y)} \quad (5.4)$$

Remarquons que nous utiliserons la convention suivante : nous noterons $CVaR_{[Y]}(L)$ la CVaR définie en référence à un seuil Y , et nous notons $CVaR_\alpha(L)$ la CVaR définie en référence à un taux de rareté α .

Intervalle de confiance pour la CVaR.

Par la loi faible des grands nombres, nous disposons du résultat asymptotique suivant pour l'estimateur $\eta_{cvar}(\alpha)$ (5.3)

$$\eta_{cvar}(\alpha) \sim AN \left(CVaR_\alpha(L), \sum_{i=1}^{N_s} p_i^2 \frac{\tilde{\sigma}_i^2}{n_i} \right) \text{ pour } n \rightarrow \infty \quad (5.5)$$

Où $\tilde{\sigma}_i^2$ est estimé par l'estimateur sans biais

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} \left(e^{-\theta_x^* Q_x^{(ij)} + \varphi_x(\theta_x^*)} .L^{(ij)} .I(L^{(ij)} < \eta_{quant}(\alpha)) - \hat{\mu}_i \right)^2 \quad (5.6)$$

avec

$$\hat{\mu}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} e^{-\theta_x^* Q_x^{(ij)} + \varphi_x(\theta_x^*)} .L^{(ij)} .I(L^{(ij)} < \eta_{quant}(\alpha))$$

On dispose donc d'un intervalle à $100.(1 - \alpha)$ pourcents de confiance⁴ asymptotique pour la $CVaR_\alpha(L)$

$$\left[\eta_{cvar}(\alpha) + z_{\alpha/2} \sqrt{\sum_{i=1}^{N_s} p_i^2 \frac{\tilde{\sigma}_i^2}{n_i}}, \eta_{cvar}(\alpha) - z_{\alpha/2} \sqrt{\sum_{i=1}^{N_s} p_i^2 \frac{\tilde{\sigma}_i^2}{n_i}} \right]$$

Où $z_{\alpha/2}$ est le $\alpha/2$ -quantile de $Z \sim N(0, 1)$.

En ce qui concerne l'estimateur $\bar{\eta}_{cvar}(Y)$ (5.4), nous ne disposons pas de résultat asymptotique. De plus, nous ne pouvons pas obtenir un intervalle de confiance par la méthode du t-bootstrap. En effet, les réalisations de L à partir desquelles $\bar{\eta}_{cvar}(Y)$ est calculé ne sont pas prélevées de manière indépendante. Or, ceci est une condition nécessaire pour la validité d'une approche bootstrap. L'affectation proportionnelle sélectionne parmi des réalisations celles qui permettent de remplir les 'quotas' $p_i n$ de réalisations $L^{(ij)}$ correspondant à chaque strate de l'image de Q_x . Pour obtenir un intervalle de

⁴ $0 < \alpha < 1$

confiance pour la $CVaR_{[Y]}(L)$ à partir de l'estimateur $\bar{\eta}_{cvar}(Y)$, nous pourrions recourir à l'heuristique suivante : soit $[A, B]$ l'intervalle de confiance à 99% pour $E[-L|L < Y]$ et $[a, b]$ l'intervalle de confiance à 99% pour $P[L < Y]$ obtenus par les résultats asymptotiques (5.5) et (4.15). L'intervalle

$$\left[\min\left(\frac{A}{b}, \frac{A}{a}\right), \max\left(\frac{B}{b}, \frac{B}{a}\right) \right] \quad (5.7)$$

constitue un intervalle à plus de 99% de confiance pour $CVaR_{[Y]}(L)$.

5.4 Conclusions à ce chapitre.

Les discussions de ce chapitre nous ont procuré les résultats suivant :

(i) Seul l'estimateur non-paramétrique $\eta_{cvar}^m(\alpha)$ (5.1) permet d'estimer la CVaR dans sa formulation générale (M.1) pour des profits et pertes L de fonction de distribution quelconque. L'estimateur $\eta_{cvar}^m(\alpha)$ estime la CVaR définie en référence à un niveau de rareté α . $\eta_{cvar}^m(\alpha)$ permet en effet d'estimer la $CVaR_\alpha$ indépendamment de l' α -quantile $L^{(\alpha)}$.

(ii) L'estimateur $\eta_{cvar}(\alpha)$ (5.3) permet d'estimer la CVaR pour des profits et pertes L dont la fonction de distribution est continue. Il permet d'estimer la CVaR définie en référence à un seuil de perte $L^{(\alpha)}$. L'estimateur $\eta_{cvar}(\alpha)$ présente un défaut : il exige que la valeur de l' α -quantile $L^{(\alpha)}$ soit connue préalablement et précisément.

L'estimateur $\bar{\eta}_{cvar}(Y)$ constitue une généralisation de $\eta_{cvar}(\alpha)$. Il permet d'estimer la CVaR définie comme la perte moyenne en deçà d'un seuil de perte Y quelconque.

Nous voyons donc que les estimateurs $\eta_{cvar}(\alpha)$ et $\bar{\eta}_{cvar}(Y)$ de la CVaR ne sont pas comparables car les CVaR qu'ils estiment ne sont pas définies de la même façon. Alors que l'estimateur $\eta_{cvar}(\alpha)$ (5.1) correspond à une CVaR définie en terme de *taux de rareté*, l'estimateur $\bar{\eta}_{cvar}(Y)$ (5.4) correspond à une CVaR définie en terme de *seuil de perte*. Ces deux estimateurs deviendraient comparables si nous connaissions exactement $L^{(\alpha)}$ et si nous prenions $Y = L^{(\alpha)}$.

Chapitre 6

Application : mesure du risque inhérent à une position courte sur une option à sous-jacent multiple.

6.1 Introduction.

Dans ce chapitre, nous illustrerons les techniques de quantification du risque présentées précédemment. Nous appliquerons ces techniques d'une part à l'analyse des pertes potentielles liées à une position courte sur une option et d'autre part à l'analyse des pertes associées à la revente d'une option avant son échéance. Commençons tout d'abord par un bref rappel sur les options.

Les options sont des produits destinés à *transférer* le risque de variation de la valeur d'un sous-jacent. Elles permettent à celui qui les achète d'éliminer un risque. Mais simultanément, ce risque est transféré au vendeur de l'option. Et la perte que peut encourir ce dernier à l'exercice de l'option peut être importante.

Pour pouvoir quantifier la perte qu'il encourt, le vendeur de l'option peut estimer une VaR et une CVaR des P&L potentiels à l'exercice de l'option. Ces P&L sont définis comme la somme entre la prime que le vendeur perçoit lors de la vente de l'option et le payoff qu'il obtient lors de l'exercice de l'option à l'échéance.

De même, si une option est échangeable sur un marché financier, la personne qui la détient mais qui désire la revendre avant échéance peut s'interroger sur la diminution de valeur que cette option aura subie et sur la perte qui découlera de sa revente.

Nous illustrerons les méthodes d'estimation de la VaR et de la CVaR par l'évaluation du risque associé à la (re)vente de deux types d'options dont les échéances sont de trois mois. Dans ce chapitre, nous supposons que les P&L potentiels associés à chacune des stratégies optionnelles considérées sont des v.a. réelles telles que $E[P\&L^-] < \infty^1$.

Les premières options considérées sont les options panier de type européen. C'est à dire des options européennes dont la variable sous-jacente est la valeur d'un portefeuille \mathcal{W} . Nous supposons ici que ce portefeuille se compose de cinq actions distinctes : une Solvay, une Dexia, une Colruyt, une Agfa-Gevaert et une Interbrew. Les options panier européennes sont des produits dérivés échangés sur un marché financier. Elles possèdent un prix.

Le second type d'options que nous considérons sont les options asiatiques de type européen dont la valeur sous-jacente est la valeur du portefeuille \mathcal{W} . Les options asiatiques, contrairement aux options panier, ne sont pas échangées sur un marché financier. Ce sont des produits dérivés utilisés par les acteurs du marché des biens énergétiques (pétrole, gaz,...) pour se couvrir contre la volatilité importante des prix sur ce marché.

6.1.1 Options panier.

Nous supposons que l'échéance des options considérées est de 3 mois.

Pour évaluer une valeur risquée conditionnelle associée à la revente d'une option panier *une semaine* après son émission, son détenteur pourra souhaiter utiliser l'estimateur de Monte-Carlo avec réduction de variance présentée au paragraphe § 5.3. Cette approche nécessite le calcul des sensibilités delta et gamma de l'option.

Or, pour des produits dérivés portant sur un grand nombre de sous-jacents, le calcul des sensibilités est un problème délicat. Bien souvent, on ne dispose pas d'expression analytique de la valeur du produit dérivé. Pour obtenir une approximation des sensibilités du produit dérivé, on doit alors utiliser la méthode des différences finies (voir Annexe F). Celle-ci requiert des évaluations intermédiaires de la valeur du produit dérivé.

Cox, Ross et Rubinstein [23] ont montré que si l'on peut construire un portefeuille qui duplique une option alors, il existe une mesure de probabilité dite neutre au risque sous laquelle l'espérance du payoff actualisé de cette option est égale à son prix. Les évaluations intermédiaires de la valeur de l'option peuvent alors être réalisées en calculant l'estimateur de Monte-Carlo de l'espérance du payoff actualisé de l'option sous la probabilité neutre au

¹Où $P\&L^- = \max(0, -P\&L)$. Cette hypothèse assure la consistance de l'estimateur non paramétrique (5.1) de la valeur risquée conditionnelle. Nous renvoyons le lecteur à l'annexe M pour une discussion sur la validité de cette hypothèse.

risque. Toutefois, ces évaluations via Monte-Carlo peuvent être très compliquées à réaliser car il faut rechercher au préalable la mesure neutre au risque correspondant au payoff actualisé.

Si la valeur sous-jacente d'une option est décrite par un modèle de prix à variance stochastique, le calcul de ses sensibilités est un problème particulièrement ardu. Trouver la probabilité neutre au risque correspondant au payoff actualisé de l'option est un problème non trivial. Pour contourner ces difficultés, nous avons choisi d'approximer l'évolution de la valeur du portefeuille sous-jacent \mathcal{W} des options panier par un processus brownien géométrique. Cette approximation nous permet d'obtenir les valeurs des options panier via la formule de Black & Scholes. Et de celles-ci nous pourrions dériver les sensibilités de ces options sous une forme analytique. Ces sensibilités obtenues en considérant que la valeur du portefeuille sous-jacent est un brownien géométrique seront des approximations des sensibilités qui seraient obtenues lorsqu'on modélise les valeurs des composantes du portefeuille sous-jacent \mathcal{W} par des modèles de prix à variance stochastique.

Si le détenteur d'une option panier désire estimer une valeur risquée conditionnelle associée à une revente de l'option après une période T *supérieure à une semaine*, il aura recours à l'estimateur non-paramétrique η_{cvar}^m (5.1) présentée au paragraphe §5.2 ou à un estimateur de Monte-Carlo simple, si la distribution des P&L est continue.

S'il désire revendre avant son échéance l'option qu'il détient, le détenteur simulera les valeurs des sous-jacents réalisables à l'horizon fixé à l'aide du modèle de prix présenté au chapitre 2. Il injectera ces valeurs dans la formule de Black-Scholes pour connaître la valeur de l'option à cet horizon. En soustrayant la prime contre laquelle il a acquis l'option à sa valeur de revente, il obtiendra une réalisation des P&L associés à la revente de l'option. En simulant plusieurs réalisations des valeurs sous-jacentes, il obtiendra une distribution empirique des P&L associés à la revente de l'option.

Si on considère le point de vue de l'émetteur de l'option, le risque de marché considéré est celui lié aux pertes potentielles à l'exercice de l'option. Pour quantifier ce risque, l'émetteur simulera des réalisations des P&L potentiels. Celles-ci sont définies comme la somme entre les payoffs obtenus à l'exercice et la prime perçue à l'émission de l'option. Les réalisations des payoffs sont obtenues en simulant les valeurs des sous-jacents à l'échéance.

6.1.2 Options asiatiques.

Une option asiatique est un produit dérivé "path-dependent". C'est-à-dire que sa valeur dépend directement de l'évolution de la valeur des cours sous-jacents et pas seulement de leurs valeurs à un terme. Le payoff d'une

option asiatique est lié à la valeur moyenne de la valeur sous-jacente à un ensemble fini de dates $\{t_1, \dots, t_N\}$ ($t_N = T$, $t_{i+1} > t_i > t_{\text{émission}}$) durant la vie de l'option.

Nous considérons ici des options asiatiques de type européen. C'est-à-dire des options asiatiques de valeur d'exercice K et de date d'exercice unique T . Nous prenons pour valeur sous-jacente V la valeur du portefeuille \mathcal{W} composé de cinq actions (Solvay, Colruyt, Dexia, Agfa-Gevaert, Interbrew)

$$V(t) = \sum_{k=1}^5 S_k(t) \quad , \quad \forall t \geq 0 \quad (6.1)$$

La fonction de payoff d'une option asiatique sur V s'écrit

$$- \left(\sum_{i=1}^N \frac{V(t_i)}{N} - K \right)^+ \quad (6.2)$$

s'il s'agit d'une option d'achat (Call) ou s'écrit

$$- \left(K - \sum_{i=1}^N \frac{V(t_i)}{N} \right)^+ \quad (6.3)$$

s'il s'agit d'une option de vente (Put).

Les options asiatiques sont utilisées par les acteurs du marché des biens énergétiques. Leurs valeurs sous-jacentes sont en général des cours de biens énergétiques : gaz, pétrole, électricité, charbon...

Sur le marché de l'énergie, la demande est très peu élastique au prix² et les cours peuvent subir des hausses très rapides et très élevées³.

Les acteurs du marché de l'énergie préfèrent les options asiatiques aux options européennes. Et ce pour deux raisons :

(i) Les options asiatiques découragent les tentatives de manipulations des cours à l'exercice de l'option. Elles évitent que les cours ne soient artificiellement élevés le jour de l'exercice de l'option. En effet, le payoff d'une option asiatique est peu dépendant du cours à l'exercice et donc peu intéressant de tenter de manipuler les cours à l'exercice. Pour influencer le payoff de l'option, un agent économique devrait manipuler le cours des sous-jacents un grand nombre de fois, ce qui est impossible en pratique.

L'utilisation massive des options asiatiques sur un marché rend moins rentables les manipulations des cours. Elle a donc pour effet de diminuer la volatilité des cours observés sur ce marché .

(ii) La seconde raison de l'utilisation des options asiatiques sur les marchés

² En raison de la quasi non substituabilité de ces produits

³ En raison d'une part de la non substituabilité de ces produits et d'autre part par l'importance économique des secteurs qui les consomment.

de l'énergie est que la structure de ces options correspond à la pratique des contrats entre fournisseurs et consommateurs d'énergie. Les *contrats de fourniture* d'un bien énergétique portent sur de longues périodes (six mois à un an) et le prix convenu est un prix moyen. Les consommateurs d'énergie ne sont donc pas exposés à un prix à un moment précis mais plutôt à un prix moyen au cours d'une période de temps. Celui qui achète une option asiatique sur le marché de l'énergie acquiert le droit de fournir ou d'acheter du gaz, du pétrole, ou un autre bien, à une valeur d'exercice déterminé pendant une période donnée.

Nous avons présenté les caractéristiques des produits financiers sur lesquels nous avons choisi d'illustrer la quantification du risque de marché. Pour calculer les P&L associés à une position courte ou la revente d'une option avant échéance, nous avons besoin de connaître sa prime d'émission. Il nous faut donc maintenant expliquer comment évaluer les options panier et les options asiatiques. Nous commencerons par montrer que l'évolution de la valeur du portefeuille \mathcal{W} peut être approximée par un processus brownien géométrique. Ensuite nous expliquerons comment utiliser ce résultat pour obtenir une approximation analytique de la valeur d'une option panier et d'une option asiatique.

6.2 Approximation du processus décrivant la valeur du portefeuille.

Nous cherchons à ajuster un mouvement brownien à l'historique de la valeur V du portefeuille \mathcal{W} . Et à vérifier la qualité de cette approximation. L'historique de V est construit à partir des cours des actions observés dans le passé et de la relation (6.1).

L'évolution de V sera décrite par le processus

$$V(t) = V_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t)}$$

où l'unité de temps est une semaine⁴, $W(t)$ est une v.a. normale centrée de variance égale à t ⁵ et

$$\mu = -5.7242 \cdot 10^{-4}$$

$$\sigma = 0.0287$$

Comme nous le constatons à la figure [Fig. 6.1] ci-dessous, les rendements centrés dévolatilisés de V présentent une autocorrélation faible. Les autocorrélations d'ordre deux observées peuvent s'expliquer par la présence naturelle de clusters de volatilité dans l'évolution des rendements. La skewness et la kurtosis empiriques des rendements centrés dévolatilisés calculés dans le tableau ci-dessous semblent indiquer que les rendements centrés dévolatilisés possèdent des queues plus épaisses que la normale standard et présentent une dissymétrie portée vers les valeurs négatives.

	t_8	Skewness et Kurtosis rendements centrés dévol.	t_9	N(0,1)
skewness	0	-0.2469	0	0
kurtosis	4.5000	4.3879	4.2000	3

Toutefois, le test Chi-carrée au seuil 5% pratiqué sur les rendements centrés dévolatilisés ne permet pas de rejeter l'hypothèse de normalité des rendements de la valeur du portefeuille V ⁶. Ce résultat nous encourage à modéliser V par un mouvement brownien géométrique.

6.3 Mesure du risque sur la (re)vente d'une option panier.

Si la valeur V du portefeuille sous-jacent est approximée par le brownien géométrique de paramètres (μ, σ) , la valeur d'une option panier d'achat

⁴ $t=1$ signifie que l'on se trouve une semaine après l'instant initial.

⁵ On observe les prix hebdomadaires des cinq actions sur la période du 1/12/2000 au 16/05/2003 soit 129 semaines.

⁶ Pour un rappel sur le test de normalité chi-carré voir AnnexeC. Sur nos données nous obtenons pour la statistique de test $TS=127$ et pour le $(1 - \alpha)$ -quantile $(\chi_{128}^2)^{(0.95)} = 155.4047$.

(call) est donnée par la formule de Black et Scholes :

$$C_{BS}(t, V; \sigma, r, K, T) = V(t)N(d_1(t)) - e^{-r(T-t)}KN(d_2(t)) , t \in [0, T] \quad (6.4)$$

$$d_1(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \ln\left(\frac{V(t)}{Ke^{-r(T-t)}}\right) + \frac{\sigma}{2}\sqrt{T-t}$$

$$d_2(t) = d_1(t) - \sigma\sqrt{T-t}$$

Où K est la valeur d'exercice, T l'échéance, N est la fonction de distribution de la gaussienne standard $N(0,1)$ et r est le taux d'intérêt de l'actif sans risque. Nous supposons $r = 3\%$. De même, sous hypothèse d'absence d'arbitrage, la valeur d'une option panier de vente (put) est donnée par :

$$P_{BS}(t, V; \sigma, r, K, T) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2(t)) - V(t)N(-d_1(t)) , t \in [0, T] \quad (6.5)$$

6.3.1 Grecques d'options panier.

Grecques d'une option panier d'achat :

$$\begin{aligned} \Delta_{C,i}(t) &= \frac{\partial C}{\partial S_i}(t) = \frac{\partial C}{\partial V}(t) = N(d_1(t)) \\ \Gamma_{i,j}(t) &= \frac{\partial^2 C}{\partial S_i \partial S_j}(t) = \frac{e^{-\frac{d_1^2(t)}{2}}}{V(t)\sqrt{2\pi(T-t)}\sigma} \\ \theta_C(t) &= \left[r.C - r.N(d_1).V - \frac{\sigma}{2} \cdot \frac{e^{-\frac{d_1^2(t)}{2}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}}.V \right]_t \end{aligned}$$

Grecques d'une option panier de vente ⁷ :

$$\begin{aligned} \Delta_{P,i}(t) &= \frac{\partial P}{\partial S_i}(t) = \frac{\partial P}{\partial V}(t) = N(-d_1(t)) \\ \Gamma_{i,j}(t) &= \frac{\partial^2 P}{\partial S_i \partial S_j}(t) = \frac{e^{-\frac{d_1^2(t)}{2}}}{V(t)\sqrt{2\pi(T-t)}\sigma} \\ \theta_P(t) &= \left[\theta_C - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)V + Kr e^{-r(T-t)} \right]_t \end{aligned}$$

⁷ Elles sont obtenues en utilisant la relation de parité call/put européens : $C(t, T, K) - P(t, T, K) = V(t) - Ke^{-r(T-t)}$

6.3.2 Estimation de la VaR et de la $CVaR$ d'une option panier.

Nous cherchons d'une part à quantifier le *risque inhérent à une position courte* sur une option panier dont l'échéance est de 3 mois. Et, nous cherchons d'autre part, à quantifier le *risque associé à une revente* de l'option une semaine après son acquisition à émission. Ces deux risques sont des risques de marché caractérisés respectivement par un horizon de risque de 3 mois et un horizon de risque d'une semaine. Pour les quantifier nous utiliserons comme mesures des VaR et des $CVaR$ correspondant à leurs horizons de risque.

Nous choisissons de prendre pour valeur d'exercice du put et du call la moyenne de 2000 valeurs du portefeuille \mathcal{W} simulés à la date d'exercice des options. Soit $K = 145.80$ EURO. La valeur d'émission du call panier est de 5.41 EURO. Celle du put panier est de 6.05 EURO. La valeur $V(0)$ du portefeuille \mathcal{W} à l'émission des options est quant à elle de 144.17 EURO.

La figure [Fig. 6.3] montre une distribution empirique obtenue sur base de 250 000 simulations des P&L associés à la revente d'une option panier une semaine après son émission⁸ et la distribution empirique des P&L associés à une position courte sur une option panier⁹.

A. Estimation de la VaR .

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 4, le seul estimateur de la VaR_α dont nous disposons est l'estimateur (Cfr.(4.1)) :

$$VaR_\alpha(P\&L) = \max(0, -\hat{F}_{P\&L}^{-1}(\alpha))$$

basé sur le calcul de l'alpha quantile empirique des P&L.

Nous supposons que les estimées du 0.05 quantile empirique et du 0.01 quantile empirique obtenues pour 250 000 simulations sont indistinguables des valeurs réelles des 0.01 et 0.05 quantiles des P&L. Pour 250 000 simulations, nous obtenons les résultats suivant :

⁸ Ces P&L sont égaux à la différence entre la valeur de l'option à son émission et sa valeur de revente une semaine après.

⁹ Ces P&L sont égaux aux cashflows à terme auxquels on additionne la prime perçue à l'émission de l'option.

Option panier	P&L ^(0.01)	VaR _{0.01} (P&L)	P&L ^(0.05)	VaR _{0.05} (P&L)
Call				
Risque de revente (hor.= 1 sem.)	1.7399	0	3.2254	0
Risque position courte (hor.= 3 mois)	-10.9909	10.9909	-3.8297	3.8297
Put				
Risque de revente (hor.= 1 sem.)	-5.6389	5.6389	-2.6724	2.6724
Risque position courte (hor.= 3 mois)	-14.2518	14.2518	-9.5181	9.5181

Pour le risque de revente (horizon de risque d'une semaine), les évolutions des estimées du 0.05quantile et du 0.01quantile en fonction du nombre de simulations sont représentées à la figure [Fig.6.5] pour le call panier et à la figure [Fig.6.6] pour le put panier.

Pour le risque associé à une position courte (horizon de risque de trois mois), les évolutions des estimées du 0.05quantile et du 0.01quantile en fonction du nombre de simulations sont représentées à la figure [Fig.6.8] pour le call panier et à la figure [Fig.6.9]. pour le put panier. Dans ces figures nous présentons également l'évolution des erreurs relatives supposées sur ces estimées ¹⁰.

B. Estimation de la CVaR définie par rapport à un taux de rareté.

L'estimation de la CVaR définie par rapport au taux de rareté α est réalisée par l'estimateur non-paramétrique (5.1) :

$$\eta_{cvar}^m(\alpha) = -\frac{\sum_{i=1}^{\lfloor m\alpha \rfloor} P\&L_i}{\lfloor m\alpha \rfloor}$$

Comme dans le cas des alpha-quantiles, nous supposons que les estimées de CVaR_{0.05} et de CVaR_{0.01} fournies par η_{cvar}^m pour 250 000 simulations sont indistinguables des valeurs réelles de CVaR_{0.05} et de CVaR_{0.01}. Pour 250 000 simulations, nous obtenons les résultats suivant :

Option panier	CVaR _{0.01} (P&L)	CVaR _{0.05} (P&L)
Call		
Risque de revente (hor.= 1 sem.)	718.744	141.2776
Risque position courte (hor.= 3 mois)	697.5151	144.7041
Put		
Risque de revente (hor.= 1 sem.)	9.9936	4.9984
Risque position courte (hor.= 3 mois)	18.6110	12.8325

¹⁰ L'erreur relative sur une estimée est définie comme l'erreur relative entre cette estimée estimée et l'estimée obtenue pour l'échantillon de 250 000 réalisations.

Pour le risque de revente (horizon de risque d'une semaine), les évolutions des estimées de $CVaR_{0,05}$ et de $CVaR_{0,01}$ en fonction du nombre de simulations sont représentées à la figure [Fig.6.5] pour le call panier et à la figure [Fig.6.6] pour le put panier.

Pour le risque associé à une position courte (horizon de risque de trois mois), les évolutions des estimées de $CVaR_{0,05}$ et de $CVaR_{0,01}$ en fonction du nombre de simulations sont représentées à la figure [Fig.6.8] pour le call panier et à la figure [Fig.6.9]. pour le put panier. Dans ces figures nous présentons également également l'évolution des erreurs relatives supposées sur ces estimées.

C. Estimation de la $CVaR$ définie par rapport à un seuil Y :

Comme nous l'avons vu au chapitre 5, si la fonction de distribution des P&L est continue, la $CVaR$ peut être définie comme la perte moyenne conditionnelle au-delà d'un seuil. La $CVaR$ se présente comme le quotient d'une espérance sur une probabilité. Nous avons également vu au chapitre 5 que, lorsque l'horizon de risque est égal à la période d'ajustement du modèle de rendement, il est possible d'estimer le numérateur et le dénominateur de la $CVaR$ au moyen d'une méthode de Monte-Carlo dans laquelle on peut appliquer une réduction de variance utilisant simultanément un échantillonnage préférentiel et une affectation proportionnelle. Cette réduction de variance a pour effet d'accélérer la convergence des estimateurs du numérateur et du dénominateur vers leurs valeurs réelles. Or, ces estimateurs sont des estimateurs de Monte-Carlo. Ils convergent donc presque sûrement vers leurs valeurs réelles. Par le *théorème de Slutsky*¹¹, nous savons donc que l'estimateur $\bar{\eta}_{cvar}$ converge en distribution vers $CVaR_{[Y]}(P\&L)$. Et toute accélération de la convergence de l'estimateur du numérateur ou de l'estimateur du dénominateur entraîne une accélération de la convergence de $\bar{\eta}_{cvar}$. En effet, toute accélération de la convergence de l'estimateur du numérateur (du dénominateur) est associée à une diminution plus rapide de la longueur de l'intervalle de confiance pour $E[P\&L \cdot I(P\&L < Y)]$ (pour $P(P\&L < Y)$) cette dernière entraîne une diminution plus rapide de la longueur de l'intervalle à plus de 99% de confiance pour $CVaR_{[Y]}(P\&L)$ (Cfr. (5.7)).

Analyse de l'échantillonnage préférentiel et de l'affectation proportionnelle.

Comme nous l'avons expliqué au paragraphe 4.2.1, pour que la démarche de réduction de la variance soit opérante, nous devons tout d'abord vérifier que les fonctions génératrices des moments M_{Q_x} des v.a. Q_x (4.7) se rapportant au call et au put panier sont convexes sur \mathbb{D}_x (4.6). Ensuite, nous devons

¹¹ Pour un rappel de ce théorème voir annexe H.

nous assurer qu'au minimant θ_x^* de M_{Q_x} sur \mathbb{D}_x^+ nous vérifions : $M_{Q_x}(\theta_x^*) \leq 1$ pour toutes les valeurs de x considérées. Une analyse détaillée¹² de la forme des fonctions M_{Q_x} montre que ces deux hypothèses sont vérifiées pour le call et le put panier.

Malheureusement, les grecque theta du call et du put sont élevées en valeur absolue. Elles valent respectivement -10.165 et -5.8237 . Si nous voulons estimer $CVAR_{[-5.6389]}$ ou $CVAR_{[-2.6724]}$ associées aux P&L à la revente du put une semaine après son émission, les valeurs de x qui pourraient rendre effectif¹³ l'échantillonnage préférentiel sont donc inférieures à -0.1848 . De même, si nous voulons estimer $CVAR_{[1.7399]}$ ou $CVAR_{[3.2254]}$ associées aux P&L à la revente du call à 1 semaine de son émission, les valeurs de x qui pourraient rendre effectif l'échantillonnage préférentiel sont inférieures à -11.9049 . Or, que l'on considère le put ou le call, pour tout x négatif, le minimant de M_{Q_x} est $\theta_x^* = 0$ (Cfr. annexe G). Par conséquent, la méthode d'échantillonnage préférentiel proposée par Glasserman [41] n'apporte rien car

$$dF^{\theta_x^*} = dF$$

Et il ne sert également plus à rien de stratifier l'image de Q_x . La méthode d'accélération de la convergence des estimateurs de Monte-Carlo de $P(P\&L < -Y)$ et de $E[P\&L \cdot I(P\&L < Y)]$ proposé par Glasserman n'est valide que si la valeur du produit financier est suffisamment insensible au passage du temps, (c'est-à-dire que sa grecque theta $= a_0$ (Cfr.(3.5)) est faible en valeur absolue) et si simultanément la distribution des P&L présente des occurrences négatives suffisamment extrêmes. Si tel est le cas, les $CVAR_{[Y]}(P\&L)$ que nous chercherons naturellement à évaluer correspondront à des valeurs seuils Y très négatives. Il pourra alors exister un réel strictement positif x tel que $x < a_0 - Y$ et pour lequel M_{Q_x} présente sur \mathbb{D}_x^+ un minimant strictement positif θ_x^* tel que $M_{Q_x}(\theta_x^*) < 1$ et

$$var_{F^{\theta_x^*}} \left(e^{-\theta_x^* Q_x + \varphi_x(\theta_x^*)} \cdot P\&L \cdot I(P\&L < Y) \right) < var_F (P\&L \cdot I(P\&L < Y)) \quad (6.6)$$

et

$$var_{F^{\theta_x^*}} \left(e^{-\theta_x^* Q_x + \varphi_x(\theta_x^*)} \cdot I(P\&L < Y) \right) < var_F (I(P\&L < Y)) \quad (6.7)$$

Remarque sur la stratification de l'image de Q_x .

Bien que la méthode de réduction de variance proposée par Glasserman ne permette pas d'accélérer la convergence de l'estimateur

$$\bar{\eta}_{cvar}(Y) = - \frac{\sum_{i=1}^m e^{-\theta_x^* Q_x^i + \varphi_x(\theta_x^*)} \cdot P\&L_i \cdot I(P\&L_i < Y)}{\sum_{k=1}^m e^{-\theta_x^* Q_x^k + \varphi_x(\theta_x^*)} \cdot I(P\&L_k < Y)}$$

¹² Celle-ci est réalisée dans l'annexe G.

¹³ Pour rappel, seules les valeurs $x \leq a_0 - Y$ rendent effectif l'échantillonnage préférentiel

vers

$$CVaR_{[Y]}(P\&L) = -\frac{E[P\&L < Y]}{P(P\&L < Y)}$$

il est intéressant d'en comprendre les limites.

Si l'on suppose que l'échantillonnage préférentiel vérifie (6.6) et (6.7), la réduction de variance est opérante. Et, nous réalisons une stratification de l'image de Q_x pour réaliser une affectation proportionnelle et obtenir une accélération supplémentaire de la convergence de $\bar{\eta}_{cvar}(Y)$. Cette stratification est basée sur une approximation \hat{F}_{Q_x} de la distribution inconnue de Q_x . L'estimateur $\bar{\eta}_{cvar}(Y)$ appliquant l'échantillonnage préférentiel et l'affectation proportionnelle convergera vers la $CVaR_{[Y]}$ d'une distribution située "entre" \hat{F}_{Q_x} et la distribution réelle F_{Q_x} . Si l'approximation \hat{F}_{Q_x} est mauvaise, la stratification introduit un biais dans l'estimation de $CVaR_{[Y]}(P\&L)$. En particulier au niveau du terme $P(P\&L < Y)$. Le biais ainsi introduit dans l'estimée $\bar{\eta}_{cvar}$ peut être important. Dans le cas où la distribution de Q_x présente des queues épaisses, si nous prenons pour \hat{F}_{Q_x} une distribution empirique, nous risquons d'introduire des erreurs importantes dans le calcul des probabilités attribuées à chaque strate de F_{Q_x} . L'affectation proportionnelle tirera alors un nombre incorrect de points dans chaque strate. Ceci nous indique que pour des variables aléatoires présentant des valeurs extrêmes, il est toujours préférable de procéder à une stratification de type paramétrique ¹⁴ quand celle-ci est possible. Toutefois, il faut être conscient que même une stratification paramétrique peut introduire un biais important dans une estimation de Monte-Carlo. En effet, si nous décidons de stratifier l'image de Q_x à l'aide de la formule d'inversion de Fourier, des erreurs importantes peuvent être introduites si l'évaluation de l'intégrale (B.5)¹⁵ n'est pas assez précise.

Cette discussion nous indique qu'il faut bien distinguer l'accélération de la convergence procurée par l'affectation proportionnelle et problème du biais de l'estimateur $\bar{\eta}_{cvar}$ provoqué par une mauvaise stratification. Le nombre de strates agit non pas sur le biais de l'estimateur $\bar{\eta}_{cvar}$ mais sur sa variance. La variance de $\bar{\eta}_{cvar}$ sera d'autant plus faible que le nombre de strates est élevé.

Cette remarque nous a montré que l'échantillonnage d'importance bien que très efficace en théorie, peut-être délicat à réaliser. Revenons maintenant à l'estimation de $CVaR_{[Y]}(P\&L)$.

Comme la réduction de variance est inopérante, l'estimateur $\bar{\eta}_{cvar}$ de la

¹⁴ Comme par exemple une stratification basée sur l'inversion de Fourier d'une fonction caractéristique absolument intégrable.

¹⁵ Cfr. Annexe B.3.

$CVaR_{[Y]}(P\&L)$ devient l'estimateur $\bar{\eta}_{cvar}^{srv}$ suivant¹⁶ :

$$\bar{\eta}_{cvar}^{srv}(Y) = -\frac{\sum_{i=1}^m P\&L_i I(P\&L_i < Y)}{\sum_{k=1}^m I(P\&L_k < Y)}$$

Cet estimateur peut être appliqué pour un horizon supérieur ou égal à la période d'ajustement du modèle de rendements. Pour un échantillon de $n = 250\,000$ réalisations des P&L, nous obtenons les estimées suivantes

Risque de revente (horiz.= 1 sem.)		
	$CVaR_{[1.7399]}(P\&L)$	$CVaR_{[3.2254]}(P\&L)$
Call panier	718.7440	×
	$CVaR_{[-5.6389]}(P\&L)$	$CVaR_{[-2.6724]}(P\&L)$
Put panier	9.9991	4.9980
Risque position courte (horiz.= 3 mois)		
	$CVaR_{[-10.9909]}(P\&L)$	$CVaR_{[-3.8297]}(P\&L)$
Call panier	697.5151	144.7041
	$CVaR_{[-14.2518]}(P\&L)$	$CVaR_{[-9.5181]}(P\&L)$
Put panier	18.6092	12.8323

Les évolutions des estimées des $CVaR_{[Y]}(P\&L)$ définies dans le tableau ci-dessus sont présentées aux figures [Fig. 6.10, 6.11, 6.12 et 6.13].

Nous savons que le 0.05quantile des P&L associés à la revente d'un call panier vaut 3.2254. Or, l'estimée de la $CVaR_{[3.2254]}$, de ces P&L qui renvoyée par l'estimateur de Monte-Carlo simple est $\bar{\eta}_{cvar}^{srv}(3.2254) = 3.9994$. Cette valeur est fortement différente de la valeur réelle de $CVaR_{0.05}(P\&L) = 141.2776$. Cette différence s'explique par la discontinuité de la distribution des P&L en 3.2254 visible à la figure [Fig.6.4]. Cette remarque montre qu'il est indispensable de déterminer si la distribution des P&L présente des discontinuités avant de choisir un estimateur de la CVaR.

¹⁶ L'estimateur $\bar{\eta}_{cvar}^{srv}$ est la version $\bar{\eta}_{cvar}$ sans échantillonnage préférentiel et sans affectation proportionnelle.

6.4 Mesure du risque inhérent à une position courte sur une option asiatique à sous-jacent multiple.

6.4.1 Evaluation d'une option asiatique.

Il n'est pas possible de trouver une forme analytique exacte de la valeur d'une option asiatique car la moyenne arithmétique de v.a. lognormales n'est pas une lognormale. Toutefois, il est possible d'obtenir une approximation analytique de la valeur d'une option asiatique arithmétique.

Valeur d'un call asiatique.

Ton Vorst [79] a montré que si l'évolution de V peut être décrite par un mouvement brownien géométrique

$$V(t) = V(0) e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t)}, \quad t \geq 0$$

où $W(t)$ est une normale centrée de variance t alors la valeur à l'émission d'un call asiatique dont le payoff est (6.2) peut être approximé par l'expression analytique suivante

$$C(0) \simeq e^{-r(T)} \left[e^{G + \frac{H^2}{2}} N(d) - \tilde{K} N(d - H) \right] \quad (6.8)$$

Où N est la fonction de distribution de la normale standard $N(0,1)$,

$$d = \frac{G - \ln(\tilde{K}) + H^2}{H}$$

$$\tilde{K} = K - \left[V(0) \sum_{i=1}^N \frac{e^{r t_i}}{N} - e^{G + H^2/2} \right]$$

Et G et H sont définis par :

$$G = \ln(V(0)) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t_i$$

$$H = \sqrt{\frac{\sigma^2}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \min(t_i, t_j)}$$

Valeur d'un put asiatique.

Si on accepte l'hypothèse d'absence d'arbitrage, il existe une relation de parité call/put pour les options asiatiques de type européen. A partir de

cette relation de parité et de (6.8), nous pourrions obtenir une approximation analytique de la valeur d'un put asiatique de type européen.

Soit K la valeur d'exercice et T l'échéance, montrons comment obtenir cette relation de parité .

Soit $C(0)$ la valeur à l'instant d'émission d'un call de valeur sous-jacente V , exercé à l'échéance T pour une valeur d'exercice K . Soit $P(0)$ la valeur en $t = 0$ du put asiatique correspondant. A l'échéance T on vérifie

$$\max\left(\sum_{i=1}^N \frac{V(t_i)}{N} - K, 0\right) - \sum_{i=1}^N \frac{V(t_i)}{N} = \max\left(0, K - \sum_{i=1}^N \frac{V(t_i)}{N}\right) - K$$

où r est le taux de rendement de l'actif sans risque. Par conséquent

$$P(0) = A(0) + C(0) - e^{-rT}K \quad (6.9)$$

Où

$$A(0) = e^{-rT} E^Q \left[\sum_{i=1}^N \frac{V(t_i)}{N} \mid \mathcal{F}_0 \right]$$

avec Q une mesure martingale équivalente à la mesure de probabilité réelle. Sous Q , la valeur V actualisé est une martingale. Par conséquent :

$$\begin{aligned} A(0) &= \sum_{i=1}^N e^{-r(T-t_i)} \cdot \left(e^{-r(t_i)} E^Q \left[\frac{V(t_i)}{N} \mid \mathcal{F}_0 \right] \right) \\ &= \sum_{i=1}^T \frac{e^{-r(T-t_i)}}{N} V(0) \end{aligned}$$

Par conséquent, la valeur (6.9) se réécrit

$$P(0) = \sum_{i=1}^N \frac{e^{-r(T-t_i)}}{N} V(0) + C(0) - e^{-rT}K, \quad t_i \in (0, T]$$

6.4.2 Risque encouru sur la vente d'une option asiatique.

Nous cherchons à quantifier le risque inhérent à une position courte sur une option asiatique dont l'échéance est de 3 mois à partir de son émission. Les réalisations $V(t_i)$ seront les valeurs de clôture observées chaque vendredi jusqu'à l'exercice.

Nous prenons une valeur d'exercice identique à celui utilisé pour les options panier. Soit $K=145.80$ EURO. La valeur à l'émission du call asiatique est de 2.99 EURO. Celle du put est de 1.89 EURO. Les données de départ des simulations sont réunies dans le tableau suivant et comparées à celles des options panier considérées précédemment.

Données de départ des simulations.

	portf. \mathcal{W}	call panier	call asiat.	put panier	put asiat.
Valeur à l'émission (EURO)	144.17	5.41	2.99	6.05	1.89
Valeur d'exercice (EURO)	/	145.80	145.80	145.80	145.80
Maturité	/	3 mois	3 mois	3 mois	3 mois

Les distributions empiriques des P&L associés à une prise de position courte sur une option asiatique ou sur une option panier sont représentées à la figure [6.3].

Nous supposons que les estimées obtenues pour 250 000 réalisations sont indistinguables des valeurs réelles des VaR et des CVaR. L'erreur relative sur une estimée est donc définie comme l'erreur relative entre cette estimée et l'estimée obtenue sur les 250 000 réalisations.

A. Estimation de la VaR.

L'évolution des estimées de la $VaR_\alpha(P\&L)$ en fonction du nombre de simulations sont représentées à la figure [Fig.6.14] pour le call asiatique et à la figure [Fig.6.15] pour le put asiatique. Pour 250 000 réalisations, nous obtenons :

	$P\&L^{(0.01)}$	$VaR_{0.01}(P\&L)$	$P\&L^{(0.05)}$	$VaR_{0.05}(P\&L)$
Call asiatique	-9.0783	9.0783	-4.4485	4.4485
Put asiatique	-10.7556	10.7556	-7.4055	7.4055

B. Estimation de la CVaR par rapport à un taux de rareté α .

Les évolutions des estimées de $CVaR_{0.01}(P\&L)$, $CVaR_{0.05}(P\&L)$, $VaR_{0.01}(P\&L)$, et $VaR_{0.05}(P\&L)$ en fonction du nombre de simulations sont représentées aux figures [Fig.6.14] pour le call asiatique et [Fig.6.15] pour le put asiatique. Pour 250 000 réalisations, nous obtenons :

	$CVaR_{0.01}(P\&L)$	$CVaR_{0.05}(P\&L)$
Call asiatique	738.6735	152.6509
Put asiatique	14.8436	9.9310

C. Estimation de la CVaR par rapport à un seuil Y .

Pour un échantillon de 250 000 réalisations des P&L, nous obtenons :

	$CVaR_{[-9.0783]}(P\&L)$	$CVaR_{[-4.4485]}(P\&L)$
Call asiatique	738.6735	152.6385
	$CVaR_{[-10.7556]}(P\&L)$	$CVaR_{[-7.4055]}(P\&L)$
Put asiatique	14.8436	9.9308

Les évolutions des estimées des $CVaR_{[Y]}(P\&L)$ définies dans le tableau ci-dessus sont présentées aux figures [Fig. 6.16] et [Fig.6.17].

Remarque : options européennes simples ou options asiatiques de type européen ?

Le tableau suivant présente différentes caractéristiques des distributions des P&L associés à des positions courtes sur les options panier européennes et les options asiatiques.

Position courte	Call panier	Call asiatique	Put panier	Put asiatique
$VaR_{0.01}(P\&L)$	10.9909	9.0783	14.2518	10.7556
$VaR_{0.05}(P\&L)$	3.8297	4.4485	9.5181	7.4055
$CVaR_{0.01}(P\&L)$	697.5151	738.6735	18.6110	152.6509
$CVaR_{0.05}(P\&L)$	144.7041	14.8436	12.8325	9.9310
$\sigma(P\&L)$	$1.0042 \cdot 10^3$	$1.0239 \cdot 10^3$	6.6429	3.7185
$E[P\&L]$	-4.6686	-5.7583	1.9503	-0.8364
<i>kurtosis</i>	$2.1737 \cdot 10^4$	$1.9883 \cdot 10^4$	32.6760	294.5510
<i>skewness</i>	-147.3600	-140.9747	-1.9416	-8.7376

Ce tableau indique qu'une position courte sur une option asiatique ne se révèle pas toujours moins risquée qu'une position courte sur l'option panier correspondante. Selon la mesure du risque utilisée (VaR ou CVaR), selon le caractère extrême du risque considéré ($\alpha = 0.01$ ou 0.05) et selon que les options considérées soient des puts ou des calls, le risque associé à une position courte sur une option asiatique pourra être supérieur ou inférieur au risque associé à une position courte sur une l'option panier européenne correspondante.

Nous voyons donc que si nous supposons que les cours sous-jacents ne peuvent pas être manipulés de façon significative, l'option asiatique ne protège pas plus du risque de marché celui qui la vend que ne le ferait l'option européenne correspondante.

Toutefois, si nous considérons un marché imparfait sur lequel un agent peut sensiblement manipuler les cours, l'utilisation massive d'options asiatiques sur ce marché aura pour effet de décourager les tentatives de manipulation des cours et donc entraînera une diminution de la volatilité des cours. Si des options européennes étaient utilisées massivement à la place des options asiatiques sur ce même marché, les volatilités des cours seraient plus élevées que celles obtenues après utilisation massive d'options asiatiques.

Cette discussion nous conduit à deux remarques fondamentales :

(i) Si nous désirons développer un nouveau produit financier, nous devons analyser le risque de marché associé aux opérations que nous envisageons

sur ce produit. Toutefois, pour que cette analyse soit correcte, il ne suffit pas d'utiliser les historiques des cours des sous-jacents pour ajuster le modèle de prix. En effet, la nature même du produit et l'importance de son utilisation future peuvent fortement modifier les comportements des agents économiques et par cela même modifier la structure du risque de marché. Le cas des options asiatiques illustre parfaitement cette difficulté : si nous ignorons l'influence des caractéristiques de ces options sur les comportements, nous ne pouvons comprendre leur utilisation sur le marché de l'énergie. Par contre si nous analysons l'influence qu'a la structure des options asiatiques sur les comportements des agents, nous comprenons que sur le marché de l'énergie, leur utilisation réduit le risque de marché auquel est exposé celui qui les vend.

(ii) La comparaison entre les différentes VaR et CVaR des options panier et des options asiatiques suggère qu'en général, lorsqu'on compare deux produits, il est pas toujours possible que l'un soit moins risqué que l'autre par rapport à toute mesure du risque.

Aussi, si nous désirons choisir entre deux investissements de même capitalisation initiale et de même rendement attendu, il ne suffira pas de comparer leurs risques mesurés par une ou plusieurs mesures de risque (par exemple la $CVaR_{0,05}(P\&L)$, la $CVaR_{0,01}(P\&L)$, la $VaR_{0,05}(P\&L)$ et la $VaR_{0,01}(P\&L)$) pour déterminer lequel est le moins risqué et le plus préférable. L'analyse des pertes potentielles à l'aide de la VaR_α et de la $CVaR_\alpha$ ne permet pas de choisir entre des investissements concurrents. Pour analyser la préféralité relative entre différents SSinvestissements, nous devons faire appel à une théorie plus avancée basée sur le concept de *dominance stochastique*. Nous présenterons cette théorie dans le prochain chapitre.

6.5 Comparaison entre $\bar{\eta}_{cvar}^{srv}$ et η_{cvar}^m .

Il serait intéressant de savoir si l'estimateur de Monte-Carlo simple $\bar{\eta}_{cvar}^{srv}$ converge plus vite que l'estimateur η_{cvar}^m (5.1). S'il fallait beaucoup moins de simulations pour faire converger $\bar{\eta}_{cvar}^{srv}$, il serait plus intéressant pour un investisseur de quantifier le risque associé à une distribution de P&L *continue* en utilisant la CVAR définie par rapport à un seuil Y plutôt que la CVaR définie par un taux de rareté.

Les graphes dont nous disposons pour les options panier et les options asiatiques ne permettent pas de déterminer si l'estimateur de Monte-Carlo simple $\bar{\eta}_{cvar}^{srv}$ de $CVaR_{[P\&L(\alpha)]}(P\&L)$ converge plus vite ou moins vite que l'estimateur non-paramétrique η_{cvar}^m de la $CVaR_\alpha(P\&L)$. Pour vérifier quel estimateur converge le plus vite dans le cas des options étudiées, une solution serait de calculer de façon extensive des intervalles à 99% de confiance pour

ces deux estimateurs et d'analyser l'évolution de la plus grande erreur relative observée sur chaque IC. Cependant, réaliser cette étude demanderait un temps de simulation très important, excessif dans le cadre de ce mémoire, car, pour l'estimateur η_{cvar}^m , nous aurions à calculer les IC t-bootstrap correspondant à des échantillons de très grandes tailles.

Toutefois, dans un cadre plus large que celui des applications de ce chapitre, nous avons vu que sous certaines conditions, nous disposons d'une méthode permettant d'accélérer fortement la convergence de $\bar{\eta}_{cvar}$. Si nous considérons un produit financier dont la valeur est peu sensible au temps et possède une distribution de P&L continue. Et, si cette distribution présente des occurrences négatives suffisamment extrêmes, alors la convergence de l'estimateur $\bar{\eta}_{cvar}$ pourra être accélérée en appliquant la méthode de réduction de variance proposée Glasserman [41]. L'ajustement des paramètres¹⁷ de cette réduction de variance permettra de faire converger $\bar{\eta}_{cvar}(P\&L^{(\alpha)})$ plus vite que $\eta_{cvar}^m(\alpha)$.

6.6 Conclusions à ce chapitre.

Dans ce chapitre nous avons cherché à illustrer les techniques de quantification du risque de marché présentées dans les chapitres précédents. A cette fin nous avons calculé des valeurs risquées et des valeurs risquées conditionnelles associées à des prises de position courte sur deux types d'options : les options panier de type européen et les options asiatiques à sous-jacent multiple de type européen. Ces deux exemples nous ont montré que pour obtenir des estimées de faible erreur relative (inférieure à 0.01), il est nécessaire de procéder à un nombre conséquent de simulations (supérieur à 150 000).

Les graphes d'évolution des l'erreurs relatives que nous avons produits nous ont également appris qu'en terme de nombre de simulations nécessaires, il n'est en général pas plus aisé d'estimer la VaR que la CVaR

et inversement.

Enfin, nous avons montré qu'une approche qui consisterait à estimer la CVaR d'une distribution non-continue en approximant cette dernière par une distribution continue peut conduire à une très forte sous-estimation du risque. Ceci souligne d'une façon générale l'importance cruciale du choix de la distribution statistique que l'on chercherait à ajuster sur un échantillon restreint de données empiriques de P&L. La mesure du risque associé à une distribution de P&L pour laquelle nous ne disposons que d'un nombre limité de réalisations se révèle particulièrement délicate. Toute quantification du risque à partir de réalisations empiriques de P&L, nécessite donc une analyse approfondie de la structure de la fonction de distribution des P&L non seulement en terme de décroissance de queue, c'est-à-dire en terme de prise en

¹⁷ Nombre de strates, choix du changement de mesure de probabilité.

compte des occurrences extrêmes non réalisées, mais également en terme de présence potentielle de discontinuités. Ces remarques justifient la démarche que nous avons adoptée : ajustement d'un modèle de prix aux cours observés des sous-jacents puis *ensuite* simulation de réalisations de P&L du produit dérivé pour en estimer des VaR et des CVaR. Cette démarche nous permet, via simulations, de disposer d'autant de réalisations des P&L que le nous souhaitons et donc de former une distribution empirique constituant une approximation de qualité de la distribution inconnue des P&L.

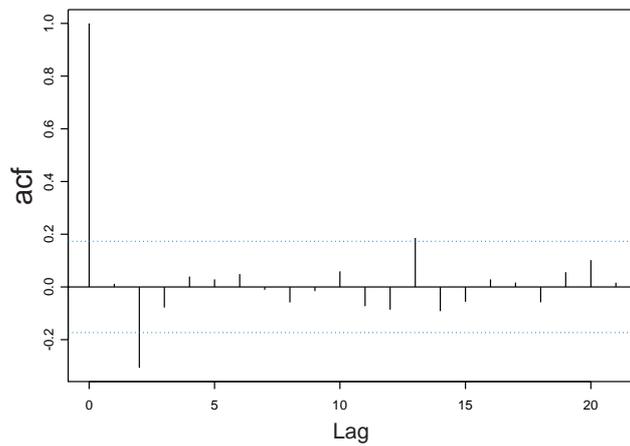


FIG. 6.1 – Autocorrélation entre les rendements centrés dévolatilisés de V

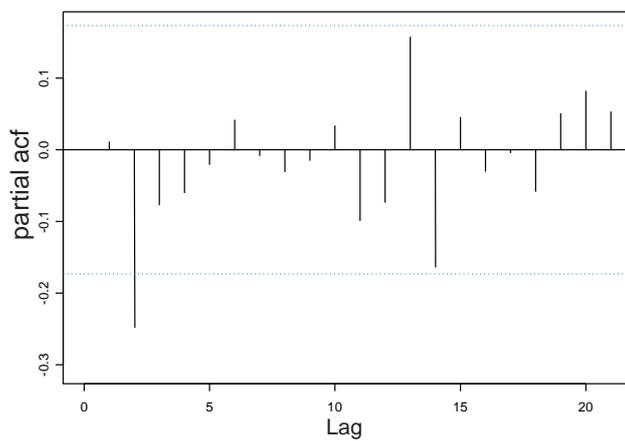


FIG. 6.2 – Autocorrélation partielle entre les rendements centrés dévolatilisés de V

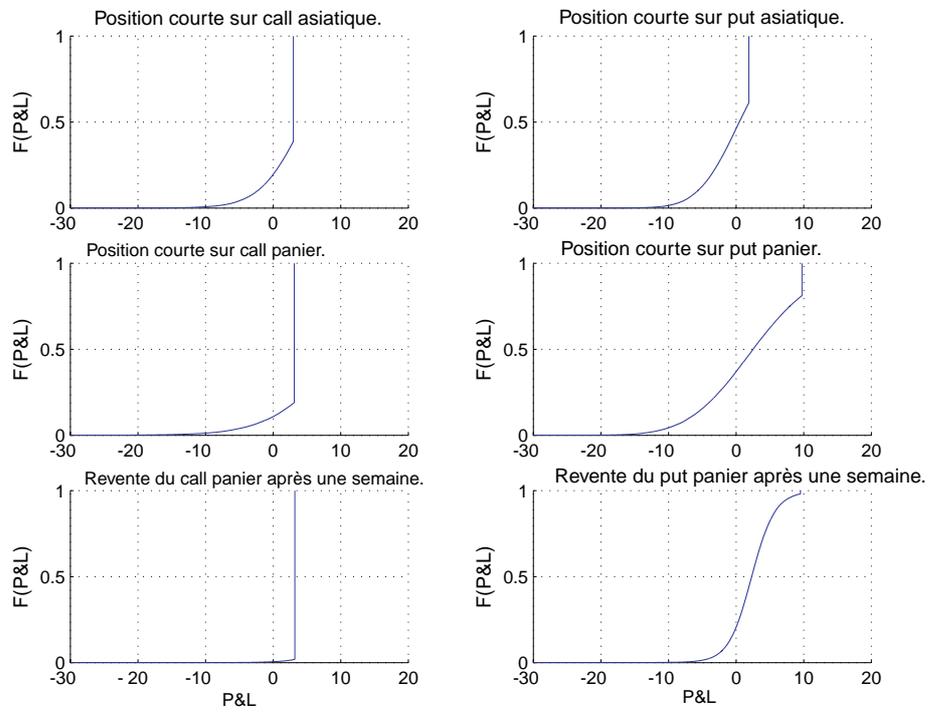


FIG. 6.3 – Distribution des P&L pour les différentes options.

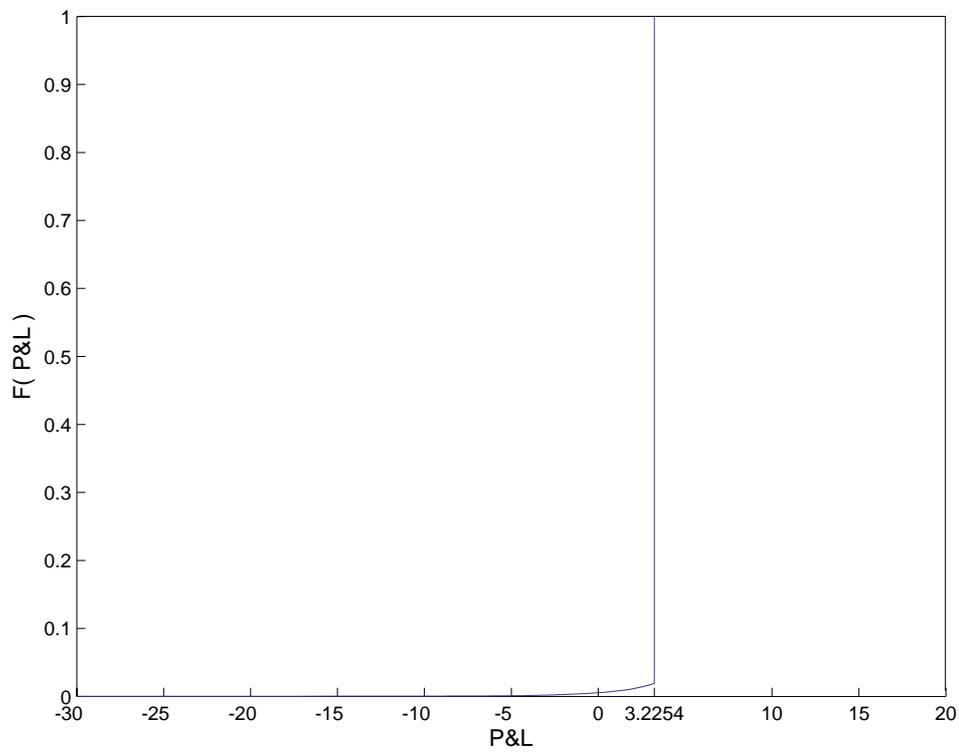


FIG. 6.4 – Distribution des P&L associés à une revente du put panier une semaine après son émission.

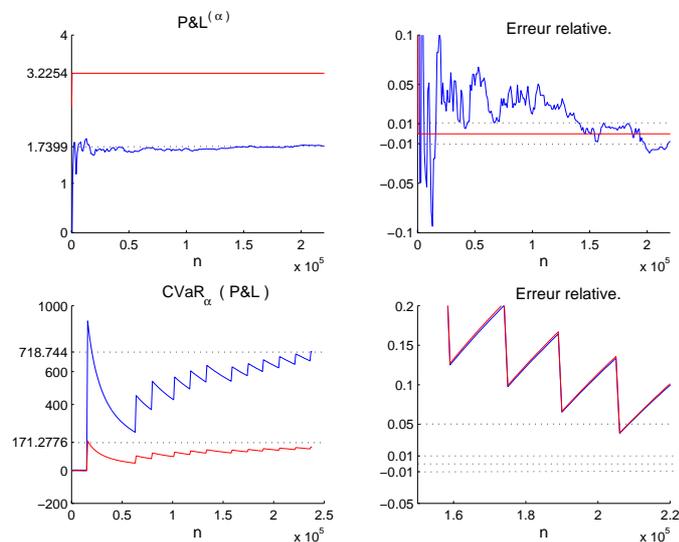


FIG. 6.5 – **Call panier** : $P\&L^{(\alpha)}$ et $CVaR_{\alpha}$ des P&L associés à une revente 1 semaine après l'émission. $\alpha = 0.01$ [bleu] et $\alpha = 0.05$ [rouge]. Et évolution des erreurs relatives correspondantes.

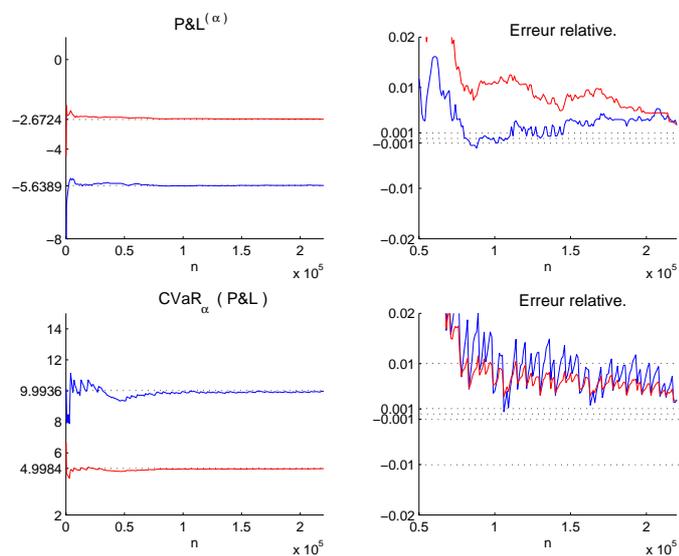


FIG. 6.6 – **Put panier** : $P\&L^{(\alpha)}$ et $CVaR_{\alpha}$ des P&L associés à une revente 1 semaine après l'émission. $\alpha = 0.01$ [bleu] et $\alpha = 0.05$ [rouge]. Et évolution des erreurs relatives correspondantes.

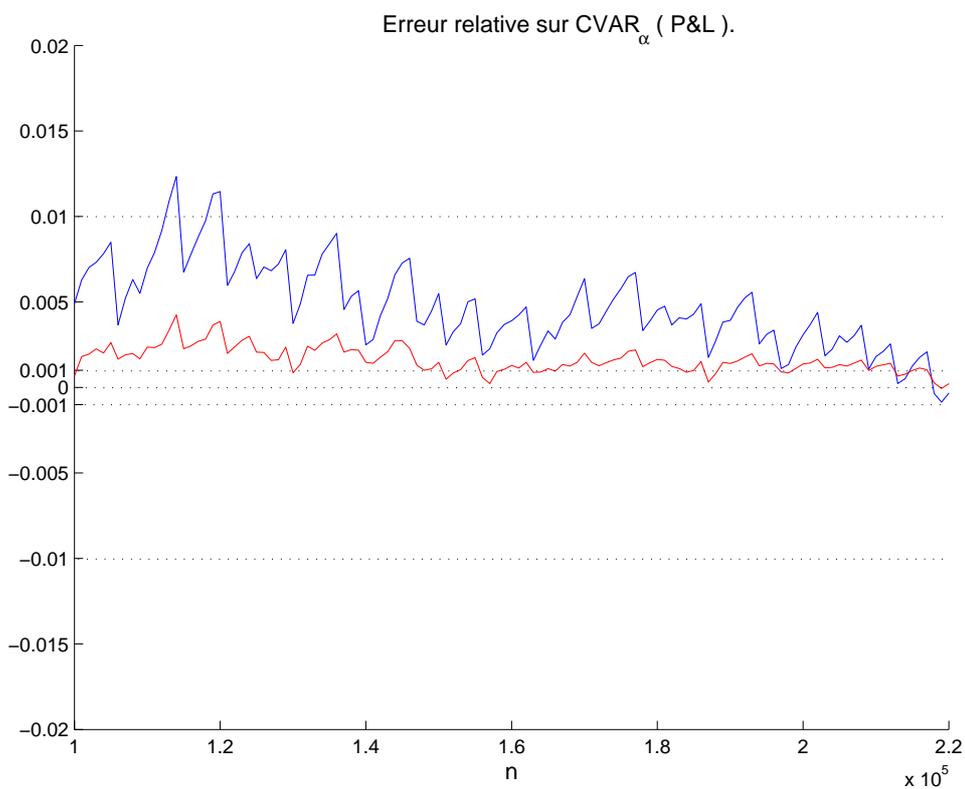


FIG. 6.7 – **Détail** – **Put panier** : évolution des erreurs relatives sur les estimées de la $CVaR_{0.01}$ [bleu] et de la $CVaR_{0.05}$ [rouge] des $P\&L$ associés à une revente 1 semaine après émission.

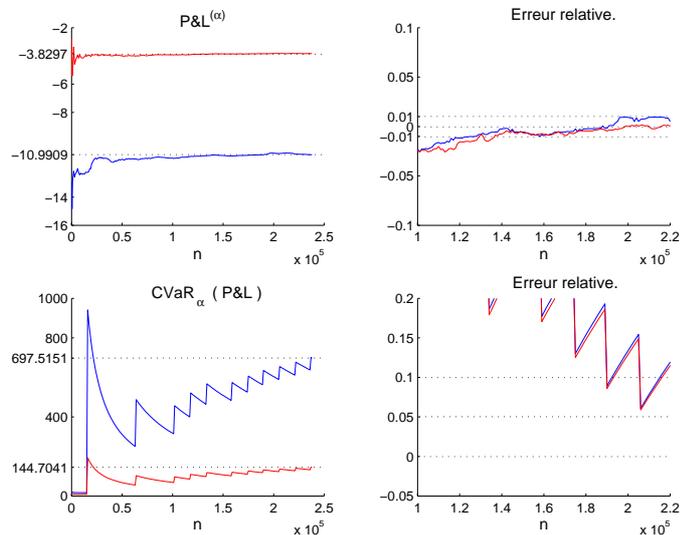


FIG. 6.8 – **Call panier** : $P\&L^{(\alpha)}$ et $CVaR_{\alpha}$ des P&L associés à une position courte. $\alpha = 0.01$ [bleu] et $\alpha = 0.05$ [rouge].

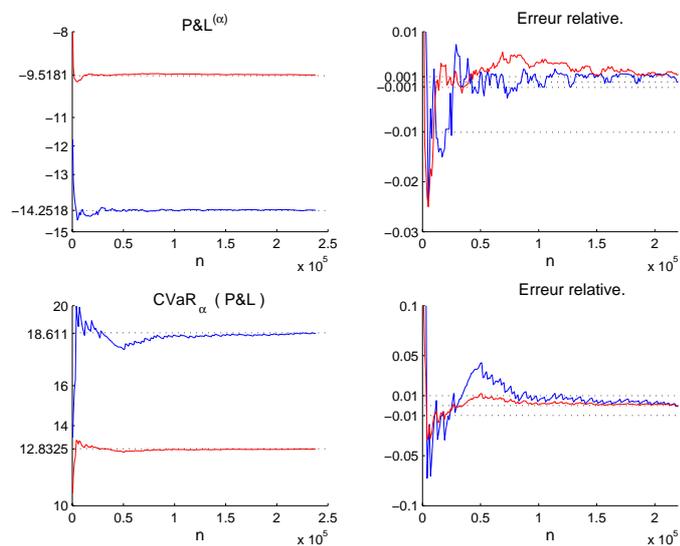


FIG. 6.9 – **Put panier** : $P\&L^{(\alpha)}$ et $CVaR_{\alpha}$ des P&L associés à une position courte. $\alpha = 0.01$ [bleu] et $\alpha = 0.05$ [rouge].

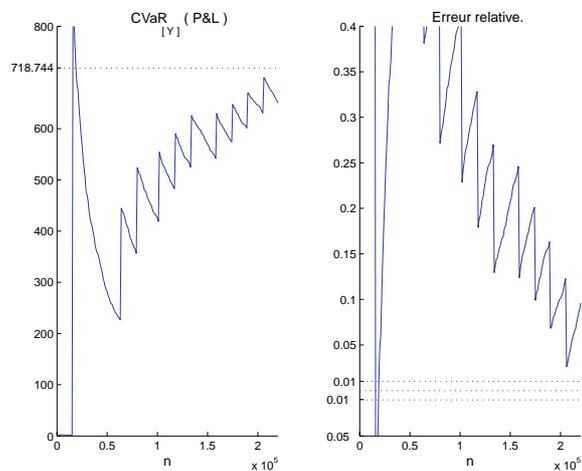


FIG. 6.10 – **Call panier** : évolution de l'estimée de $CVaR_{[1,7399]}(P\&L)$ des $P\&L$ associés à une revente 1 semaine après l'émission. Et évolution des erreurs relatives correspondantes.

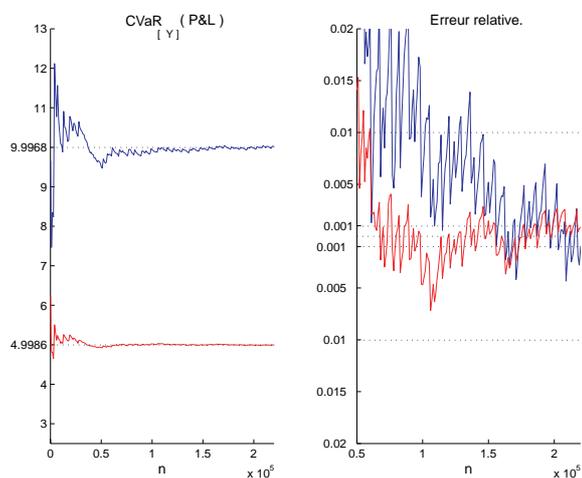


FIG. 6.11 – **Put panier** : évolution de l'estimée de $CVaR_{[-5,6389]}(P\&L)$ [bleu] et évolution de l'estimée de $CVaR_{[-2,6724]}(P\&L)$ [rouge] des $P\&L$ associés à une revente 1 semaine après l'émission. Et évolution des erreurs relatives correspondantes.

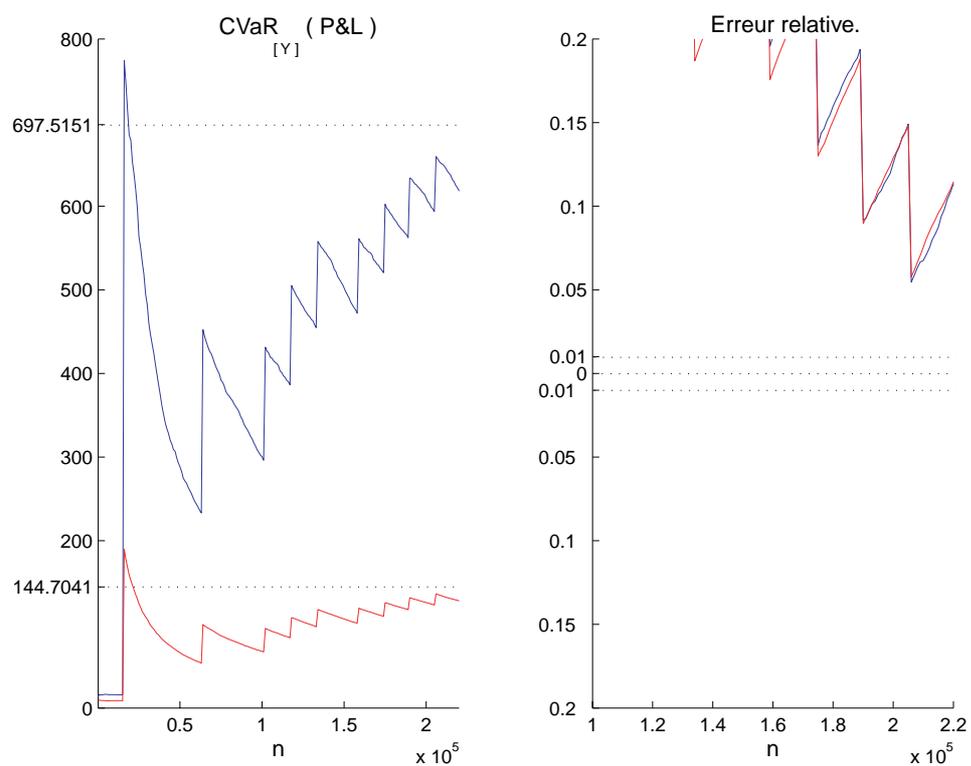


FIG. 6.12 – **Call panier** : évolution de l'estimée de $CVaR_{[-10,9909]}(P\&L)$ [bleu] et évolution de l'estimée de $CVaR_{[-3,8297]}(P\&L)$ [rouge] des $P\&L$ associés à une position courte. Et évolution des erreurs relatives correspondantes.

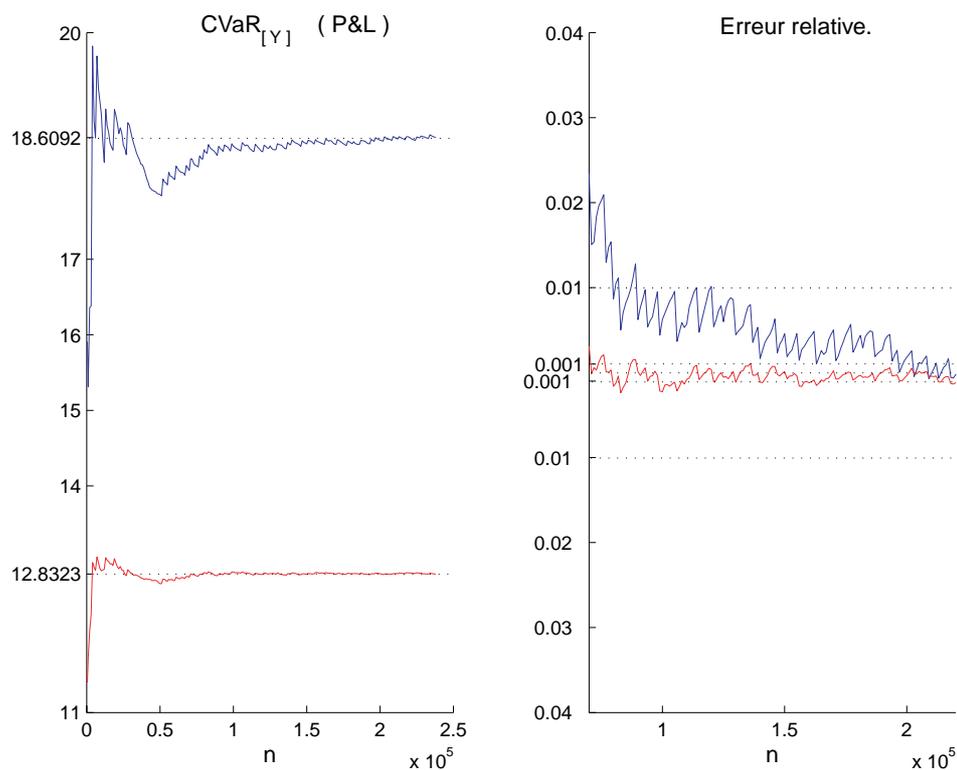


FIG. 6.13 – **Put panier** : évolution de l'estimée de $CVaR_{[-14,2518]}(P\&L)$ [bleu] et évolution de l'estimée de $CVaR_{[-9,5181]}(P\&L)$ [rouge] des $P\&L$ associés à une position courte. Et évolution des erreurs relatives correspondantes.

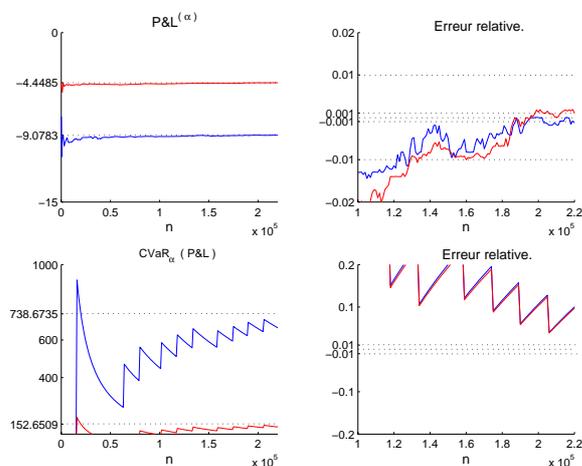


FIG. 6.14 – **Call asiatique** : évolution des estimées de $CVaR_{0.01}(P\&L)$ et $VaR_{0.01}(P\&L)$ [bleu] et évolution des estimées de $CVaR_{0.05}(P\&L)$ et de $VaR_{0.05}(P\&L)$ [rouge] des $P\&L$ associés à une position courte. Et évolution des erreurs relatives correspondantes.

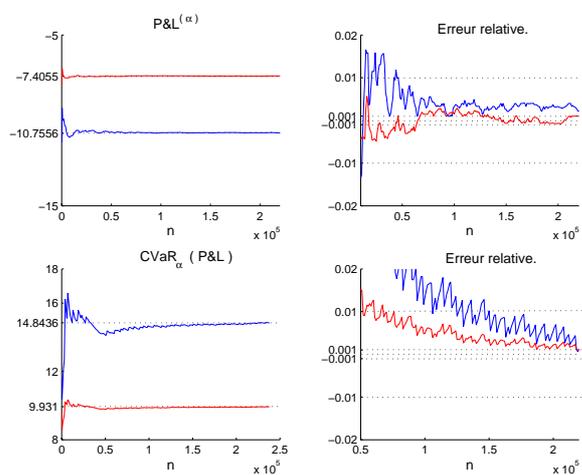


FIG. 6.15 – **Put asiatique** : évolution des estimées de $CVaR_{0.01}(P\&L)$ et $VaR_{0.01}(P\&L)$ [bleu] et évolution des estimées de $CVaR_{0.05}(P\&L)$ et de $VaR_{0.05}(P\&L)$ [rouge] des $P\&L$ associés à une position courte. Et évolution des erreurs relatives correspondantes.

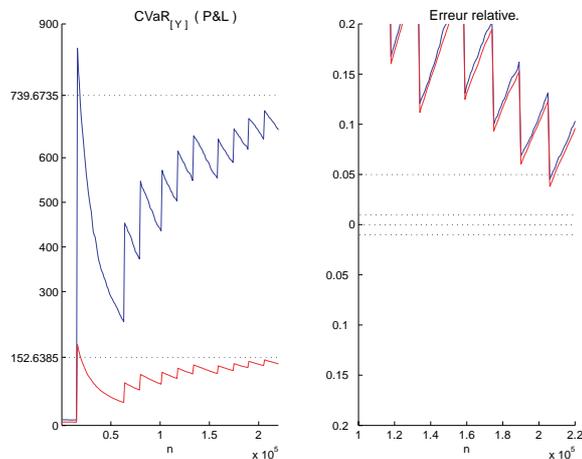


FIG. 6.16 – **Call asiatique** : évolution de l'estimée de $CVaR_{[-9.0783]}(P\&L)$ [bleu] et évolution de l'estimée de $CVaR_{[-4.4485]}(P\&L)$ [rouge] des $P\&L$ associés à une position courte. Et évolution des erreurs relatives correspondantes.

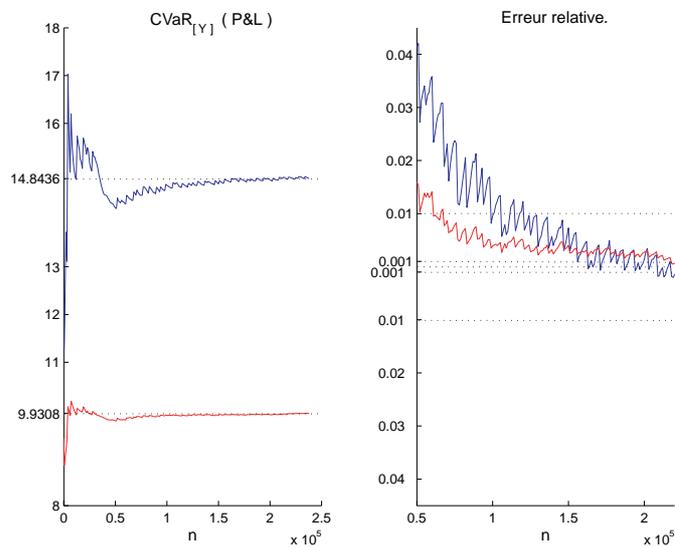


FIG. 6.17 – **Put asiatique** : évolution de l'estimée de $CVaR_{[-10.7556]}(P\&L)$ [bleu] et évolution de l'estimée de $CVaR_{[-7.4055]}(P\&L)$ [rouge] des $P\&L$ associés à une position courte. Et évolution des erreurs relatives correspondantes.

Chapitre 7

Analyse de la préférabilité d'un produit financier.

7.1 Introduction.

Dans les chapitres précédents, nous avons présenté le concept de mesures de risque et les moyens pratiques de les estimer. Nous voyons maintenant une utilisation particulièrement intéressante des mesures du risque pour la recherche de l'investissement optimal.

Dans ce chapitre, nous vous présentons une méthode pour déterminer quel est le meilleur investissement parmi un choix fini de portefeuilles donnés. Nous adopterons le point de vue d'une société financière de courtage qui cherche pour ses clients le meilleur investissement parmi les produits financiers proposés sur le marché.

Comme nos clients fictifs sont distincts, il est naturel de supposer qu'ils ne possèdent pas tous les mêmes préférences. De plus, ces clients (actuels ou potentiels) sont nombreux. Aussi, nous supposerons que nous ne connaissons pas les préférences de chacun. Aussi, nous pouvons nous demander comment identifier l'investissement qui satisfait le plus grand nombre de nos clients. Afin de répondre à cette question, nous présentons une méthode basée sur le concept de dominance stochastique qui permet d'identifier des portefeuilles "universellement" préférés par tous les investisseurs. Nous montrons également que l'emploi de mesures de risques se révèle très utile pour simplifier l'identification de ces portefeuilles "universels".

Nous montrons enfin comment utiliser cette méthode pour analyser la qualité d'un portefeuille donné.

Nous commençons par un petit rappel théorique sur la notion de fonction d'utilité et de préférences d'un investisseur. Ensuite, nous présentons les résultats théoriques sur lesquels s'appuie la méthode. Enfin, nous appli-

querons cette méthode à l'analyse d'un produit dérivé à capital garanti, le "RL2011", vendu par la société fictive Remil Lynch.

7.2 Le choix de l'investisseur rationnel.

Une fonction d'utilité est une fonction $U : X \rightarrow \mathbb{R}$ qui représente les préférences d'un agent économique c'est-à-dire que $U(x) \geq U(y)$ si, et seulement si, l'investisseur préfère x à y .

Von Neumann et Morgenstern ont montré que tout investisseur rationnel possède une fonction d'utilité U , unique à une transformation linéaire positive près ¹, telle que l'investissement de rendement Y est préféré à l'investissement de rendement Z si, et seulement si, $E[U(Y)] \geq E[U(Z)]$. Autrement dit, l'investissement préféré par un investisseur rationnel sera celui qui maximise l'utilité attendue de son rendement.

Par conséquent, pour déterminer parmi un groupe de portefeuilles $\{Y_1, \dots, Y_k\}$ lequel constitue le meilleur investissement, il suffit de déterminer le sens de la relation d'ordre entre chaque couple $E[U(Y_i)]$ et $E[U(Y_j)]$.

7.3 Dominance stochastique.

Le concept de dominance stochastique correspond à des relations d'ordre particulières entre v.a. Son intérêt du point de vue économique provient du fait qu'il existe un lien entre les relations d'ordre de type dominance stochastique et les relations d'ordre associées aux fonctions d'utilité des investisseurs. En deux mots, la dominance stochastique permet d'établir un lien entre les propriétés statistiques de la v.a représentant un actif risqué (les P&L ou le rendement) et l'utilité attendue par l'investisseur pour cet investissement.

Il existe un nombre infini de relations de dominance stochastique différentes (dominance stochastique de premier ordre, de second ordre, de troisième ordre,...). Actuellement, seules les relations de dominance stochastique de premier et de second ordre disposent d'une interprétation économique claire en termes économiques.

Les relations de dominance stochastique de premier et de second ordre (FSD et SSD) permettent de classer les actifs selon leur utilité attendue

¹ Si $V : X \rightarrow \mathbb{R}$ représente aussi les préférences de l'investisseur, alors il existe $b, c \in \mathbb{R}$ (où $b > 0$) tels que $V = bU + c$.

sans que l'on doive spécifier la forme analytique de la fonction d'utilité caractérisant l'investisseur.

Ces relations de FSD et de SSD définissent les conditions sous lesquelles un actif risqué sera préféré à un autre actif risqué par tout l'investisseur rationnel.

Toutefois, les relations d'ordre de FSD et de SSD ne sont pas des relations d'ordre complètes sur l'ensemble des variables aléatoires réelles. Et par conséquent, il existe des couples d'actifs financiers entre lesquels on ne peut établir un ordre de dominance stochastique de premier ou de second ordre.

7.3.1 Dominance stochastique de premier ordre.

Dans ce chapitre, toute v.a. X est supposée réelle et telle que $E[X^-] < \infty^2$. Nous noterons \mathcal{U}_1 l'ensemble des fonctions d'utilité continues et strictement croissantes $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Et nous noterons \mathcal{U}_2 l'ensemble des fonctions d'utilité continues, strictement croissantes et concaves.

\mathcal{U}_1 contient des fonctions d'utilité décrivant les préférences d'investisseurs insatiables, c'est-à-dire préférant toujours gagner plus que gagner moins. \mathcal{U}_2 contient des fonctions d'utilité décrivant les préférences d'investisseurs insatiables et averses au risque ³.

Définition 16 (Dominance stochastique de premier ordre) .

Soit deux variables aléatoires réelles Y et Z . On dira que Y domine stochastiquement au premier ordre Z si

$$F_Y(x) \leq F_Z(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

On notera

$$Y \stackrel{fsd}{\succeq} Z$$

L'interprétation économique de la relation d'ordre FSD est fournie par le résultat suivant :

Proposition 2 .

Soit Y et Z deux v.a. réelles décrivant les rendements de deux portefeuilles. Alors :

²Où $X^- = \max(0, -X)$. Cette hypothèse assure la consistance de l'estimateur non paramétrique de la CVaR. Nous renvoyons le lecteur à l'annexe M pour une discussion sur la validité de cette hypothèse.

³Un investisseur est dit averse au risque quand il refuse de prendre un risque à moins d'être compensé. Par exemple, si deux investissements ont le même rendement attendu, celui qui présente le moins de risque sera préféré. Pour intéresser un investisseur averse au risque, un investissement plus risqué devra présenter un rendement attendu plus élevé.

Y est préféré à Z par tout investisseur possédant une fonction d'utilité $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et strictement croissante si et seulement si $Y \stackrel{fsd}{\succeq} Z$.

$$Y \stackrel{fsd}{\succeq} Z \iff E[U(Y)] \geq E[U(Z)] \quad \forall U \in \mathcal{U}_1$$

Preuve Cfr.[83] théorème 5.

□

7.3.2 Dominance stochastique de second ordre.

Définition 17 (Dominance stochastique de deuxième ordre) .

Soit deux variables aléatoires réelles Y et Z . On dira que Y domine stochastiquement au second ordre Z si

$$\int_{-\infty}^x (F_Y(u) - F_Z(u)) du \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

On notera

$$Y \stackrel{ssd}{\succeq} Z$$

L'interprétation économique de la relation d'ordre SSD est fournie par le résultat suivant :

Proposition 3 .

Soit Y et Z deux v.a. réelles décrivant les rendements de deux portefeuilles. Alors le portefeuille de rendement Y est préféré au portefeuille de rendement Z par tout investisseur possédant une fonction d'utilité

$U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ **continue, strictement croissante et concave** si et seulement si $Y \stackrel{ssd}{\succeq} Z$.

$$Y \stackrel{ssd}{\succeq} Z \iff E[U(Y)] \geq E[U(Z)] \quad \forall U \in \mathcal{U}_2$$

Preuve Cfr. [80], proposition 3.

□

Autrement dit si on peut définir une relation de dominance de premier (de second) ordre entre les rendements de deux portefeuilles, on saura dire précisément lequel de ces deux portefeuilles est universellement préféré à l'autre par tous les investisseurs insatiables (et averses au risque).

Toutefois, si nous ne pouvons définir une relation de dominance de premier

(de second) ordre entre les rendements de deux portefeuilles, cela ne signifie pas que les investisseurs ne préfèrent pas un portefeuille à l'autre. Cela signifie simplement qu'ils ne feront pas tous le même choix. Certains préféreront le premier au second, d'autres le second au premier et d'autres encore pourront être indifférents au choix du premier ou du second.

Lien entre la FSD et la SSD.

Il existe un lien évident entre la dominance stochastique de premier ordre et de second ordre. Par définition de SSD et de FSD, comme $\mathcal{U}_2 \subset \mathcal{U}_1$, on a pour toute v.a. Y et Z

$$Y \underset{fsd}{\succeq} Z \Rightarrow Y \underset{ssd}{\succeq} Z \quad (7.1)$$

Mais la réciproque est fausse.

Propriété d'invariance sous translation.

Nous démontrons ici une propriété importante d'invariance qui nous sera très utile pour tester la dominance stochastique entre deux variables aléatoires.

Lemme 1 Soit $\beta \in \mathbb{R}$: $Y \underset{fsd}{\succeq} Z \Leftrightarrow Y + \beta \underset{fsd}{\succeq} Z + \beta$

Preuve

Pour tout réel x :

$$P(Y \leq x) \geq P(Z \leq x) \Leftrightarrow P(Y + \beta \leq x + \beta) \geq P(Z + \beta \leq x + \beta)$$

□

Lemme 2 Soit $\beta \in \mathbb{R}$: $Y \underset{ssd}{\succeq} Z \Leftrightarrow Y + \beta \underset{ssd}{\succeq} Z + \beta$

Preuve En effet, pour tout réel x :

$$F_{Y+\beta}(x) = P(Y + \beta \leq x) = P(Y \leq x - \beta) = F_Y(x - \beta)$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} : \int_{-\infty}^x F_Y(u) du &\geq \int_{-\infty}^x F_Z(u) du \\ \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : \int_{-\infty}^{x-\beta} F_Y(u) du &\geq \int_{-\infty}^{x-\beta} F_Z(u) du \\ \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : \int_{-\infty}^{x-\beta} F_{Y+\beta}(u) du &\geq \int_{-\infty}^{x-\beta} F_{Z+\beta}(u) du \\ \Leftrightarrow \forall v \in \mathbb{R} : \int_{-\infty}^v F_{Y+\beta}(u) du &\geq \int_{-\infty}^v F_{Z+\beta}(u) du \end{aligned}$$

□

Lemme 3 Soit $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$: $Y \stackrel{fsd}{\succeq} Z \Leftrightarrow \gamma Y \stackrel{fsd}{\succeq} \gamma Z$

Preuve

Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} P(Y \leq x) \geq P(Z \leq x) &\Leftrightarrow P(\gamma Y \leq \gamma x) \geq P(\gamma Z \leq \gamma x) \\ &\Leftrightarrow P(\gamma Y \leq \gamma x) \geq P(\gamma Z \leq \gamma x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

□

Lemme 4 Soit $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$: $Y \stackrel{ssd}{\succeq} Z \Leftrightarrow \gamma Y \stackrel{ssd}{\succeq} \gamma Z$

Preuve En effet pour tout réel x :

$$F_{\gamma Y}(x) = F_Y\left(\frac{x}{\gamma}\right)$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} : \int_{-\infty}^x F_Y(u) du &\geq \int_{-\infty}^x F_Z(u) du \\ \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : \int_{-\infty}^{\gamma x} F_Y(v/\gamma) dv &\geq \int_{-\infty}^{\gamma x} F_Z(v/\gamma) dv \\ \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : \int_{-\infty}^{\gamma x} F_{\gamma Y}(v) dv &\geq \int_{-\infty}^{\gamma x} F_{\gamma Z}(v) dv \\ \Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R} : \int_{-\infty}^y F_{\gamma Y}(v) dv &\geq \int_{-\infty}^y F_{\gamma Z}(v) dv \end{aligned}$$

□

7.3.3 Dominance stochastique d'ordre n .

Les concepts de dominance stochastique de premier et de second ordre sont étendus à l'ordre n par la définition suivante.

Définition 18 (Dominance stochastique d'ordre n) .

Soit deux variables aléatoires réelles Y et Z . On dira que Y domine stochastiquement au second ordre Z si

$$\int_{-\infty}^x (F_Y^{(n-1)}(u) - F_Z^{(n-1)}(u)) du \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

où

$$F_Y^{(1)}(x) = F_Y(x) \text{ et } F_Y^{(n)}(x) = \int_{-\infty}^x F_Y^{(n-1)}(u) du$$

Alors, on notera

$$Y \stackrel{sd(n)}{\succeq} Z$$

Il est possible de généraliser le résultat (7.1) pour ordonner les relations de dominance stochastique d'ordre supérieur⁴ :

$$Y \stackrel{sd(n)}{\succeq} Z \Rightarrow Y \stackrel{sd(n+1)}{\succeq} Z$$

⁴ Pour une preuve voir [83].

7.3.4 Lien entre dominance stochastique et mesures du risque.

Résultats généraux

Lemme 5 (Lien entre FSD et VaR)

Soit Y et Z deux variables aléatoires. Soit $\alpha \in (0, 1)$ fixé.

Si $Y \succeq^{fsd} Z \Rightarrow VaR_\alpha(Y) \leq VaR_\alpha(Z)$.

On dira que la VaR est consistante avec la dominance stoch. de premier ordre.

Preuve Cfr. [83] théorème 12. □

Lemme 6 (Lien entre SSD, FSD et CVaR)

Soit Y et Z deux v.a. Pour tout $\alpha \in (0, 1)$ fixé.

Si $Y \succeq^{ssd} Z \Rightarrow CVaR_\alpha(Y) \leq CVaR_\alpha(Z)$.

On dira que la CVaR est consistante avec la dominance stochastique de second ordre.

Si $Y \succeq^{fsd} Z \Rightarrow CVaR_\alpha(Y) \leq CVaR_\alpha(Z)$

On dira que la CVaR est consistante avec la dominance stoch. de premier ordre.

Preuve Cfr. [83] théorème 6 et théorème 15. □

Lemme 7

Soit Y et Z deux v.a. de support $[\beta, \omega]$ ⁵.

Si $Y \succeq^{ssd} Z \Rightarrow E[Y] \geq E[Z]$

Preuve Cfr. [80] lemme 2. □

Dominance stochastique dans le monde gaussien.

Proposition 4 Soit $\alpha \in (0, 1)$. Si $L \sim N(\mu, \Sigma)$ est une normale multivariée de vecteur de moyennes $\mu \in \mathbb{R}$ et de matrice de covariance $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Soit $\lambda \in \{u \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n u_i = 1\}$. Alors $X = \lambda^T R$ a une distribution $N(\mu_X, \sigma_X^2)$ où $\mu_X = \lambda^T \mu$, et $\sigma_X^2 = \lambda^T \Sigma \lambda$ et :

⁵Autrement dit, les rendements Y et Z des portefeuilles sont bornés. Il est en effet naturel de supposer que, sur un horizon de temps fixé, le portefeuille ne puisse ni subir une perte de valeur infinie ni une augmentation de valeur infinie. Et donc le rendement est borné. Soit $y_{min}, z_{min}, y_{max}$ et z_{max} les valeurs minimales et maximales des rendements, on définit $\beta = \min(y_{min}, z_{min})$ et $\omega = \max(y_{max}, z_{max})$.

(i) $VaR_\alpha(X) = z^{(\alpha)}\sigma_X - \mu_X$
 où $z^{(\alpha)}$ est l'alpha quantile de la normale $N(0, 1)$.

(ii) $CVaR_\alpha(X) = \frac{f_z(z^{(\alpha)})}{\alpha}\sigma_X - \mu_X$
 où $f_z(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}s^2}$ est la densité de la normale $N(0, 1)$.

Preuve Cfr. [25] lemme 3.1.

□

Proposition 5 Soit Y et Z deux v.a. normales.

Si $\sigma_Z^2 \geq \sigma_Y^2$ ou $\mu_Z \leq \mu_Y \Rightarrow Y \succeq^{ssd} Z$

Preuve Cfr. [80], proposition 6.

□

Proposition 6 Soit Y et Z deux v.a. normales.

Si $CVaR_\alpha(Y) \leq CVaR_\alpha(Z)$ ou $\mu_Z \leq \mu_Y$ alors $Y \succeq^{ssd} Z$.

Preuve Il suffit d'appliquer la proposition 4 avec $\lambda = 1$ et d'utiliser la proposition 5.

□

7.3.5 Test de dominance stochastique de second ordre de Duclos Davidson.

Supposons que l'on ait deux portefeuilles caractérisés respectivement par les rendements Y et Z . Les contraposées des lemmes 6 et 62 permettent d'affirmer, à partir de la CVaR ou des espérances de ces v.a., que s'il existe une relation de dominance SSD entre Z et Y , alors elle ne peut être que d'un sens donné⁶. Toutefois, si un sens est interdit, deux cas restent possibles. Soit la relation de dominance SSD est définie dans le sens inverse, soit il n'existe aucun lien de dominance SSD entre Y et Z . Le test non paramétrique proposé en 2000 par Jean-Yves Duclos et Russell Davidson présenté dans ce paragraphe permet de déterminer dans lequel de ces cas nous nous trouvons. En fait, ce test est "complet" il permet de déterminer le sens de la relation de SSD entre Y et Z , si elle existe, ou de conclure à l'absence d'une relation SSD entre Y et Z .

⁶ c'est-à-dire qu'il est impossible d'avoir $Y \succeq^{ssd} Z$ ou qu'il est impossible d'avoir $Z \succeq^{ssd} Y$

Soit deux portefeuilles dont les rendements ⁷⁸ sont notés respectivement Y et Z et possèdent respectivement des fonctions de distribution distinctes F_Y et F_Z inconnues et quelconques.

Nous considérons deux échantillons contenant chacun N observations des rendements Y et Z : (y_j) et (z_j) , $j = 1 \dots N$. Soit y_{min} et z_{min} les plus petites valeurs que peuvent prendre respectivement Y et Z au terme de la période d'investissement considérée⁹. Notons $\beta = \min\{y_{min}, z_{min}\}$. Comme nous l'avons vu dans le lemme 1 (le lemme 2), analyser la dominance stochastique de premier ordre (second ordre) entre Y et Z équivaut à analyser la dominance stochastique de premier ordre (second ordre) entre $Y - \beta$ et $Z - \beta$. Redéfinissons F_Y comme la fonction de distribution de $Y - \beta$ et F_Z comme la fonction de distribution de $Z - \beta$. Nous travaillerons sur les échantillons d'observations translattées $y_j = y_j - \beta$ et $z_j = z_j - \beta$ $j = 1 \dots N$. Définissons pour tout $x \geq 0$

$$D_Y^2(x) = \int_0^x F_Y(u) du \quad (7.2)$$

Nous définissons D_Z^2 de façon analogue. Ainsi, si $\forall x \geq 0 : D_Y^2(x) \leq D_Z^2(x)$

alors $Y \stackrel{ssd}{\succeq} Z$.

Ensuite, comme

$$\begin{aligned} & \int_0^x F_Y(u) du \\ &= \int_{-\infty}^x F_Y(u) du \\ &= \int_{-\infty}^x d(u F_Y(u)) - \int_{-\infty}^x u dF_Y(u) \\ &= x F_Y(x) - \lim_{\substack{u \rightarrow -\infty \\ u < 0}} u F_Y(u) - \int_{-\infty}^x u dF_Y(u) \\ &= x F_Y(x) - \lim_{\substack{u \rightarrow -\infty \\ u < 0}} x F_Y(u) - \int_{-\infty}^x u dF_Y(u) \\ &= \int_{-\infty}^x x dF_Y(u) - \int_{-\infty}^x u dF_Y(u) \\ &= \int_{-\infty}^x (x - u) dF_Y(u) \end{aligned}$$

⁷ C'est-à-dire les v.a. définies comme $Y = (V(T) - V(0))/V(0)$. Où $V(T)$ est la valeur au terme T du portefeuille. Donc Y sera positif (négatif) si la valeur du portefeuille a augmenté (diminué) sur l'intervalle de temps $[0, T]$.

⁸ Remarquons que si nous souhaitons comparer des portefeuilles de même capitalisation initiale, nous aurions pu considérer les P&L de ces portefeuilles plutôt que leurs rendements.

⁹ Cette hypothèse n'est pas limitative car en pratique pour un horizon de temps fixé, les P&L possibles pour un portefeuille donné sont toujours bornées et donc aussi son rendement.

$$= \int_0^x (x - u) dF_Y(u)$$

on peut réécrire D_Y^2 sous la forme

$$D_Y^2(x) = \int_0^x (x - u) dF_Y(u) \quad (7.3)$$

Pour vérifier l'existence d'une relation de dominance stochastique de second ordre entre Y et Z , Duclos et Davidson proposent une procédure composée de trois tests successifs ¹⁰.

Ils commencent par tester l'hypothèse $H_0 : D_Y^2 = D_Z^2$. Pour ce faire, ils testent l'égalité $D_Y^2 = D_Z^2$ en un nombre fini de réels positifs x_1, \dots, x_m ($m \ll N$).

Pour tester l'hypothèse $H_0 : D_Y^2 = D_Z^2$, il faudrait tester $D_Y^2(x) = D_Z^2(x)$ pour tout $x \geq 0$. Ce qui est irréalisable. Un compromis consiste à tester H_0 pour un nombre fini x_1, \dots, x_m ($m \ll N$) de réels. Le choix de ces valeurs est effectué comme suit : soit $\{y_1, \dots, y_N\}$ et $\{z_1, \dots, z_N\}$ les ensembles des réalisations observées translatées de Y et Z ordonnées par ordre croissant. Nous prenons pour x_m le maximum $\max(y_N, z_N)$. Nous prenons ensuite les points x_1, \dots, x_{m-1} de façon à ce qu'ils divisent chacun des ensembles $\{y_1, \dots, y_N\}$ et $\{z_1, \dots, z_N\}$ en m sous-ensembles de longueur égale. Pour $j = 1, \dots, m - 1$ nous prendrons

$$x_j = \min(y_{\lfloor Nj/m \rfloor}, z_{\lfloor Nj/m \rfloor})$$

Dans la littérature, le nombre m est généralement fixé supérieur à 10. Ce qui revient à prendre des x_j proches des déciles des distributions empiriques F_Y et F_Z .

Ensuite, si l'égalité $D_Y^2 = D_Z^2$ est rejetée, Duclos et Davidson vérifient s'il existe une inégalité entre D_Y^2 et D_Z^2 conservée sur tout $\{x_1, \dots, x_m\}$ et ils vérifient le sens de cette inégalité.

Pour mener leurs tests, Duclos et Davidson considèrent les statistiques empiriques suivantes

$$\hat{D}_Z^2(x) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (x - z_j)_+$$

¹⁰ Cette procédure peut être vue comme une "généralisation" de l'outil d'analyse que constitue le *test de Kolmogorov-Smirnov de type deux*. Ce dernier test permet de vérifier l'égalité stochastique de premier ordre entre deux v.a. continues de distributions inconnues (c'est-à-dire $F_Y = F_Z$) et permet également de vérifier l'existence d'une relation de dominance stochastique de premier ordre et son sens [20]. Le test de Duclos-Davidson permet de tester une égalité stochastique de tout d'ordre entre deux v.a. quelconques, et de vérifier l'existence d'une relation de dominance stochastique de tout ordre.

$$\hat{V}_Z^2(x) = \frac{1}{N} \left[\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (x - z_j)_+^2 - \hat{D}_Z^2(x)^2 \right]$$

$$\hat{D}_Y^2(x) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (x - y_j)_+$$

$$\hat{V}_Y^2(x) = \frac{1}{N} \left[\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (x - y_j)_+^2 - \hat{D}_Y^2(x)^2 \right]$$

$$\hat{V}_{YZ}^2(x) = \frac{1}{N} \left[\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (x - y_j)_+^{s-1} (x - z_j)_+^{s-1} - \hat{D}_Y^2(x) \hat{D}_Z^2(x) \right]$$

où $g_+^2 = (\max(g, 0))^2$ et $x \in \mathbb{R}^+$. Les y_i et les z_i sont respectivement des réalisations de Y et des réalisations Z .

Pour vérifier l'égalité de $\hat{D}_Y^2(x) = \hat{D}_Z^2(x)$ en chaque $x \in \{x_1, \dots, x_m\}$, Duclos et Davidson proposent la statistique de test

$$T^2(x) = \frac{\hat{D}_Y^2(x) - \hat{D}_Z^2(x)}{\sqrt{\hat{V}^2(x)}} \quad (7.4)$$

où

$$\hat{V}^2(x) = | \hat{V}_Y^2(x) + \hat{V}_Z^2(x) - 2\hat{V}_{YZ}^2(x) |$$

Sous $H_0 : D_Y^2(x) = D_Z^2(x)$, on montre [29] que la statistique $T^2(x)$ est distribuée asymptotiquement¹¹ comme une normale $N(0, 1)$.

Voyons maintenant comment réaliser pratiquement la procédure de test de Duclos-Davidson.

(i). Test de l'égalité $D_Y^2 = D_Z^2$.

Le premier test statistique teste l'égalité entre $D_Y^2 = D_Z^2$ sur $\{x_1, \dots, x_m\}$. Les *hypotheses* en concurrence sont :

H_0 : L'égalité $D_Y^2 = D_Z^2$ est vérifiée sur $\{x_1, \dots, x_m\}$.

C'est-à-dire $\forall x_i \in \{x_1, \dots, x_m\}$, $D_Y^2(x_i) = D_Z^2(x_i)$.

H_A : L'égalité $D_Y^2 = D_Z^2$ n'est pas vérifiée sur $\{x_1, \dots, x_m\}$.

¹¹ C'est-à-dire pour $N \rightarrow \infty$.

C'est-à-dire qu'il existe au moins un point x_i en lequel :
 $D_Y^2(x_i) \neq D_Z^2(x_i)$.

Pour contrôler la probabilité de rejeter H_0 , Bishop et Formby [10]¹² suggèrent d'utiliser la v.a. MG^m définie comme

$$MG^m = \max(|N_1|, |N_2|, \dots, |N_m|)$$

où les N_j sont des v.a. normales $N(0, 1)$ indépendantes.

Notons $MG_{1-\alpha}^m$ le $(1 - \alpha)$ -quantile de MG^m ¹³. Considérons $\{x_1, \dots, x_m\}$ ($m \leq N$) et les statistiques correspondantes $T^2(x_1), \dots, T^2(x_m)$.

Les règles de décisions sont les suivantes :

1. Si $\max(|T^2(x_1)|, \dots, |T^2(x_m)|) \leq MG_{1-\alpha}^m \Rightarrow$ ne pas rejeter H_0 .
2. Sinon rejeter H_0 et accepter H_A .

Conclusions : Si H_0 est acceptée, nous concluons que l'égalité de $D_Y^2 = D_Z^2$ sur $\{x_1, \dots, x_m\}$ est également vérifiée sur \mathbb{R}^+ . C'est-à-dire que Y est stochastiquement égale à Z au second ordre, $Y \stackrel{ssd}{=} Z$. Si H_0 est rejetée, nous concluons qu'il existe au moins un réel positif en lequel $D_Y^2 \neq D_Z^2$. Il est alors nécessaire de vérifier s'il existe une relation de dominance stochastique de second ordre entre Y et Z c'est-à-dire une inégalité entre D_Y^2 et D_Z^2 conservée sur \mathbb{R}^+ . Pour cela nous devons réaliser deux autres tests.

(ii). Test de l'inégalité $D_Y^2 \geq D_Z^2$.

Les hypothèses en concurrence sont pour le deuxième test :

$$H_1 : \forall x \in \{x_1, \dots, x_m\} : D_Y^2(x_i) \geq D_Z^2(x_i)$$

$$H_{A_1} : \exists x_j \in \{x_1, \dots, x_m\} : D_Y^2(x_j) < D_Z^2(x_j).$$

Les règles de décision du second test sont basées sur le quantile de la v.a. MG^m , comme dans le premier test :

1. Si $\forall j \in \{1, 2, \dots, m\}, : T^2(x_j) \geq -MG_{1-\alpha}^m \Rightarrow$ accepter H_1
2. Si $\exists j \in \{1, 2, \dots, m\}, : T^2(x_j) < -MG_{1-\alpha}^m$, c'est-à-dire il existe un point x_j en lequel $D_Y^2(x_j)$ est significativement inférieur à $D_Z^2(x_j) \Rightarrow$ accepter H_{A_1} .

Conclusions : Si les hypothèses H_A et H_1 sont acceptées, nous concluons que l'inégalité $D_Y^2 \geq D_Z^2$ vérifiée sur $\{x_1, \dots, x_m\}$ est également vérifiée sur

¹² cité dans [29].

¹³ $MG_{0,95}^m = 2.80$ et $MG_{0,99}^m = 3.29$. Ces valeurs sont extraites de [10].

\mathbb{R}^+ tout entier. C'est-à-dire $Y \stackrel{ssd}{\preceq} Z$.

Si H_A et H_{A_1} sont acceptées, nous concluons que l'inégalité $D_Y^2 \geq D_Z^2$ n'est pas conservée sur \mathbb{R}^+ . Et nous réalisons le troisième test pour déterminer si l'inégalité $D_Y^2 \leq D_Z^2$ est conservée sur \mathbb{R}^+ .

(iii). Test de l'inégalité $D_Y^2 \leq D_Z^2$.

Les hypothèses en concurrence pour ce troisième test sont :

$$H_2 : \forall x \in \{x_1, \dots, x_m\} : D_Y^2(x_i) \leq D_Z^2(x_i)$$

$$H_{A_2} : \exists x_j \in \{x_1, \dots, x_m\} : D_Y^2(x_j) > D_Z^2(x_j).$$

Les règles de décision correspondantes sont :

1. Si $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\} : T^2(x_i) \leq MG_{1-\alpha}^m$, alors accepter H_2 .
2. Si $\exists j \in \{1, 2, \dots, m\} : T^2(x_j) > MG_{1-\alpha}^m$
c'est-à-dire il existe un point x_j en lequel $D_Y^2(x_j)$ est significativement supérieur à $D_Z^2(x_j)$, \Rightarrow accepter H_{A_2} .

Conclusions : Si H_A , H_{A_1} et H_2 sont acceptées, nous concluons que l'inégalité $D_Y^2 \leq D_Z^2$ vérifiée sur $\{x_1, \dots, x_m\}$ est également vérifiée sur \mathbb{R}^+ tout entier.

C'est-à-dire $Y \stackrel{ssd}{\succeq} Z$.

Enfin, si H_A , H_{A_1} et H_{A_2} sont acceptées, nous concluons qu'il existe au moins un réel positif x_i en lequel $D_Y^2 < D_Z^2$ et qu'il existe au moins un réel positif x_j en lequel $D_Y^2 > D_Z^2$. Par conséquent, aucune inégalité entre D_Y^2 et D_Z^2 n'est conservée sur \mathbb{R}^+ . Il n'existe donc pas de relation de dominance stochastique de second ordre entre Y et Z .

7.3.6 Remarque

L'hypothèse H_{A_3} correspond aux situations où il n'existe pas de relation de dominance stochastique de second ordre entre les deux rendements Y et Z .

L'existence de couples de v.a. entre lesquels on ne peut définir de relation de dominance stochastique de second ordre amène à s'interroger sur l'existence d'une relation de dominance stochastique d'ordre $n \geq 3$ plus complète et qui possède encore une interprétation économique utile dans le cadre de la comparaison entre deux portefeuilles.

En particulier, on peut se demander s'il existe, entre les rendements Y et Z , une relation de dominance stochastique d'ordre $n \geq 3$ que nous pourrions associer, par un résultat analogue aux théorèmes 2 et 3, à un ensemble de fonctions d'utilité.

Le théorème suivant généralise le théorème 3. Il montre qu'une relation de dominance stochastique d'ordre n définit une relation de préférence pour un ensemble particulier de fonctions d'utilité.

Théorème 8

Soit deux v.a. réelles Y et Z décrivant les rendements de deux portefeuilles. Le portefeuille de rendement Y sera préféré au portefeuille de rendement Z par tout investisseur possédant une fonction d'utilité $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall 1 \leq k \leq n : (-1)^k U^{(k)} \leq 0$

$$\iff$$

$$Y \stackrel{sd(n)}{\succeq} Z$$

$$Y \stackrel{sd(n)}{\succeq} Z \iff E[U(Y)] \geq E[U(Z)] \quad \forall U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ telle que } \forall 1 \leq k \leq n : (-1)^k U^{(k)} \leq 0$$

Nous noterons \mathcal{U}_n l'ensemble des fonctions d'utilité

$$\{U \mid \forall 1 \leq k \leq n : (-1)^k U^{(k)} \leq 0\}$$

Preuve Cfr. [83].

□

De même, il existe un test de Duclos-Davidson d'ordre n qui généralise le test de DD d'ordre 2. Nous le décrivons à l'AnnexeK.

Toutefois, la portée de cette généralisation à l'ordre n est limitée et son utilisation pratique est difficile.

En terme de portée, alors que les relations de dominance stochastique sont d'autant plus complètes que leur ordre est élevé, les ensembles de fonction d'utilité \mathcal{U}_n correspondant sont de plus en plus petits. Par conséquent s'il n'existe pas de relation de dominance stochastique d'ordre deux entre les rendements de deux produits mais que l'on trouve une relation de dominance stochastique d'ordre 3 entre ces deux rendements, il faut être conscient que l'on ne possède absolument aucune information sur la préféralité relative perçue par toute la catégorie des investisseurs dont la fonction d'utilité appartiendrait à $\mathcal{U}_3^c = \mathcal{U}_2 \setminus \mathcal{U}_3$. Il y a donc une opposition entre le niveau de complétude de la relation de dominance stochastique et la généralité des relations de préférence qu'elle permet d'analyser.

En terme d'utilisation pratique des relations de dominance stochastique d'ordre supérieur, il faudrait pouvoir lier les ensembles \mathcal{U}_n à des profils d'investisseurs. Il faudrait pouvoir déterminer si la fonction d'utilité d'un investisseur donné appartient à tel ou tel autre ensemble \mathcal{U}_n . Ainsi on pourrait pratiquer un test de dominance stochastique d'ordre n pour déterminer quel investissement parmi d'autres est préférable pour cet investisseur. Or, en pratique, il est difficile pour un organisme financier de placements d'identifier précisément les fonctions d'utilité de ses clients investisseurs. Pour qu'il puisse classer ses clients dans tel ou tel autre groupe \mathcal{U}_n , il faut qu'il puisse mener des enquêtes auprès de ceux-ci. Et pour être réalisables, ces enquêtes exigent qu'on puisse "verbaliser" les caractéristiques comportementales des investisseurs dont la fonction d'utilité appartient à \mathcal{U}_n .

Comme nous l'avons vu précédemment, \mathcal{U}_1 représente l'ensemble des investisseurs insatiables, \mathcal{U}_2 l'ensemble des investisseurs insatiables et averses au risque. L'ensemble \mathcal{U}_3 , quant à lui, représente les investisseurs insatiables, averses au risque et dont l'aversion au risque est croissante. Dans nos lectures, nous n'avons trouvé aucune indication sur l'interprétation économique de \mathcal{U}_n (pour $n > 3$). Toutefois, étant donné que nous disposons aujourd'hui d'outils statistiques permettant de tester les relations de dominance stochastique de tout ordre, nous pensons que l'on peut s'attendre à ce que dans un futur proche soient menées des recherches qui permettraient de lier des profils d'investisseurs ('verbalisables') à des relations de dominance stochastique de certains ordres.

Une solution pourrait consister à supposer que les fonctions d'utilité des investisseurs peuvent être approximées par des logarithmiques. Ces dernières appartiennent toujours à \mathcal{U}_n ($\forall n \geq 2$).

7.4 Un cadre d'analyse général de la préféralité d'un investissement.

Nous présentons maintenant une méthode d'analyse basée sur la dominance stochastique de second ordre pour analyser la performance d'un produit financier noté $P_{\text{analysé}}$ et dont le rendement est modélisé par la v.a. R^* .

Pour α , un pourcentage quelconque fixé, nous calculons $CVaR_\alpha(R^*)$ et $E[R^*]$. Nous plaçons le point $(CVaR_\alpha(R^*), E[R^*])$ dans le plan $CVaR_\alpha/E$ (Fig. 7.1). Ce point divise le plan en quatre quadrants.

Supposons que nous désirons comparer le RL2011 aux autres produits financiers proposés sur le marché. Notons P_j ces produits et R^j leurs rendements respectifs. Chacun de ces produits est représenté par un point $(CVaR_\alpha(R^j),$

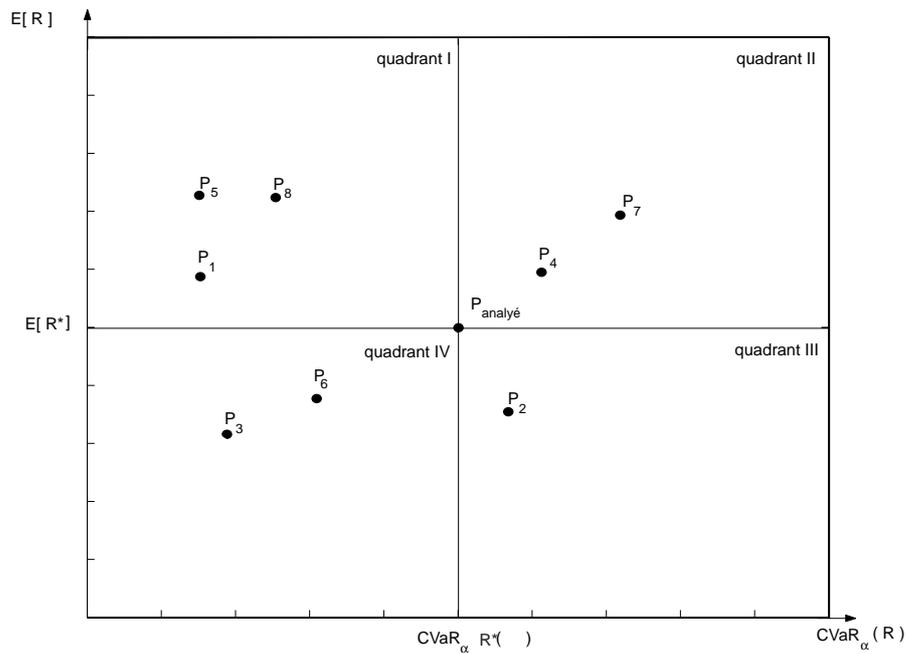


FIG. 7.1 – Analyse de la préféralité d'un produit financier.

$E[R^j]$) dans le plan $CVaR_\alpha/E$. Nous savons par les résultats du paragraphe 8.3 que seuls les produits financiers dont les rendements dominent R^* au sens SSD seront universellement préférés à $P_{\text{analysé}}$. Ces produits sont donc à chercher parmi ceux qui sont représentés par un point situé dans le premier quadrant de la figure [Fig. 7.1].

Une fois que nous avons identifié les produits appartenant au premier quadrant nous appliquons le test de Duclos-Davidson aux couples (R^j, R^*) .

Nous saurons ainsi s'il existe sur le marché un(des) produit(s) "universellement" préférable(s) au produit $P_{\text{analysé}}$. Si tel était le cas, le produit $P_{\text{analysé}}$ serait peu intéressant.

Remarque : Dans la mesure où on disposerait d'une interprétation économique satisfaisante pour certains ensembles \mathcal{U}_{n_i} ($n_i > 3$), le cadre d'analyse de la préféralité que nous avons présenté dans ce paragraphe pourra être raffiné en construisant ¹⁴ des mesures de risque cohérentes consistantes avec les relations de dominance stochastique d'ordre n_i supérieur à deux. C'est-à-dire des mesures de risque cohérentes notées ϱ_i telles que

$$R^j \stackrel{sd(n_i)}{\succeq} R^k \Rightarrow \varrho_i(R^j) \leq \varrho_i(R^k), \quad n_i \geq 3$$

7.5 Application : analyse de la préféralité du RL2011 de la société Remil Lynch.

Les termes de fonds de placement et de produits à capital garanti apparaissent, il y a peu de temps encore, comme antinomiques. On proposait à l'investisseur de choisir entre la prise directe de risque dans des fonds de placement ou alors d'opter pour une conservation du capital, sous forme d'un investissement obligataire, ne dégagant qu'un faible rendement.

Aujourd'hui, la combinaison de l'un avec l'autre existe. Les produits à capital garanti sur fond de placement permettent d'obtenir simultanément protection et haut rendement potentiel.

Actuellement, plusieurs grandes banques européennes, proposent des fonds de placement à capital garanti sur le marché belge.

Du point de vue de l'investisseur qui y souscrit, ces produits consistent à déposer du capital en un temps initial avec la garantie de le récupérer intégralement à l'échéance, et à percevoir à dates fixes pendant la période d'investissement des coupons dont la valeur est déterminée par une *règle de rendement* particulière en fonction de l'évolution de certaines valeurs sous-jacentes. Ces valeurs pouvant être des cours d'actions, des indices, et caetera.

Néanmoins, si on souhaite investir via un produit à capital garanti, il importe d'analyser sa préféralité. Après analyse, la préféralité d'un produit à capital garanti pourrait se révéler faible. En effet la règle de calcul des coupons pourrait se révéler peu favorable à l'investisseur.

¹⁴ Des résultats récents montrent qu'il est possible de construire des espaces de mesures de risque cohérentes par combinaisons d'autres mesures de risque cohérentes. Voir en particulier [8].

Un investisseur qui cherche à maximiser son utilité espérée, pourra donc être amené à rejeter un produit à capital garanti et à lui préférer la détention des actions sous-jacentes ou la détention d'obligations d'état. Dans cette section, nous présentons des produits imaginaires proposés par des sociétés imaginaires. Les caractéristiques de ces produits sont toutefois inspirées en partie de certains produits réels.

Dans cette section, nous nous intéressons à un produit à capital garanti particulier, le RL2011, qui serait mis au point par une banque, la Bitibank de Londres, et vendu à une société d'investissement belge : la Remil Lynch. La société Remil Lynch achète à la la Bitibank le RL2011 et le revend à ses clients.

Nous tenterons de répondre à la question suivante : le RL2011 constitue-t-il un placement intéressant pour les clients de la société Remil Lynch ? En particulier, nous tenterons de voir si le RL2011 est préférable à d'autres produits financiers. Parmi ceux-ci nous verrons deux produit à capital garanti : le 'S-index2006' proposé par la société Stanley Investment et le 'basket5-index', un produit que nous proposons. Nous comparerons également les préféralités du RL2011 et des obligations d'état belge. Enfin nous comparerons la préféralité du RL2011 par rapport à la détention de ses valeurs sous-jacentes.

7.5.1 Règle de rendement.

La distribution des rendements d'un produit à capital garanti est déterminée par la règle de rendement du produit est les valeurs sous-jacentes. Nous décrivons dans ce paragraphe les règles de rendement du RL2011 et de deux produits à capital garanti auquel nous voulons le comparer.

Le Remil Lynch 2011.

La période d'investissement du RL2011 est de 8 années. Les valeurs sous-jacentes sont les cours hebdomadaires des 5 actions considérées dans les chapitres précédents : l'action Solvay, l'action Colruyt, l'action Dexia, l'action Agfa-Gevaert et l'action Interbrew. La période d'investissement est de 8 années. A la fin l'année i ($i=1..8$), le porteur du RL2011 reçoit un coupon C_i . Ce coupon dépend du nombre de fois où la limite de 88% à été franchie au cours de l'année i par rapport au cours de référence de chaque action. Si au cours de l'année i la limite de référence est franchie

0 fois alors	$C_i = 10\%$
1 fois alors	$C_i = 8\%$
2 fois alors	$C_i = 6\%$
3 fois alors	$C_i = 4\%$
4 fois alors	$C_i = 2\%$
5 fois ou plus	$C_i = 0\%$

Les *cours de référence* des actions évoluent comme suit :

- Chaque fois que la limite est franchie, les nouveaux cours de référence des actions du panier seront leurs cours de clôture constatés à la date de franchissement de la limite.
- A l'issue de chaque année i que la limite ait été franchie ou non au cours de cette année, les nouveaux cours de référence des 5 actions au début de l'année $i + 1$ seront leurs cours de clôture constatés à la fin de l'année i .

Le S-index2006.

La période d'investissement du S-index2006 est de 3 années.

La valeur sous-jacente est la valeur mensuelle de l'indice DJ Eurostoxx 50¹⁵.

La valeur mensuelle est définie comme la valeur de clôture du dernier vendredi de chaque mois. Le coupon annuel perçu est fonction du pourcentage d'augmentation (de baisse) de la valeur mensuelle de l'indice DJ Eurostoxx 50. Le pourcentage d'augmentation de la valeur de l'indice est calculé sur base de la valeur mensuelle du mois qui s'achève et de la valeur mensuelle du mois précédent.

On enregistre chaque mois le pourcentage d'augmentation de la valeur du DJ Eurostoxx 50. En fin d'année, le coupon C_i perçu par le détenteur est égal à 8.5% à quoi on ajoute la moins bonne performance mensuelle observée dans l'année qui s'achève que nous noterons $P_{i,min}$. En cas de forte baisse de l'indice, le plafond du coupon est toutefois limité à 0%. Autrement dit

$$C_i = \max(0.085 + P_{min}, 0)$$

Le basket5-index.

La période d'investissement du basket5-index est de 8 années.

La valeur sous-jacente est la valeur mensuelle d'un portefeuille formé d'exactly cinq actions : une action Solvay, une action Colruyt, une action Dexia, une action Agfa-Gevaert et une action Interbrew.

¹⁵L'Eurostoxx 50 est un indice formé à partir de 50 actions européennes.

La valeur mensuelle du portefeuille est définie comme la valeur de clôture du dernier vendredi de chaque mois. Le coupon annuel perçu est fonction du pourcentage d'augmentation (de baisse) de la valeur mensuelle du portefeuille et est calculé suivant la même règle de rendement que celle utilisée pour le S-index2006 .

7.5.2 Analyse de la préféralité du RL2011.

Les différents produits à capital garanti considérés ont des périodes d'investissements différentes et des règles de rendements différentes. Afin de pouvoir comparer ces produits, nous supposons que les coupons perçus sont capitalisés sous forme de bon d'état à 3%/an d'année en année depuis leur perception jusqu'à 8 ans après la date de souscription au produit. Ainsi pour le S-index2006, le coupon perçu à la fin de la première année sera capitalisé et placé à 3%/an sur 7 ans. Le coupon perçu à la fin de la deuxième année sera capitalisé et placé à 3%/an sur 6 ans. Le coupon perçu et le nominal restitué à la fin de la troisième année seront capitalisés et placés à 3%/an sur 5 ans.

Supposons que nous désirons investir un capital initial de x million d'euro dans le RL2011. Pour vérifier la préféralité de cet investissement nous procédons en deux étapes.

Première étape : nous identifions les produits concurrents potentiellement supérieurs.

Cette étape à pour but consiste essentiellement à distinguer parmi les produits concurrent sur le marché ceux qui pourraient être préférables au RL2011. Pratiquement, cette étape consiste à évaluer l'espérance et la CVaR des rendements pour chacun des produits et à les comparer.

Les coupons du RL2011 peuvent prendre un nombre fini de valeurs discrètes par conséquent le rendement global du RL2011 sur les huit ans peut prendre un nombre fini de valeurs. La fonction de distribution du rendement global du RL2011 sur les huit ans est donc discontinue. Par conséquent, nous utiliserons l'estimateur nonparamétrique (5.1) de la CVaR. La VaR du RL2011 est par définition toujours nulle puisque le capital est garanti. Afin d'évaluer la CVaR et l'espérance des rendements du RL2011, du basket5-index et du portefeuille A nous simulons deux mille scénarios des prix des cinq actifs sous-jacents du RL2011. Sur base de ces scénarios, nous calculons les rendements du RL2011, du basket5-index et du portefeuille A obtenus à l'échéance de huit années, la CVaR et l'espérance des rendements.

Nous simulons également 2000 scénarios d'évolution de l'indice DJ Eurostoxx 50 sur trois ans¹⁶ De ces scénarios nous tirons la CVaR et l'espérance

¹⁶L'évolution du DJ Eurostoxx 50 est modélisée par un mouvement brownien géométrique de tendance $\mu = -0.0062$ et de $\sigma = 0.0367$ (pour une unité de temps

des rendements du S-index2006 .

Appelons rendement le pourcentage d'accroissement du capital initial obtenu à l'échéance. R_8 est le rendement à l'échéance de huit ans. Un capital de 1 euro investi à l'horizon de 8 ans rapporte $(1+R_8)$ à l'échéance. Le rendement annuel R_1 est défini tel que $(1+R_1)^8=(1+R_8)$.

Dans la suite de ce chapitre, nous supposons, sans perte de généralité, que le capital investi initialement est de 1 euro. Les P&L seront donc égaux aux rendements.

Les espérances de rendements et les CVaR pour chacun des produits sont reprises dans les tableaux ci-dessous. Les qualités des estimations sont indiquées au moyen d'intervalles de confiance bootstrap-t. Les positions des différents produits dans le plan $E/CVaR_{0,7}$ sont indiquées sur la figure [Fig. 7.2]. Nous constatons que tous les produits en concurrence avec le RL2011 considérés sont positionnés dans le quadrant supérieur gauche. Ils présentent, pour plusieurs valeurs α , un risque $CVaR_\alpha$ plus faible et une espérance de rendement supérieure à celle du RL2011. Ceci indique qu'à priori les rendements du basket5-index pourraient dominer stochastiquement au second ordre les rendements du RL2011. Les produits concurrents sont donc tous *potentiellement* universellement préférables au RL2011.

	Espérance du rendement			
	RL2011	S-index2006	basket5-index	bond d'état
$E[R_8]$	0.0805	0.1633	0.2062	0.2667
$E[R_1]$	0.0091	0.0191	0.0235	0.03

égale à une semaine). La calibration s'effectue sur base de l'historique des cours hebdomadaires de l'indice du 17/03/2000 au 7/03/2003. Le test χ^2 ne permet pas de rejeter la normalité des rendements. Ce résultat nous encourage à accepter la modélisation du DJ Eurostoxx 50 par un brownien géométrique.

CVaR des P&L

	RL2011	S-index2006
$CVaR_{0.60}$	-0.0030	-0.1593
int. de conf. à 95%	[-0.0055, -0.0013]	[-0.1593,-0.1593]
longueur int. de conf. à 95%	0.0042	0
taux de couverture	0.97	1
$CVaR_{0.70}$	-0.0152	-0.1593
int. de conf. à 95%	[-0.0184, -0.0120]	[-0.1593, -0.1593]
longueur int. de conf. à 95%	0.0064	0
taux de couverture	0.947	1
$CVaR_{0.80}$	-0.0308	-0.1593
int. de conf. à 95%	[-0.0351, - 0.0268]	[-0.1594, -0.1593]
longueur int. de conf. à 95%	0.0083	10^{-4}
taux de couverture	0.9490	0.99

CVaR des P&L

	basket5-index	bond d'état
$CVaR_{0.60}$	-0.1575	-0.2667
int. de conf. à 95%	[-0.1611, -0.1538]	/
longueur int. de conf. à 95%	0.0072	/
taux de couverture	0.9530	/
$CVaR_{0.70}$	-0.1686	-0.2667
int. de conf. à 95%	[-0.1720 , -0.1650]	/
longueur int. de conf. à 95%	0.0069	/
taux de couverture	0.9530	/
$CVaR_{0.80}$	-0.1797	-0.2667
int. de conf. à 95%	[-0.181, -0.1763]	/
longueur int. de conf. à 95%	0.0068	/
taux de couverture	0.9540	/

Les distributions empiriques du RL2011, du basket5-index, du S-index2006 et du portefeuille A sont représentées dans la figure [Fig. 7.3].

Deuxième étape : nous vérifions la préféralité relative des produits concurrents potentiellement supérieurs.

Cette étape à pour but de vérifier la préféralité relative des produits concurrents. Elle consiste à vérifier l'existence de relations de dominance stochastique entre les rendements du RL2011 et les rendements de chacun des produits concurrents potentiellement supérieurs.

RL2011 vs basket5-index. Nous voulons savoir si un investissement dans le RL2011 est préférable à un investissement dans le basket5-index . Nous

voyons que pour plusieurs valeurs de α la CVaR du RL2011 domine la CVaR du basket5-index (voir tableaux ci-dessus). De plus nous constatons que l'espérance du rendement du basket5-index domine l'espérance du rendement du RL2011 [Fig. 73]. Ceci indique qu'à priori les rendements du basket5-index pourraient dominer stochastiquement au second ordre les rendements du RL2011.

Nous testons la dominance stochastique entre les rendements du RL2011 et les rendements du basket5-index. Pour une grille de 100 points, le test χ^2 de normalité indique que nous ne pouvons pas rejeter la normalité standard de la statistique T (cfr. équation (K.1)). Nous pouvons donc appliquer le test de dominance stochastique de second ordre de Duclos-Davidson. Celui indique que les rendements du basket5-index dominent stochastiquement au second ordre les rendements du RL2011. Par la proposition 3 nous pouvons en conclure que le basket5-index est universellement préférable au RL2011.

RL2011 vs S-index2006 . Le test de dominance stochastique de second ordre de Duclos-Davidson conclut que les rendements de S-index2006 dominent stochastiquement au second ordre les rendements du RL2011. Nous concluons donc à la préféralité universelle du S-index2006 sur le RL2011.

RL2011 vs bon d'état. Considérons maintenant les performances du RL2011 par rapport aux rendements obtenus pour un bon d'état. Nous Supposerons qu'un bond d'état belge d'échéance un an présente un rendement de 3%. Si les intérêts sont capitalisés successivement, le rendement sur 8 ans sera de 26.67%. Si le capital investit est de x euro, la CVaR $_{\alpha}$ du bon d'état est donc -0.2667 ($\forall \alpha, 0 \leq \alpha \leq 1$). Le test de dominance stochastique de second ordre de Duclos-Davidson conclut que les rendements d'un bon d'état à 3pourcent/an dominant stochastiquement au second ordre les rendements du RL2011. Nous concluons donc à la préféralité universelle du bon d'état à 3pourcent/an sur le RL2011.

RL2011 vs portefeuille \mathcal{A} .

On peut se demander s'il existe un portefeuille \mathcal{A} composé des 5 actions sous-jacentes au RL2011 qui lui soit universellement préféré. Un tel portefeuille n'existe pas! En effet il est impossible de garantir de façon absolue qu'un portefeuille d'actions ait des rendements positifs. Toutefois, il est possible de contruire un portefeuille dont on limite très fortement la probabilité d'un rendement négatif. Le tableau suivant donne un exemple d'un tel portefeuille. Nous définissons ce portefeuille par les proportions investies respectivement dans chacun des actifs :

Composition du portefeuille \mathcal{A} en pourcentage du capital.

Solvay	Colruyt	Dexia	Agfa-Gevaert	Interbrew
-0.2159	1.0977	0.1167	-0.0105	0.0120

Nous expliquons en Annexe L l'heuristique qui nous a permis de découvrir la composition de ce portefeuille. Appellons \mathcal{A} ce portefeuille.

Pour un capital initial de 2500 euros investit le 16/05/2003¹⁷, le portefeuille \mathcal{A} sera constitué en vendant à découvert 8 actions Solvay et 1 action Agfa-Gevaert et en achetant 48 actions Colruyt, 26 actions Dexia et 2 actions Interbrew. La composition du portefeuille est conservé pendant 8 ans. A cette échéance l'investisseur revend les actions contenues dans le portefeuille. Nous obtenons pour le portefeuille \mathcal{A} la $\text{CVaR}_{0.7}(\mathbf{R}_8) = -1.0126$ et l'espérance du rendement $E[\mathbf{R}_8] = 1.1$. Le test de dominance stochastique de second ordre de Duclos-Davidson conclut que les rendements de portefeuille \mathcal{A} dominent stochastiquement au second ordre les rendements du RL2011.

Nous analysons également les relations de préféralité entre les produits concurrents au RL2011 :

Basket5-index vs S-index2006 . Le test de dominance stochastique de second ordre de Duclos-Davidson conclut qu'il n'existe pas de relation de dominance stochastique de second ordre entre les rendements du basket5-index et les rendements S-index2006 . On ne sait donc pas déterminer si le basket5-index est universellement préférable ou non au S-index2006.

Si nous pratiquons des test de DD d'ordres successifs, nous vérifions qu'il n'existe pas de relation de dominance stochastique d'ordre strictement inférieur à sept entre les rendements du basket5-index et les rendements du S-index2006 . Le test de DD d'ordre sept indique que les rendements du S-index2006 dominent stochastiquement les rendements du basket5-index à l'ordre six. Par conséquent, si nous nous intéressons spécifiquement aux investisseurs possédant des fonctions d'utilité $\in \mathcal{U}_6$, comme par exemple les fonctions d'utilité exponentielles ou logarithmiques, nous savons que ceux-ci préféreront toujours S-index2006 au basket5-index.

Basket5-index vs bon d'état. Le test de dominance stochastique de second ordre de Duclos-Davidson conclut que les rendements d'un bon d'état à 3pourcent/an dominant stochastiquement au second ordre les rendements du Basket5-index. Nous concluons donc à la préféralité universelle du bon d'état à 3pourcent/an sur le Basket5-index.

S-index2006 vs bon d'état. Le test de dominance stochastique de second ordre de Duclos-Davidson conclut que les rendements d'un bon d'état à 3pourcent/an dominant stochastiquement au second ordre les rendements du S-index2006. Nous concluons donc à la préféralité universelle du bon d'état à 3pourcent/an sur le S-index2006 .

¹⁷Les prix des cinq actions à cette date sont respectivement de 64.85, 57.3, 11.39, 18.25 et 18.82 euros.

Portefeuille \mathcal{A} vs bon d'état. Le test de dominance stochastique de second ordre de Duclos-Davidson conclut que les rendements d'un portefeuille \mathcal{A} dominant stochastiquement au second ordre les rendements du bon d'état à 3%/an. Le portefeuille \mathcal{A} semble donc universellement préférable au bon d'état et donc aussi universellement préférable à tous les produits considérés ici.

Les résultats des test de DD sont résumés dans les équations suivantes :

$$\text{RL2011} \stackrel{sd(2)}{\preceq} \text{S-index2006} \stackrel{sd(2)}{\preceq} \text{bond d'état} \stackrel{sd(2)?}{\preceq} \text{portefeuille } \mathcal{A} \quad (7.5)$$

$$\text{RL2011} \stackrel{sd(2)}{\preceq} \text{basket5-index} \stackrel{sd(2)}{\preceq} \text{bond d'état} \stackrel{sd(2)?}{\preceq} \text{portefeuille } \mathcal{A} \quad (7.6)$$

$$\text{basket5-index} \stackrel{sd(7)}{\preceq} \text{S-index2006} \quad (7.7)$$

Les conclusions (7.5) et(7.6) du test de DD d'ordre deux sont compatibles avec l'observation des distributions des rendements à la figure [Fig. 7.3]. Pour toute droite verticale V du plan $\text{CVaR}_{0.7}(\mathbf{R}_8)/\mathbb{E}[\mathbf{R}_8]$, la surface coincée entre V et la fonction de distribution du rendement du bon d'état est bien inférieure aux surfaces coincées entre V et chacune des fonctions de distribution du S-index2006 et du basket5-index. Ces surfaces étant elles-mêmes inférieures à la surface coincée entre V et la distribution des rendements du RL2011. Bien que le test de DD conclut à la dominance stochastique de second ordre des rendements du portefeuille \mathcal{A} sur les rdts de tout les autres produits présentés, nous savons qu'un rendement négatif du portefeuille \mathcal{A} est possible. Ce qui se vérifie à la figure [Fig. 7.3]. Il n'y aurait donc pas de relation de dominance stochastique de second ordre entre le portefeuille \mathcal{A} et les autres produits. Toutefois on peut considérer que la probabilité d'obtenir un rendement de \mathcal{A} inférieur au rdt du bon d'état 26.67% est tellement faible (1/5000 pour 5000 simulations à la figure[Fig. 7.3]) que l'investisseur considèrera que les rendements du portefeuille \mathcal{A} comme toujours supérieurs à 26.67% et accepte les conclusions du test de DD de second ordre.

Par une inspection visuelle nous voyons qu'il n'existe pas de relation de dominance stochastique d'ordre 2 entre les rendements du basket5-index et du S-index2006. En effet si l'abscisse de V est inférieure à 0.1593 la surface coincée entre V et la distribution des rendements du basket5-index est supérieure à la surface coincée entre V et la distribution des rdts du S-index2006. Par contre si l'abscisse de V est au-delà de 0.3 alors nous observons l'inverse. Il est donc nécessaire de procéder à des tests de DD d'ordre supérieur à 2 pour essayer de découvrir une relation de dominance stochastique d'ordre supérieur entre les rendements du S-index2006 et les rendements du basket5-index.

Les tests de DD pratiqués sur les rendements nous permettent donc de conclure que le RL2011 est du point de vue de l'investisseur le produit le moins intéressant parmi les 4 produits considérés. Ces tests montrent également que parmi les produits à capital garanti étudiés, les produits les plus intéressants restent les bons d'état. Un investisseur avisé devrait donc éviter les produits à capital garanti présentés dans ce chapitre. Ces produits à capital n'augmenteraient pas son utilité. L'investisseur devrait plutôt à ces produits un investissement dans un portefeuille d'actions de composition bien choisie ou secondairement un investissement en bon d'état.

Ces conclusions amènent un rappel essentiel : seul le *risque de marché* a été introduit dans les simulations des P&L. En particulier, le risque de défaut¹⁸ de la société qui émet un produit à capital garanti n'est pas intégré dans le calcul de la distribution des P&L de ce produit. Or, la garantie du capital est assurée par la qualité de l'émetteur du produit à capital garanti. Par conséquent, pour comparer correctement deux produits à capital garanti, il faudrait intégrer la probabilité de défaut de la société émettrice dans les simulations des P&L. Une fois introduite cette probabilité de défaut, le produit RL2011 pourrait se révéler universellement préférable au S-index. Nous n'aborderons pas la modélisation du risque de défaut dans ce mémoire, celle-ci pourrait faire l'objet d'un mémoire futur.

7.6 Conclusions à ce chapitre.

Dans ce chapitre, nous avons présenté le lien existant entre la VaR et la CVaR d'un produit et sa préférabilité en terme économique. Nous avons construit une méthode simple pour déterminer la *préférabilité universelle* d'un produit de référence par rapport à d'autres produits concurrents. Ensuite nous avons illustré cette méthode en l'appliquant à des produits à capital garanti fictifs mais inspirés de produits existant. Nous avons également développé une heuristique exploratoire simple permettant de nous guider dans la composition d'un portefeuille d'actifs de préférabilité supérieure à celle d'un produit de référence.

¹⁸ C'est-à-dire le risque de faillite.

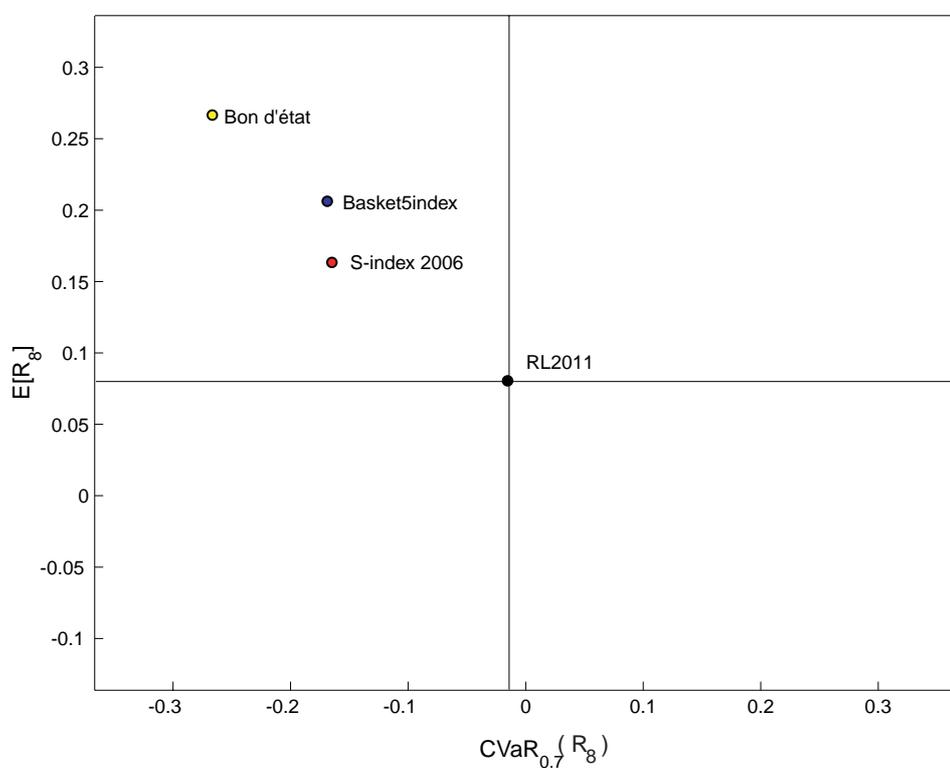


FIG. 7.2 – Position relative des différents produits. RL2011 (en noir), basket5-index (en bleu), S-index2006 (en rouge), bon du trésor(en jaune), portefeuille A (en vert).

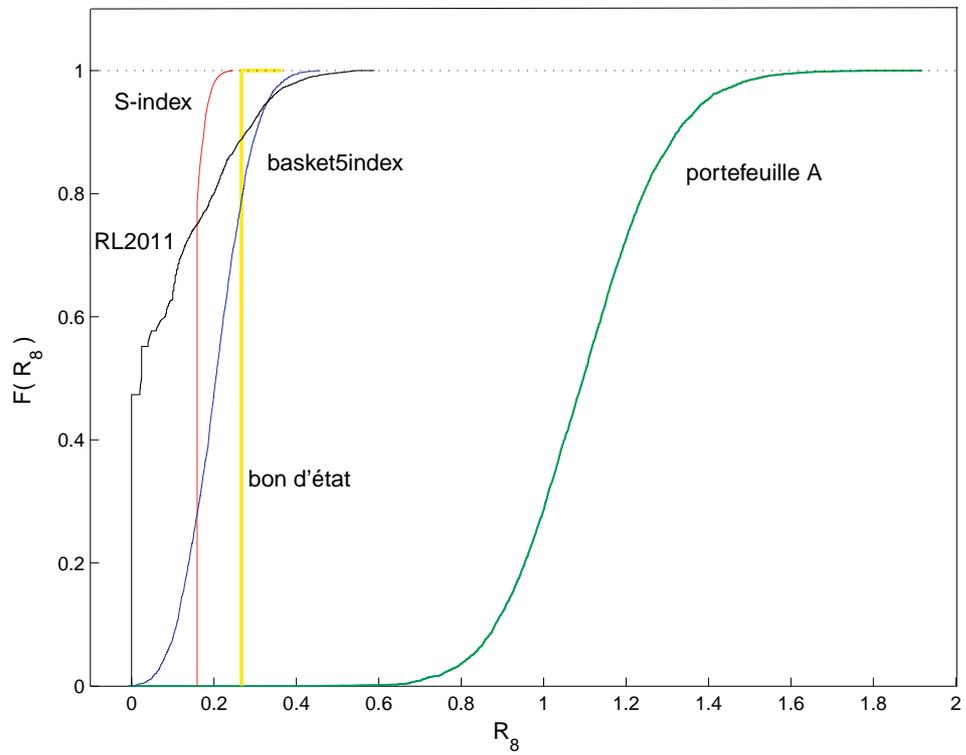


FIG. 7.3 – Distributions empiriques des rendements du RL2011 (en noir), du basket5-index (en bleu), du S-index2006 (en rouge), du bon du trésor(en jaune) et du portefeuille A (en vert).

Chapitre 8

Conclusions

L'objectif de ce mémoire était de montrer d'une part comment mesurer pratiquement le risque de marché auquel est soumis un produit financier. Et d'autre part, de montrer qu'à partir de certaines mesures du risque d'un actif nous pouvons construire une procédure permettant comparer la préférabilité de cet actif à celles d'autres produits financiers.

Nous avons débuté ce mémoire en présentant une formalisation de la notion de risque de marché. La quantification du risque de marché que nous avons adoptée s'appuie sur la notion de *mesure de risque cohérente* telle que définie par Freddy Delbaen. Pratiquement nous avons utilisé deux mesures du risque de marché : la *valeur risquée* (VaR) qui est une mesure de risque non cohérente. Et la *valeur risquée conditionnelle* (CVaR) qui constitue une mesure de risque cohérente.

Comme, les mesures du risque de marché sont des fonctions de la distribution des variations de valeur du produit considéré, nous avons développé un *modèle de rendement* permettant de simuler ces variations de valeur à l'horizon de risque considéré. Le modèle que nous avons ajusté est un AR(r)-GARCH(p,q) dont le terme d'innovation présente une loi conditionnelle student. Nous avons cherché à mesurer le risque de marché de produits dérivés à sous-jacent multiple. Pour modéliser la dépendance entre les taux de rendement de chacune des valeurs sous-jacentes, nous avons approximé la distribution conjointe des termes d'innovations des différents taux de rendement. Notre approximation s'appuie sur la théorie des copules. Nous avons illustré l'ajustement de ce modèle de rendement sur cinq actions. En particulier nous avons montré comment ajuster une t-copule à la dépendance entre les termes d'innovations.

Nous avons ensuite calculé la VaR et la CVaR de deux produits dérivés complexes : une *option panier* à cinq valeurs sous-jacentes et une *option*

asiatique dont le sous-jacent est un portefeuille composé de cinq actions. Ces deux exemples nous ont permis de mettre en évidence les difficultés essentielles que l'on rencontre lors de l'estimation de la VaR et de la CVaR. En particulier, nous avons vu qu'un nombre conséquent de simulations étaient nécessaire pour parvenir à des estimées de qualité.

Notons que dans ce mémoire, nous avons envisagé essentiellement le calcul du risque de perte encouru sur *un* produit financier. Nous avons montré que l'observation des cours des sous-jacents de ce produit dans le passé suffit pour décrire le risque auquel il est soumis. En pratique, les organismes financiers souhaitent quantifier la perte potentielle découlant du risque de marché auquel ils sont soumis sur *l'ensemble* de leurs positions. A partir de cette perte potentielle, ils constituent des réserves de capital qui serviront à compenser des pertes éventuelles. Le passage d'un produit à un ensemble de produits ne pose pas de problème théorique insurmontable : pour calculer, par exemple, la $VaR_{0.01}$ associée à l'ensemble de ses positions, il suffira à un organisme financier de déterminer l'ensemble des dépendances entre les taux de rendement des différents sous-jacents de tous des produits sur lesquels portent ses positions.

Après une première partie du mémoire consacrée au calcul de la VaR et de la CVaR, nous avons abordé un second aspect fondamental des mesures de risque. Nous avons analysé le lien entre la mesure du risque de marché auquel est soumis un produit financier et sa préféralité. Ce lien peut être établi via la notion de *dominance stochastique* entre rendements.

En particulier, nous nous sommes intéressé au lien entre la CVaR d'un produit financier et sa *préféralité universelle*. C'est-à-dire sa préféralité pour un investisseur rationnel dont la fonction d'utilité serait quelconque.

Nous avons construit une méthode simple pour déterminer la préféralité universelle d'un produit de référence par rapport à d'autres produits concurrents. Cette méthode se base sur le concept de *mesure de risque consistante* et nécessite l'estimation de la CVaR et de l'espérance du rendement. Pour que cette méthode soit concluante, il faut qu'il existe une relation de dominance stochastique de second ordre entre les rendements.

Enfin, nous avons appliqué cette méthode à l'analyse de préféralité du "RL2011", un produit à capital garanti fictif mais inspiré de produits existant sur le marché belge. Nous avons comparé la préféralité de ce produit par rapport à d'autres produits à capital garanti concurrents.

Nous nous sommes interrogés sur la possibilité de constituer à partir d'actifs donnés, un portefeuille dont la préféralité serait supérieure à un produit de référence. C'est-à-dire comment constituer un produit dont le rendement dominerait stochastiquement au second ordre le rendement d'un produit de référence. Nous avons mis au point une *heuristique exploratoire* simple

permettant de nous guider dans la composition d'un portefeuille d'actifs de préférence supérieure à celle d'un produit de référence. Cette heuristique nous a permis de construire un portefeuille d'actions universellement préférable au RL2011 et aux autres produits à capital garanti présentés ici.

Nous souhaiterions terminer ces conclusions en attirant l'attention du lecteur sur deux points qui nous paraissent essentiels à la mise en perspective les méthodes présentées dans ce mémoire :

(i) La démarche de quantification du risque de marché adoptée dans ce mémoire n'est valable que dans un cadre "limité". En effet, d'une part elle suppose que les processus d'évolution des cours restent stables jusqu'à l'horizon de risque considéré, c'est-à-dire tels qu'observés pendant l'historique utilisé pour l'ajustement du modèle de taux de rendement. Ensuite, cette démarche ne prend pas en compte des phénomènes propres aux marchés tels que les bulles spéculatives. Il s'agit là d'un "*risque de modèle*" dont il est pas assuré que l'on puisse jamais se libérer car l'usage de modèles complexes conduit inévitablement à des difficultés d'ajustement en raison du nombre limité d'observations historiques. En raison des limitations des modèles de taux de rendement, l'approche de quantification du risque de marché présentée dans ce mémoire ne permet donc pas d'intégrer la totalité du risque de marché. Il importe d'en être conscient.

(ii) Pour les investisseurs, les mesures du risque calculées sur base de modèles de taux de rendement constituent essentiellement des outils d'aide à la décision sur le court ou le moyen terme : elles permettent d'une part d'analyser des positions qui pourront être abandonnées à court ou moyen terme et, d'autre part, elles permettent de quantifier les pertes potentielles à un horizon "pas trop" éloigné. En effet, la validité des modèles de taux de rendement n'est pas garantie à long terme. Comme nous l'avons déjà rappelé, les processus qui décrivent l'évolution de ces taux peuvent se transformer.

L'analyse des positions sur un horizon très éloigné peut être basée sur des mesures du risque calculées à partir de modèles de taux de rendement. Mais, elle devra être complétée par une analyse économique prospective moins quantitative : prévision de la situation macroéconomique future et de son influence sur le cours des actions et sur les taux d'intérêts. Analyse de la rentabilité future des entreprises émettrices d'actions. Et caetera.

Annexe A

Preuves de certains théorèmes.

A.1 Preuve du théorème 3.

Preuve Soit C_X la copule associée au ve.a. X et $C_{T(X)}$ la copule associée au ve.a. $T(X) = (T_1(X_1), \dots, T_n(X_n))$.

(i) Soit $y \in \text{Im}X_1 \times \text{Im}X_2 \times \dots \times \text{Im}X_n$.

$$F_{T(X)}(y) = P(T_1(X_1) \leq y_1, \dots, T_n(X_n) \leq y_n)$$

Comme les transformations T_i sont strictement croissantes sur $[0,1]$, elles sont bijectives et

$$T_i(X_i) \leq y_i \Leftrightarrow X_i \leq T_i^{-1}(y_i)$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} F_{T(X)}(x) &= P(X_1 \leq T_1^{-1}(y_1), \dots, X_n \leq T_n^{-1}(y_n)) \\ &= C_X(F_{X_1}(T_1^{-1}(y_1)), \dots, F_{X_n}(T_n^{-1}(y_n))) \end{aligned}$$

Or

$$F_{T_i(X_i)}(y_i) = P(T_i(X_i) \leq y_i) = P(X_i \leq T_i^{-1}(y_i)) = F_{X_i}(T_i^{-1}(y_i))$$

On obtient donc

$$F_{T(X)}(y) = C_X(F_{T_1(X_1)}(y_1), \dots, F_{T_n(X_n)}(y_n))$$

Or par le théorème de Sklar la copule associée au ve.a. $T(X)$ est unique donc $C_{T(X)} = C_X$.

(ii) $F_X(x) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)$. Or $X_i \leq x_i \Leftrightarrow T_i(X_i) \leq T_i(x_i)$.

Par conséquent

$$F_X(x) = P(T_1(X_1) \leq T_1(x_1), \dots, T_n(X_n) \leq T_n(x_n)) = F_{T(X)}(T(x))$$

et donc par (i)

$$F_X(x) = C_X(F_{T_1(X_1)}(T_1(x_1)), \dots, F_{T_n(X_n)}(T_n(x_n)))$$

□

A.2 Preuve du théorème 4.

Preuve Soit $\nu > 2$ et Σ la matrice de corrélation de $X \sim t_{\nu, \Sigma}$. Σ est définie positive donc $\text{rang}(\Sigma) = n$. Nous devons montrer que le vecteur aléatoire X peut être écrit comme la fonction d'une normale multivariée standardisée et d'une v.a. chi-carrée. Prenons la normale multivariée standard $Z = (Z^1, \dots, Z^n) \sim N(0, \Sigma)$ et une v.a. chi-carrée S à ν dll indépendante de Z . Comme Z est standardisée, le vecteur des moyennes de Z est nul et la matrice de covariance Σ de Z est également sa matrice de corrélation. Par conséquent, pour tout $i = 1..n$, $\frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{S}}Z^i$ a une distribution student standardisée t_ν . Et la matrice de covariance de $\frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{S}}Z$ est $\frac{\nu}{\nu-2}\Sigma$ car

$$\begin{aligned} \text{cov} \left(\frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{S}}Z^i, \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{S}}Z^j \right) &= E \left[\frac{\nu}{S} \right] \Sigma_{ij} \\ &= \frac{\nu}{\nu-2} \Sigma_{ij} \end{aligned}$$

On le montre comme suit : Soit $V \sim \chi_\gamma^2$, pour $\nu > 2$ la v.a. Fischer-Snedecor ¹ $F_{\gamma, \nu} = \frac{V/\gamma}{S/\nu}$ a pour espérance $E[F_{\gamma, \nu}] = \frac{\nu}{\nu-2}$. On a $E[V/\gamma] = 1$. Donc puisque

$$E[F_{\gamma, \nu}] = E[V/\gamma] \cdot E \left[\frac{\nu}{S} \right]$$

il vient

$$E \left[\frac{\nu}{S} \right] = \frac{\nu}{\nu-2}$$

On a donc prouvé que $X \sim \mu + \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{S}}Z$.
La réciproque est immédiate.

□

¹Pour rappel : la Fischer-Snedecor à (γ, ν) degrés de liberté est la v.a. $F_{\gamma, \nu} = \frac{\chi_\gamma^2/\gamma}{\chi_\nu^2/\nu}$ où χ_γ^2 et χ_ν^2 sont deux distributions chi-carrées indépendantes à γ et ν dll.

Annexe B

Evaluation de fonction de distribution.

B.1 Introduction

Dans cette annexe, nous décrirons différentes méthodes possibles pour évaluer la fonction de distribution d'une v.a. dont on connaît la fonction génératrice des moments ou que l'on peut décomposer en une somme finie de v.a. iid dont on connaît la fonction génératrice des moments. Nous en présentons les principes et nous distinguons les limites de chacune de ces méthodes. En particulier, nous présentons de manière extensive l'algorithme que nous avons développé pour évaluer une distribution par inversion de Fourier.

B.2 Méthode du point de selle.

La méthode du point de selle permet d'obtenir, sous certaines conditions, une approximation très précise de la distribution d'une variable aléatoire dont on connaît la fonction génératrice des moments.

Dans cette section, nous en présenterons les résultats principaux et nous référencerons un algorithme qui la réalise.

B.2.1 Fonction génératrice des cumulants.

Soit M_Y la *fonction génératrice des moments* (*f.g.m.*) de la v.a. Y à valeurs réelles :

$$M_Y(\theta) = E \left[e^{\theta Y} \right] \text{ pour } \theta \in \Theta.$$

Où $\Theta = \{\theta \in \mathbb{R} | M_Y(\theta) < \infty\}$ est le domaine de M_Y .

On définit la *fonction génératrice des cumulants (f.g.c.)* comme

$$K_Y(\theta) = \log M_Y(\theta) = \log \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\theta y} dF_Y(y) \text{ pour } \theta \in \Theta$$

Où $\Theta = \{\theta \in \mathbb{R} \mid K_Y(\theta) < \infty\}$ est le domaine de K_Y .

Sous l'hypothèse que $0 \in \text{int}\Theta$, le *ième cumulant* est défini comme

$$\kappa_i = \left. \frac{\partial^i K_Y}{\partial \theta^i} \right|_{\theta^i=0}$$

, les quatres premiers cumulants de Y sont donnés par :

$$\kappa_1 = E[Y]$$

$$\kappa_2 = \text{var}(Y)$$

$$\kappa_3 = E((Y - E[Y])^3)$$

$$\kappa_4 = E((Y - E[Y])^4) - 3(\text{var}(Y))^2$$

Nous voyons que le premier et le second cumulant sont la moyenne et la variance de Y . Le troisième et le quatrième cumulant de Y sont respectivement la *skewness* et la *kurtosis* de Y .

REMARQUE : Soit la fonction caractéristique de Y

$$\varphi_Y(\theta) = E[e^{i\theta Y}]$$

où $\theta \in \mathbb{R}$, $i = \sqrt{-1}$. Si $\varphi_Y \in C^\infty(\mathbb{R})$ alors tous les cumulants existent et la *f.g.c* peut être réécrite comme combili des cumulants

$$K_Y(\theta) = \sum_{i \geq 1} \frac{\theta^i}{i!} \kappa_i$$

Considérons n variables indépendantes Y_1, Y_2, \dots, Y_n dont les *f.g.c.* sont K_{Y_1}, \dots, K_{Y_n} . Alors $X = \sum_{i=1}^n a_i Y_i$, $\forall i = 1..n : a_i \in \mathbb{R}$, a la *f.g.c*

$$K_X(\theta) = \log M_X(\theta) = \log \prod_{i=1}^n M_{Y_i}(a_i \theta) = \sum_{i=1}^n K_{Y_i}(a_i \theta)$$

On obtient donc une propriété importante des cumulants : *le ième cumulant de la somme de v.a. indépendantes est la somme des ièmes cumulants de ces variables.*

B.2.2 Approximation de la distribution de X.

L'approximation du point de selle repose sur la *formule de Lugannani-Rice*. Dans le cadre de cet exposé, nous ne détaillerons pas la construction de cette approximation. Pour un développement complet et les preuves, nous renvoyons le lecteur à l'article de Ronchetti (1995), à l'ouvrage de Jensen (1995) et à l'article de Penev (1996).

Soit Y_1, \dots, Y_n des v.a. iid de distribution F_Y et

$$X = \sum_{i=1}^n Y_i \quad (\text{B.1})$$

de fonction génératrice des cumulants

$$K_X = \sum_{i=1}^n K_{Y_i}$$

L'approximation du point de selle de la distribution de X est donnée par :

$$P(X \leq x) = \Phi(r) - \phi(r) \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{r} \right) + \phi(r) \mathcal{O} \left(n^{-\frac{3}{2}} \right) \quad (\text{B.2})$$

où Φ est la distribution de la gaussienne $N(0,1)$ et ϕ sa fonction de densité¹. Si on note $K_X^{(1)}$ et $K_X^{(2)}$ la dérivée première et la dérivée seconde la fonction génératrice des cumulants de X, r et s sont définis comme :

$$r = \text{sign}(\alpha_x) \sqrt{\left(2n \left[\frac{\alpha_x x}{\sqrt{n}} - K_X(\alpha_x) \right] \right)}$$

$$s = \alpha_x \sqrt{\left(n K_X^{(2)}(\pi \alpha_x) \right)}$$

et où α_x est le *point de selle* défini comme la solution de

$$K_X^{(1)}(\alpha) = \frac{x}{\sqrt{n}}$$

Un algorithme calculant une approximation de la valeur du point de selle α_x est présentée dans Penev(1996).

La méthode du point de selle (B.2) ne permet pas de calculer directement le quantile des variations de la valeur d'un portefeuille $\Delta_T V$ sur un horizon de temps $\Delta t = T$ à partir de variations $\Delta_{t_0} V$ de la valeur de ce portefeuille

¹Pour rappel $\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$ avec $z \in (-\infty, +\infty)$ et $\Phi(a) = \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$

sur un intervalle de temps t_0 plus petit tel que $T = nt_0$. En effet les variations de valeur d'un portefeuille ne sont clairement pas iid. Une solution est de considérer *en première approximation* que les taux de rendement r réalisés sur des intervalles de temps t_0 ($T = nt_0$ et $r = \log(V_{t+t_0}/V_t)$) forment une suite iid². On ajuste alors une lois, dont la fonction génératrice des moments est connue, aux taux de rendement r observés sur des intervalles de temps t_0 . nous disposons ainsi de la fonction génératrice des cumulants de r et par conséquent de la fonction génératrice des cumulants du taux de rendement $\mathcal{R} = \sum_{i=1}^n r_i$ correspondant à un intervalle de temps T .

Soit $\mathcal{R}^{(\alpha)}$ l'alpha quantile de \mathcal{R} obtenu par la méthode du point de selle, l'alpha quantile des P&L sur l'intervalle de temps T est

$$P\&L^{(\alpha)} = V_0 e^{\mathcal{R}^{(\alpha)}} - V_0$$

L'approximation du point de selle (B.2) donne une erreur relative en $O(n^{-\frac{3}{2}})$ sur la valeur $F_X(x)$ du quantile de X . Où n représente le nombre de réalisations. La précision de l'approximation du point de selle n'est donc garantie très précise que si n est grand. Il est essentiel de voir que si on ajuste à \mathcal{R} une loi dont on connaît la fonction génératrice des cumulants. Et qu'on utilise cette *fgc* dans l'approximation du point de selle, l'approximation de l'alpha quantile de \mathcal{R} obtenue est potentiellement très imprécise. En effet, dans ce cas, l'erreur dans (B.2) est en $\mathcal{O}(1)$.

Par conséquent, pour garantir la précision de l'approximation de $P\&L^{(\alpha)}$, il faudra modéliser \mathcal{R} comme une somme *aussi grande que possible* de rendements r . C'est-à-dire considérer un intervalle de temps t_0 suffisamment petit pour que n soit grand. Mais, également, suffisamment grand pour que les réalisations successives du taux de rendement r puissent être considérées comme indépendantes. Pratiquement, on ne pourra garantir une précision élevée de l'approximation du point de selle que si l'horizon de risque T est lointain.

La méthode du point de selle présente deux faiblesses irréductibles :

- Les réalisations successives du taux rendements ne sont pas indépendantes. Par conséquent, l'utilisation de la méthode du point de selle n'est justifiée que si on accepte une approximation qui va à l'encontre des résultats des études empiriques.
- L'horizon de risque doit être lointain pour que la précision de l'approximation du point de selle soit *garantie* élevée. Or dans l'industrie financière, la VaR d'un produit est calculée souvent à l'horizon de dix

² Nous savons que tel n'est pas le cas. Les taux de rendements suivent une évolution "en cluster".

jours.

Il est capital de garder à l'esprit ces deux faiblesses importantes, si on désire estimer une VaR par l'approximation du point de selle.

Enfin, pour conclure cette introduction à la méthode du point de selle, un dernier commentaire sur la modélisation du taux de rendement r . En pratique, on adopte une approche paramétrique pour modéliser la distribution de r . On ajuste à l'historique des observations du taux de rendement r une distribution dont la *fgm* est connue. Toutefois cette distribution n'est pas nécessairement celle décrit le mieux r .

Certains auteurs, présentent des extensions non paramétriques de la méthode du point de selle qui pourraient fournir de meilleures approximations de la distribution et de la *fgm* de r . Elles remplacent la fonction de distribution F_Y dans (B.1) par la fonction de distribution empirique \hat{F}_Y . Ces extensions dépassent le cadre de ce mémoire. Pour plus de détail, nous renvoyons à l'article de Gatto et Ronchetti : *General Saddlepoint Approximations of marginal Densities and tail Probabilities*³.

B.3 L'inversion de Fourier.

La *fonction caractéristique* d'une variable aléatoire X à valeurs réelles est la transformée de Fourier de la densité de probabilité de X . Elle se note

$$\phi_X(\theta) = E[e^{i\theta X}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\theta x} f_X(x) dx \quad , \quad \theta \in \mathfrak{R}$$

B.3.1 Evaluation d'une fonction de distribution par inversion de Fourier.

Un résultat bien connu est la formule d'inversion de Fourier :

Théorème 9 (Formule d'inversion) *Soit $\phi_X \in L^1(\mathfrak{R})$ ⁴ la fonction caractéristique de la distribution F_X alors F_X a une densité f_x continue donnée par*

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\theta x} \phi_X(\theta) d\theta \right) \quad (\text{B.3})$$

³Journal of American Statistical Association, n. 91, 1996

⁴ C'est-à-dire $\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi_X(\theta)| d\theta$ existe et est finie. On dira que ϕ_X est *absolument intégrable*.

c'est-à-dire

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} [\cos(\theta x) \operatorname{Re}(\phi_X)(\theta) + \sin(\theta x) \operatorname{Im}(\phi_X)(\theta)] d\theta \quad (\text{B.4})$$

Preuve Cfr. Feller(1971),pp 509

□

De la formule d'inversion de Fourier on peut dériver⁵ une formule d'inversion qui fournit la fonction de distribution d'une v.a. à partir de sa fonction caractéristique.

Théorème 10 (Formule d'inversion pour les distributions) *Soit $\phi_X \in L^1(\mathfrak{R})$, la fonction caractéristique de la distribution F_X et soit $p > 0$ arbitraire mais fixé, alors*

$$F_X(x+p) - F_X(x-p) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\theta x} \phi_X(\theta) \frac{\sin(\theta p)}{\theta} d\theta \right)$$

quand l'intégrande est intégrable.

Preuve

Soit U une v.a. de loi uniforme définie sur l'intervalle $[-p, p]$ et X une v.a. à valeurs réelles de distribution F_X . Prenons U et X indépendantes. La fonction caractéristique de U est $\phi_U(\theta) = \sin(\theta p)/(\theta p)$ ⁶. Définissons une v.a. $Z = U + X$. La fonction caractéristique de Z est $\phi_Z(\theta) = \phi_U(\theta)\phi_X(\theta)$, $\forall \theta \in \mathfrak{R}$ ⁷. Par conséquent, la densité de Z est

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\theta z} \phi_Z(\theta) d\theta \right)$$

c'est-à-dire

$$f_Z(x+u) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\theta(x+u)} \phi_X(\theta) \frac{\sin(\theta p)}{\theta p} d\theta \right)$$

Si $X = x$ fixé alors $F_Z(x+p) - F_Z(x-p) = 2p \cdot f_X(x)$.

De plus, si $U = 0$ alors $Z = X$ et $f_Z(x) = f_X(x)$ et $F_Z(x) = F_X(x)$. Donc

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\theta x} \phi_X(\theta) \frac{\sin(\theta p)}{\theta p} d\theta \right)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{F_X(x+p) - F_X(x-p)}{2p} &= \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\theta x} \phi_X(\theta) \frac{\sin(\theta p)}{\theta p} d\theta \right) \\ F_X(x+p) - F_X(x-p) &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\theta x} \phi_X(\theta) \frac{\sin(\theta p)}{\theta} d\theta \right) \end{aligned}$$

⁵Feller(1971), chapitre XV, p510

⁶la fonction caractéristique d'une loi uniforme $U_{[a,b]}$ est $\phi_U(\theta) = \frac{1}{b-a} \frac{e^{ib\theta} - e^{ia\theta}}{i\theta}$ ($\theta \neq 0$), $\phi_U(0) = 1$

⁷Feller(1971), chapitre XV, lemme 2.

□

Pour calculer la distribution F_X en x , il est pratique d'écrire la formule d'inversion précédente sous la forme

Théorème 11 (Formule d'inversion pour les distributions) *Soit $\phi_X \in L^1(\mathbb{R})$, la fonction caractéristique de la distribution F_X et soit $p > 0$ arbitraire mais fixé, alors*

$$F_X(x) - F_X(x - h) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\cos(\theta(x - \frac{h}{2})) \operatorname{Re} \phi_X(\theta) + \sin(\theta(x - \frac{h}{2})) \operatorname{Im} \phi_X(\theta) \right) \frac{\sin(\frac{\theta h}{2})}{\theta} d\theta \quad (\text{B.5})$$

Preuve

Il suffit de substituer $p \leftarrow h/2$ et $x \leftarrow y - h/2$ dans la première version de la formule d'inversion pour les distributions. On obtient alors

$$F_X(y) - F_X(y - h) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\theta(y - \frac{h}{2})} \phi_X(\theta) \frac{\sin(\frac{\theta h}{2})}{\theta} d\theta \right)$$

et de manière équivalente

$$F_X(y) - F_X(y - h) = \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re} \left(e^{-i\theta(y - \frac{h}{2})} \phi_X(\theta) \right) \frac{\sin(\frac{\theta h}{2})}{\pi \theta} d\theta$$

Et on calcule explicitement la partie réelle

$$\operatorname{Re} \left(e^{-i\theta(y - \frac{h}{2})} \phi_X(\theta) \right) = \cos(\theta(y - \frac{h}{2})) \operatorname{Re}(\phi_X(\theta)) + \sin(\theta(y - \frac{h}{2})) \operatorname{Im}(\phi_X(\theta))$$

□

Pour calculer $F_X(x)$, il suffira de prendre un p suffisamment grand pour que $F_X(x - h) = 10^{-4} \simeq 0$. Par l'inégalité de Chebyshev⁸, nous avons

$$P(|X - x| > h) \leq \frac{E[|X - x|]}{h}, \quad h > 0$$

par conséquent,

$$P(X - x < -h) \leq \frac{E[|X - x|]}{h}$$

$$P(X < x - h) \leq \frac{E[|X - x|]}{h}$$

⁸INÉGALITÉ DE CHEBYSHEV : Soit X une v.a. à valeurs réelles telle que la quantité $E(|X|^r)$ existe et est finie pour $r \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $\delta > 0$, et pour toute valeur de c , on montre que : $P(|X - c| > \delta) \leq \frac{E(|X - c|^r)}{\delta^r}$

Si X a une distribution continue, nous pouvons donc écrire

$$F_X(y - h) \leq \frac{E[|X - x|]}{h}$$

Aussi, pour garantir $F_X(x - h) \leq 10^{-4}$, il suffira de prendre $h = 10^4 \cdot E(|X - x|)$. Nous approximerons $E[|X - x|]$ par la moyenne empirique calculée sur des simulations de $|X - x|$. Il importe de remarquer que h dépend directement de la valeur x en laquelle on veut évaluer la distribution. On notera donc h_x .

Nous présentons maintenant l'évaluation numérique de l'intégrale du membre de gauche de la formule d'inversion pour les distributions.

B.3.2 Intégration numérique par quadrature de Gauss-Legendre.

Plusieurs méthodes d'intégration sont possibles. Nous utiliserons ici une méthode particulière appelée *quadrature de Gauss-Legendre*. Cette méthode approxime une intégrale sur $[-1, 1]$ d'une fonction $g : (-1, 1) \rightarrow \mathfrak{R}$ par une combili de valeurs de la fonction g en un nombre fini d'abscisses spécifiques appelées *abscisses de Gauss*.

$$\int_{-1}^1 g(x)dx = \sum_{i=1}^n w_i g(x_i) + err(n, g) \quad x_i \in [-1, 1] \quad (\text{B.6})$$

Les abscisses de Gauss x_i ($i = 1..n$) sont les racines du *polynôme de Legendre*⁹ dont l'expression est $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$ sur $[-1, 1]$. Les racines x_i sont distinctes et $-1 < x_1 < x_2 < .. < x_n < 1$. Ces racines sont symétriques par rapport à zéro et si n est impair $x_{\frac{(n-1)}{2}+1} = 0$. Si par contre n est pair, $x=0$ n'est pas racine de P_n . Soit $n \geq 2$, les x_i peuvent être obtenus en appliquant $O(n)$ fois la *méthode de Newton-Raphson* au polynôme P_n sur $(-1, 1)$ comme décrit dans l'algorithme suivant.

Algorithme-Calcul des abscisses de Gauss :

Soit n pair(respectivement impair),

1. $q \leftarrow P_n$
2. POUR TOUT $i = n..(\frac{n}{2} + 1)$ (respectivement $\frac{n+1}{2} + 1$) FAIRE :
3. $x^k \leftarrow x_0(i) \doteq \cos\left(\pi \frac{i-\frac{1}{2}}{n+\frac{1}{2}}\right)$

$x^0(i)$ constitue une bonne approximation du i -ième zéro x_i de P_n dans $[-1, 1]$.

4. $x^{k+1} \leftarrow$ valeur quelconque $\gg x^k$.

5. TANT QUE $|x^{k+1} - x^k| > \varepsilon^{tolerance}$ ALORS :

⁹Murray R. Spiegel, Formules et tables de mathématiques, Série Schaum,1974, pp146

6. $x^k \leftarrow x^{k+1}$
7. $x^{k+1} \leftarrow x^k - \frac{q(x^k)}{q^{(1)}(x^k)}$
8. FIN{TANT QUE}
9. $x_i \leftarrow x^{k+1}$
10. $q \leftarrow \frac{q}{(x-x_i)}$
11. FIN{POUR TOUT i }

Pour $n=2$, les racines du polynôme de Legendre sont $-1/\sqrt{3}$ et $1/\sqrt{3}$.

On dispose à ce stade des $n/2$ (respectivement $(n-1)/2$) racines positives $x_i \in (0, 1)$. Les racines négatives $\in (-1, 0)$ sont simplement les opposées des racines positives.

Théorème 12 *Si $n \geq 2$, l'algorithme de calcul des abscisses de Gauss ci-dessus donne toutes les racines positives du polynôme de Legendre P_n auquel il est appliqué.*

Preuve

(i) Commençons par montrer que pour tout polynôme q_n de degré $n \geq 2$ avec des coefficients réels et n zéros réels distincts : si x_n est le plus grand zéro de q_n et si $x^k > x_n$ alors $q_n(x^k)q_n^{(2)}(x^k) > 0$. En effet, il suffit de voir que si q_n a n zéros distincts alors $q_n^{(1)}$ a $(n-1)$ zéros distincts et $q_n^{(2)}$ a $(n-1)$ zéros distincts. Et de plus le dernier zéros de $q_n^{(2)}$ est inférieur au dernier zéro de $q_n^{(1)}$. Lui-même inférieur au dernier zéro de q_n .

(ii) La méthode de Newton lancée en $x^k > x_n$ converge vers x_n . En effet, par (i) on obtient $q_n(x^k)q_n^{(1)}(x^k) > 0$ et également $q_n^{(1)}(x^k) \neq 0$. Donc, si on note $\epsilon_k = x^k - x_n$, on vérifie que $\epsilon_k \geq \frac{q_n(x^k)}{q_n^{(1)}(x^k)} \geq 0$ et donc $|\epsilon_{k+1}| = |\epsilon_k - \frac{q_n(x^k)}{q_n^{(1)}(x^k)}| \leq |\epsilon_k|$. Par conséquent, la méthode de Newton-Raphson converge vers x_n la plus grande racine de q_n .

(iii) Pour calculer la seconde plus grande racine x_{n-1} de q on remarque que x_{n-1} est elle-même la plus grande racine du polynôme $q_{n-1} = \frac{q_n}{(x-x_n)}$. Il suffit donc d'appliquer les étapes (i) et (ii) pour montrer que Newton-Raphson appliqué à q_{n-1} converge vers x_{n-1} . Par récurrence, on voit que l'algorithme fournira également $x_{n-3}, \dots, x_{(n/2)+1}$ (ou $x_{((n+1)/2)+1}$ si n est impair)

□

Une fois les abscisses de Gauss connues, les poids w_i correspondant aux x_i sont donnés par ¹⁰.

$$w_i = \frac{2}{(1-x_i^2) \left(\frac{\partial P_n}{\partial x}(x_i) \right)^2}$$

¹⁰ Formule (4.7-11) de Anthony Ralston [62]

par conséquent comme¹¹ $(1 - x^2)P_n^{(1)}(x) = nP_{n-1}(x) - nxP_n(x)$, on a également

$$w_i = \frac{2(1 - x_i)}{(nP_{n-1}(x) - nxP_n(x))^2} \quad (\text{B.7})$$

Où les termes $P_n(x_i)$ et $P_{n-1}(x_i)$ sont calculés en utilisant la récurrence ¹²

$$P_0 = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_n(x) = \frac{(2n-1)}{n}P_{n-1}(x) + \frac{(n-1)}{n}P_{n-2}(x), \quad n \geq 2$$

Une autre possibilité pour calculer les poids w_i est de les exprimer en fonction des fonctions de Legendre. Les fonctions de Legendre se définissent comme

$$L_n(x) = -\sqrt{1-x^2} \frac{\partial P_n}{\partial x}(x)$$

Nous pouvons donc écrire

$$w_i = \frac{2}{(L_n(x_i))^2}$$

Il existe des routines matlab qui implémentent le calcul des fonctions de Legendre.

Généralisation à un intervalle quelconque.

Soit $[a, b]$ un intervalle quelconque, on recherche à approximer l'intégrale

$$I = \int_a^b g(\theta) d\theta \quad (\text{B.8})$$

Si on effectue le changement de variables $\theta = x \frac{(b-a)}{2} + \frac{(b+a)}{2}$ on voit qu'on retrouve une intégrale sur $[-1, 1]$:

$$I = \frac{(b-a)}{2} \int_{-1}^1 g\left(x \frac{(b-a)}{2} + \frac{(b+a)}{2}\right) dx$$

Par conséquent, une intégrale sur un intervalle $[a, b]$ peut être évaluée par

$$I = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n w_i g\left(x_i \frac{(b-a)}{2} + \frac{(b+a)}{2}\right) + err(n, g) \quad x_i \in [a, b] \quad (\text{B.9})$$

La précision err de la quadrature de Gauss dépend du nombre n d'abscisses x_i et de la nature de l'intégrande g .

¹¹Formule (25.24) de Murray R. Spiegel [72]

¹²Simple application de la formule (25.20) de Murray R. Spiegel [72]

Calcul des bornes d'intégration a et b .

La formule d'inversion de distribution implique une intégrale sur $(-\infty, +\infty)$. Pour calculer numériquement cette intégrale, il est nécessaire de passer de ce domaine d'intégration infini à un domaine d'intégration $[a, b]$ borné. Nous allons déterminer ces bornes par la méthode suivante. La fonction de densité tend vers zéro quand la variable tend vers l'infini négatif ou l'infini positif. On va donc segmenter l'intégrale en deux :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = \int_{-\infty}^0 g(x) dx + \int_0^{+\infty} g(x) dx$$

Ensuite, pour chaque partie, on cherche les bornes au-delà desquelles il y a une très faible densité. C'est-à-dire

$$\int_{5a}^a g(x) dx \lll \int_a^0 g(x) dx$$

et

$$\int_b^{5b} g(x) dx \lll \int_0^b g(x) dx$$

L'intégrale se réécrit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx - \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n w_i g(x_i) \frac{(b-a)}{2} + \frac{(b+a)}{2} = \quad (\text{B.10})$$

$$= \text{err}(n, g, (a, b)) + \int_{-\infty}^a g(x) dx + \int_b^{+\infty} g(x) dx \quad (\text{B.11})$$

$$= \text{err}(n, g, (a, b)) + \int_{5a}^a g(x) dx + \int_b^{5b} g(x) dx + \epsilon \quad (\text{B.12})$$

Où ϵ est un terme d'erreur pour lequel on ne dispose pas de borne.

Calcul du nombre d'abscisses de Gauss.

Nous intégrons g sur l'intervalle $[a, b]$ dont l'intérieur (a, b) ne contient aucune singularité de g . Soit $\text{err}(g, a, b, n) = |I - T(g, a, b, n)|$ l'erreur d'intégration que nous noterons dorénavant simplement $\text{err}(n)$. L'erreur d'intégration de la quadrature de Gauss-Legendre B.9 à n abscisses sur $[a, b]$ est¹³

$$\text{err}(n) \leq \left(\frac{b-a}{2}\right)^{2n+1} \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} f^{(2n)} \text{sup}\{|g^{(2n)}(\theta)| : \theta \in (a, b)\} \quad (\text{B.13})$$

¹³Ralson (1965)

Pour déterminer le n minimal correspondant à une erreur d'intégration donnée à partir de cette borne, il faudra d'une part réaliser le calcul compliqué de dérivées de haut degré de g et d'autre part résoudre une équation non linéaire.

Pour éviter ces difficultés, nous allons réaliser une *quadrature de Gauss-Legendre composée*¹⁴. La quadrature de Gauss-Legendre composée consiste à faire une subdivision $\{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$ de $[a, b]$ avec $x_i = a + i \frac{b-a}{n}$ et appliquer une quadrature de Gauss-Legendre simple sur chaque intervalle $[x_{i-1}, x_i]$. La quadrature composée est caractérisée par deux entiers : n le nombre de sous-intervalles de $[x_{i-1}, x_i]$ et p le nombre d'abscisses de Gauss utilisées dans chaque quadrature simple.

Pour une quadrature de Gauss-Legendre composée avec $p = 2$, on dispose de la borne suivante

$$err(n) \leq \frac{(b-a)^5}{4320.n^4} \sup\{|g^{(4)}(\theta)| : a < \theta < b\} \quad (B.14)$$

Par conséquent, si la dérivée quatrième de g est bornée sur l'intervalle d'intégration, alors l'erreur d'intégration sera d'autant plus petite que le n est grand.

Pour obtenir une erreur d'intégration maximale ε sur l'intégrale réelle, on prendra au minimum

$$n = \left\lceil \left(\frac{(b-a)^5}{4320.\varepsilon} \sup\{|g^{(4)}(\theta)| : a < \theta < b\} \right)^{1/4} \right\rceil + 1$$

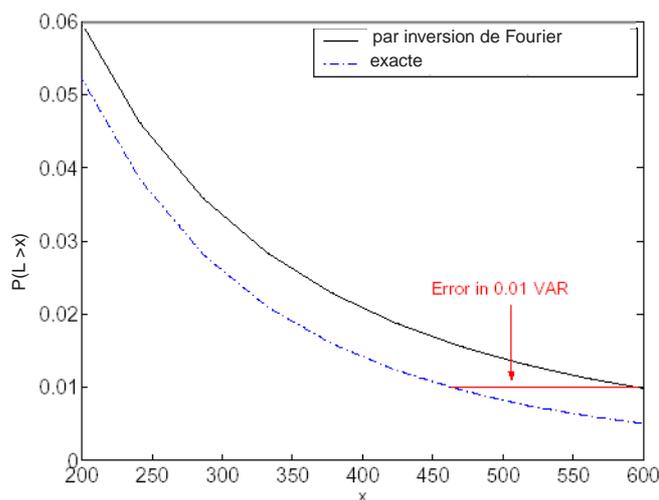
Conclusions sur l'utilisation de l'inversion de Fourier pour le calcul de l' α -quantile.

Une approche qui calcule l' α -quantile en se basant sur l'inversion de Fourier et la quadrature de Gauss-Legendre composée est rapide. Toutefois, bien que l'erreur entre la valeur de la fonction de distribution en un point et l'estimée de cette valeur soit faible, elle suffit pour provoquer une erreur importante dans l'estimation du quantile. Ce fait est visualisable sur le graphique [Fig. B.1] suivant.

En fait, deux points posent fondamentalement problème dans cette approche. D'une part, l'inversion de Fourier (B.5) n'est applicable que si la fonction caractéristique est *absolument intégrable*. Ensuite, il est impossible de réduire l'erreur systématique ϵ^{15} introduite dans l'estimée de l'intégrale (B.12) lors de l'approximation de l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ par un intervalle borné $[a, b]$ dans la quadrature de Gauss-Legendre.

¹⁴Ralston(1965), pp113.

¹⁵Cfr. (B.12).

FIG. B.1 – Calcul de $VaR_{0.01}(L_t)$ par inversion de Fourier.

B.4 Méthodes de Monte-Carlo.

Les *méthodes de Monte Carlo* sont les méthodes numériques basées sur le tirage de nombres aléatoires¹⁶. Elles sont capables d'approximer avec une très grande précision toute intégrale qui peut être mise sous forme d'*espérance d'une v.a.*. Et la précision de l'approximation peut être précisée à priori.

L'étape clef dans une procédure itérative de recherche d'un quantile est l'évaluation de la fonction de distribution. La clef de l'avantage de la méthode de Monte-Carlo est que, contrairement à la quadrature de Gauss-Legendre, elle n'induit pas une erreur systématique dans le calcul de l'intégrale qui évalue la fonction de la distribution.

¹⁶Les rappels de cette section sont tirés de *Fishman, Monte Carlo : concepts, algorithms, and applications, Springer Verlag, 1996* et de *William C. Cochran, Sampling techniques, John Wiley and Sons, 1992*.

B.4.1 Approximation d'intégrale par la méthode de Monte-Carlo.

Soit

$$I = \int_D g(x)f(x) dx \quad (\text{B.15})$$

où $f(x) \geq 0$ et $\int_D f(x) dx = 1$. La méthode de Monte-Carlo pour le calcul d'intégrale consiste tout d'abord à réécrire l'intégrale I sous la forme d'une espérance

$$I = E[g(X)]$$

où X est une variable aléatoire de densité f et à valeur dans D . Et ensuite à approximer cette espérance par

$$\hat{I}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i) \quad (\text{B.16})$$

Si la v.a. $g(X)$ est intégrable, c'est-à-dire $E[|g(X)|] < +\infty$, la convergence de \hat{I}_n vers I est garantie par la loi forte des grands nombres¹⁷.

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i) \xrightarrow{p.s.} E[g(X)]$$

Il est possible de contrôler la précision du résultat obtenu. D'après le théorème central limite, si $\sigma^2 = \text{var}(g(X))$ alors

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma} [\hat{I}_n - I] \xrightarrow{D} N(0, 1)$$

Par conséquent, pour n suffisamment grand, l'écart

$$\epsilon_n = \hat{I}_n - I$$

satisfait

$$\epsilon_n \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

et

$$\text{var} \hat{I} = \frac{\sigma^2}{n}$$

L'intervalle de confiance asymptotique pour $E[g(X)]$ au niveau 0.95 est

$$\left[\hat{I}_n - \sigma \frac{1,96}{\sqrt{n}}, \hat{I}_n + \sigma \frac{1,96}{\sqrt{n}} \right]$$

¹⁷ Cfr. annexe H pour un rappel de ce théorème.

Calcul d'un quantile des P&L d'un portefeuille.

Si X représente les P&L du portefeuille et $g(X) = I(X \leq x_0)$ sur $D = (-\infty, +\infty)$, l'intégrale I (B.15) est la valeur de la distribution des P&L en x_0 . Et son estimation \hat{I}_n (B.16) est évaluée en simulant n occurrences iid X_i . Chacune des réalisations x_i est obtenue en réalisant une simulation conjointe des rendements des actifs sous-jacents qui tient compte de leur interdépendance.

Contrôle de la convergence.

Plus la variance de l'estimateur \hat{I} est faible et plus l'intervalle de confiance centré sur l'estimateur sera petit. De plus, pour un même intervalle de confiance, le nombre n de réalisations nécessaires est d'autant plus petit que la variance de $g(X)$ est faible.

La vitesse de convergence des méthodes de Monte Carlo est inversement proportionnelle à la variance de l'estimateur. La convergence est souvent très lente. Pour l'accélérer, il est nécessaire de réduire $var(\hat{I})$ c'est-à-dire de réduire la variance $var(g(X))$.

B.4.2 Techniques de réduction de variance.

"It is unworthy of excellent men to lose hours, like slaves, in the labors of calculation"

- GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ-

Les techniques de réduction de variance cherchent à construire un estimateur \hat{I} qui converge plus rapidement vers I , c'est-à-dire un estimateur dont la variance est plus faible que $\frac{var(g(X))}{n}$ pour n fixé. L'idée est de trouver une autre représentation sous forme d'espérance de l'intégrale à calculer :

$$E(g(X)) = E(h(Y))$$

Nous nous limitons à présenter les méthodes de réduction de variance implémentées dans les chapitres suivants.

Echantillonnage préférentiel.

Posons pour fixer les idées $D = R^p$. Nous cherchons à calculer

$$I = E[g(X)] = \int_{R^p} g(x)f(x) dx$$

où X a la densité f . Soit \tilde{f} la densité d'une autre loi telle que $\tilde{f} > 0$ et $\int_{R^p} \tilde{f}(x) dx = 1$. On peut écrire

$$E[g(X)] = \int_{R^p} \frac{g(x)f(x)}{\tilde{f}(x)} \tilde{f}(x) dx$$

$$E[g(X)] = E\left[\frac{g(Y)f(Y)}{\tilde{f}(Y)}\right]$$

Où Y suit la loi de densité \tilde{f} .

Si on pose $h(y) = \frac{g(Y)f(Y)}{\tilde{f}(Y)}$, I se réécrit

$$I = E[h(Y)]$$

On a donc une autre méthode de calcul de I . Cette méthode aura une vitesse de convergence meilleure que la première si $var(h(Y)) \leq var(g(X))$.

$$var(h(Y)) = E[h^2(Y)] - E[h(Y)]^2 = \int_{R^p} \frac{g^2(x)f^2(x)}{\tilde{f}(x)} dx - E[g(X)]^2.$$

Nous voyons si $E[g(X)]$ était connue et si $g(X) > 0$, alors en prenant $\tilde{f}(x) = \frac{g(x)f(x)}{E[g(X)]}$ on annulerait $var(h(Y))$. Cette remarque conduit à l'heuristique suivante pour le choix de \tilde{f} : prendre \tilde{f} aussi proche que possible de $|g(X)f(X)|$ puis la diviser par $\int_{R^p} \tilde{f}(x) dx$.

Stratification.

Nous cherchons à calculer

$$I = E[g(X)] = \int_{R^p} g(x)f(x) dx$$

où X a la densité f . On se donne une partition $(D_i, 1 \leq i \leq m)$ de R^p . On décompose alors l'intégrale I comme suit

$$I = \sum_{i=1}^m E(Ind_{\{X \in D_i\}} g(X)) = \sum_{i=1}^m E(g(X)|X \in D_i) P(X \in D_i)$$

Lorsqu'on connaît les valeurs $p_i = P(X \in D_i)$, on peut utiliser une méthode de Monte-Carlo pour estimer les intégrales $I_i = E[g(X)|X \in D_i]$. Supposons qu'on approxime l'intégrale I_i par \tilde{I}_i à l'aide de n_i tirages indépendants, la variance de l'erreur d'approximation $\epsilon_{n_i} = I_i - \tilde{I}_i$ est donnée par $\frac{\sigma_i^2}{n_i}$ où $\sigma_i^2 = var(g(X)|X \in D_i)$. On approxime ensuite I par \tilde{I}

$$\tilde{I} = \sum_{i=1}^m p_i \tilde{I}_i$$

Les échantillons servant à obtenir les estimateurs \tilde{I}_i sont pris indépendants. Par conséquent

$$\text{var}(\tilde{I}) = \sum_{i=1}^m p_i^2 \frac{\sigma_i^2}{n_i}$$

Pour un nombre total de tirages n fixé, les n_i qui minimisent la variance de \tilde{I} sont donnés par :

$$n_i = n \frac{p_i \sigma_i}{\sum_{i=1}^m p_i \sigma_i}$$

La variance de \tilde{I} vaut alors

$$\text{var}(\tilde{I}) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^m p_i \sigma_i \right)^2$$

elle est inférieure à la variance de $g(X)$ obtenue par Monte-Carlo standard. En effet :

$$\text{var}(g(X)) = E[g(X)^2] - E[g(X)]^2$$

$$\text{var}(g(X)) = \sum_{i=1}^m p_i E[g^2(X)|X \in D_i] - \left(\sum_{i=1}^m p_i E[g(X)|X \in D_i] \right)^2$$

Donc par définition de σ_i

$$\text{var}(g(X)) = \sum_{i=1}^m p_i \text{var}(g(X)|X \in D_i) + \sum_{i=1}^m p_i E[g(X)|X \in D_i]^2 \quad (\text{B.17})$$

$$- \left(\sum_{i=1}^m p_i E[g(X)|X \in D_i] \right)^2 \quad (\text{B.18})$$

Comme $(\sum_{i=1}^m p_i T_i)^2 \leq \sum_{i=1}^m p_i T_i^2$, si $\sum_{i=1}^m p_i = 1$ on a

$$\text{var}(g(X)) \geq \sum_{i=1}^m p_i \text{var}(g(X)|X \in D_i) \geq \left(\sum_{i=1}^m p_i \sigma_i \right)^2$$

Par conséquent, si on choisit correctement les n_i , on peut obtenir par stratification un estimateur de variance moindre. Il faut toutefois remarquer que les σ_i ne sont en général pas calculables analytiquement. Si on veut les estimer, il faut procéder à une simulation de Monte-Carlo.

La méthode d'affectation proportionnelle

La *méthode d'affectation proportionnelle* est une méthode de stratification qui garantit la réduction de la variance sans recourir au calcul des variances conditionnelles σ_i . Elle repose sur une stratégie d'affectation de points

par domaine qui attribue un nombre de points proportionnel à la probabilité du domaine :

$$n_i = np_i$$

On obtient alors un estimateur de variance égale à

$$\text{var}(\tilde{I}_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m p_i \sigma_i^2$$

La variance de cet estimateur est inférieure à la variance de l'estimateur de Monte-Carlo classique. Cette stratégie d'affectation est facile à implémenter si on sait inverser la distribution de X pour obtenir les probabilités p_i .

ALGORITHME : Soit X une v.a. de loi F_X .

1. Pour $i = 1..N$ on pose $p_i = \frac{1}{N}$ et $n_i = np_i$.
2. Pour $i = 1..N$, on calcule $a_i = F^{-1}(p_i)$ et on note $D_i = [a_{i-1}, a_i]$.
Pour calculer ces quantiles a_i on réalise une inversion de Fourier. Bien que moins précise qu'une inversion via Monte-Carlo, l'inversion de Fourier est plus rapide et sa précision suffit pour assurer la qualité de la stratification nécessaire pour la réduction de variance.
3. Simuler des réalisations indépendantes X_j de X à partir de F_X .
4. Soit une réalisation X qui tombe dans la strate D_j . Si D_j contient à ce stade moins de n_j réalisations, alors on ajoute la réalisation X à cette strate. Sinon on jette cette réalisation et on poursuit la simulation. On arrête les simulations quand chaque strate D_i contient n_i réalisations. ¹⁸
5. Calcul de l'estimateur \tilde{I}_n .

B.4.3 Faiblesse et avantage de l'approche par simulation de Monte-Carlo.

Il importe de comprendre que le calcul de l' α -quantile par l'approche basée sur MC présente une faiblesse liée à la calibration des modèles décrivant les facteurs de risque du portefeuille. La méthode de MC requiert de calibrer les modèles des facteurs de risque avec des séries temporelles dont l'intervalle d'échantillonnage égale l'horizon de risque. Par conséquent, si cet horizon est lointain, l'ensemble de données utilisées pour la calibration peut être réduit. Et donc les estimateurs des paramètres des facteurs de risques seront moins précis. Dans la méthode du point de selle, la longueur de l'intervalle d'échantillonnage des données est peut-être pris inférieur à l'horizon de risque. On disposera donc de plus de données que dans l'approche de Monte-Carlo

¹⁸En pratique, dans de nombreux cas, le temps pris par la phase de simulation se révèle insignifiant par rapport au temps total d'évaluation du portefeuille. Voir *Glasserman(2000)*, et en particulier l'analyse de l'efficacité de cette simulation présentée en annexe.

pour estimer les paramètres du modèle pour un même horizon de risque T . Il s'agit également de voir que contrairement à l'approche via la méthode du point de selle, l'approche via la méthode de Monte-Carlo n'est pas basée sur la génération de scénarios de longueur T mais sur la génération de scénarios de longueur un à horizon T .

Excepté cette faiblesse relative, l'approche par Monte-Carlo présente un avantage par rapport à la méthode du point de selle : la méthode de Monte Carlo permet, si le modèle est correctement estimé, d'atteindre une précision très élevée. Elle fournit un intervalle de confiance sur l'estimée du quantile et elle permet théoriquement pour un horizon de risque donné T de réduire autant qu'on le désire la longueur de cet intervalle. Autrement dit, si nous utilisons la méthode de Monte Carlo, nous pouvons parvenir à une erreur absolue ¹⁹ aussi petite que nous le désirons. Ce qui est impossible à réaliser avec la méthode du point de selle. En effet, dans cette dernière, on ne peut réduire l'ordre de l'erreur en dessous de $O(T^{-3/2})$.

¹⁹ Cette "erreur absolue" doit toutefois être comprise comme la demi longueur d'un intervalle de confiance.

Annexe C

Test Chi-carrée.

Le test chi-carré est un test de normalité. Il est basé sur l'observation suivante : Si N v.a. X_i sont des iid de loi v.a. $N(\mu, \sigma^2)$, alors la somme

$$TS = \sum_{i=1}^N \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2}$$

possède une distribution χ_N^2 (chi-carrée à N degrés de liberté).

Le test Chi-carré est réalisé comme suit :
Soit x_i, \dots, x_N un échantillon de réalisations indépendantes d'une v.a. X .

Les hypothèses en concurrence sont :

$H_0 : X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

$H_A : X$ n'est pas une normale $N(\mu, \sigma^2)$.

La règle de décision est :

Si $TS_{\text{observé}} = \sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma^2} > \chi_{N, 1-\alpha}^2$ alors on accepte H_A .

Si $TS_{\text{observé}} \leq \chi_{N, 1-\alpha}^2$ alors on ne rejette pas H_0 .

Où $\chi_{N, 1-\alpha}^2$ est le $(1 - \alpha)$ -quantile de χ_N^2 .

Annexe D

Approximation d'une fonction de densité par lissage à noyaux.

Soit $\{x_1, \dots, x_n\}$ un échantillon de réalisations indépendantes d'une v.a. de fonction de densité univariée, *continue* et inconnue. L'estimateur à noyau de f est défini par

$$\hat{f}_h = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h}\right) \quad (\text{D.1})$$

Où h est un paramètre de lissage appelé *largeur de bande* et K est une fonction de densité symétrique. On appelle K le *noyau*. Ce noyau peut être la fonction de densité gaussienne, student ou toute autre fonction de densité symétrique.

L'estimateur à noyau (D.1) est une somme de n densités centrées en les observations x_i . La largeur de bande h contrôle la dispersion de la densité K autour des x_i . Si h tend vers zéro, \hat{f}_h dégénère en la fonction de densité empirique F_n . Si h est très grand, \hat{f}_h devient une courbe très lissée présentant peu de variations.

Nous représentons dans la figure ci-dessous l'estimation par noyau de la densité d'une v.a. normale $N(10,2)$ pour un échantillon de 20 observations, le paramètre de lissage est mis à 1.08. La vraie fonction de densité de $N(10,2)$ est en "points-trait". L'estimation \hat{f}_h est en trait plein. Les petites "bosses" au pieds de \hat{f}_h sont les noyaux centrés sur les 20 observations x_i et multipliés par $1/20h$.

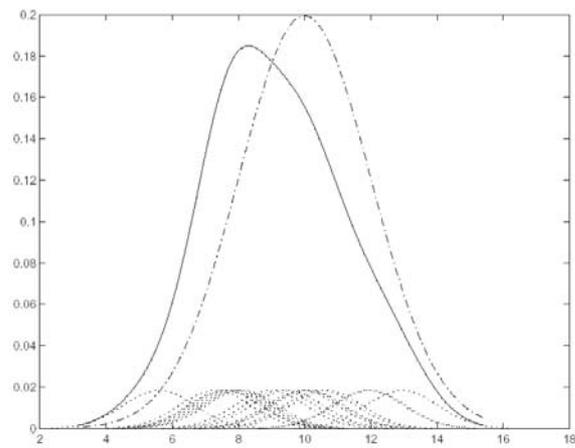


FIG. D.1 – Estimateur à noyau d'une fonction de densité continue. $n=20$, $h=1.08$

Annexe E

Ajustement des modèles de rendement.

E.1 Analyse préliminaire des données.

Fonction d'autocorrélation empirique

Nous donnons ici les fonctions d'autocorrélation et d'autocorrélation empiriques des rendements hebdomadaires $\Delta R_t = \log\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right)$ des cinq actions considérées.

Soit $\Delta R_1, \Delta R_2, \dots, \Delta R_T$ les rendements observés. La *fonction d'autocovariance empirique* est définie comme

$$\hat{r}_h^{\Delta R} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-h} (\Delta R_t - \bar{\Delta R})(\Delta R_{t+h} - \bar{\Delta R}) \quad (\text{E.1})$$

La *fonction d'autocorrélation empirique* (ACF) est définie comme

$$\hat{\rho}_h^{\Delta R} = \frac{\hat{r}_h^{\Delta R}}{\hat{r}_0^{\Delta R}} \quad (\text{E.2})$$

La *fonction d'autocorrélation partielle empirique* (PACF) est, quant à elle, définie comme suit

$$\hat{\zeta}_h^{\Delta R} = \text{corr} \left(\Delta R_t - \sum_{i=1}^{h-1} \hat{\rho}_{t+i}^{\Delta R} \Delta R_{t+i}, \Delta R_{t+h} - \sum_{i=1}^{h-1} \hat{\rho}_{t+i}^{\Delta R} \Delta R_{t+i} \right) \quad (\text{E.3})$$

La fonction d'autocorrélation partielle entre ΔR_t et ΔR_{t+h} est la corrélation entre ΔR_t et ΔR_{t+h} ajustée en enlevant l'information provenant des valeurs intermédiaires $\Delta R_{t+1}, \Delta R_{t+2}, \dots, \Delta R_{t+h-1}$.

Pour une description complète des méthodes permettant d'ajuster un modèle ARMA-GARCH à partir de l'acf et de la pacf, nous renvoyons le

lecteur à l'ouvrage de Brockwell : *Introduction to time Series and Forecasting*, 1996, springer.

Il importe toutefois de rappeler que les définitions (E.1,E.2,E.3) ne sont parfaitement correctes que pour une suite d'observations identiquement distribuées. Or, les rendements successifs ne sont pas identiquement distribués. Par conséquent, les analyses menées à partir de la fonction d'autocorrélation et de la fonction d'autocorrélation partielle constituent simplement une "indication" sur la forme du modèle de rendement.

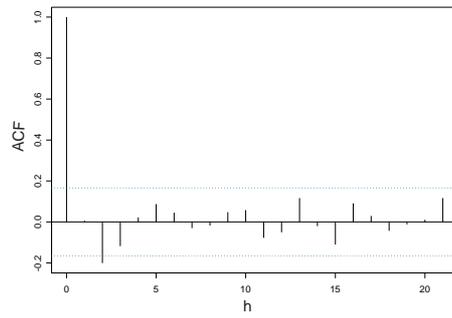


FIG. E.1 – Action Solvay.

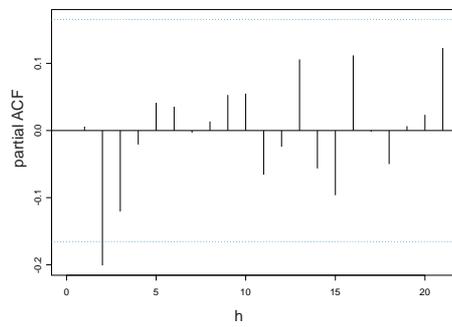


FIG. E.2 – Action Solvay.

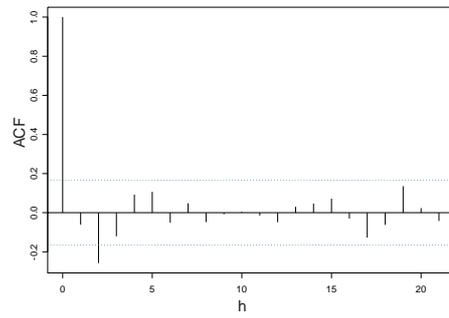


FIG. E.3 – Action Colruyt.

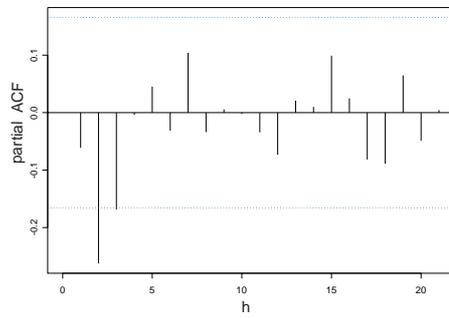


FIG. E.4 – Action Colruyt.

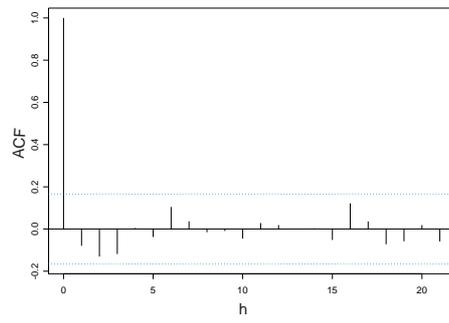


FIG. E.5 – Action Dexia.

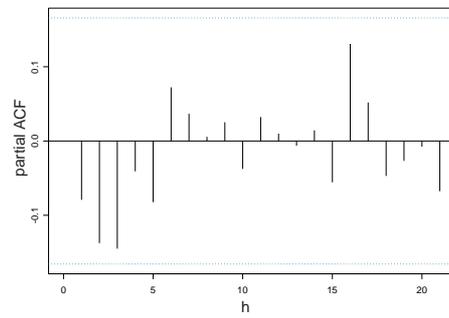


FIG. E.6 – Action Dexia.

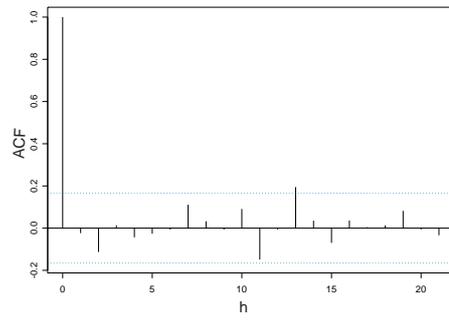


FIG. E.7 – Action Agfa Gevaert.

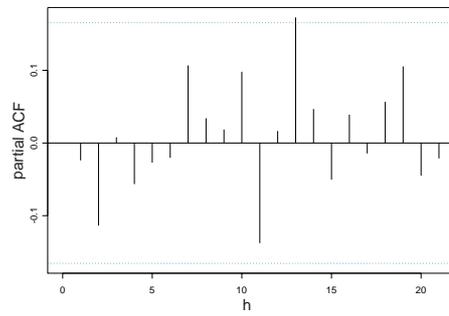


FIG. E.8 – Action Agfa Gevaert.

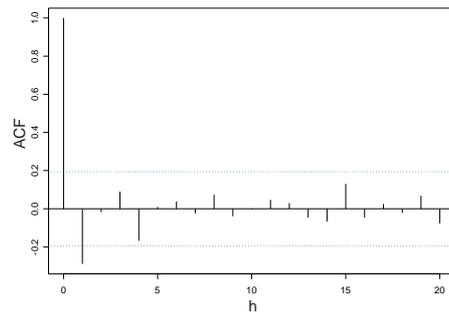


FIG. E.9 – Action Interbrew.

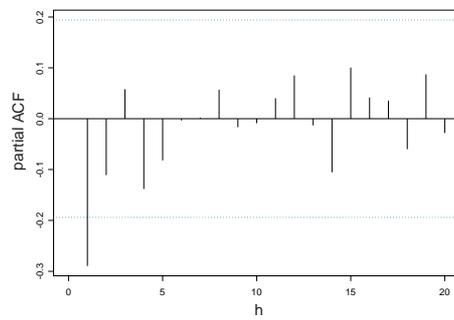


FIG. E.10 – Action Interbrew.

E.2 Ajustement d'un modèle aux données.

Rappelons les notations du modèle de rendement :

$$\Delta R_t = \alpha + \beta_1 \Delta R_{t-1} + \beta_2 \Delta R_{t-2} + \sigma_t \sqrt{\frac{\nu - 2}{\nu}} X_t$$

où

$$X_t \sim t_\nu$$

et

$$\sigma_t^2 = c + a_1 \epsilon_{t-1}^2 + a_2 \epsilon_{t-2}^2 + b_1 \sigma_{t-1}^2 + b_2 \sigma_{t-2}^2$$

A partir des tableaux de résultats suivant, nous décidons d'adopter la modélisation suivante :

Action	Modèle
Solvay	AR(0)-GARCH(1,0)
Colruyt	AR(2)-GARCH(1,1)
Dexia	AR(1)-GARCH(1,1)
Agfa Gevaert	AR(0)-GARCH(1,0)
Interbrew	AR(0)-GARCH(1,0)

Modèle	Solvay				
	α	β_1	β_2	c	a_1
AR(0)-GARCH(1,0)	-0.001792	0	0	0.001018	0.157595
AR(1)-GARCH(1,0)	-0.0016234	0	-0.0155849	0.0009977	0.1715535
AR(1)-GARCH(1,1)	-0.001193	-0.010450	0	0.000512	0.162050
AR(2)-GARCH(1,0)	-0.0011902	-0.0156487	-0.1122464	0.0009596	0.1485789
AR(2)-GARCH(1,1)	-0.0008678	-0.0100680	-0.1047461	0.0005223	0.1361204
AR(2)-GARCH(2,2)	-0.00139777	0.00656462	-0.19714094	0.00008085	0.1541

Modèle	Solvay (suite)					
	a_2	b_1	b_2	ν	AIC	BIC
AR(0)-GARCH(1,0)	0	0	0	5	-553.9776	-542.211
AR(1)-GARCH(1,0)	0	0	0	5	-551.9895	-537.2813
AR(1)-GARCH(1,1)	0	0.412368	0	5	-551.1706	-533.5207
AR(2)-GARCH(1,0)	0	0	0	6	-551.8808	-534.2309
AR(2)-GARCH(1,1)	0	0.4033600	0	6	-550.5858	-529.9943
AR(2)-GARCH(2,2)	-0.03773	1.13642	-0.26348	6	-544.931	-518.4562

Modèle	Solvay (suite)	
	L-Box pour résidus (p-valeur)	L-Box pour résidus au carré (p-valeur)
AR(0)-GARCH(1,0)	0.6238	0.7787
AR(1)-GARCH(1,0)	0.6258	0.781
AR(1)-GARCH(1,1)	0.7105	0.8824
AR(2)-GARCH(1,0)	0.9505	0.9109
AR(2)-GARCH(1,1)	0.9545	0.9323
AR(2)-GARCH(2,2)	0.9907	0.9126

Modèle	Colruyt				
	α	β_1	β_2	c	a_1
AR(1)-GARCH(1,1)	0.00129178	-0.05377828	0	0.00005756	0.08644333
AR(2)-GARCH(1,0)	0.001636	-0.064105	-0.296790	0.014989	1.360014
AR(2)-GARCH(1,1)	0.00215610	-0.08264951	-0.29586084	0.00003645	0.10957811

Modèle	Colruyt (suite)			
	b_1	ν	AIC	BIC
AR(1)-GARCH(1,1)	0.88236526	3	-531.0277	-513.3779
AR(2)-GARCH(1,0)	0	3	-536.5426	-518.8928
AR(2)-GARCH(1,1)	0.88287932	3	-542.7254	-522.1339

Modèle	Colruyt (suite)	
	L-Box pour résidus (p-valeur)	L-Box pour résidus au carré (p-valeur)
AR(1)-GARCH(1,1)	0.2807	0.9997
AR(2)-GARCH(1,0)	0.8594	0.7469
AR(2)-GARCH(1,1)	0.9611	1

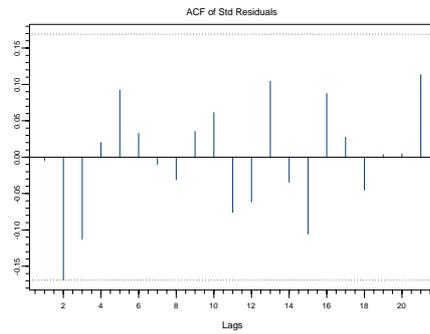


FIG. E.11 – Rendements Solvay, AR(0)-GARCH(1,0)

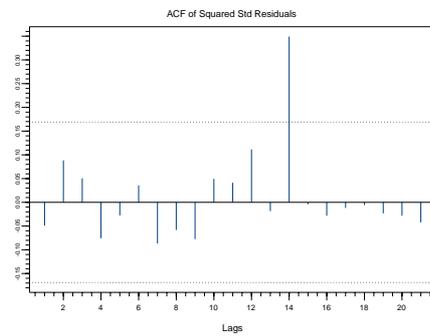


FIG. E.12 – Rendements Solvay, AR(0)-GARCH(1,0)

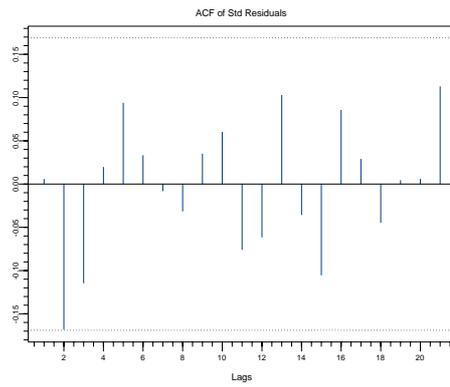


FIG. E.13 – Rendements Solvay, AR(1)-GARCH(1,0)

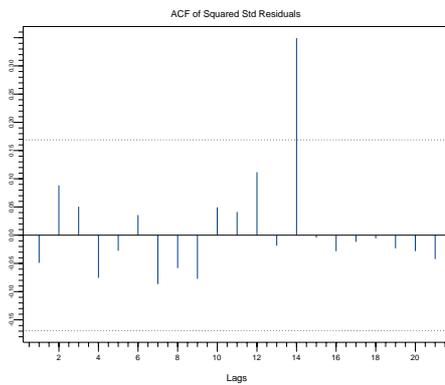


FIG. E.14 – Rendements Solvay, AR(1)-GARCH(1,0)

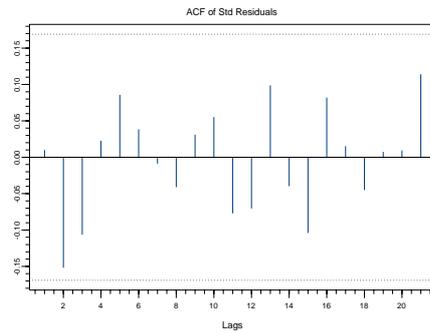


FIG. E.15 – Rendements Solvay, AR(1)-GARCH(1,1)

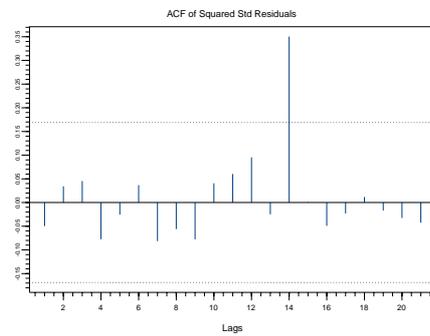


FIG. E.16 – Rendements Solvay, AR(1)-GARCH(1,1)

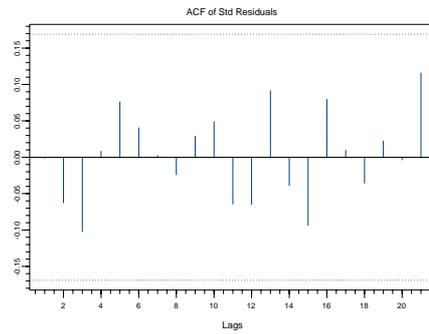


FIG. E.17 – Rendements Solvay, AR(2)-GARCH(1,1)

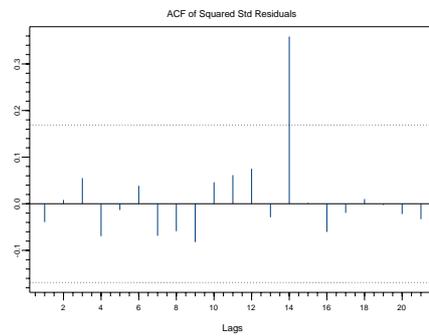


FIG. E.18 – Rendements Solvay, AR(2)-GARCH(1,1)

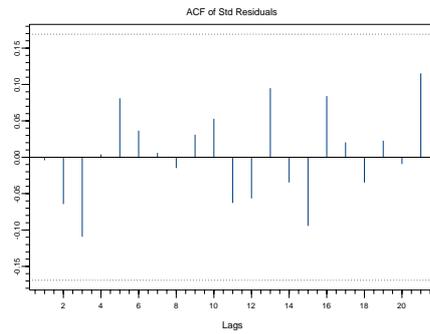


FIG. E.19 – Rendements Solvay, AR(2)-GARCH(1,0)

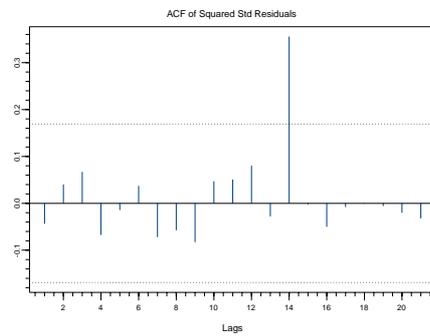


FIG. E.20 – Rendements Solvay, AR(2)-GARCH(1,0)

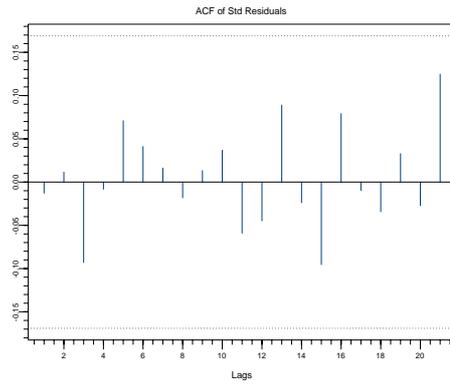


FIG. E.21 – Rendements Solvay, AR(2)-GARCH(2,2)

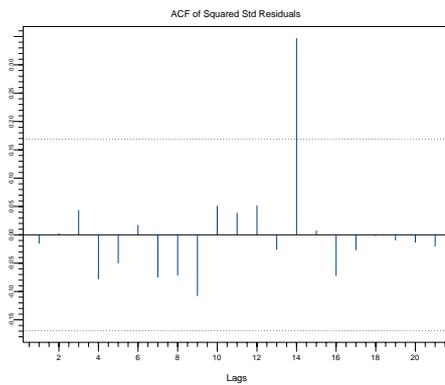


FIG. E.22 – Rendements Solvay, AR(2)-GARCH(2,2)

Modèle	Dexia				
	α	β_1	β_2	c	a_1
AR(0)-GARCH(1,0)	0.002027	0	0	0.002216	0.354495
AR(0)-GARCH(1,1)	0.002389	0	0	0.0001903	0.1832
AR(1)-GARCH(1,0)	0.003104	-0.173096	0	0.001954	0.4518
AR(1)-GARCH(1,1)	0.0030281	-0.1270446	0	0.0002004	0.2041863
AR(1)-ARCH(2,2)	0.002858	-0.126613	0	0.000155	0.189069
AR(2)-ARCH(1,0)	0.003449	-0.176944	-0.031790	0.001952	0.482198
AR(2)-ARCH(1,1)	0.0036137	-0.1416233	-0.0870824	0.0001779	0.2008107
AR(2)-ARCH(2,2)	0.0028031	-0.1530529	-0.1273342	0.0002255	0.2533942

Modèle	Dexia (suite)					
	a_2	b_1	b_2	ν	AIC	BIC
AR(0)-GARCH(1,0)	0	0	0	3	-467.0806	-455.3141
AR(0)-GARCH(1,1)	0	0.7805	0	4	-473.458	-458.7498
AR(1)-GARCH(1,0)	0	0	0	3	-468.1727	-453.4645
AR(1)-GARCH(1,1)	0	0.7640311	0	4	-473.6998	-456.0499
AR(1)-GARCH(2,2)	-0.028935	0.927858	-0.107314	4	-469.6317	-446.0985
AR(2)-GARCH(1,0)	0	0	0	3	-466.3472	-448.6974
AR(2)-GARCH(1,1)	0	0.7690483	0	4	-472.7235	-452.132
AR(2)-GARCH(2,2)	0.0918865	-0.1714906	0.7849218	4	-471.896	-445.4212

Modèle	Dexia suite)	
	L-Box pour résidus (p-valeur)	L-Box pour résidus au carré (p-valeur)
AR(0)-GARCH(1,0)	0.8589	0.0002778
AR(0)-GARCH(1,1)	0.9163	0.3542
AR(1)-GARCH(1,0)	0.8646	0.00119
AR(1)-GARCH(1,1)	0.9379	0.5706
AR(1)-GARCH(2,2)	0.9324	0.599
AR(2)-GARCH(1,0)	0.9028	0.00121
AR(2)-GARCH(1,1)	0.9757	0.5995
AR(2)-GARCH(2,2)	0.965	0.9343

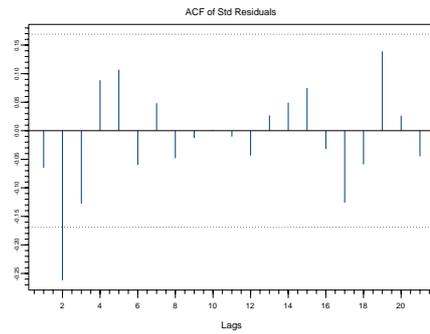


FIG. E.23 – Rendements Colruyt, AR(0)-GARCH(1,0)

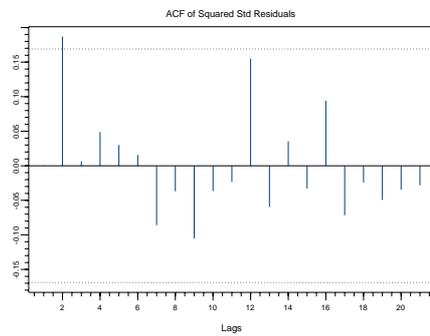


FIG. E.24 – Rendements Colruyt, AR(0)-GARCH(1,0)

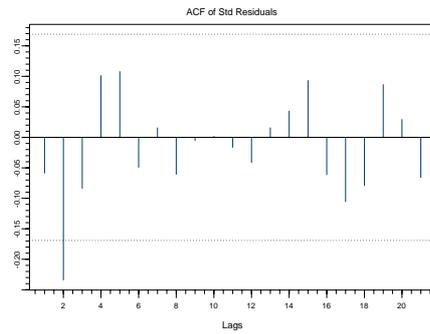


FIG. E.25 – Rendements Colruyt, AR(0)-GARCH(1,1)

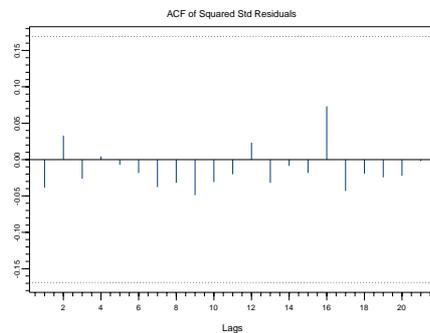


FIG. E.26 – Rendements Colruyt, AR(0)-GARCH(1,1)

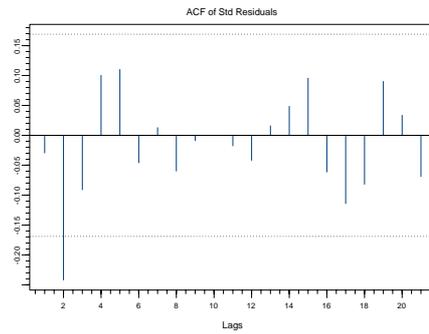


FIG. E.27 – Rendements Colruyt, AR(1)-GARCH(1,1)

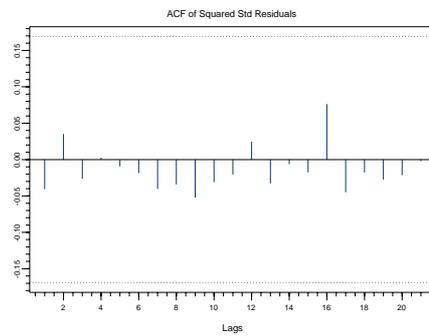


FIG. E.28 – Rendements Colruyt, AR(1)-GARCH(1,1)

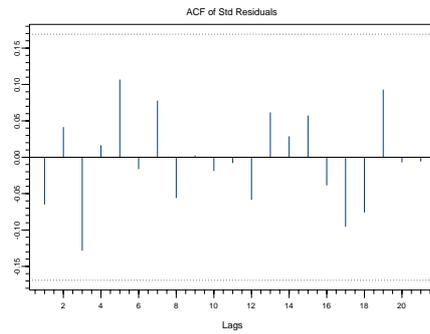


FIG. E.29 – Rendements Colruyt, AR(2)-GARCH(1,0)

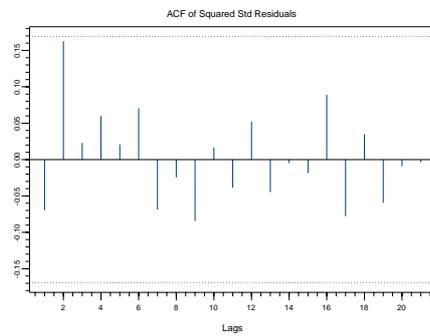


FIG. E.30 – Rendements Colruyt, AR(2)-GARCH(1,0)

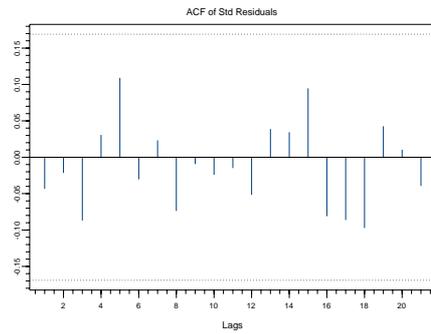


FIG. E.31 – Rendements Colruyt, AR(2)-GARCH(1,1)

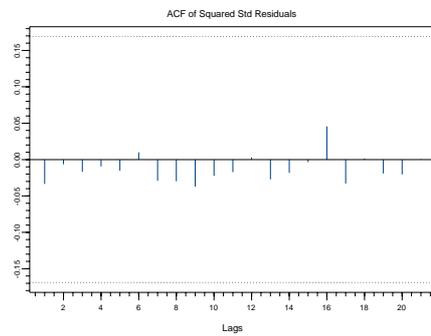


FIG. E.32 – Rendements Colruyt, AR(2)-GARCH(1,1)

Modèle	Agfa Gevaert				
	α	β_1	β_2	c	a_1
AR(0)-GARCH(1,0)	-0.0004255	0	0	0.0027	0.1571
AR(0)-GARCH(1,1)	-0.0005213	0	0	0.0003322	0.07607
AR(1)-GARCH(1,0)	-0.0003932	-0.0460052	0	0.0027449	0.1542770
AR(1)-GARCH(1,1)	-0.0005116	0.0003397	0	0.0003397	0.0750313
AR(2)-GARCH(2,2)	-0.0007016	-0.0333830	-0.1016321	0.0006251	0.0824874

Modèle	Agfa Gevaert (suite)					
	a_2	b_1	b_2	ν	AIC	BIC
AR(0)-GARCH(1,0)	0	0	0	6	-408.5712	-396.8047
AR(0)-GARCH(1,1)	0	0.81925	0	6	-408.2845	-393.5763
AR(1)-GARCH(1,0)	0	0	0	6	-406.861	-392.1528
AR(1)-GARCH(1,1)	0	0.8179475	0	6	-406.412	-388.7622
AR(2)-GARCH(2,2)	0.0873726	-0.2525798	0.8783287	7	-376.7027	-376.7027

Modèle	Agfa Gevaert (suite)	
	L-Box pour résidus (p-valeur)	L-Box pour résidus au carré (p-valeur)
AR(0)-GARCH(1,0)	0.9107	0.1486
AR(0)-GARCH(1,1)	0.8087	0.2582
AR(1)-GARCH(1,0)	0.898	0.107
AR(1)-GARCH(1,1)	0.7916	0.2046
AR(2)-GARCH(2,2)	0.8925	0.1629

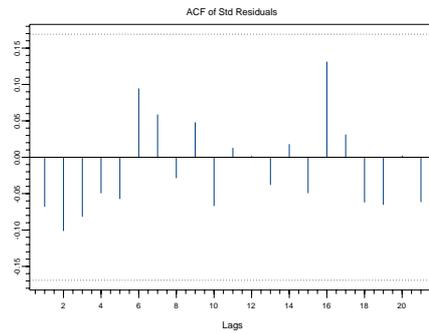


FIG. E.33 – Rendements Dexia, AR(0)-GARCH(1,0)

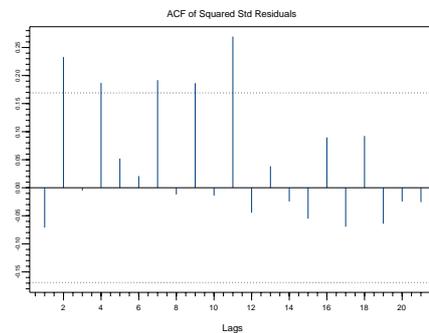


FIG. E.34 – Rendements Dexia, AR(0)-GARCH(1,0)

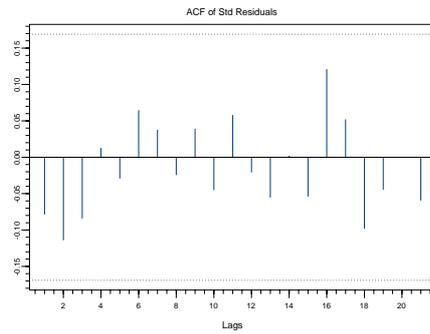


FIG. E.35 – Rendements Dexia, AR(0)-GARCH(1,1)

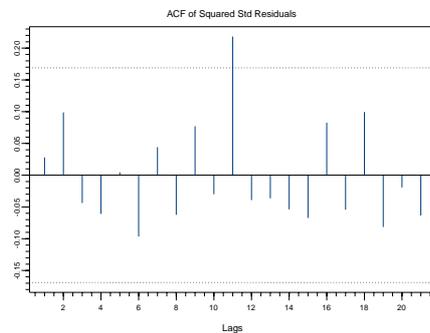


FIG. E.36 – Rendements Dexia, AR(0)-GARCH(1,1)

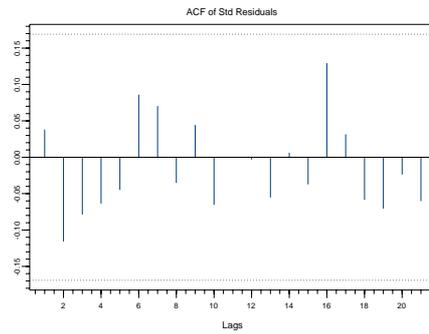


FIG. E.37 – Rendements Dexia, AR(1)-GARCH(1,0)

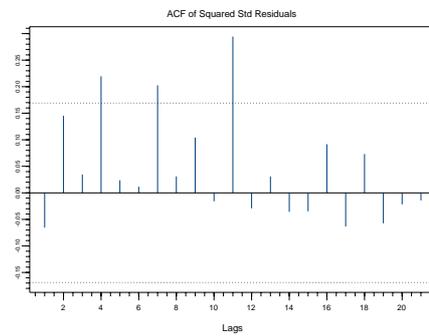


FIG. E.38 – Rendements Dexia, AR(1)-GARCH(1,0)

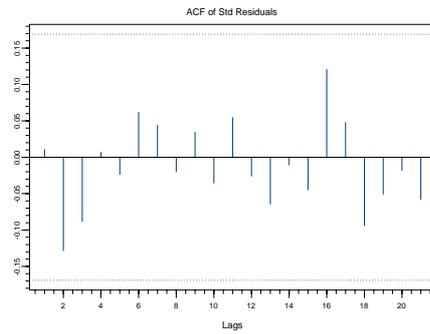


FIG. E.39 – Rendements Dexia, AR(1)-GARCH(1,1)

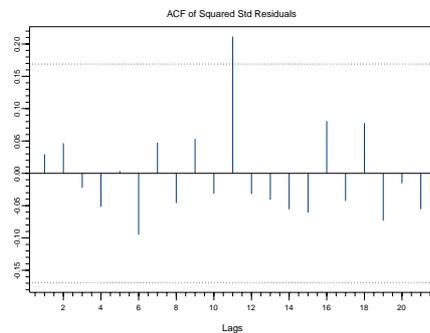


FIG. E.40 – Rendements Dexia, AR(1)-GARCH(1,1)

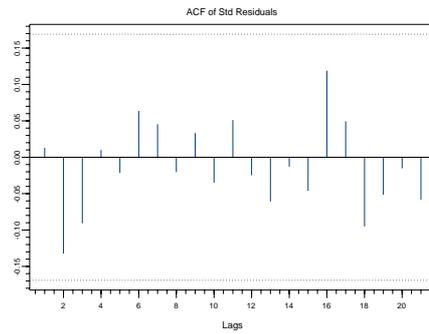


FIG. E.41 – Rendements Dexia, AR(1)-GARCH(2,2)

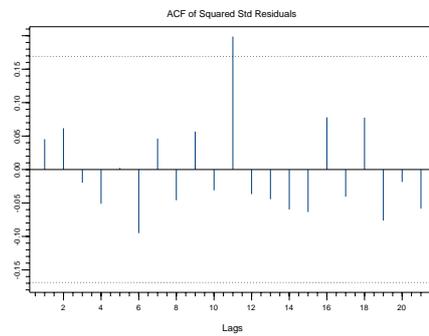


FIG. E.42 – Rendements Dexia, AR(1)-GARCH(2,2)

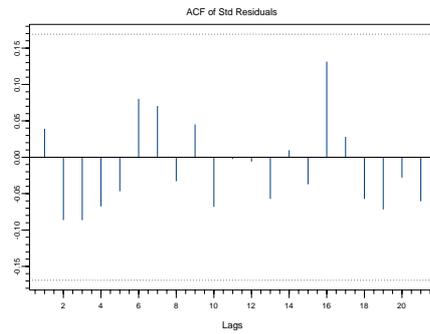


FIG. E.43 – Rendements Dexia, AR(2)-GARCH(1,0)

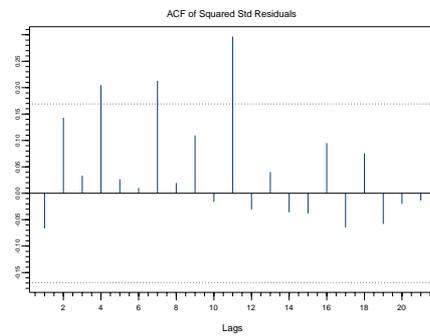


FIG. E.44 – Rendements Dexia, AR(2)-GARCH(1,0)

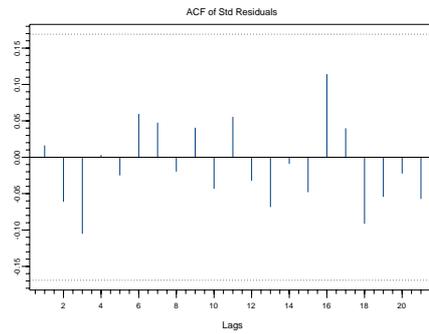


FIG. E.45 – Rendements Dexia, AR(2)-GARCH(1,1)

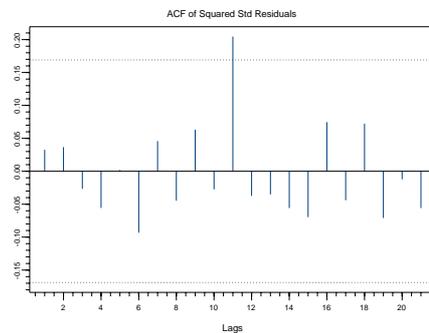


FIG. E.46 – Rendements Dexia, AR(2)-GARCH(1,1)

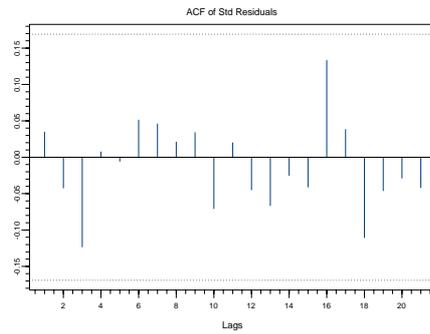


FIG. E.47 – Rendements Dexia, AR(2)-GARCH(2,2)

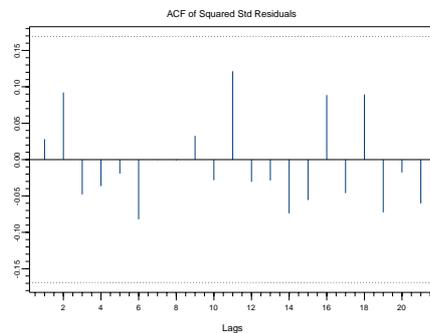


FIG. E.48 – Rendements Dexia, AR(2)-GARCH(2,2)

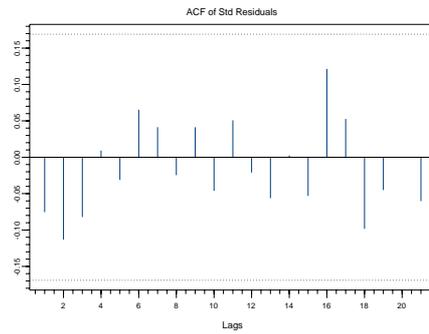


FIG. E.49 – Rendements Dexia, AR(0)-GARCH(2,1)

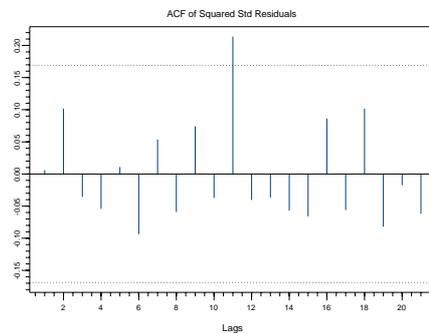


FIG. E.50 – Rendements Dexia, AR(0)-GARCH(2,1)

Modèle	Interbrew				
	α	β_1	β_2	c	a_1
AR(1)-GARCH(1,0)	0.0007653	-0.2170688	0	0.0023693	-0.0170863
AR(0)-GARCH(1,0)	0.0008961	0	0	0.0021814	0.0961550
AR(0)-GARCH(1,1)	0.0008737	0	0	0.0001872	0.0116596
AR(1)-GARCH(1,1)	0.00095788	-0.23784257	0	-0.00003185	-0.01270412

Modèle	Interbrew (suite)			
	b_1	ν	AIC	BIC
AR(1)-GARCH(1,0)	0	3 (3.45497)	-344.8911	-331.7662
AR(0)-GARCH(1,0)	0	4	-334.7668	-324.2669
AR(0)-GARCH(1,1)	0.9011033	4	-332.4277	-319.3029
AR(1)-GARCH(1,1)	1.03062430	4	-343.3907	-327.6409

Modèle	Interbrew (suite)	
	L-Box pour résidus (p-valeur)	L-Box pour résidus au carré (p-valeur)
AR(1)-GARCH(1,0)	0.926	1
AR(0)-GARCH(1,0)	0.5144	1
AR(0)-GARCH(1,1)	0.4513	1
AR(1)-GARCH(1,1)	0.8996	0.9982

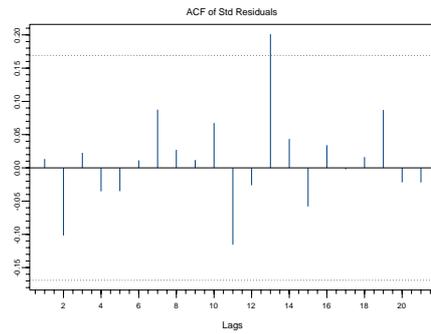


FIG. E.51 – Rendements Agfa Gevaert, AR(0)-GARCH(1,0)

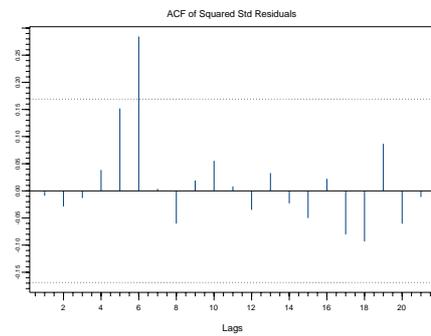


FIG. E.52 – Rendements Agfa Gevaert, AR(0)-GARCH(1,0)

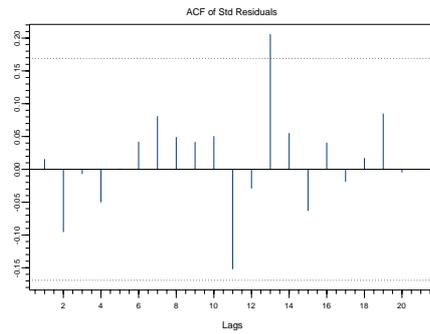


FIG. E.53 – Rendements Agfa Gevaert, AR(0)-GARCH(1,1)

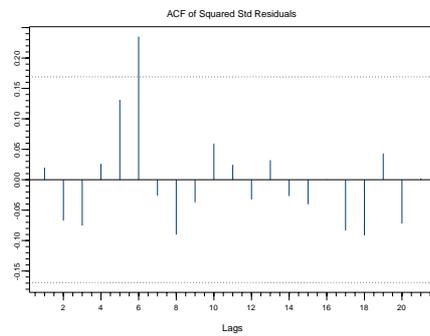


FIG. E.54 – Rendements Agfa Gevaert, AR(0)-GARCH(1,1)

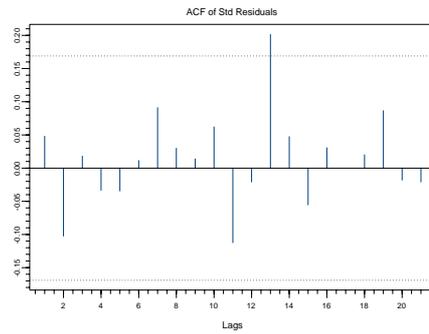


FIG. E.55 – Rendements Agfa Gevaert, AR(1)-GARCH(1,0)

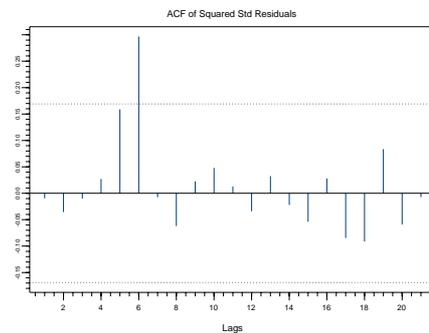


FIG. E.56 – Rendements Agfa Gevaert, AR(1)-GARCH(1,0)

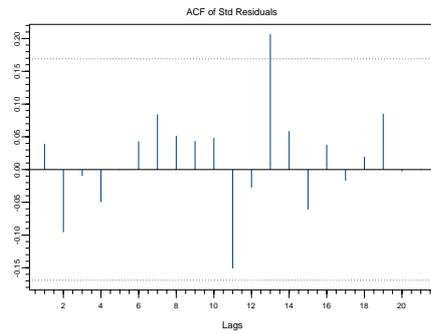


FIG. E.57 – Rendements Agfa Gevaert, AR(1)-GARCH(1,1)

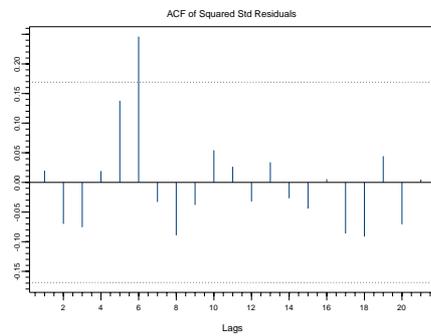


FIG. E.58 – Rendements Agfa Gevaert, AR(1)-GARCH(1,1)

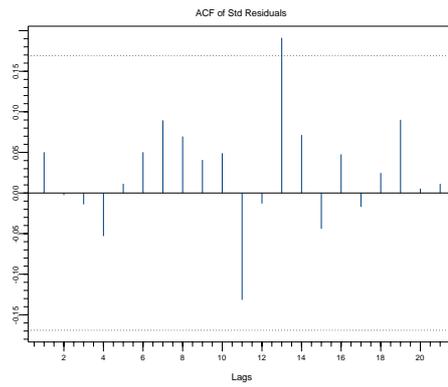


FIG. E.59 – Rendements Agfa Gevaert, AR(2)-GARCH(2,2)

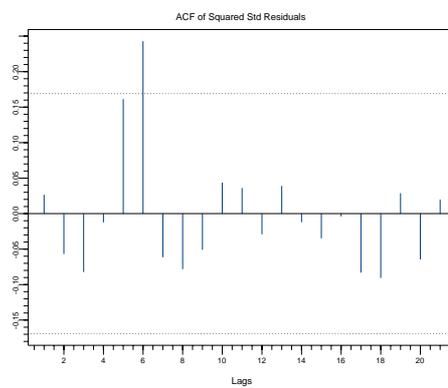


FIG. E.60 – Rendements Agfa Gevaert, AR(2)-GARCH(2,2)

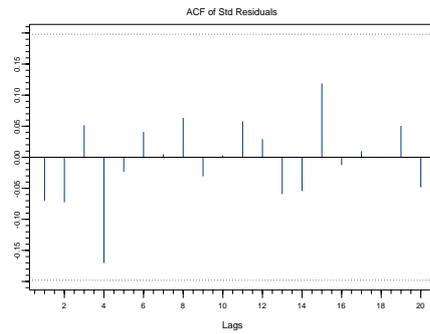


FIG. E.61 – Rendements Interbrew, AR(1)-GARCH(1,0)

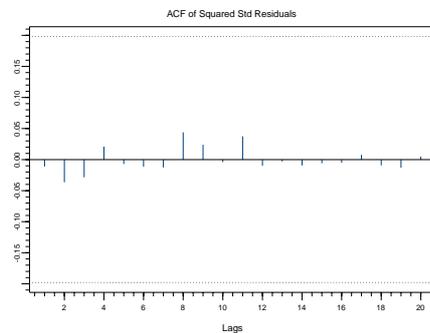


FIG. E.62 – Rendements Interbrew, AR(1)-GARCH(1,0)

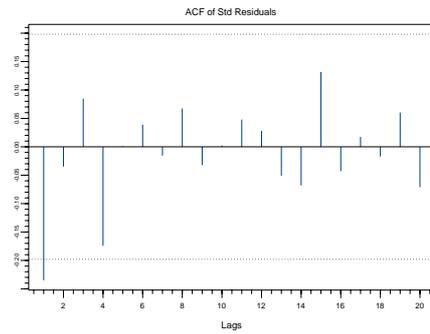


FIG. E.63 – Rendements Interbrew, AR(0)-GARCH(1,0)

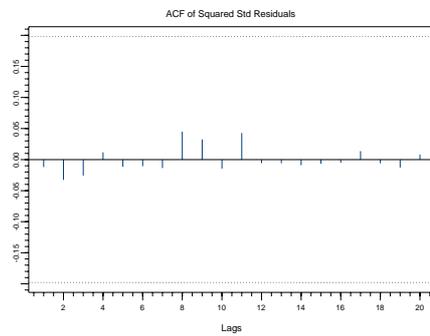


FIG. E.64 – Rendements Interbrew, AR(0)-GARCH(1,0)

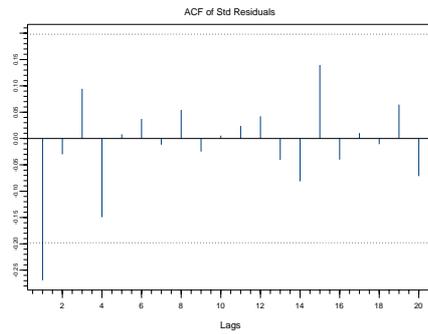


FIG. E.65 – Rendements Interbrew, AR(0)-GARCH(1,1)

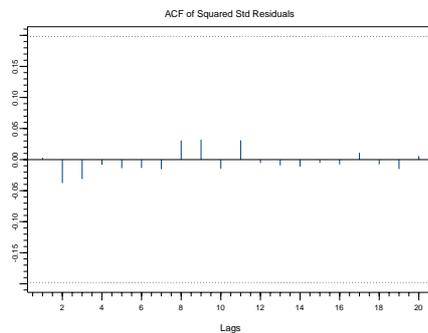


FIG. E.66 – Rendements Interbrew, AR(0)-GARCH(1,1)

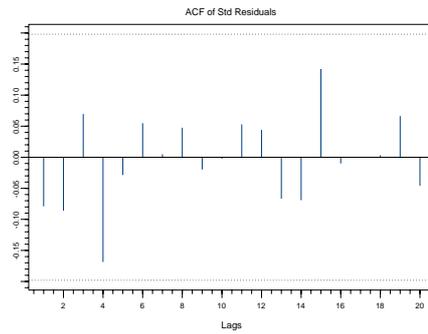


FIG. E.67 – Rendements Interbrew, AR(1)-GARCH(1,1)

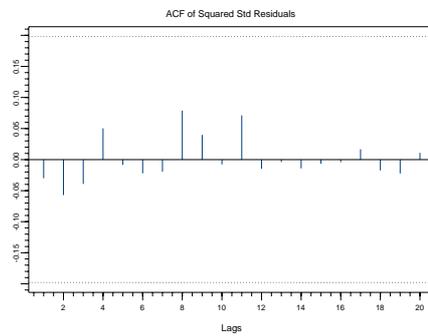


FIG. E.68 – Rendements Interbrew, AR(1)-GARCH(1,1)

Annexe F

Le calcul des grecques par différences finies.

Une méthode "traditionnelle" d'évaluation des grecques est l'évaluation par *différences finies*. Cette méthode consiste essentiellement à approximer les dérivées du prix de l'option, qui sont des quotients de différentielles, par des quotients de différences finies.

Dans le cas d'une option V sur sous-jacents multiples S_1, \dots, S_n le Γ et le δ peuvent être approximatés par des formules aux *différences finies centrées*.

Soit $e_i \in R^n$ un vecteur dont la i ème composante est 1 et les autres composantes sont zéro. Soit $h_i \in R$ la variation du prix du i ème sous-jacent et $V \stackrel{not}{=} V(t = t_0)$.

$$\delta_i = \frac{V_{S_0+h_i e_i} - V_{S_0-h_i e_i}}{2.h_i} + O(h_i^2)$$

L'approximation aux différences finies centrées de la composante Γ_{ij} est

$$\Gamma_{i,i} = \frac{V_{S_0+h_i e_i} - 2V_{S_0} - V_{S_0-h_i e_i}}{(h_i)^2} + O(h_i^2) \quad i = 1..n$$

$$\Gamma_{i,j \neq i} = \frac{V_{S_0+h_i e_i+h_j e_j} - V_{S_0+h_i e_i-h_j e_j} - V_{S_0-h_i e_i+h_j e_j} + V_{S_0-h_i e_i-h_j e_j}}{8.h_i h_j} + O(h_i h_j) \quad i, j = 1..n$$

Pour des produits dérivés portant sur un grand nombre de sous-jacents, les approximations par différences finies peuvent être très coûteuses. Le calcul du δ et du Γ de l'option requiert $4n^2 - n$ réévaluations de l'option.

Annexe G

Graphes de la fonction génératrice des moments de Q_x .

Nous présentons dans cette annexe les différents graphes qui établissent que, pour le call panier et le put panier définis au chapitre 6, on vérifie les deux hypothèses suivantes :

- (i) la fonction génératrice des moments M_{Q_x} (4.7) de la variable aléatoire Q_x (4.5) est convexe sur \mathbb{D}_x (4.6) pour toute valeur de x inférieure à 0.
- (ii) Notons θ_x^* la valeur de θ qui minimise M_{Q_x} sur \mathbb{D}_x^+ (4.13). Pour toutes les valeurs de x inférieures à 0, nous avons $\theta_x^* = 0$ et donc $M_{Q_x}(\theta_x^*) = 1$.

Or, les grecques theta (à l'horizon d'une semaine) du put panier et du call panier sont égales respectivement à -5.8237 et à -10.165 . Nous savons qu'une condition nécessaire pour que l'échantillonnage préférentiel accélère la convergence de l'estimateur de la $CVAR_{[P\&L^{(\alpha)}]}$ est que x soit inférieur à la différence $a_0 - L^{(\alpha)}$. Aussi, si nous voulons estimer la $CVAR_{[-5.6389]}$ et la $CVAR_{[-2.6724]}$ associées aux P&L à la revente du put à 1 semaine de son émission, les valeurs de x qui pourraient rendre effectif l'échantillonnage préférentiel sont inférieures à -0.1848 . De même, si nous voulons estimer la $CVAR_{[1.7399]}$ et la $CVAR_{[3.2254]}$ associées aux P&L à la revente du call à 1 semaine de son émission, les valeurs de x qui pourraient rendre effectif l'échantillonnage préférentiel sont inférieures à -11.9049 .

Par conséquent, la réduction de variance par échantillonnage préférentiel proposée par Glasserman[41] ne marche pour les options panier que nous considérons car les queues négatives des distributions des P&L associés à la

revente de ces options ne sont pas suffisamment épaisses.

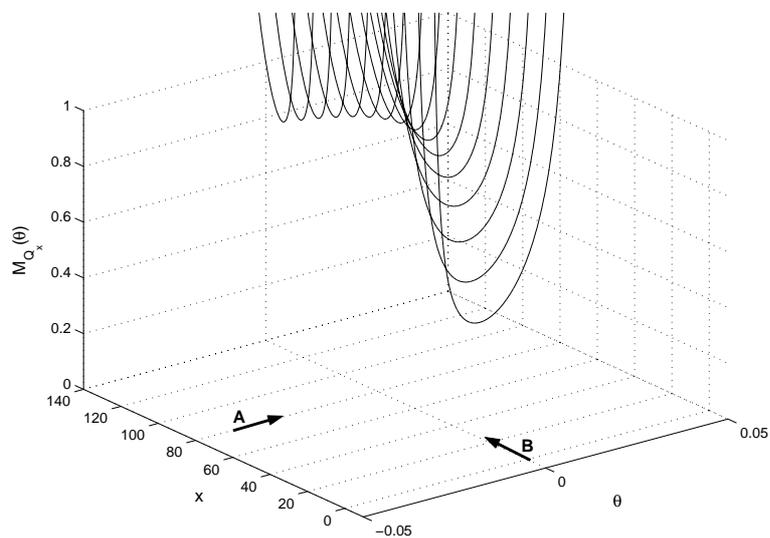


FIG. G.1 – Call panier. Fonction Génératrice des moments de Q_x .

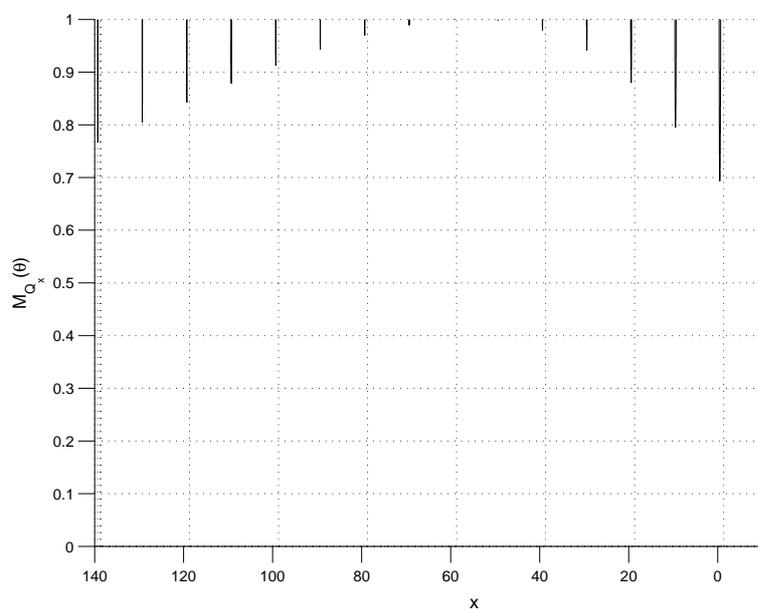


FIG. G.2 – Call panier. Fonction Génératrice des moments de Q_x (vue A).

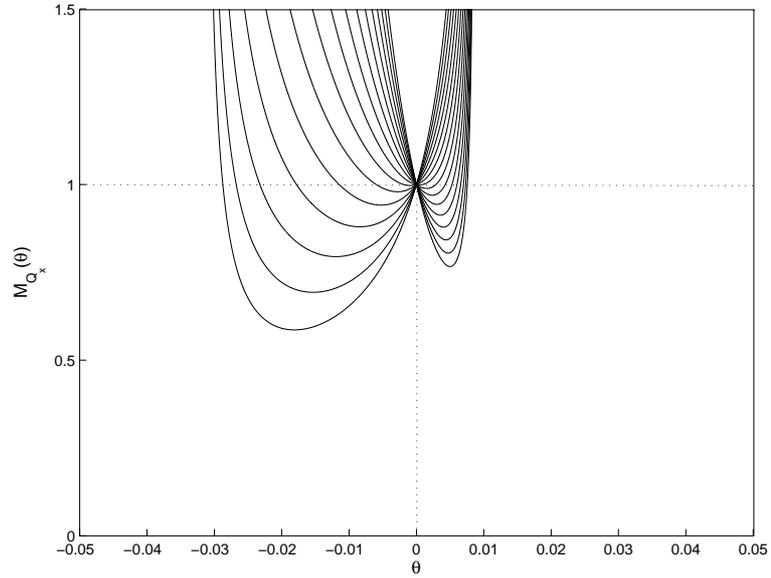


FIG. G.3 – Call panier. Fonction Génératrice des moments de Q_x (vue B).

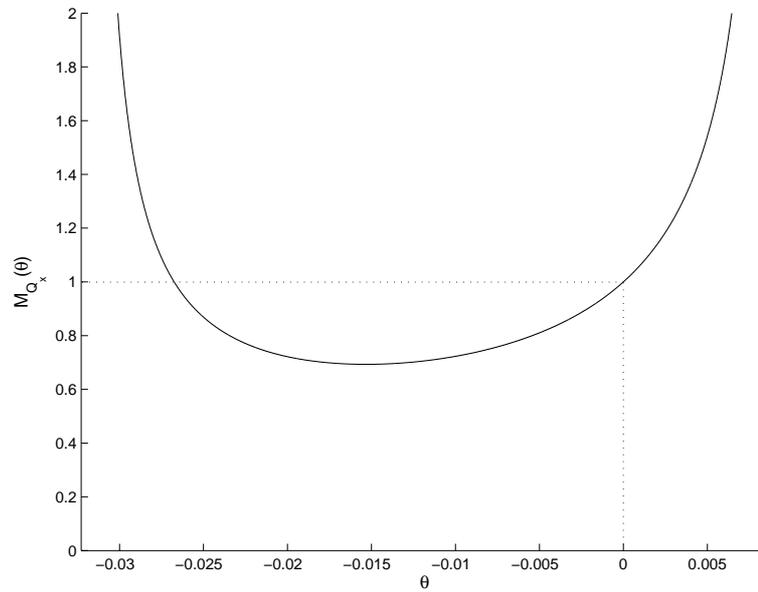


FIG. G.4 – Call panier. Fonction Génératrice des moments de Q_x sur \mathbb{D}_x , $x = 0$.

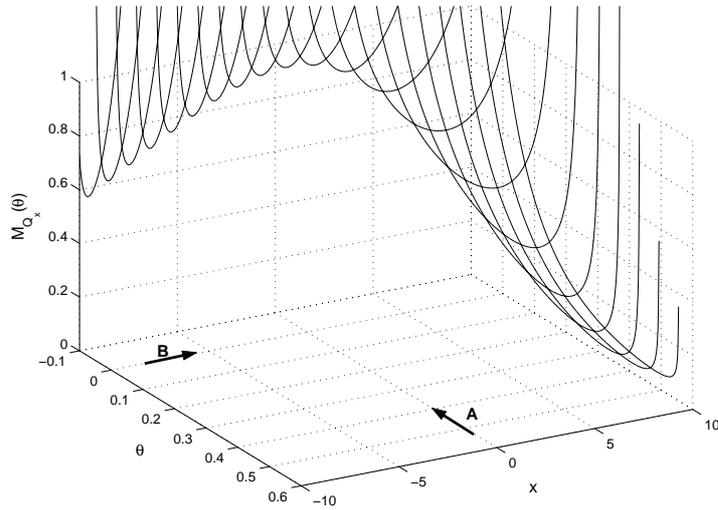


FIG. G.5 – Put panier. Fonction Génératrice des moments de Q_x .

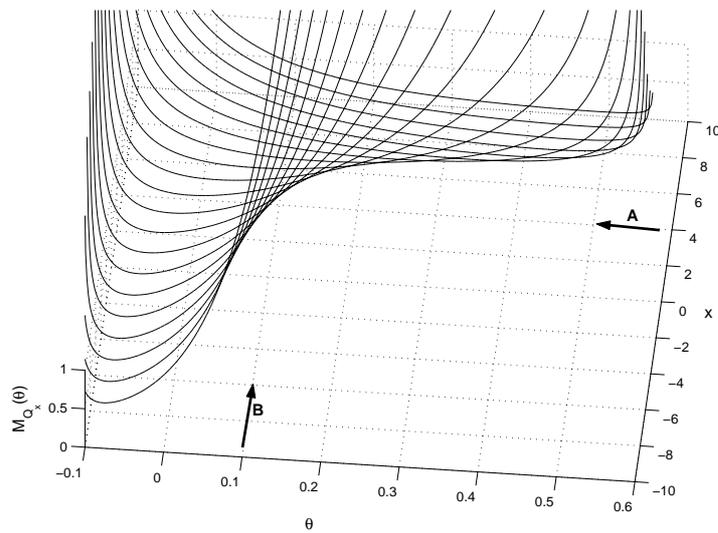


FIG. G.6 – Put panier. Fonction Génératrice des moments de Q_x .

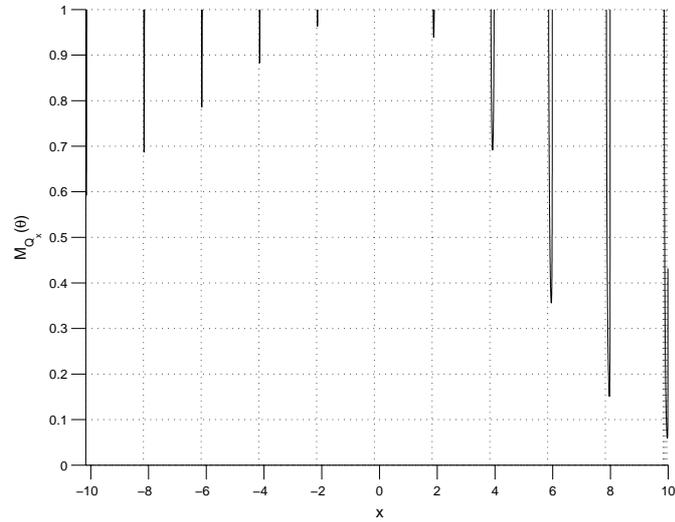


FIG. G.7 – Put panier. Fonction Génératrice des moments de Q_x (vue A).

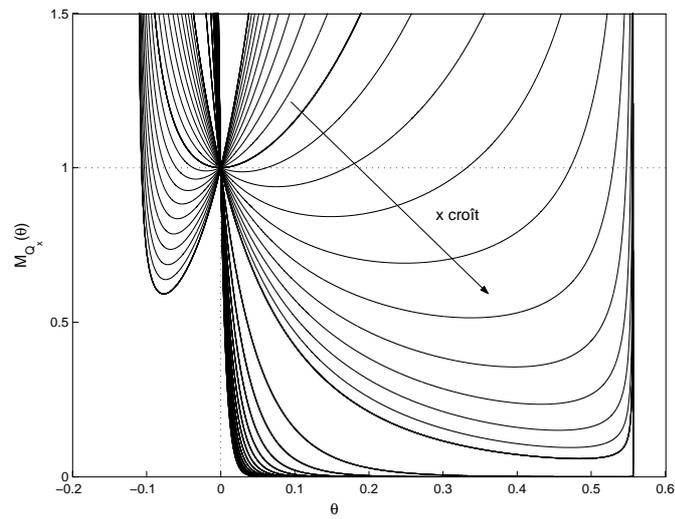


FIG. G.8 – Put panier. Fonction Génératrice des moments de Q_x (vue B).

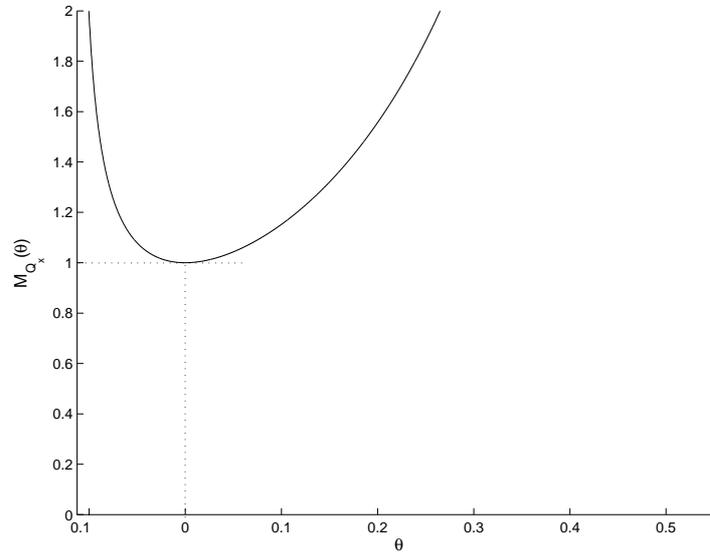


FIG. G.9 – Put panier. Fonction génératrice des moments de Q_x sur \mathbb{D}_x , $x=0$.

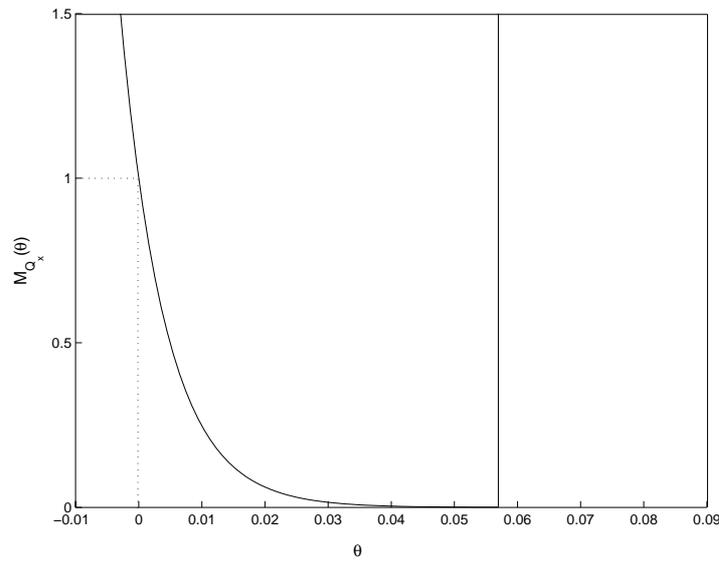


FIG. G.10 – Put panier. Fonction génératrice des moments de Q_x sur \mathbb{D}_x , $x=140$.

Annexe H

Convergence d'une suite de variables aléatoires.

Définition 19 Soit X_1, X_2, \dots et X des v.a. à valeurs réelles, définies sur le même espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) . On dira que :

(1) La suite $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers X **presque sûrement** ($\xrightarrow{p.s.}$) si

$$P\left(\left\{\omega \mid \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X(\omega)\right\}\right) = 1$$

(2) La suite $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers X **en probabilité** (\xrightarrow{P}) si pour tout $\varepsilon > 0$

$$P(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

(3) La suite $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers X **en distribution** (ou en loi) (\xrightarrow{D}) si

$$P(X_n \leq x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(X \leq x)$$

pour tout occurrence x en laquelle F_X la fonction de distribution de X est continue.

Propriété 2

$$X_n \xrightarrow{p.s.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{D} X$$

Théorème 13 (Loi forte des grands nombres)

Soit $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. iid de même loi que X .

Si X est intégrable, c'est-à-dire $E(|X|) < +\infty$, alors

$$\left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{p.s.} E[X]$$

Théorème 14 (Slutsky)

Si la suite de v.a. $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge en distribution vers la v.a. X et que la suite $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge en distribution (ou en probabilité) vers une constante y ,

alors $X_n + Y_n$ converge en distribution vers $X + y$.

Plus généralement, si $f(x, y)$ est continue alors $f(X_n, Y_n)$ converge en distribution vers $f(X, y)$.

Annexe I

Intervalle de confiance par la méthode t-bootstrap.

I.1 Introduction

Soit F la distribution de la population considérée. Nous supposons que l'expression analytique de F est inconnue.

Soit $\theta(F)$ la grandeur d'intérêt que nous cherchons à estimer.

Soit \mathcal{X} un échantillon extrait de la population de distribution F . Notons $n = |\mathcal{X}|$ la taille de \mathcal{X} .

Soit $T(\mathcal{X})$ un estimateur de $\theta(F)$.

La méthode du bootstrap permet de trouver des intervalles de confiance pour tout estimateur $T(\mathcal{X})$. Elle est basée sur la technique du rééchantillonnage. Pour pouvoir trouver un intervalle de confiance de $\theta(F)$, il suffirait de connaître la distribution de $T(\mathcal{X}) - \theta(F)$.

La méthode du bootstrap est fondée sur le résultat suivant [34] :

Si les éléments de \mathcal{X} sont indépendants, on peut montrer que pour n grand :

$$P_F[T(\mathcal{X}) - \theta(F) \leq x] = P_{F_n}[T(\mathcal{X}^*) - T(\mathcal{X}) \leq x] \quad (\text{I.1})$$

où F_n est la distribution empirique de l'échantillon \mathcal{X} . Et \mathcal{X}^* est un échantillon tiré de la population \mathcal{X} de fonction de distribution connue F_n .

Dans la relation I.1 le terme de droite est calculable car les propriétés statistiques de $T(\mathcal{X}^*)$ ne dépendent que de F_n qui est connue.

I.2 Intervalles de confiance

Supposons que l'on ait un estimateur $\hat{\sigma}^2(\mathcal{X})$ de la quantité σ définie par

$$\sigma^2(F) = n \operatorname{var}_F(T(\mathcal{X})) = n [E_F T^2(\mathcal{X}) - (E_F T(\mathcal{X}))^2]$$

et qu'il existe une racine pivotale asymptotique :

$$Y = \sqrt{n} \frac{T(\mathcal{X}) - \theta(F)}{\sigma(F)}$$

Notons Q la fonction de distribution de la v.a. Y

$$Q = P_F(Y \leq x)$$

Si $y^{(\alpha)}$ représente l' α -quantile de la distribution Q , alors un intervalle asymptotique à $(\alpha.100)\%$ de confiance pour θ est donné par

$$[T(\mathcal{X}) - n^{-1/2} \hat{\sigma}(\mathcal{X}) y^{(1-\frac{\alpha}{2})}, T(\mathcal{X}) - n^{-1/2} \hat{\sigma}(\mathcal{X}) y^{(\frac{\alpha}{2})}]$$

I.3 La méthode t-bootstrap itéré

Supposons que nous ne connaissions pas la distribution Q . La technique du t-bootstrap consiste à considérer l'approximation suivante de Q :

$$\hat{Q}(x) = P_{\hat{F}}(S^* \leq x \leq x \mid \mathcal{X}) = P_{\hat{F}}[\sqrt{n} \frac{T(\mathcal{X}^*) - T(\mathcal{X})}{\hat{\sigma}(\mathcal{X}^*)} \mid \mathcal{X}]$$

L'approximation de Monte-Carlo des quantiles $\hat{y}^{(1-\frac{\alpha}{2})}$ et $\hat{y}^{(\frac{\alpha}{2})}$ est donnée par l'algorithme suivant

Algorithme

1. Tirer B échantillons bootstrap $\mathcal{X}^{*(1)}, \dots, \mathcal{X}^{*(B)}$ de loi \hat{F} .
2. Soit Y_B^* le vecteur ordonné des statistiques

$$Y^{*(b)} = \sqrt{n} \frac{T(\mathcal{X}^{*(b)}) - T(\mathcal{X})}{\hat{\sigma}(\mathcal{X}^{*(b)})} \quad b = 1, \dots, B$$

3. Approximer $y^{(\alpha)}$ par $\hat{y}^{(\alpha)} = y_B^* \lfloor \alpha \cdot B \rfloor$.

□

L'intervalle de confiance t-bootstrap est donné par

$$[T(\mathcal{X}) - n^{-1/2} \hat{\sigma}(\mathcal{X}) \hat{y}_B^* \lfloor (1-\frac{\alpha}{2})B \rfloor, T(\mathcal{X}) - n^{-1/2} \hat{\sigma}(\mathcal{X}) \hat{y}_B^* \lfloor \frac{\alpha}{2} B \rfloor]$$

Toutefois, en pratique, l'estimateur $T(\mathcal{X})$ possède rarement une forme analytique. En effet, pour obtenir une forme analytique de T , il faudrait connaître le type de distribution dont est extrait \mathcal{X} . Or, en pratique, nous l'ignorons. Par conséquent on ne dispose pas d'un estimateur $\hat{\sigma}(\mathcal{X})$.

Même si l'estimateur $\hat{\sigma}(\mathcal{X})$ n'est pas disponible, il est malgré tout possible d'estimer σ par son estimateur bootstrap :

$$\hat{\sigma}^* = \hat{\sigma}^*(\mathcal{X}) = \sqrt{n \operatorname{var}_{\hat{F}}(T(\mathcal{X}^*) \mid \mathcal{X})}$$

On suppose alors, comme dans la méthode du bootstrap simple, qu'il existe une racine pivotale asymptotique

$$Z = \sqrt{n} \frac{T(\mathcal{X}) - \theta(F)}{\hat{\sigma}^*}$$

dont l'analogie bootstrap est

$$\hat{Z} = \sqrt{n} \frac{T(\mathcal{X}) - \theta(F)}{\hat{\sigma}^{**}}$$

où

$$\hat{\sigma}^{**} = \hat{\sigma}^{**}(\mathcal{X}^*) = \sqrt{n \operatorname{var}_{\hat{F}^*}(T(\mathcal{X}^{**}) \mid \mathcal{X}^*)}$$

est l'estimateur bootstrap de la variance calculé pour chaque échantillon bootstrap \mathcal{X}^* et \hat{F}^* est l'estimateur ¹ de la fonction distribution de \mathcal{X}^* .

L'intervalle de confiance t-bootstrap à $\alpha.100\%$ de confiance est donné par

$$[T(\mathcal{X}) - n^{-1/2} \hat{\sigma}_B^*(\mathcal{X}) \hat{z}_B^{*(1-\alpha/2)}, T(\mathcal{X}) - n^{-1/2} \hat{\sigma}_B^*(\mathcal{X}) \hat{z}_B^{*(\alpha/2)}]$$

où $\hat{\sigma}_B^*$ est l'approximation de Monte-Carlo de $\hat{\sigma}^*$ donnée par :

$$\hat{\sigma}_B^* = \sqrt{n} \left[\frac{1}{B} \sum_{b=1}^B T^2(\mathcal{X}^{*(b)}) - \left(\frac{1}{B} \sum_{b=1}^B T(\mathcal{X}^{*(b)}) \right)^2 \right]^{1/2}$$

Et $\hat{z}_B^{*(\alpha)}$ est l'approximation de Monte-Carlo de l' α -quantile de \hat{Z} . Elle est donnée par l'algorithme suivant

¹ On prendra par exemple pour estimateur la fonction de distribution empirique de \mathcal{X}^* .

Algorithme

1. Tirer B échantillons bootstrap $\mathcal{X}^{*(b)}$ ($b = 1, \dots, B$) de loi \hat{F} . Ces tirages constituent un premier niveau de bootstrap. Calculer la statistique $T(\mathcal{X}^{*(b)})$ pour chaque échantillon $\mathcal{X}^{*(b)}$.
2. Pour chaque b estimer la variance de $T(\mathcal{X}^{*(b)})$ à l'aide d'un second bootstrap :
 - (a) Tirer B' échantillons bootstrap $\mathcal{X}^{** (b')}$ à partir de $\hat{F}^* = \hat{F}(\mathcal{X}^{*(b)})$, pour $b'=1, \dots, B'$. Ces tirages constituent un second niveau de bootstrap.
 - (b) Calculer l'approximation de Monte-Carlo $\hat{\sigma}_{B'}^{** (b)}$ de $\hat{\sigma}^{**}(\mathcal{X}^{*(b)})$:

$$\hat{\sigma}_{B'}^{** (b)} = \sqrt{n} \left[\frac{1}{B'} \sum_{b'=1}^{B'} T^2(\mathcal{X}^{** (b')}) - \left(\frac{1}{B'} \sum_{b'=1}^{B'} T(\mathcal{X}^{** (b')}) \right)^2 \right]^{1/2}$$

3. Soit Z_B^{**} le vecteur ordonné des statistiques

$$z_B^{** (b)} = \sqrt{n} \frac{T(\mathcal{X}^{*(b)}) - T(\mathcal{X})}{\hat{\sigma}_{B'}^{** (b)}} \quad b = 1, \dots, B$$

4. Calculer $\hat{z}_B^{(\alpha)} = z_B^{** [\alpha \cdot B]}$.

□

Il faudra travailler avec $B \geq 2000$ et $B' \geq 200$ pour obtenir des approximations de Monte-Carlo suffisamment bonnes [69]. Construire un intervalle de confiance par t-bootstrap itéré est donc très coûteux en calcul.

I.4 Précision des intervalles de confiance par t-bootstrap itéré

Résultat de convergence :

Soit $\theta(F)$ la grandeur d'intérêt. Soit \mathcal{X} l'échantillon initial de taille $n = |\mathcal{X}|$. Soit $[a, b]$ un intervalle de confiance à $(\alpha 100)$ pourcents centré, obtenu par la méthode t-bootstrap itéré. On peut montrer [69] que :

$$| P[\theta(F) < a] - \frac{\alpha}{2} | = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$$

et

$$| P[\theta(F) > b] - \frac{\alpha}{2} | = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Evaluation de la précision d'un IC :

Supposons que la valeur exacte de la grandeur d'intérêt $\theta(F)$ soit connue. Pour évaluer la qualité d'un IC à $(\alpha 100)$ pourcents de confiance pour $\theta(F)$,

nous calculons son *taux de couverture*. Pour calculer ce taux de couverture, nous produisons N réalisations indépendantes de l'IC. Le taux de couverture est la proportion de ces réalisations contenant la valeur réelle de la grandeur d'intérêt. Si la méthode de calcul des IC est précise, nous devrions obtenir un taux de couverture égal à α .

Annexe J

Rappels d'analyse fonctionnelle.

Rappel 1.

Soit $F(v) = \int_{\psi(v)}^{\phi(v)} f(v, z) dz$.

Si $f \in \mathcal{C}^1$ par rapport à v et si ψ et $\phi \in \mathcal{C}^1$ alors :

$$\frac{dF}{dv} = \int_{\psi(v)}^{\phi(v)} \frac{\partial f(v, z)}{\partial v} dz + f(v, \phi(v))\phi'(v) - f(v, \psi(v))\psi'(v)$$

Rappel 2.

Théorème 15 (Théorème de l'inverse local) .

Soit \mathcal{A} un ouvert de \mathbb{R} et $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$.

Soit $x_0 \in \mathcal{A}$, $b_0 = f(x_0)$.

Si $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) \neq 0$, alors il existe un voisinage U de x_0 et un voisinage V de b_0 tels que f induise une bijection de U sur V dont la réciproque

$$f^{-1} : V \rightarrow U$$

soit de classe \mathcal{C}^1 . En outre,

$$\frac{\partial f^{-1}}{\partial b}(f(x)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x) \right)^{-1}$$

Preuve Cfr. R. Lavendhomme & J.-R. Roisin, Analyse infinitésimale, De Boeck, 2000.

□

Exemple 1 .

Soit t_ν la fonction de distribution d'une v.a. student à ν degrés de liberté. La fonction de distribution d'une student possède un inverse sur \mathbb{R} . De plus elle est strictement croissante en tout $x \in \mathbb{R}$. Par conséquent, on peut appliquer le théorème de l'inverse local pour calculer la dérivée de l'inverse de t_ν en tout $y \in [0, 1]$. Posons $y = t_\nu(x)$ on obtient :

$$\frac{\partial t_\nu^{-1}}{\partial y}(t_\nu(x)) = \left(\frac{\partial t_\nu}{\partial x}(x) \right)^{-1}$$

Remarque 1 .

Si l'on désire calculer $\frac{\partial^2 t_\nu^{-1}}{\partial y^2}(t_\nu(x_0))$, on pourra procéder comme suit :

Pour $0 < \epsilon/2 \lll t_\nu(x_0)$ avec $0 < t_\nu(x_0) \pm \frac{\epsilon}{2} < 1$, calculer

$$\frac{\partial^2 t_\nu^{-1}}{\partial y^2}(t_\nu(x_0)) \simeq \frac{\left[\frac{\partial t_\nu^{-1}}{\partial y}(t_\nu(x_0) + \epsilon/2) - \frac{\partial t_\nu^{-1}}{\partial y}(t_\nu(x_0) - \epsilon/2) \right]}{\epsilon}$$

C'est-à-dire

$$\frac{\partial^2 t_\nu^{-1}}{\partial y^2}(t_\nu(x_0)) \simeq \frac{\left[\left[\frac{\partial t_\nu}{\partial x}(t_\nu^{-1}(t_\nu(x_0) + \epsilon/2)) \right]^{-1} - \left[\frac{\partial t_\nu}{\partial x}(t_\nu^{-1}(t_\nu(x_0) - \epsilon/2)) \right]^{-1} \right]}{\epsilon}$$

Exemple 2 .

De l'exemple 1 on tire :

$$\frac{\partial t_{\nu_1}^{-1}}{\partial y}(t_{\nu_2}(x)) = \frac{\partial t_{\nu_1}^{-1}}{\partial y}(t_{\nu_1}[t_{\nu_1}^{-1}(t_{\nu_2}(x))]) = \left(\frac{\partial t_{\nu_1}}{\partial x}(t_{\nu_1}^{-1}(t_{\nu_2}(x))) \right)^{-1}$$

Remarque 2 .

Si l'on désire calculer $\frac{\partial^2 t_{\nu_1}^{-1}}{\partial y^2}(t_{\nu_2}(x_0))$, on pourra procéder comme suit :

Pour $0 < \epsilon/2 \lll t_{\nu_2}(x_0)$ avec $0 < t_{\nu_2}(x_0) \pm \frac{\epsilon}{2} < 1$, calculer

$$\frac{\partial^2 t_{\nu_1}^{-1}}{\partial y^2}(t_{\nu_2}(x_0)) \simeq \frac{\left[\frac{\partial t_{\nu_1}^{-1}}{\partial y}(t_{\nu_2}(x_0) + \epsilon/2) - \frac{\partial t_{\nu_1}^{-1}}{\partial y}(t_{\nu_2}(x_0) - \epsilon/2) \right]}{\epsilon}$$

C'est-à-dire

$$\frac{\partial^2 t_{\nu_1}^{-1}}{\partial y^2}(t_{\nu_2}(x_0)) \simeq \frac{\left[\left[\frac{\partial t_{\nu_1}}{\partial x}(t_{\nu_1}^{-1}(t_{\nu_2}(x_0) + \epsilon/2)) \right]^{-1} - \left[\frac{\partial t_{\nu_1}}{\partial x}(t_{\nu_1}^{-1}(t_{\nu_2}(x_0) - \epsilon/2)) \right]^{-1} \right]}{\epsilon}$$

Annexe K

Test de Duclos-Davidson d'ordre n .

Jean-Yves Duclos et Russell Davidson [29] ont proposé en 2000 un test statistique permettant de vérifier l'existence d'une relation de dominance stochastique d'ordre $n \in \mathbb{R}$ entre deux v.a. positives Y et Z de distributions inconnues. Mais pour lesquelles nous disposons de N réalisations (y_i, z_i) du ve.a. (Y, Z) . Cette annexe présente ce test.

Définissons

$$D_Y^1(x) = F_Y(x)$$

$$D_Y^2(x) = \int_0^x F_Y(u) du$$

$$D_Y^3(x) = \int_0^x \int_0^v F_Y(u) du dv$$

et

$$D_Y^n(x) = \int_0^x D_Y^{n-1}(u) du$$

pour tout $n \geq 2$. Duclos et Davidson [29] montrent que

$$D_Y^n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-u)^{n-1} dF_Y(u)$$

Si pour tout $x \geq 0 : D_Y^n(x) \leq D_Z^n(x)$ alors Y domine stochastiquement Z à l'ordre n .

Pour vérifier l'existence d'une relation de dominance stochastique d'ordre n entre Y et Z , Duclos et Davidson proposent une procédure composée de trois tests successifs ¹.

Ils commencent par tester l'hypothèse $H_0 : D_Y^n = D_Z^n$. Pour ce faire, ils testent l'égalité $D_Y^n = D_Z^n$ en un nombre fini de réels positifs x_1, \dots, x_m ($m \ll N$). Le choix de ces réels est effectué comme pour le test de dominance stochastique d'ordre 2 dans le chapitre 8.

Ensuite, si cette égalité est rejetée, ils vérifient s'il existe une inégalité entre D_Y^n et D_Z^n conservée sur tout $\{x_1, \dots, x_m\}$ et ils vérifient le sens de cette inégalité.

Pour mener leurs tests, Duclos et Davidson considèrent les statistiques empiriques suivantes

$$\hat{D}_Z^n(x) = \frac{1}{N(n-1)!} \sum_{j=1}^N (x - z_j)_+^{n-1}$$

$$\hat{V}_Z^n(x) = \frac{1}{N} \left[\frac{1}{N((n-1)!)^2} \sum_{j=1}^N (x - z_j)_+^{2(n-1)} - \hat{D}_Z^n(x)^2 \right]$$

$$\hat{D}_Y^n(x) = \frac{1}{N(n-1)!} \sum_{j=1}^N (x - y_j)_+^{n-1}$$

$$\hat{V}_Y^n(x) = \frac{1}{N} \left[\frac{1}{N((n-1)!)^2} \sum_{j=1}^N (x - y_j)_+^{2(n-1)} - \hat{D}_Y^n(x)^2 \right]$$

$$\hat{V}_{YZ}^n(x) = \frac{1}{N} \left[\frac{1}{N((n-1)!)^2} \sum_{j=1}^N (x - y_j)_+^{s-1} (x - z_j)_+^{s-1} - \hat{D}_Y^n(x) \hat{D}_Z^n(x) \right]$$

où $v_+^n = (\max(v, 0))^n$ et $x \in \mathbb{R}^+$. Les y_i et les z_i sont respectivement des réalisations de Y et des réalisations Z .

¹ Cette procédure peut être vue comme une "généralisation" de l'outil d'analyse que constitue le *test de Kolmogorov-Smirnov de type deux*. Ce dernier test permet de vérifier l'égalité stochastique de premier ordre entre deux v.a. continues de distributions inconnues (c'est-à-dire $F_Y = F_Z$) et permet également de vérifier l'existence d'une relation de dominance stochastique de premier ordre et son sens [20]. Le test de Duclos-Davidson permet de tester une égalité stochastique de tout d'ordre entre deux v.a. quelconques, et de vérifier l'existence d'une relation de dominance stochastique de tout ordre.

Pour vérifier l'égalité de $\hat{D}_Y^n(x) = \hat{D}_Z^n(x)$ en chaque $x \in \{x_1, \dots, x_m\}$, Duclos et Davidson proposent la statistique de test

$$T^n(x) = \frac{\hat{D}_Y^n(x) - \hat{D}_Z^n(x)}{\sqrt{\hat{V}^n(x)}} \quad (\text{K.1})$$

où

$$\hat{V}^n(x) = | \hat{V}_Y^n(x) + \hat{V}_Z^n(x) - 2\hat{V}_{YZ}^n(x) |$$

Sous $H_0 : D_Y^n(x) = D_Z^n(x)$, on montre [29] que la statistique $T^n(x)$ est distribuée asymptotiquement² comme une normale $N(0, 1)$.

Voyons maintenant comment réaliser pratiquement la procédure de test de Duclos-Davidson.

(i). Test de l'égalité $D_Y^n = D_Z^n$.

Le premier test statistique teste l'égalité entre $D_Y^n = D_Z^n$ sur $\{x_1, \dots, x_m\}$.

Les *hypotheses* en concurrence sont :

H_0 : L'égalité $D_Y^n = D_Z^n$ est vérifiée sur $\{x_1, \dots, x_m\}$.

C'est-à-dire $\forall x_i \in \{x_1, \dots, x_m\}$, $D_Y^n(x_i) = D_Z^n(x_i)$.

H_A : L'égalité $D_Y^n = D_Z^n$ n'est pas vérifiée sur $\{x_1, \dots, x_m\}$.

C'est-à-dire qu'il existe au moins un point x_i en lequel :

$D_Y^n(x_i) \neq D_Z^n(x_i)$.

Pour contrôler la probabilité de rejeter H_0 , Bishop et Formby [10]³ suggèrent d'utiliser la v.a. MG^m définie comme

$$MG^m = \max(|N_1|, |N_2|, \dots, |N_m|)$$

où les N_j sont des v.a. normales $N(0, 1)$ indépendantes.

Notons $MG_{1-\alpha}^m$ le $(1 - \alpha)$ -quantile de MG^m . Considérons $\{x_1, \dots, x_m\}$ ($m \leq N$) et les statistiques correspondantes $T^n(x_1), \dots, T^n(x_m)$.

Les *règles de décisions* sont les suivantes :

1. Si $\max(|T^n(x_1)|, \dots, |T^n(x_m)|) \leq MG_{1-\alpha}^m \Rightarrow$ ne pas rejeter H_0 .
2. Sinon rejeter H_0 et accepter H_A .

² C'est-à-dire pour $N \rightarrow \infty$.

³ cité dans [29].

⁴ $MG_{0.95}^m = 2.80$ et $MG_{0.99}^m = 3.29$. Ces valeurs sont extraites de [10].

Conclusions : Si H_0 est acceptée, nous concluons que l'égalité de $D_Y^n = D_Z^n$ sur $\{x_1, \dots, x_m\}$ est également vérifiée sur \mathbb{R}^+ . C'est-à-dire que Y est stochastiquement égale Z à l'ordre n , $Y \stackrel{sd(n)}{=} Z$. Si H_0 est rejetée, nous concluons qu'il existe au moins un réel positif en lequel $D_Y^n \neq D_Z^n$. Il est alors nécessaire de vérifier s'il existe une relation de dominance stochastique d'ordre n entre Y et Z c'est-à-dire une inégalité entre D_Y^n et D_Z^n conservée sur \mathbb{R}^+ . Pour cela nous devons réaliser deux autres tests.

(ii). Test de l'inégalité $D_Y^n \geq D_Z^n$.

Les *hypotheses* en concurrence sont pour le deuxième test :

$$H_1 : \forall x \in \{x_1, \dots, x_m\} : D_Y^n(x_i) \geq D_Z^n(x_i)$$

$$H_{A_1} : \exists x_j \in \{x_1, \dots, x_m\} : D_Y^n(x_j) < D_Z^n(x_j).$$

Les *règles de décision* du second test sont basées sur le quantile de la v.a. MG^m , comme dans le premier test :

1. Si $\forall j \in \{1, 2, \dots, m\}$, : $T^n(x_j) \geq -MG_{1-\alpha}^m \Rightarrow$ accepter H_1
2. Si $\exists j \in \{1, 2, \dots, m\}$, : $T^n(x_j) < -MG_{1-\alpha}^m$, c'est-à-dire il existe un point x_j en lequel $D_Y^n(x_j)$ est significativement inférieur à $D_Z^n(x_j) \Rightarrow$ accepter H_{A_1} .

Conclusions : Si les hypothèses H_A et H_1 sont acceptées, nous concluons que l'inégalité $D_Y^n \geq D_Z^n$ vérifiée sur $\{x_1, \dots, x_m\}$ est également vérifiée sur \mathbb{R}^+ tout entier. C'est-à-dire $Y \stackrel{sd(n)}{\leq} Z$.

Si H_A et H_{A_1} sont acceptées, nous concluons que l'inégalité $D_Y^n \geq D_Z^n$ n'est pas conservée sur \mathbb{R}^+ . Et nous réalisons le troisième test pour déterminer si l'inégalité $D_Y^n \leq D_Z^n$ est conservée sur \mathbb{R}^+ .

(iii). Test de l'inégalité $D_Y^n \leq D_Z^n$.

Les hypothèses en concurrence pour ce troisième test sont :

$$H_2 : \forall x \in \{x_1, \dots, x_m\} : D_Y^n(x_i) \leq D_Z^n(x_i)$$

$$H_{A_2} : \exists x_j \in \{x_1, \dots, x_m\} : D_Y^n(x_j) > D_Z^n(x_j).$$

Les règles de décision correspondantes sont :

1. Si $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$, : $T^n(x_i) \leq MG_{1-\alpha}^m$, alors accepter H_2 .
2. Si $\exists j \in \{1, 2, \dots, m\}$, : $T^n(x_j) > MG_{1-\alpha}^m$
c'est-à-dire il existe un point x_j en lequel $D_Y^n(x_j)$ est significativement supérieur à $D_Z^n(x_j)$, \Rightarrow accepter H_{A_2} .

Conclusions : Si H_A , H_{A_1} et H_2 sont acceptées, nous concluons que l'inégalité $D_Y^n \leq D_Z^n$ vérifiée sur $\{x_1, \dots, x_m\}$ est également vérifiée sur \mathbb{R}^+ tout entier.

C'est-à-dire $Y \stackrel{sd(n)}{\succeq} Z$.

Enfin, si H_A , H_{A_1} et H_{A_2} sont acceptées, nous concluons qu'il existe au moins un réel positif x_i en lequel $D_Y^n < D_Z^n$ et qu'il existe au moins un réel positif x_j en lequel $D_Y^n > D_Z^n$. Par conséquent, aucune inégalité entre D_Y^n et D_Z^n n'est conservée sur \mathbb{R}^+ . Il n'existe donc pas de relation de dominance stochastique d'ordre n entre Y et Z .

Annexe L

Choix du portefeuille A.

Nous cherchons ici à former un portefeuille \mathcal{A} composé des cinq types d'actions dont les rendements sur 8 ans dépassent approximativement les rendements du bon d'état 3%/an. Nous supposons que les dividendes ont été intégrés aux prix.

Nous raisonnons comme suit : nous supposons que les rendements à 8 ans sur les prix des actions suivent des distributions normales. Nous ajustons ces distributions à partir de 5000 simulations des rendements à 8 ans. Pour réaliser ces simulations, nous utilisons le modèle de prix développé au chapitre 3.

Nous cherchons ensuite la frontière de Markowitz pour les portefeuilles composés de ces 5 types d'action. Comme les rendements des actions sont approximés par des gaussiennes, le rendement du portefeuille doit être approximé par une gaussienne. Par conséquent, la CVaR du rendement du portefeuille est complètement déterminée par la variance et la moyenne du rendement¹. La relation (4)² :

$$CVaR_\alpha(R) = \frac{f_z(z^{(\alpha)})}{\alpha} \sigma(R) - E[R]$$

définit une bijection

$$(\sigma(R), E[R]) \longleftrightarrow (CVaR_\alpha(R), E[R]) = \left(\frac{f_z(z^{(\alpha)})}{\alpha} \sigma(R) - E[R], E[R] \right)$$

entre les points du plan $\sigma(R)/E[R]$ et les points du plan $CVaR_\alpha(R)/E[R]$. On observe sur la figure [L.1] que le portefeuille de variance minimale représenté

¹ Cfr. chapitre 8, §8.3.4.

² Où $f_z(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}s^2}$ est la densité de la normale $N(0,1)$. Et $z^{(\alpha)}$ est l'alpha quantile de la normale $N(0,1)$.

par 1^* dans le plan $\text{dév.std}/\text{espérance}$ correspond au point 1 dans le plan $\text{CVaR}_{0.70}/\text{espérance}$. Il n'est donc pas le portefeuille de $\text{CVaR}_{0.70}$ minimale. De même le portefeuille 2^* de CVaR minimale n'est pas le portefeuille de variance minimale.

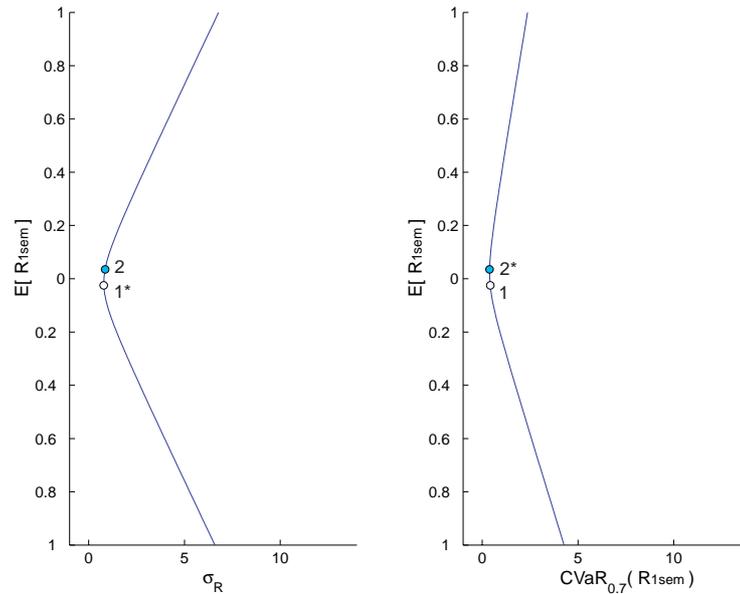


FIG. L.1 – A gauche : frontière de Markowitz (plan $\sigma(R_{1\text{ sem}})/E[R_{1\text{ sem}}]$). A droite : frontière de Markowitz représentée dans le plan $\text{CVaR}_{0.70}(R_{1\text{ sem}})/E[R_{1\text{ sem}}]$.

Dans la figure [Fig.L.2], nous visualisons la position du bon d'état par rapport à la frontière de Markowitz. Nous voyons qu'il existe de nombreux portefeuille d'actions appartenant à la frontière de Markowitz qui sont susceptibles de posséder des rendements dominant stochastiquement au scd ordre les rendements du bon d'état. Nous prenons pour portefeuille \mathcal{A} un de ces portefeuilles. Nous choisissons, au hasard, de prendre celui pour lequel $E[R_8]=1.1$. La distribution des rendements du portefeuille \mathcal{A} donnée par la figure [Fig.L.3] est formée à partir de 5000 simulations. Nous obser-

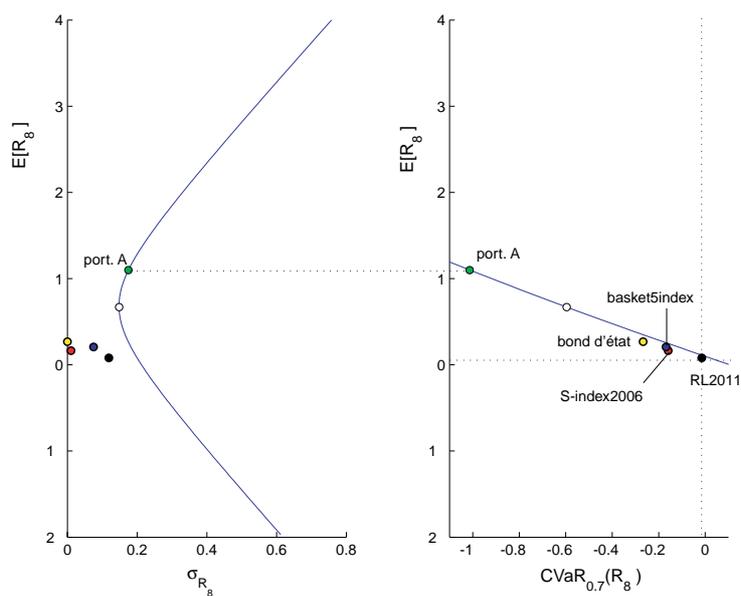


FIG. L.2 – A gauche : frontière de Markowitz (plan $\sigma(R_8)/E[R_8]$). A droite : frontière de Markowitz représentée dans le plan $CVaR_{0.70}(R_8)/E[R_8]$.

vons que la probabilité empirique d'obtenir un rendement inférieur au rdt 26.67% du bon d'état est extrêmement faible (1/5000). Si nous acceptons de négliger l'existence des rendements inférieurs à 26.67%, la figure [Fig.L.3] nous montre que le rdt du portefeuille \mathcal{A} domine stochastiquement au scd ordre le rdt du bon d'état.

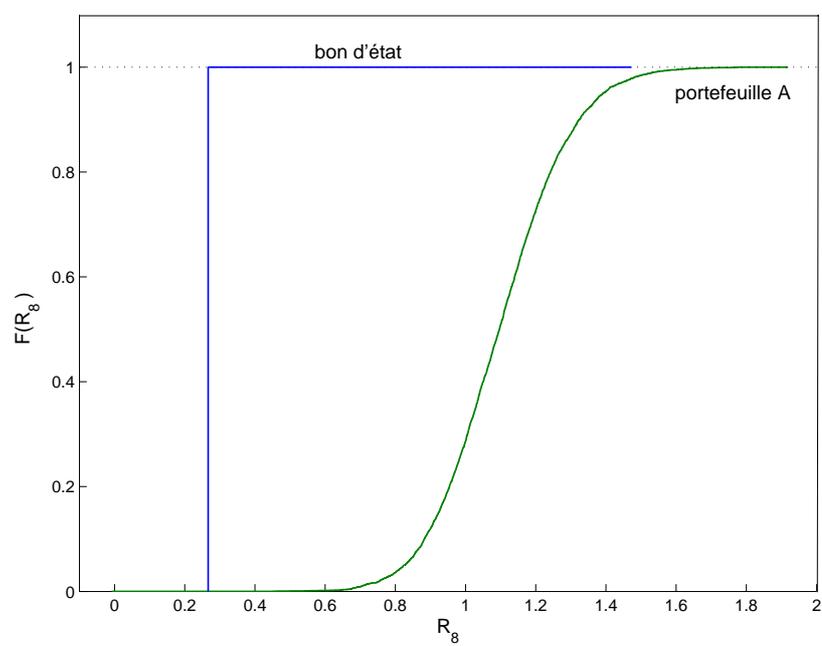


FIG. L.3 – Distribution des rdts du portefeuille A.

Annexe M

Consistance de l'estimateur non paramétrique de la CVaR.

A la section 1.3 (page 19), nous avons défini la CVaR. Cette définition peut être réénoncée comme suit :

Définition 20 ($CVaR_\alpha$) .

Soit une stratégie financière réalisée sur l'intervalle de temps $[0, T]$.

Soit L les profits et pertes potentiels ($L < 0$ perte, $L > 0$ gain) associés à cette stratégie. L est une variable aléatoire sur l'espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) .

Si L est une v.a. telle que $E[L^-] < \infty$ ¹, nous appellerons $CVaR_\alpha(L)$ à l'horizon T pour le niveau de rareté $\alpha \in (0, 1)$ le réel

$$CVaR_\alpha(L) = -\frac{1}{\alpha} \left(E[L \cdot I(L \leq L^{(\alpha)})] - L^{(\alpha)} \cdot (P[L \leq L^{(\alpha)}] - \alpha) \right) \quad (M.1)$$

où I représente l'indicatrice.

Pour que l'estimateur

$$-\frac{\sum_{i=1}^{\lfloor m\alpha \rfloor} L_i}{\lfloor m\alpha \rfloor} \quad (M.2)$$

de $CVaR_\alpha(L)$ soit consistant, il faut vérifier que $E[L^-] < \infty$.

Pour que cette propriété soit vérifiée, il suffit que L ait une variance finie.

En effet :

$$\text{var}(L) < \infty \xrightarrow{(1)} \text{var}(|L|) < \infty \xrightarrow{(2)} E[|L|] < \infty \xrightarrow{(3)} E[X^-] < \infty$$

¹ Où $L^- = \max(0, -L)$.

Preuve

$$(1) \text{ var}(L) < \infty \Rightarrow E[|L|^2] = E[L^2] < \infty \Rightarrow \text{var}(|L|) + E^2[|L|] < \infty \\ \text{et } \text{var}(|L|) + E^2[|L|] < \infty \Rightarrow \text{var}(|L|) < \infty$$

$$(2) \text{ var}(|L|) = E[|L|^2] - E^2[|L|] < \infty \\ \Rightarrow E[|L|^2] < \infty \text{ et } E^2[|L|] = E^2[|L|] - \text{cstte} < \infty.$$

$$(3) E[|L|] < \infty \iff E[L^-] < \infty \wedge E[L^+] < \infty.^2$$

□

Dans le modèle de prix que nous avons utilisé dans ce mémoire (cfr. section 2.2), les taux de rendement centrés dévolatilisés³ ont été modélisés au moyen de distributions student de degré de liberté $\nu > 2$. Ils possèdent donc tous une variance finie. Mais, les différentes stratégies financières présentées au long de ce mémoire possèdent-elles encore des profits et pertes L de variance finie ?

Nous n'avons pas trouvé dans la littérature de test statistique permettant de vérifier qu'un échantillon de réalisations *iid* provient d'une loi dont la variance est finie. Toutefois, nous pouvons observer la variance empirique de L pour chacune des stratégies :

Déviatoin standard empirique.

Revente 1 sem après son émission.	$\hat{\sigma}(L)$
call panier	1.0111 10^3
put panier	3.5379
Position courte sur.	$\hat{\sigma}(L)$
call panier	1.0042 10^3
call asiatique	1.0239 10^3
put panier	6.6429
put asiatique	3.7185
Produits à capital garanti.	$\hat{\sigma}(R)$
Bon d'état	0
RL2011	0.1200
Basket5index	0.0750
S-index 2006	0.0106
Panier \mathcal{A}	0.1752

²avec $L^+ = \max(0, L)$, cfr I. Gijbels, MATH2430 Théorie de la mesure, 1994, page 38, cours de l'Institut de Statistiques de l'Université Catholique de Louvain.

³Les taux de rendement centrés dévolatilisés sont notés $\sqrt{\frac{\nu-2}{\nu}} X_t$ cfr équation (2.4) chapitre 2.

L'observation de ces variances empiriques nous encourage à accepter l'hypothèse : $var(L) < \infty$ pour chacune des stratégies considérées à l'exception des positions courtes sur un call. Dans ces cas, les variances sont de l'ordre du million. Toutefois, sur un horizon d'une semaine, il est bien évident que les variations de la valeur sous-jacente (valeur d'un panier de 5 actions) sont limitées. Par conséquent, même si les variances des L associés aux positions courtes sur call sont élevées, elles ne peuvent pas être infinies.

Ces arguments nous ont conduit à accepter de considérer (M.2) comme un estimateur *consistent* de $CVaR_\alpha(L)$ pour chacune des stratégies considérées dans ce mémoire.

Table des figures

1.1	$VaR_\alpha(L)$ et $CVaR_\alpha(L)$	20
2.1	Evolution des cours.	29
2.2	Evolution des rendements.	46
2.3	Fonction de log vraisemblance.	47
6.1	Autocorrélation entre les rendements centrés dévolatilisés de V	91
6.2	Autocorrélation partielle entre les rendements centrés dévolatilisés de V	91
6.3	Distribution des P&L pour les différentes options.	92
6.4	Distribution des P&L associés à une revente du put panier une semaine après son émission.	93
6.5	Call panier : $P\&L^{(\alpha)}$ et $CVaR_\alpha$ des P&L associés à une revente 1 semaine après l'émission. $\alpha = 0.01$ [bleu] et $\alpha =$ 0.05 [rouge]. Et évolution des erreurs relatives correspondantes.	94
6.6	Put panier : $P\&L^{(\alpha)}$ et $CVaR_\alpha$ des P&L associés à une revente 1 semaine après l'émission. $\alpha = 0.01$ [bleu] et $\alpha =$ 0.05 [rouge]. Et évolution des erreurs relatives correspondantes	94
6.7	Détail – Put panier : évolution des erreurs relatives sur les estimées de la $CVaR_{0.01}$ [bleu] et de la $CVaR_{0.05}$ [rouge] des $P\&L$ associés à une revente 1 semaine après émission.	95
6.8	Call panier : $P\&L^{(\alpha)}$ et $CVaR_\alpha$ des P&L associés à une position courte. $\alpha = 0.01$ [bleu] et $\alpha = 0.05$ [rouge].	96
6.9	Put panier : $P\&L^{(\alpha)}$ et $CVaR_\alpha$ des P&L associés à une position courte. $\alpha = 0.01$ [bleu] et $\alpha = 0.05$ [rouge].	96
6.10	Call panier : évolution de l'estimée de $CVaR_{[1.7399]}(P\&L)$ des $P\&L$ associés à une revente 1 semaine après l'émission. Et évolution des erreurs relatives correspondantes.	97
6.11	Put panier : évolution de l'estimée de $CVaR_{[-5.6389]}(P\&L)$ [bleu] et évolution de l'estimée de $CVaR_{[-2.6724]}(P\&L)$ [rouge] des $P\&L$ associés à une revente 1 semaine après l'émission. Et évolution des erreurs relatives correspondantes.	97

6.12	Call panier : évolution de l'estimée de $CVaR_{[-10.9909]}(P\&L)$ [bleu] et évolution de l'estimée de $CVaR_{[-3.8297]}(P\&L)$ [rouge] des $P\&L$ associés à une position courte. Et évolution des erreurs relatives correspondantes.	98
6.13	Put panier : évolution de l'estimée de $CVaR_{[-14.2518]}(P\&L)$ [bleu] et évolution de l'estimée de $CVaR_{[-9.5181]}(P\&L)$ [rouge] des $P\&L$ associés à une position courte. Et évolution des erreurs relatives correspondantes.	99
6.14	Call asiatique : évolution des estimées de $CVaR_{0.01}(P\&L)$ et $VaR_{0.01}(P\&L)$ [bleu] et évolution des estimées de $CVaR_{0.05}(P\&L)$ et de $VaR_{0.05}(P\&L)$ [rouge] des $P\&L$ associés à une position courte. Et évolution des erreurs relatives correspondantes.	100
6.15	Put asiatique : évolution des estimées de $CVaR_{0.01}(P\&L)$ et $VaR_{0.01}(P\&L)$ [bleu] et évolution des estimées de $CVaR_{0.05}(P\&L)$ et de $VaR_{0.05}(P\&L)$ [rouge] des $P\&L$ associés à une position courte. Et évolution des erreurs relatives correspondantes.	100
6.16	Call asiatique : évolution de l'estimée de $CVaR_{[-9.0783]}(P\&L)$ [bleu] et évolution de l'estimée de $CVaR_{[-4.4485]}(P\&L)$ [rouge] des $P\&L$ associés à une position courte. Et évolution des erreurs relatives correspondantes.	101
6.17	Put asiatique : évolution de l'estimée de $CVaR_{[-10.7556]}(P\&L)$ [bleu] et évolution de l'estimée de $CVaR_{[-7.4055]}(P\&L)$ [rouge] des $P\&L$ associés à une position courte. Et évolution des erreurs relatives correspondantes.	101
7.1	Analyse de la préféralité d'un produit financier.	118
7.2	Position relative des différents produits. RL2011 (en noir), basket5-index (en bleu), S-index2006 (en rouge), bon du trésor(en jaune), portefeuille A (en vert).	129
7.3	Distributions empiriques des rendements du RL2011 (en noir), du basket5-index (en bleu), du S-index2006 (en rouge), du bon du trésor(en jaune) et du portefeuille A (en vert).	130
B.1	Calcul de $VaR_{0.01}(L_t)$ par inversion de Fourier.	149
D.1	Estimateur à noyau d'une fonction de densité continue. $n=20$, $h=1.08$	160
E.1	Action Solvay.	163
E.2	Action Solvay.	163
E.3	Action Colruyt.	164
E.4	Action Colruyt.	164
E.5	Action Dexia.	165
E.6	Action Dexia.	165
E.7	Action Agfa Gevaert.	166

E.8	Action Agfa Gevaert.	166
E.9	Action Interbrew.	167
E.10	Action Interbrew.	167
E.11	Rendements Solvay, AR(0)-GARCH(1,0)	171
E.12	Rendements Solvay, AR(0)-GARCH(1,0)	171
E.13	Rendements Solvay, AR(1)-GARCH(1,0)	172
E.14	Rendements Solvay, AR(1)-GARCH(1,0)	172
E.15	Rendements Solvay, AR(1)-GARCH(1,1)	173
E.16	Rendements Solvay, AR(1)-GARCH(1,1)	173
E.17	Rendements Solvay, AR(2)-GARCH(1,1)	174
E.18	Rendements Solvay, AR(2)-GARCH(1,1)	174
E.19	Rendements Solvay, AR(2)-GARCH(1,0)	175
E.20	Rendements Solvay, AR(2)-GARCH(1,0)	175
E.21	Rendements Solvay, AR(2)-GARCH(2,2)	176
E.22	Rendements Solvay, AR(2)-GARCH(2,2)	176
E.23	Rendements Colruyt, AR(0)-GARCH(1,0)	178
E.24	Rendements Colruyt, AR(0)-GARCH(1,0)	178
E.25	Rendements Colruyt, AR(0)-GARCH(1,1)	179
E.26	Rendements Colruyt, AR(0)-GARCH(1,1)	179
E.27	Rendements Colruyt, AR(1)-GARCH(1,1)	180
E.28	Rendements Colruyt, AR(1)-GARCH(1,1)	180
E.29	Rendements Colruyt, AR(2)-GARCH(1,0)	181
E.30	Rendements Colruyt, AR(2)-GARCH(1,0)	181
E.31	Rendements Colruyt, AR(2)-GARCH(1,1)	182
E.32	Rendements Colruyt, AR(2)-GARCH(1,1)	182
E.33	Rendements Dexia, AR(0)-GARCH(1,0)	184
E.34	Rendements Dexia, AR(0)-GARCH(1,0)	184
E.35	Rendements Dexia, AR(0)-GARCH(1,1)	185
E.36	Rendements Dexia, AR(0)-GARCH(1,1)	185
E.37	Rendements Dexia, AR(1)-GARCH(1,0)	186
E.38	Rendements Dexia, AR(1)-GARCH(1,0)	186
E.39	Rendements Dexia, AR(1)-GARCH(1,1)	187
E.40	Rendements Dexia, AR(1)-GARCH(1,1)	187
E.41	Rendements Dexia, AR(1)-GARCH(2,2)	188
E.42	Rendements Dexia, AR(1)-GARCH(2,2)	188
E.43	Rendements Dexia, AR(2)-GARCH(1,0)	189
E.44	Rendements Dexia, AR(2)-GARCH(1,0)	189
E.45	Rendements Dexia, AR(2)-GARCH(1,1)	190
E.46	Rendements Dexia, AR(2)-GARCH(1,1)	190
E.47	Rendements Dexia, AR(2)-GARCH(2,2)	191
E.48	Rendements Dexia, AR(2)-GARCH(2,2)	191
E.49	Rendements Dexia, AR(0)-GARCH(2,1)	192
E.50	Rendements Dexia, AR(0)-GARCH(2,1)	192
E.51	Rendements Agfa Gevaert, AR(0)-GARCH(1,0)	194

E.52 Rendements Agfa Gevaert, AR(0)-GARCH(1,0) 194
 E.53 Rendements Agfa Gevaert, AR(0)-GARCH(1,1) 195
 E.54 Rendements Agfa Gevaert, AR(0)-GARCH(1,1) 195
 E.55 Rendements Agfa Gevaert, AR(1)-GARCH(1,0) 196
 E.56 Rendements Agfa Gevaert, AR(1)-GARCH(1,0) 196
 E.57 Rendements Agfa Gevaert, AR(1)-GARCH(1,1) 197
 E.58 Rendements Agfa Gevaert, AR(1)-GARCH(1,1) 197
 E.59 Rendements Agfa Gevaert, AR(2)-GARCH(2,2) 198
 E.60 Rendements Agfa Gevaert, AR(2)-GARCH(2,2) 198
 E.61 Rendements Interbrew, AR(1)-GARCH(1,0) 199
 E.62 Rendements Interbrew, AR(1)-GARCH(1,0) 199
 E.63 Rendements Interbrew, AR(0)-GARCH(1,0) 200
 E.64 Rendements Interbrew, AR(0)-GARCH(1,0) 200
 E.65 Rendements Interbrew, AR(0)-GARCH(1,1) 201
 E.66 Rendements Interbrew, AR(0)-GARCH(1,1) 201
 E.67 Rendements Interbrew, AR(1)-GARCH(1,1) 202
 E.68 Rendements Interbrew, AR(1)-GARCH(1,1) 202

G.1 Call panier. Fonction Génératrice des moments de Q_x 207
 G.2 Call panier. Fonction Génératrice des moments de Q_x (vue A). . . 207
 G.3 Call panier. Fonction Génératrice des moments de Q_x (vue B). . . 208
 G.4 Call panier. Fonction Génératrice des moments de Q_x sur \mathbb{D}_x , $x = 0$. 208
 G.5 Put panier. Fonction Génératrice des moments de Q_x 209
 G.6 Put panier. Fonction Génératrice des moments de Q_x 209
 G.7 Put panier. Fonction Génératrice des moments de Q_x (vue A). . . . 210
 G.8 Put panier. Fonction Génératrice des moments de Q_x (vue B). . . . 210
 G.9 Put panier. Fonction génératrice des moments de Q_x sur \mathbb{D}_x , $x = 0$. 211
 G.10 Put panier. Fonction génératrice des moments de Q_x sur \mathbb{D}_x , $x = 140$. 211

L.1 A gauche : frontière de Markowitz (plan $\sigma(R_{1\text{ sem}})/E[R_{1\text{ sem}}]$). A droite : frontière de Markowitz représentée dans le plan $CVaR_{0.70}(R_{1\text{ sem}})/E[R_{1\text{ sem}}]$ 230
 L.2 A gauche : frontière de Markowitz (plan $\sigma(R_8)/E[R_8]$). A droite : frontière de Markowitz représentée dans le plan $CVaR_{0.70}(R_8)/E[R_8]$. 231
 L.3 Distribution des rdts du portefeuille A. 232

Bibliographie

1. Les Clewlow & Chris Stickland, Energy Derivatives : Pricing and Risk Management, Lacima Group, 2003.
Disponible sur <http://www.lacima.group>.
2. Abate, J. and Whitt, W. (1992). The Fourier-series method for inverting transforms of probability distributions. *Queueing Systems* 10, pp5-88.
3. Acerbi C., Nordio C. & Sitori C. (2001), Expected Shortfall as a Tool for Financial Risk Management. Working paper.
Disponible sur <http://www.gloriamundi.org/var/wps.html>.
4. Acerbi, C., Tasche, D. (2001), On the coherence of Expected Shortfall. Working paper.
Disponible sur <http://www.gloriamundi.org/var/wps.html>.
5. Acerbi, C., Tasche, D. (2002), On the coherence of Expected Shortfall. *Journal of Banking & Finance* 26(7), 1487-1503.
6. Acerbi, C., Tasche, D. (2001), On the coherence of Expected Shortfall. Talk at the Center for Computational Finance, Pittsburgh. August 24, 2001
7. Acerbi, C., Tasche, D. (2002), Expected Shortfall : a natural coherent alternative to Value at Risk. *Economic Notes* 31(2), 379-388.
8. Acerbi C. (2002), Spectral Measures of risk ; a coherent representation of subjective risk aversion.
9. Bertsimas, D., Lauprete, G.-J., Samarov, A. (2000), Shortfall as a risk measure : properties, optimization and applications. Working paper, Sloan School of Management, MIT, Cambridge.
10. Bishop J.-A., Formby J.-P. and Thistle P.D. (1992), Convergence of the South and Non-South Income Distributions, 1969-1979. *American Economic Review*, 1992, vol. 82,issue 1, pages 262-72.
11. Bollerslev, T.(1986), Generalized Autoregressive Conditionnal Heteroscedasticity, *Journal of econometrics*, **31**(3), 307-327.
12. Bollerslev, T.(1987), A Conditionnal Heteroscedastic Time Series Models for Speculative Prices and rates of Return, *Review of economic and Statistics*, **69**(3), 542-547.
13. Bouchaud J.-P, Matacz A. et Potters M. (2001), The leverage effect in financial markets retarded volatility and market panic, working paper, Ecole Polytechnique de Paris.
14. Bühlmann Peter, Block length selection in the bootstrap for time series, *Computational Statistics & Data Analysis* 31 (1999), Elsevier.
15. Bühlmann Peter, Bootstrap for time series, working paper, ETH-Zürich, 2000.

16. Cambanis S.(1981), Huang S. et Simons G., On the theory of elliptically contoured distributions, *Journal of Multivariate Analysis*, 11, pp 368-385.
17. Chen E. Jack (2002), Quantile and histogram estimation, Proceedings of the Winter Simulation Conference 2001. La version de Juin 2002 est accessible disponible sur la page *Computer Science Bibliography* de l'Université de Trèves (<http://dblp.uni-trier.de>).
18. Chow, K. V., J. Formby, and B. Zheng. October 2000. Inequality orderings, stochastic dominance and statistical inference. *Journal of Business, Economics and Statistics*, pages 479-488.
19. Chung K.L.(1974), *A Course in Probability Theory*, second edition, Academic Press, New York.
20. Conover, W.J., *Practical nonparametric Statistics*, John Wiley & sons, Inc., 1980.
21. Cont R.(1997), Scaling and correlation in financial data, *Science & Finance Working Paper* 97-01.
22. Cont R. (2001), Empirical properties of asset returns : stylized facts and statistical issues, *Quantitative Finance* Volume 1, pp223-236.
23. Cox J. S. Ross & Rubinstein [1979] Option Pricing : a simplified approach, *Journal of Financial Economics*, 7 pp 229-263.
24. David, H. A. (1970), *Order statistics*, Wiley series in probability and mathematical statistics, Wiley, New York.
25. De Giorgi Enrico (2002), A Note on Portfolio Selection under Various Risk Measures, Working Paper, Risklab, ETH-Zürich.
26. De Giorgi Enrico (2002), Reward-Risk Portfolio Selection and Stochastic Dominance, Institute for Empirical Research in Economics, University of Zürich, Working Paper n.121, ISN 1424-0459.
27. Philippe Artzner, Freddy Delbaen, Jean-Marc Eber and David Heath (1999), Coherent Measures of Risk, *Math. Finance* 9 (1999), no. 3, 203-228
28. Freddy Delbaen (1999), Coherent Risk Measures on General Probability Spaces. Disponible sur <http://www.math.ethz.ch/delbaen/>.
29. Duclos J.-Y., Davidson R.(2000), Statistical Inference for stochastic dominance and for the measurement of poverty and inequality, *Econometrica*, vol. 68, Novembre 2000, pages 1435-1465. Disponible sur <http://www.ecn.ulaval.ca/jyves/>.
30. Durrleman V., Nikeghbali A. & Roncalli T. (2000), Which copula is the right one ?, working paper, Groupe de recherche opérationnelle, Crédit Lyonnais, Paris.
31. Eberlein E. & Keller U.(1995), Hyperbolic distributions in finance. *Bernoulli* 1, 281-299.

32. Eberlein E. & Karsten Prause (1998), The Generalized Hyperbolic Model : Financial Derivatives and Risk Measures, Working Paper **56**, November 1998, Institut für Mathematische Stochastik, Universität Freiburg.
33. Eberlein E. (1999), Application of generalized hyperbolic Lévy motions to finance. Lévy Processes. Birkhäuser, Basel.
34. Efron B. & Tibshirani R.J., An introduction to the bootstrap, Chapman & Hall 1993.
35. P. Embrechts, A. J. McNeil, and D. Straumann (1999). Correlation and dependency in risk management : properties and pitfalls. ETH-Zürich, 1999.
36. P. Embrechts, A. J. McNeil, and D. Straumann (1999). Correlation : Pitfalls and alternatives. RISK, 12(5) :6971, 1999.
37. P. Embrecht (2001), Extremes in economics and the economics of extremes, talk at the SemStat meeting on Extreme Value Theory and Applications in Gothenburg on December 13, 2001.
Disponible sur <http://www.math.ethz.ch/baltes/ftp/papers.html>
38. Fama E. (1965), The behaviour of Stock Market Prices, *The Journal of business of the University of Chicago* 38 (1965), 34-105.
39. Froberg Carl-Erik (1965), Introduction to numerical analysis, Addison-Wesley, Chapter 8. Interpolation, pp172-202.
40. Glasserman P. (2000), Variance Reduction Techniques for Estimating Value-at-Risk, Management Science, Vol. 46, n10, October 2000 pp. 1349-1364.
41. Glasserman P. (2002), Portfolio Value-at-Risk with Heavy-Tailed Risk Factors, Mathematical Finance, Vol. 12, No. 3 (July 2002), 239-269.
42. Göing Anja (1996), Estimation in financial Models, Internal paper, Risklab of ETH-Zurich.
43. Hull, J. et White (2002). Option, Futures and other Derivatives, Prentice Hall, fourth ed. (International edition).
44. Jensen J.-L.(1995), Saddlepoint approximations, Oxford, Clarendon press, 1995
45. Kallsen Jan, Kristen Jrn et Eberlein Ernst (2000), Risk Management Based on Stochastic Volatility, *Journal of Risk*.
46. Kusuoka, S. (2001), On law of invariant coherent risk measures. Mathematical Economics, 3, 83-95 (2001), Advances in Mathematical Economics. Springer-Verlag, Tokyo.
47. Klüppelberg Claudia et Emmer Susanne (2002), Optimal portfolios when stock prices follow an exponential Lévy process.

48. Kotz S. et Johnson N.L., Continuous multivariate distributions, Wiley , 1972.
49. Kwok Y.K. (1998), Mathematical Models for financial Derivatives, Springer-Verlag, page 24-27
50. lindskog F.(2000), Linear Correlation Estimation, working paper, Risklab, ETH Zurich.
51. Lindskog F.(2001a), Embrecht P. et McNeil A., Modelling Dependence with Copulas and Applications to rik Management, september 2001
52. Lindskog F.(2001b), Alexander McNeil et Uwe Schmock, Kendall's tau for elliptical distributions, june 26, 2001.
53. Louichi A. et Karem A.(2001), Volatilité du CAC40 et changements Structurels, Working paper, GEMMA-CREME, Faculté de sciences économiques et de gestion, Université de Caen.
54. Mandelbrot B.(1963), The Variation of Certain Speculative Prices. *The Journal of business of the University of Chicago* 36 (1963), 394-419.
55. McCullagh P. (1987), Tensor methods in statistics, Chapman and Hall Ltd, London, 1987.
56. Nelsen Roger B. (1998), An introduction to copulas, Springer Verlag.
57. Penev, S. (1995), Saddlepoint Approximation in the Linear Structural Relationship Model. *Com.in Statistics, Simulation and Computation*, 24, 2, 349- 366 (1995).
Disponible sur <http://www.maths.unsw.edu.au/statistics/preprints/>
58. Pflug, G. (2000) Some remarks on the value-at-risk and the conditional value-at-risk. In, Uryasev, S. (Editor). 2000. Probabilistic Constrained Optimization : Methodology and Applications. Kluwer Academic Publishers.
Disponible sur <http://www.gloriamundi.org/var/pub.html>
59. Pichler Stefan (1999), A comparison of analytical methodologies for portfolios that include options.
60. Protter Philip (1990), Stochastic Integration and differential equations, Springer-Verlag.
61. Rabinowitz Philip and Philip J. Davis (1974), Methods of numerical integration, Academic press, New York, 1974.
62. Ralston Anthony (1978), A first course in numerical analysis, McGraw-Hill, Tokyo 1978, 2nd ed., Chapter4. Numerical quadrature, pp76-129.
63. Rockafellar R.T. and S. Uryasev (2000) : Optimization of Conditional Value-at-Risk. *The Journal of Risk*. Vol. 2, No. 3, 2000, 21-41.
64. Rockafellar R.T. and S. Uryasev (2001) : Conditional Value-at-Risk for General Loss Distributions. Research Report 2001-5. ISE Dept., University of Florida, April 2001.

65. Ronchetti E. (1997), A Comparison of Saddlepoint Approximations for Marginal Distributions , Computing Science and Statistics, Vol. 28, pp. 228-234.
66. Roncalli T., Baud N. et Jouanin J.-F. (2002), Copules et aspects multidimensionnels du risque, Groupe de recherche opérationnelle, Crédit Lyonnais, Paris.
67. Rousseeuw P.J. & Molenberghs G.(1993), Transformation of non positive semidefinite correlation matrices, Communications in Statistics-Theory and Methods 22(4),965-984.
68. Samorodnitsky G. and Racheva-Iotova B. (1991), Long range dependence in heavy tailed stochastic processes, Cornell University, School of Operations Research and Industrial Engineering, Technical Reports.
69. Simar L.(2002), An invitation to the bootstrap, Notes de cours, Institut de Statistique, Université Catholique de Louvain
70. Serfling,R.J. (1980), Approximation Theorem of Mathematical Statistics, John Wiley and Sons, Inc.
71. Sklar A. & Schweizer B. (1983), Probabilistic Metric Spaces, North-Holland.
72. Murray R. Spiegel, Formules et tables de mathématiques, 19^{ième} édition, Série Schaum, McGraw-Hill 1974.
73. Tasche, D. (2000), Conditional Expectation as Quantile Derivative, Working paper, TU-München. Disponible sur : <http://www-m4.mathematik.tu-muenchen.de/m4/pers/tasche/>.
74. Tasche D. (2001), Expected Shortfall and Beyond. Slides, Risk Day 2001, ETH-Zürich. Disponible sur <http://www-m4.mathematik.tu-muenchen.de/m4/pers/tasche/>.
75. Tasche, D. (2002), Expected Shortfall and Beyond.Journal of Banking and Finance 26(7), 1519-1533.
76. Van Dooren Paul(2001), Algorithmique numérique, Notes de cours, fac. des sciences appliquées, Université Catholique de Louvain.
77. Van dooren Paul(2002), Théorie des matrices, Notes de cours, fac. des sciences appliquées, Université Catholique de Louvain.
78. A.G.Z. Kemna and Ton Vorst(1990). A pricing method for options based on average asset values, Journal of Banking and Finance, 14, 113-129.
79. Ton Vorst, *Averaging options* in The Hanbook of exotic options, I. Nelken editor, Irwin 1996.
80. Wolfstetter Elmar(2000), *Stochastic dominance : theory and Applications*in Topics in Microeconomics : Industrial Organization, Auctions, and Incentives, Cambridge university Press 1999. Disponible sur <http://ideas.repec.org/>

81. Yasuhiro YAMAI and Toshinao YOSHIBA(2001), On the Validity of Value-at-Risk : Comparative Analyses with Expected Shortfall. Bank of Japan, IMES Discussion Paper Series 2001-E-4, March 2001.
82. Yasuhiro YAMAI and Toshinao YOSHIBA(2001), Comparative Analyses of Expected Shortfall and VaR Comparative Analyses : their estimation error, decomposition, and optimization. Bank of Japan, IMES Discussion Paper Series 2001-E-12, July 2001.
83. Yasuhiro YAMAI and Toshinao YOSHIBA(2001), Comparative Analyses of Expected Shortfall and Value-at-Risk (2) : expected utility maximization and tail risk. Bank of Japan, IMES Discussion Paper Series 2001-E-14, August 2001.
84. Yasuhiro YAMAI and Toshinao YOSHIBA(2002), Comparative Analysis Comparative Analysis of Expected Shortfall and Value-at-Risk(3) : their validity under market stress. Bank of Japan, IMES Discussion Paper Series 2002-E-2, April 2002.
85. Zeevi A. & Mashal R. (2002), Beyond Correlation : Extreme Comovements between financial assets, Submitted for publication in June 2002. Revised in October 2002.
Disponible sur <http://www-1.gsb.columbia.edu/faculty/azeevi/>.