Bewertung von Versicherungsrisiken mittels des Äquivalenznutzenprinzips

Diplomarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades

„Diplom-Wirtschaftsmathematiker“

der Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften

der Universität Ulm

vorgelegt von

Gregor Mummenhoff

Ulm im Februar 2004

1. Gutachter: Prof. Dr. Rüdiger Kiesel

2. Gutachter: Prof. Dr. Hans-Joachim Zwiesler

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Ziel dieser Arbeit ist es, für einen dynamischen Finanzmarkt eine Methode zur Bewertung verschiedenartiger versicherbarer Risiken vorzustellen.

Ein klassisches Verfahren zur Bewertung von Finanzprodukten stellt die Black-Scholes-Methode dar. Sie beruht darauf, dass der Auszahlungsstrom eines Finanzproduktes durch ein geeignetes Portfolio repliziert und damit das zugehörige Risiko eliminiert wird. Infolgedessen muss dann der Wert des Finanzproduktes den Bereitstellungskosten für das Portfolio entsprechen. Auf unvollständigen Märkten wie dem Markt für Versicherungsrisiken kann diese Methode jedoch keine Anwendung finden, da sich die Unvollständigkeit dadurch auszeichnet, dass nicht für jedes Finanzprodukt ein solches replizierendes Portfolio aufgesetzt werden kann. Die Unvollständigkeit des Marktes ergibt sich hierbei daraus, dass Versicherungsrisiken aus Unsicherheiten resultieren, die nicht Risiken eines oder mehrerer gehandelter Wertpapiere sind.

Das in der nachfolgenden Untersuchung vorgestellte Bewertungsverfahren wird daher einen Erwartungsnutzenansatz verfolgen und dabei das Äquivalenznutzenprinzip erweitern. Dieses Prinzip stellt einen Ansatz zur Prämienkalkulation aus Sicht eines Versicherungsunternehmens zur Verfügung. Dazu wird angenommen, dass das Versicherungsunternehmen am Ende einer festgelegten Periode Versicherungsleistungen in einer zufälligen Höhe Z zu erbringen hat. Ausgestattet mit einer Nutzenfunktion u und einem Startkapital in Höhe von w setzt demnach das Versicherungsunternehmen für die Summe aller Prämien P folgende Gleichung an:

$$E[u(w + P - Z)] = u(w).$$

Die Idee des Ansatzes ist demnach, eine faire Prämie so zu kalkulieren, dass für das Versicherungsunternehmen die unsichere Erwartung über den Endnutzen bei Betreiben des Versicherungsgeschäftes dem sicheren Endnutzen aus dem Startkapital entspricht. Damit ist das Versicherungsunternehmen folglich indifferent oder auch ohne einen Vorbehalt gegenüber diesen beiden Alternativen. Dementsprechend werden die Prämien dieses Bewertungsverfahrens Vorbehaltsprämien heißen.

Der beschriebene Erwartungsnutzenansatz stellt von Hause aus ein statisches Verfahren dar, da angenommen wird, dass sich das Startkapital während der gesamten Periode nicht ändert. Die vorliegende Untersuchung zur Bewertung von Versicherungsrisiken erweitert diesen Ansatz dahingehend, dass Handel mit dem Startkapital während der gesamten Periode zugelassen wird. Eine wesentliche Rolle bei dieser Erweiterung werden darin die bereits erwähnten Vorbehaltsprämien spielen. Diese Prämien ergeben sich sowohl für den Versicherungsnehmer als auch für das Versicherungsunternehmen dadurch, dass jeweils der bezüglich der Anlagestrategien am Finanzmarkt maximal erwartete Endnutzen mit und ohne Abschluss eines Versicherungsvertrages untersucht wird. Für das Versicherungsunternehmen stellen sie somit die Mindestsumme dar, für die es bereit ist, das Risiko zu übernehmen. Für den Versicherungnehmer ist es entsprechend die größte Summe, die er für die Abtretung seines Risikos aufwenden möchte.

Das Vorhaben, den Erwartungsnutzen über alle Anlagestrategien am Finanzmarkt zu maximieren, führt zunächst auf Probleme aus der Theorie der stochastischen Steuerung und Optimierung. Die zur Lösung notwendigen Grundlagen sind somit als erstes in Angriff zu nehmen und werden im folgenden Kapitel gelegt. Im zweiten Kapitel können im Anschluss daran das Bewertungsverfahren und die Vorbehaltsprämien vorgestellt werden. Für den Fall einer Exponentialnutzenfunktion zur Bewertung des Endnutzens heißt das zugrunde liegende Prinzip auch Exponentialnutzenprinzip. Es wird die Grundlage der im dritten Kapitel folgenden Anwendungsbeispiele sein, da diese Wahl der Nutzenfunktion eine Lösbarkeit der stochastischen Optimierungsprobleme ermöglicht.

Die Beispiele werden in drei Abschnitte gegliedert sein, die eine wachsende Komplexität der Modellierung widerspiegeln. So werden zunächst nur Verträge betrachtet, bei denen der Entscheidungshorizont für den Versicherungsnehmer und das Versicherungsunternehmen durch einen im Vorhinein bestimmten Zeitpunkt dargestellt wird. Außerdem sollen zu diesem Zeitpunkt auch die Versicherungsleistungen fällig werden. Die Betrachtung eines festen Fälligkeitszeitpunkts ermöglicht den gedanklichen Einstieg, entspricht aber im Allgemeinen noch nicht der Realität. Daher werden in einem zweiten Schritt Verträge untersucht, bei denen die Leistungen mit Eintritt des Versicherungsfalles fällig werden. Zur vollständigen Annäherung an die Bedürfnisse der Praxis wird das Modell schließlich dahingehend erweitert, dass ein variabler Entscheidungshorizont zugelassen wird, der etwa den Tod des Versicherungsnehmers darstellen kann.

Innerhalb der stufenweisen Anpassung der Modellumstände gibt es eine zweite Gliederungsebene, in der mit zunehmender Komplexität konkrete Verträge untersucht werden. So werden zunächst Standardlebensversichungsprodukte für einen einzelnen Versicherungsnehmer betrachtet, bei denen es sich um einen statischen Schadensfall handelt. Bei diesen Verträgen kann nämlich der Schadensfall im Versicherungszeitraum nur einmal auftreten und die Versicherungssumme ist ein bei Vertragsbeginn vereinbarter Betrag. Nach einer Erweiterung auf mehrere Versicherungsnehmer werden in einem nächsten Abstraktionsschritt auch solche Verträge bearbeitet, bei denen die Schadenhöhe ganz allgemein durch geeignete stochastische Prozesse modelliert ist.

Grundlage der Arbeit ist ein Aufsatz von Virginia R. Young und Thaleia Zariphopoulou (s. [Young & Zariphopoulou 2002]).

Kapitel 1

Stochastische Steuerung und Optimierung

1.1 Das Finanzmarktmodell

Betrachtet wird ein Finanzmarkt mit zwei Wertpapieren. Das Erste davon sei risikobehaftet, und sein Preisprozess $\{S(s),\, s \geq t\}$ sei modelliert als geometrische Brownsche Bewegung:

$$\begin{cases} dS(s) = S(s)[\mu\, ds + \sigma\, dB(s)], & s \geq t, \\ S(t) = S > 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

mit $0 < \mu, \sigma < \infty$ und einer Brownschen Bewegung $B = \{B(s),\, s \geq t\}$ auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, F, \mathbb{F}, P)$, wobei $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_s,\, s \geq t\}$ die Brownsche Filtration sei.

Das zweite Wertpapier sei ein risikoloser Bond, für dessen Preisprozess $\{S_0(s),\, s \geq t\}$ gelte:

$$\begin{cases} dS_0(s) = S_0(s) r\, ds, & s \geq t, \\ S_0(t) = S_0 > 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

mit $0 < r < \mu$.

Im Folgenden sei $\bar{S}(s) = (S_0(s), S(s))$ der Vektor der Preise zum Zeitpunkt $s \geq t$.

Ein Investor, ausgestattet zum Zeitpunkt $t > 0$ mit einem Startkapital von $w \geq 0$, hat nun zu jedem Zeitpunkt $s \geq t$ die Möglichkeit, mit den beiden Wertpapieren zu handeln. Dazu seien zwei vorhersagbare Prozesse $\varphi_0 = \{\varphi_0(s),\, s \geq t\}$ und $\varphi_1 = \{\varphi_1(s),\, s \geq t\}$ die Anzahl von Wertpapieren, die der Investor zum Zeitpunkt s jeweils von dem Bond und der Aktie in seinem Portfolio halte. Die so definierte Handelsstrategie $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1)$ sei außerdem selbstfinanzierend im Sinne von

Definition 1.1. Die Handelsstrategie φ heißt *selbstfinanzierend*, falls gilt:

$$\varphi(s)\bar{S}(s) = \varphi(t)\bar{S}(t) + \int_t^s \varphi(u)\, d\bar{S}(u) \quad \forall\, s \geq t, \quad P\text{–f.s.}$$

Damit gilt für den Wertprozess $W = \{W(s),\, s \geq t\}$ des Portfolios:

$$W(s) = \varphi(s)\bar{S}(s) = w + \int_t^s \varphi(u)\, d\bar{S}(u), \quad s \geq t,$$

oder in Form einer stochastischen Differentialgleichung:

$$\begin{cases} dW(s) = \varphi_0(s)\, dS_0(s) + \varphi_1(s)\, dS(s), \quad s \geq t, \\ W(t) = w. \end{cases} \tag{1.3}$$

Bezeichnet man mit $\pi_0(s) = \varphi_0(s)S_0(s)$ und $\pi_1(s) = \varphi_1(s)S(s)$ die Summen, die jeweils in den beiden Wertpapieren zum Zeitpunkt s gehalten werden, so gilt mit (1.1) und (1.2) in (1.3):

$$\begin{aligned} dW(s) &= \varphi_0(s)\, dS_0(s) + \varphi_1(s)\, dS(s) \\ &= \varphi_0(s)S_0(s)r\, ds + \varphi_1(s)S(s)[\mu\, ds + \sigma\, dB(s)] \\ &= rW(s)\, ds + (\mu - r)\pi_1(s)\, ds + \sigma\pi_1(s)\, dB(s), \quad s \geq t. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Bemerkung 1.2. Durch die Umformungen in (1.4) konnte $\pi_0(s)$ eliminiert werden. Für den Wertprozess ist also nur noch die in das risikobehaftete Wertpapier investierte Summe $\pi_1(s)$ relevant. Im Folgenden sei daher $\pi_1(s)$ mit $\pi(s)$ bezeichnet.

1.2 Die Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung

Ziel des Investors soll es nun sein, so mit den beiden Wertpapieren zu handeln, dass der erwartete Nutzen aus dem erzielten Wert des Portfolios zu einem festen Zeitpunkt $T \geq t$ maximal wird. Der Nutzen des Wertes wird dabei als Funktionswert einer Nutzenfunktion u gemessen. Dazu sei $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u \in C^2(\mathbb{R})$, streng monoton wachsend und streng konkav. Der Portfolioprozess $\pi(\cdot)$, mit dem der Investor handelt, muss Zulässigkeitsbedingungen erfüllen, damit auftretende Integrale existieren.

Definition 1.3. (i) Ein Portfolioprozess ist ein $\mathcal{F}_s$–progressiv messbarer Prozess $\{\pi(s),\, s \in [t,T]\}$ mit Werten in $\mathbb{R}$, für den gilt:

$$\int_t^T \pi^2(s)\, ds < \infty \quad P\text{–f.s.} \tag{1.5}$$

(ii) Die Menge aller Portfolioprozesse, die zu $t \in [0,T]$ in $w \geq 0$ starten, das heißt, $W(t) = w$, sei mit $\mathcal{A}(t,w)$ bezeichnet.

Bemerkung 1.4. Die Bedingung (1.5) gewährleistet, dass die stochastische Differentialgleichung (1.4) eine P–f.s. eindeutige Lösung $\{W(s),\, s \in [t,T]\}$ hat. So gilt nämlich:

$$W(s) = e^{r(s-t)}w + \int_t^s e^{r(s-u)}(\mu - r)\pi(u)\, du + \int_t^s e^{r(s-u)}\sigma\pi(u)\, dB(u).$$

Um schließlich das Ziel des Investors mathematisch zu formulieren, fehlt noch:

Definition 1.5. Die Funktion

$$\begin{aligned} V(t,w) &= \sup_{\pi(\cdot)\in\mathcal{A}(t,w)} E\left[u(W(T))\ |\ W(t) = w\right] \\ &= \sup_{\pi(\cdot)\in\mathcal{A}(t,w)} J(t,w;\pi(\cdot)) \end{aligned} \tag{1.6}$$

mit $J(t,w;\pi(\cdot)) := E\left[u(W(T))\ |\ W(t) = w\right]$ heißt Wertfunktion.

Damit ist also das Portfolioproblem des Investors, eine Strategie $\pi^*(\cdot) \in \mathcal{A}(t,w)$ zu finden, für die gilt:

$$V(t,w) = J(t,w;\pi^*(\cdot)). \tag{1.7}$$

Die Strategie $\pi^*(\cdot)$ heißt dann *optimal*. Zur Lösung von (1.7) gilt es also zunächst, die Wertfunktion zu bestimmen. Dies geschieht im weiteren Verlauf dieses Abschnittes in Anlehnung an [Korn, Elke & Korn, Ralf 1999], S. 259-270.

Um ein notwendiges Kriterium für die Wertfunktion zu finden, benötigt man:

Lemma 1.6 (*Bellman-Prinzip*).
Für alle $t \in [0,T]$ und alle Stoppzeiten $\tau \in [t,T]$ gilt:

$$\begin{aligned} V(t,w) &= \sup_{\pi(\cdot)\in\mathcal{A}(t,w)} E\left[V(\tau, W(\tau)) \mid W(t) = w\right] \\ &\geq E\left[V(\tau, W(\tau)) \mid W(t) = w\right] \quad \forall\, \pi(\cdot) \in \mathcal{A}(t,w). \end{aligned}$$

Damit lässt sich heuristisch die Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung (kurz: HJB) als notwendige Bedingung für eine Lösung von (1.7) herleiten. Sei dazu $V \in C^{1,2}([0,T) \times \mathbb{R})$ angenommen. Dann gilt mit der Itô-Formel für $h \geq 0$:

$$\begin{aligned} V(t+h, W(t+h)) = V(t,w) &+ \int_t^{t+h} V_t(s,W(s))\,ds + \int_t^{t+h} V_w(s,W(s))\,dW(s) \\ &+ \frac{1}{2}\int_t^{t+h} V_{ww}(s,W(s))\sigma^2\pi^2(s)\,ds \\ &\overset{(1.4)}{=} V(t,w) + \int_t^{t+h} V_t(s,W(s))\,ds + \int_t^{t+h} V_w(s,W(s))\sigma\pi(s)\,dB(s) \\ &+ \int_t^{t+h} \left\{ V_w(s,W(s))[rW(s) + (\mu - r)\pi(s)] + \frac{1}{2}V_{ww}(s,W(s))\sigma^2\pi^2(s) \right\} ds. \end{aligned}$$

Setzt man dies in die Gleichung aus dem Bellman-Prinzip ein, folgt mit $\tau = t + h$:

$$\begin{aligned}
V(t,w) &= \sup_{\pi(\cdot)\in\mathcal{A}(t,w)} E\left[V(t+h, W(t+h)) \mid W(t) = w\right] \\
&= V(t,w) + \sup_{\pi(\cdot)\in\mathcal{A}(t,w)} E\Bigg[\int_t^{t+h} \{V_t(s,W(s)) + V_w(s,W(s))[rW(s) + (\mu - r)\pi(s)] \\
&\qquad + \frac{1}{2}V_{ww}(s,W(s))\sigma^2\pi^2(s)\}\, ds \mid W(t) = w\Bigg] \\
&\quad + \sup_{\pi(\cdot)\in\mathcal{A}(t,w)} \underbrace{E\left[\int_t^{t+h} V_w(s,W(s))\sigma\pi(s)\, dB(s) \mid W(t) = w\right]}_{=0, \text{ da das Integral ein Martingal ist.}}.
\end{aligned}$$

Subtrahiert man auf beiden Seiten $V(t,w)$ und teilt durch h, so erhält man also:

$$\begin{aligned}
0 = \frac{1}{h} \sup_{\pi(\cdot)\in\mathcal{A}(t,w)} E\Bigg[\int_t^{t+h} &\{V_t(s,W(s)) + V_w(s,W(s))[rW(s) + (\mu - r)\pi(s)] \\
&+ \frac{1}{2}V_{ww}(s,W(s))\sigma^2\pi^2(s)\}\, ds \mid W(t) = w\Bigg],
\end{aligned}$$

und für $h \to 0+$:

$$\begin{aligned}
0 = \sup_{\pi(\cdot)\in\mathcal{A}(t,w)} E\Big[&V_t(t,W(t)) + V_w(t,W(t))[rW(t) + (\mu - r)\pi(t)] \\
&+ \frac{1}{2}V_{ww}(t,W(t))\sigma^2\pi^2(t) \mid W(t) = w\Big].
\end{aligned}$$

Zum Zeitpunkt t ist der Wert von $W(t)$ aber bekannt, so dass der Erwartungswertoperator wegfällt. Außerdem ist das Supremum nur noch über die möglichen Anfangsinvestitionen in das risikobehaftete Wertpapier, also über den Wertebereich des Portfolioprozesses zu bilden. Zusammen mit einer Endbedingung bei T erhält man also die HJB-Gleichung:

$$\begin{cases} 0 = V_t(t,w) + \sup_{\pi\in\mathbb{R}} \left\{ V_w(t,w)(\mu - r)\pi + \frac{1}{2}V_{ww}(t,w)\sigma^2\pi^2 \right\} + rwV_w(t,w), \\ u(w) = V(T,w). \end{cases} \tag{1.8}$$

Unter weiteren Voraussetzungen lässt sich die Lösung der HJB-Gleichung charakterisieren, die der Wertfunktion entspricht. Außerdem kann man dann eine optimale Strategie angeben.

Satz 1.7 (*Verifikationstheorem*).

Sei $\tilde{V} \in C^{1,2}([0,T) \times \mathbb{R}) \cap C([0,T] \times \mathbb{R})$ *mit* $|\tilde{V}(t,w)| \leq K(1+|w|^k)$ *für* $K > 0$ *und* $k \in \mathbb{N}$ *eine Lösung der HJB-Gleichung:*

$$\begin{cases} 0 = V_t(t,w) + \sup\limits_{\pi \in \mathbb{R}} \left\{ V_w(t,w)[rw + (\mu - r)\pi] + \dfrac{1}{2} V_{ww}(t,w)\sigma^2\pi^2 \right\}, & 0 \leq t < T,\ w \in \mathbb{R}, \\ u(w) = V(T,w). \end{cases}$$

Dann gilt:

(i) $\tilde{V}(t,w) \geq V(t,w) \quad \forall\ (t,w) \in [0,T) \times \mathbb{R}$.

(ii) Existiert für alle $(t,w) \in [0,T) \times \mathbb{R}$ *ein* $\pi^*(\cdot) \in \mathcal{A}(t,w)$*, so dass für alle* $s \in [t,T]$ *gilt:*

$$\pi^*(s) \in \operatorname*{argmax}_{\pi \in \mathbb{R}} \Big\{ \tilde{V}_t(s, W^*(s)) + \tilde{V}_w(s, W^*(s))[rW^*(s) + (\mu - r)\pi] + \frac{1}{2}\sigma^2\pi^2 \tilde{V}_{ww}(s, W^*(s)) \Big\},$$

wobei $W^*(s)$ *die stochastische Differentialgleichung* (1.4) *zusammen mit* $\pi^*(s)$ *löst, so gilt:*

$$\tilde{V}(t,w) = V(t,w) = J(t,w;\pi^*(\cdot)) \quad \forall\ (t,w) \in [t,T) \times \mathbb{R}.$$

Beweis. (i) Sei $(t,w) \in [0,T) \times \mathbb{R}$. Im Folgenden wird gezeigt, dass für jede Stoppzeit $\tau \in [t,T]$ gilt:

$$\tilde{V}(t,w) \geq E\left[\tilde{V}(\tau, W(\tau)) \mid W(t) = w\right],$$

wobei $\{W(s),\ s \in [t,\tau]\}$ der Wertprozess unter einer Politik $\pi(\cdot) \in \mathcal{A}(t,w)$ ist. Wegen $\tilde{V}(T, W(T)) = u(W(T))$ folgt dann die Behauptung mit $\tau = T$.

Sei zunächst $O \subset \mathbb{R}$ offen und beschränkt. Definiere $\tau^0 := \inf\{t > 0 : W(t) \in \partial O\}$, und es gelte $\tau \leq \tau^0$. Da $\tilde{V}$ die HJB-Gleichung erfüllt, gilt für alle $\pi(\cdot) \in \mathcal{A}(t,w)$:

$$0 \geq \tilde{V}_t(s, W(s)) + \tilde{V}_w(s, W(s))[rW(s) + (\mu - r)\pi(s)] + \frac{1}{2}\tilde{V}_{ww}(s, W(s))\sigma^2\pi^2(s), \quad \text{für } t \leq s \leq \tau.$$

Wendet man die Itô-Formel auf $\tilde{V}(\tau, W(\tau))$, so gilt wie schon in der heuristischen Herleitung:

$$\begin{aligned}\tilde{V}(\tau, W(\tau)) = \tilde{V}(t,w) + \int_t^\tau \tilde{V}_t(s, W(s))\,ds + \int_t^\tau \tilde{V}_w(s, W(s))\sigma\pi(s)\,dB(s) \\ + \int_t^\tau \left\{\tilde{V}_w(s, W(s))[rW(s) + (\mu - r)\pi(s)] + \frac{1}{2}\tilde{V}_{ww}(s, W(s))\sigma^2\pi^2(s)\right\} ds.\end{aligned}$$

Dabei ist der Erwartungswert des stochastischen Integrals $= 0$, denn da $W(s)$ auf O beschränkt ist, ist auch $\tilde{V}_w$ als stetige Funktion auf O (f.s.) beschränkt, und $\pi(s)$ ist in L^2 nach Definition einer Portfoliostrategie.

Damit gilt:

$$\begin{aligned}&\tilde{V}(t,w) = E\Bigg[\tilde{V}(\tau, W(\tau)) - \int_t^\tau \tilde{V}_t(s, W(s))\,ds \\ &- \int_t^\tau \left\{\tilde{V}_w(s, W(s))[rW(s) + (\mu - r)\pi(s)] + \frac{1}{2}\tilde{V}_{ww}(s, W(s))\sigma^2\pi^2(s)\right\} ds \mid W(t) = w\Bigg] \\ &\geq E\left[\tilde{V}(\tau, W(\tau)) \mid W(t) = w\right],\end{aligned}$$

also die Behauptung für den beschränkten Fall.

Sei jetzt $O = \mathbb{R}$. Approximiere O durch beschränkte Mengen der Form $O_p := \{x \in \mathbb{R} : |x| < p\}$, und setze $Q_p := \left[0, T - \frac{1}{p}\right) \times O_p,\ p \in \mathbb{N},\ 0 < \frac{1}{p} < T$. Außerdem sei σ_p die Austrittszeit von $(s, W(s))$ aus Q_p. Für $\tau_p := \sigma_p \wedge \tau$ gilt dann wegen des beschränkten Falles:

$$\tilde{V}(t, W(t)) \geq E\left[\tilde{V}(\tau_p, W(\tau_p)) \mid W(t) = w\right].$$

Für $p \to \infty$ gilt: $\tau_p \to \tau$ f.s. Wegen der Stetigkeit von $\tilde{V}$ und W gilt daher auch:

$$\lim_{p\to\infty} \tilde{V}(\tau_p, W(\tau_p)) = \tilde{V}(\tau, W(\tau)) \quad \text{f.s.}$$

Die Wachstumsbedingung an $\tilde{V}$ liefert darüber hinaus:

$$|\tilde{V}(\tau_p, W(\tau_p))| \leq K\left(1 + |W(\tau_p)|^k\right) \leq K\left(1 + \sup_{s\in[t,T]} |W(s)|^k\right) \quad \forall\, p.$$

Wegen der f.s. Beschränktheit von $W(s)$ ist damit also $E\left[|\tilde{V}(\tau_p, W(\tau_p))|^2 \mid W(t) = w\right]$ beschränkt für alle p, und daher ist die Familie von Zufallsvariablen $\left\{\tilde{V}(\tau_p, W(\tau_p))\right\}$

gleichmäßig integrierbar. Somit folgt schließlich:

$$\lim_{p\to\infty} E\left[\tilde{V}(\tau_p, W(\tau_p)) \mid W(t) = w\right] = E\left[\tilde{V}(\tau, W(\tau)) \mid W(t) = w\right],$$

und damit die Behauptung.

(ii) Für $\pi^*(s)$ gilt „=“ in (i).

□

Bemerkung 1.8. (i) Das Verifikationstheorem legt folgende Vorgehensweise zur Lösung des Portfolioproblems nahe:

1. Lösen des statischen Maximierungsproblems in der HJB-Gleichung.
2. Einsetzen der Lösung aus dem Maximierungsproblem in die HJB-Gleichung und Bestimmung der Wertfunktion.
3. Überprüfen der Voraussetzungen des Verifikationstheorems.

(ii) Kann im Vorhinein gezeigt werden, dass die gesuchte Wertfunktion die Glattheitsanforderungen des Verifikationstheorems erfüllt, kann sie mit dessen Hilfe bestimmt werden. Davon und von der Wachstumsbedingung soll und kann wegen einer speziellen Wahl der Nutzenfunktion u im Folgenden ausgegangen werden.

Mit Satz 1.7 ist nun ein Werkzeug zur Bestimmung der Wertfunktion bereitgestellt. Zur Beantwortung der Frage, ob der darin enthaltene Lösungsweg auch tatsächlich erfolgreich ist, seien weitere analytische Eigenschaften der Nutzenfunktion ausgenutzt. Denn so gilt:

Lemma 1.9. *Die Wertfunktion $V(t, w)$ ist streng konkav in $w \; \forall \, t \in [0, T]$.*

Beweis. Es sei $t \geq 0$ fest. Für w_1, $w_2 > 0$ und $\pi_1(s) \in \mathcal{A}(t, w_1)$ sowie $\pi_2(s) \in \mathcal{A}(t, w_2)$ seien $W^{\pi_1}(s)$ und $W^{\pi_2}(s)$ die zugehörigen Lösungen der Differentialgleichung (1.4). Dann gilt für $\lambda \in (0, 1)$:

$$\bar{\pi}(s) := \lambda \pi_1(s) + (1 - \lambda)\pi_2(s) \in \mathcal{A}(t, \bar{w})$$

mit $\bar{w} := \lambda w_1 + (1-\lambda)w_2$, und $W^{\bar{\pi}}(s) = \lambda W^{\pi_1}(s) + (1-\lambda)W^{\pi_2}(s)$ ist der dazugehörige Wertprozess. Daher folgt mit der Konkavität von u:

$$
\begin{aligned}
&\lambda u\left(W^{\pi_1}(T)\right) + (1-\lambda)u\left(W^{\pi_2}(T)\right) = \\
&\quad \lambda u\left(W^{\pi_1}(t) + \int_t^T \{rW^{\pi_1}(s) + (\mu - r)\pi_1(s)\}\, ds + \int_t^T \sigma\pi_1(s)\, dB(s)\right) \\
&\quad\quad + (1-\lambda)\lambda u\left(W^{\pi_2}(t) + \int_t^T \{rW^{\pi_2}(s) + (\mu - r)\pi_2(s)\}\, ds + \int_t^T \sigma\pi_2(s)\, dB(s)\right) \\
&< u\Bigg(\lambda W^{\pi_1}(t) + (1-\lambda)W^{\pi_2}(t) + \int_t^T r\left[\lambda W^{\pi_1}(s) + (1-\lambda)W^{\pi_2}(s)\right] ds \\
&\quad\quad + \int_t^T (\mu - r)\left[\lambda\pi_1(s) + (1-\lambda)\pi_2(s)\right] ds + \int_t^T \sigma\left[\lambda\pi_1(s) + (1-\lambda)\pi_2(s)\right] dB(s)\Bigg)
\end{aligned}
$$

Nach Auswertung des Erwartungswertes und von $\sup_{\substack{\pi_1(\cdot)\in\mathcal{A}(t,w_1)\\ \pi_2(\cdot)\in\mathcal{A}(t,w_2)}}$ folgt schließlich die Behauptung. $\square$

Wegen Lemma 1.9 ist also das Supremum in (1.8) ein wohldefiniertes Maximum, und es wird angenommen für:

$$
\pi^*(t,w) = -\frac{(\mu - r)V_w(t,w)}{\sigma^2 V_{ww}(t,w)}. \tag{1.9}
$$

Der optimale Portfolioprozess ist dann mit dem Verifikationstheorem gegeben durch:

$$
\pi^*(s, W^*(s)) = -\frac{(\mu - r)V_w(s, W^*(s))}{\sigma^2 V_{ww}(s, W^*(s))}, \quad t \le s \le T, \tag{1.10}
$$

und die HJB-Gleichung (1.8) wird zu:

$$
\begin{cases}
0 = V_t(t,w) - \dfrac{(\mu - r)^2 V_w^2(t,w)}{2\sigma^2 V_{ww}(t,w)} + rwV_w(t,w), \\
u(w) = V(T,w).
\end{cases} \tag{1.11}
$$

Beispiel 1.10. Sei $u(w) = -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha w}$, $\alpha > 0$, eine Exponentialnutzenfunktion. Die Wertfunktion zu t ist der erwartete Endnutzen zu T unter der Bedingung, dass man mit einem Startkapital von w beginnt. Ist nur Investition in den risikolosen Bond zulässig, so ist der Wert von $W(T) = we^{r(T-t)}$. Der Erwartungswert ist dann ohne Bedeutung und die Wertfunktion lautet:

$$V(t,w) = u\left(we^{r(T-t)}\right) = -\frac{1}{\alpha}\exp\left\{-\alpha we^{r(T-t)}\right\}.$$

Mit der Anlagemöglichkeit in das risikobehaftete Wertpapier kommt aber Unsicherheit in den Wertprozess hinein. Die Annahme, dass man diese Unsicherheit in einer Funktion modellieren kann, die nicht mehr von w abhängt, führt auf den folgenden Trennungsansatz für die Wertfunktion:

$$V(t,w) = -\frac{1}{\alpha}\exp\left\{-\alpha we^{r(T-t)}\right\} f(t).$$

Damit gilt für die partiellen Ableitungen von V:

$$\begin{aligned}
V_t(t,w) &= -\frac{1}{\alpha}\exp\left\{-\alpha we^{r(T-t)}\right\}[\alpha wre^{r(T-t)}f(t) + f'(t)],\\
V_w(t,w) &= e^{r(T-t)}\exp\left\{-\alpha we^{r(T-t)}\right\} f(t),\\
V_{ww}(t,w) &= -\alpha e^{2r(T-t)}\exp\left\{-\alpha we^{r(T-t)}\right\} f(t).
\end{aligned}$$

Eingesetzt in (1.11) führt auf:

$$\begin{cases}
0 = -\frac{1}{\alpha}\exp\left\{-\alpha we^{r(T-t)}\right\}\left[\alpha wre^{r(T-t)}f(t) + f'(t)\right] + \frac{(\mu-r)^2}{2\alpha\sigma^2}\exp\left\{-\alpha we^{r(T-t)}\right\} f(t)\\
\qquad + rwe^{r(T-t)}\exp\{-\alpha we^{r(T-t)}\}f(t),\\
u(w) = -\frac{1}{\alpha}\exp\{-\alpha w\}f(T)
\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}
f'(t) = f(t)\frac{(\mu-r)^2}{2\sigma^2},\\
f(T) = 1.
\end{cases}$$

Das ist eine gewöhnliche Differentialgleichung in getrennten Veränderlichen mit der Lösung

$$f(t) = \exp\left\{-\frac{(\mu-r)^2}{2\sigma^2}(T-t)\right\},$$

und damit lautet die Wertfunktion:

$$V(t,w) = -\frac{1}{\alpha}\exp\left\{-\alpha we^{r(T-t)} - \frac{(\mu-r)^2}{2\sigma^2}(T-t)\right\}.$$

Mit (1.10) lautet schließlich der optimale Portfolioprozess:

$$\pi^*(s) = \frac{(\mu - r)e^{-r(T-s)}}{\alpha\sigma^2}.$$

Bemerkung 1.11. (i) Der optimale Portfolioprozess hängt nicht mehr vom Wertprozess ab und ist damit nicht mehr stochastisch. Das liegt in diesem Beispiel an der Wahl der Nutzenfunktion. Denn die absolute Risikoaversion $ARA(w)$ der Exponentialnutzenfunktion ist

$$ARA(w) := -\frac{u''(w)}{u'(w)} \equiv \alpha,$$

also ebenfalls wertunabhängig.

(ii) Bei steigender Risikoaversion α und bei längerer Zeitdauer bis zum Handelsendpunkt T sinkt die in das risikobehaftete Wertpapier investierte Summe.

Kapitel 2

Bewertungsverfahren

2.1 Die Definition der Vorbehaltsprämien

Um im Folgenden zur Bewertung von Versicherungsrisiken zu kommen, sollen von nun an zwei Parteien unterschieden werden: zum einen der (potentielle) Versicherungsnehmer (kurz: VN), und zum anderen das Versicherungsunternehmen (kurz: VU). Beide seien ausgestattet mit der gleichen Nutzenfunktion u, wobei die jeweiligen Risikoaversionen unterschiedlich sein können. Wie in Kapitel 1 können beide Parteien laufend in das risikobehaftete Wertpapier und den risikolosen Bond aus jenem Kapitel investieren. Daneben besteht zu $t \geq 0$ einmalig aber für den VN die Möglichkeit, einen Versicherungsvertrag abzuschließen, beziehungsweise für das VU, einen solchen anzubieten. Dieser Vertrag sei derart, dass zu einem festen Zeitpunkt $T \geq t$ das VU dem VN den kumulierten Schaden der Periode $[0, T]$ des versicherten Risikos erstatten muss. In dieser Zeit sei der Vertrag nicht handelbar. Die Höhe des Schadens bis zum Zeitpunkt $s \in [t, T]$ für den VN sei dabei mit $\{Y(s),\ s \in [t, T]\}$ bezeichnet. Die Auszahlung aus dem Versicherungsvertrag zum Zeitpunkt T entspricht somit $Y(T)$. Dabei sei angenommen, dass $\{Y(s),\ s \in [t, T]\}$ unabhängig sei von B, der Brownschen Bewegung, die den Aktienpreis bestimmt. Daher kann, wie in der Einleitung bereits erwähnt, die klassische Black-Scholes-Methode keine Anwendung finden, da der Markt damit nicht vollständig ist.

Das Ziel beider Parteien ist wiederum, den erwarteten Endnutzen zu T zu maximieren.

Der VN muss dabei zu t entscheiden, ob er das Risiko des Schadeneintrittes versichern lassen will. Entscheidet er sich dagegen, muss er zu T für seinen kumulierten Schaden aus der Periode $[0,T]$ selbst aufkommen und demnach lautet seine Wertfunktion:

$$U(t,w,y) = \sup_{\pi(\cdot)\in\mathcal{A}(t,w)} E\left[u(W(T)-Y(T)) \mid W(t)=w, Y(t)=y\right]. \tag{2.1}$$

Bei gleichem Startkapital ist dies auch die Wertfunktion des VU, falls es sich entscheidet, das Risiko ohne einen finanziellen Ausgleich zu übernehmen. In diesem Fall jedoch hat der VN sein Risiko abgetreten, und seine Wertfunktion ist dann die aus Kapitel 1:

$$V(t,w) = \sup_{\pi(\cdot)\in\mathcal{A}(t,w)} E\left[u(W(T)) \mid W(t)=w\right]. \tag{2.2}$$

Dem entspricht die Wertfunktion des VU, falls es eine Versicherung des Risikos ablehnt.

Die Frage für das VU, wie niedrig ein Einmalbeitrag P^{VU} mindestens sein sollte, um das Risiko zu übernehmen, und für den VN, wie hoch sein maximaler Beitrag P^{VN} bemessen sein sollte, um den Vertrag abzuschließen, führt auf die Definition der Vorbehaltsprämien. Sie legt diese Prämien derart fest, dass beide Parteien jeweils zwischen den beiden Alternativen bezüglich des Risikos indifferent sind.

Definition 2.1. (i) Die Vorbehaltsprämie des VU ist der Einmalbeitrag $P^{VU}(t,w,y)$, für den gilt:

$$V(t,w) = U(t, w + P^{VU}(t,w,y), y) \quad \text{für ein gegebenes Trippel } (t,w,y). \tag{2.3}$$

(ii) Die Vorbehaltsprämie des VN ist der Einmalbeitrag $P^{VN}(t,w,y)$, für den gilt:

$$V(t, w - P^{VN}(t,w,y)) = U(t,w,y) \quad \text{für ein gegebenes Trippel } (t,w,y). \tag{2.4}$$

Bemerkung 2.2. (i) Auch bei gleichem Startkapital w der beiden Parteien müssen ihre Vorbehaltsprämien wegen der Nicht-Linearität der Wertfunktionen nicht übereinstimmen.

(ii) Die Vorbehaltsprämien hängen von der Risikoaversion und dem Startkapital w ab. Ersteres ist dabei die Konsequenz aus der Wahl des Bewertungsansatzes als Erwartungsnutzenansatz und daher auch nicht zu vermeiden. Die Abhängigkeit vom Startkapital hingegen ist hinfällig bei Wahl der Nutzenfunktion als Exponentialnutzenfunktion. Wie schon in Beispiel 1.10 liegt das daran, dass bei dieser speziellen Nutzenfunktion auch die Risikoaversion wertunabhängig ist.

2.2 Die Vorbehaltsprämien und der Black-Scholes-Preis

Der Veranschaulichung der eingeführten Vorbehaltsprämien soll nun ein Beispiel dienen.

Beispiel 2.3. Anders als im vorangegangenen Abschnitt sei jetzt das Risiko aus dem zu bewertenden Vertrag vollständig mit dem risikobehafteten Wertpapier korreliert. Damit wird der relevante Markt vollständig und für den Wert $Y(T)$ der Auszahlung aus dem Vertrag zu T kann $Y(T) = g(S(T))$ für eine messbare Funktion $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ angenommen werden. Das legt nahe, in (2.1) die Abhängigkeit von y durch eine von S zu ersetzen. Unter der Annahme einer wertunabhängigen Vorbehaltsprämie wird (2.3) damit zu:

$$V(t,w) = U(t, w + P^{VU}(t,S), S), \quad \text{für ein gegebenes Trippel } (t,w,S), \tag{2.5}$$

und (2.4) lautet:

$$V(t, w - P^{VN}(t,S)) = U(t,w,S), \quad \text{für ein gegebenes Trippel } (t,w,S). \tag{2.6}$$

Um daraus die Vorbehaltsprämie $P^{VN}(t,S)$ des VN herzuleiten, betrachtet man zunächst die HJB-Gleichung für U. Diese kann analog zum Abschnitt 1.2 heuristisch hergeleitet werden. So gilt auch hier mit der Itô-Formel für $U \in C^{1,2,2}([0,T) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$:

$$\begin{aligned} U(t+h, W(t+h), S(t+h)) &= U(t,w,S) + \int_t^{t+h} U_t(s, W(s), S(s))\, ds \\ &+ \int_t^{t+h} U_w(s, W(s), S(s))\, dW(s) + \int_t^{t+h} U_S(s, W(s), S(s))\, dS(s) \\ &+ \frac{1}{2} \int_t^{t+h} \left\{ U_{ww}(s, W(s), S(s)) \sigma^2 \pi^2(s) + U_{SS}(s, W(s), S(s)) \sigma^2 S^2(s) \right\} ds \\ &+ \int_t^{t+h} U_{wS}(s, W(s), S(s)) \sigma^2 \pi(s) S(s)\, ds, \end{aligned}$$

wobei wegen der stochastischen Differentialgleichungen (1.4) und (1.1):

$$\begin{aligned} \int_t^{t+h} U_w(s, W(s), S(s))\, dW(s) = &\int_t^{t+h} U_w(s, W(s), S(s)) [rW(s) + (\mu - r)\pi(s)]\, ds \\ &+ \int_t^{t+h} U_w(s, W(s), S(s)) \sigma \pi(s)\, dB(s) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\int_t^{t+h} U_S(s,W(s),S(s))\,dS(s) &= \int_t^{t+h} U_S(s,W(s),S(s))S(s)\mu\,ds \\ &\quad + \int_t^{t+h} U_S(s,W(s),S(s))S(s)\sigma\,dB(s) \quad \text{gelten.}\end{aligned}$$

Da die Integrale bezüglich $dB(s)$ Martingale sind und somit ihr Erwartungswert $= 0$ ist, lautet dann das Bellman-Prinzip (Lemma 1.6):

$$\begin{aligned}U(t,w,S) &= \sup_{\pi(\cdot)\in\mathcal{A}(t,w)} E\left[U(t+h,W(t+h),S(t+h)) \mid W(t)=w,\ S(t)=S\right] \\ &= \sup_{\pi(\cdot)\in\mathcal{A}(t,w)} E\Bigg[U(t,w,S) + \int_t^{t+h} \{U_t(s,W(s),S(s)) \\ &\quad + U_w(s,W(s),S(s))[rW(s)+(\mu-r)\pi(s)] + U_S(s,W(s),S(s))S(s)\mu \\ &\quad + \frac{1}{2}\left[U_{ww}(s,W(s),S(s))\sigma^2\pi^2(s) + U_{SS}(s,W(s),S(s))\sigma^2 S^2(s)\right] \\ &\quad + U_{wS}(s,W(s),S(s))\sigma^2\pi(s)S(s)\}\,ds \mid W(t)=w,\ S(t)=S\Bigg].\end{aligned}$$

Nachdem man $U(t,w,S)$ auf beiden Seiten subtrahiert und durch h geteilt hat, ergibt sich:

$$\begin{aligned}0 \;=\; & \frac{1}{h}\sup_{\pi(\cdot)\in\mathcal{A}(t,w)} E\Bigg[\int_t^{t+h} \{U_t(s,W(s),S(s)) \\ & + U_w(s,W(s),S(s))[rW(s)+(\mu-r)\pi(s)] + U_S(s,W(s),S(s))S(s)\mu \\ & + \frac{1}{2}\left[U_{ww}(s,W(s),S(s))\sigma^2\pi^2(s) + U_{SS}(s,W(s),S(s))\sigma^2 S^2(s)\right] \\ & + U_{wS}(s,W(s),S(s))\sigma^2\pi(s)S(s)\}\,ds \mid W(t)=w,\ S(t)=S\Bigg],\end{aligned}$$

und für $h \to 0+$ die HJB-Gleichung für U:

$$\begin{cases} 0 = U_t(t,w,S) + \underbrace{\sup_{\pi\in\mathbb{R}}\left\{(\mu-r)\pi U_w(t,w,S) + \frac{1}{2}\sigma^2\pi^2 U_{ww}(t,w,S) + \sigma^2\pi S U_{wS}(t,w,S)\right\}}_{=(*)} \\ \qquad + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 U_{SS}(t,w,S) + \mu S U_S(t,w,S) + rwU_w(t,w,S), \\ u(w-g(S)) = U(T,w,S). \end{cases}$$

Analog zu Lemma 1.9 kann man zeigen, dass sich die Konkavität der Nutzenfunktion u

auf die Wertfunktion U überträgt. Damit ist das Supremum in $(*)$ ein wohldefiniertes Maximum, und es wird analog zu (1.9) angenommen für:

$$\pi^*(t,w) = -\frac{(\mu - r)U_w(t,w,S) + \sigma^2 S U_{wS}(t,w,S)}{\sigma^2 U_{ww}(t,w,S)}.$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
(*) &= (\mu - r)U_w(t,w,S)\left[-\frac{(\mu - r)U_w(t,w,S) + \sigma^2 S U_{wS}(t,w,S)}{\sigma^2 U_{ww}(t,w,S)}\right] \\
&\quad + \frac{\left[(\mu - r)U_w(t,w,S) + \sigma^2 S U_{wS}(t,w,S)\right]^2}{2\sigma^2 U_{ww}(t,w,S)} \\
&\quad + \sigma^2 S U_{wS}(t,w,S)\left[-\frac{(\mu - r)U_w(t,w,S) + \sigma^2 S U_{wS}(t,w,S)}{\sigma^2 U_{ww}(t,w,S)}\right] \\
&= -\frac{\left[(\mu - r)U_w(t,w,S) + \sigma^2 S U_{wS}(t,w,S)\right]^2}{\sigma^2 U_{ww}(t,w,S)} \\
&\quad + \frac{\left[(\mu - r)U_w(t,w,S) + \sigma^2 S U_{wS}(t,w,S)\right]^2}{2\sigma^2 U_{ww}(t,w,S)} \\
&= -\frac{\left[(\mu - r)U_w(t,w,S) + \sigma^2 S U_{wS}(t,w,S)\right]^2}{2\sigma^2 U_{ww}(t,w,S)}.
\end{aligned}$$

Also lautet die HJB-Gleichung für U:

$$(2.7)\quad \begin{cases} 0 = U_t(t,w,S) - \dfrac{\left[(\mu - r)U_w(t,w,S) + \sigma^2 S U_{wS}(t,w,S)\right]^2}{2\sigma^2 U_{ww}(t,w,S)} + \dfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 U_{SS}(t,w,S) \\ \qquad + \mu S U_S(t,w,S) + rwU_w(t,w,S), \\ u(w - g(S)) = U(T,w,S). \end{cases}$$

Wegen (2.6) gilt aber:

$$\begin{aligned}
U_t(t,w,S) &= V_t(t,w - P^{VN}(t,S)) - V_w(t,w - P^{VN}(t,S))P_t^{VN}(t,S), \\
U_w(t,w,S) &= V_w(t,w - P^{VN}(t,S)), \\
U_{ww}(t,w,S) &= V_{ww}(t,w - P^{VN}(t,S)), \\
U_S(t,w,S) &= -V_w(t,w - P^{VN}(t,S))P_S^{VN}(t,S), \\
U_{SS}(t,w,S) &= V_{ww}(t,w - P^{VN}(t,S))(P_S^{VN}(t,S))^2 - V_w(t,w - P^{VN}(t,S))P_{SS}^{VN}(t,S), \\
U_{wS}(t,w,S) &= -V_{ww}(t,w - P^{VN}(t,S))P_S^{VN}(t,S).
\end{aligned}$$

Ersetzt man diese Terme in (2.7), so ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
&V_t(t, w - P^{VN}(t,S)) - P_t^{VN}(t,S) V_w(t, w - P^{VN}(t,S)) \\
&\quad - \frac{\left[-\sigma^2 S P_S^{VN}(t,S) V_{ww}(t, w - P^{VN}(t,S)) + (\mu - r) V_w(t, w - P^{VN}(t,S))\right]^2}{2\sigma^2 V_{ww}(t, w - P^{VN}(t,S))} \\
&\quad + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \left[(P_S^{VN}(t,S))^2 V_{ww}(t, w - P^{VN}(t,S)) - P_{SS}^{VN}(t,S) V_w(t, w - P^{VN}(t,S))\right] \\
&\qquad - \mu S V_w(t, w - P^{VN}(t,S)) P_S^{VN}(t,S) + r w V_w(t, w - P^{VN}(t,S)) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow\ & V_w(t, w - P^{VN}(t,S)) \left[-P_t^{VN}(t,S) + r P^{VN}(t,S) - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 P_{SS}^{VN}(t,S) - r S P_S^{VN}(t,S)\right] \\
&+ \left[V_t(t, w - P^{VN}(t,S)) - \frac{(\mu - r)^2 V_w^2(t, w - P^{VN}(t,S))}{2\sigma^2 V_{ww}(t, w - P^{VN}(t,S))}\right. \\
&\qquad \left. + r(w - P^{VN}(t,S)) V_w(t, w - P^{VN}(t,S))\right] = 0.
\end{aligned}
$$

Dabei ist der Term in der zweiten Klammer der letzten Gleichung $= 0$, da V die HJB-Gleichung (1.11) löst. Somit muss die Vorbehaltsprämie P^{VN} die Differentialgleichung:

$$
\begin{cases}
r P^{VN}(t,S) = P_t^{VN}(t,S) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 P_{SS}^{VN}(t,S) + r S P_S^{VN}(t,S), \\
P^{VN}(T,S) = g(S),
\end{cases}
$$

also die Black-Scholes-Differentialgleichung, lösen.

Analog erhält man P^{VU}, und beide Prämien sind gleich.

Bemerkung 2.4. (i) Die Prämien hängen nicht mehr von der Nutzenfunktion u ab. Dies und die Tatsache, dass beide Prämien gleich sind, liegt an der Vollständigkeit des Marktes.

(ii) Da die Nutzenfunktion u in diesem Beispiel nicht weiter spezifiziert worden ist, wurde zunächst einfach angenommen, dass die Prämien nicht mehr vom Wert w abhängen (vgl. Bemerkung 2.2, (ii)). Wegen der Vollständigkeit des Marktes müssen aber die Black-Scholes-Preise auch die Vorbehaltsprämien sein, da es sonst

Arbitrage-Möglichkeiten geben würde. Und da die Black-Scholes-Preise auch wertunabhängig sind, liegt es nahe, auch die Vorbehaltsprämien von vornherein wertunabhängig anzusetzen.

Kapitel 3

Bewertung von Versicherungsverträgen

In diesem Kapitel soll das nun erweiterte Äquivalenznutzenprinzip auf verschiedene Versicherungsverträge angewendet werden. Die Untersuchung wird in drei Abschnitte gegliedert sein, die sich in der Modellierung unterscheiden. Zunächst wird ein fester Entscheidungshorizont unterstellt, der zugleich den Fälligkeitszeitpunkt der Leistungen darstellt. Da dieses Szenario bei Lebensversicherungsverträgen auf den Erlebensfall ausreicht, bei Versicherungen auf den Todesfall aber nicht der Realität entspricht, werden in einem zweiten Abschnitt die Leistungen sofort bei Eintritt des Schadensfalles fällig. Schließlich wird in einem dritten Abschnitt das Modell dahingehend erweitert, dass zusätzlich der Entscheidungshorizont randomisiert wird. Ein solcher Horizont, der etwa durch den Tod des VN bestimmt sein kann, ist für die Entscheidungsträger günstiger und erfüllt eher die Anforderungen der Praxis. Bevor jedoch damit begonnen werden kann, sollen zunächst die versicherungsmathematischen Grundlagen festgehalten werden, die später benötigt werden. Die Ausführungen dazu sind [Zwiesler 2002] und [Bowers et al. 1997] entnommen.

3.1 Die versicherungsmathematischen Grundlagen

Das Alter X einer Person sei eine stetige Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\tilde{\Omega}, \mathcal{G}, Q)$ mit Verteilungsfunktion F und Dichte f.

Definition 3.1. Seien $x, t \geq 0$.

(i) Die Größe ${}_tp_x = Q(X > x + t \mid X > x)$ heißt *t-jährige Überlebenswahrscheinlichkeit* eines x-Jährigen.

(ii) Die Größe ${}_tq_x = Q(x < X \leq x + t \mid X > x)$ heißt *t-jährige Sterbewahrscheinlichkeit* eines x-Jährigen.

(iii) Die Funktion $\lambda(x) = \dfrac{f(x)}{1 - F(x)}$ heißt *Sterblichkeitsintensität* eines x-Jährigen.

Bezeichnung. ${}_1p_x = p_x, \quad {}_1q_x = q_x.$

Lemma 3.2. *Seien $x, t \geq 0$. Dann gilt:*

(i) ${}_tq_x = 1 - {}_tp_x,$

(ii) ${}_tp_x = \dfrac{1 - F(x+t)}{1 - F(x)}, \quad {}_tq_x = \dfrac{F(x+t) - F(x)}{1 - F(x)},$

(iii) $\lambda(x) = \lim\limits_{t \to 0+} \dfrac{{}_tq_x}{t},$

(iv) ${}_tp_x = \exp\left\{ - \int_0^t \lambda(x+s)\, ds \right\}.$

Definition 3.3. Die *Lebenserwartung* eines x-Jährigen ist definiert als die Zufallsvariable $T(x) = X - x$ unter der Bedingung $X > x$.

Bemerkung 3.4. Die Dichte $f_{T(x)}(s)$ von $T(x)$ ist gegeben durch $f_{T(x)}(s) = \lambda(x+s)\, {}_sp_x$.

Definition 3.5. Die Größe $\bar{A}_x^\delta = \int_0^\infty e^{-\delta s}\lambda(x+s)\,{}_sp_x\,ds$ heißt der *stetige Leistungsbarwert einer Todesfallversicherung* für einen x-Jährigen mit Versicherungssumme 1 und Diskontierungszinsrate δ.

Bemerkung 3.6. Mit der Potenzreihendarstellung der Exponentialfunktion gilt näherungsweise: $\bar{A}_x^\delta \approx 1 - \delta ET(x)$, beziehungsweise $\bar{A}_x^\delta \approx 1 - \delta ET(x) + \frac{\delta^2}{2} ET^2(x)$.

3.2 Die Verträge mit fester Fälligkeit der Leistungen bei festem Entscheidungshorizont

Zunächst werden solche Versicherungsverträge untersucht, bei denen die Versicherungsleistungen zu einem fest vereinbarten Zeitpunkt fällig sind. Der Entscheidungshorizont für VN und VU sei ebenfalls fest. Der Einfachheit halber wird in einer weiteren Gliederungsebene mit Lebensversicherungsverträgen für einzelne Versicherungsnehmer begonnen. Bei dieser Art von Verträgen handelt es sich um ein statisches Risiko, da der Schadensfall im Versicherungszeitraum nur einmal auftreten kann und in diesem Fall die Versicherungssumme von Beginn an feststeht. Daher ist also eine Modellierung einer kumulierten Schadenhöhe durch einen Prozess nicht nötig. Danach werden entsprechende Verträge für mehrere Versicherungsnehmer betrachtet, und schließlich führt die Untersuchung auf solche Beispiele, bei denen die Schadenhöhe ganz allgemein durch geeignete stochastische Prozesse modelliert wird.

3.2.1 Risiko-Lebensversicherung für einen Versicherungsnehmer

Zuerst soll eine Risiko-Lebensversicherung für eine einzelne Person betrachtet werden. Dieser Versicherungsnehmer sei dazu zum Zeitpunkt 0 x Jahre alt, und der Versicherungsbeginn liege bei $t \geq 0$. Die Versicherungsdauer betrage $T - t$ und T sei der Fälligkeitszeitpunkt für die Versicherungsleistungen. Stirbt der Versicherungsnehmer innerhalb von $[t, T]$, wird die vereinbarte Versicherungssumme von 1 zu T fällig. Erlebt er hingegen den Zeitpunkt T, kommt es zu keiner Auszahlung.

Der versicherte Schadensfall kann in $[t, T]$ nur einmal auftreten. Damit ändert sich aber auch die Höhe der Versicherungssumme in dieser Zeit nicht. Ein Prozess für die kumulierte Schadenhöhe wie in Unterabschnitt 2.1 ist damit hier und in den folgenden Beispielen für Lebensversicherungsverträge für einzelne Personen nicht nötig. Relevant ist lediglich zum Zeitpunkt T, ob der Schadensfall eingetreten ist oder nicht. Mit Hilfe der Grundlagen aus Abschnitt 3.1 sei dieses Ereignis daher modelliert als eine Zufallsvariable Y_T auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\tilde{\Omega}, \mathcal{G}, Q)$ mit

$$Y_T = \begin{cases} 1 & , \quad \text{mit Wahrscheinlichkeit } {}_{T-t}q_{x+t}, \\ 0 & , \quad \text{mit Wahrscheinlichkeit } {}_{T-t}p_{x+t}. \end{cases}$$

Damit lautet also die Wertfunktion U in diesem Fall:

$$U(t,w) = \sup_{\pi(\cdot)\in\mathcal{A}(t,w)} E_{P\times Q}\left[u(W(T)-Y_T) \mid W(t)=w\right].$$

Dabei soll der Index $P \times Q$ verdeutlichen, dass der Erwartungswert bezüglich dieses Produktmaßes auszuwerten ist.

Auf eine Abhängigkeit der Wertfunktion U von einem Anfangswert y kann hier verzichtet werden, denn wie oben bereits erwähnt, ändert sich die Höhe der Versicherungssumme bis zu T nicht und ein Prozess für die kumulierte Schadenhöhe ist nicht notwendig. Allerdings ändert sich die Verteilung von Y_T im Laufe der Zeit. Diese Veränderung wird jedoch durch den Erwartungswert bezüglich Q berücksichtigt.

Für die Wertfunktion U gilt mit dem Bellman-Prinzip (Lemma 1.6):

$$\text{(3.1)} \quad U(t,w) \geq E_{P\times Q}\left[U(t+h, W(t+h)) \mid W(t)=w\right] \quad \forall\, h \in [0, T-t],\ \pi(\cdot) \in \mathcal{A}(t,w).$$

In dieser Zeitperiode $[t, t+h]$ stirbt der Versicherungsnehmer mit Wahrscheinlichkeit ${}_hq_{x+t}$. Für diesen Fall ist es für das Versicherungsunternehmen aber sicher, dass es zu T die Versicherungssumme in Höhe von 1 auszahlen muss. Zu $t+h$ muss es dafür also $e^{-r(T-t-h)}$ zurückhalten, hat dafür aber Gewissheit über den Wert von Y_T. Damit ist also die rechte Seite in (3.1) mit Wahrscheinlichkeit ${}_hq_{x+t}$:

$$\text{(3.2)} \qquad E_P\left[V(t+h, W(t+h) - e^{-r(T-t-h)}) \mid W(t)=w\right] \quad \forall\, \pi(\cdot) \in \mathcal{A}(t,w).$$

Mit Wahrscheinlichkeit ${}_hp_{x+t}$ erlebt der Versicherungsnehmer aber den Zeitpunkt $t+h$. Dann besteht für das Versicherungsunternehmen nach wie vor Ungewissheit über den Wert von Y_T, es muss dafür aber auch noch nicht die Versicherungsleistung für den Versicherungsfall bei seinem Portfolioproblem berücksichtigen. Die rechte Seite in (3.1) lautet dann mit Wahrscheinlichkeit ${}_hp_{x+t}$:

(3.3) $$E_P\left[U(t+h, W(t+h)) \mid W(t)=w\right] \quad \forall\, \pi(\cdot) \in \mathcal{A}(t,w).$$

Zusammen mit (3.2) gilt also in (3.1):

(3.4)
$$\begin{aligned} U(t,w) \geq {}_hp_{x+t}\, & E_P\left[U(t+h, W(t+h)) \mid W(t)=w\right] \\ & + {}_hq_{x+t}\, E_P\left[V(t+h, W(t+h) - e^{-r(T-t-h)}) \mid W(t)=w\right] \quad \forall\, \pi(\cdot) \in \mathcal{A}(t,w). \end{aligned}$$

Unter der Annahme $U, V \in C^{1,2}([0,T) \times \mathbb{R})$ können die Summanden auf der rechten Seite von (3.4) mit Hilfe der Itô-Formel umgeformt werden. Für den ersten Summanden gilt dann:

$$\begin{aligned} & E_P\left[U(t+h, W(t+h)) \mid W(t)=w\right] = U(t,w) \\ & \quad + E_P\left[\int_t^{t+h} U_t(s, W(s))\, ds + \int_t^{t+h} U_w(s, W(s))\, dW(s) \mid W(t)=w\right] \\ & \quad + E_P\left[\int_t^{t+h} \frac{1}{2} U_{ww}(s, W(s)) \pi^2(s) \sigma^2\, ds \mid W(t)=w\right] \\ & = U(t,w) \\ & \quad + E_P\left[\int_t^{t+h} \{U_t(s, W(s)) + [rW(s) + (\mu - r)\pi(s)] U_w(s, W(s))\}\, ds \mid W(t)=w\right] \\ & \quad + E_P\left[\int_t^{t+h} \frac{1}{2} U_{ww}(s, W(s)) \pi^2(s) \sigma^2\, ds \mid W(t)=w\right]. \end{aligned}$$

Analoges kann man für den zweiten Summanden zeigen. Mit diesen Umformungen ergibt sich in (3.4) für alle $\pi(\cdot) \in \mathcal{A}(t,w)$:

$$\begin{aligned} U(t,w) \geq {}_hp_{x+t} U(t,w) & + {}_hq_{x+t} V(t, w - e^{-r(T-t)}) \\ & + {}_hp_{x+t}\, E_P\Big[\int_t^{t+h} \{U_t(s, W(s)) + [rW(s) + (\mu - r)\pi(s)] U_w(s, W(s)) \\ & \quad + \frac{1}{2} U_{ww}(s, W(s)) \pi^2(s) \sigma^2\}\, ds \mid W(t)=w\Big] \\ & + {}_hq_{x+t}\, E_P\Big[\int_t^{t+h} \{V_t(s, W(s) - e^{-r(T-s)}) \\ & \quad + [rW(s) + (\mu - r)\pi(s)] V_w(s, W(s) - e^{-r(T-s)})\, ds \\ & \quad + \frac{1}{2} V_{ww}(s, W(s) - e^{-r(T-s)}) \pi^2(s) \sigma^2\}\, ds \mid W(t)=w\Big]. \end{aligned}$$

Subtrahiert man auf beiden Seiten ${}_hp_{x+t}U(t,w)$ und teilt durch h, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{{}_hq_{x+t}}{h}U(t,w) \geq \frac{{}_hq_{x+t}}{h}&V(t,w-e^{-r(T-t)}) \\
&+ {}_hp_{x+t}\, E_P\left[\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\{U_t(s,W(s)) + [rW(s)+(\mu-r)\pi(s)]U_w(s,W(s))\right. \\
&\left. + \frac{1}{2}U_{ww}(s,W(s))\pi^2(s)\sigma^2\}\, ds \mid W(t)=w\right] \\
&+ {}_hq_{x+t}\, E_P\left[\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\{V_t(s,W(s)-e^{-r(T-s)})\right. \\
&+ [rW(s)+(\mu-r)\pi(s)]V_w(s,W(s)-e^{-r(T-s)})\, ds \\
&\left. + \frac{1}{2}V_{ww}(s,W(s)-e^{-r(T-s)})\pi^2(s)\sigma^2\}\, ds \mid W(t)=w\right],
\end{aligned}$$

und für $h \to 0+$ ist der Wert von $W(t)$ bekannt und es gilt:

$$\begin{aligned}
\lambda(x+t)U(t,w) \geq \lambda(x+t)&V(t,w-e^{-r(T-t)}) + U_t(t,w) \\
&+ [rw+(\mu-r)\pi]U_w(t,w) + \frac{\sigma^2\pi^2}{2}U_{ww}(t,w).
\end{aligned}$$

Dabei gilt ebenfalls mit dem Bellman-Prinzip (Lemma 1.6) Gleichheit, wenn das Supremum über alle zulässigen Portfolioprozesse genommen wird. Im Startzeitpunkt t ist es also das Supremum über alle zulässigen Anfangsinvestitionen in das risikobehaftete Wertpapier, und zusammen mit der Endbedingung gilt die HJB-Gleichung:

$$(3.5)\qquad \begin{cases} 0 = U_t(t,w) + \sup\limits_{\pi\in\mathbb{R}}\left\{(\mu-r)\pi U_w(t,w) + \dfrac{\sigma^2\pi^2}{2}U_{ww}(t,w)\right\} + rwU_w(t,w) \\ \qquad + \lambda(x+t)[V(t,w-e^{-r(T-t)}) - U(t,w)], \\ u(w) = U(T,w). \end{cases}$$

Wegen der Konkavität von U ist das Supremum ein wohldefiniertes Maximum. Es wird analog zu (1.9) erreicht bei

$$\pi^*(t,w) = -\frac{(\mu-r)U_w(t,w)}{\sigma^2U_{ww}(t,w)},$$

und der optimale Portfolioprozess hat mit dem Verifikationstheorem (Satz 1.7) folgende Gestalt:

$$\pi^*(s, W^*(s)) = -\frac{(\mu - r)U_w(s, W^*(s))}{\sigma^2 U_{ww}(s, W^*(s))}, \quad t \leq s \leq T,$$

wobei $W^*(s)$ zusammen mit $\pi^*(s)$ die Lösung von (1.4) ist. Damit lautet (3.5):

$$\text{(3.6)} \qquad \begin{cases} 0 = U_t(t,w) - \dfrac{(\mu - r)^2 U_w^2(t,w)}{2\sigma^2 U_{ww}(t,w)} + rwU_w(t,w), \\ \qquad + \lambda(x+t)[V(t, w - e^{-r(T-t)}) - U(t,w)], \\ u(w) = U(T,w). \end{cases}$$

Beispiel 3.7. Unter den Voraussetzungen dieses Unterabschnittes sollen nun die Vorbehaltsprämien berechnet werden. Sei wieder $u(w) = -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha w}$, $\alpha > 0$, eine Exponentialnutzenfunktion. Zur Lösung der HJB-Gleichung sei angenommen, dass die Wertfunktion U von der Gestalt

$$U(t,w) = V(t,w)\phi(t)$$

ist, wobei $V(t,w)$ die Wertfunktion aus Beispiel 1.10 sei. Dann lautet die HJB-Gleichung (3.6):

$$\text{(3.7)} \qquad \begin{cases} 0 = V_t(t,w)\phi(t) + V(t,w)\phi'(t) + \lambda(x+t)[V(t, w - e^{-r(T-t)}) - V(t,w)\phi(t)] \\ \qquad - \dfrac{(\mu - r)^2 V_w^2(t,w)}{2\sigma^2 V_{ww}(t,w)}\phi(t) + rwV_w(t,w)\phi(t) \\ u(w) = V(T,w)\phi(T). \end{cases}$$

Da $V(t,w)$ ihrerseits die HJB-Gleichung (1.11) erfüllt, fallen aus der ersten Gleichung in (3.7) der erste, vierte und letzte Summand heraus. Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} V(t, w - e^{-r(T-t)}) &= -\frac{1}{\alpha}\exp\left\{-\alpha(w - e^{-r(T-t)})e^{r(T-t)} - \frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2}(T-t)\right\} \\ &= V(t,w)e^{\alpha}. \end{aligned}$$

Damit lautet (3.7):

$$\begin{cases} 0 = V(t,w)\phi'(t) + \lambda(x+t)[V(t,w)e^{\alpha} - V(t,w)\phi(t)], \\ u(w) = V(T,w)\phi(T). \end{cases}$$

Wegen $V(T,w) = u(w)$ gilt also für $\phi(t)$ die lineare Differentialgleichung 1. Ordnung:

$$\begin{cases} 0 = \phi'(t) + \lambda(x+t)\left[e^{\alpha} - \phi(t)\right], \\ 1 = \phi(T) \end{cases}$$

mit der Lösung:

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \exp\left\{-\int_t^T \lambda(x+s)\,ds\right\} \\ &\quad + \left(\int_t^T \lambda(x+s)e^{\alpha}\exp\left\{\int_s^T \lambda(x+u)\,du\right\}\,ds\right)\exp\left\{-\int_t^T \lambda(x+s)\,ds\right\} \\ &= \exp\left\{-\int_t^T \lambda(x+s)\,ds\right\} + e^{\alpha}\int_t^T \lambda(x+s)\exp\left\{-\int_t^s \lambda(x+u)\,du\right\}\,ds \\ &= \exp\left\{-\int_t^T \lambda(x+s)\,ds\right\} + e^{\alpha}\left(-\exp\left\{-\int_t^T \lambda(x+s)\,ds\right\}+1\right) \\ &= {}_{T-t}p_{x+t} + e^{\alpha}\,{}_{T-t}q_{x+t} \qquad \text{wegen Lemma 3.2, } \textit{(iv)} \\ &= E_Q\left[e^{\alpha Y_T}\right] = M_{Y_T}(\alpha), \end{aligned}$$

wobei M_{Y_T} die Momenterzeugende-Funktion von Y_T ist. Die Vorbehaltsprämien ergeben sich jetzt aus Definition 2.1. So gilt für die Vorbehaltsprämie P^{VN} des VN:

$$\begin{aligned} && V(t, w - P^{VN}(t,w)) &= V(t,w)M_{Y_T}(\alpha) \\ \Leftrightarrow && \exp\left\{-\alpha(w - P^{VN}(t,w))e^{r(T-t)}\right\} &= \exp\left\{-\alpha w e^{r(T-t)}\right\}M_{Y_T}(\alpha) \\ \Leftrightarrow && \exp\left\{\alpha P^{VN}(t,w)e^{r(T-t)}\right\} &= M_{Y_T}(\alpha) \\ \Leftrightarrow && P^{VN}(t,w) &= \frac{e^{-r(T-t)}}{\alpha}\ln M_{Y_T}(\alpha), \end{aligned}$$

und analog für die des VU:

$$\begin{aligned} && V(t,w) &= V(t, w + P^{VU}(t,w))M_{Y_T}(\alpha) \\ \Leftrightarrow && \exp\left\{-\alpha w e^{r(T-t)}\right\} &= \exp\left\{-\alpha(w + P^{VU}(t,w))e^{r(T-t)}\right\}M_{Y_T}(\alpha) \\ \Leftrightarrow && 1 &= \exp\left\{-\alpha P^{VU}(t,w)e^{r(T-t)}\right\}M_{Y_T}(\alpha) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \qquad -\frac{e^{-r(T-t)}}{\alpha} \ln \frac{1}{M_{Y_T}(\alpha)} = P^{VU}(t,w)$$
$$\Leftrightarrow \qquad \frac{e^{-r(T-t)}}{\alpha} \ln M_{Y_T}(\alpha) = P^{VU}(t,w).$$

Bemerkung 3.8. (i) Die Prämien steigen bei steigender absoluter Risikoaversion gemessen in α, denn für die Ableitung von $f(\alpha) := \frac{\ln(p + e^{\alpha} q)}{\alpha}$ mit $p := {}_{T-t}p_{x+t}$ und $q := {}_{T-t}q_{x+t}$ gilt:

$$f'(\alpha) = \frac{1}{\alpha^2}\left(\alpha \frac{qe^{\alpha}}{p+qe^{\alpha}} - \ln\left(p + qe^{\alpha}\right)\right) =: \frac{f_1(\alpha) - f_2(\alpha)}{\alpha^2}.$$

Wegen $f_1(0) = f_2(0) = 0$ und

$$f_1'(\alpha) - f_2'(\alpha) = \frac{(1+\alpha)pqe^{\alpha} + q^2e^{2\alpha}}{(p+qe^{\alpha})^2} - \frac{qe^{\alpha}}{p+qe^{\alpha}} = \frac{\alpha pqe^{\alpha}}{(p+qe^{\alpha})^2} > 0 \quad \forall\, \alpha > 0$$

ist also $f'(\alpha) \geq 0 \quad \forall\, \alpha \geq 0$ und daher f monoton wachsend.

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha \to 0+} \frac{e^{-r(T-t)}}{\alpha} \ln M_{Y_T}(\alpha) &= \lim_{\alpha \to 0+} \frac{e^{-r(T-t)}}{\alpha} \ln\left({}_{T-t}p_{x+t} + e^{\alpha}{}_{T-t}q_{x+t}\right) \\
&= \lim_{\alpha \to 0+} e^{-r(T-t)} \frac{e^{\alpha}{}_{T-t}q_{x+t}}{{}_{T-t}p_{x+t} + e^{\alpha}{}_{T-t}q_{x+t}} \\
&= e^{-r(T-t)}{}_{T-t}q_{x+t},
\end{aligned}$$

also der Leistungsbarwert und damit die Netto-Prämie.

(ii) Bei gleicher absoluter Risikoaversion von VN und VU sind die Prämien gleich. Nimmt man eine höhere Risikoaversion des Versicherungsnehmers an, so gilt wegen (i): $P^{VU}(t,w) < P^{VN}(t,w)$.

(iii) Die Prämien sind unabhängig vom risikobehafteten Wertpapier.

3.2.2 Risiko-Lebensversicherung für mehrere Versicherungsnehmer

In diesem Unterabschnitt wird eine Gruppe von n x-jährigen Versicherungsnehmern betrachtet. Diese Gruppe wird dabei als Kollektiv behandelt, das heißt, das VU entscheidet, ob es entweder alle oder keinen der VN versichert, und die Versicherungsnehmer treffen ihre Entscheidung ebenfalls gemeinsam. Der Versicherungsbeginn sei wieder $t \geq 0$, und der Fälligkeitszeitpunkt der Versicherungsleistungen liege bei T.

Für jeden Versicherungsnehmer, der bis zum Zeitpunkt T verstirbt, muss das VU wiederum die Versicherungssumme der Höhe 1 zum Zeitpunkt T zahlen. Bezeichnet $\{Y(s),\, s \in [t,T]\}$ die Anzahl der VN, die bis s verstorben sind, so entspricht $Y(T)$ der Summe der Versicherungsleistungen, die das VU zu T auszuzahlen hat. $Y(T)$ ist dabei eine Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\tilde{\Omega}, \mathcal{G}, Q)$, für die jetzt unter der Annahme identischer und unabhängiger Sterbewahrscheinlichkeiten gilt:

$$Y(T) \sim \mathrm{Bin}(n - Y(t), {}_{T-t}q_{x+t}),$$

wobei $\mathrm{Bin}(\cdot,\cdot)$ die Verteilungsfunktion der Binomialverteilung sei.

Für die Wertfunktion $U(t,w,y)$ des VU, das alle n VN versichert hat, gilt jetzt:

$$U(t,w,y) = \sup_{\pi(\cdot)\in\mathcal{A}(t,w)} E_{P\times Q}\left[u(W(T) - Y(T)) \mid W(t) = w,\, Y(t) = y\right].$$

Zur Herleitung einer HJB-Gleichung für U seien die möglichen Werte für y unterschieden.

Gilt $y = n$, so muss das VU mit Sicherheit zu T n-mal die Versicherungssumme auszahlen. Dafür stellt es zu t den abdiskontierten Wert, also $ne^{-r(T-t)}$ zurück. Für den Rest der Periode bis T besteht aber damit keine Ungewissheit mehr über den Wert von $Y(T)$, und die Wertfunktion lautet in diesem Fall:

$$U(t,w,n) = V(t, w - ne^{-r(T-t)}). \tag{3.8}$$

Für $y \in \{0,\dots,n-1\}$ sei zunächst wieder das Bellman-Prinzip (Lemma 1.6) auf U

angewandt:

$$(3.9)\quad U(t,w,y) \geq E_{P\times Q}\left[U(t+h,W(t+h),Y(t+h)) \mid W(t)=w,\, Y(t)=y\right] \quad \forall\, h \in [0,T-t],\ \pi(\cdot) \in \mathcal{A}(t,w).$$

Wegen der stetigen Verteilung der Zufallsvariable, die das Alter einer Person angibt, ist die Wahrscheinlichkeit, dass mehrere Versicherungsnehmer zur selben Zeit versterben, $= 0$. Daher sei im Bellman-Prinzip das h so klein gewählt, dass in $[t,t+h]$ höchstens ein Versicherungsnehmer verstirbt. Damit nimmt $Y(t+h)$ zu $t+h$ mit Wahrscheinlichkeit $({}_hp_{x+t})^{n-y}$ den Wert y und mit Wahrscheinlichkeit $\binom{n-y}{1}{}_hq_{x+t}({}_hp_{x+t})^{n-y-1}$ den Wert $y+1$ an. Analog zu (3.4) gilt somit in (3.9):

$$\begin{aligned} U(t,w,y) &\geq ({}_hp_{x+t})^{n-y}\, E_P\left[U(t+h,W(t+h),y) \mid W(t)=w,\, Y(t)=y\right] \\ &\quad + (n-y)\,{}_hq_{x+t}({}_hp_{x+t})^{n-y-1}\, E_P\left[U(t+h,W(t+h),y+1) \mid W(t)=w, Y(t)=y\right] \\ &\quad \forall\, \pi(\cdot) \in \mathcal{A}(t,w). \end{aligned}$$

Mit den gleichen Rechenschritten wie im Unterabschnitt 3.2.1 und der Überlegung für den Fall $y=n$ gelangt man schließlich zu einer rekursiven HJB-Gleichung:

$$(3.10)\qquad \begin{cases} V(t,w-ne^{-r(T-t)}) = U(t,w,n); \\ \text{Für } y = 0,1,\ldots,n-1: \\ 0 = U_t(t,w,y) + rwU_w(t,w,y) - \dfrac{(\mu-r)^2U_w^2(t,w,y)}{2\sigma^2U_{ww}(t,w,y)} \\ \qquad + (n-y)\lambda(x+t)[U(t,w,y+1) - U(t,w,y)], \\ u(w-y) = U(T,w,y). \end{cases}$$

Bemerkung 3.9. Für $y=0$ und $n=1$ entspricht das Szenario aus diesem Unterabschnitt dem des Vorangegangenen. In diesem Fall stimmen auch die HJB-Gleichungen (3.10) und (3.6) überein.

Beispiel 3.10. Sei auch hier $u(w) = -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha w}$, $\alpha > 0$, die Exponentialnutzenfunktion. Wegen Bemerkung 3.9 liegt ein analoger Ansatz zu dem aus Beispiel 3.7 nahe. Für $y = 0$, $n = 1$ muss demnach gelten:

$$U(t, w, 0) = V(t, w)\phi(t),$$

mit $\phi(t) = {}_{T-t}p_{x+t} + e^{\alpha}{}_{T-t}q_{x+t}$ und $V(t, w)$ aus Beispiel 1.10. Einsetzen und Nachrechnen zeigt, dass

$$U(t, w, y) = V(t, w)e^{\alpha y}\phi(t)^{n-y}$$

die rekursive HJB-Gleichung (3.10) löst.

Damit können die Vorbehaltsprämien bestimmt werden. Wegen der Betrachtung der n Versicherungsnehmer als Kollektiv stehen sie für die kumulierten Prämien, nicht für die eines einzelnen VN. Für P^{VN} gilt:

$$\begin{aligned} & & V(t, w - P^{VN}(t, w, y)) &= V(t, w)e^{\alpha y}\phi(t)^{n-y} \\ \Leftrightarrow & & \exp\left\{\alpha P^{VN}(t, w, y)e^{r(T-t)}\right\} &= e^{\alpha y}\phi(t)^{n-y} \\ \Leftrightarrow & & P^{VN}(t, w, y) &= ye^{-r(T-t)} + \frac{n-y}{\alpha}e^{-r(T-t)}\ln\phi(t), \end{aligned}$$

und analog für P^{VU}:

$$\begin{aligned} & & V(t, w) &= V(t, w + P^{VU}(t, w, y))e^{\alpha y}\phi(t)^{n-y} \\ \Leftrightarrow & & 1 &= \exp\left\{-\alpha P^{VN}(t, w, y)e^{r(T-t)}\right\}e^{\alpha y}\phi(t)^{n-y} \\ \Leftrightarrow & & P^{VU}(t, w, y) &= ye^{-r(T-t)} + \frac{n-y}{\alpha}e^{-r(T-t)}\ln\phi(t). \end{aligned}$$

Bemerkung 3.11. Die Prämien setzen sich zusammen aus den abdiskontierten Versicherungsleistungen der y VN, die zu t bereits verstorben sind, und einer Risikoprämie für die verbliebenen $n - y$ VN. Dieser Risikoanteil entspricht dabei der Prämie für einen einzelnen VN aus Unterabschnitt 3.2.1.

3.2.3 Reine-Erlebensfallversicherung für einen Versicherungsnehmer

Die Reine-Erlebensfallversicherung für die Periode $[t, T]$ ist das Gegenstück zur Risiko-Lebensversicherung aus Unterabschnitt 3.2.1. Bei ihr muss das VU die Versicherungssumme in Höhe von 1 zu T auszahlen, falls der VN den Zeitpunkt T erlebt. Verstirbt der VN hingegen bis dahin, wird keine Auszahlung fällig. Die Höhe der Versicherungsleistung zu T sei auch hier als Zufallsvariable auf $(\tilde{\Omega}, \mathcal{G}, Q)$ mit:

$$Y_T = \begin{cases} 1 & , \quad \text{mit Wahrscheinlichkeit } {}_{T-t}p_{x+t} \\ 0 & , \quad \text{mit Wahrscheinlichkeit } {}_{T-t}q_{x+t}. \end{cases}$$

modelliert. Die Wertfunktion

$$U(t, w) = \sup_{\pi(\cdot) \in \mathcal{A}(t,w)} E_{P \times Q} \left[u(W(T) - Y_T) \mid W(t) = w \right]$$

kann dann auch hier mit dem Bellman-Prinzip (Lemma 1.6) abgeschätzt werden:

$$U(t, w) \geq E_{P \times Q} \left[U(t + h, W(t + h)) \mid W(t) = w \right] \quad \forall\, h \in [0, T - t],\ \pi(\cdot) \in \mathcal{A}(t, w). \tag{3.11}$$

Stirbt der VN in dieser Periode $[t, t+h]$, ist $Y_T = 0$ und die Wertfunktion zu $t + h$ damit:

$$U(t + h, W(t + h)) = V(t + h, W(t + h)).$$

Erlebt der VN aber den Zeitpunkt $t + h$, so bleibt die Unsicherheit über den Wert von Y_T erhalten. Damit wird (3.11) zu:

$$\begin{aligned} U(t, w) \geq{}& {}_h p_{x+t}\, E_P \left[U(t + h, W(t + h)) \mid W(t) = w \right] \\ &+ {}_h q_{x+t}\, E_P \left[V(t + h, W(t + h)) \mid W(t) = w \right] \quad \forall\, \pi(\cdot) \in \mathcal{A}(t, w). \end{aligned}$$

Analoges Vorgehen zum Unterabschnitt 3.2.1 führt schließlich auf die HJB-Gleichung:

$$\begin{cases} 0 = U_t(t, w) - \dfrac{(\mu - r)^2 U_w^2(t, w)}{2\sigma^2 U_{ww}(t, w)} + rwU_w(t, w) \\ \qquad + \lambda(x + t)[V(t, w) - U(t, w)], \\ u(w - 1) = U(T, w), \end{cases} \tag{3.12}$$

wobei die Endbedingung entsprechend angepasst ist.

Beispiel 3.12. Gegeben sei die Exponentialnutzenfunktion $u(w) = -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha w},\ \alpha > 0$. Für die Wertfunktion U sei angenommen:

$$U(t,w) = V(t,w)\eta(t),$$

mit $V(t,w)$ aus Beispiel 1.10. Ersetzt man diesen Ansatz in der HJB-Gleichung (3.12), so folgt:

$$\begin{cases} 0 = V_t(t,w)\eta(t) + V(t,w)\eta'(t) + \lambda(x+t)[V(t,w) - V(t,w)\eta(t)] \\ \qquad - \dfrac{(\mu - r)^2 V_w^2(t,w)}{2\sigma^2 V_{ww}(t,w)}\eta(t) + rwV_w(t,w)\eta(t), \\ u(w-1) = V(T,w)\eta(T). \end{cases}$$

Da V die HJB-Gleichung (1.11) löst, gilt:

$$\eta(t)\left(V_t(t,w) - \frac{(\mu - r)^2 V_w^2(t,w)}{2\sigma^2 V_{ww}(t,w)} + rwV_w(t,w)\right) = 0.$$

Daher muss $\eta(t)$ folgende lineare Differentialgleichung 1. Ordnung lösen:

$$\begin{cases} 0 = \eta'(t) + \lambda(x+t)\left(1 - \eta(t)\right), \\ e^{\alpha} = \eta(T). \end{cases}$$

Deren Lösung ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} \eta(t) &= \left(e^{\alpha} + \int_t^T \lambda(x+s)\exp\left\{\int_s^T \lambda(x+u)\,du\right\}ds\right)\exp\left\{-\int_t^T \lambda(x+s)\,ds\right\} \\ &= e^{\alpha}{}_{T-t}p_{x+t} + \int_t^T \lambda(x+s)\exp\left\{-\int_t^s \lambda(x+u)\,du\right\}ds \\ &= e^{\alpha}{}_{T-t}p_{x+t} - {}_{T-t}p_{x+t} + 1 = e^{\alpha}{}_{T-t}p_{x+t} + {}_{T-t}q_{x+t} \\ &= E_Q\left[e^{\alpha Y_T}\right] = M_{Y_T}(\alpha), \end{aligned}$$

wobei M_{Y_T} die Momenterzeugende-Funktion von Y_T ist. Für die Vorbehaltsprämien gilt damit analog zu Beispiel 3.7:

$$P^{VN}(t,w) = P^{VU}(t,w) = \frac{e^{-r(T-t)}}{\alpha}\ln M_{Y_T}(\alpha).$$

Bemerkung 3.13. (i) Es gilt entsprechend der Bemerkung 3.8: Die Prämien steigen bei steigender Risikoaversion α, sind unabhängig vom risikobehafteten Wertpapier und es gilt: $\lim_{\alpha\to 0+} \frac{e^{-r(T-t)}}{\alpha} \ln M_{Y_T}(\alpha) = e^{-r(T-t)}{}_{T-t}p_{x+t}$, also der Leistungsbarwert oder die Nettoprämie.

(ii) Der Abschluss einer Risiko-Lebensversicherung aus Beispiel 3.7 zusammen mit einer Reinen-Erlebensfallversicherung aus diesem Beispiel garantiert dem VN eine sichere Auszahlung von 1 zum Zeitpunkt T. Für die Summe der beiden Prämien, die der VN dafür zu entrichten hat, gilt aber:

$$
\begin{aligned}
&\frac{e^{-r(T-t)}}{\alpha}\left[\ln\left({}_{T-t}p_{x+t} + e^{\alpha}{}_{T-t}q_{x+t}\right) + \ln(e^{\alpha}{}_{T-t}p_{x+t} + {}_{T-t}q_{x+t})\right] \\
&\quad = \frac{e^{-r(T-t)}}{\alpha}\left[\ln\left({}_{T-t}p_{x+t} + e^{\alpha}{}_{T-t}q_{x+t}\right)(e^{\alpha}{}_{T-t}p_{x+t} + {}_{T-t}q_{x+t})\right] \\
&\quad = \frac{e^{-r(T-t)}}{\alpha}\left[\ln e^{\alpha}\left(\frac{{}_{T-t}p_{x+t}\,{}_{T-t}q_{x+t}}{e^{\alpha}} + {}_{T-t}p^2_{x+t} + {}_{T-t}q^2_{x+t} + {}_{T-t}p_{x+t}\,{}_{T-t}q_{x+t}e^{\alpha}\right)\right] \\
&\quad = e^{-r(T-t)}\left[1 + \frac{1}{\alpha}\ln\left((e^{\alpha} + e^{-\alpha})\,{}_{T-t}p_{x+t}\,{}_{T-t}q_{x+t} + 1 - 2\,{}_{T-t}p_{x+t}\,{}_{T-t}q_{x+t}\right)\right] \\
&\quad = e^{-r(T-t)}\left[1 + \frac{1}{\alpha}\ln\left(1 + (e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}})^2\,{}_{T-t}p_{x+t}\ {}_{T-t}q_{x+t}\right)\right] \\
&\quad > e^{-r(T-t)}.
\end{aligned}
$$

Die Summe der Prämien ist also größer als der abdiskontierte Wert der sicheren Auszahlung. Darin drückt sich die Unvollständigkeit des Marktes aus.

3.2.4 Schadenhöhe als Diffusionsprozess

In diesem Unterabschnitt sei die kumulierte Schadenhöhe bis zum Zeitpunkt $s \in [t,T]$ $Y(s)$ modelliert als Diffusionsprozess:

$$\begin{cases} dY(s) = \theta(s, Y(s))\, ds + \zeta(s, Y(s))\, d\tilde{B}(s), \quad t \leq s \leq T, \\ Y(t) = y \geq 0. \end{cases} \tag{3.13}$$

Dabei sei $\{\tilde{B}(s),\ s \in [t,T]\}$ eine Brownsche Bewegung unabhängig von B aus (1.1). Damit (3.13) eine eindeutige Lösung besitzt, sollen $\theta(t,y)$ und $\zeta(t,y)$ die folgenden Bedingungen erfüllen für ein $K > 0$:

$$|\theta(t,y) - \theta(t,x)| + |\zeta(t,y) - \zeta(t,x)| \leq K|y - x|,$$
$$|\theta(t,y)|^2 + |\zeta(t,y)|^2 \leq K(1+y)^2.$$

Mit dem Bellman-Prinzip (Lemma 1.6) gilt dann zunächst für die Wertfunktion U:

$$U(t,w,y) \geq E\left[U(t+h, W(t+h), Y(t+h)) \middle| W(t) = w,\ Y(t) = y\right]$$
$$\forall\ h \in [0, T-t],\ \pi(\cdot) \in \mathcal{A}(t,w).$$

Und für $U \in C^{1,2}([0,T) \times \mathbb{R}^2)$ ergibt sich für die rechte Seite mit der Itô-Formel:

$$\begin{aligned}
&E\left[U(t+h, W(t+h), Y(t+h)) \mid W(t) = w,\ Y(t) = y\right] = U(t,w,y) \\
&\quad + E\Bigg[\int_t^{t+h} U_t(s, W(s), Y(s))\, ds + \int_t^{t+h} U_w(s, W(s), Y(s))\, dW(s) \\
&\quad + \int_t^{t+h} U_y(s, W(s), Y(s))\, dY(s) \\
&\quad + \int_t^{t+h} \frac{1}{2} \Big\{U_{ww}(s, W(s), Y(s))\pi^2(s)\sigma^2 \\
&\qquad + U_{yy}(s, W(s), Y(s))\zeta^2(s, Y(s))\Big\}\, ds \mid W(t) = w,\ Y(t) = y\Bigg] \\
&= U(t,w,y) + E\Bigg[\int_t^{t+h} U_t(s, W(s), Y(s))\, ds \\
&\quad + \int_t^{t+h} U_w(s, W(s), Y(s))[rW(s) + (\mu - r)\pi(s)]\, ds \\
&\quad + \int_t^{t+h} U_y(s, W(s), Y(s))\theta(s, Y(s))\, ds
\end{aligned}$$

$$+ \int_t^{t+h} \frac{1}{2} \left\{ U_{ww}(s, W(s), Y(s)) \pi^2(s) \sigma^2 \right.$$
$$\left. + U_{yy}(s, W(s), Y(s)) \zeta^2(s, Y(s)) \right\} ds \mid W(t) = w,\ Y(t) = y \Big] .$$

Analoges Vorgehen zu den vorherigen Unterabschnitten führt dann auf die HJB-Gleichung:

$$(3.14) \quad \begin{cases} 0 = U_t(t,w,y) - \dfrac{(\mu - r)^2 U_w^2(t,w,y)}{2\sigma^2 U_{ww}(t,w,y)} + \theta(t,y) U_y(t,w,y) + \dfrac{1}{2}\zeta^2(t,y) U_{yy}(t,w,y) \\ \qquad + rwU_w(t,w,y), \\ u(w-y) = U(T,w,y). \end{cases}$$

Beispiel 3.14. Sei $u(w) = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha w},\ \alpha > 0$, die Exponentialnutzenfunktion. Sei außerdem angenommen, dass die Koeffizienten θ und ζ des Diffusionsprozesses unabhängig von y sind, und die Wertfunktion von der Form:

$$U(t,w,y) = V(t,w) \exp\{\alpha y + \psi(t)\}$$

mit $V(t,w)$ aus Beispiel 1.10 ist. Einsetzen dieses Ansatzes in die HJB-Gleichung (3.14) führt auf die lineare Differentialgleichung 1. Ordnung für ψ:

$$\begin{cases} 0 = \psi'(t) + \alpha\theta(t) + \dfrac{1}{2}\alpha^2\zeta^2(t), \\ 0 = \psi(T). \end{cases}$$

Diese Gleichung hat die Lösung:

$$\psi(t) = \int_t^T \left(\alpha\theta(s) + \frac{1}{2}\alpha^2\zeta^2(s) \right) ds,$$

und damit lautet die Wertfunktion U:

$$U(t,w,y) = V(t,w) \exp\left\{ \alpha y + \int_t^T \left(\alpha\theta(s) + \frac{1}{2}\alpha^2\zeta^2(s) \right) ds \right\}.$$

Somit ergibt sich die Vorbehaltsprämie des VN aus:

$$
\begin{aligned}
&(3.15) \qquad V(t, w - P^{VN}(t,w,y)) = V(t,w)\exp\left\{\alpha y + \int_t^T \left(\alpha\theta(s) + \frac{1}{2}\alpha^2\zeta^2(s)\right)\, ds\right\} \\
\Leftrightarrow \quad & \exp\left\{\alpha P^{VN}(t,w,y)e^{r(T-t)}\right\} = \exp\left\{\alpha y + \int_t^T \left(\alpha\theta(s) + \frac{1}{2}\alpha^2\zeta^2(s)\right)\, ds\right\} \\
\Leftrightarrow \quad & P^{VN}(t,w,y) = \frac{e^{-r(T-t)}}{\alpha}\left(\alpha y + \int_t^T \left(\alpha\theta(s) + \frac{1}{2}\alpha^2\zeta^2(s)\right)\, ds\right) \\
\Leftrightarrow \quad & P^{VN}(t,w,y) = ye^{-r(T-t)} + e^{-r(T-t)}\int_t^T \left(\theta(s) + \frac{1}{2}\alpha\zeta^2(s)\right)\, ds,
\end{aligned}
$$

und das ist auch die Vorbehaltsprämie des VU.

Bemerkung 3.15. Die Prämien aus dem vorangegangenen Beispiel setzen sich zusammen aus dem abdiskontierten Wert der Versicherungsleistungen, die mit Sicherheit zu T zu leisten sind, und einem Wert, der sich im Wesentlichen aus der erwarteten abdiskontierten Schadenhöhe in $[t, T]$ und dem abdiskontierten Produkt aus Risikoaversion und Varianz der Schadenhöhe in dieser Periode ergibt. Diese Prämie also, die nach einer Art Exponentialnutzenprinzip bestimmt ist, folgt dem so genannten Varianzprinzip.

Beispiel 3.16. $u(w) = -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha w}$, $\alpha > 0$, sei die Exponentialnutzenfunktion. Für die Koeffizienten der Diffusion gelte:

$$\theta(t,y) = (n-y)\lambda(x+t), \qquad \zeta(t,y) = \sqrt{(n-y)\lambda(x+t)}$$

mit $\lambda(x)$ aus Definition 3.1 und $n \in \mathbb{N}$ fest. Sei jetzt $\lambda(x) \equiv \lambda > 0$ angenommen. Für die Wertfunktion U sei:

$$U(t,w,y) = V(t,w)e^{\alpha n}\exp\{(n-y)\eta(t)\}$$

angesetzt. Eingesetzt in (3.14) führt auf die Bernoulli-Differentialgleichung für η:

$$\begin{cases} 0 = \eta'(t) - \lambda\eta(t) + \dfrac{\lambda}{2}\,\eta^2(t), \\ -\alpha = \eta(T). \end{cases}$$

Zur Lösung dieser Differentialgleichung sei zunächst die lineare Differentialgleichung 1. Ordnung:

$$\begin{cases} z'(t) = -\lambda z(t) + \dfrac{\lambda}{2}, \\ z(T) = -\dfrac{1}{\alpha} \end{cases}$$

gelöst. Diese Differentialgleichung hat aber die Lösung:

$$\begin{aligned} z(t) &= \left(-\frac{1}{\alpha} - \int_t^T \frac{\lambda}{2} \exp\left\{-\int_s^T \lambda\, du\right\} ds\right) \left(\exp\left\{\int_t^T \lambda\, ds\right\}\right) \\ &= -\frac{1}{\alpha} \exp\{\lambda(T-t)\} + \frac{1}{2}\left(1 - \exp\{\lambda(T-t)\}\right). \end{aligned}$$

Daher ist $\eta(t)$ gegeben durch:

$$\eta(t) = \frac{1}{z(t)} = -\frac{2\alpha}{(2+\alpha)\exp\{\lambda(T-t)\} - \alpha}.$$

Für die Wertfunktion U gilt dann:

$$U(t,w,y) = V(t,w) \exp\left\{\alpha \left[n - \frac{2(n-y)}{(2+\alpha)\exp\{\lambda(T-t)\} - \alpha}\right]\right\},$$

und somit bestimmt sich die Vorbehaltsprämie des VN aus:

$$\begin{aligned} & V(t, w - P^{VN}(t,w,y)) = V(t,w) \exp\left\{\alpha \left[n - \frac{2(n-y)}{(2+\alpha)e^{\lambda(T-t)} - \alpha}\right]\right\} \\ \Leftrightarrow \quad & P^{VN}(t,w,y) = e^{-r(T-t)} \left[n - \frac{2(n-y)}{(2+\alpha)e^{\lambda(T-t)} - \alpha}\right] \\ \Leftrightarrow \quad & P^{VN}(t,w,y) = e^{-r(T-t)} \left[\frac{n\left[(2+\alpha) - \alpha e^{-\lambda(T-t)}\right] - 2(n-y)e^{-\lambda(T-t)}}{(2+\alpha) - \alpha e^{-\lambda(T-t)}}\right] \\ \Leftrightarrow \quad & P^{VN}(t,w,y) = e^{-r(T-t)} \left[\frac{n(2+\alpha)\left(1 - e^{-\lambda(T-t)}\right) + 2ye^{-\lambda(T-t)}}{(2+\alpha) - \alpha e^{-\lambda(T-t)}}\right] \\ \Leftrightarrow \quad & P^{VN}(t,w,y) = (n-y)e^{-r(T-t)} \frac{(2+\alpha)\left(1 - e^{-\lambda(T-t)}\right)}{(2+\alpha) - \alpha e^{-\lambda(T-t)}} + ye^{-r(T-t)}. \end{aligned}$$

Desweiteren gilt: $P^{VN}(t,w,y) = P^{VU}(t,w,y)$.

Beispiel 3.17. Die Nutzenfunktion $u(w)$ sei die Exponentialnutzenfunktion $u(w) = -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha w}$, $\alpha > 0$. Weiterhin gelte $\theta(t,y) = \theta y$ und $\zeta(t,y) = \zeta y$, $\zeta > 0$, und es sei angenommen, dass die Wertfunktion U die Gestalt:

$$U(t,w,y) = V(t,w)\phi(t,y)$$

mit $V(t,w)$ aus Beispiel 1.10 hat. Zusammen mit der HJB-Gleichung (3.14) ergibt dieser Ansatz, dass $\phi(t,y)$ das folgende Cauchy-Problem lösen muss:

$$\begin{cases} 0 = \phi_t(t,y) + \theta y \phi_y(t,y) + \dfrac{\zeta^2 y^2}{2}\phi_{yy}(t,y), \\ e^{\alpha y} = \phi(T,y). \end{cases}$$

Die Feyman-Kac-Formel für Diffusionsprozesse gewährleistet, dass die Lösung dieses Cauchy-Problems die stochastische Darstellung:

$$\phi(t,y) = E\left[\exp\{\alpha X(T)\}\right]$$

besitzt, wobei $\{X(s),\, s \in [t,T]\}$ Lösung der stochastischen Differentialgleichung:

$$\begin{cases} dX(s) = \theta X(s)\,ds + \zeta X(s)\,d\tilde{B}(s), \\ X(t) = y \end{cases}$$

ist. Mit der Variation-der-Konstanten-Formel hat $X(T)$ die Darstellung:

$$\begin{aligned} X(T) &= y\exp\left\{\int_t^T \left(\theta - \frac{1}{2}\zeta^2\right)\, ds + \int_t^T \zeta\, d\tilde{B}(s)\right\} \\ &= y\exp\left\{\left(\theta - \frac{1}{2}\zeta^2\right)(T-t)\right\}\exp\left\{\zeta(\tilde{B}(T) - \tilde{B}(t))\right\}. \end{aligned}$$

Dabei gilt: $(\tilde{B}(T) - \tilde{B}(t)) \sim N(0, T-t)$ und daher: $\dfrac{\tilde{B}(T) - \tilde{B}(t)}{\sqrt{T-t}} \sim N(0,1)$. Damit hat die Funktion $\phi(t,y)$ die Darstellung:

$$\phi(t,y) = E\left[\exp\left\{k_1 e^{k_2 Z}\right\}\right],$$

wobei $k_1 = \alpha y \exp\left\{\left(\theta - \dfrac{\zeta^2}{2}\right)(T-t)\right\}$, $k_2 = \zeta\sqrt{T-t}$ und $Z \sim N(0,1)$. Somit gilt schließlich für die Vorbehaltsprämie des VN:

$$\begin{aligned} & V(t, w - P^{VN}(t,w,y)) = V(t,w)E\left[\exp\left\{k_1 e^{k_2 Z}\right\}\right] \\ \Leftrightarrow \quad & P^{VN}(t,w,y) = \frac{e^{-r(T-t)}}{\alpha}\ln M_X(k_1) \end{aligned}$$

mit der Momenterzeugenden-Funktion M_X der log-normalverteilten Zufallsvariable $X = e^{k_2 Z}$. Und es gilt auch hier: $P^{VU}(t, w, y) = P^{VN}(t, w, y)$.

3.2.5 Schadenzahl als Poisson-Prozess

Im Modell dieses Unterabschnittes folgt die Schadenzahl bis zum Zeitpunkt $s \in [t,T]$ einem inhomogenen Poisson-Prozess $\{N(s),\, s \in [t,T]\}$, $N(0) = 0$ f.s., mit Intensität $\rho(s) \geq 0$ und unabhängig von der Brownschen Bewegung B aus (1.1). Damit lautet der Prozess, der den kumulierten Schaden bis $s \in [t,T]$ angibt, folgendermaßen:

$$\begin{cases} dY(s) = L(s, W(s), Y(s))\, dN(s), \quad t \leq s \leq T, \\ \;Y(t) = y \geq 0. \end{cases}$$

Dabei gebe die Zufallsvariable $L(s,w,y)$ die Schadenhöhe zum Zeitpunkt s an und sei ihrerseits unabhängig von $N(s)$.

Die Wertfunktion U kann dann ähnlich zu der Herleitung aus Unterabschnitt 3.2.1 bestimmt werden. So gilt auch hier mit dem Bellman-Prinzip (Lemma 1.6):

$$U(t,w,y) \geq E\left[U(t+h, W(t+h), Y(t+h)) \mid W(t) = w, Y(t) = y\right] \qquad \forall\, h \in [0, T-t],\ \pi(\cdot) \in \mathcal{A}(t,w). \tag{3.16}$$

Dabei gilt für den Poisson-Prozess N mit $i \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned} P(N(t+h) = i+1 \mid N(t) = i) &= \int_t^{t+h} \rho(s)\, ds + o(h), \\ P(N(t+h) = i \mid N(t) = i) &= 1 - \int_t^{t+h} \rho(s)\, ds + o(h), \\ P(N(t+h) > i+1 \mid N(t) = i) &= o(h). \end{aligned}$$

Somit gilt in (3.16) mit der zufälligen Dauer σ bis zum Eintritt des nächsten Schadensfalles nach t, falls in $[t, t+h]$ nur ein weiterer Schadensfall eintritt, und dem Wert $\hat{L}$ aller Schadensfälle in $[t, t+h]$ bei Eintreten mehrerer Schadensfälle in dieser Periode:

$$\begin{aligned} &U(t,w,y) \geq \\ &\left(\int_t^{t+h} \rho(s)\, ds + o(h)\right) E\left[U(t+h, W(t+h), y + L(t+\sigma, W(t+\sigma), y)) \mid W(t) = w, Y(t) = y\right] \\ &\quad + \left(1 - \int_t^{t+h} \rho(s)\, ds + o(h)\right) E\left[U(t+h, W(t+h), y) \mid W(t) = w, Y(t) = y\right] \\ &\quad + o(h) E\left[U(t+h, W(t+h), y + \hat{L}) \mid W(t) = w, Y(t) = y\right]. \end{aligned}$$

Anwendung der Itô-Formel auf die ersten beiden Komponenten von U, Subtraktion von $U(t,w,y)$ auf beiden Seiten sowie Dividieren durch $h > 0$ und der Grenzübergang für $h \to 0+$ führen schließlich auch in diesem Fall auf eine HJB-Gleichung:

$$\begin{cases} 0 = U_t(t,w,y) - \dfrac{(\mu - r)^2 U_w^2(t,w,y)}{2\sigma^2 U_{ww}(t,w,y)} + rwU_w(t,w,y) \\ \qquad + \rho(t)\left[EU(t,w,y+L(t,w,y)) - U(t,w,y)\right], \\ u(w-y) = U(T,w,y). \end{cases} \tag{3.17}$$

Beispiel 3.18. Die Nutzenfunktion $u(w)$ sei als Exponentialnutzenfunktion $u(w) = -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha w}$, $\alpha > 0$, angenommen. Weiterhin sei $L(t,w,y) = L(t)$ unabhängig von w und y, und für die Wertfunktion U sei folgender Ansatz angenommen:

$$U(t,w,y) = V(t,w)e^{\alpha y}\xi(t)$$

mit $V(t,w)$ aus Beispiel 1.10. Dieser Ansatz führt mit der HJB-Gleichung (3.17) auf eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung für die Funktion $\xi(t)$:

$$\begin{cases} 0 = \xi'(t) + \rho(t)\left(E\left[e^{\alpha L(t)}\right] - 1\right)\xi(t), \\ 1 = \xi(T), \end{cases}$$

mit der Lösung:

$$\xi(t) = \exp\left\{\int_t^T \rho(s)\left(E\left[e^{\alpha L(s)}\right] - 1\right)\, ds\right\}.$$

Somit gilt für die Vorbehaltsprämie des VN, P^{VN}:

$$V(t, w - P^{VN}(t,w,y)) = V(t,w)e^{\alpha y}\exp\left\{\int_t^T \rho(s)\left(E\left[e^{\alpha L(s)}\right] - 1\right)\, ds\right\} \tag{3.18}$$

$$\Leftrightarrow \qquad P^{VN}(t,w,y) = ye^{-r(T-t)} + \frac{e^{-r(T-t)}}{\alpha}\int_t^T \rho(s)\left(E\left[e^{\alpha L(s)}\right] - 1\right)\, ds,$$

und die Bestimmung von P^{VU} führt auf die gleiche Prämie.

Bemerkung 3.19. Unterstellt man dem Diffusionsprozess $Y(s)$ aus Beispiel 3.14 den gleichen Erwartungswert und die gleiche Varianz wie dem Prozess der kumulierten Schadenhöhe aus Beispiel 3.18, so gilt also:

$$\int_t^T \theta(s)\, ds = \int_t^T \rho(s)E[L(s)]\, ds, \qquad \int_t^T \zeta^2(s)\, ds = \int_t^T \rho(s)E[L^2(s)]\, ds.$$

Für die Prämie (3.15) bedeutet das:

$$
\begin{aligned}
& ye^{-r(T-t)} + e^{-r(T-t)} \int_t^T \left(\theta(s) + \frac{\alpha}{2}\zeta^2(s) \right) ds \\
& = ye^{-r(T-t)} + e^{-r(T-t)} \int_t^T \rho(s) \left(E[L(s)] + \frac{\alpha}{2} E[L^2(s)] \right) ds \\
& < ye^{-r(T-t)} + \frac{e^{-r(T-t)}}{\alpha} \int_t^T \rho(s) \left(E[\exp\{\alpha L(s)\}] - 1 \right) ds.
\end{aligned}
$$

Letzteres ist aber die Prämie (3.18) aus Beispiel 3.18. Diese Ungleichung hat ihre Ursache in der Modellierung der Schadenhöhe durch einen Poisson-Prozess. Denn bei diesem Sprungprozess tritt ein Schaden in seiner vollen Höhe mit einem mal auf, während der stetige Diffusionsprozess einen längeren Schadenverlauf erlaubt, wodurch sich ein Schadensfall langsam ankündigen kann.

3.3 Die Verträge mit randomisierter Fälligkeit der Leistungen bei festem Entscheidungshorizont

Anders als in Abschnitt 3.2 sollen jetzt Versicherungsverträge betrachtet werden, bei denen die Versicherungsleistungen nicht am Ende der Versicherungsdauer, sondern gleich bei Eintritt des Versicherungsfalles zu zahlen sind. Trotzdem bleibt aber das Portfolio-Problem von VN und VU das gleiche. Es ist also nach wie vor das Ziel, den erwarteten Endnutzen zum Zeitpunkt T zu maximieren.

3.3.1 Risiko-Lebensversicherung für einen Versicherungsnehmer

Wie in Abschnitt 3.2 wird zunächst die Risiko-Lebensversicherung für einen einzelnen VN betrachtet. Dazu sei wieder x das Alter des VN zum Zeitpunkt 0 und die Periode $[t, T]$ der Versicherungszeitraum. Erlebt der VN den Zeitpunkt T, wird keine Auszahlung fällig. Sobald jedoch der VN innerhalb von $[t, T]$ verstirbt, muss das VU die vereinbarte Versicherungssumme in Höhe von 1 auszahlen. In 3.2.1 lautet die HJB-Gleichung für die Wertfunktion U:

$$\begin{cases} 0 = U_t(t,w) - \dfrac{(\mu - r)^2 U_w^2(t,w)}{2\sigma^2 U_{ww}(t,w)} + rwU_w(t,w) \\ \qquad + \lambda(x+t)[V(t, w - e^{-r(T-t)}) - U(t,w)], \\ u(w) = U(T,w). \end{cases}$$

Da jetzt die Versicherungssumme sofort bei Tod des VN fällig wird, muss in der Herleitung der HJB-Gleichung für diesen Unterabschnitt lediglich der Term $e^{-r(T-t)}$ durch 1 ersetzt werden. Damit lautet die HJB-Gleichung also:

$$\begin{cases} 0 = U_t(t,w) - \dfrac{(\mu - r)^2 U_w^2(t,w)}{2\sigma^2 U_{ww}(t,w)} + rwU_w(t,w) \\ \qquad + \lambda(x+t)[V(t, w - 1) - U(t,w)], \\ u(w) = U(T,w). \end{cases} \tag{3.19}$$

Beispiel 3.20. Wie in Beipiel 3.7 sei im Fall der Exponentialnutzenfunktion $u(w) = -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha w}$, $\alpha > 0$, die Wertfunktion U von der Form:

$$U(t,w) = V(t,w)\phi(t)$$

mit $V(t,w)$ aus Beispiel 1.10 angenommen. Da V die HJB-Gleichung (1.11) erfüllt, lautet (3.19):

$$\begin{cases} 0 = V(t,w)\phi'(t) + \lambda(x+t)[V(t,w-1) - V(t,w)\phi(t)], \\ u(w) = V(T,w)\phi(T). \end{cases}$$

Es gilt: $V(t,w-1) = V(t,w)\exp\left\{\alpha e^{r(T-t)}\right\}$, und daher muss $\phi(t)$ die lineare Differentialgleichung 1. Ordnung:

$$\begin{cases} 0 = \phi'(t) + \lambda(x+t)\left[\exp\left\{\alpha e^{r(T-t)}\right\} - \phi(t)\right], \\ 1 = \phi(T) \end{cases}$$

lösen. Diese hat die Lösung:

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \exp\left\{-\int_t^T \lambda(x+s)\,ds\right\} \\ &\quad + \int_t^T \lambda(x+s)\exp\left\{\alpha e^{r(T-s)}\right\}\exp\left\{-\int_t^s \lambda(x+u)\,du\right\}\,ds \\ &= {}_{T-t}p_{x+t} + \int_t^T \lambda(x+s)\exp\left\{\alpha e^{r(T-s)}\right\}{}_{s-t}p_{x+t}\,ds. \end{aligned}$$

Somit gilt für die Vorbehaltsprämie des VN, P^{VN}, die auch die Prämie des VU ist:

$$\begin{aligned} && V(t,w-P^{VN}(t,w)) &= V(t,w)\phi(t) \\ \Leftrightarrow && P^{VN}(t,w) &= \frac{e^{-r(T-t)}}{\alpha}\ln\phi(t). \end{aligned}$$

Bemerkung 3.21. (i) Die Prämien steigen bei steigender absoluter Risikoaversion gemessen in α und sind unabhängig vom risikobehafteten Wertpapier.

(ii) Es gilt:

$$\begin{aligned}
&\frac{e^{-r(T-t)}}{\alpha}\ln\left({}_{T-t}p_{x+t}+\int_t^T\lambda(x+s)\exp\left\{\alpha e^{r(T-s)}\right\}{}_{s-t}p_{x+t}\,ds\right)\\
&\geq\frac{e^{-r(T-t)}}{\alpha}\ln\left({}_{T-t}p_{x+t}+e^{\alpha}\int_t^T\lambda(x+s)_{s-t}p_{x+t}\,ds\right)\\
&=\frac{e^{-r(T-t)}}{\alpha}\ln\left({}_{T-t}p_{x+t}+e^{\alpha}{}_{T-t}q_{x+t}\right).
\end{aligned}$$

Also ist die Prämie hier größer als die aus Unterabschnitt 3.2.1. Das liegt daran, dass die Versicherungsleistung sofort bei Tod und nicht erst am Ende der Versicherungslaufzeit fällig wird.

3.3.2 Risiko-Lebensversicherung für mehrere Versicherungsnehmer

Das Szenario in diesem Unterabschnitt ist dem aus Unterabschnitt 3.2.2 angepasst. So muss das VU den Hinterbliebenen aller n x-jährigen VN bei Tod bis zum Zeitpunkt T die vereinbarte Versicherungssumme in Höhe von 1 ausbezahlen. Die Arbeit zur Herleitung der HJB-Gleichung für die Wertfunktion $U(t,w,y)$ in diesem Unterabschnitt ist ebenfalls im Wesentlichen bereits im Unterabschnitt 3.2.2 geleistet worden. So gilt zunächst für den Fall $y=n$, dass also zu t bereits alle VN verstorben sind:

$$U(t,w,n)=V(t,w).$$

Anders als in (3.8) ist also das Startkapital nicht um den abdiskontierten Wert der Versicherungsleistungen zu verringern, da diese unmittelbar bei Eintritt des Versicherungsfalles zu leisten sind, die VN aber bereits vor t verstorben sind.

Für $y \in \{0,\dots n-1\}$ ist in (3.10) wiederum nur zu berücksichtigen, dass die Versicherungsleistungen bei Eintritt des Versicherungsfalles zur Auszahlung kommen, und somit lautet die HJB-Gleichung (3.10) aus Unterabschnitt 3.2.2 jetzt:

$$\begin{cases} V(t,w)=U(t,w,n); \\ \text{Für } y=0,1,\dots,n-1: \\ 0=U_t(t,w,y)+rwU_w(t,w,y)-\dfrac{(\mu-r)^2U_w^2(t,w,y)}{2\sigma^2U_{ww}(t,w,y)} \\ \qquad +(n-y)\lambda(x+t)[U(t,w-1,y+1)-U(t,w,y)], \\ u(w)=U(T,w,y). \end{cases} \tag{3.20}$$

Beispiel 3.22. Wie in Beispiel 3.10 kann gezeigt werden, dass

$$U(t,w,y)=V(t,w)(\phi(t))^{n-y}$$

mit $V(t,w)$ aus Beispiel 1.10 und $\phi(t)$ aus Beispiel 3.20 die HJB-Gleichung (3.20) löst.

Damit ergeben sich auch die Vorbehaltsprämien analog zu:

$$P^{VN}(t,w,y) = P^{VU}(t,w,y) = \frac{n-y}{\alpha} e^{-r(T-t)} \ln \phi(t).$$

Bemerkung 3.23. Aufgrund der gegenüber 3.2.2 geänderten Auszahlungsmodalität entfällt in den kumulierten Prämien auch der Bestandteil der abdiskontierten Versicherungsleistungen für die y zum Zeitpunkt t bereits verstorbenen VN (vgl. Bemerkung 3.11).

3.3.3 Diskrete temporäre Leibrente

Die temporäre Leibrente zahlt dem zu Versicherungsbeginn x-jährigen VN während der gesamten Versicherungszeit von $T \in \mathbb{N}$ Zeitperioden nach jeder erlebten Periode eine Rentenzahlung der Höhe 1 aus. Für $t \in [T-n, T-n+1]$ sei dann die Wertfunktion U mit $U(t, w; n)$ bezeichnet. Für diese n Wertfunktionen gelten somit die Überlegungen aus Unterabschnitt 3.2.3. Mit entsprechenden Endbedingungen gilt also:

$$
\text{(3.21)} \qquad \begin{cases} 0 = U_t(t,w) - \dfrac{(\mu - r)^2 U_w^2(t,w)}{2\sigma^2 U_{ww}(t,w)} + rwU_w(t,w) \\ \qquad + \lambda(x+t)[V(t,w) - U(t,w)], \\ U(T-n, w-1; n) = U(T-n, w; n+1), \quad \text{für} \quad n = 1, 2, \ldots, T-1, \\ u(w-1) = U(T, w; 1). \end{cases}
$$

Beispiel 3.24. $u(w) = -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha w}$, $\alpha > 0$, sei die Exponentialnutzenfunktion. Die Überlegungen aus Beispiel 3.12 legen für die Wertfunktionen $U(t, w; n)$ folgenden Ansatz nahe, der mithilfe von (3.21) verifiziert werden kann:

$$
U(t, w; n) = V(t, w)\eta(t; n),
$$

mit $V(t, w)$ aus Beispiel 1.10 und

$$
\begin{aligned} \eta(t; n) = {}& {}_{T-n+1-t}q_{x+t} + \exp\left\{\alpha \sum_{l=1}^{n} e^{(n-l)r}\right\} {}_{T-t}p_{x+t} \\ & + \sum_{k=1}^{n-1} {}_{T-n-t+k}p_{x+t}\; q_{x+T-n+k} \exp\left\{\alpha \sum_{l=1}^{k} e^{(n-l)r}\right\}. \end{aligned}
$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ erhält man damit folgende Vorbehaltsprämien:

$$
\begin{aligned} P^{VN}(0, w) = P^{VU}(0, w) = \frac{1}{\alpha} e^{-rT} \ln \Big[& q_x + e^{\alpha e^{(T-1)r}} p_x\; q_{x+1} + e^{\alpha(e^{(T-1)r} + e^{(T-2)r})} {}_2p_x\; q_{x+2} \\ & + \cdots + e^{\alpha(e^{(T-1)r} + \cdots + 1)}\; {}_Tp_x \Big]. \end{aligned}
$$

3.3.4 Stetige temporäre Leibrente

Jetzt sei angenommen, dass die Leibrente kontinuierlich mit einer Rate von 1 Leistungen ausbezahlt, solange der VN lebt und das Ende der Versicherungsdauer T nicht erreicht ist. Wegen der unmittelbaren Fälligkeit der Versicherungsleistungen ist es sinnvoll, diese in den Wertprozess (1.4) einzubauen. Dieser lautet damit:

$$\begin{cases} d\tilde{W}(s) = \Big[r\tilde{W}(s) + (\mu - r)\pi(s) - 1\Big]\, ds + \sigma\pi(s)\, dB(s), \quad t \le s \le T, \\ \tilde{W}(t) = w. \end{cases}$$

Diese Änderung sei jetzt bei der Definition der Wertfunktionen U berücksichtigt. Mit dem üblichen Vorgehen führt diese Änderung schließlich auf die folgende HJB-Gleichung für U:

$$\begin{cases} 0 = U_t(t,w) - \dfrac{(\mu - r)^2 U_w^2(t,w)}{2\sigma^2 U_{ww}(t,w)} + (rw - 1)U_w(t,w) \\ \qquad + \lambda(x+t)[V(t,w) - U(t,w)], \\ u(w) = U(T,w). \end{cases} \tag{3.22}$$

Beispiel 3.25. Für $u(w) = -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha w}$, $\alpha > 0$, sei angenommen, dass U die Form

$$U(t,w) = V(t,w)\eta(t)$$

mit $V(t,w)$ aus Beispiel 1.10 hat. Damit muss wegen der HJB-Gleichung (3.22) $\eta(t)$ die lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\begin{cases} 0 = V(t,w)\eta'(t) - V_w(t,w)\eta(t) + \lambda(x+t)\left[V(t,w) - V(t,w)\eta(t)\right], \\ 1 = \eta(T), \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \eta'(t) + \left[\alpha e^{r(T-t)} - \lambda(x+t)\right]\eta(t) + \lambda(x+t), \\ 1 = \eta(T) \end{cases}$$

lösen. Sie hat die Lösung:

$$
\begin{aligned}
\eta(t) &= \exp\left\{\int_t^T \left(\alpha e^{r(T-s)} - \lambda(x+s)\right)\, ds\right\} \\
&\quad + \int_t^T \lambda(x+s)\exp\left\{\int_t^s \left(\alpha e^{r(T-u)} - \lambda(x+u)\right)\, du\right\} ds \\
&= \exp\left\{\int_t^T \alpha e^{r(T-s)}\, ds\right\}\ {}_{T-t}p_{x+t} \\
&\quad + \int_t^T \exp\left\{\int_t^s \alpha e^{r(T-u)}\, du\right\} \lambda(x+s)\ {}_{s-t}p_{x+t}\, ds.
\end{aligned}
$$

Für die Vorbehaltsprämien P^{VN} und P^{VU} gilt somit:

$$
P^{VN}(t,w) = P^{VU}(t,w) = \frac{1}{\alpha} e^{-r(T-t)} \ln \eta(t)
$$

mit $\eta(t)$ wie oben.

3.3.5 Schadenhöhe als Diffusionsprozess

In diesem Unterabschnitt soll die kumulierte Schadenhöhe bis zum Zeitpunkt $s \in [t,T]$ $Y(s)$ als Diffusionsprozess modelliert und in den Wertprozess eingebaut werden. Der veränderte Wertprozess $\tilde{W}(s)$ lautet also jetzt:

$$\text{(3.23)} \qquad \begin{cases} d\tilde{W}(s) = r\tilde{W}(s)\,ds + (\mu - r)\pi(s)\,ds + \sigma\pi(s)\,dB(s) - dY(s), \quad t \leq s \leq T, \\ \tilde{W}(t) = w, \end{cases}$$

und für $Y(s)$ soll dabei gelten:

$$\text{(3.24)} \qquad \begin{cases} dY(s) = \theta(s, \tilde{W}(s), Y(s))\,ds + \zeta(s, \tilde{W}(s), Y(s))\,d\tilde{B}(s), \quad t \leq s \leq T, \\ Y(t) = y \geq 0, \end{cases}$$

mit einer Brownschen Bewegung $\{\tilde{B}(s),\ s \in [t,T]\}$ unabhängig von B aus (1.1). Für dieses abgeänderte Szenario soll von neuem eine HJB-Gleichung für die Wertfunktion U hergeleitet werden, die jetzt wie folgt definiert ist:

$$U(t,w,y) = \sup_{\pi(\cdot)\in\mathcal{A}(t,w)} E\left[u(\tilde{W}(T)) \mid \tilde{W}(t) = w, Y(t) = y\right].$$

So gilt zunächst mit dem Bellman-Prinzip (Lemma 1.6):

$$U(t,w,y) \geq E\left[U(t+h, \tilde{W}(t+h), Y(t+h)) \mid \tilde{W}(t) = w, Y(t) = y\right]$$
$$\forall\, h \in [0, T-t],\ \pi(\cdot) \in \mathcal{A}(t,w).$$

Die Itô-Formel für die Wertfunktion innerhalb des Erwartungswertes lautet dann:

$$\begin{aligned} U(t+h, \tilde{W}(t+h), Y(t+h)) &= U(t,w,y) + \int_t^{t+h} U_t(s, \tilde{W}(s), Y(s))\,ds \\ &+ \int_t^{t+h} U_w(s, \tilde{W}(s), Y(s))\,d\tilde{W}(s) \\ &+ \int_t^{t+h} U_y(s, \tilde{W}(s), Y(s))\,dY(s) \\ &+ \frac{1}{2}\int_t^{t+h} U_{ww}(s, \tilde{W}(s), Y(s))\left[\sigma^2\pi^2(s) + \zeta^2(s, \tilde{W}(s), Y(s))\right]\,ds \\ &+ \frac{1}{2}\int_t^{t+h} U_{yy}\zeta^2(s, \tilde{W}(s), Y(s))\,ds \\ &- \int_t^{t+h} U_{wy}\zeta^2(s, \tilde{W}(s), Y(s))\,ds. \end{aligned}$$

Mit (3.23), (3.24) und dem bereits bekannten Vorgehen gelangt man schließlich zu der HJB-Gleichung für U:

$$\begin{cases} 0 = U_t(t,w,y) + \sup_{\pi\in\mathbb{R}}\left\{(\mu-r)\pi U_w(t,w,y) + \frac{\sigma^2\pi^2}{2}U_{ww}(t,w.y)\right\} + \theta(t,w,y)U_y(t,w,y) \\ \qquad + [rw-\theta(t,w,y)]U_w(t,w,y) + \frac{1}{2}\zeta^2(t,w,y)U_{ww}(t,w,y) - \zeta^2(t,w,y)U_{wy}(t,w,y) \\ \qquad + \frac{1}{2}\zeta^2(t,w,y)U_{yy}(t,w,y), \\ u(w) = U(T,w,y), \end{cases}$$

die sich wegen der Konkavität von U reduziert auf:

$$\begin{cases} 0 = U_t(t,w,y) - \frac{(\mu-r)^2U_w^2(t,w,y)}{2\sigma^2U_{ww}(t,w,y)} + [rw-\theta(t,w,y)]U_w(t,w,y) \\ \qquad + \theta(t,w,y)U_y(t,w,y) + \frac{1}{2}\zeta^2(t,w,y)U_{ww}(t,w,y) - \zeta^2(t,w,y)U_{wy}(t,w,y) \\ \qquad + \frac{1}{2}\zeta^2(t,w,y)U_{yy}(t,w,y), \\ u(w) = U(T,w,y). \end{cases} \tag{3.25}$$

Beispiel 3.26. Neben der Wahl der Exponentialnutzenfunktion $u(w) = -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha w},\ \alpha > 0$, seien θ und ζ unabhängig von w und y angenommen. Dann hängt auch U nicht mehr von y ab, und der Ansatz

$$U(t,w) = V(t,w)e^{\psi(t)}$$

mit V aus Beispiel 1.10 eingesetzt in die HJB-Gleichung (3.25) ergibt für $\psi(t)$ die folgende Differentialgleichung:

$$\begin{cases} 0 = V(t,w)\psi'(t)e^{\psi(t)} - \theta(t)V_w(t,w)e^{\psi(t)} + \frac{1}{2}\zeta^2(t)V_{ww}(t,w)e^{\psi(t)}, \\ 0 = \psi(T), \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = V(t,w)\psi'(t) + \theta(t)\alpha e^{r(T-t)}V(t,w) + \frac{1}{2}\zeta^2(t)\alpha^2e^{2r(T-t)}V(t,w), \\ 0 = \psi(T), \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \psi'(t) + \alpha e^{r(T-t)}\theta(t) + \frac{\alpha^2e^{2r(T-t)}}{2}\zeta^2(t), \\ 0 = \psi(T). \end{cases}$$

Diese Gleichung hat die Lösung:

$$\psi(t) = \alpha \int_t^T \left(e^{r(T-s)}\theta(s) + \frac{\alpha e^{2r(T-s)}}{2}\zeta^2(s) \right) ds.$$

Für die Vorbehaltsprämien von VN und VU, P^{VN} und P^{VU}, gilt daher:

$$P^{VN}(t,w) = P^{VU}(t,w) = e^{-r(T-t)} \int_t^T \left(e^{r(T-s)}\theta(s) + \frac{\alpha e^{2r(T-s)}}{2}\zeta^2(s) \right) ds.$$

Bemerkung 3.27. Der Aufbau der Prämien sei mit den Ergebnissen aus Beispiel 3.14 verglichen. Auch hier entfällt wegen der unverzüglichen Fälligkeit der Leistungen der Teil der abdiskontierten Versicherungsleistungen, die mit Sicherheit zur Auszahlung kommen (vgl. Bemerkung 3.23). Der zweite Teil der Prämien aus Beispiel 3.14 ist dafür kleiner als die Prämie in diesem Beispiel, da die Versicherungsleistungen für die VN, die nach t versterben, später fällig werden.

3.3.6 Schadenzahl als Poisson-Prozess

Auch in diesem Abschnitt soll der Prozess, der die kumulierte Schadenhöhe modelliert, in den Wertprozess integriert werden. Dieser lautet daher jetzt:

$$\begin{cases} d\tilde{W}(s) = r\tilde{W}(s)\,ds + (\mu - r)\pi(s)\,ds + \sigma\pi(s)\,dB(s) - L(s,\tilde{W}(s))\,dN(s), & t \le s \le T, \\ \tilde{W}(t) = w, \end{cases}$$

Darin ist die Schadenzahl $\{N(s),\, s \in [t,T]\}$ ein inhomogener Poisson-Prozess unabhängig von B aus (1.1) mit Intensität $\rho(s)$. Die Zufallsvariable $L(s,\tilde{W}(s))$ gebe die Schadenhöhe zum Zeitpunkt s an.

Die Wertfunktion U lautet jetzt:

$$U(t,w) = \sup_{\pi(\cdot)\in\mathcal{A}(t,w)} E\left[u(\tilde{W}(T)) \mid \tilde{W}(t) = w\right],$$

und eine nahezu analoge Herleitung der HJB-Gleichung für U zu der aus Abschnitt 3.2.5 ergibt:

$$\text{(3.26)} \qquad \begin{cases} 0 = U_t(t,w) - \dfrac{(\mu - r)^2 U_w^2(t,w)}{2\sigma^2 U_{ww}(t,w)} + \rho(t)\left[EU(t,w - L(t,w)) - U(t,w)\right] \\ \qquad + rwU_w(t,w) \\ u(w) = U(T,w). \end{cases}$$

Beispiel 3.28. Für $u(w) = -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha w}$, $\alpha > 0$, und $L(t,w) = L(t)$ sei

$$U(t,w) = V(t,w)\psi(t)$$

mit $V(t,w)$ aus Beispiel 1.10 angenommen. Dann löst $\psi(t)$ die Differentialgleichung:

$$\begin{cases} 0 = V(t,w)\psi'(t) + \rho(t)\left(E[V(t,w - L(t))\psi(t)] - V(t,w)\psi(t)\right), \\ 1 = \psi(T), \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \psi'(t) + \rho(t)\left(E\left[\exp\left\{\alpha L(t)e^{r(T-t)}\right\}\right] - 1\right)\psi(t), \\ 1 = \psi(T) \end{cases}$$

mit der Lösung:

$$\psi(t) = \exp\left\{ \int_t^T \rho(s) \left(E\left[\exp\left\{ \alpha L(s) e^{r(T-s)} \right\} \right] - 1 \right) \, ds \right\}.$$

Die Vorbehaltsprämien P^{VN} und P^{VU} lauten somit:

$$P^{VN}(t,w) = P^{VU}(t,w) = \frac{1}{\alpha} e^{-r(T-t)} \int_t^T \rho(s) \left(E\left[\exp\left\{ \alpha L(s) e^{r(T-s)} \right\} \right] - 1 \right) \, ds.$$

Bemerkung 3.29. (i) Wie in Abschnitt 3.2 kann gezeigt werden, dass bei gleicher Erwartung und Varianz in der Höhe des kumulierten Schadens die Prämien bei Modellierung mittels Poisson-Prozess höher ausfallen als bei Modellierung als Diffusionsprozess (vgl. Bemerkung 3.19).

(ii) Wegen der sofortigen Fälligkeit der Leistungen entfällt gegenüber Beispiel 3.18 der Teil der Prämie, der die zu t bereits eingetretenen Schäden deckt. Der andere Teil der Prämie aus Beispiel 3.18 ist aber aus demselben Grund kleiner als die Prämie aus diesem Beispiel.

3.4 Die Verträge mit randomisierter Fälligkeit der Leistungen bei zufälligem Entscheidungshorizont

In diesem Kapitel soll der Zeitpunkt, zu dem der erwartete Nutzen maximiert wird, nicht mehr deterministisch sein, sondern einer Zufallsvariablen τ mit Werten in $[0,\infty)$ folgen. τ beschreibt dabei den Todeszeitpunkt des VN und sei daher als Zufallsvariable auf $(\tilde{\Omega}, \mathcal{G}, Q)$ aus Abschnitt 3.1 angenommen. Die definierende Gleichung (1.6) für die Wertfunktion V lautet damit:

$$V(t,w) = \sup_{\pi(\cdot)\in\mathcal{A}(t,w)} E_{P\times Q}\left[u(W(\tau)) \mid W(t) = w\right].$$

Dabei soll der Index am Erwartungswertoperator signalisieren, dass der Erwartungswert bezüglich des Produktmaßes $P \times Q$ auszuwerten ist. Für $\tau < t$ sei $V(t,w) = u(w)$ gesetzt.

Für die Wertfunktion gilt dann mit dem Bellman-Prinzip (Lemma 1.6):

$$V(t,w) \geq E_{P\times Q}\left[V(t+h, W(t+h)) \mid W(t) = w\right].$$

Mit Wahrscheinlichkeit ${}_hq_{x+t}$ liegt τ im Intervall $[t, t+h]$, mit Wahrscheinlichkeit ${}_hp_{x+t}$ gilt aber $\tau > t+h$. Daher folgt:

$$\begin{aligned} V(t,w) \geq {}& {}_hp_{x+t} E_P\left[V(t+h, W(t+h)) \mid W(t) = w\right] \\ & + {}_hq_{x+t} E_P\left[u(W(t+h)) \mid W(t) = w\right]. \end{aligned}$$

Die Itô-Formel angewandt auf $V(t+h, W(t+h))$ und Dividieren durch h führen auf:

$$\begin{aligned} \frac{{}_hq_{x+t}}{h} V(t,w) \geq {}_hp_{x+t}\, E_P\Bigg[\frac{1}{h}\int_t^{t+h} & \{V_t(s,W(s)) + V_w(s,W(s))[rW(s) + (\mu - r)\pi(s)] \\ & + \frac{1}{2} V_{ww}(s,W(s))\sigma^2\pi^2(s)\}\, ds \mid W(t) = w\Bigg] \\ & + \frac{{}_hq_{x+t}}{h}\, E_P\left[u(W(t+h)) \mid W(t) = w\right]. \end{aligned}$$

Für $h \to 0+$ sowie $\sup\limits_{\pi(\cdot)\in\mathcal{A}(t,w)}$ ergibt sich schließlich:

$$\lambda(x+t)V(t,w) = V_t(t,w) + rwV_w(t,w) - \frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2}\frac{V_w^2(t,w)}{V_{ww}(t,w)} + \lambda(x+t)u(w).$$

Wegen der Zufälligkeit in τ kann man für diese Differentialgleichung nicht wie bislang eine Endbedingung angeben. Das Portfolio-Problem ist prinzipiell in eines von unendlichem Horizont eingebettet. Somit tritt an die Stelle einer Endbedingung die Frage, was mit der Wertfunktion für den Übergang $t \to \infty$ geschieht. Dabei ist es sinnvoll zu fordern, dass die geringe Erlebenswahrscheinlichkeit ${}_tp_x$ für großes t den erwarteten Nutzen bei spätem Start des Portfolioproblems dominiert, auch wenn das Startkapital aus einem bis dahin optimal geführten Portolio resultiert:

$$\lim_{t\to\infty} E_P\left[\exp\left\{-\int_0^t \lambda(x+s)\,ds\right\} V(t, W^*(t))\right] = 0.$$

Somit lautet also die HJB-Gleichung für V in diesem Modell:

$$\begin{cases} 0 = V_t(t,w) + rwV_w(t,w) - \dfrac{(\mu-r)^2}{2\sigma^2}\dfrac{V_w^2(t,w)}{V_{ww}(t,w)} + \lambda(x+t)\left[u(w) - V(t,w)\right], \\ 0 = \lim\limits_{t\to\infty} E_P\left[\exp\left\{-\displaystyle\int_0^t \lambda(x+s)\,ds\right\} V(t, W^*(t))\right]. \end{cases} \tag{3.27}$$

Beispiel 3.30. Es sei $u(w) = -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha w},\ \alpha > 0$, die Exponentialnutzenfunktion und $r = 0$. Die Wertfunktion V sei mit

$$V(t,w) = u(w)\psi(t)$$

angesetzt. Wegen $\lim\limits_{t\to\infty} E[u(W^*(t))] = 0$ lautet die Transversalitätsbedingung:

$$\lim_{t\to\infty} \exp\left\{-\int_0^t \lambda(x+s)\,ds\right\}\psi(t) < \infty.$$

Der Ansatz für V ausgewertet in (3.27) ergibt dann eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung für ψ:

$$\psi'(t) - \left[\lambda(x+t) + \frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right]\psi(t) + \lambda(x+t) = 0.$$

Für eine eindeutige Lösung dieser Gleichung sei dann $\lim\limits_{t\to\infty}\psi(t) = 0$ gesetzt, was eine wünschenswerte Eigenschaft der Wertfunktion darstellt. Damit lautet ψ:

$$\begin{aligned}
\psi(t) &= \left(\int_t^\infty \lambda(x+s) \exp\left\{ \int_s^\infty \left(\lambda(x+u) + \frac{\mu^2}{2\sigma^2} \right) du \right\} ds \right) \\
&\quad \cdot \exp\left\{ - \int_t^\infty \left(\lambda(x+s) + \frac{\mu^2}{2\sigma^2} \right) ds \right\} \\
&= \int_t^\infty \lambda(x+s) \exp\left\{ - \int_t^s \left(\lambda(x+u) + \frac{\mu^2}{2\sigma^2} \right) du \right\} ds \\
&= \int_t^\infty \lambda(x+s) e^{-\delta(s-t)} {}_{s-t}p_{x+t} \, ds \\
&= \bar{A}^\delta_{x+t},
\end{aligned}$$

also der stetige Leistungsbarwert einer Todesfallversicherung für einen $(x+t)$-Jährigen mit Versicherungssumme 1 und Diskontierungszinsrate $\delta = \dfrac{\mu^2}{2\sigma^2}$.

3.4.1 Todesfall-Versicherung

Wie in Unterabschnitt 3.3.1 wird zum Zeitpunkt des Todes des VN die Versicherungssumme der Höhe 1 fällig. Die an das Modell aus diesem Kapitel angepasste Wertfunktion U lautet dann:

$$U(t,w) = \sup_{\pi(\cdot)\in\mathcal{A}(t,w)} E\left[u(W(\tau)-1) \mid W(t)=w\right]$$

und die HJB-Gleichung für U:

$$\begin{cases} 0 = U_t(t,w) - \dfrac{(\mu-r)^2 U_w^2(t,w)}{2\sigma^2 U_{ww}(t,w)} + \lambda(x+t)[u(w-1) - U(t,w)] + rwU_w(t,w), \\ 0 = \lim\limits_{t\to\infty} E_P\left[\exp\left\{-\displaystyle\int_0^t \lambda(x+s)\,ds\right\} U(t,W^*(t))\right]. \end{cases} \tag{3.28}$$

Beispiel 3.31. Für $u(w) = -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha w},\ \alpha > 0$, und $r = 0$ löst

$$U(t,w) = V(t,w)e^{\alpha}$$

mit V aus Beispiel 3.30 die HJB-Gleichung (3.28). Damit gilt für die Vorbehaltsprämie P^{VN} des VN:

$$\begin{aligned} & & V(t,w-P^{VN}(t,w)) &= V(t,w)e^{\alpha} \\ &\Leftrightarrow & u(w-P^{VN}(t,w)) &= u(w)e^{\alpha} \\ &\Leftrightarrow & P^{VN}(t,w) &= 1, \end{aligned}$$

und es gilt: $P^{VN}(t,w) = P^{VU}(t,w)$.

Bemerkung 3.32. Wegen der Annahme $r = 0$ ist der Todeszeitpunkt des VN irrelevant. Daher ist auch erwartungsgemäß die Prämie unabhängig von der absoluten Risikoaversion.

3.4.2 Stetige lebenslange Leibrente

Bis zum Zeitpunkt τ des Todes des VN erhält dieser kontinuierlich mit einer Rate von 1 Rentenzahlungen. Diese Auszahlung für das VU sei wie schon im Unterabschnitt 3.3.4 in den Wertprozess (1.4) des Portfolios eingebaut. Dieser lautet dann:

$$\begin{cases} d\tilde{W}(s) = \left[r\tilde{W}(s) + (\mu - r)\pi(s) - 1\right] ds + \sigma\pi(s)\, dB(s), \quad s \geq t, \\ \tilde{W}(t) = w. \end{cases}$$

Die Wertfunktion U lautet damit:

$$U(t,w) = \sup_{\pi(\cdot)\in\mathcal{A}(t,w)} E\left[u(\tilde{W}(\tau)) \mid \tilde{W}(t) = w\right],$$

und die Überlegungen aus Unterabschnitt 3.3.4, angepasst an das Modell in diesem Kapitel, ergeben die folgende HJB-Gleichung für U:

$$\begin{cases} 0 = U_t(t,w) - \dfrac{(\mu-r)^2 U_w^2(t,w)}{2\sigma^2 U_{ww}(t,w)} + (rw-1)U_w(t,w) \\ \qquad + \lambda(x+t)[u(w) - U(t,w)], \\ 0 = \lim\limits_{t\to\infty} E_P\left[\exp\left\{-\displaystyle\int_0^t \lambda(x+s)\, ds\right\} U(t, \tilde{W}^*(t))\right]. \end{cases} \tag{3.29}$$

Beispiel 3.33. Es sei $u(w) = -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha w},\ \alpha > 0,\ r = 0$ und $U(t,w) = u(w)\eta(t)$ angenommen. Wegen (3.29) löst $\eta(t)$ dann die lineare Differentialgleichung 1. Ordnung:

$$0 = \eta'(t) - [\lambda(x+t) + \delta - \alpha]\eta(t) + \lambda(x+t)$$

mit $\delta = \dfrac{\mu^2}{2\sigma^2}$. Das ist im Wesentlichen die Differentialgleichung aus Beispiel 3.30 und daher gilt:

$$\begin{aligned} \eta(t) &= \int_t^\infty e^{-(\delta-\alpha)(s-t)}\lambda(x+s)_{s-t}p_{x+t}\, ds \\ &= \bar{A}_{x+t}^{\delta-\alpha}. \end{aligned}$$

Somit gilt für die Vorbehaltsprämie P^{VN} des VN:

$$\begin{aligned} & V(t, w - P^{VN}(t,w)) = u(w)\bar{A}^{\delta-\alpha}_{x+t} \\ \Leftrightarrow \quad & u(w - P^{VN}(t,w))\bar{A}^{\delta}_{x+t} = u(w)\bar{A}^{\delta-\alpha}_{x+t} \\ \Leftrightarrow \quad & P^{VN}(t,w) = \frac{1}{\alpha}\ln\frac{\bar{A}^{\delta-\alpha}_{x+t}}{\bar{A}^{\delta}_{x+t}}, \end{aligned}$$

und das ist auch die Vorbehaltsprämie P^{VU} des VU.

Bemerkung 3.34. (i) Über den Parameter δ hängen in diesem Beispiel die Vorbehaltsprämien anders als in den Abschnitten zuvor von dem risikobehafteten Wertpapier ab. Das liegt in diesem Abschnitt an der Randomisierung des Fälligkeitszeitpunktes der Versicherungsleistungen. Denn für die Prämien gilt jetzt mit den versicherungsmathematischen Grundlagen des Abschnittes 3.1:

$$\begin{aligned} P(t,w) &= \frac{1}{\alpha}\left[\ln\bar{A}^{\delta-\alpha}_{x+t} - \ln\bar{A}^{\delta}_{x+t}\right] \\ &\approx \frac{1}{\alpha}\left[\left(\bar{A}^{\delta-\alpha}_{x+t}-1\right) - \frac{1}{2}\left(\bar{A}^{\delta-\alpha}_{x+t}-1\right)^2 - \left(\bar{A}^{\delta}_{x+t}-1\right) + \frac{1}{2}\left(\bar{A}^{\delta}_{x+t}-1\right)^2\right] \\ &\approx \frac{1}{\alpha}\Bigg[-(\delta-\alpha)ET(x+t) + \frac{(\delta-\alpha)^2}{2}E\left[T^2(x+t)\right] \\ &\qquad - \frac{1}{2}(\delta-\alpha)^2(ET(x+t))^2 \\ &\qquad - \left(-\delta ET(x+t) + \frac{\delta^2}{2}E\left[T^2(x+t)\right]\right) \\ &\qquad + \frac{1}{2}\delta^2(ET(x+t))^2\Bigg] \\ &= ET(x+t) + \frac{\alpha-2\delta}{2}VarT(x+t). \end{aligned}$$

Sobald daher der Fälligkeitszeitpunkt der Versicherungsleistungen weniger zufällig ist, das heißt, sobald die Varianz von $T(x+t)$ sinkt, verschwindet die Abhängigkeit der Prämien von δ, den Parametern des risikobehafteten Wertpapieres.

(ii) Für den Fall $\delta = 0$ und $r = 0$ sei nochmals die Prämie aus Beispiel 3.25 betrachtet, die Prämie also für eine temporäre Leibrente. Sie hat in diesem Fall die Gestalt:

$$\frac{1}{\alpha}\ln\left[\int_t^T e^{\alpha(s-t)}\lambda(x+s)\,{}_{s-t}p_{x+t}\,ds + e^{\alpha(T-t)}\,{}_{T-t}p_{x+t}\right],$$

und es gilt die Abschätzung:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\alpha}\ln\left[\int_t^T e^{\alpha(s-t)}\lambda(x+s)\,{}_{s-t}p_{x+t}\,ds + e^{\alpha(T-t)}\,{}_{T-t}p_{x+t}\right] \\
&\quad\le \frac{1}{\alpha}\ln\left[\int_t^T e^{\alpha(s-t)}\lambda(x+s)\,{}_{s-t}p_{x+t}\,ds + {}_{T-t}p_{x+t}\int_T^\infty e^{\alpha(s-t)}\,ds\right] \\
&\quad= \frac{1}{\alpha}\ln\left[\int_t^T e^{\alpha(s-t)}\lambda(x+s)\,{}_{s-t}p_{x+t}\,ds + \int_T^\infty e^{\alpha(s-t)}\lambda(x+s)\,{}_{s-t}p_{x+t}\,ds\right] \\
&\quad= \frac{1}{\alpha}\ln\left[\int_t^\infty e^{\alpha(s-t)}\lambda(x+s)\,{}_{s-t}p_{x+t}\,ds\right].
\end{aligned}
$$

Diese obere Schranke ist aber bei der obigen Wahl der Parameter δ und r gerade die Prämie aus dem vorangegangenen Beispiel 3.33. Diese Beziehung zwischen den beiden Prämien für Leibrenten lässt sich mit der größeren Unsicherheit begründen, die bei der lebenslangen Leibrente bezüglich des Endes der Versicherungsdauer herrscht.

3.4.3 Schadenhöhe als Diffusionsprozess

Die kumulierte Schadenhöhe bis zum Zeitpunkt $s \geq t$ $Y(s)$ sei mithilfe eines Diffusionsprozesses modelliert:

$$\begin{cases} dY(s) = \theta(s, \tilde{W}(s), Y(s))\, ds + \zeta(s, \tilde{W}(s), Y(s))\, d\tilde{B}(s), \quad s \geq t, \\ Y(t) = y \geq 0. \end{cases}$$

$\{\tilde{B},\, s \geq t\}$ sei dabei eine Brownsche Bewegung unabhängig von B aus (1.1) und $\tilde{W}$ der um die Schadenhöhe reduzierte Wertprozess (1.4) des Portfolios:

$$\begin{cases} d\tilde{W}(s) = \Big[r\tilde{W}(s) + (\mu - r)\pi(s)\Big]\, ds + \sigma\pi(s)\, dB(s) - dY(s), \quad s \geq t, \\ \tilde{W}(t) = w. \end{cases}$$

Die Wertfunktion U sei dann folgendermaßen definiert:

$$U(t, w, y) = \sup_{\pi(\cdot) \in \mathcal{A}(t,w)} E\left[u(\tilde{W}(\tau))\ \Big|\ \tilde{W}(t) = w,\ Y(t) = y\right].$$

Die Herleitung der HJB-Gleichung (3.25), angepasst an das Modell in diesem Kapitel, ergibt die HJB-Gleichung für U:

$$\text{(3.30)} \quad \begin{cases} 0 = U_t(t, w, y) - \dfrac{(\mu - r)^2 U_w^2(t, w, y)}{2\sigma^2 U_{ww}(t, w, y)} + \theta(t, w, y) U_y(t, w, y) \\ \quad + \dfrac{1}{2}\zeta^2(t, w, y) U_{ww}(t, w, y) + \dfrac{1}{2}\zeta^2(t, w, y) U_{yy}(t, w, y) - \zeta^2(t, w, y) U_{wy}(t, w, y) \\ \quad + \lambda(x + t)[u(w) - U(t, w, y)] + [rw - \theta(t, w, y)] U_w(t, w, y), \\ 0 = \lim\limits_{t \to \infty} E\left[\exp\left\{-\displaystyle\int_0^t \lambda(x + s)\, ds\right\} U(t, \tilde{W}^*(t))\right]. \end{cases}$$

Beispiel 3.35. Neben $u(w) = -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha w}$, $\alpha > 0$, gelte $r = 0$, $\theta(t, w, y) = \theta(t)$ und $\zeta(t, w, y) = \zeta(t)$. Damit ist auch U unabhängig von y und der Ansatz:

$$U(t, w) = u(w)\phi(t)$$

eingesetzt in (3.30) führt auf eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung für ϕ:

$$\phi'(t) - \left[\lambda(x+t) + \frac{\mu^2}{2\sigma^2} - \alpha\theta(t) - \frac{\alpha^2}{2}\zeta^2(t)\right]\phi(t) + \lambda(x+t) = 0$$

mit der Lösung:

$$\phi(t) = \int_t^\infty \exp\left\{-\int_t^s \left(\delta - \alpha\theta(u) - \frac{\alpha^2}{2}\zeta^2(u)\right) du\right\} \lambda(x+s)_{s-t}p_{x+t}\, ds$$

$\left(\delta = \dfrac{\mu^2}{2\sigma^2}\right)$.

Damit lauten die Vorbehaltsprämien P^{VN} und P^{VU}:

$$\begin{aligned} P^{VN}(t,w) &= P^{VU}(t,w) \\ &= \frac{1}{\alpha}\ln\left[\frac{\int_t^\infty \exp\left\{-\int_t^s \left(\delta - \alpha\theta(u) - \frac{\alpha^2}{2}\zeta^2(u)\right) du\right\} \lambda(x+s)_{s-t}p_{x+t}\, ds}{\bar{A}^\delta_{x+t}}\right]. \end{aligned}$$

Bemerkung 3.36. (i) Die Prämien hängen von den Parametern des risikobehafteten Wertpapieres ab. Ähnlich wie in Beispiel 3.33 gilt jetzt:

$$\begin{aligned} P(t,w) \approx{}& E\left[\int_t^{\tau(x+t)} \left(\theta(s) + \frac{\alpha}{2}\zeta^2(s)\right) ds\right] + \frac{\alpha}{2} Var\left[\int_t^{\tau(x+t)} \left(\theta(s) + \frac{\alpha}{2}\zeta^2(s)\right) ds\right] \\ &- \delta Cov\left[T(x+t), \int_t^{\tau(x+t)} \left(\theta(s) + \frac{\alpha}{2}\zeta^2(s)\right) ds\right], \end{aligned}$$

wobei $\tau(x+t)$ die Zufallsvariable sei, die den Todeszeitpunkt des $(x+t)$-jährigen VN angibt, und die Zeit dabei vom Alter x an gemessen sei. Also ist auch hier der Einfluss dieser Parameter die Folge der Randomisierung des Entscheidungshorizontes.

(ii) Diese Prämie für $\delta = 0$, P_τ, sei mit der Prämie P_T aus dem entsprechenden Beispiel für einen deterministischen Entscheidungshorizont (Beispiel 3.26) und $r = 0$ sowie $T = E[\tau(x+t)]$ verglichen. Dann gilt mit der Jensen-Ungleichung angewandt auf die konvexe Funktion $g(x) = e^x$:

$$\begin{aligned} P_\tau &:= \frac{1}{\alpha}\ln\left(E\left[\exp\left\{\int_t^{\tau(x+t)} \left(\alpha\theta(u) + \frac{\alpha^2}{2}\zeta^2(u)\right) du\right\}\right]\right) \\ &> \int_t^{E[\tau(x+t)]} \left(\theta(s) + \frac{\alpha}{2}\zeta^2(s)\right) ds =: P_T. \end{aligned}$$

Diese Ungleichung ist mit der größeren Unsicherheit im Falle des zufälligen Entscheidungshorizontes zu erklären.

3.4.4 Schadenzahl als Poisson-Prozess

Mithilfe eines inhomogenen Poisson-Prozesses $\{N(s), s \geq t\}$ unabhängig von B aus (1.1) und mit Intensität $\rho(s)$ sei die kumulierte Schadenhöhe bis zu $s \geq t$ $Y(s)$ beschrieben durch:

$$\begin{cases} dY(s) = L(s, \tilde{W}(s))\, dN(s), \quad s \geq t, \\ Y(t) = y \geq 0. \end{cases}$$

Dabei ist $\tilde{W}$ der Wertprozess (1.4), in den die Schadenhöhe eingebaut ist:

$$\begin{cases} d\tilde{W}(s) = \left[r\tilde{W}(s) + (\mu - r)\pi(s)\right] ds + \sigma\pi(s)\, dB(s) - L(s, \tilde{W}(s))\, dN(s), \quad s \geq t, \\ \tilde{W}(t) = w. \end{cases}$$

Durch die Änderungen im Modell in diesem Kapitel lautet die HJB-Gleichung für U in Anlehnung an (3.26):

$$\begin{cases} 0 = U_t(t,w) - \dfrac{(\mu - r)^2 U_w^2(t,w)}{2\sigma^2 U_{ww}(t,w)} + \rho(t)[EU(t, w - L(t,w)) - U(t,w)] \\ \qquad \lambda(x+t)[u(w) - U(t,w)] + rwU_w(t,w), \\ 0 = \lim\limits_{t\to\infty} E\left[\exp\left\{-\displaystyle\int_0^t \lambda(x+s)\, ds\right\} U(t, \tilde{W}^*(t))\right]. \end{cases} \tag{3.31}$$

Beispiel 3.37. Es gelte $u(w) = -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha w},\ \alpha > 0,\ r = 0$ und $L(t,w) = L(t)$. Ein analoger Ansatz zu dem aus den vorangegangenen Beispielen ergibt:

$$U(t,w) = u(w) \int_t^\infty \exp\left\{-\int_t^s (\delta - \rho(u)\, [E[\exp\{\alpha L(u)\}] - 1])\, du\right\} \lambda(x+s)\, {}_{s-t}p_{x+t}\, ds$$

mit $\delta = \dfrac{\mu^2}{2\sigma^2}$ als Lösung der HJB-Gleichung (3.31). Somit lauten die Vorbehaltsprämien P^{VN} und P^{VU} jetzt:

$$\begin{aligned} P^{VN}(t,w) &= P^{VU}(t,w) \\ &= \frac{1}{\alpha} \ln \left[\frac{\int_t^\infty \exp\left\{-\int_t^s (\delta - \rho(u)\, [E[\exp\{\alpha L(u)\}] - 1])\, du\right\} \lambda(x+s)\, {}_{s-t}p_{x+t}\, ds}{\bar{A}^\delta_{x+t}} \right]. \end{aligned}$$

Bemerkung 3.38. (i) Analog zu Beispiel 3.35 gilt:

$$\begin{aligned} P(t,w) \approx\ & E\left[\int_t^{\tau(x+t)} \rho(s)\left(E[\exp\{\alpha L(s)\}]-1\right)\,ds\right] \\ & + \frac{1}{2\alpha} Var\left[\int_t^{\tau(x+t)} \left(E[\exp\{\alpha L(s)\}]-1\right)\,ds\right] \\ & - \frac{\delta}{\alpha} Cov\left[T(x+t), \int_t^{\tau(x+t)} \left(E[\exp\{\alpha L(s)\}]-1\right)\,ds\right], \end{aligned}$$

und daher auch entsprechend Bemerkung 3.36 über die Abhängigkeit der Prämien vom risikobehafteten Wertpapier.

(ii) Zwischen der Prämie aus diesem Beispiel mit $\delta = 0$, P_τ, und der aus dem entsprechenden Beispiel (Beispiel 3.28) im Abschnitt mit festem Entscheidungshorizont und $r = 0$, sowie $T = E[\tau(x+t)]$, P_T, gilt mit der Jensen-Ungleichung die folgende Beziehung:

$$\begin{aligned} P_\tau :=\ & \frac{1}{\alpha} \ln\left(E\left[\exp\left\{\int_t^{\tau(x+t)} \rho(s)\left(E[\exp\{\alpha L(s)\}]-1\right)\,ds\right\}\right]\right) \\ & > \int_t^{E[\tau(x+t)]} \rho(s)\left(E[\exp\{\alpha L(s)\}]-1\right)\,ds =: P_T, \end{aligned}$$

die mit der größeren Unsicherheit im Falle eines zufälligen Entscheidungshorizontes zu erklären ist.

Zusammenfassung

Auf den im ersten Kapitel eingeführten Grundlagen der stochastischen Steuerung und Optimierung ist im zweiten Kapitel das Äquivalenznutzenprinzip zu einem Bewertungsverfahren für Versicherungsrisiken unter Berücksichtigung eines dynamischen Finanzmarktes erweitert worden. Die Erweiterung zeichnet sich dadurch aus, dass bei dem vorgestellten Verfahren den Entscheidungsträgern außer einer Entscheidung über das Versicherungsrisiko auch die Möglichkeit eingeräumt wird, ihr Startkapital an einem Finanzmarkt zu investieren. Die Modellierung des Finanzmarktes ist dabei sehr schlicht gehalten, indem nur Handel mit einem risikolosen Bond und einem risikobehafteten Wertpapier zugelassen wird. Letzteres ist zudem standardgemäß als geometrische Brownsche Bewegung modelliert. Dennoch ist das untersuchte Verfahren offen für ein verallgemeinertes Finanzmarktmodell sowie für eine Erweiterung dahingehend, dass auf der Seite des Versicherungsnehmers Konsum und auf der Seite des Versicherungsunternehmens Dividendenzahlungen berücksichtigt werden können.

Das dritte Kapitel hat anhand von Beispielen das erweiterte Bewertungsverfahren angewandt. Dabei liegt allen Beispielen die Exponentialnutzenfunktion zur Bewertung des Endnutzens aus den jeweiligen Investitionsentscheidungen der Entscheidungsträger zugrunde. Der Vorteil dieser Vorgehensweise liegt darin, dass für die auftretenden stochastischen Optimierungsprobleme noch relativ einfach Lösungen gefunden werden können. Aus den Grundlagen des ersten Kapitels folgt, dass das Verfahren über diese vereinfachte Wahl hinaus auch für andere Nutzenfunktionen, die nur wachsend und konkav sind, seine Gültigkeit behält. Sodann besteht eine weitere Besonderheit der Wahl der Nutzenfunktion darin, dass die resultierenden Prämien durchweg unabhängig vom Startkapital sind. Dieses Ergebnis kann im Allgemeinen nicht erwartet werden und hat seine Ursache darin, dass die absolute Risikoaversion der Exponentialnutzenfunktion ebenfalls wertunabhängig ist. In der Praxis stellt dies eine wünschenswerte Eigenschaft dar, denn ein Versicherungsunternehmen möchte seine Produkte nicht in Abhängigkeit der Vermögensverhältnisse seiner Kunden differenzieren. Ebenso wenig ist es dem Kunden vermittelbar, dass die Prämie eines Vertrages von der Liquidität des Unternehmens abhängen soll. Außerdem hat sich bei sämtlichen Beispielen gezeigt, dass bei gleicher absoluter Risikoaversion von Versicherungsnehmer und Versicherungsunternehmen ihre jeweiligen Prämien gleich sind. Das ist ebenfalls eine Folge davon, dass bei allen Beispielen als Nutzenfunktion die Exponentialnutzenfunktion gewählt worden ist. In der Praxis kann man dem Versicherungsunternehmen eine niedrigere Risikoaversion unterstellen, weil es das einzelvertragliche Risiko im Kollektiv all seiner Versicherungsnehmer ausgleichen kann. Da aber sämtliche Prämien, wie es auch zu erwarten ist, bei steigender absoluter Risikoaversion wachsen, ergibt sich eine Spanne zwischen der Prämie, die ein Versicherungsnehmer höchstens zu zahlen bereit ist, und der, die das Versicherungsunternehmen mindestens für die Übernahme des Risikos verlangt. Diese Spanne macht es dann für ein Versicherungsunternehmen lukrativ, derartige Verträge anzubieten.

Neben diesen allgemein gültigen Ergebnissen haben sich abweichende Resultate durch unterschiedliche Modellierung der Beispiele ergeben. Diese sind nämlich in drei Abschnitte unterteilt. Zunächst sind solche Verträge untersucht worden, bei denen der Entscheidungshorizont für beide Parteien von vornherein feststeht und das Ende dieses Horizontes auch gleichzeitig der Fälligkeitszeitpunkt der vereinbarten Leistungen aus dem Vertrag darstellt. Ein Ergebnis dabei ist, dass die Prämien in diesem Szenario nicht von den Parametern des risikobehafteten Wertpapieres abhängen. Tatsächlich hätte man also die gleichen Prämien erhalten, wenn man lediglich Investition in den Bond zugelassen hätte.

Den Anfang in der zweiten Gliederungsebene der Anwendungsbeispiele haben Standardlebensversicherungsprodukte für einen und dann auch für mehrere Versicherungsnehmer gemacht. Die Untersuchung dieser Verträge ermöglicht einen Vergleich zur herkömmlichen Bewertung von Lebensversicherungsverträgen mittels des Äquivalenzprinzips. Dabei hat sich gezeigt, dass die Prämien des vorgestellten Verfahrens mit sinkender Risikoaversion gegen die Netto-Leistungsbarwerte der betrachteten Produkte konvergieren. Dieser Leistungsbarwert entspricht gerade der Prämie, die sich aus der herkömmlichen Bewertung ohne Berücksichtigung von Kosten als Einmalbeitrag ergibt.

In einem weiteren Schritt ist die Komplexität der Modellierung der Versicherungsleistungen erhöht und damit die Art des versicherten Risikos verallgemeinert worden. Dies ist dadurch erreicht worden, dass die Schadenhöhe durch stochastische Prozesse repräsentiert worden ist, zunächst durch einen Diffusionsprozess, schließlich durch einen Prozess, bei dem die Schadenzahl einem Poisson-Prozess folgt. Dabei ist dargetan worden, dass bei Modellierung der Versicherungsleistungen mittels eines Poisson-Prozesses die Prämien höher ausfallen, als wenn man diese Leistungen durch einen Diffusionsprozess mit gleichem Erwartungswert und gleicher Varianz in der Höhe der Leistungen modelliert. Das liegt daran, dass beim Poisson-Prozess ein Schadensfall auf einmal und mit seiner vollen Schadenhöhe eintritt, wohingegen der stetige Diffusionsprozess ein langsames Ankündigen eines Schadensfalles erlaubt.

Da nun zwar ein fester Fälligkeitszeitpunkt der Versicherungsleistungen bei Lebensversicherungen auf den Erlebensfall noch die Anforderungen der Praxis erfüllt, bei Todesfallversicherungen und Leibrenten aber nicht der Realität entspricht, werden in einem zweiten Abschnitt bei nach wie vor festem Entscheidungshorizont die Leistungen sofort bei Eintritt des versicherten Schadensfalles fällig. Die Anwendungsbeispiele dazu, die sich an denen des ersten Abschnittes orientieren, weisen ebenfalls nach, dass die Prämien der Verträge unabhängig vom risikobehafteten Wertpapier sind. Allerdings sind sie im Vergleich höher als die aus den entsprechenden Beispielen des Abschnittes davor. Das ist mit der sofortigen und damit tendenziell früheren Fälligkeit der Leistungen zu erklären und stellt somit eine wünschenwerte Eigenschaft der Prämien dar.

Im letzten Abschnitt schließlich ist die sofortige Fälligkeit der Leistungen beibehalten worden. Zudem ist aber auch der Entscheidungshorizont randomisiert. Diese Modelländerung bringt zwar mit der größeren Unsicherheit für die Entscheidungsträger auch erhöhte Komplexität mit sich, ist aber ebenfalls ein notwendiger Schritt hin zu realitätsnaher

Modellierung von Lebensversicherungsverträgen. Als Beispiel für das Ende des Entscheidungshorizontes stelle man sich etwa den Todeszeitpunkt des Versicherungsnehmers vor. Ein solches Ende des Entscheidungshorizontes ist also für den Versicherungsnehmer in Hinblick auf seine Investitionsentscheidungen günstiger als ein Zeitpunkt, der weit nach seinem Tod liegt. Durch diese Änderungen gegenüber dem zweiten Abschnitt fallen die Prämien für vergleichbare Leibrenten höher aus. Die Erklärung für dieses erwartungsgemäße Ergebnis ist die, dass bei Vertragsdauer bis zum Lebensende des Versicherungsnehmers auch länger Leistungen fällig werden. Vor allem aber ist in diesem letzten Abschnitt nachgewiesen worden, dass die Prämien von den Parametern des risikobehafteten Wertpapieres abhängen. Dabei ist gezeigt worden, dass dies eine direkte Konsequenz der Randomisierung des Endes des Entscheidungshorizontes ist. Tatsächlich gilt hier, dass diese Parameter qualitativ nur über die Varianz und Kovarianz dieses Endes Einfluss auf die Höhe der Prämien haben. Sinkt diese also, und damit die Zufälligkeit über das Ende, so sinkt auch der Einfluss der Parameter des Wertpapieres.

Insgesamt ermöglicht damit das vorgestellte Verfahren nicht nur die Berücksichtigung eines dynamischen Finanzmarktes bei der Bewertung von Versicherungsrisiken, sondern liefert darüber hinaus auch durchweg konsistente Ergebnisse mit den Anforderungen der Realität und den herkömmlichen Methoden der Versicherungsmathematik.

Literaturverzeichnis

[Bäuerle 2001] Bäuerle, Nicole: *Steuerung stochastischer Prozesse*. Ulm, Universität, Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften, Vorlesungsskriptum, Wintersemester 2001/2002.

[Bingham & Kiesel 1998] Bingham, Nick H.; Kiesel, Rüdiger: *Risk-Neutral Valuation: Pricing and Hedging of Financial Derivatives*. Berlin: Springer-Verlag, 1998 (Springer Finance).

[Bowers et al. 1997] Bowers, Newton L.; Gerber, Hans U.; Hickman, James C.; Jones, Donald A.; Nesbitt, Cecil J.: *Actuarial Mathematics*. 2. Aufl. Schaumburg, Ill.: The Society of Actuaries, 1997.

[Dana & Jeanblanc 2003] Dana, Rose-Anne; Jeanblanc, Monique: *Financial Markets in Continuous Time*. Berlin: Springer-Verlag, 2003 (Springer Finance).

[Dreyfus 1965] Dreyfus, Stuart E.: *Dynamic Programming and the Calculus of Variations*. New York: Academic Press, 1965 (Mathematics in Science and Engineering 21).

[Gerber & Parfumi 1998] Gerber, Hans U.; Parfumi, Gérard: Utility functions: From risk theory to finance. In: *North American Actuarial Journal* 2 (1998), Nr. 3, S. 74-100.

[Karatzas & Shreve 1991] Karatzas, Ioannis; Shreve, Steven E.: *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. 2. Aufl. New York: Springer, 1991 (Graduate Texts in Mathematics 113).

[Kiesel 2002] Kiesel, Rüdiger: *Finanzmathematik II.* Ulm, Universität, Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften, Vorlesungsskriptum, Wintersemester 2002/2003.

[Korn, Elke & Korn, Ralf 1999] Korn, Elke; Korn, Ralf: *Optionsbewertung und Portfolio-Optimierung. Moderne Methoden der Finanzmathematik.* Braunschweig: Vieweg-Verlag, 1999.

[Korn, Ralf 1998] Korn, Ralf: *Optimal Portfolio.* Singapur: World Scientific, 1998.

[Maier 2000] Maier, Helmut: *Analysis III.* Ulm, Universität, Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften, Vorlesungsskriptum, Wintersemester 2000/2001.

[Merton 1969] Merton, Robert C.: Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case. In: *Review of Economics and Statistics* 51 (1969), S. 247-257.

[Merton 1971] Merton, Robert C.: Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model. In: *Journal of Economic Theory* 3 (1971), S. 373-413.

[Merton 1992] Merton, Robert C.: *Continuous-Time Finance.* Cambridge, Mass.: Blackwell Publishers, 1992.

[Musiela & Zariphopoulou 2001] Musiela, Marek; Zariphopoulou, Thaleia: Indifference prices and related measures (Eingereicht: 2001).

[Young & Zariphopoulou 2002] Young, Virginia R.; Zariphopoulou, Thaleia: Pricing dynamic insurance risks using the principle of equivalent utility. In: *Scandinavian Actuarial Journal* 4 (2002), S. 246-279.

[Zariphopoulou 1994] Zariphopoulou, Thaleia: Investment-consumption models with constraints. In: *SIAM Journal on Control and Optimization* 32 (1994), S. 59-85.

[Zwiesler 2002] Zwiesler, Hans-Joachim: *Lebensversicherungsmathematik.* Ulm, Universität, Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften, Vorlesungsskriptum, Wintersemester 2002/2003.

Erklärung zur Diplomarbeit

Hiermit versichere ich, dass ich die vorgelegte Diplomarbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Ulm, den 6. August 2004