

Zusammenfassung der Diplomarbeit mit dem Titel

# **Stochastic Mortality Models and Securitization in Life Insurance**

Sandra Gaißer

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften, Universität Ulm

1. Gutachter: Prof. Dr. R. Kiesel
2. Gutachter: Prof. Dr. H.-J. Zwiesler

Der Verlauf der (Versicherten-) Sterblichkeit bildet eine der wichtigsten Kalkulationsgrundlagen für Lebensversicherungsunternehmen. Traditionsgemäß gehen die Versicherungen von deterministischen Sterblichkeitsraten aus, was soviel heißt, dass die (zukünftigen) Sterblichkeitsraten zu jedem Zeitpunkt als bekannt angenommen werden. Die Höhe der Versicherungsprämien und -leistungen werden dann zu Beginn eines Vertrages basierend auf dem so genannten Äquivalenzprinzip festgelegt. Insofern sind zuverlässige Annahmen über den zukünftigen Verlauf der Sterblichkeit und somit über die Länge und Höhe des mit einem Lebensversicherungsvertrages verbundenen Zahlungsstroms unerlässlich. Falls sich nun aber im Laufe der Zeit die Sterblichkeit anders entwickelt als erwartet, stellt dies aufgrund des bindenden und langfristigen Charakters dieser Verträge ein Risiko für die Unternehmen dar. Die Gründe für eine unerwartete Änderung des Sterblichkeitsverlaufs sind zahlreich. Beispielhaft erwähnen wir die in den letzten Jahrzehnten verbesserte medizinische Versorgung im Alter, die Entwicklung neuer Medikamente gegen Krankheiten und Seuchen oder die verbesserte Ernährungssituation. Während diese Faktoren eine langsame und allmähliche Veränderung der Sterblichkeit hervorrufen, ist es ebenso möglich, dass sich die Sterblichkeit plötzlich und abrupt verändert. Letzteres tritt, zum Beispiel, aufgrund von Naturkatastrophen oder dem plötzlichen Ausbruch von Epidemien auf.

Tatsächlich kommen viele Autoren (wie zum Beispiel Cairns et al. (2004) und Currie et al. (2004)) überein, dass man die zukünftige Entwicklung der Sterblichkeit nicht präzise prognostizieren kann. Im Gegenteil, man geht davon aus, dass sich die Sterblichkeit

eher stochastisch als deterministisch verhält. Um dieser Tatsache Rechnung zu tragen, wurden verschiedene stochastische Modelle eingeführt, wovon viele die Sterblichkeitsintensität als stochastischen Prozess modellieren. Hierbei verwenden die meisten Autoren die Brownsche Bewegung als stochastischen Störprozess. In diesem Zusammenhang untersuchen wir zunächst so genannte "short-rate Modelle" (vergleiche Dahl (2003)), die auf bekannten Techniken aus der Interest Rate Theory basieren.

Aufgrund der strukturellen Eigenschaften der Brownschen Bewegung sind diese Modelle jedoch nicht geeignet, um plötzliche Änderungen der Sterblichkeitsintensität zu modellieren. Aus diesem Grund führen wir eine neue Klasse stochastischer Modelle für die Sterblichkeitsintensität ein, die auf allgemeinen Lévy Prozessen als Störprozesse beruhen und die Modellierung von Sprüngen der Sterblichkeitsintensität ermöglichen. Da gemäß der Lévy Decomposition Formel jeder Lévy Prozess als Summe einer Brownschen Bewegung mit Drift und einer möglicherweise unendlichen Summe von unabhängigen Compound Poisson Prozessen dargestellt werden kann, kann mit diesem Prozess ein sehr unterschiedliches Sprungverhalten der Sterblichkeitsintensität modelliert werden. Weiterhin kann man in diesem Modellrahmen andere Verteilungsannahmen als die der Normalverteilung für die Sterblichkeitsintensität treffen. Dadurch ist es insbesondere möglich, extremen Ereignissen eine höhere Wahrscheinlichkeit zuzuordnen. Des Weiteren zeigt sich, dass die strukturellen Eigenschaften von Lévy Prozessen, wie die Unabhängigkeit und Stationarität der Inkremente, eine Herleitung geschlossener Formeln für die Überlebenswahrscheinlichkeiten ermöglichen. Ferner sind wir in der Lage, wichtige Eigenschaften wie die strikte Positivität der Sterblichkeitsintensität zu bewahren, indem wir geeignete Lévy Prozesse wählen.

Wir erweitern das deterministische Gompertz-Makeham Modell, indem wir die darin auftretenden Parameter als Ornstein-Uhlenbeck (OU) Prozesse mit allgemeinen Lévy Störprozessen modellieren. Das heißt, die Sterblichkeitsintensität  $\mu_t(x)$  eines  $x$ -Jährigen zum Zeitpunkt  $t$  hat die folgende Form

$$\mu_t(x) = \alpha_t + \beta_t e^{\gamma x}, \quad \gamma \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

wobei  $\alpha = (\alpha_t)_{t \geq 0}$  und  $\beta = (\beta_t)_{t \geq 0}$  OU Prozesse mit unabhängigen Lévy Störprozessen sind.

Ausgehend von diesen Überlegungen untersuchen wir im Anschluss Möglichkeiten für Lebensversicherungsunternehmen, mit dem Risiko einer sich unerwartet ändernden Sterblichkeit umzugehen. Eine solche Möglichkeit ist, zum Beispiel, durch Securitization gegeben, die im Allgemeinen die Verbriefung und Absicherung von Forderungen am Finanzmarkt darstellt. Lebensversicherungsunternehmen sind somit in der Lage, einen Teil des Risikos an die Finanzmärkte beziehungsweise die Investoren abzugeben. Besonders die Securitization von so genanntem Longevity Risk ist von Bedeutung. Sie basiert auf der Einführung von Mortality Bonds (vergleiche Lin und Cox (2004)), deren Zahlungen von der Entwicklung der Sterblichkeit in einem Pool von Versicherungsverträgen abhängen. Longevity Risk umfasst hier das Risiko, dass künftige Sterblichkeitsraten niedriger sind als erwartet. Da eine sich unerwartet ändernde Sterblichkeit den Preis des Mortality Bonds beeinflusst, ist eine Bewertung des Bonds basierend auf einem deterministischen Modell für die Sterblichkeitsintensität unangemessen. Deswegen bewerten wir den Bond auf Basis des stochastischen Modells in (1). Eine abschließende Simulationsstudie ergibt, dass der Mortality Bondpreis sehr sensitiv bezüglich Änderungen einzelner Parameter des OU Prozess  $\beta$  in (1) ist. Des Weiteren zeigt sich, dass der Bondpreis in unserem stochastischen Modell stets niedriger ist als der entsprechende Bondpreis, wenn man ein deterministisches Modell für die Sterblichkeitsintensität zugrunde legt. Dies ist zu erwarten, da eine stochastische Mortalität einen zusätzlichen Risikofaktor darstellt.

Der Aufbau der Arbeit ist folgendermaßen: Das zweite Kapitel vermittelt die notwendigen Grundlagen für die Modellierung der Sterblichkeit. Nach der Definition der deterministischen Sterblichkeitsintensität und anderen verwandten Begriffen, diskutieren wir einige deterministische Modelle zur Modellierung der Sterblichkeitsintensität wie, zum Beispiel, das Gompertz-Makeham und das Lee-Carter Modell, die häufig in der Praxis ihre Anwendung finden.

Im dritten Kapitel beschäftigen wir uns mit der stochastischen Modellierung der Sterblichkeitsintensität. Hier unterscheiden wir im wesentlichen die zwei erwähnten Modelle. Zum einen die sogenannten "short-rate" Modelle, die auf der Brownschen Bewegung als Störprozess beruhen und die Sterblichkeitsintensität ähnlich der short-rate in der Finanzmathematik modellieren. Zum anderen diskutieren wir einen neuen Ansatz von stochastischen Modellen für die Sterblichkeitsintensität, der auf allgemeinen Lévy Prozessen be-

ruht. Hierzu geben wir eine Einführung in die Theorie der Lévy und Ornstein-Uhlenbeck (OU) Prozesse und leiten bestimmte Verteilungscharakteristiken verschiedener Funktionale von integrierten OU Prozessen her. Besonders die Laplace Transformierte von OU Prozessen spielt eine wichtige Rolle und ist fundamental für die weiteren Kapitel. Im Speziellen diskutieren wir das erweiterte Gompertz-Makeham Modell in (1). Da in diesem allgemeinen Fall die Sterblichkeitsintensität jedoch mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit negativ werden kann, schränken wir die Klasse der zulässigen Lévy Prozesse auf sogenannte Subordinatoren ein. Diese garantieren dann unter gewissen Bedingungen eine strikte Positivität der Sterblichkeitsintensität. Ein Beispiel für solch einen Subordinator stellt der Compound Poisson Prozess mit Drift dar, der hier ausführlich behandelt wird. Sobald die Sterblichkeitsintensität als stochastischer Prozess modelliert wird, ist es notwendig, die Bewertung von Lebensversicherungsverträgen dementsprechend anzupassen. Dies wird in Kapitel 4 behandelt. Hierzu untersuchen wir zunächst die Struktur des Zahlungsstroms von einfachen und auch komplexeren Lebensversicherungsverträgen, deren Zahlungen, zum Beispiel, an die Entwicklung eines Aktienindizes gekoppelt sind. Nach einer Einführung in die traditionelle Bewertung von Lebensversicherungsverträgen, die auf der Annahme einer deterministischen Sterblichkeitsintensität und dem Äquivalenzprinzip beruht, modifizieren wir dieses Prinzip für den Fall einer stochastischen Sterblichkeitsintensität. Um sowohl einfache als auch an den Finanzmarkt gekoppelte Verträge zu bewerten, binden wir anschließend das stochastische Modell für die Sterblichkeitsintensität in ein Finanzmarktmodell ein. Das Kapitel endet mit einigen Beispielen von Finanzprodukten und deren Bewertung.

Kapitel 5 befasst sich mit Securitization. Nach der Diskussion allgemeiner Aspekte zu diesem Thema, befassen wir uns mit der Securitization des Longevity Risk. Wir stellen die Bewertung des Mortality Bonds unter der Annahme einer deterministischen sowie stochastischen Sterblichkeitsintensität vor. Besonders gehen wir auf die Unterschiede zwischen diesen beiden Bewertungsansätzen ein und versuchen, diese genauer zu quantifizieren.

Ausgehend von letzterer Bewertungsformel für den Mortality Bond, wird in Kapitel 6 eine Simulationsstudie durchgeführt, um das Verhalten des Bondpreises näher zu untersuchen. Diese Simulationsstudie dient vor allem dazu, die Sensitivität des Bondpreises bezüglich der Parameter der Sterblichkeitsintensität zu untersuchen. Ferner wird der

Preis mit dem entsprechenden Preis im deterministischen Modell verglichen.

Kapitel 8 schließlich zieht Schlussfolgerungen aus den vorherigen Kapiteln.

Der Anhang beinhaltet einige Resultate und Theoreme, die wir im vorangehenden Teil der Arbeit benötigen.

## Literatur

Cairns, A., Blake D., und Dowd K. (2004). Pricing Death: Frameworks for the Valuation and Securitization of Mortality Risk. Preprint. Heriot-Watt University.

Currie, I.D., Durban, M., und Eilers P.H.C. (2004). Smoothing and forecasting mortality rates. Working paper. Heriot-Watt University.

Dahl, M.H. (2003 ). Stochastic Mortality in Life Insurance: Market Reserves and Mortality-Linked Insurance Contracts. Working paper No. 185. Laboratory of Actuarial Mathematics, University of Copenhagen.

Lin, Y. und Cox, S. (2004). Securitization of Mortality Risks in Life Annuities. *Journal of Risk and Insurance* 72(2), 227-252.