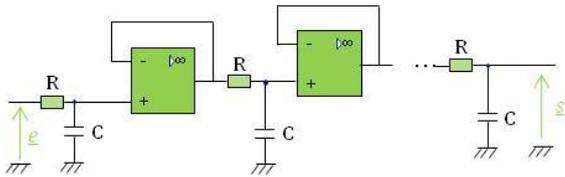


Mémoire présenté devant l'Ecole Centrale de Paris pour l'obtention du diplôme d'Ingénieur de l'Ecole Centrale des Arts et Manufactures

Et

Devant l'Université Paris Dauphine pour l'obtention du diplôme du Master Actuariat et l'admission à l'Institut des Actuaire

Modélisation du rachat et parallèle avec la Physique



Electronique



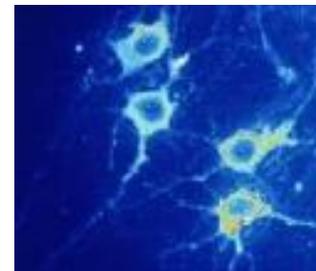
Météorologie

Adrien Suru

2011



Résistance des matériaux



Médecine

Résumé

Le rachat est l'un des risques majeurs du marché de l'assurance vie en France. Etant intrinsèquement lié au comportement même des clients, il est dans le même temps l'un des moins bien connus et donc l'un des plus redoutés. Ce mémoire propose d'améliorer notre compréhension et notre connaissance de ce risque singulier. Etant également issu d'une formation d'ingénieur généraliste, une rencontre originale entre ce domaine et l'actuariat y est proposée, à travers la méthode dite de la pensée latérale qui consiste à trouver des analogies avec des secteurs très différents, et à appliquer leurs meilleures techniques au sujet qui nous intéresse. Le lecteur ne sera donc pas surpris de croiser, entre autres, des notions de finance, de résistance des matériaux, de marketing, de physique ou encore de médecine.

Les changements profonds du contexte réglementaire du secteur assurantiel mettent de plus en plus en lumière le risque de rachat. En premier lieu, les nouvelles normes comptables IFRS (notamment IFRS4 phase 2) imposent d'évaluer les passifs d'assurance de la façon la plus juste et sincère possible et d'y inclure le coût des options et garanties dont font partie les rachats. Ensuite, la réforme Solvabilité II introduit la notion de SCR par risque et reconçoit les calculs de provisions, le rachat se situant ainsi dans l'épicentre de cette nouvelle réglementation européenne. Enfin, l'élévation de la MCEV au rang de mesure de référence pour la valeur d'une compagnie d'assurance fait directement intervenir le coût des options et garanties, et donc la valorisation des rachats. Le niveau historiquement bas des taux actuels, les exigences internes et les enjeux stratégiques associés viennent également renforcer l'intérêt porté aux études sur les rachats.

La modélisation actuelle des rachats dynamiques indique que le taux de rachat déterministe doit être augmenté d'un facteur conjoncturel dépendant de la différence entre un taux benchmark venant du marché et le taux servi par le contrat d'assurance. Ce facteur a la forme d'une double courbe en S. Ainsi, tant que la différence de taux reste dans des bornes acceptables, les rachats déterministes ne sont pas modifiés. En revanche, si la différence de taux devient trop importante, les rachats sont dynamisés linéairement, jusqu'à atteindre un maximum ou un minimum. Après quelques études générales sur les rachats observés, nous montrons comment le taux de rachat maximal peut être calculé par le modèle de Vasicek, qui permet notamment au décideur de choisir le risque de dépasser ce taux et d'isoler l'effet de la crise. Les seuils de déclenchement et d'arrêt des rachats dynamiques sont calculés à partir d'une analogie avec les rachats de crédit et la résistance des matériaux. Nous verrons notamment comment la notion de résistance élastique des rachats apparaît naturellement. Enfin, nous mesurerons l'impact qu'implique ce changement de paramétrage sur le coût des options et garanties et donc sur la MVEC.

Dans une dernière partie, nous allons nous affranchir de la modélisation classique des rachats et proposer de nouveaux modèles, issus chacun d'analogies avec des secteurs différents. Nous justifierons dans chaque cas cette analogie et déroulerons le fil de cette modélisation pour aboutir à des conclusions parfois très originales. Les limites de chaque modèle seront précisées systématiquement. L'objectif est résolument ici d'apporter un regard neuf.

Abstract

Surrenders account for one of the main risks of the French Life Insurance market. Being per se linked to the very clients' behavior, it is also one of the least known and thus one of the most dreaded. This actuarial paper aims to improve our understanding and our knowledge of this particular risk. Having been trained in a top French generalist engineering school as well, an original mix between actuaries and engineering is proposed, through the lateral thinking approach, which consists in identifying analogies with different sectors and then applying their best practices to our own matter. The reader will not be surprised, therefore, to cross, among others, concepts from finance, strength of materials, marketing, physics, or medicine.

The recent in depth shifts in the regulatory framework in the insurance activity have highlighted the surrender risk. First, the new IFRS (and more particularly the IFRS phase 2) require to assess the insurance company's liabilities as fairly and as accurately as possible, and to include the cost of options and guarantees, one of which is surrenders. Then, Solvency II introduces a split by risk in the calculation of the solvency capital requirement and a new design for the assessment of reserves. The surrender risk is thus in the epicenter of this new European regulation. Finally, the reinforcement of the MCEV as a reference benchmark measure for the valuation of an insurance company emphasizes the cost of options and guarantees, and therefore surrenders. Some other contextual events, such as the historically low current level of interest rates, internal requirements or the related strategic stakes, put surrenders in the limelight as well.

The current modeling of dynamic surrenders advocates that the deterministic surrender rate should be multiplied by a conjuncture factor depending on the gap between a benchmark market rate and the credited rate on the insurance product via a double S-curve. Thus, if the gap remains within two boundaries, the deterministic surrenders are not modified. However, if the gap is beyond these boundaries, the surrenders increase or decrease linearly until a maximum or a minimum rate. After some general studies on surrenders, we will show how this maximum surrender rate can be calculated thanks to the Vasicek model, allowing the decision-maker to choose the risk to exceed this rate and to isolate the effect of the recent crisis. The activating thresholds of the dynamic surrenders are calculated from an analogy with mortgage prepayments and strength of materials. We will notably see how the notion of "elastic limit" of surrenders appears naturally. Then, we will give the impact of this new parameterization on the cost of options and guarantees and therefore on the MCEV.

In a last part, we will free ourselves from this classic modeling of surrenders and suggest new models, emerging from analogies with different sectors. We give for each the justification and, going with the flow of these models, we will sometimes lead to astonishing conclusions. The limits are systematically made clear. The aim is definitely here to take a fresh look at surrenders.

Key words: surrender, dynamic surrenders, life insurance, behavior laws, Embedded Value, Vasicek, Black & Scholes, Chain-Ladder, logistic regression, options and guarantees.

Synthèse

Ce mémoire est consacré à la modélisation du rachat. Ce dernier constitue l'un des risques majeurs du marché de l'assurance vie en France. Etant intrinsèquement lié au comportement même des clients, il est dans le même temps l'un des moins bien connus et donc l'un des plus redoutés. Ce mémoire a pour objectif d'améliorer notre compréhension et notre connaissance de ce risque singulier.

Ayant été formé également dans une grande école d'ingénieurs généraliste, une rencontre originale entre l'actuariat et l'ingénierie est proposée, à travers la technique de la pensée latérale, qui consiste à identifier des analogies de tout ordre avec des secteurs et des domaines différents, puis d'en appliquer les meilleures pratiques au sujet qui nous concerne. Le lecteur ne sera donc pas surpris de croiser, entre autres, des notions de finance, de résistance des matériaux, de marketing, de physique ou encore de médecine. La diversité des champs mentionnés montre que les rachats renferment de multiples facettes.

Les récentes évolutions profondes du cadre réglementaire dans le monde de l'assurance ont mis l'accent sur le risque de rachat. En effet, en premier lieu, les nouvelles normes comptables IFRS (et plus particulièrement les IFRS 4 phase 2) imposent aux compagnies d'assurance d'estimer leur passif de façon sincère et juste, et d'inclure le coût des options et garanties dont font partie les rachats. Ensuite, dans la réforme prudentielle Solvabilité II, le calcul du SCR (Solvency Capital Requirement) est effectué par risque avant d'être agrégé et une nouvelle méthode de calcul des provisions a été introduite. Le risque de rachat se trouve ainsi dans l'épicentre de ce nouveau cadre réglementaire européen. Enfin, avec le renforcement de la MCEV au titre de mesure de référence de la valeur d'une entreprise d'assurance, le coût des options et garanties (et donc des rachats), partie intégrante du calcul, est directement impacté. D'autres éléments de contexte placent les rachats sous le feu des projecteurs, comme le niveau historiquement bas des taux d'intérêt, les exigences internes ou encore les enjeux stratégiques qui leur sont associés.

Selon la modélisation actuellement utilisée en matière de rachat, le niveau total des rachats doit être calculé comme la somme des rachats structurels, qui sont observés dans des conditions économiques « normales », et des rachats conjoncturels, qui dépendent de la différence entre le taux crédité par le contrat d'assurance vie et un taux benchmark provenant du marché. Ce second type de rachats est modélisé par une fonction linéaire par morceau, supposant que si cette différence de taux reste entre deux bornes, il n'y a pas de rachats conjoncturels. En revanche, si elle sort de cette plage, les rachats augmentent ou diminuent linéairement jusqu'à l'atteinte d'un taux maximum ou minimum. Les derniers QIS (Quantitative Impact Studies) proposent des valeurs pour les paramètres de cette fonction, mais sont principalement fondées sur des avis d'expert.

Ainsi, dans un premier temps, nous tentons d'identifier les différents types de comportements qui peuvent être observés sur notre portefeuille de produits. Nous utilisons notamment un algorithme mathématique utilisé traditionnellement en marketing pour

segmenter les clients, le clustering, et concluons que le ratio de Sharpe constitue un indicateur rationnel qui sépare les produits en trois groupes selon leur risque de rachat potentiel : stable, erratique et intermédiaire.

Ensuite, nous proposons trois méthodes pour calculer le taux de rachat « best estimate », caractéristique du niveau général de risque de rachat pour un produit. La première modélise le taux de rachat par un modèle autorégressif (AR), qui est calibré aux données. La théorie des modèles AR permet de donner, pour chaque produit, le comportement théorique et le niveau que le taux de rachat devrait suivre dans le futur. Une généralisation est également proposée en incluant un facteur financier pour améliorer le modèle, mais les résultats dépendent des produits. La seconde méthode utilise le modèle de Vasicek. Il est en effet possible de calibrer ce dernier et de calculer le taux de rachat moyen pour chaque produit. La troisième méthode est fondée sur des lois d'expérience et suppose que le taux de rachat futur peut être directement estimé à partir des historiques de données. Malgré les différences d'approches entre ces trois méthodes, les résultats sur les taux de rachat sont cohérents.

Ensuite, nous mettons à jour et calculons les paramètres de la courbe de rachats dynamiques pour nos produits, en ligne avec la modélisation classique actuelle. La forme des historiques de taux de rachat nous invite à considérer le modèle de Vasicek. Ceci nous permet de calculer le taux de rachat maximum probable correspondant à un niveau de confiance choisi de façon à ce que le bilan de la compagnie d'assurance soit une « forteresse imprenable ». Cette méthode présente de nombreux avantages : il est possible d'introduire plusieurs niveaux de prudence en choisissant des paramètres appropriés. C'est ensuite un modèle simple à implémenter et produit des résultats en un temps très limité. De plus, étant donné qu'il se fonde sur les taux de rachat observés, il prend en compte tous les types de volatilité, comme la volatilité opérationnelle, et pas seulement celle due au facteur financier. L'impact de la récente crise peut également être isolé, et les résultats montrent qu'elle n'a pas systématiquement augmenté les taux de rachat, la réaction des assurés dépendant de la nature du produit. Plus généralement, nous pouvons mesurer les conséquences de n'importe quel événement significatif en utilisant l'historique associé pour calibrer le modèle, et mener des tests de sensibilité. En outre, un des avantages principaux de cette méthode est de prendre en compte les spécificités de chaque produit. Ainsi, le calcul du taux de rachat maximum probable par le modèle de Vasicek a engendré, en général, une diminution de la valeur de ce paramètre, même en utilisant de nombreux niveaux de prudence.

En ce qui concerne le seuil au-delà duquel les rachats dynamiques sont activés, un parallèle avec la résistance des matériaux est effectué, et plus particulièrement avec la résistance à la rupture d'une poutre soumise à un effort de traction. En effet, la formulation du problème est similaire. Dans un cas, tant que l'effort de traction reste raisonnable, la poutre utilise ses propriétés élastiques pour absorber la contrainte, en revanche, la poutre se brise dès que l'effort de traction atteint un seuil particulier, la résistance élastique. Dans l'autre cas, tant que la différence entre les taux (notre « effort de traction ») reste assez faible, les rachats structurels ne sont pas dynamisés, en revanche, si la différence augmente jusqu'à un certain seuil, les rachats dynamiques sont activés. Ainsi, une « résistance élastique » apparaît naturellement pour chaque produit, et peut définir le seuil d'activation que nous recherchons. Ce modèle reproduit le raisonnement rationnel qu'un assuré

effectuerait. Il compare l'épargne dans un premier scénario sans rachat et où l'épargne continue à grandir régulièrement au taux actuellement crédité, et un second scénario où l'assuré rachète, impliquant des taxes et des chargements, mais investit ensuite à un meilleur taux. Il introduit une prime de risque pour modéliser la barrière psychologique que l'assuré ressent avant de racheter. Nous pouvons ainsi calculer, pour n'importe quelle valeur de la différence de taux, le temps nécessaire pour que les épargnes des deux scénarios se rejoignent. Cette durée sera considérée comme raisonnable si elle reste inférieure à un certain seuil, situation dans laquelle l'assuré rachète pour tirer profit des opportunités de marché. La différence de taux correspondante donne la valeur du seuil d'activation des rachats dynamiques.

La forme de la courbe donnant cette durée de retour sur investissement (ROI) comme fonction de la différence de taux est hyperbolique. La borne supérieure de la plage d'activation des rachats dynamiques, pour laquelle nous atteignons le taux de rachat maximal, est ainsi définie comme la différence de taux correspondant à la stagnation de la durée de ROI.

Les résultats montrent que cette nouvelle méthodologie resserre en général la plage d'activation des rachats dynamiques.

Nous proposons ensuite des tests de sensibilité aux principaux paramètres d'entrée du modèle. Enfin, nous donnons l'impact de ce nouveau paramétrage sur le coût des options et garanties et donc sur la MCEV.

Les paragraphes précédents proposent une nouvelle méthodologie pour estimer les paramètres de la modélisation actuelle des rachats dynamiques. Dans la prochaine étape, nous nous affranchissons justement de cette modélisation classique et suggérons de nouvelles pistes au service d'une meilleure compréhension des rachats. Au fil de l'eau, de nombreuses analogies avec des domaines plus ou moins éloignés sont utilisées. Nous donnons pour chacune la justification, si possible un calibrage avec les données et les limites. En déroulant le fil de ces modèles, nous aboutirons parfois à des conclusions étonnantes. L'objectif est résolument ici d'apporter un regard neuf sur les rachats.

Le premier modèle proposé est un développement et une extension d'un modèle provenant du domaine des taux d'intérêt et qui a été mentionné précédemment, le modèle de Vasicek. L'extension a notamment la capacité de modéliser des interactions entre les rachats, la cyclicité de l'économie et le niveau et la volatilité des marchés. Des simulations sont proposées pour matérialiser cette approche. Cette modélisation est particulièrement adaptée pour des projections de long terme.

L'historique de données à notre disposition semble renfermer l'effet combiné d'un processus de diffusion et d'une certaine tendance cyclique. Nous proposons ainsi d'implémenter un modèle de Black & Scholes présentant un drift saisonnier. Il peut être utile pour étudier des aspects sophistiqués des rachats sur des projections de court terme.

La troisième idée est apparue à partir de la définition même d'un rachat. Il s'agit d'une option, et la théorie financière de l'évaluation d'option pourrait s'avérer utile. Le principal avantage de ce modèle est qu'il prend en compte l'incertitude sur le taux d'intérêt

et donc le risque financier apporté par le rachat. Nous définissons ainsi le payoff sous-jacent et déroulons la théorie classique pour aboutir à une formule fermée en utilisant des modèles simples pour le taux d'intérêt servant de benchmark. Cette approche s'avère très utile pour obtenir un bon ordre de grandeur du taux de rachat.

Nous revenons au secteur de l'assurance pour la prochaine méthodologie, en faisant escale cette fois-ci dans le domaine de l'assurance non-vie. En effet, l'un des drivers principaux du taux de rachat sur le marché français est l'ancienneté du contrat, en raison des incitations fiscales associées aux seuils de 4 et 8 ans. Chaque assuré récupérera un jour son épargne. Ainsi, nous pouvons « déguiser » le contrat d'assurance en sinistre survenu mais non déclaré. La date de souscription symbolise la date de survenance du sinistre et le rachat marque sa date de déclaration. En organisant les données au sein d'un triangle, nous pouvons appliquer la méthode Chain-Ladder pour prévoir les futurs taux de rachat. Ce modèle traditionnel sera apprécié si l'assureur dispose d'une grande base de données et si l'on se situe dans des conditions économiques normales.

Le dernier modèle est fondé sur la régression logistique, technique utilisée en médecine ou en économétrie pour prévoir la probabilité de survenance d'un événement, comme une maladie ou les intentions de vote. Nous devons définir un ensemble de variables susceptibles d'expliquer le taux de rachat, puis appliquer la régression logistique. De nombreuses variables macroéconomiques ont ainsi été récupérées, et les plus corrélées au taux de rachat ont été retenues pour figurer dans le modèle. Nous en profitons pour déceler les variables les plus influentes sur le comportement des assurés et l'évolution de leur force explicative à travers le temps. Il est ainsi possible d'identifier un récent recentrage de l'intérêt des assurés sur leurs inquiétudes du quotidien, comme par exemple le taux de chômage, le niveau du SMIC, ou le taux du livret A, remplaçant des indicateurs nationaux, la santé de certaines sphères spéculatives, ou la santé d'autres macro-moteurs de croissance. Ce modèle sera utile pour tracer le comportement des rachats en fonction de l'évolution des conditions macroéconomiques.

Dans ce mémoire, nous avons, dans un premier temps, décrit le décor de notre étude sur les rachats. Ensuite, nous nous sommes concentrés sur leur modélisation traditionnelle actuelle et avons proposé des méthodes pour calculer et mettre à jour les paramètres sous-jacents. Enfin, nous avons franchi les frontières de cette modélisation traditionnelle et suggéré d'autres techniques provenant d'analogies avec d'autres secteurs. L'objectif était d'adopter une approche originale de résolution de problème pour améliorer notre connaissance d'un sujet stratégique, complexe, voire irrationnel.

Mots clés : rachat, rachats dynamiques, assurance vie, lois de comportement, Embedded Value, Vasicek, Black & Scholes, Chain-Ladder, régression logistique, options et garanties.

Synthesis

This paper tackles the topical issue of modeling of surrenders. The latter account for one of the main risks of the French Life Insurance market. Being per se linked to the very clients' behavior, it is also one of the least known and thus one of the most dreaded. This actuarial paper aims to improve our understanding and our knowledge of this particular risk.

Having been trained in a top French generalist engineering school as well, an original mix between actuaries and engineering is proposed, through the lateral thinking approach, which consists in identifying analogies with different sectors or fields and then applying their best methodologies and best cases to our own matter. The reader will not be surprised, therefore, to cross, among others, concepts from finance, strength of materials, marketing, physics, or medicine, showing that surrenders are definitely a multifaceted topic.

The recent in depth shifts of the regulatory framework in the insurance activity have highlighted the surrender risk. Indeed, first, the new IFRS (and more particularly the IFRS 4 phase 2) require to assess the insurance company's liabilities as fairly and as accurately as possible, and to include the cost of options and guarantees, one of which is surrenders. Then, in the Solvency II reform, the calculation of the solvency capital requirement is split by risk before aggregation. Moreover, it introduces a new design for the assessment of reserves. The surrender risk is thus in the epicenter of this new European regulation. Finally, with the reinforcement of the MCEV as a reference benchmark measure for the valuation of an insurance company, the cost of options and guarantees (and therefore surrenders), as a part of the MCEV, are directly involved. Some other contextual events, such as the historically low current level of interest rates, internal requirements and guidelines or the related strategic stakes, put surrenders in the limelight as well.

According to the currently used modeling of surrenders, the total level of surrenders should be assessed as the sum of structural surrenders, which may be observed in "normal" economic conditions, and conjuncture surrenders, which depend on the gap between the credited rate on the life insurance contract and a benchmark market rate. These latter surrenders are modeled via a piecewise linear function, assuming that if the gap remains within two boundaries, there is no conjuncture surrenders. However, if the gap is beyond these boundaries, the surrenders increase or decrease linearly until a maximum or a minimum rate. The latest Quantitative Impact Studies give values to the parameters of this curve, but are mostly based on advisory opinion.

Thus, in a first step, we try to identify the different typical behaviors which can be observed on our portfolio of products. We notably use a mathematical algorithm used traditionally in marketing to segment the customers, clustering, and find that the Sharpe ratio is a rational indicator which splits up in three groups our products according to their potential surrender risk: stable, erratic and intermediate.

Then, we propose three methods to calculate the best estimate surrender rate, representative of the general level of risk of surrender for a product. The first one models the surrender rate via an autoregressive (AR) model, which is calibrated to fit the data. The AR models theory gives, for each product, the theoretical behavior and level the surrender rate should follow in the future. A generalization is also proposed by including a financial factor to improve the model, but the results are quite disparate. The second method uses the Vasicek model. It is indeed possible to calibrate the latter and assess the average surrender rate of each product. The third one is based on experience laws, and assumes that the future surrender rate can be calculated from its histories. Despite the differences between these three methodologies, the results on the surrender rates are consistent.

Then, we update and assess the parameters of the dynamic surrenders curve for our products, in line with the current classic modeling. The shape of the surrender rate history invites us to consider the Vasicek model. This allows us to calculate the likely maximum surrender rate related to a degree of confidence chosen so that the insurer keeps a “fortress balance sheet”. This method offers many assets: it is possible to introduce several levels of prudence by choosing adequate parameters. It is then easy to implement and gives results in a very limited time. Moreover, since it is based on actual observed surrender rates, it allows for different kinds of volatility, such as the operational one, and not only the financial one. The impact of the recent crisis can also be isolated on these extreme risks, and the results reveal that it did not systematically increase the surrender rates, the policyholders’ reaction depending on the nature of the product. More generally, we can measure the aftermath of any significant event by using only the related history to calibrate the model, and carry out sensitivity tests. Furthermore, one of the main assets of this method is to take into account the specificities of each individual product. Thus, the calculation of the likely maximum surrender rate via the Vasicek model triggered, in general, a decrease of the value of this parameter, even by using numerous levels of prudence.

Regarding the threshold beyond which dynamic surrenders are activated, a parallel is drawn with the strength of materials, and more particularly the breaking strength of a beam undergoing a traction effort. Indeed, the working out of the problem is quite similar. In one case, as long as the traction effort remains reasonable, the beam uses its elasticity faculties to absorb the effort, however, the beam breaks if the traction effort reaches a particular threshold, called the elastic limit. In the other case, while the gap between the rates (our “traction effort”) remains low enough, the surrender rate is not increased, however, if the gap goes up to a particular threshold, then the dynamic surrenders are released. Thus, an “elastic limit” appears naturally for each product, and can be used as the activating threshold we are looking for. The model reproduces the rational reasoning a client would follow. It compares the savings in a first scenario where there is no surrender and the savings keeps on growing regularly at the current credited rate and a second scenario where the client surrenders, triggering taxes and costs, but then invests at a better rate. It introduces a risk premium to model the psychological barrier the client will feel before surrendering. We can calculate, for any value of the gap between the rates, the time needed to bridge the gap between the two scenarios. This time will be considered as reasonable if it remains under a particular threshold, the client will then surrender to make the most of the market. The corresponding gap between the rates gives the value of the activating threshold of dynamic surrenders.

The shape of the curve giving this time for return on investment (ROI) according to the gap between the rates is hyperbolic. The upper boundary of the activating range of dynamic surrenders at which we hit the maximum surrender rate is thus defined as the gap corresponding to the stagnation of the ROI time.

The results show that this new methodology tightens in general the activating range of dynamic surrenders.

We propose then sensitivity tests for the main input parameters of the model. Finally, we will give the impact of this new parameterization on the cost of options and guarantees and therefore on the MCEV.

The previous paragraphs propose a new methodology to assess the parameters for the current modeling of dynamic surrenders. In a next step, we precisely free ourselves from this classic modeling and suggest new trails to a better understanding of surrenders. Along the way, many analogies with more or less poles apart fields are designed. We give for each the justification, if possible a calibration to fit to the data and its limits. Going with the flow of these models, we will sometimes lead to astonishing conclusions. The aim is definitely here to take a fresh look at surrenders.

The first proposed model is a development and an extension of a model stemming from the interest rates field and that was introduced previously, the Vasicek model. The extension can notably model interactions between surrenders, the cyclic aspect of the economy and the level and volatility of the markets. Simulations are proposed to concretize the model. This modeling is particularly adapted for long term projections.

The data history at our disposal seems to disclose the combined effect of a diffusion process with a certain cyclical trend. We thus try to implement a Black & Scholes model with a seasonal drift. It can be useful to study sophisticated aspects of surrenders on short term projections.

The third idea arose from the very definition of a surrender. It is an option, and, as an option, the financial theory on option valuation could be useful. The main asset of this model is that it copes with the uncertainty of the interest rate, and thus allows for the financial risk triggered by the surrender. We thus define the underlying payoff, and unwind the classic theory to come out with a closed-form solution assuming simple models for the benchmark interest rate. This approach turns out to be helpful to get an order of magnitude of the surrender rate.

We come back to the insurance sector for the next methodology, but we stop over in the non-life insurance land this time. Indeed, one of the main drivers of the surrender rate in the French market is the age of the contract, because of the incentive fiscal thresholds of 4 and 8 years. Everybody will one day withdraw his savings. Thus, we can dress the very insurance policy as an incurred but not reported (IBNR) claim. The inception date marks the incidence date of the claim and the surrender marks its notification date. By organizing the data within a triangle, we can then apply the Chain-Ladder methodology to forecast the next surrender rates in the future. This traditional model will be appreciated if the insurer has a wide database and in normal economic conditions.

The last model is based on logistic regression, a technique used in medicine or econometrics to predict the probability of occurrence of an event, such as an illness or voting intentions. We have to define a set of variables likely to explain the surrender rate, and then apply the logistic regression. Numerous macroeconomic variables have been collected, and the most correlated to the surrender rate have been chosen to be in the model. We take the opportunity to find out the most influential variables on the clients' behavior and the evolution of their explanatory strength through time. It is thus possible to identify a recent refocusing of the clients' interest on their daily life concerns, such as the unemployment rate, the minimum salary, or the interest rate credited to their liquid assets, replacing national indicators, the health of some speculative areas, or the situation of other growth macro-engines. This model will be useful to track the surrenders behavior with the evolution of the macroeconomic conditions.

In this paper, we have, in a first step, set the scene for our study on surrenders. Then, we focused on their current traditional modeling and proposed methods to calculate and update the underlying parameters. Finally, we went beyond the limits of this traditional modeling and suggested appropriated techniques stemming from analogies with other sectors. The aim was to adopt an original problem-solving approach to improve our knowledge in a strategic and complex, verily irrational issue.

Key words: surrender, dynamic surrenders, life insurance, behavior laws, Embedded Value, Vasicek, Black & Scholes, Chain-Ladder, logistic regression, options and guarantees.

Remerciements

Ils m'ont fait bénéficier d'une formation d'une très grande qualité, et je souhaite leur adresser mes premiers remerciements.

Merci à Valérie FERREBOEUF et à Lionel GABET, responsables respectivement, à l'Ecole Centrale Paris, de la Filière Stratégie & Finance et de l'Option Mathématiques appliquées, pour la qualité de leur enseignement. Merci à Marie-Christine DUPONT et à Serge DELLE-VEDOVE pour le temps qu'ils m'ont consacré, pour leurs conseils avisés et pour tous les enseignements tirés des Ateliers de Développement Personnel et Leadership, qui m'ont été d'une très grande aide dans ce mémoire et plus généralement dans ma vie. Merci à Olivier WINTENBERGER et Romuald ELIE, responsables du Master Actuariat à l'Université Paris Dauphine, pour leur écoute, leur disponibilité et leurs retours.

Mes remerciements s'adressent également à l'ensemble du corps professoral de l'Ecole Centrale Paris ainsi qu'au Master Actuariat de l'Université Paris Dauphine.

Ils m'ont permis de m'intégrer très rapidement dans la vie professionnelle, et je ressens un réel plaisir à travailler avec eux et au sein de leurs équipes.

Je tiens à remercier Sébastien BACHELLIER, Chef Actuaire d'Allianz France, Stéphanie PELLETIER, Directrice du département Normes et Modélisation Actuarielles Vie, et Anne PHELEP-LE-POUTRE, Directrice du département Valorisations Déterministes, pour m'avoir accueilli dans leur équipe, pour leurs conseils ainsi que pour le suivi et l'intérêt porté à mes travaux.

Partageant le même bureau qu'elles, je remercie Audrey LAMIRAULT et Julia TEBOUL pour leur aide, leur gentillesse et toutes les réponses qu'elles m'ont apportées.

Je souhaite remercier Sophie LUNVEN, Anthony BAINVILLE et Youssef TRAORE-KOUAO pour nos échanges créatifs sur des points particuliers de mon mémoire, ainsi que Christine OVIDE et Christophe DURAND pour m'avoir consacré de leur temps.

Merci à l'ensemble des équipes Valorisations Déterministes, Consolidation et DIFOG, pour leur accueil, leur amitié et l'attention qu'ils m'ont accordée.

Sommaire

Résumé	3
Abstract	4
Synthèse	5
Synthesis.....	9
Remerciements	13
Présentation du groupe Allianz	16
Introduction	20
PARTIE I - ASSURANCE VIE : ACTIVITE, CONCEPTS CLES, REGLEMENTATION ..	21
1.1) L'activité d'assurance vie.....	22
1.2) Réglementation en assurance vie	36
1.2.1) Réglementation et comptabilité.....	36
1.2.2) Réglementation actif – passif	42
1.3) Outils de simulation d'un assureur	44
1.3.1) Outils d'analyse des flux de trésorerie.....	44
1.3.2) Outils déterministes.....	47
1.3.3) Outils stochastiques.....	49
PARTIE II : GENERALITES SUR LES RACHATS, PRESENTATION DE LA PROBLEMATIQUE	52
2.1) L'option de rachat	53
2.1.1) Définition et cadre juridique	53
2.1.2) Les risques pour l'assureur	55
2.1.3) Comment le risque de rachat peut causer la faillite d'un assureur	57
2.2) Un nouvel environnement réglementaire	59
2.2.1) Les normes IFRS.....	59
2.2.2) La réforme Solvabilité II	61
2.2.3) La MCEV d'une compagnie d'assurance	65
2.3) Etablissement de la problématique	76
2.3.1) Un contexte économique particulier	76
2.3.2) Une modélisation à mettre à jour	76
PARTIE III : Mise à jour du paramétrage des rachats dynamiques.....	79
3.1) ALIM	80
3.1.1) Aperçu global	80
3.1.2) Les inputs.....	84

3.1.3) Le modèle	85
3.2) Mise à jour des paramètres de rachats dynamiques : la méthodologie.....	87
3.2.1) Modélisation ALIM actuelle des rachats dynamiques	87
3.2.2) Premières analyses.....	91
3.2.3) Nouveau paramétrage.....	106
3.3) Mise à jour des paramètres de rachats dynamiques : les résultats	148
PARTIE IV : Propositions de modélisation des rachats	152
4.1) Modèle de Vasicek	153
4.2) Modèle de Black & Scholes saisonnier	166
4.3) Vision évaluation d’option financière	169
4.4) Triangles de Chain-Ladder	172
4.5) Analyse macroéconomique	176
Conclusion	186
Annexes	187
Bibliographie.....	217

Il est conseillé au lecteur familier avec les notions relatives au secteur de l’assurance vie de se rendre directement en partie II. La partie I offre une vision de l’activité d’assurance vie et rappelle les éléments techniques de base de ce secteur. La première section de la partie III présente le modèle interne Allianz. Sa lecture, assez technique, n’est pas indispensable à la compréhension de la suite du mémoire.

*Les termes suivis du symbole * font l’objet d’une définition en annexe 1.*

L’annexe 2 rappelle la signification des abréviations utilisées.

réparations, ...), santé, prévoyance (accident de la vie, décès, invalidité, ...), assurance vie, retraite, services bancaires (crédits, livret A, ...). Allianz répond également aux besoins des professionnels et des entreprises en matière de protection de l’outil de travail, de pérennité de l’entreprise, de protection du salarié et du chef d’entreprise, de responsabilité de l’entreprise et des dirigeants, etc.

2) Eléments de stratégie

Allianz se positionne sur les grands défis mondiaux du XXI^{ème} siècle : réchauffement climatique, évolution de la démographie, gestion des risques financiers, en adaptant ses produits pour y faire face.

Une attention particulière est portée à l’accompagnement et la satisfaction de tous ses interlocuteurs : ses clients, ses employés, ses actionnaires, ses distributeurs et la Société. Malgré la crise, Allianz se veut un partenaire solide auprès de chacun d’entre eux. “It is in the best interest of all our stakeholders that we put the customer at the heart of everything we do” (Michael Diekmann, P-DG d’Allianz).

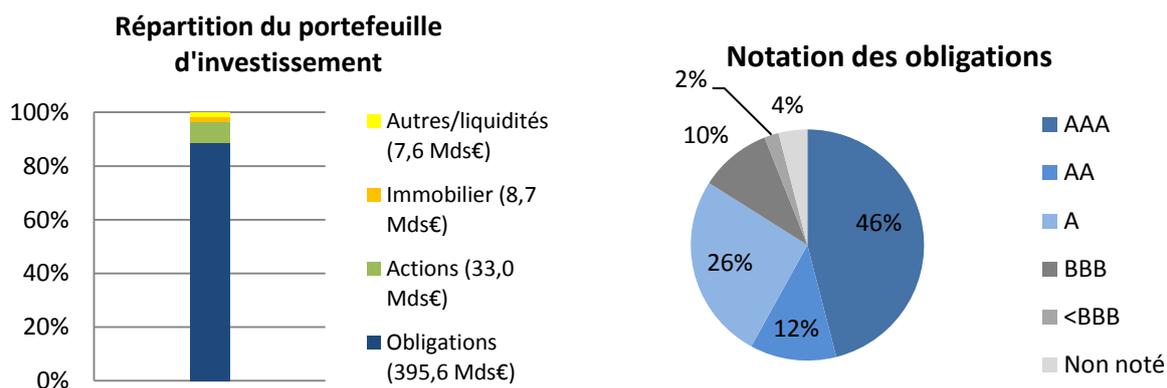
Allianz est considérée comme l’une des entreprises les plus éthiques au monde.

Les résultats du groupe sont présentés ci-dessous, de même que la répartition du portefeuille d’investissement qui montre une haute qualité.

	2009	2010	Variation
Chiffre d'affaires	97,4	106,5	+ 9,3 %
IARD ⁽¹⁾	42,5	43,9	+ 3,2 %
Vie / Santé	50,8	57,1	+ 12,5 %
Asset management	3,7	5,0	+ 35,2 %
Autres	0,5	0,6	+ 20 %
Ratio combiné IARD ⁽¹⁾	97,4 %	97,2 %	- 0,2 pt
Résultat opérationnel	7,0	8,2	+ 17 %
IARD ⁽¹⁾	4,1	4,3	+ 5,9 %
Vie / Santé	2,7	2,9	+ 7,4 %
Asset management	1,4	2,1	+ 47 %
Autres	- 1,0	- 0,9	+ 8,4 %

(1) Incendie, Accidents, Risques divers.

Tableau 1. Résultats Allianz



3) Allianz France

Allianz France présente une force de proximité particulière auprès de ses 4,6 millions de clients particuliers et de ses 500 000 clients entreprises, avec plus de 2 000 agents généraux, 2 500 conseillers Allianz Finance Conseil, 350 conseillers en prévoyance santé et 1 200 courtiers partenaires. Ses 2600 points de vente en font le 2^{ème} réseau français.

Afin d'assurer une offre complète, Allianz en France est constitué de 6 sociétés :

Allianz France

Cet assureur généraliste a plus de 5 millions de clients et génère 11,49 Mds d'€ de chiffre d'affaires.

Allianz Global Corporate & Specialty France (AGCS)

Présent dans 26 pays, AGCS assure les grands risques d'entreprises, les projets de construction et les spécialités telles que la marine, l'aviation ou le risque spatial. Avec 20% de part de marché de ce segment en France, AGCS France pèse 16% du chiffre d'affaires total d'AGCS monde avec 616 millions d'euros de CA.

Allianz Global Investors France

2^{ème} gérant d'actif mondial par le total des encours avec 1 518 Mds d'€, AGI France gère 77 Mds d'€ d'actifs, parmi lesquels 6,4 Mds d'€ sont en lien avec l'Investissement Socialement Responsable.

Allianz Real Estate France (AREF)

C'est un des leaders mondiaux en investissement immobilier. AREF gère notamment le patrimoine immobilier d'Allianz France (1,2 millions de m² pour une valeur de 2,3 Mds d'€).

Mondial Assistance

Présent dans 28 pays, c'est le leader mondial de l'assistance. 21% de son CA est issu de la France, soit 400 millions d'€ pour 1,4 million de cas gérés.

Euler Hermes

Leader mondial de l'assurance-crédit avec 34% de part de marché dans le monde, implanté dans 54 pays, Euler Hermes a réalisé 2,1 Mds d'€ de CA, dont 390 millions en France. 110 000 cas sont gérés chaque année dans le monde et la société est cotée à la Bourse de Paris.

La réalisation de ce mémoire s'est déroulée au sein du département Normes et Modélisation Actuarielles Vie, à la Direction de l'Actuariat d'Allianz France. L'équipe est en charge notamment des travaux liés à la communication financière sur la Market Consistent Embedded Value (MCEV) des compagnies d'assurance vie et des retraitements liés aux normes IFRS. Ces activités sont fondées sur l'identification des risques et leur valorisation :

- Risque de mortalité, de longévité, de rachats, etc.
- Risques financiers
- Risques opérationnels

L'émergence de la modélisation actif/passif et des calculs stochastiques associés aux nouvelles normes comptables font de ce service une entité importante.

Le fil conducteur du mémoire a été l'étude du risque de rachat sur le portefeuille Vie d'Allianz France (57,1 milliards d'euro de CA en 2010). Toutes ces notions et les concepts associés sont définis et précisés dans la première partie.

Introduction

Au milieu des années 50, l'intensification de la concurrence sur le marché américain de l'assurance vie a poussé les assureurs traditionnels à proposer des innovations commerciales aux clients pour se démarquer. Ce phénomène a provoqué une complexification des produits à travers l'offre de nouvelles options et garanties aux assurés. De nouveaux risques pour l'assureur sont ainsi mécaniquement apparus. Un exemple symbolique est l'option de rachat, permettant à l'assuré de retirer son épargne avant la maturité prévue à la signature du contrat. Le succès de cette option a été tel qu'elle est maintenant incorporée dans le Code des Assurances. Elle est également à l'origine de l'un des plus grands risques identifiés sur le marché de l'assurance vie français. En effet, dans un scénario de hausse des taux, les assurés, à la recherche d'un rendement meilleur, vont avoir tendance à racheter leur contrat pour investir dans un placement plus rentable, forçant l'assureur à vendre ses actifs et à réaliser éventuellement des moins-values.

Pour quelles raisons ce risque de rachat fait-il l'objet d'une attention toute particulière de nos jours ? La première explication vient de la situation économique actuelle : les taux d'intérêt étant historiquement bas, les compagnies d'assurance anticipent une remontée des taux et donc une recrudescence des rachats exercés par leurs clients. Une deuxième raison réside dans le changement de comportement des assurés observé suite à la crise en matière de rachat : malgré une baisse du taux de rachat après la crise, ce dernier semble repartir à la hausse sur les derniers mois, et les modèles des assureurs doivent être mis à jour. Enfin, la réglementation actuelle, notamment les normes IFRS, la réforme Solvabilité II et la création de la Market Consistent Embedded Value, incitent vivement les acteurs du marché de l'assurance à évaluer et modéliser au plus juste les rachats sur leur portefeuille.

Ce mémoire a ainsi pour objectif d'améliorer notre compréhension et la modélisation du risque de rachat. La première partie rappelle les principaux concepts propres au secteur de l'assurance vie et est complétée par la deuxième partie introduisant plus particulièrement la notion de rachat et établissant la problématique de ce mémoire. Dans la troisième partie, nous allons étudier comment améliorer le paramétrage de la modélisation actuelle, en utilisant la théorie au service des enjeux opérationnels et stratégiques. Dans la quatrième partie, nous franchirons les frontières de la modélisation classique pour exposer de nouveaux modèles originaux pour les rachats.

PARTIE I - ASSURANCE VIE : ACTIVITE, CONCEPTS CLES, REGLEMENTATION

INTRODUCTION

Une des caractéristiques de l'actuariat en assurance vie parmi les plus enrichissantes, mais également parmi les plus complexes, est sa très forte interaction avec tous les aspects relatifs à l'activité d'assurance : aspects humains, techniques, financiers, juridiques, commerciaux, comptables, etc. Ceci suppose donc une connaissance du fonctionnement d'une entreprise d'assurance dans sa globalité. Il serait impossible de recenser ici toutes ses dimensions, mais nous allons commencer par donner les définitions de base et décrire l'environnement réglementaire et comptable actuel de l'activité d'assurance en lien avec le sujet de ce mémoire. Nous insisterons notamment sur les interactions actif/passif.

1.1) L'activité d'assurance vie

Bilan et compte de résultat

Toute entreprise dispose d'un actif, qui reflète ce qu'elle possède, et en contrepartie d'un passif, qui reflète ce qu'elle doit. Dans une activité traditionnelle, l'entreprise produit un bien ou un service en décaissant un certain prix de revient, puis est rémunérée en contrepartie de la livraison de ce bien ou de ce service. L'activité d'un assureur est singulière : en effet, le montant de la garantie d'un contrat d'assurance vie est prévu dès la signature du contrat, quelle que soit la gravité de l'événement subi. L'assureur encaisse son prix de vente avant de décaisser son prix de revient et dispose ainsi de fonds dans l'intervalle de temps. On parle de **cycle inversé** de la production. Ceci conduit l'assureur à disposer d'un actif important pour faire face aux engagements qu'il a pris vis-à-vis des assurés.

La particularité de l'assurance vie par rapport aux autres assurances (automobile, habitation, santé, etc.) réside dans la durée des contrats : typiquement, il s'écoule environ 10 ans entre l'encaissement de la prime par l'assureur et le versement des prestations aux assurés, au lieu de 1 an environ en assurance automobile par exemple.

Du point de vue bilan, l'actif réel d'une entreprise d'assurance est principalement constitué de placements, et le passif réel des engagements à l'égard des assurés (ce sont les provisions techniques). La différence entre ces actifs et ces passifs est appelée la situation nette, ou capitaux propres, et doit être positive. L'entreprise doit en effet être à tout instant en mesure de répondre de ses engagements.

Actif	Passif
Placements	Capitaux Propres
	Provisions Techniques
Créances	Dettes

Du point de vue compte de résultat, les produits d'une entreprise d'assurance sont principalement constitués des primes versées par les assurés et des revenus des placements financiers. Les charges sont majoritairement les prestations et les frais de fonctionnement de l'entreprise.

Le fait que le prix de vente de l'opération d'assurance (montant de la prime) est connu et encaissé avant que le prix de revient (montant du sinistre) ne soit connu et décaissé permet une lecture particulière du bilan. Dans une entreprise classique, l'activité nécessite certains actifs (immobilisations et stocks), et le passif du bilan montre comment l'entreprise les a financés. On peut lire le bilan de gauche à droite et voir comment l'actif a été financé par le passif. Dans une entreprise d'assurance, l'activité amène à une constitution du passif, et l'actif montre comment l'entreprise a utilisé les fonds reçus et comment elle pourra payer ses engagements. La lecture peut se faire de droite à gauche en voyant comment le passif a été couvert.

Exemple

On peut dès à présent donner un premier exemple : le contrat d'épargne, part importante des engagements vie. Deux types de contrats sont distingués :

- ceux qui, en contrepartie d'une prime de 100 € plus frais, garantissent au terme de 10 ans un capital de 100 € majoré d'intérêts issus d'un taux minimum garanti (3 % par an par exemple) et de participations aux bénéfices.
- ceux qui, en contrepartie d'une prime de 100 € plus frais, correspondant à la valeur de 3,86 parts (par exemple) de la SICAV X, garantissent au terme de 10 ans 3,86 parts de cette même SICAV X, l'assuré espérant une progression de la valeur de la part.

Dans le premier cas, l'assureur va par exemple investir dans des obligations (rapportant par exemple 5 % par an), obtenant ainsi un différentiel positif lui permettant de faire face à des événements défavorables et d'espérer un bénéfice (dont 85 % au moins doivent être toutefois reversés réglementairement aux assurés, comme nous le verrons plus loin). Dans le second cas, l'assureur achète par exemple 3,86 parts de la SICAV X, le différentiel positif étant les chargements prélevés sur la prime.

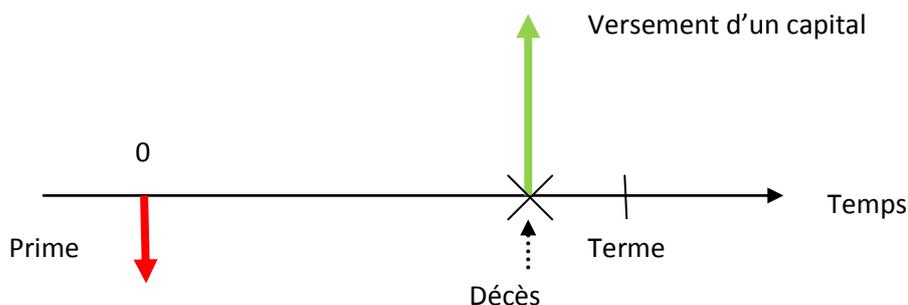
Les principaux types de produit en assurance vie (cas d'école)

Dans un contrat d'assurance vie, la garantie de l'assureur peut être une prestation en cas de vie de la (les) tête(s) assurée(s) à la date prévue, ou bien en cas de décès de la(les) tête(s) assurée(s) d'ici la date prévue. Les prestations peuvent s'effectuer par versement d'un capital ou d'une rente.

Les 4 produits élémentaires sont les suivants².

- la temporaire décès

Elle garantit le versement d'un capital à un bénéficiaire si la mort de la tête assurée survient avant le terme prévu à la signature du contrat.

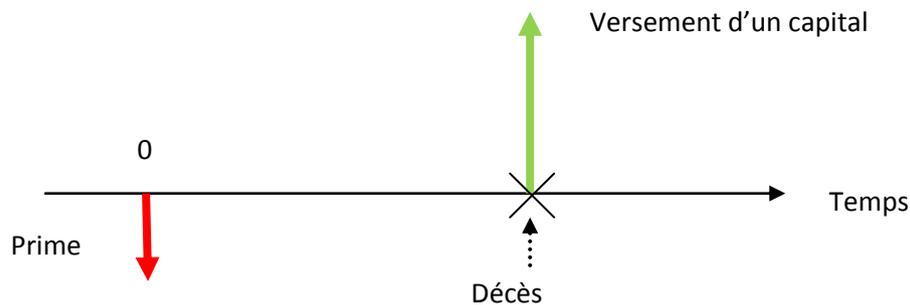


² Voir Le Le Vallois F., Tosetti A., Palsky P., Paris B. [13]

Exemples : en cas de décès du chef de famille, un capital est versé à la veuve ou aux enfants. Il s'agit d'une temporaire décès. Ce type de garantie se rencontre aussi dans les contrats d'assurance emprunteur qui prévoient en cas de décès de l'assuré-emprunteur le versement au prêteur (le banquier) du capital restant dû.

- la vie entière

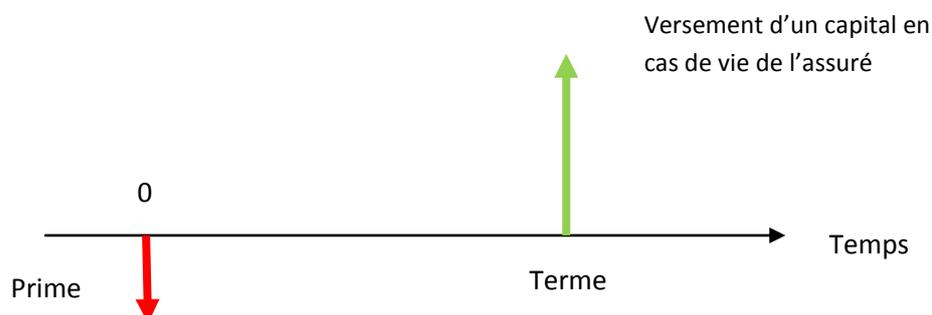
La garantie vie entière verse un capital à un bénéficiaire au décès de l'assuré, quelle que soit la date du décès. Par conséquent, la prestation est toujours versée, l'aléa portant sur la date du décès et sur la date de règlement du capital.



Exemples : ce type de garantie se rencontre dans les contrats dont l'objet est de faciliter le paiement des droits de succession ou des frais générés par le décès (frais d'obsèques). Cette garantie peut être utilisée pour transmettre un capital à un bénéficiaire quel qu'il soit (et donc pas forcément un héritier naturel).

- Le capital différé

Un capital est versé à un bénéficiaire (en général l'assuré) si ce dernier est toujours en vie au terme du contrat.

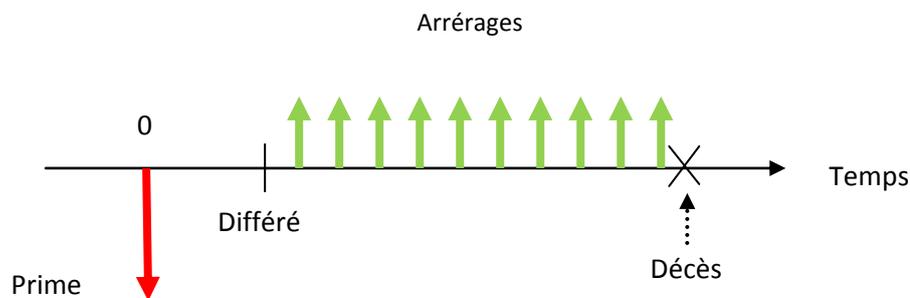


- la rente viagère

La rente viagère garantit le versement de flux financiers périodiques (appelés arrérages) à l'assuré jusqu'à son décès.

La durée de la garantie (que ce soit par exemple la garantie d'un capital en cas de décès ou d'une rente en cas de vie) peut être temporaire ou illimitée si elle ne s'éteint qu'au décès de l'assuré.

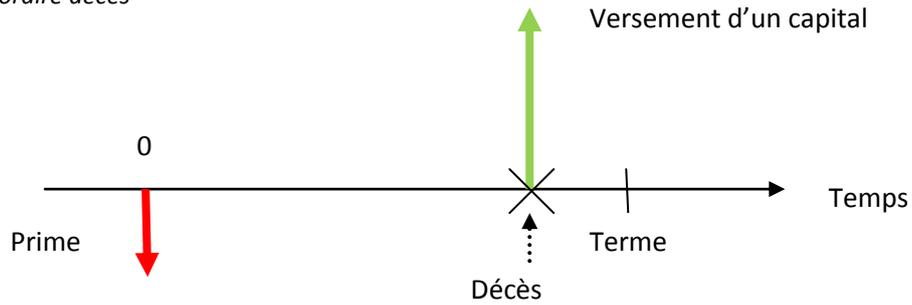
La garantie de rente viagère peut être à effet immédiat (la première période de versement d'arrérages commence dès la souscription) ou à effet différé (la première de versement débute après un certain délai, à la retraite par exemple). La rente peut être à durée temporaire (après une certaine durée les versements de rente sont interrompus même si l'assuré est en vie) ou à durée illimitée (les versements de rente s'interrompent seulement au décès de l'assuré).



La combinaison de garanties est possible. Une rente est par exemple une succession de capitaux différés. Une mixte est un contrat d'assurance dans lequel l'assureur s'engage à verser un capital, en général à l'assuré lui-même, au terme s'il est toujours en vie (capital différé), et à verser le même capital à un tiers au moment du décès si celui-ci survient avant le terme du contrat (temporaire décès).

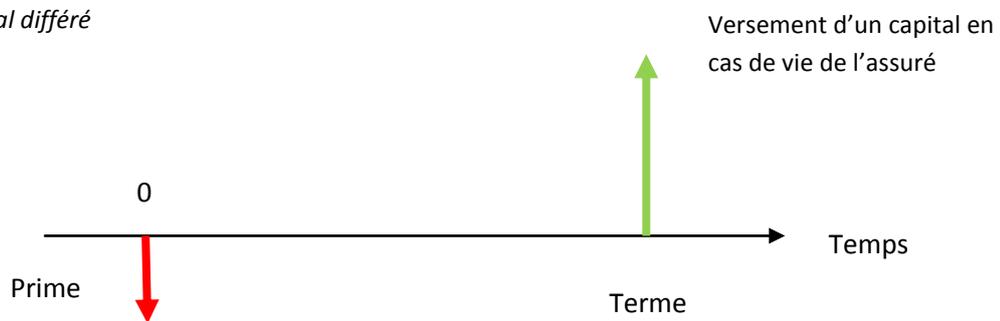
De manière analogue à la structuration dans le domaine bancaire lors de la conception de nouveaux produits, on peut « superposer » les courbes des contrats élémentaires. En suivant l'exemple précédent, on peut effectuer l'opération suivante.

Temporaire décès



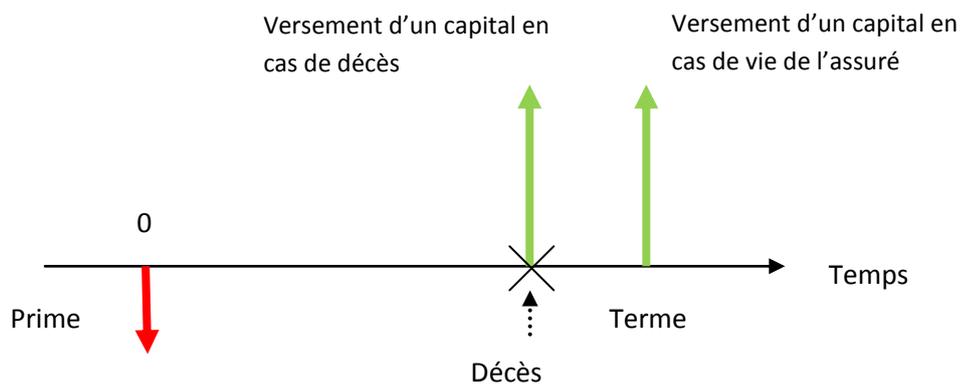
+

Capital différé



=

Mixte



Pour rendre le produit plus attractif commercialement, l'assureur peut proposer des garanties complémentaires (maladie, chômage, etc.).

On distingue ensuite les contrats à prime unique (versement en une seule fois, en principe à la souscription), les contrats à primes périodiques (échancier prévu au contrat, généralement annuel), et les contrats à versements libres.

On distingue également les assurances individuelles et collectives.

Il y a plusieurs causes de **sortie de contrat** : sinistre, terme, rachat (le contractant reçoit la Provision Mathématique, notion définie un peu plus loin), résiliation ou transfert.

Tarification

Le tarif de ces produits d'assurance varie énormément en fonction du type de contrat. Le principe de base consiste à dire que la ou les primes encaissées doivent permettre de financer dans le futur les coûts des prestations. Autrement dit, les flux de l'assuré et les flux de l'assureur doivent s'équilibrer. Cet équilibre doit tenir compte du fait que les flux futurs doivent être actualisés pour avoir leur valeur d'aujourd'hui, et des probabilités que ces flux soient versés (une temporaire décès sans le décès de la tête assurée ne donne pas lieu au versement du capital). On obtient alors la Valeur Actuelle Probable (VAP) d'un flux futur en multipliant ce flux par le facteur d'actualisation et par sa probabilité de réalisation.

La prime pure doit résulter de l'égalité entre la VAP des flux générés par l'assuré et la VAP des flux versés par l'assureur. On doit y ajouter les frais de gestion, d'acquisition, la rémunération des fonds propres (versement de dividendes), ce qui donne la prime commerciale.

Le taux d'actualisation utilisé, également appelé taux d'intérêt technique, doit être calculé selon une règle de prudence du point de vue de l'assureur. Ce taux est régi par le Code des Assurances. La probabilité de versement des flux est déterminée à partir des tables de mortalité, qui donnent âge par âge, le nombre de survivants au sein d'une population de 100 000 personnes généralement. Ces données sont fournies par l'INSEE, mais il est préférable qu'elles soient créées à partir des bases clients de la société d'assurance. Ceci offre l'avantage d'avoir des tables qui reflètent plus finement la clientèle particulière de l'assureur. Elles doivent être dans ce cas homologuées par un actuaire certifié.

Exemple

Considérons un contrat sur un sujet d'âge x au moment de la souscription, qui fournit une couverture en cas de décès pour une durée de n années. Le capital payé en cas de décès est C . La VAP des engagements de l'assureur est donnée par :

$$C v q_{0/1,x} + C v^2 q_{1/1,x} + \dots + C v^n q_{n-1/1,x}$$

Où $v = \frac{1}{1+i}$ est le facteur d'actualisation et $q_{h/1,x}$ la probabilité que l'assuré décède entre les dates h et $h+1$. On suppose que ce contrat requiert le paiement annuel d'une prime constante P , payable en cas de vie de l'assuré, et ce pendant n années au maximum. La VAP des engagements de l'assuré vaut :

$$P + P v p_{1,x} + P v^2 p_{2,x} + \dots + P v^{n-1} p_{n-1,x}$$

Où les termes $p_{h,x}$ représentent les probabilités que l'assuré soit en vie à la date h .

En pratique, dans un objectif de pricing, le choix du taux d'actualisation et des taux de survie est fait de manière prudente. Les probabilités de décès $q_{h/1,x}$ sont plus grandes que celles attribuées de manière réaliste. Le taux d'intérêt i est de même choisi inférieur au

rendement que l'assureur espère obtenir de l'investissement des sommes reçues des assurés.

A l'inverse, l'estimation du rendement espéré d'un contrat d'assurance s'effectue traditionnellement après avoir fixé une base technique réaliste, constituée de la table de survie reflétant correctement la mortalité des assurés, et du taux d'intérêt que l'assureur s'attend à recevoir de ses investissements. Cette base réaliste représente ainsi le scénario attendu par l'assureur, et en donne une évaluation du type « best estimate ».

La prime pure Π est calculée à partir des données prudentes en égalisant les VAP, ce qui donne :

$$\Pi = \frac{C v q_{0/1,x} + C v^2 q_{1/1,x} + \dots + C v^n q_{n-1/1,x}}{1 + v p_{1,x} + v^2 p_{2,x} + \dots + v^{n-1} p_{n-1,x}}$$

Pour la prime commerciale, l'assureur ajoute les frais de gestion et d'acquisition qui dépendent de l'entreprise elle-même et du produit.

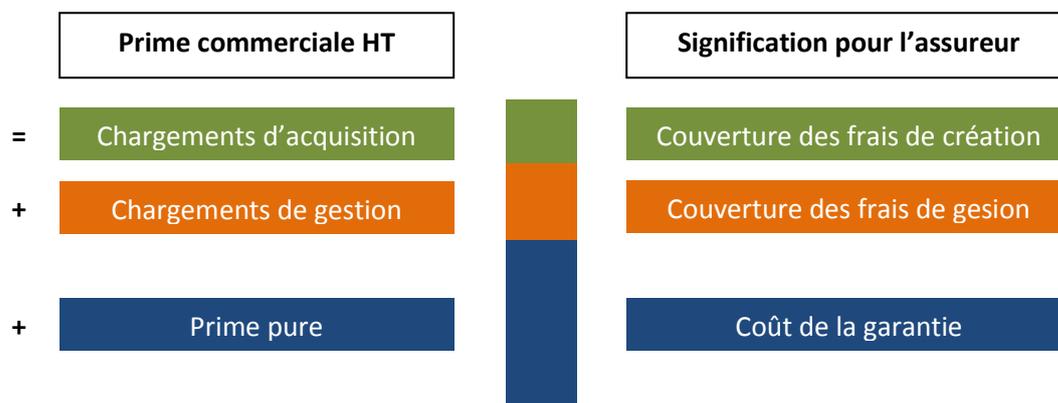


Figure 2. Décomposition de la prime commerciale

Nécessité des provisions mathématiques

En assurance vie, on a vu que les contrats sont de longue durée, il faut donc attendre longtemps avant de connaître le résultat définitif d'une souscription. Les entreprises doivent cependant établir des comptes au moins annuels, il faut donc estimer ce résultat final, ce qui répond à une exigence comptable et à une nécessité de gestion, car l'assureur doit détecter au plus tôt les dérives tarifaires de ses contrats.

On a vu qu'à la souscription d'un contrat, le principe est d'égaliser les VAP des engagements de l'assureur A et de l'assuré a :

$$VAP(0, A) = VAP(0, a)$$

A une date ultérieure t, cette égalité n'est généralement plus respectée. On définit alors la **provision mathématique** (PM) d'un contrat par

$$PM(t) = VAP(t, A) - VAP(t, a)$$

Dans l'exemple précédent,

$$PM(t) = C v q_{0/1,x} + \dots + C v^n q_{n-1/1,x} - (\prod + \prod v p_{1,x+t} + \dots + \prod v^{n-t-1} p_{n-t-1,x+t})$$
D'où la relation de récurrence pour l'année $(t - 1, t)$, en notant $V_t = PM(t)$

$$(V_{t-1} + \prod)(1 + i) = (C - V_t)q_{0/1,x+t-1} + V_t$$

Cette dernière formule exprime une condition d'équilibre actuariel entre les disponibilités (premier membre de l'équation) et les engagements (second membre) de l'assureur pour l'année $(t - 1, t)$ et pour un contrat en portefeuille en début d'année. La quantité $C - V_t$ est appelée somme sous risque. Elle représente la dépense de l'assureur en cas de décès non couvert par les provisions mathématiques.

Un exemple de gestion pour les contrats en unités de compte (voir un peu plus loin) est donné en annexe 3.

En assurance vie, l'assureur se doit à tout moment, sur simple demande de rachat de l'assuré, de rembourser ses droits acquis. La valeur des droits acquis est égale à la PM constituée pour son contrat (éventuellement minorée d'une pénalité de rachat d'au plus 5% de la PM et nulle au-delà de 10 ans). Certains contrats ne sont pas susceptibles d'exercices de rachat. Ainsi, le rachat d'une rente viagère en cours de service constitue un risque d'anti-sélection, et est d'ailleurs interdit (sinon, tous les rentiers se sachant gravement malades demanderaient le rachat immédiat).

Les avantages de l'assurance vie

En premier lieu, dans un contrat d'assurance vie, le souscripteur a la possibilité de choisir la tête assurée (celui sur qui portera le risque) et le bénéficiaire, à condition de respecter certaines clauses morales et réglementaires. Ces trois personnes peuvent être distinctes. C'est un moyen de transmettre un patrimoine à ses enfants.

Ensuite, l'assureur garantit un taux rémunérateur de l'épargne. La réglementation prudentielle interdit aux assureurs de garantir des taux élevés de revalorisation de l'épargne (ils sont limités à 75% du taux moyen des emprunts d'Etat pour les contrats à prime unique et de durée inférieure à 8 ans, et à 60% du taux moyen des emprunts d'Etat pour les autres contrats), et les tables de mortalité sont prudentes pour l'assureur. Cependant, la législation a introduit un mécanisme de **participation aux bénéfices**. L'objectif est de faire en sorte que les bénéfices de l'assureur soient en partie reversés aux assurés. Ce minimum est calculé au niveau d'un ensemble de contrats et est reversé aux assurés selon une répartition choisie par l'assureur.

Les avantages fiscaux sont très importants. L'assurance vie est le placement préféré des français pour leur épargne à long terme. Ce succès résulte de la qualité des produits proposés par les assureurs et par les avantages fiscaux. L'épargne est constituée en franchise d'impôt, les plus-values sont exonérées d'impôt sur le revenu et la transmission successorale bénéficie d'intéressantes exonérations fiscales.

Les opérations d'assurance sont exonérées de la TVA, mais font l'objet d'une taxe spécifique exprimée en pourcentage des primes. Les contrats sur l'assurance vie humaine sont exonérés de la taxe d'assurances, et ce depuis le 1^{er} juillet 1990. Depuis 1996, les versements effectués pour des contrats à primes périodiques bénéficient de réductions d'impôts.

Marché de l'assurance vie

Le marché de l'assurance vie est principalement composé

- des contrats modernes, pour lesquels l'assuré cherche à constituer une épargne. Ils forment l'essentiel du marché depuis les années 80,
- des contrats pour lesquels l'assuré cherche à compléter sa retraite. Leur part de marché reste faible,
- des contrats de prévoyance, dans lesquels l'assuré veut se prémunir contre les risques décès, invalidité, incapacité,
- et des autres types de contrats, dont la part de marché est marginale en France (fonds de pension par exemple, beaucoup plus développés à l'étranger).

Examinons ces types de contrat plus en détail.

Contrats d'épargne

Il existe schématiquement 2 types de contrat d'épargne, qui correspondent à des prises de risques totalement différentes du point de vue de l'assureur, comme de l'assuré.

Les **contrats en euro** se caractérisent par le fait que leur garantie s'exprime en euro (éventuellement en devises étrangères). Cette garantie se traduit toujours pour l'assureur par un engagement de taux de rendement envers ses clients (éventuellement égal à 0%).

Par exemple, l'assuré verse 1 000€ (plus versements), que l'assureur s'engage à rémunérer à 3%. A la fin de la première année, l'épargne acquise sera de 1 030€ au moins. Viennent en sus les participations aux bénéfices.

Les **contrats en unité de compte** (UC) se caractérisent par une garantie exprimée par un nombre d'unités de compte (action, obligation, OPCVM, etc.). Cette garantie se traduit pour l'assureur par l'obligation de fournir un nombre de titres à l'assuré, sans s'engager sur la valeur de ces titres.

Par exemple, l'assuré verse 1 000€ (plus versements) avec lesquels l'assureur achète des parts de la SICAV X, valant 100€ à cette date. L'assureur s'engage à verser à toute date la valeur de 10 parts de la SICAV X, que la valeur soit à la hausse ou à la baisse.

Il n'y a pas d'obligation de participation aux bénéfices sur les contrats en UC.

Remarque : On peut d'ores et déjà se dire qu'a priori, les contrats en unités de compte ne font pas supporter de risque financier à l'assureur. Cependant, leur succès commercial est dépendant de la santé des marchés financiers des unités de compte. On constate d'ailleurs que la production massive d'unités de compte coïncide avec les modes

financières. Les unités de compte immobilières ont connu un essor commercial dans les années 80, mais ont pratiquement disparu depuis le krach immobilier de 1990.

Les **contrats multisupports** sont formés par la juxtaposition d'un contrat en euro et d'un contrat en unités de compte. Ils se caractérisent également par un taux de distribution aux assurés des produits financiers (généralement entre 85% et 100%) sur la partie en euro, et un prélèvement sur encours (généralement entre 0% et 2% de la PM) qui peut différer selon les supports.

Ces catégories de produit requièrent, du point de vue du calcul actuariel, l'emploi de techniques distinctes. Une caractéristique des contrats en euro est qu'à la fin de chaque année du contrat, la prestation assurée augmente en fonction du rendement réalisé par l'investissement des provisions au cours de l'année écoulée. Plus précisément, l'assureur finance un accroissement des provisions qui est fonction de l'excès du rendement réalisé par l'investissement sur le taux minimum garanti (ce qui augmente par conséquent la prestation).

Contrats de retraite

Ces contrats consistent schématiquement en la constitution d'un capital différé qui pourra être converti en rente.

Les contrats de retraite à cotisations définies reposent sur le versement de rentes supplémentaires grâce au versement de cotisations prédéterminées dans le contrat.

Les contrats de retraite à prestations définies correspondent au versement de rentes supplémentaires prédéterminées si le salarié est présent lors de son départ en retraite. Leur montant peut dépendre de leur ancienneté ou être forfaitaire.

Les contrats d'indemnité en fin de carrière correspondent au versement d'indemnités en fin de carrière dues par l'employeur.

Un contrat de groupe ouvert souscrit par une entreprise est à adhésion facultative individuelle. En l'échange de cotisations, le salarié bénéficiera d'une rente ou d'un capital lors de son départ en retraite.

Les contrats de retraite par capitalisation collective en points (voir L441 un peu plus loin) sont très complexes. Les salariés d'une entreprise peuvent cotiser en achetant des points, dont la valeur, appelée valeur de service, est réévaluée chaque année. Plus on cotise, plus on obtient de points, et plus la rente sera élevée.

Contrats de prévoyance

Ces contrats ont pour objet la couverture des risques de décès, avec des différences selon que le décès résulte d'une maladie ou d'un accident, et des risques d'arrêt de travail et d'invalidité. Ces contrats présentent des caractéristiques très constantes dans le temps, et ressemblent davantage aux assurances non-vie, et font ainsi l'objet d'études plutôt statistiques.

Autres contrats

Les contrats Universal Life (inexistants en France) associent épargne et prévoyance : chaque année l'assuré définit, dans les limites contractuelles, le capital qu'il souhaite recevoir (au profit de bénéficiaires désignés) en cas de décès.

Les fonds de pension sont des institutions financières spécialisées dans la constitution de retraite sur-complémentaire financée par capitalisation. En France, le deuxième pilier du régime de retraite est géré par les entreprises au profit de leurs salariés en capitalisation. Relevant de ce pilier, les fonds de pension demeurent de peu d'importance en France, contrairement aux Etats-Unis ou aux Pays-Bas par exemple.

Il existe également des contrats d'assurance retraite dont l'objet est le versement de rentes viagères après le départ en retraite de l'assuré. Il s'agit surtout de contrats collectifs souscrits dans la cadre d'une entreprise ou d'une profession (article 83 ou article 39). Ces contrats ne peuvent pas être assimilés à des fonds de pension mais s'en rapprochent notamment lorsqu'ils fonctionnent sous le régime de l'article L441 du code des assurances (contrats à points), tels la Préfon (produit proposé par Allianz) qui permet aux fonctionnaires de cotiser facultativement pour constituer des rentes servies à la retraite.

Les différents types de risque pour une société d'assurance vie

Le **risque viager** est le risque lié à la durée de vie humaine. Il existe dès lors que le contrat d'assurance prévoit une prestation d'un montant différent ou d'une date différente de versement selon que l'assuré survit ou décède. La prévision de mortalité est faite grâce aux tables de mortalité. Le risque est alors de 2 natures : une dérive de mortalité (les assurés vivent plus longtemps que prévu), et un phénomène d'anti-sélection (les assurés ne sont pas représentatifs de la population de la table de mortalité).

L'assureur peut se prémunir contre une dérive de la sinistralité en ayant recours à une couverture en réassurance. La réassurance est une technique permettant à l'assureur direct de céder à un tiers, le réassureur, une partie des risques qu'il a souscrits. D'après la loi des grands nombres, plus le nombre d'opérations concernées est important, plus l'écart entre la charge théorique et la charge observée est faible. La réassurance a pour objet de diminuer ces écarts en rendant les risques plus homogènes ou en écrêtant la charge des sinistres.

Un risque que l'on rencontre en prévoyance est celui de la concentration des risques assurés. C'est le cas par exemple si l'assureur couvre le risque décès des salariés d'une même entreprise, et que ceux-ci sont amenés à prendre le même avion. Là encore, la réassurance permet de fractionner ce risque entre plusieurs entreprises d'assurance.

Les risques financiers sont très importants. Ils dépendent du type de contrat (euro/UC).

Pour les contrats en euro, le risque de change est présent lorsque la garantie et les actifs sont exprimés dans des devises différentes.

Le **risque de signature** (aussi appelé risque de défaut) est lié à la solvabilité des émetteurs de titres financiers, et de la perception de cette santé par les marchés. Il peut

même arriver que le marché change globalement d'attitude vis-à-vis de l'ensemble des émetteurs privés. Dans ce cas, l'écart entre les taux des emprunts d'Etat et les taux des emprunts obligataires augmente, c'est le spread de signature* (ou spread de défaut). Il convient d'assurer une diversification minimale des placements. Afin d'augmenter leur sécurité financière, la plupart des assurances ont mis en place des règles internes de ce point de vue.

Le **risque de taux** est un risque très important en assurance vie. Nous aurons l'occasion d'y revenir dans les parties suivantes. Nous allons en donner un premier aperçu ici afin d'en ressentir les enjeux. Il s'agit des risques liés aux variations des taux d'intérêt sur le marché obligataire. On peut dès à présent noter que les sociétés d'assurance devant faire face à des garanties importantes, ils doivent posséder une part importante d'obligations dans leurs investissements afin d'assurer un revenu sûr, fiable et permanent.

- risque de baisse des taux

Il correspond au risque que le taux de rendement auquel se feront les investissements futurs soit inférieur au taux minimum garanti dans les contrats. En pratique, lors de l'arrivée à échéance des obligations, la société d'assurance procède à un réinvestissement du nominal remboursé. En cas de baisse des taux, les revenus seront inférieurs à ce qu'ils étaient auparavant.

Prenons l'exemple d'un contrat d'épargne de 8 ans, dans lequel l'assuré verse un capital de 10 000€ au départ, et l'assureur garantit 3% par an. A la souscription, l'assureur investit dans des zéro-coupons* d'une durée de 4 ans et de taux d'intérêts 3,5%, lui permettant ainsi de respecter ses engagements. Au bout de 4 ans, les zéro-coupons sont remboursés et le taux d'intérêt chute à 2%. L'assureur réinvestit dans des zéro-coupons de 4 ans. Le graphique suivant montre l'évolution des valeurs de l'engagement et des placements. Il y a insuffisance d'actifs au terme du contrat. Nous verrons qu'il existe des provisions permettant de couvrir ce problème.

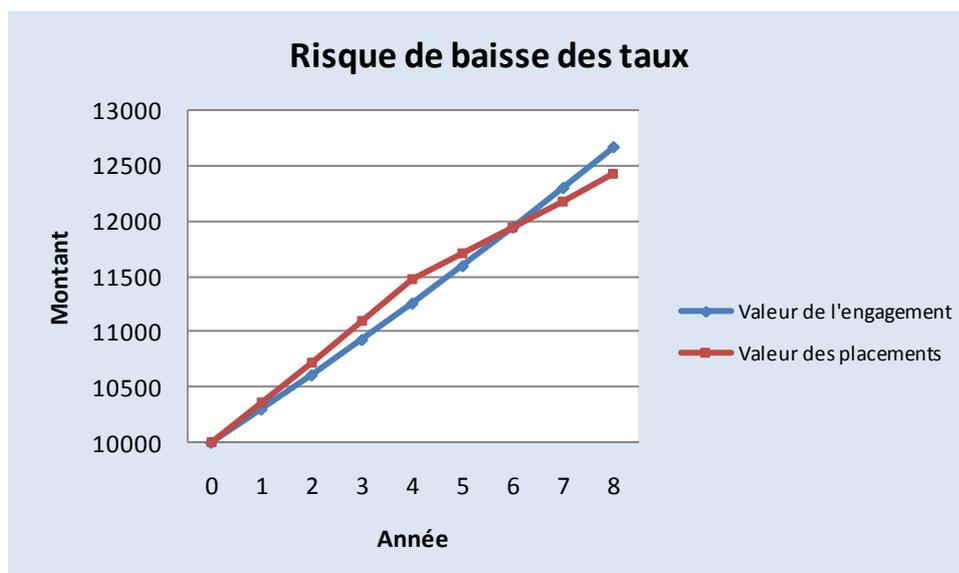


Figure 3. Comparaison engagements/placements

- risque de hausse des taux

A l'inverse, le risque de hausse des taux est le risque d'avoir à céder des obligations avant leur remboursement, alors que ces obligations sont en moins-value par rapport à leur prix d'achat. Il s'agit d'un risque de liquidation.

Si le taux rémunérateur devient supérieur au taux d'intérêt de l'obligation, cette dernière est moins intéressante, et donc sa valeur de marché baisse. Si les engagements envers les assurés arrivent à échéance avant le remboursement des obligations détenues par l'assureur, il faut liquider (vendre) ces actifs obligataires, et réaliser une moins-value. Ceci peut survenir notamment à cause du droit des assurés de racheter leur contrat, en récupérant la PM, comme on l'a vu plus haut.

Nous verrons plus loin qu'il existe une réserve permettant de répondre à ce problème, appelée la réserve de capitalisation.

Prenons l'exemple d'un contrat de 8 ans où un assuré verse 10 000€, et reçoit un taux minimum garanti annuel de 3%. A la souscription, le taux d'intérêt est de 3,5% et l'assureur investit la prime dans des zéro-coupons de durée 15 ans. Le taux augmente brutalement à 4,5% juste après l'acquisition des zéro-coupons. Le rendement comptable des placements est supérieur au taux garanti, mais au bout des 8 ans, il faut combler la dépréciation des titres due à la hausse des taux. L'assureur ne peut faire face à son engagement.

Le graphique suivant montre que la hausse des taux et la non-adéquation de la durée des placements avec celle du contrat conduit l'assureur à une insuffisance d'actif. Un phénomène analogue peut également se produire : en voyant les taux augmenter à l'extérieur, l'assuré peut demander à racheter son contrat et réinvestir dans des placements plus avantageux, ce qui amène l'assureur dans la même situation.

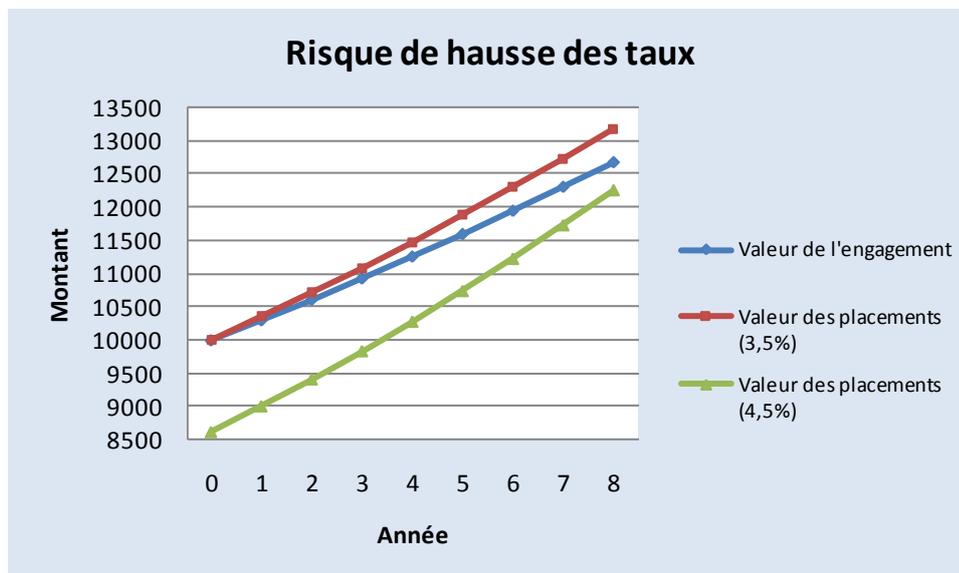


Figure 4. Comparaison engagements/placements

Il semble souhaitable de faire correspondre la durée des obligations avec celles des contrats, mais nous avons vu que la possibilité de rachat anticipé ne permet pas une mesure

fiable de la durée des engagements du passif. Pour les durées de contrat très longues (> 15 ans pour les rentes viagères), il est pratiquement impossible de se munir et de gérer un portefeuille obligataire de durée équivalente.

Pour les contrats en UC, le risque de marché est en principe entièrement assumé par les assurés, qui disposent d'une certaine quantité de parts. En revanche, l'assureur est d'abord confronté à un risque de renonciation : le client peut en effet, dans les 30 jours qui suivent l'adhésion, demander le remboursement intégral des primes qu'il a versées, ce qui peut poser problème à l'assureur en cas de forte baisse des marchés.

Il existe également un **risque d'illiquidité** : à la fin du contrat, l'assureur doit verser la contre-valeur en euro des titres placés. Dans un cas de crise financière (par exemple crise immobilière des années 90), il peut se confronter à l'impossibilité de céder ces titres sur le marché. Une des seules solutions consiste à utiliser les fonds propres des contrats en euro, ce qui n'est cependant pas sain pour la société. En théorie, ce risque ne porte que sur l'euro.

Le risque financier peut se traduire par la non-adéquation actif/passif, c'est-à-dire la différence entre la valeur des engagements et les actifs.

Des risques opérationnels peuvent également survenir au moment des passages d'ordre par exemple. Un risque juridique est aussi présent et est lié à la complexité des produits.

D'autres éléments peuvent également faire courir un risque à l'assureur. Il s'agit des **options cachées**. Il s'agit d'un terme générique qui regroupe les garanties ou les droits variés donnés aux assurés par le contrat ou la réglementation pour rendre les contrats d'assurance plus souples et attractifs. Ils ne donnent pas lieu à une provision spécifique. Ces options cachées peuvent être parfaitement inoffensives comme très dangereuses. Parmi elles, on peut citer

- la renonciation

C'est la faculté légale donnée aux assurés de reprendre leur investissement et mettre fin à leur contrat.

- le rachat

Il permet au client de disposer de tout ou partie de leur épargne disponible avant la fin normale du contrat.

- les transferts et arbitrages

C'est la possibilité offerte aux clients de contrats multisupports de faire modifier la composition des actifs servant à indexer leur contrat.

- la réduction

C'est le droit du client de renoncer au versement des primes futures.

A l'inverse, l'assureur dispose lui aussi d'options, parmi lesquelles le choix de la réalisation de +/- values (ce qui permet de contrôler le rendement comptable des actifs), la dotation ou la reprise de la réserve de capitalisation (voir plus tard) en vendant des obligations en +/- value, le droit de différer ou d'accélérer la distribution des produits financiers (participation aux bénéfices), et le libre choix de la répartition des produits financiers entre différents contrats.

Remarque : Le terme « option » ne doit pas laisser penser qu'on peut évaluer la valeur de ces options, par exemple par la formule de Black et Scholes. Les obstacles sont en effet nombreux : absence de marché organisé des contrats d'assurance (pas de « prix » négociable d'un contrat d'assurance), la non-liquidité des contrats (on ne peut pas arbitrer avec d'autres solutions d'épargne), la complexité des sous-jacents, et la non-rationalité (attachement à l'intermédiaire, clients qui ne quitteront pas leur contrat même si ses conditions sont peu avantageuses, etc.).

Il existe dans les contrats d'assurance des options cachées dont la comptabilité ne correspond pas au coût réel ou même supposé. Même en l'absence de telles options, il existe une différence entre les fonds propres comptables et la richesse réelle d'une société d'assurance.

1.2) Réglementation en assurance vie

Les grands principes de la réglementation sont le devoir de solvabilité* et la bonne gestion de l'interaction actif/passif.

Nous allons présenter la réglementation actuelle, relative à Solvabilité I. Il convient de noter que Solvabilité II sera mis en place dès 2013. Nous y reviendrons par la suite.

1.2.1) Réglementation et comptabilité

De nombreuses lois, arrêtés ministériels, et autres textes viennent réguler l'activité d'assurance vie. La réglementation est très complexe du fait de la nature même de l'activité, très technique et diversifiée.

De manière générale, la hiérarchie des sources des textes est par ordre décroissant les traités internationaux, les lois nationales, la jurisprudence, et les doctrines. Il y a primauté du spécifique sur le général. En cas de doute, les principes de droit commun sont appliqués. Les textes européens sont issus de compromis difficiles entre les pays, parfois très éloignés les uns des autres. Les principes de la réglementation en vigueur sont exposés ci-dessous.

Provisions techniques

Plac^t

Actif

FP

Prov.

Passif

Le code des assurances énonce plusieurs règles concernant le calcul des provisions mathématiques.

- elles doivent permettre de respecter l'intégralité des engagements de l'assureur, qui doivent eux-mêmes être évalués de manière prudente (montant supérieur au montant payé en moyenne par l'assureur et connu a priori, et supérieur au montant payé en définitive, connu a posteriori).
- elles sont calculées en brut de réassurance : la part des réassureurs n'est pas déduite des engagements pris par l'assureur.
- elles sont calculées pour chaque contrat à partir de données techniques au moins aussi prudentes que celles utilisées pour tarifier le contrat.

Le taux minimum garanti (TMG) doit être inférieur à 75% du TME pour les contrats à prime unique de durée d'au plus 8 ans, et inférieur à $\max(3,5\%, 60\% \text{ du TME})$ pour les autres contrats³.

Lorsqu'il est fixé annuellement, la réglementation autorise un TMAA (Taux Minimum Annuel Annoncé) de 85% de la moyenne sur les deux derniers exercices des rendements financiers de l'assureur. Le TMG peut également varier annuellement sur 8 ans maximum en fonction d'un taux benchmark observé sur le marché, à condition que la moyenne des rendements des actifs sur les 2 derniers exercices soit supérieure à 4/3 du TMG de la première année.

Les entreprises d'assurance vie doivent faire profiter leurs assurés de leurs bénéfices, en contrepartie des tarifs prudents exercés par la profession. Tous les contrats sont concernés sauf les assurances collectives en cas de décès, et les contrats en UC. Le code des Assurances prévoit, de façon simplifiée, une **participation aux bénéfices (PB) des assurés égale au minimum à 85% des résultats financiers et 90% des autres résultats**.

Cependant, aucune règle n'impose une quelconque répartition de la PB. Le calcul de PB se fait au niveau compagnie (en sommant sur tous les portefeuilles) et est ensuite redistribué et librement affecté à telle ou telle catégorie d'assurés, souvent en fonction d'impératifs commerciaux. En France, les assureurs disposent d'un délai de 8 années pour affecter ces excédents contrat par contrat. Ils peuvent ainsi mettre de côté leurs profits exceptionnels d'une année afin de compenser plus tard une très mauvaise année par exemple. Il existe pour cela une réserve, appelée **Provision pour Participation aux Excédents (PPE ou UAR en anglais)**, qui permet de lisser la distribution des résultats financiers. En effet, sans cette réserve, une année exceptionnelle provoquerait la distribution de bonus importants aux clients, qui attendront l'année suivante un bonus du même calibre. L'assureur serait ainsi confronté à une certaine variation de « l'humeur » des assurés.

Placements d'actifs

Plac^t

Actif

FP

Prov.

Passif

- Représentation des engagements de l'assureur

Le principe fondateur du placement d'actifs par la société d'assurance est explicitement décrit dans le code des Assurances. Il convient que l'entreprise ait, en représentation (ou en couverture) de ses provisions techniques, un montant suffisant d'actifs de « bonne qualité ». Il convient que l'entreprise représente les engagements qu'elle détient envers les assurés (provisions techniques), mais aussi ceux envers ses clients « privilégiés », comme l'Etat, les salariés, la Sécurité Sociale, etc. Ces derniers seront les premiers à être couverts en cas de liquidation judiciaire de la société d'assurance, et la loi vise à protéger tous les clients en obligeant les assurances à disposer d'un actif de qualité suffisante. Une fois couvertes les provisions techniques et les engagements envers les créanciers privilégiés, la société d'assurance est libre de placer comme elle l'entend ses ressources restantes.

³ Voir Befec Price Waterhouse [14]

Les placements en représentation des engagements doivent répondre à

- une exigence de sécurité

Il est interdit de spéculer avec l'argent des assurés. Les assureurs sont priés de privilégier les entités solvables et les actifs liquides. Sont exclus notamment de la liste des actifs les œuvres d'art et les matières premières. Les placements doivent être localisés dans l'Union Européenne. Des règles de diversification minimum ont également été mises en place.

- une exigence de liquidité

Les actifs doivent pouvoir être vendus rapidement, pour répondre notamment aux engagements à court terme.

- une exigence de rendement

La liste des placements autorisés a été révisée plusieurs fois, et accueille maintenant les actions de société à capital variable (SICAV), les parts de fonds communs de placements (FCP), etc.

A toute date, les engagements réglementés doivent être représentés par des actifs au moins équivalents en valeur.

- Règle de congruence

Les engagements pris dans une monnaie doivent être représentés par des actifs réalisables dans la même monnaie (20% de leurs engagements peuvent ne pas respecter cette règle). Une dérogation est tolérée dans le cas où la société doit détenir dans une monnaie des actifs dont le montant est inférieur à 7% de l'actif total dans les autres monnaies.

- Règles de répartition (limitation par catégorie d'actif)

Le poids des actions ne doit pas dépasser 65% de l'actif total. Parmi ces actions, la part des actions d'entreprises étrangères d'assurance ou de capitalisation ayant leur siège hors OCDE, les actions non cotées, les titres d'assurance mutuelle, les parts de FCP à risque et de FCP dans l'innovation et certaines OPCVM ne doit pas dépasser 5% de l'actif total.

L'immobilier ne doit pas dépasser 40% de l'actif total.

Les prêts et créances ont un poids d'au plus 10% de l'actif total.

Les primes ou soultes versées ou reçues pour la mise en place d'un instrument financier à terme est d'au plus 0,5% de l'actif total.

- Règles de dispersion (limitation par émetteur)

L'ensemble des titres et prêts d'un même organisme ne peut dépasser 5% de l'actif total.

Les parts immobilières ne peuvent excéder 10% de l'actif total.

Des dérogations peuvent être apportées au cas par cas.

- Comptabilité des placements

Les actifs peuvent être évalués selon plusieurs manières selon leur utilisation. En France, le bilan des entreprises doivent faire figurer la **valeur comptable**, ou **book value (BV)**, des actifs lors de leur entrée dans le patrimoine, c'est-à-dire leur valeur d'achat. Les frais accessoires (commissions, courtages, etc.) sont comptabilisés en charges.

Avec l'arrivée des nouvelles normes, les actifs sont évalués par leur valeur de réalisation, ou **valeur de marché**, ou **market value (MV)**. C'est par exemple le dernier cours coté d'une action, ou la valeur d'expertise d'un immeuble. Les actifs correspondants aux contrats en UC sont toujours comptabilisés à leur market value.

Un exemple de calcul de MV d'une obligation est donné en annexe 4.

On définit ainsi la **plus ou moins value latente**, ou unrealized capital gains/losses (**UCGL**) comme la différence entre la market value et la book value. $UCGL = MV - BV$. Une UCGL positive correspond à une plus-value latente.

En cas de moins-value latente sur les placements non amortissables (actions et immeubles), la société d'assurance est tenue de constituer une **provision pour risque d'exigibilité (PRE)** des engagements techniques. La valeur de cette provision est égale à la différence entre la book value et la market value des actions, obligations indexées, titres participatifs, actifs immobiliers, prêts, et parts de fonds communs de créances. Le but de cette provision est le suivant. Les actifs sont inscrits à leur valeur d'acquisition. Par conséquent, certains actifs, comme les actions ou les immeubles, pouvant subir de fortes baisses de valeur de marché, leur book value peut devenir supérieure à leur market value. La PRE permet d'annuler cette richesse fictive.

Les produits des placements peuvent venir directement de leurs revenus (coupons, dividendes), ou de la réalisation d'UCGL, c'est-à-dire de la vente de titres.

Un élément important de la gestion du portefeuille d'actifs est la **réserve de capitalisation (RDC)**. Cette réserve est utilisée lors de la vente d'une obligation, où l'assureur doit doter ou reprendre la réserve de la différence entre le prix de vente et la valeur actualisée des flux générés par l'obligation. Le taux utilisé est le rendement de l'obligation au moment de son achat. L'idée est ainsi de faire comme si l'obligation n'avait pas été cédée avant son terme, l'impact étant nul par rapport à ce qui était prévu initialement.

Par exemple, un assuré souscrit un contrat d'épargne valorisé à 3% par l'assureur sur 7 ans, celui-ci achète des obligations d'échéance 7 ans et rapportant 4%, ce qui lui permet de faire face à ses engagements. Au bout de 3 ans, les taux baissent, ce qui fait augmenter la valeur de marché des obligations en portefeuille. L'assureur peut ainsi être tenté de vendre

ses obligations en réalisant une plus-value distribuée aux actionnaires, et réinvestir dans des obligations au rendement désormais inférieur. La RDC est là pour éviter ce type de pratique. C'est l'analogie de la PRE (pour les actions notamment) appliquée aux obligations.

Le processus de fonctionnement de la réserve de capitalisation est le suivant : 1) connaître le taux de rendement actuariel initial des obligations vendues, 2) déterminer la valeur de l'obligation au moment de la vente en prenant comme hypothèse le taux précédent, 3) doter (resp. reprendre) la RDC si la différence entre le prix de cession et la valeur de l'obligation avec le taux initial est positive (resp. négative) du montant de cette différence. Ce processus est obligatoire pour la dotation comme la reprise.

Fonds propres et marge de solvabilité

Plac^t

Actif

FP

Prov.

Passif

Cette section présente le cadre réglementaire aujourd'hui en vigueur pour le calcul des fonds propres, Solvabilité I.

La mesure de la solvabilité dépend de la façon dont on évalue l'actif et le passif. Les engagements de la société sont lus dans les provisions techniques qui permettent de faire face aux sinistres et aux charges diverses. En pratique, ces données sont calculées sur une base actuarielle et statistique. Elles peuvent s'avérer insuffisantes pour couvrir l'ensemble des sinistres, notamment en cas de concentration (catastrophe naturelle par exemple).

La réglementation oblige les entreprises d'assurance à disposer d'un « matelas » de sécurité en cas d'événements imprévus, appelé **marge de solvabilité**. Ce matelas doit être supérieur à un montant minimum appelé exigence de marge de solvabilité (EMS), et est donc destiné à amortir les conséquences des risques imprévus.

La marge de solvabilité est égale à la somme des éléments suivants :

- le capital versé
- la moitié de la part non versée du capital social
- les emprunts pour fonds social complémentaire
- les fonds encaissés provenant de l'émission de titres ou d'emprunts à concurrence de 25% de la marge totale pour les fonds provenant de l'émission d'emprunts à durée déterminée, et 50% pour les autres fonds
 - les réserves de toute nature, y compris RDC et bénéfices reportés
 - les UCGL.

On peut également ajouter, avec validation de la Commission de contrôle des assurances, 50% des bénéfices futurs calculés en multipliant le bénéfice annuel estimé par la durée résiduelle moyenne des contrats (l'inconvénient est qu'en cas de situation grave, l'entreprise ne pourra pas compter sur des bénéfices futurs pour rembourser ses engagements !).

Le montant du minimum de solvabilité dépend du type de contrat en question. Il faut sommer les exigences de marge de solvabilité de chaque entité pour avoir celle au niveau compagnie.

Opérations d'assurance vie décès :

$EMS = a * 0.04 * PM + b * 0.001 * CSR$ pour les temporaires décès à durée < 3 ans.

$EMS = a * 0.04 * PM + b * 0.0015 * CSR$ pour les temporaires décès de durée > 3 ans et < 5 ans.

$EMS = a * 0.04 * PM + b * 0.003 * CSR$ pour les autres.

Où CSR représente les capitaux sous risque, a est le rapport des PM nettes de cession de réassurance aux PM brutes de cession, et b le rapport entre le montant des CSR après cessions et le montant des CSR bruts de cession. On doit avoir obligatoirement $a > 85\%$, et $b > 50\%$.

Une compagnie ayant une PM d'1 milliard d'euro sans capitaux sous risque doit par exemple disposer d'au moins environ 40 millions d'euro de fonds propres.

Opérations de capitalisation, d'épargne et d'acquisitions d'immeubles :

Idem que précédemment mais sans CSR (on garde seulement le premier terme).

Opérations d'assurance liées à des fonds d'investissement et gestion de fonds collectifs :

Si l'entreprise assume un risque de placement,

$$EMS = a * 0.04 * PT$$

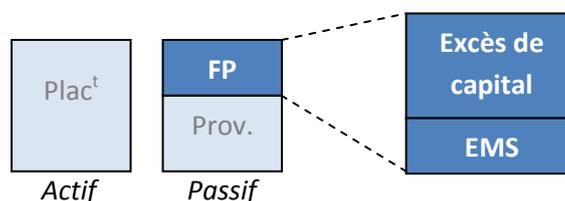
Où PT représente les provisions techniques, et a est identique au précédent.

Si l'entreprise n'assume pas de risque de placement,

$$EMS = a * 0.01 * PT$$

Si l'entreprise assume un risque de mortalité, on ajoute en plus $b * 0.003 * CSR$.

Les fonds propres peuvent ainsi être séparés entre la partie allouée au minimum réglementaire et le surplus de capital.



Pour conclure cette partie sur la réglementation, précisons que les règles imposées aux assureurs que nous avons vues précédemment ont pour objet de protéger les assurés comme les assureurs. Elles ne sont cependant pas suffisantes car elles laissent une grande responsabilité aux entreprises (rien n'indique par exemple qu'un assureur doit être réassuré, ce qui est indispensable car il peut être susceptible de garantir un sinistre dépassant largement ses capitaux propres).

1.2.2) Réglementation actif – passif

La réglementation prévoit de constituer une provision en cas d'observation d'une baisse du rendement des actifs. Il s'agit de la **provision pour aléas financiers (PAF)**. Le processus est le suivant : si à la date d'inventaire, le taux égal à 80% du taux moyen de rendement réel des placements est inférieur au TMG moyen, l'assureur doit constituer une provision pour aléas financiers égale à la différence entre les PM recalculées avec un taux d'actualisation égal à 80% du taux de rendement réel des actifs et les PM d'inventaire.

Prenons l'exemple d'un contrat de 7 ans rémunérant 100 000€ à 3% par an. A la souscription, l'assureur acquiert des obligations rapportant 4% par an. Supposons qu'après 3 ans, l'assureur change l'allocation de son portefeuille et investit en actions et titres immobiliers, qui ne rapportent plus que 2% par an. Dans l'état actuel, l'assureur ne peut pas faire face à ses engagements futurs. Le mécanisme de PAF se met en route.

Ainsi, le taux considéré est de 80% de 2%, soit 1,6%. 3 ans après la souscription, la PM s'élève à 109 273€. Le principe consiste à réévaluer cette PM sachant que le taux de rendement des placements a diminué. La méthode est de partir de la somme à laquelle on veut arriver au terme du contrat, et remonter le temps en « désactualisant » au taux de 1,6% les PM. La chronique obtenue est la suivante.

Année	Taux d'actualisation à 3%	Taux d'actualisation à 1,6%
1	103 000	111 815
2	106 090	113 604
3	109 273	115 421
4	112 551	117 268
5	115 927	119 144
6	119 405	121 051
7	122 987	122 987

Tableau 2. Mécanisme de constitution de la PAF

La PM doit être dotée de $115\,421 - 109\,273 = 6\,148\text{€}$ à l'année 3 afin d'atteindre les 122 987€ de l'année 7.

Une autre réserve est la **provision globale de gestion (PGG)**, qui sert à financer l'ensemble des charges futures des contrats qui ne sont pas couvertes par les chargements d'acquisition et les chargements sur produits financiers. Il est d'usage de regrouper les contrats de même nature afin d'avoir une provision commune égale à la valeur actuelle des charges de gestion futures diminuée de la valeur actuelle des ressources futures issues des contrats.

Les produits financiers considérés ici sont une part des PM de l'exercice (part égale à, pour chaque exercice futur, 75% du TME pendant les 5 années suivant l'exercice considéré et 60% du TME au-delà pour les obligations, et 70% du rendement hors plus-values du portefeuille obligataire de l'exercice et des 2 exercices précédents pour les autres actifs). Les charges correspondent aux frais d'administration, de gestion des sinistres, etc.

La **réserve de capitalisation (RDC)** a un impact sur les interactions actif/passif. Nous l'avons présentée un peu plus haut et nous allons voir son utilisation au travers d'un exemple. L'assuré confie sur 7 ans 100 000€ à l'assureur, qui garantit un TMG de 3%.

L'assureur achète 1 000 obligations de nominal 100€, de coupon 4% et de durée résiduelle 7 ans. Au terme de la première année, les taux d'intérêt ayant baissé, l'obligation est cotée 105,4€. Le taux actuariel est désormais de 3%. L'assureur prend la décision de vendre ses obligations, en réalisant une plus-value de 5,4€ sur chacune et distribuée aux actionnaires, et réinvestit 100 000€ dans les mêmes obligations de nominal 100€, de coupon 4% et de terme 6 ans. Il en achète donc 948. Un an plus tard, l'assuré décide de racheter son contrat, qui doit recevoir 106 090€. Au même moment, les taux ayant remonté, l'obligation cote à nouveau à 100.

En l'absence de RDC, l'assureur a gagné 4 000€ la première année (les coupons) qui ont été réinvestis dans des coupons à 3%. Au bout de la deuxième année, l'assureur a gagné 3 792€ ($4\% \times 100 \times 948$ pour les coupons) + 120€ ($3\% \times 4 000$ pour les produits financiers de la première année réinvestis) + 94 800€ (vente de 948 titres à 100€). Il dispose de 102 712€, insuffisant pour payer l'assuré.

Avec la RDC, l'assureur doit calculer la valeur des obligations cédées la première année avec le taux initial de 4%, soit 100€. Il dote ainsi la RDC de 5 400€. Lorsque l'assuré rachète son contrat, il vend ses obligations 100€. La valeur de l'obligation au taux de rendement actuariel de départ est de 104,6€. L'assureur effectue une reprise sur la RDC d'un montant de $(104,6 - 100) \times 948 = 4 361$ €. Finalement, l'assureur dispose au total de 107 073€ ($102 712 + 4 361$), suffisant pour régler les 106 090€.

La RDC permet donc de limiter les conséquences de la non-adéquation entre l'actif et le passif réel en cas de cession d'obligations.

Depuis la fin des années 90, la réglementation impose aux sociétés d'assurance d'évaluer les risques financiers auxquels ils sont exposés. Plus précisément, les effets des événements suivants sont quantifiés (à titre d'exemple) :

- hausse du taux zéro-coupon d'emprunt d'Etat à 10 ans de 200 et 400 points de base (1 pdb = 0,01%)
 - baisse du même taux de 100, 200 et 300 pdb
 - baisse de 10%, 20%, 30% et 40% de la MV des actions
 - idem pour les actifs immobiliers
 - pour les contrats en euro, il est tenu compte des taux simulés, après une baisse de 30 pdb au titre des charges de gestion.

Toute entreprise d'assurance est également tenue d'établir un rapport de solvabilité dont le but est d'exposer et de justifier les provisions techniques, la gestion financière (rappel des procédures de contrôle, qualité des actifs), la marge de solvabilité, et les perspectives à moyen et long terme (simulations).

1.3) Outils de simulation d'un assureur

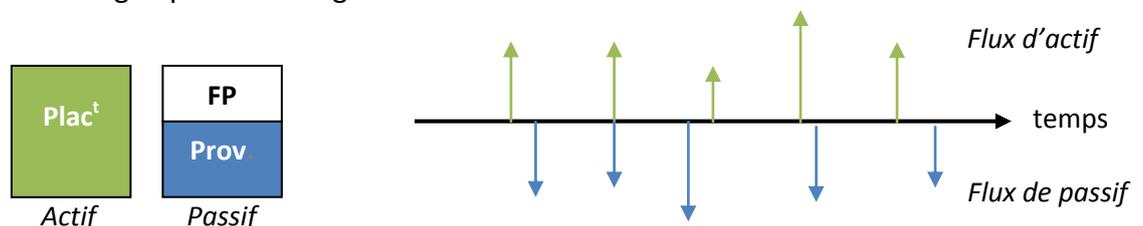
Nous avons vu jusqu'à présent les principes majeurs qui régissent l'activité d'assurance vie. La complexité de son fonctionnement nécessite l'implémentation d'outils visant à projeter dans l'avenir le comportement de l'entreprise, à travers l'évolution de son bilan, de son compte de résultat, de ses provisions techniques, de ses primes, etc., l'assureur ayant en effet le besoin de prévoir le comportement notamment de son actif et de son passif dans les décennies à venir.

Nous allons présenter dans cette partie les différents types d'outils dont l'assureur dispose à ce sujet.

1.3.1) Outils d'analyse des flux de trésorerie

Ces outils cherchent à projeter et comparer les flux de trésorerie, ou cash-flows, générés par les actifs financiers d'une part et par les engagements de l'assureur d'autre part qui sont présents en portefeuille (vision « run-off »).

Dans la projection des flux de l'actif, on somme sur toutes les périodes les cash-flows issus des revenus financiers du portefeuille (intérêts, loyers, dividendes, coupons, etc.). Dans la projection des flux du passif, on somme sur toutes les périodes les cash-flows issus des contrats (TMG, dates d'échéance, rachats, décès, etc.). La différence entre ces deux valeurs, appelée flux net, donne pour chaque période l'excédent ou l'impasse de trésorerie en fonction de son signe positif ou négatif.



Ceci permet à l'assureur de connaître une approximation du montant qu'il aura à investir ou le montant d'actif qu'il aura à liquider, et donc la stratégie de gestion adéquate de son portefeuille. L'assureur va pouvoir chercher à adosser l'actif au passif afin de couvrir ses flux de passifs par ses revenus d'actifs.

Une technique classique d'équilibre actif – passif consiste à regrouper les contrats par groupe dans lesquels les taux sont semblables, puis de trouver un portefeuille d'actif de rendement équivalent pour chacun de ces groupes. Il est également possible de regrouper les passifs selon d'autres critères que le rendement. Dans une société d'assurance, quel que soit le critère retenu, un tel groupe est appelé **canton***, auquel on affecte les provisions et les cash-flows associés.

La valeur des actifs et des passifs est en théorie égale à la valeur de leurs cash-flows. On pourrait ainsi sommer et actualiser ces flux et trouver la valeur actuelle de l'actif et du passif (en pratique, ce n'est pas si évident, car il existe une marge d'erreur importante sur la prévision des cash-flows).

En regroupant les contrats par cantons, on peut donc en principe obtenir des groupes de valeur actuelle nette nulle. Cependant, cet équilibre est très sensible aux conditions de marché, et il faut réviser la composition du portefeuille très fréquemment.

Sensibilité de l'actif

Une étude très importante repose sur l'analyse de la sensibilité de l'actif, et notamment des obligations par rapport aux variations de taux. On rappelle l'expression de la valeur B d'une obligation de taux actuariel r et payant des flux F_{t_i} :

$$B = \sum_{i=1}^n \frac{F_{t_i}}{(1+r)^{t_i}}$$

La duration D de cette obligation est définie par

$$D = \sum_{i=1}^n t_i * \frac{F_{t_i}}{B (1+r)^{t_i}}$$

C'est une mesure de la durée moyenne d'attente pour percevoir les flux de l'obligation.

Si on envisage un changement Δr du taux, on a l'approximation

$$\Delta B = \frac{\partial B}{\partial r} \Delta r$$

Soit

$$\Delta B = -\Delta r \sum_{i=1}^n t_i * \frac{F_{t_i}}{(1+r)^{t_i+1}}$$

Lorsque les cash-flows sont positifs, la sensibilité est bien négative (quand les taux montent, la valeur de l'obligation baisse).

On a la relation

$$\frac{\Delta B}{B * \Delta r} = - \frac{D}{1+r}$$

C'est la formule de Hicks : sensibilité = $-\frac{\text{duration}}{1+r}$.

Si par exemple, une obligation cote 94,213€, avec une duration de 5,306 ans et un taux actuariel de 6,184%, on a $\Delta B = -94,213 * \frac{5,306}{1+0,06184} * \Delta r$, soit $\Delta B = -470,78 \Delta r$. En cas de hausse des taux de 10 points de base, le prix diminue de 0,471€.

La duration d'un portefeuille d'obligations peut être définie comme la moyenne des durations des titres qui composent le portefeuille pondérées par la valeur de marché de ces titres. Dans le cas simple d'un portefeuille contenant une unité de chaque obligation, la duration est la moyenne des durations des titres du portefeuille pondérées par leurs prix.

Cette procédure n'est pas parfaitement correcte dans la mesure où l'utilisation de la durée repose sur l'hypothèse que les taux actuariels des différentes obligations subissent tous la même variation (cas des déplacements parallèles de la courbe des taux).

Un calcul plus fin de la sensibilité par rapport au taux peut être nécessaire pour les fortes variations de r . On pousse alors le développement limité jusqu'au deuxième ordre :

$$\Delta B = \frac{\partial B}{\partial r} \Delta r + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} \Delta r^2$$

avec

$$\frac{\partial^2 B}{\partial r^2} = \sum_{i=1}^n t_i(t_i + 1) \frac{F_{t_i}}{(1+r)^{t_i+2}}$$

La convexité est définie par

$$C = \frac{1}{B} \frac{\partial^2 B}{\partial r^2}$$

On a ainsi

$$\begin{aligned} \frac{\Delta B}{B} &= - \frac{D}{1+r} \Delta r + 0,5 C (\Delta r)^2 \\ &= \text{sensibilité} * \Delta r + \frac{\text{convexité}}{2} * (\Delta r)^2 \end{aligned}$$

Cela suppose toujours d'avoir un déplacement parallèle de la courbe des taux. En contrôlant à la fois la durée D et la convexité C , une entreprise peut se couvrir contre le risque de taux pour des déplacements parallèles de la courbe des taux.

Pour les autres actifs (actions, immeubles, etc.), la sensibilité au taux est existante, mais la variance des taux n'explique qu'une faible partie de la variance des cours.

Sensibilité du passif

La sensibilité de l'actif que nous avons vue précédemment supposait des flux fixes, indépendants des taux de marché. En revanche, les passifs d'assurance vie cachent bien souvent des options complexes détenues par les assurés. Dans l'exercice de ces options, le comportement du client sera influencé par la valeur des taux de marché, ce qui en pratique signifie que les cash-flows du passif vont dépendre de ces taux, et la théorie précédente n'est plus applicable. Pour de faibles variations, cette difficulté peut être ignorée. Aussi, il est parfois possible d'encadrer les cash-flows projetés entre des bornes inférieures et supérieures. Par exemple, l'assureur peut envisager un taux de rachat incompressible de 3% par an, quelle que soit la valeur des taux, et considérer un taux de rachat maximum de 15% par an (il y aura toujours des clients qui ne souhaiteront pas demander la rupture de leur contrat).

Au final, si on arrive à égaliser la sensibilité de l'actif et celle du passif en partant d'une valeur actuelle nette nulle, on parvient à s'immuniser contre le risque de taux.

Le grand inconvénient de ces outils réside dans leur approche statique. En effet, les bénéfices générés par les contrats futurs ne sont pas pris en compte, et cette méthode sous-évalue certains risques financiers. C'est le cas en particulier des contrats où les assurés peuvent verser librement des primes. Dans ce cas, les caractéristiques de l'actif vont être modifiées en fonction du contexte financier.

Ces outils ne permettent donc pas de traiter les problèmes actuels auxquels sont confrontées les assurances.

1.3.2) Outils déterministes

Les outils déterministes permettent de résoudre des problèmes importants : la prise en compte de la non-fixité des flux du passif et de leur dépendance du comportement des assurés et de l'assureur, la prise en compte des versements futurs, la prise en compte de certaines provisions prudentielles.

- Caractéristiques des modèles déterministes

Les modèles déterministes sont des modèles de simulation, ils projettent l'évolution des actifs et des passifs période par période en appliquant un scénario déterministe qui décrit l'évolution des marchés financiers de manière arbitraire (chroniques prévues sur plusieurs périodes). Il ne s'agit plus de mesurer seulement la valeur actuelle nette, mais de projeter l'intégralité des variables sujettes à des cash-flows (primes, provisions, rachats, décès, etc.) qui vont évoluer selon le contexte financier et le comportement des clients.

A l'aide de simulations déterministes, il est possible de tester différentes politiques de rémunération des assurés par l'assureur, et différentes stratégies d'allocation d'actifs. La réalisation de tels modèles demande la traduction informatique de l'intégralité de l'activité de l'assurance en termes de résultats comptables et de chroniques prévisionnels. En quelque sorte, ces modèles « vieillissent » la société d'assurance dans son ensemble. La capacité des tableurs est dépassée, et il faut avoir recours à des **outils de simulation** spécialisés (et donc très conséquents et coûteux) dans la reproduction de l'actif et du passif. Nous reviendrons plus loin sur celui qui est utilisé au sein d'Allianz France par les actuaires.

Les modèles peuvent aussi prendre en compte l'arrivée de nouveaux contrats au fil du temps.

Ces outils fonctionnent itérativement sur un certain nombre de périodes : ils partent du stock connu d'actif et de passif au temps t_{n-1} , et calculent les résultats comptables et financiers qui se déroulent pendant la période n . Ceci est fait à partir des données exogènes (scénario économique, comportement des assurés notamment), et des interactions endogènes (alimentation de la réserve de capitalisation en fonction des résultats sur les obligations par exemple). Interviennent ensuite la participation aux bénéfices des assurés et les derniers ajustements. On obtient ainsi les résultats comptables et financiers, et le nouveau stock d'actif et de passif à la fin de l'année n . Ces données constituent les valeurs initiales pour la période suivante.

Des interactions fines peuvent être implémentées dans ces outils, par exemple une fonction de comportement reliant le taux de rachat de la période n avec le taux de

rémunération du contrat de l'année n-1 et son ancienneté. Ceci crée des interactions sur les calculs effectués sur les actifs et sur les passifs. De plus, il devient possible de décider la composition de l'actif. Selon le modèle, la description de la politique financière est plus ou moins détaillée. Il faut au moins traiter canton par canton la répartition par grandes classes d'actifs (actions, cash, obligations, immobilier, etc.), et la durée des investissements obligataires. On appelle cette décision l'**allocation stratégique des actifs**. Cette allocation peut être fixe ou dynamique. Une fois le portefeuille déterminé, le scénario financier permet de trouver son rendement. Du point de vue passif, il faut alors choisir le taux servi aux assurés, qui ne peut pas être durablement supérieur au rendement du portefeuille. D'un point de vue stratégique, la question est très intéressante : le marché de l'épargne étant très concurrentiel, la fixation du taux servi est un élément clé de la compétitivité de l'entreprise. En cas de mauvaise année, faut-il privilégier le maintien de la compétitivité en continuant à servir un taux élevé, ou au contraire protéger ses fonds propres ? Conserver une marge bénéficiaire invariante pour l'assureur aura un impact direct et défavorable sur la production, les rachats, etc. Le comportement des clients est en effet sensible à l'écart entre le taux servi et le taux de la concurrence.

Remarque : Pour les sociétés qui gèrent des portefeuilles aux très grands encours, comme Allianz, les actifs et les passifs sont cantonnés. Les modèles calculent alors l'évolution des provisions techniques sur la base d'une modélisation matricielle (montant de chaque provision par canton et par période). Modéliser contrat par contrat l'évolution des provisions serait extrêmement coûteux en temps. Dans le cas d'Allianz, où les actifs et les passifs sont cantonnés, les simulations demandent déjà plusieurs heures de calcul...

- Choix du scénario

Le scénario utilisé dans le modèle est choisi par l'utilisateur. Le premier scénario qui vient à l'esprit est celui de la continuité de ce qui existe aujourd'hui. On considère que les marchés financiers suivent la tendance actuelle sans forte variation. Il s'agit du scénario central, correspondant à une situation stable des marchés.

Des scénarios catastrophes peuvent également être mis en place afin de connaître le comportement de la société en cas de sinistre majeur, dans l'optique de prévenir et limiter les dommages occasionnés. D'importantes baisses ou hausses des taux sont simulables, de même que des krachs boursiers.

Exemples d'applications

On part d'un portefeuille de placements financiers connu (90% d'obligations et 10% d'actions par exemple). En utilisant le scénario central, il est possible d'estimer la rentabilité future des opérations d'assurance. Si ces résultats sont non satisfaisants, la stratégie technique et commerciale est probablement à remettre en cause, car la société aura des difficultés même en situation normale. Dans la plupart des cas, la situation est satisfaisante, et ce sont plutôt les scénarios catastrophes qui permettent de voir comment évoluent les montants des différentes réserves (PPE, RDC, PRE, etc.) et quels sont les risques auxquels la société est exposée.

Un modèle déterministe permet également de chiffrer les conséquences de la réalisation d'UCGL. En effet, si on réalise des plus-values sur des actions par exemple, le stock des plus-values latentes diminue, ce qui augmente le risque d'avoir à alimenter la PRE (constituée, on le rappelle, des moins-values latentes sur les actions et immeubles notamment). De plus, le montant de revenus distribuable augmente, ce qui provoque une augmentation du revenu de l'assuré à travers la PB (participation aux bénéfices).

L'inconvénient majeur de ces outils déterministes est le risque de modèle, c'est-à-dire le risque qu'ils soient mal utilisés ou spécifiés. L'expérience et la qualification des analystes permettent de maîtriser ce risque. Des contrôles sont à effectuer pour réconcilier les résultats des outils déterministes avec la comptabilité notamment.

1.3.3) Outils stochastiques

Les modèles déterministes ne permettent d'effectuer des simulations que sur un seul scénario, qui représente l'évolution de l'ensemble des paramètres du marché (taux à plusieurs échéances, valeur des indices, taux de change, etc.). Théoriquement, la probabilité qu'un tel scénario se réalise est 0. Cependant, en supposant que ces paramètres de marché suivent des processus stochastiques, il est alors possible de définir une densité de probabilité pour chacun d'entre eux. L'objectif des outils stochastiques est d'utiliser la méthode de Monte-Carlo afin d'estimer les lois de probabilité.

Un processus stochastique est une collection de variables aléatoires $(X_t)_{t \in T}$ sur le même espace de probabilité et à valeurs dans le même espace. Ici, X_t est indexé par le temps (en continu, ou en discret). Chaque tirage est une chronique et constitue une trajectoire. Il est possible de générer une infinité de trajectoires pour représenter des scénarios financiers et économiques. Contrairement aux scénarios déterministes, ces scénarios ne sont pas créés arbitrairement à partir du best estimate qu'on peut avoir aujourd'hui sur le comportement futur du marché.

La méthode de Monte-Carlo consiste en une procédure numérique dont le but est d'évaluer les caractéristiques (moyenne, écart type, quantiles, etc.) de la loi de probabilité d'une fonction d'une variable aléatoire, $F(X)$. $F(X)$ peut par exemple être la valeur actuelle des profits futurs en fonction des paramètres de marché. Le principe est de générer n tirages aléatoires indépendants x_1, x_2, \dots, x_n , puis d'estimer les caractéristiques de la loi de probabilité de $F(X)$ à partir de l'échantillon $F(x_1), F(x_2), \dots, F(x_n)$.

En assurance vie, cette technique est très puissante, car elle permet d'obtenir de nombreux résultats et indicateurs en tirant un échantillon de nombreux scénarios économiques. L'inconvénient est qu'il nécessite beaucoup de temps de calcul et de ressources informatiques, il n'est de plus pas envisageable de modéliser l'actif et le passif contrat par contrat.

Dans un modèle déterministe, les cash-flows du passif sont calculés à partir d'hypothèses sur le comportement des assurés (souscriptions, versements libres, rachats, arbitrages, etc.) qui dépendent de la conjoncture économique du scénario considéré. La situation est la même dans les outils stochastiques, mais il faut programmer des fonctions de

comportement des clients (les modifier individuellement dans chaque scénario serait trop fastidieux). Elle doit notamment faire transparaître une hausse des rachats en cas de hausse des taux obligataires. De façon générale, il est difficile d'avoir une approche purement théorique sur l'exercice des options par la clientèle.

Le problème est le même pour la politique de l'assureur : il n'est pas envisageable de modifier manuellement les décisions financières et commerciales de la compagnie en fonction de la conjoncture (investissements, réalisation de plus-values, taux servis, etc.). Il est suffisant dans un premier temps notamment, de projeter les résultats avec une politique d'allocation d'actifs fixe dans le temps. De même, la politique commerciale (taux servis aux assurés), la politique de résultat (bénéfices et dividendes versés) et la tactique comptable (réalisation de plus ou moins-values, dotation ou reprise de la RDC, de la PRE, etc.) interagissent de façon très complexe. Une méthode consiste à simuler ces politiques en fixant des objectifs de rendement comptable, eux-mêmes calculés en fonction d'objectifs de compétitivité (taux servis) et d'objectifs de résultats pour l'assureur. Le modèle calcule alors pour chaque période la quantité de plus ou moins-values qu'il est nécessaire de réaliser pour atteindre ces objectifs, le tout en respectant la réglementation (PB, etc.).

L'utilisation d'outils stochastiques permet d'autres avancées importantes, notamment en matière de mesure de risque. En simulant le comportement de la société sur de nombreux scénarios, on peut déterminer un certain nombre d'indicateurs de risque. Un indicateur très utilisé est la valeur en risque ou **value at risk (VaR)**, qui est définie comme la valeur qui est dépassée par une certaine variable à une certaine fréquence, et qui peut être calculée à partir d'un grand nombre de scénarios. Par exemple, une VaR à 99,93% pour le montant du revenu d'investissement des actions de l'année de projection 1 peut être déterminée de la façon suivante. On génère 100 000 scénarios à 1 an, qui donnent 100 000 résultats de revenu d'investissement sur les actions. La VaR est le montant du revenu d'investissement classé 70^{ème} sur les 100 000 en ayant classé les résultats par ordre croissant. C'est un outil de management très utilisé en l'assurance vie, notamment pour étudier la valeur des capitaux propres dans un très grand nombre de scénarios, et prévoir la stratégie à adopter en cas de scénario catastrophe.

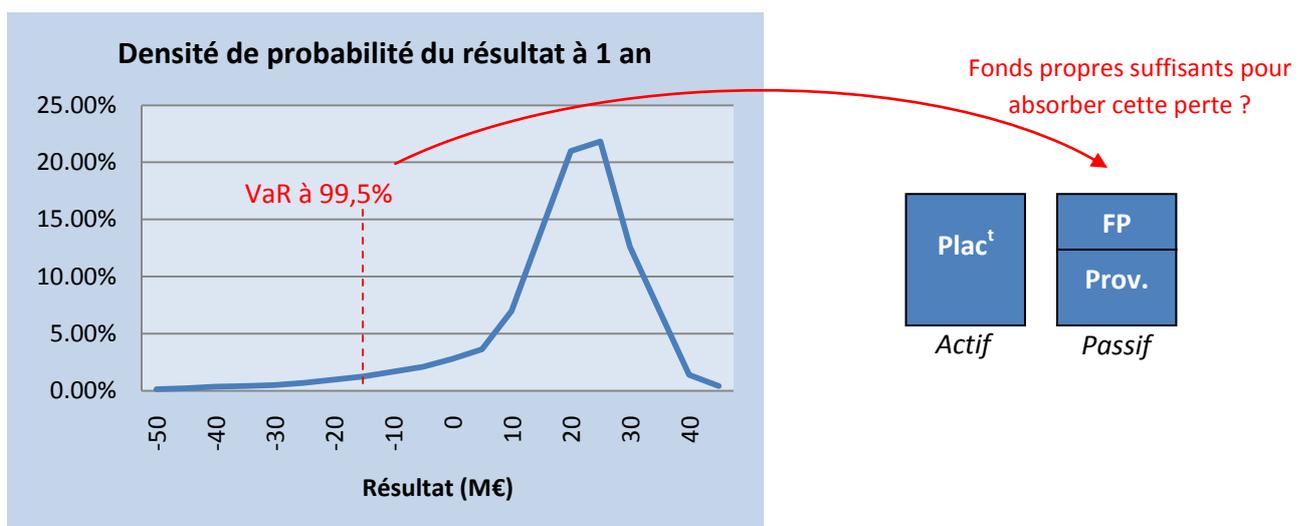


Figure 5. Calcul de VaR et comparaison avec les fonds propres

CONCLUSION

L'objectif de cette première partie était de présenter une vision de l'activité d'assurance vie aussi complète que possible, à travers sa production (les produits que les assureurs proposent), sa réglementation actuelle, et de certains types d'outils à sa disposition. Nous avons vu également les enjeux de l'interaction entre l'actif et le passif d'une entreprise d'assurance vie. Nous sommes ainsi partis d'une vision très macroscopique d'une société d'assurance vie. Ces notions vont permettre de mieux appréhender la suite du mémoire, car nous allons maintenant nous focaliser sur les rachats et leur contexte. Nous allons notamment aborder les concepts d'Options & Garanties, d'IFRS, d'Embedded Value et de Solvabilité II auxquels sont consacrées des équipes importantes au sein d'Allianz France.

PARTIE II : GENERALITES SUR LES RACHATS, PRESENTATION DE LA PROBLEMATIQUE

INTRODUCTION

Nous allons dans un premier temps introduire les notions relatives au sujet cœur de ce mémoire, les rachats dynamiques, notamment sa définition et les points de vue respectifs de l'assuré et de l'assureur. Nous présenterons ensuite le contexte dans lequel cette étude est menée et en préciser la problématique ainsi que les objectifs recherchés.

2.1) L'option de rachat

2.1.1) Définition et cadre juridique

Définition

Le rachat est une **option** permettant à l'assuré, lorsqu'il l'exerce, de retirer tout ou partie de son épargne à tout moment avant la date d'échéance prévue au contrat (on parle respectivement de rachat total et de rachat partiel).

Le Code des Assurances stipule que la valeur de rachat brute est égale à la provision mathématique (PM) de son contrat à la date du rachat. Dans un contrat d'épargne classique, ce montant de PM correspond à l'épargne atteinte.

Cette option peut être vue comme un call américain dont le sous-jacent est la valeur courante de la PM. En revanche, cette modélisation court-circuite la complexité du produit d'assurance sous-jacent, notamment toutes les autres options implicites, le comportement de l'assureur et de l'assuré, ou encore l'historique des taux de rémunération distribués. Elle n'est pas entièrement suffisante et satisfaisante pour son évaluation.

Cadre juridique

La loi exclut le droit au rachat dans certains types de produits énumérés dans l'article L132-23 du Code des Assurances⁴ (voir annexe 5). En particulier, tous ceux présentant un risque d'anti-sélection ne sont pas rachetables, comme les produits en rente par exemple. En effet, parmi les nouveaux rentiers, ceux qui se savent gravement malades demanderaient à racheter immédiatement leur contrat, car la PM vaut (R étant le niveau de rente)

$$PM = R * \sum_{i=x}^{\text{décès réel}} \frac{p_{i/x}}{(1+r)^{i-x}} + R * \sum_{i=\text{décès réel}}^{\text{décès table}} \frac{p_{i/x}}{(1+r)^{i-x}}$$

Le second terme correspond à la somme que l'assuré sait qu'il ne récupérera pas car il décèdera avant la date du décès prévue lors de la tarification. Il aurait donc intérêt à racheter, faussant ainsi la méthode de tarification de l'assureur. C'est la raison pour laquelle ceci est interdit par la loi.

Pour les contrats autorisant le rachat, l'assureur ne peut refuser l'option dès lors que 15% des primes ont été versées ou lorsque deux primes annuelles ont été payées. De plus l'article R132-2 précise que « L'assureur peut d'office substituer le rachat à la réduction si la valeur de rachat du contrat est inférieure à la moitié du montant brut mensuel du salaire minimum de croissance applicable en métropole, calculé sur la base de la durée légale hebdomadaire du travail, en vigueur au 1er juillet précédant la date à laquelle la réduction est demandée. »

⁴ Voir Code des Assurances [1]

Notons également que le droit au rachat appartient à l'assuré, mais pas aux bénéficiaires, à moins que l'assuré décède. En cas de demande de rachat, l'assureur doit verser la valeur de transfert dans un délai qui ne peut excéder 2 mois.

L'article R331-5 stipule que la pénalité appliquée par l'assureur lors du rachat ne peut excéder 5% de la valeur de la PM, et qu'elle doit être nulle si la date de souscription est antérieure de 10 ans ou plus à la date de rachat.

Cadre fiscal

C'est le cadre fiscal qui explique l'attrait tout particulier que portent les Français à l'assurance vie. Nous en détaillons ci-dessous ses caractéristiques.

En cas de rachat partiel ou total, seule la part constituée des plus-values est imposée. L'assuré a le choix de l'inclure dans sa déclaration de revenus ou de laisser l'assureur appliquer les règles de prélèvement libératoires.

La méthodologie de calcul est la suivante⁵.

- A. Considérer chacun des versements sur le contrat comme un compartiment indépendant et calculer la plus-value sur chacun.
- B. Multiplier cette plus-value par le coefficient $C = \frac{\text{montant du rachat}}{\text{valeur actuelle du contrat}}$ (C vaut 1 s'il s'agit d'un rachat total et entre 0 et 1 s'il est partiel).
- C. Le tableau ci-dessous donne les abattements et taux à appliquer.

⁵ Voir Fiscalité de l'assurance vie [17]

Date d'ouverture de l'assurance-vie	Date à laquelle a été réalisé le versement	Montant du versement à l'origine	Imposition des plus-values		
			Abattement	Taux d'imposition	Contributions sociales
Jusqu'au 01/01/1983	Sans incidence	Sans incidence	Aucun	Exonération d'impôt sur les intérêts	
Jusqu'au 25/09/1997	Jusqu'au 25/09/1997	< 30 490 €			
	Du 26/09/1997 au 31/12/1997	≥ 30 490 €	Pour les assurances-vie de plus de 8 ans :	Intégration des intérêts dans le revenu imposable (rubrique « valeurs et capitaux mobiliers - montant brut des revenus n'ouvrant pas droit à un abattement »). ou Prélèvement libératoire de :	
	À partir du 01/01/1998		4 600 € pour une personne seule 9 200 € pour un couple marié		
À partir du 26/09/1997	Tous les versements	Sans incidence	Abattement annuel (toutes assurances-vie confondues) sur le montant des plus-values imposables si intégration aux revenus (ou en crédit d'impôt si PL).		35 % si la durée de l'assurance-vie est inférieure à 4 ans 15 % pour un retrait effectué entre la 4 ^e et la 8 ^e année 7,50 % après la 8 ^e année

Tableau 3. Détail de la fiscalité de l'assurance vie

Notons qu'à partir du 1^{er} octobre 2011, les prélèvements sociaux passeront de 12.3% à 13,5% suite aux mesures prises par le Premier Ministre François Fillon.

2.1.2) Les risques pour l'assureur

Cette section introduit des éléments majeurs pour la suite de ce mémoire.

Mettons-nous à la place d'un assuré. L'option de rachat est très intéressante, à plusieurs points de vue :

- Mon argent reste disponible à tout instant
- Je peux gérer mon épargne pour effectuer un investissement plus rentable ailleurs sur le marché
- Je peux optimiser mes retraits pour bénéficier de la fiscalité

Mettons-nous maintenant à la place de l'assureur. Plusieurs risques sont à prendre en compte :

- Je devrais prévoir une vague de rachats 4 et 8 ans après la souscription des contrats, et donc investir dans des actifs qui permettent d'assurer les versements correspondants
- Si je ne rémunère pas assez mes assurés par rapport au marché, ils vont avoir tendance à racheter, et je devrai alors vendre mes actifs de façon imprévue
- Mon image de marque et ma situation financière ont une influence sur le comportement de rachat de mes assurés

On comprend donc que les rachats soulèvent des problématiques stratégiques et de gestion actif/passif. Intéressons-nous en particulier au deuxième risque évoqué ci-dessus en présentant le comportement typique d'un assuré.

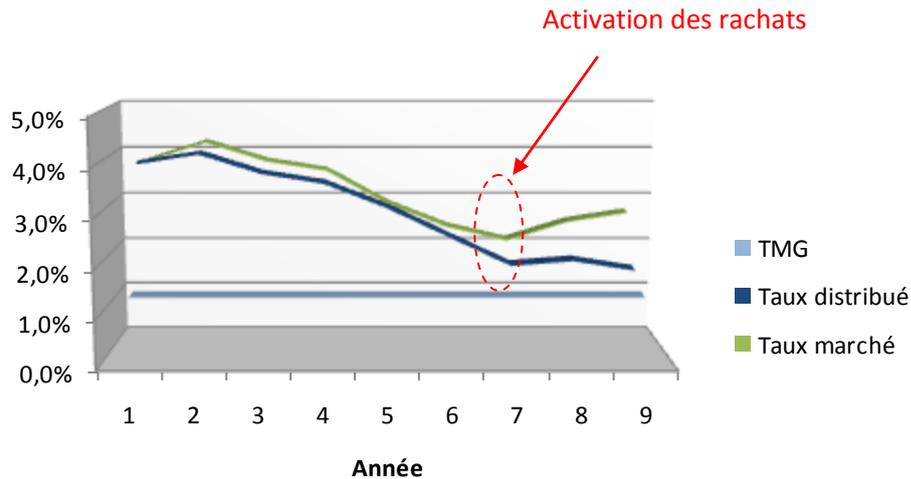
Les assureurs vie proposent la plupart du temps un taux minimum garanti (TMG) sur leurs contrats. Aujourd'hui, les TMG sont souvent nuls. Ils versent en sus un complément de rémunération au titre de la participation aux bénéfices. Envisageons alors deux scénarios après la signature d'un contrat.

Scénario 1 : on observe une baisse des taux d'intérêt sur le marché.

L'assureur doit délivrer au moins le TMG, et l'assuré est ravi car il a le sentiment que son contrat est plus intéressant que le marché, ce qui limite les rachats.

Scénario 2 : on observe une hausse des taux d'intérêt sur le marché.

L'assuré voit une rémunération potentielle plus intéressante sur le marché que son contrat. Pourtant, l'assureur peut verser au-delà du TMG (participation aux bénéfices), mais pas de manière contractuelle, ce qui fait que psychologiquement, l'assuré est tenté de racheter son contrat pour l'investir ailleurs sur le marché. L'assureur doit alors vendre ses actifs pour effectuer le versement de la prestation. Etant donné qu'il possède une grande partie de son investissement en obligations et que leur valeur baisse en cas de hausse des taux, il va réaliser des moins-values. De plus, la rentabilité des contrats restant en portefeuille va diminuer, de même que leur attractivité auprès des clients.



Ce comportement économique plus ou moins rationnel de la part des assurés constitue ce que l'on appelle les rachats dynamiques.

La difficulté réside dans la modélisation du comportement de l'assuré. Ce dernier ne réagit pas de façon parfaitement rationnelle comme nous l'avons mentionné plus haut, et n'est pas non plus parfaitement informé des évolutions du marché.

Il convient de remarquer de plus que les rachats sont ou peuvent être freinés par un certain nombre de facteurs :

- Perte des droits d'exonération fiscale sur la transmission de patrimoine
- Les prélèvements fiscaux
- Les pénalités de rachat par l'assureur
- La perte d'éventuelles primes de fidélité

2.1.3) Comment le risque de rachat peut causer la faillite d'un assureur

Dans les années 50, les entreprises d'assurance vie réalisent d'importants profits, en raison d'un taux de mortalité effectif plus favorable que celui utilisé pour la tarification des produits, et de l'évolution des taux d'intérêt rendant propices les investissements obligataires. En revanche, les fonds de pension, n'étant pas limités réglementairement par le poids des actions dans leur portefeuille d'investissement, réalisent des bénéfices meilleurs et sont plus compétitifs. Les entreprises d'assurance vie perdent ainsi petit à petit leur part de marché dans le secteur. Voyons comment la compagnie vie Executive Life a fait faillite dans ce contexte à cause des rachats⁶.

⁶ Voir Lunven S. [22]

Etape 1 : innovations commerciales

Les compagnies d'assurance vont donc chercher à attirer et fidéliser leurs clients, en développant des garanties innovantes dans leurs contrats telles que les garanties de rendement, ou encore les options de rachat anticipé. Cette nouvelle stratégie commerciale fait porter aux assureurs des risques nouveaux qu'ils vont sous-estimer, à leurs dépens. En effet, la garantie de rendement expose l'assureur à une baisse des taux, car le rendement de son actif peut ne pas suffire à verser le TMG. L'option de rachat l'expose comme on l'a vu à un risque de hausse des taux.

Etape 2 : changement d'allocation stratégique

Dans le but de proposer des contrats plus attractifs, et pour obtenir un rendement suffisant pour verser les taux promis, les assureurs décident de baisser la qualité de leurs actifs. Les actifs risqués offrent en effet un rendement meilleur. Fidèles aux obligations, Executive Life, entre autres, achète notamment de nombreux « junk bonds », émises par des entreprises ayant une probabilité de faire défaut importante et proposant un rendement élevé.

A la fin des années 80, Executive Life se place ainsi parmi les sociétés les plus importantes au monde, est 3^{ème} en termes de rentabilité, et est notée AAA.

Etape 3 : chute des marchés

Au tournant des années 90, les compagnies émettrices de « junk bonds » présentent un taux de faillite record. Ainsi, Executive Life essuie une perte de 1 milliard de dollars sur le seul 4^{ème} trimestre de 1989, et sa note est abaissée par les agences de notation.

Etape 4 : perte de confiance et rachats massifs

Malgré la mise en place d'un plan d'action imposé par l'Etat de Californie, la confiance des assurés est entamée et ces derniers vont racheter massivement leurs contrats. La compagnie doit alors annoncer des résultats catastrophiques pour 1990, dont une moins-value de 2,6 milliards de dollars sur ses actifs. Elle fait faillite en mai 1991.

A travers cet exemple, nous avons senti l'influence que pouvait avoir l'image de marque d'un assureur sur les rachats.

2.2) Un nouvel environnement réglementaire

Les entreprises d'assurance étaient soumises, jusqu'à présent, à des normes comptables et financières françaises ou internationales, telles le Code des Assurances ou Solvabilité I. Suite à de nombreux bouleversements économiques et à l'identification de nouveaux risques, la communauté internationale a mis en place de nouvelles normes. Nous allons présenter celles qui ont une importance toute particulière au sein des entreprises d'assurance : les normes comptables IFRS, le référentiel prudentiel Solvabilité II et la MCEV.

2.2.1) Les normes IFRS

Les International Financial Reporting Standards sont des normes comptables établies par l'International Accounting Standards Board. Elles s'appliquent depuis 2005 à toutes les sociétés cotées ou faisant appel public à l'épargne, donc à certaines sociétés d'assurance, en particulier Allianz.

Pourquoi ce besoin d'un nouveau référentiel comptable ?

Les scandales financiers du début des années 2000 (Enron par exemple) ont incité les autorités et pouvoirs publics à prendre des mesures de renforcement de la qualité de la communication financière.

La comparaison des états financiers des différentes entreprises d'un même secteur ou entre plusieurs exercices était souvent difficile, et le langage financier utilisé ne permettait pas une lecture transparente des comptes.

Etant donnée l'importance des interactions entre ces grandes entreprises, la santé de l'économie mondiale et la confiance du grand public et des investisseurs, l'Europe a décidé de lancer ce vaste mouvement qui s'est traduit par l'adoption d'un ensemble de textes dont l'objectif est l'amélioration de la sécurité financière.

L'Organisation Internationale des Commissions de Valeurs, instance regroupant les autorités des marchés financiers mondiaux, a homologué et recommandé en mai 2000 l'adoption des normes IFRS. Un mois plus tard, la Commission Européenne les rend obligatoires à partir de 2005.

Les principes

Les normes IFRS n'instaurent pas des règles, mais donnent des principes.

- Sincérité de l'information financière

La valorisation de l'actif et du passif du bilan doit être réalisée à leur juste valeur (le terme anglais « fair value » est plus pertinent), et non pas à leur coût historique. Par exemple, la fair value est définie par le montant pour lequel un actif pourrait être échangé, ou un passif éteint, entre parties informées, consentantes, et agissant en situation de concurrence normale. La substance prime sur la forme, la vision de l'investisseur doit être adoptée.

Remarquons que cela implique que les comptes établis annuellement seront dépendants des fluctuations du marché et seront donc plus volatils.

- Neutralité

Il s'agit de réduire au maximum la marge de manœuvre des entreprises pour présenter et ajuster d'une façon avantageuse leurs résultats.

- Comparabilité

L'objectif est de pouvoir comparer la performance des entreprises à partir d'un même référentiel comptable. La difficulté réside ici dans la différence d'approche entre les pays, elle est censée s'atténuer au fil du temps.

- Complétude

Il s'agit de diffuser dans les comptes l'intégralité des éléments que leurs lecteurs doivent connaître pour analyser de façon objective la performance de l'entreprise. Les postes dits de hors bilan sont supprimés, des annexes beaucoup plus exhaustives qu'auparavant devront être fournies.

On comprend que les acteurs visés ici sont surtout les analystes financiers qui doivent pouvoir prendre les bonnes décisions de recommandation de manière plus rationnelle. L'actionnariat est également concerné par ce changement.

Lien avec les rachats

Les rachats ont une influence directe sur l'actif et le passif d'une société d'assurance, et doivent donc être estimés de façon honnête pour respecter les normes IFRS. De plus, une seconde phase dans le projet IFRS4, consacré aux assurances, a été lancée et a instauré 9 nouveaux principes liés à l'évaluation des passifs d'assurance. En particulier, ils imposent que ces derniers doivent inclure le coût des options et garanties, dont font partie les rachats.

Ces normes IFRS phase 2 ont donc pour objectif de mieux prendre en compte les spécificités du secteur de l'assurance afin de garantir la solvabilité de l'assureur vis-à-vis des assurés. Allianz publie ses comptes en normes françaises et en normes IFRS.

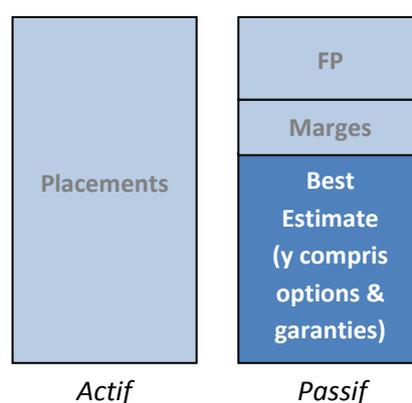


Figure 6. Bilan IFRS phase II

Le CFO Forum est un groupe de discussion créé en 2002 réunissant régulièrement les grands spécialistes et directeurs financiers des entreprises d'assurance européennes. Il poursuit l'harmonisation du reporting financier avec l'IASB, la Commission Européenne et les autres parties intéressées. L'enjeu est d'aider les entreprises à se préparer à intégrer ces processus de manière ordonnée et transparente pour elles et pour les investisseurs.

2.2.2) La réforme Solvabilité II

Contrairement aux IFRS (même si IFRS4 ne traite que des contrats d'assurance), ce volet réglementaire ne concerne que les entreprises d'assurance et de réassurance.

Pourquoi réformer la réglementation en assurance ?

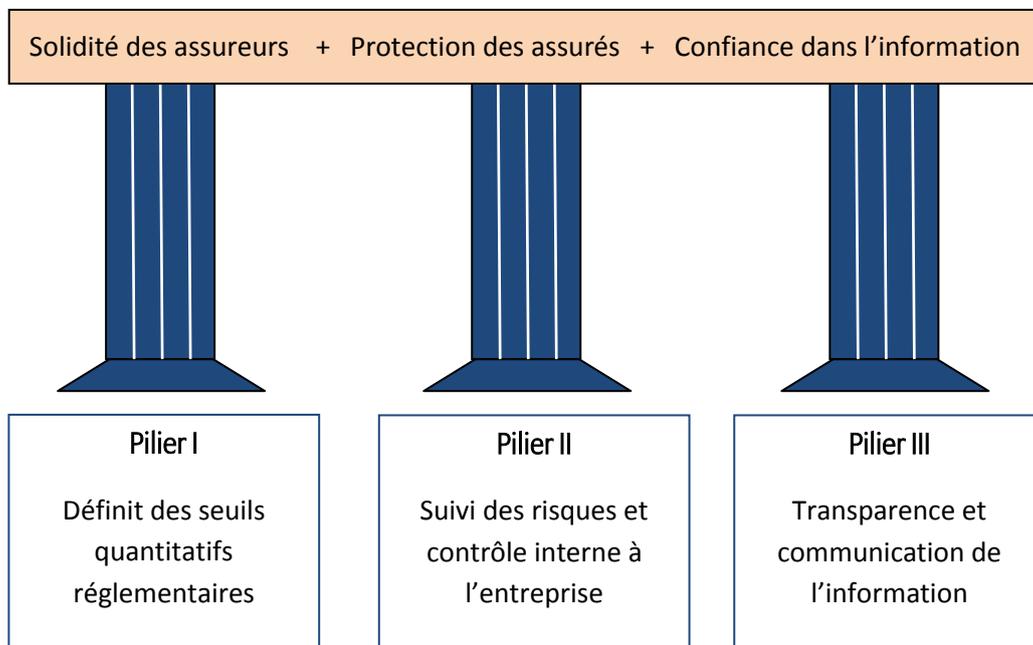
Les éléments réglementaires de Solvabilité I ont été rappelés en première partie. Des faiblesses ont été repérées dans ce cadre réglementaire, par exemple la prise en compte d'une vision uniquement rétrospective (la solvabilité future repose sur des chiffres historiques), l'absence de distinction entre les différents risques, le fait qu'il ne prenne en compte que le montant espéré des provisions, etc.

Solvabilité II, ou Solvency II, a pour objectif principal la meilleure adaptation des fonds propres exigés des compagnies d'assurance et de réassurance face aux risques auxquels elles sont exposées dans leur activité. Elle s'inspire de la réforme Bâle II qui a eu lieu dans le secteur bancaire. Initialement prévue en 2010, la mise en place ne sera probablement pas effective avant le 01/01/2013, voire 2014, du fait de la complexité du projet.

Cette réforme constitue l'opportunité de protéger la solvabilité de l'entreprise, donc de favoriser l'emploi, mais aussi et surtout de protéger les assurés.

Les principes

Son originalité repose sur sa structure en 3 piliers.



Le **pilier I** donne le choix entre formule standard et modèle interne pour le calcul des deux seuils réglementaires à respecter pour le montant des fonds propres : le SCR (Solvency Capital Requirement) et le MCR (Minimum Capital Requirement). Immobiliser du capital a un coût pour l'assureur, celui de ne pas le faire fructifier. En pratique, les plus gros assureurs devraient opter pour l'option modèle interne pour optimiser leur capital. Il doit être homologué par les autorités de contrôle (ACP en France, BAFIN en Allemagne par exemple).

En notant FP les fonds propres de l'entreprise d'assurance,

Si $FP < MCR$, l'agrément (le droit d'exercer une activité) est retiré à l'entreprise d'assurance par l'ACP, l'Autorité de Contrôle des assurances en France.

Si $MCR < FP < SCR$, des mesures de redressement sont prises par l'ACP, qui peut imposer une stratégie à l'entreprise dans une telle situation.

Si $SCR < FP$, l'entreprise peut continuer à exercer son activité.

Dans la formule standard, le SCR est le niveau de fonds propres à atteindre pour assurer la survie de l'entreprise avec une probabilité de 99,5% à horizon 1 an. Il est calculé indépendamment pour chaque risque, puis agrégé au niveau compagnie en prenant en compte les corrélations entre les risques. Par exemple, en considérant n risques, on calcule n valeurs SCR_i que l'on porte dans un vecteur X . En notant M la matrice de corrélation entre les risques, on obtient le SCR au niveau compagnie par la formule $SCR = \sqrt{{}^t X M X}$.

Les actifs sont comptabilisés en valeur de marché, par opposition à Solvabilité I où on prend en compte leur valeur comptable. Les provisions techniques sont désormais la somme d'une valeur « Best Estimate » et d'une marge de risque (surplus que demanderait un investisseur pour reprendre le passif).

Le **pilier II** fixe des normes qualitatives de suivi des risques en interne et définit la façon dont l'autorité de contrôle exerce ses pouvoirs de surveillance.

Le **pilier III** définit le détail des informations à fournir aux investisseurs, assurés et autorités.

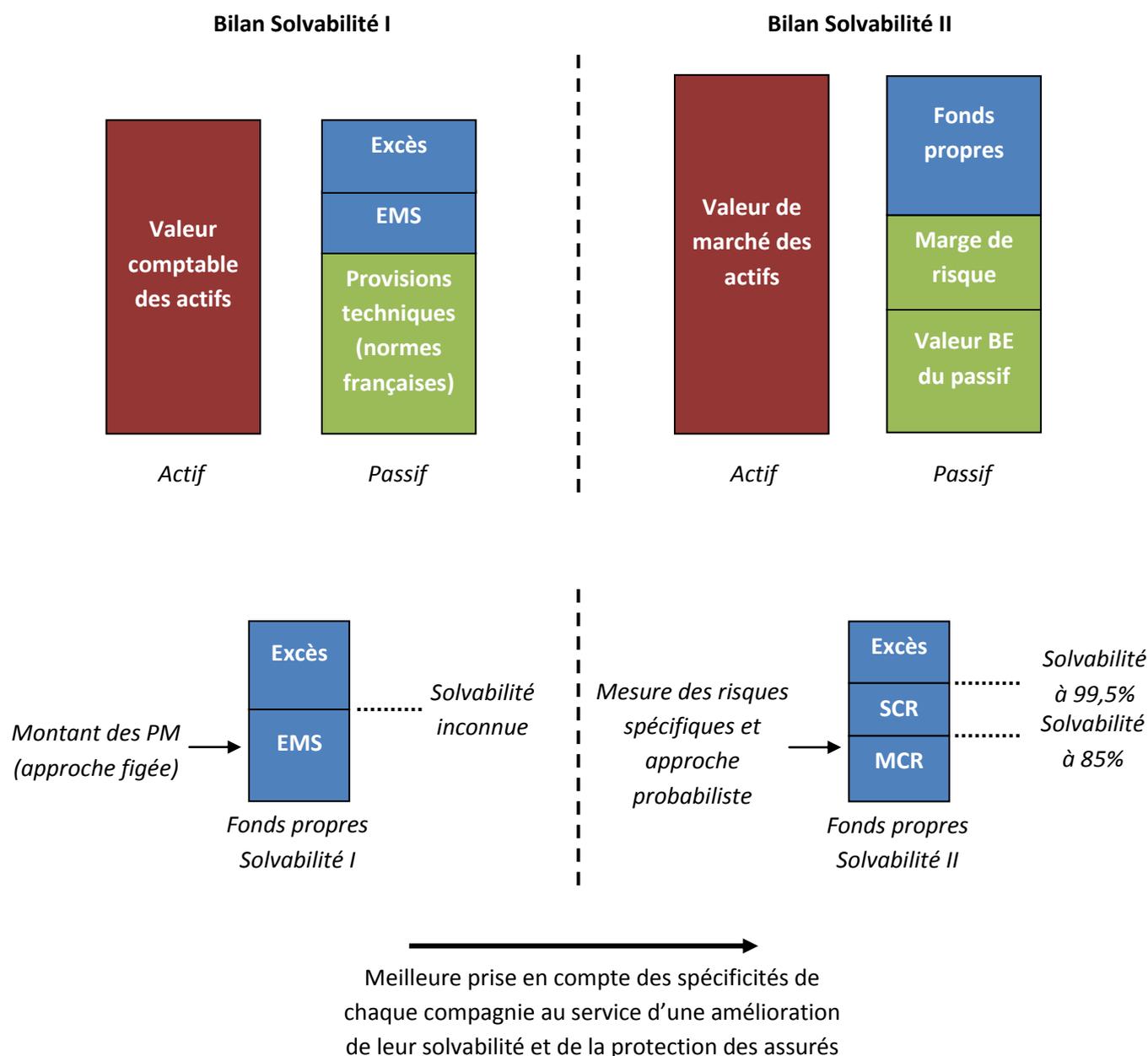


Figure 7. Evolution réglementaire Solvabilité I/Solvabilité II

Lien avec les rachats

Comme mentionné précédemment, le SCR est calculé par risque. Il est donc devenu nécessaire pour les assureurs de valoriser leurs options implicites, y compris les rachats.

Aussi, les rachats peuvent dépendre du ratio de solvabilité que présente l'assureur, défini comme le rapport $\frac{FP}{SCR}$. Dans le cas d'Allianz, il était de 173% en 2010, ce qui donne un signal sur la solidité du groupe.

2.2.3) La MCEV d'une compagnie d'assurance

2.2.3.1) Définition

Définition

La question de savoir comment évaluer une compagnie d'assurance vie est importante pour les sociétés cotées, comme pour les sociétés non cotées, car il est primordial d'évaluer sa richesse propre et de savoir si elle sera suffisante à sa survie dans des conditions défavorables. L'évaluation des portefeuilles d'assurance vie est effectuée en sommant les bénéfices ou pertes futures en fonction de la situation de l'actif et du passif. La méthode traditionnelle est l'Embedded Value.

L'Embedded Value (EV) est la valeur actuelle des revenus futurs des affaires existantes distribuables aux actionnaires sur toute la durée de vie de l'entreprise. On peut la voir comme la valeur actuelle de l'entreprise.

Cette définition nécessite donc de projeter des résultats, généralement sur quelques dizaines d'années au terme desquelles les capitaux sont libérés, et les actifs et les passifs liquidés suivant des règles de partage entre assureur (actionnaires), assurés, et l'Etat.

Le Groupe Allianz exige de la part de chacune de ses compagnies d'assurance vie qu'elle calcule et publie la valeur de son EV, dans un souci de suivi de sa performance. Allianz a choisi de publier son EV en adéquation avec les principes MCEV (Market Consistent Embedded Value, voir annexe 6) établis par le CFO Forum. Afin que toutes les entités produisent des résultats semblables et fondés sur les mêmes hypothèses, le groupe publie chaque année ses attentes en la matière ainsi que la nature des livrables à fournir par les compagnies vie. Ces consignes sont synthétisées au sein d'un même document : les **Embedded Value Guidelines**⁷.

Le groupe Allianz demande en outre une analyse de mouvement sur le calcul de l'EV, c'est-à-dire l'explication étape par étape du changement de valeur entre l'année précédente et l'année courante. Ces étapes sont dans l'ordre :

- l'Unwinding, qui consiste à capitaliser la valeur du début de l'année jusqu'à la fin de l'année en partant des données de départ.
 - les changements dus à la différence entre ce qui a été prévu et ce qui s'est réellement passé pour l'environnement économique (changements d'hypothèses, chroniques de rendement, etc.).
 - les modifications d'hypothèses et autres changements opérationnels opérés sur les affaires existantes.
 - les affaires nouvelles obtenues au cours de l'année.
 - le paiement des dividendes et les nouveaux capitaux.

⁷ Source : Embedded Value Guidelines Allianz [26].

Type de contrats pris en compte

L'EV mesure l'impact économique de la gestion des contrats à long terme sur l'année en cours. L'impact de la capacité de l'entreprise à générer de nouveaux contrats ne fait pas partie du calcul, mais l'impact des affaires obtenues pendant l'année courante est mesuré.

Dans toute la suite, on notera IF (pour In-Force) ou IF Only pour désigner le stock de portefeuilles existants en début d'année, et NB (pour New Business) les affaires nouvelles contractées au cours de l'année. On parlera d'IF+NB pour désigner l'ensemble des contrats présents à la fin de l'année (existants + nouveaux).

Le fait que la MCEV ne considère que les contrats existants ne signifie pas qu'on modélise une situation de liquidation de l'entreprise. Il s'agit d'estimer la valeur sur la base des contrats connus en s'étendant sur toute la durée de vie de ces contrats. Le portefeuille d'actif actuel et les plus-values latentes courantes représentent une valeur qui existe déjà dans l'entreprise. Ainsi, projeter l'évolution des plus-values latentes avec les contrats existants ne signifie pas « liquider » l'entreprise, mais allouer la valeur qui a déjà été créée aux contrats de l'In-Force.

Selon les principes MCEV, Allianz doit publier son EV nette de réassurance cédée.

Allianz stipule que l'EV peut être calculée soit contrat par contrat, soit par groupe de contrats (model-points), et concède que cette dernière approche est nécessaire lorsque le nombre de contrats ou de types de contrat est très élevé, ou lorsque des projections stochastiques sont utilisées pour le coût des options et garanties. Les critères de regroupement sont les caractéristiques des produits : on regroupera des produits ayant des TMG identiques, des stratégies commerciales identiques, etc.

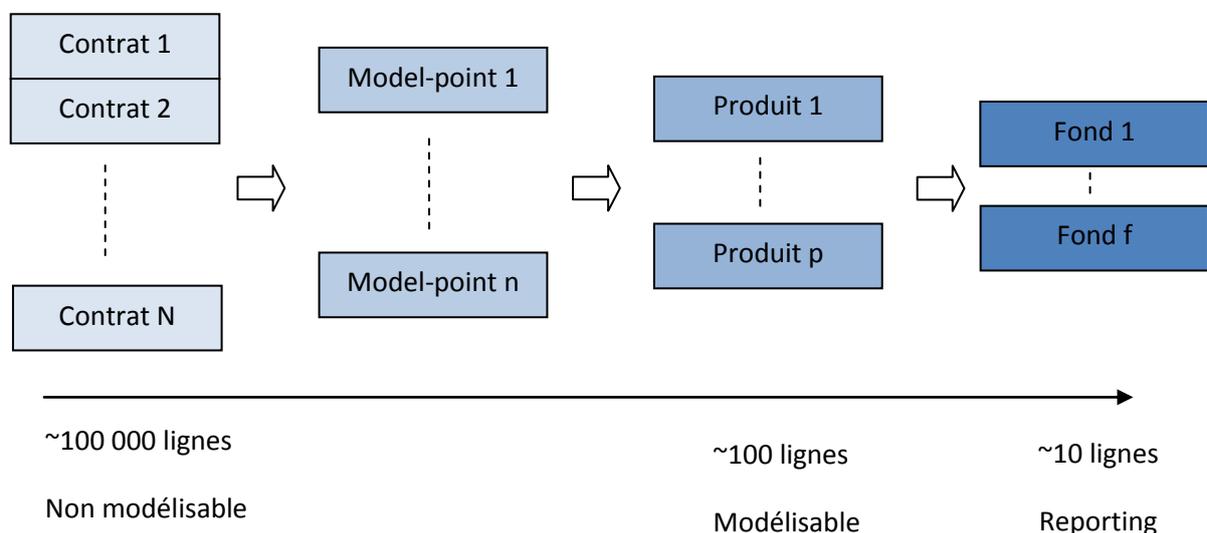


Figure 8. Regroupement de produits par model-points

Remarque : Il existe d'autres manières de calculer de façon interne la performance d'une entreprise. On peut notamment penser à l'Economic Value Added (EVA), qui est une méthodologie permettant d'explicitier la marge annuelle (ou valeur ajoutée) qui reste dans l'entreprise après rémunération des capitaux investis (tiers et fonds propres). En notant C les

capitaux investis, P le profit net d'impôts, et c le coût moyen des capitaux investis, l'EVA d'une année particulière est définie par :

$$EVA = P - c C$$

Comme sa définition l'indique, l'EVA se fonde sur une évaluation périodique, et se prête davantage à une analyse de court-terme. Pour l'assurance vie, le concept d'EV est mieux adapté à la nature long terme de son activité.

D'autres méthodes existent : les méthodes directes d'évaluation fondent l'estimation de la valeur économique sur l'utilisation de grandeurs de marché, telles les prix de vente d'entreprises, la valeur des actions des entreprises cotées, etc.

2.2.3.2) Calcul

L'EV d'une compagnie d'assurance est la somme des éléments suivants.

Net Asset Value (NAV) : Valeur de marché (MV) des actifs non adossés à des produits du passif =

EV required capital (ReC) venant de la réglementation

+ capitaux libres (supplémentaires) ou Free Surplus (FS) ou Excess Capital (XS).

- Value of the in-force (ViF) portfolio des contrats vie =
 - valeur actuelle des profits futurs après taxes (PVFP) sur l'IF
 - – coût des options et garanties (O&G)
 - – coût des risques non couvrables (CNHR ou CRNHR pour non-hedgeable risk)
 - – coût du required capital (CReC) ou frictional cost sur l'IF.

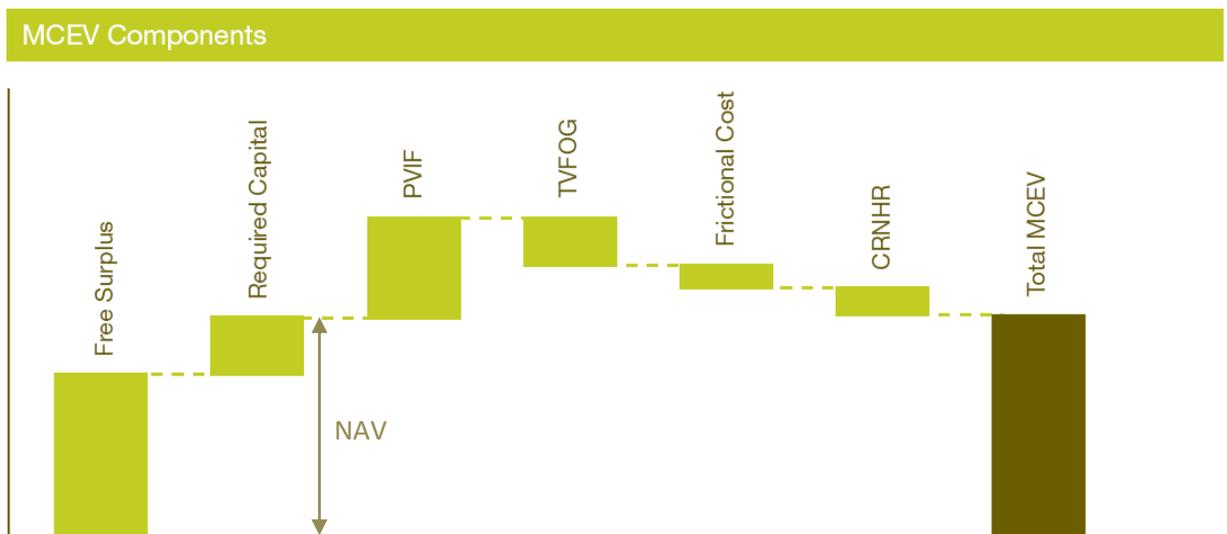


Figure 9. Eléments constitutifs de la MCEV

Précisons chacun des termes de cette équation.

NAV

La Net Asset Value est la valeur de marché (après taxes) des actifs de la compagnie d'assurance qui ne sont pas adossés à des produits du passif et revenant aux actionnaires. En pratique, on commence par déterminer les actifs adossés aux provisions techniques. Les actifs restants constituent la net asset value et peuvent être considérés comme les actifs appartenant aux actionnaires. Pour calculer le montant de la taxe à appliquer sur les actifs de la NAV, on suppose que les plus-values (UCG) sont réalisées à la date de calcul, on utilise donc le taux de taxe à cette date. De plus, si une des compagnies vie du groupe possède des parts dans une autre compagnie vie du groupe les actifs correspondants ne doivent pas être pris en compte pour ne pas avoir de double compte.

ReC

Comme on l'a vu, toute compagnie d'assurance vie est tenue de conserver assez de capital pour répondre aux réglementations sur la solvabilité. Ce capital est requis pour assurer que l'entreprise pourra résister aux conditions de marché, vu du contexte actuel de l'économie et en tenant compte du profil de risque de l'entreprise. Chez Allianz, le ReC est le maximum entre ce minimum réglementaire et un calcul interne, ce qui assure encore plus de solidité, pour tenir compte des critères et des exigences des agences de notation.

Le Free Surplus ou Excess Capital est alors défini comme la différence entre la NAV et le ReC.

CReC

Pouvoir disposer en permanence du required capital de côté a un coût, celui de ne pas l'investir comme le reste des actifs (coût d'immobilisation). Dans le cadre MCEV, il est défini par

$$CReC(t) = \sum_{t=1}^T (\text{tax}_t * \text{fwr}_{t-1} * \text{ReC}_t + (1 - \text{tax}_t) * \text{inv exp}_t) * \prod_{i=0}^{t-1} \frac{1}{1 + \text{fwr}_i}$$

Où fwr_{t-1} = taux forward* à 1 an à la date t,

ReC_t = required capital qui doit être conservé (immobilisé) à la date t,

inv exp_t = frais d'investissement sur les actifs correspondants au required capital.

CNHR

Les principes MCEV imposent le calcul du coût des risques non financiers et des risques financiers non couvrables par quelconque produit de marché (risques d'assurance, risques opérationnels, etc.). La mesure la plus répandue est le coût d'immobilisation du capital nécessaire pour couvrir ces risques. Ces risques doivent être supportés par l'entreprise elle-même, et couverts par le capital, ou du moins transférés à un autre assureur ou réassureur. C'est le cas pour les marchés qui ne sont pas suffisamment liquides ou volumineux.

PVFP

Il s'agit de la valeur aujourd'hui des profits générés dans le futur et actualisés (Present Value of Future Profits), évaluée selon un scénario déterministe central « best estimate » (ni trop prudent, ni trop peu). Un système de projection actuariel est nécessaire pour projeter période par période les revenus, les provisions, etc., pour chaque

regroupement de produit. Il doit déterminer les cash-flows des variables suivantes à partir des hypothèses de départ.

1. Primes
2. Retour d'investissement sur les provisions techniques et cash-flows
3. Frais
4. Commissions
5. Sinistres décès
6. Rachats
7. Paiements des contrats arrivant à maturité
8. Augmentation des provisions techniques
9. Taxes
10. Profits = 1 + 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9

Pour déterminer la PVFP, les profits sont actualisés et sommés. Dans le cadre MCEV, le taux d'actualisation est dépendant du temps : $DF(t) = \prod_{i=0}^{t-1} \frac{1}{1+fwr_i}$ où fwr_i est le taux forward à 1 an à la date i dans le scénario sans risque.

VIF

La valeur du stock (contrats existants) est égale à la PVFP diminuée du coût du Required Capital, du coût des O&G, et des autres coûts CNHR.

En résumé, la VIF contient donc les flux industriels (liés à l'activité des contrats) et les flux provenant de l'attribution de capitaux au portefeuille (par exemple pour des raisons de solvabilité), et des prélèvements de capitaux du même portefeuille (par exemple pour le versement de dividendes ou l'attribution d'autres portefeuilles). Le portefeuille global de l'entreprise a été supposé fermé à l'arrivée de nouveaux souscripteurs (pas de New Business).

Si l'on ajoute la valeur de la production future, on obtient l'Appraisal Value. Cette valeur exprime la capacité de l'entreprise à produire en conditions ordinaires, c'est-à-dire en faisant abstraction des opérations telles que les acquisitions d'entreprises, des fusions, etc.

2.2.3.3) Hypothèses et remarques

Hypothèses non-économiques

La valeur des profits futurs calculée dans le cadre MCEV va dépendre de l'expérience future de l'entreprise. Etant donné qu'il est impossible de la prévoir avec précision, l'approche usuelle consiste à déterminer les hypothèses « Best Estimate » (meilleure estimation), qui en principe donnent autant de chances d'avoir des résultats supérieurs que des résultats inférieurs. Ces hypothèses doivent se fonder sur l'expérience passée, actuelle, et attendue de l'entreprise.

Les hypothèses démographiques reposent sur des tables de mortalité. Le mieux est de disposer de données personnalisées à partir de l'expérience de la compagnie. Dans le cas où ces données sont insuffisantes, des tables existantes pourront être utilisées, en procédant éventuellement à quelques retraitements (caractère obsolète de la table,

différence entre l'échantillon et la clientèle de l'entreprise, tendances à mettre à jour, etc.). Des tables sont fournies par l'INSEE. De même, les taux de rachats doivent reposer sur des données propres à l'entreprise, et être réévalués chaque année. Chaque entreprise du groupe doit développer ses propres hypothèses sur les frais encourus dans le calcul de l'EV, de même pour les commissions. Allianz conseille par exemple à ses entités de modéliser leurs différents coûts de la manière synthétisée dans le tableau suivant. Les coûts et commissions doivent être réconciliés avec les données comptables.

Type de coût	Modélisation
Acquisition des nouveaux contrats	% des primes + montant fixe par contrat
Maintenance	Montant fixe par contrat ou % des primes
Sinistres	Montant fixe par sinistre ou % des sommes assurées
Investissement	% des provisions techniques

Hypothèses économiques

Pour projeter les profits futurs dans le calcul de l'EV, des hypothèses doivent être émises sur la performance de l'actif de l'entreprise. Ceci nécessite la considération simultanée du développement économique global et de la politique d'investissement de l'entreprise. Dans les projections « Real World » (monde réel), les hypothèses viennent essentiellement des valeurs observées sur les marchés. Elles sont fournies par le siège (taux sans risque, taux de défauts des entreprises par rating, rendement des actions, de l'immobilier, etc.). Dans les projections « Market Consistent », des scénarios spécifiques sont fournis par le siège. Ces derniers sont fondés sur les taux swap observés sur les marchés. Si ce marché n'est pas suffisamment liquide ou volumineux, le taux sans risque peut reposer sur les valeurs des taux d'emprunt d'Etat (obligations d'Etat). Les actifs de taux où le spread au-delà du taux sans risque est inclus dans les coupons doivent pouvoir faire défaut au cours de la projection. La probabilité de défaut entre deux périodes t et $t + \Delta t$ est donnée par

$$\text{def_perc}(t, C_s) = 1 - e^{-C_s \Delta t}$$

où C_s est le spread calibré de telle manière à ce que la valeur actualisée des coupons payés (au taux sans risque à la date $t=0$) soit égale à la valeur de marché actuelle de l'actif.

Les obligations et autres actifs de taux fixes sont projetés en respectant leurs rendements contractuels et une probabilité de défaut. Les actions et l'immobilier sont projetés en appliquant les rendements donnés dans les scénarios utilisés. Lorsque des plus-values latentes sont réalisées au cours de la projection, elles augmentent le revenu de l'année où elles sont réalisées.

Selon les Embedded Value Guidelines d'Allianz, le taux d'actualisation utilisé dans les projections Market Consistent repose sur les valeurs de taux du scénario considéré, et suit la formule suivante.

$$DF(t) = \prod_{i=0}^{t-1} \frac{1}{1 + r_i}$$

Où r_i est le taux 1 an à la date t disponible dans le scénario utilisé.

Politique de participation aux bénéfices

Le partage des bénéfices est une particularité importante de l'activité d'assurance vie. Elle est régie à la fois par des contraintes contractuelles et réglementaires (Code des Assurances) et par la politique managériale de l'entreprise. En effet, la distribution des profits entre l'assuré et l'assureur est régulée et il existe un montant maximum allouable à l'assureur (voir dans la partie I la section réglementation et comptabilité), qui se traduit par des restrictions sur le taux de participation aux bénéfices de l'assureur. De plus, la PPE est utilisable pour « stocker » un excédent de profits qui n'a été distribuée ni aux assurés ni à l'assureur.

Cette politique de distribution des profits et de gestion des provisions constitue la « **crediting strategy** ». Ce terme est crucial et stratégique dans la modélisation de la société d'assurance vie, nous y reviendrons dans la description du modèle actif-passif en partie III. Le choix du taux de partage a un impact très important sur la valeur de la PVFP. Si l'écart entre la valeur actuelle et la valeur maximum du taux distribué à l'assureur est important et s'il n'est pas prévu de le réduire dans le futur, utiliser le taux maximum ne serait pas cohérent avec les contraintes best estimate. Cependant, si les dirigeants prévoient d'augmenter la part reversée à l'assureur (c'est-à-dire aux actionnaires), un taux plus élevé peut être utilisé en anticipation de la stratégie future de l'entreprise.

Dans le cas où les UCG (plus-values latentes) et la PPE sont très importantes, la crediting strategy peut inclure la distribution des revenus de ces réserves aux assurés au cours de la projection. Dans les scénarios où ces dernières ne sont pas utilisées pour payer des taux de bonus compétitifs, ces réserves doivent être partagées entre assurés et assureur.

Conclusion sur l'EV

Une enquête réalisée auprès de consultants en actuariat a identifié plusieurs avantages à la considération de l'EV :

- Permet au management de prendre de meilleures décisions grâce à une mesure qui prend en compte toutes les activités
- Mesure l'effet d'un changement d'hypothèses ou d'un plan d'action
- Donne une vision long-terme, en cohérence avec la nature de l'activité
- Met en valeur où la valeur se crée et où elle se détruit
- Constitue un outil efficace pour les décisions d'allocation de capital

Jusqu'en 2005, le calcul de l'EV n'incorporait pas la présence des Options & Garanties. Pourtant, l'importance croissante que revêtent les problèmes de calcul de profils de risque et de leur gestion impose de prendre en compte dans les modèles la nature authentique de l'activité d'assurance, son aléa. Les Options & Garanties ne sont effectivement pas forcément visibles dans un scénario particulier. En effet, de nombreux produits d'assurance comportent des garanties minimales, telles que la garantie de taux des produits traditionnels ou la garantie de prestation minimale (en cas de décès et/ou à l'échéance) que prévoient parfois les assurances en unités de compte. Si l'évaluation s'effectue selon une approche déterministe, et si l'on s'attend en particulier à un rendement des investissements supérieur au taux garanti, la garantie ne sera alors pas activée, l'option de rachat non plus (le client est satisfait de son investissement), et leur évaluation est

impossible par l'assureur. Considérer différents niveaux alternatifs pris par le rendement permet de calculer le coût d'activation de l'option et de la garantie. Il est nécessaire d'introduire une approche stochastique. Nous allons donc nous concentrer maintenant sur le calcul du coût des options et garanties.

2.2.3.4) *Les options et garanties*

Présentation générale

Les principes MCEV imposent l'évaluation des options et garanties : selon le principe 7 du CFO Forum, on doit prendre en compte l'impact potentiel sur les futurs cash-flows de **toutes les options et garanties financières** du portefeuille.

Un des concepts clés définis par le cadre MCEV est le fait que les options et garanties ont une **valeur intrinsèque**, reflétée dans le calcul de l'EV si l'option est « dans la monnaie », c'est-à-dire lorsque l'option est exercée automatiquement (par exemple le taux minimum garanti), et une **valeur temps** qui doit être évaluée dans un contexte stochastique.

Identification des options et garanties financières

On peut citer

- Le taux minimum garanti et les montants versés à maturité
- Le montant garanti au décès pour un support en UC
- Le minimum versé au **rachat**

Valeur intrinsèque et valeur temps

Les options et garanties financières présentes dans un portefeuille d'assurance vie peuvent, selon le montant des provisions, réduire les profits lorsque le rendement du portefeuille tombe en-deçà du taux minimum garanti ou lorsque les conditions économiques sont défavorables. Comme on l'a vu, calculer la valeur des profits futurs par une approche déterministe ne permet pas de capturer tout l'effet de ces options et garanties, leur coût n'étant déterminable que par des techniques stochastiques. De ce point de vue, comme précisé dans le cadre MCEV, il faut distinguer la valeur intrinsèque et la valeur temps des O&G.

- Valeur intrinsèque

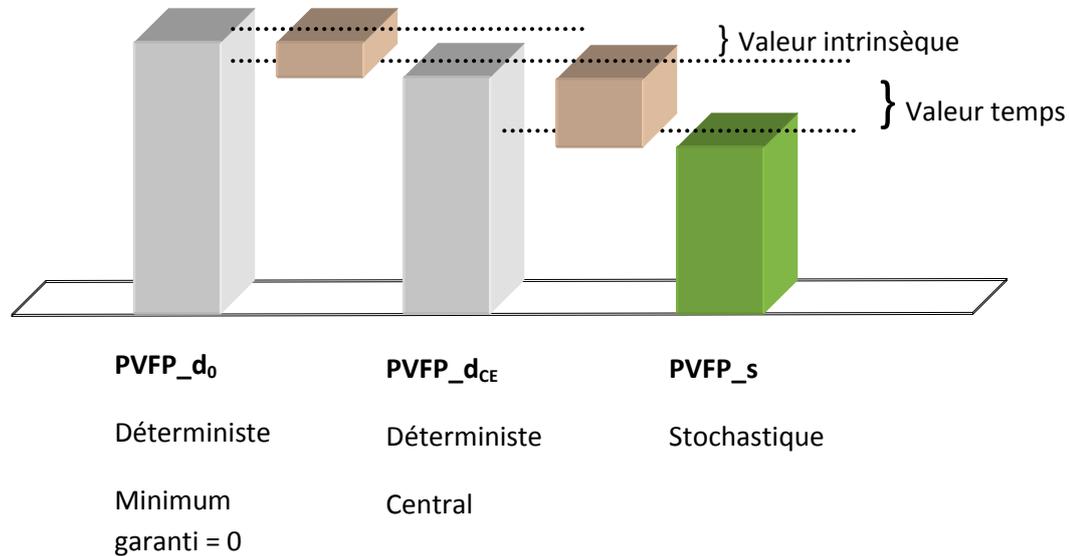
La valeur intrinsèque est l'effet de réduction des profits (due aux O&G) déjà incorporée dans le calcul de la PVFP dans le **scénario central** (déterministe). Le scénario central correspond au scénario best estimate (meilleure estimation des futures conditions de marché vues d'aujourd'hui) pour les projections real-world, et au scénario **risque neutre pour le cadre MCEV**.

La valeur intrinsèque se mesure en faisant la différence entre la PVFP déterministe en débranchant les taux minimum garantis et la PVFP déterministe dans le scénario Central.

- Valeur temps

La valeur temps des O&G est la valeur des O&G qui ne sont pas prises en compte dans la PVFP en scénario central déterministe. Il faut un outil stochastique pour l'évaluer.

La valeur totale des O&G s'écrit comme la somme des 2 valeurs précédentes.



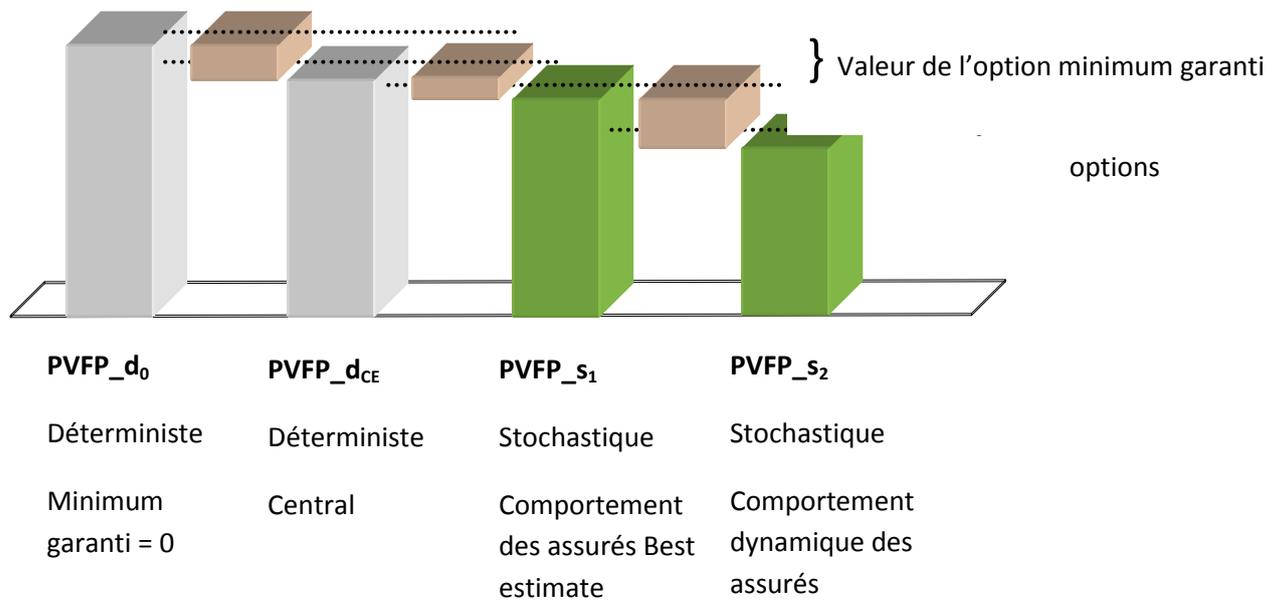
Techniques stochastiques pour l'évaluation des O&G

Les outils stochastiques utilisés doivent être en adéquation avec les autres postes de l'EV (mêmes hypothèses). La génération de profits en assurance vie dépendant fortement de l'interaction dynamique entre les marchés financiers, les décisions managériales, le comportement des assurés et les contraintes réglementaires, la détermination de la valeur des O&G nécessite la projection de tous les cash-flows (y compris les frais, les commissions, les réserves, etc.) dans de nombreux scénarios économiques. **La valeur temps des O&G peut être calculée en effectuant la différence entre la PVFP déterministe en scénario Central et la PVFP stochastique.**

Décomposition des O&G pour les produits traditionnels d'assurance vie

Comme on l'a vu plus haut, il existe des relations dynamiques entre les marchés financiers, les décisions managériales et le comportement des assurés. En conséquence, le taux minimum garanti, l'option de rachat et les autres options dépendent l'un de l'autre, et la décomposition des O&G va changer suivant l'ordre dans lequel on évalue les différentes catégories d'options. Le schéma suivant montre comment la valeur totale des O&G est déterminée en ajoutant étape par étape des catégories d'options :

- Premièrement, la PVFP sans aucune O&G est évaluée
- Deuxièmement, en introduisant les TMG, la PVFP est réduite de la valeur intrinsèque des O&G
- Troisièmement, en ajoutant la volatilité des scénarios stochastiques, on obtient la valeur temps des taux garantis
- Enfin, on introduit le comportement des assurés afin d'évaluer le coût des autres O&G, comme les rachats dynamiques.



La première garantie à évaluer est le TMG. Minimum Guarantee = $PVFP_{d_0} - PVFP_{s_1}$, avec

- $PVFP_{d_0}$ le résultat de la PVFP déterministe calculée sans minimum garanti
- $PVFP_{s_1}$ le résultat de la PVFP utilisant une simulation stochastique des marchés financiers et une évaluation best estimate du comportement des assurés

La garantie TMG a une valeur intrinsèque et une valeur temps.

- Valeur intrinsèque = $PVFP_{d_0} - PVFP_{d_{CE}}$
- Valeur temps = $PVFP_{d_{CE}} - PVFP_{s_1}$

Avec $PVFP_{d_{CE}}$ la PVFP calculée dans le scénario central.

Afin de connaître la contribution de chaque option individuellement dans le coût total des O&G, il est nécessaire de procéder à une décomposition. Le TMG étant toujours pris en compte, une méthode est le calcul d'une option en « standalone », dans laquelle on considère cette option seule avec le TMG. Notons qu'il y a dépendance entre options, certaines ne pouvant être exercées que si d'autres ne l'ont pas été, par exemple. Le coût total des O&G est donc inférieur à la somme des valeurs « standalone » des options.

Conditions de non matérialité

Des O&G présentant une valeur très faible (dans un sens à préciser...) peuvent être omises du calcul total, car elles sont considérées comme mineures et ayant un faible impact. Ces O&G sont dites non matérielles. En pratique, les Guidelines Allianz autorisent l'absence de modélisation et de calcul lorsque les 2 conditions suivantes sont remplies :

- Le coût des O&G est inférieur à 10 millions d'euro
- Le coût total des O&G non prises en compte est inférieur à 1% de l'EV.

Méthode de calcul

Pour calculer le coût des O&G, dont font partie les rachats, le groupe dispose d'un outil spécialisé. **ALIM** (Asset and Liability Interaction Model) est un outil de simulation stochastique. Lorsqu'un outil stochastique est utilisé pour la projection de la PVFP (comme ALIM), la valeur temps des O&G est obtenue en faisant la différence entre la PVFP déterministe et la PVFP stochastique, la première étant obtenue en utilisant le scénario Central dans l'outil stochastique.

- Scénario Central

Dans le cadre MCEV, le scénario Central (utilisé dans le calcul déterministe) est construit à partir d'hypothèses économiques risque neutre. Ce scénario Central est aussi appelé scénario certainty equivalent. Il est utilisé pour le calcul déterministe de la PVFP (première partie du calcul des O&G). Il a pour but de fournir un scénario unique qui présente principalement les mêmes propriétés que les scénarios stochastiques risque-neutre : les cash-flows actualisés déterministes donnent la valeur de marché observée aujourd'hui, tous les actifs évoluent au taux risque-neutre, il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage dans le scénario.

Considérons un cash-flow déterministe de 1 au temps T. Comme cela représente aujourd'hui un zéro-coupon de maturité T, avec une valeur de marché $P(0,T)$, le taux d'actualisation pour la période T doit être égal à $P(0,T)$. La courbe actuelle des zéro-coupons est utilisée pour actualiser les cash-flows futurs. L'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage implique que la valeur de marché $P(t,T)$ au temps t d'un zéro-coupon de maturité T doit être égal au prix forward correspondant, ce qui se traduit par l'équation

$$P(0,t) \times P(t,T) = P(0,T)$$

Si cette équation n'était pas vérifiée, il serait possible au temps t de réaliser un arbitrage. De manière similaire, le taux sans risque entre le temps s et le temps t est exactement déterminé par le prix du zéro-coupon correspondant $P(s,t)$.

- Comportement de l'assureur et des assurés

La prise en compte de la stratégie de l'assureur est nécessaire : rééquilibrage de la répartition du portefeuille d'actifs par achat/vente de titres, taux servis aux assurés fonction des conditions de marché, etc. Ces actions ont un impact important sur la valeur du coût des O&G.

De même, le comportement des assurés doit être modélisé, les montants de rachats et des options de conversion ou d'extension de leurs contrats devant dépendre de l'évolution des marchés financiers (il y aura par exemple beaucoup de rachats si les taux servis par l'assureur sont très inférieurs aux offres du marché à l'extérieur).

Les rachats font ainsi l'objet d'une attention toute particulière chez les assureurs dans le contexte actuel. Nous allons expliquer dans la section suivante la valeur ajoutée que peut avoir une étude axée sur les rachats dynamiques aujourd'hui.

2.3) Etablissement de la problématique

En plus de ce nouvel environnement réglementaire étudié à la section précédente, plusieurs éléments de contexte expliquent la nécessité de se pencher sur les rachats.

2.3.1) Un contexte économique particulier

Il est incontestable que le niveau des taux d'intérêt est historiquement bas, suite à la politique des différentes banques centrales pour la relance de l'économie. Le graphique ci-dessous donne cet historique en Europe sur les dernières années.

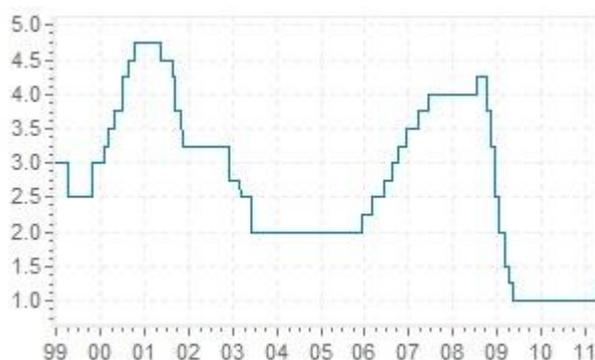


Figure 10. Taux d'intérêt européen. Source : BCE

Dans ce contexte, les assureurs devraient anticiper une prochaine hausse des taux, et donc s'attendre à de nouvelles vagues de rachats dynamiques. La mise à jour de ces lois de rachat pourra permettre de mieux jauger la teneur de ce risque futur et d'adopter les mesures adéquates pour s'en couvrir.

2.3.2) Une modélisation à mettre à jour

La modélisation des rachats est traditionnellement séparée en deux types de comportement : les rachats dits **structurels**, et les rachats dits **conjuncturels**.

Les premiers correspondent aux rachats que l'on observe de manière récurrente et permanente sur le portefeuille, certains clients ayant toujours besoin de retirer leur argent en urgence ou pour des raisons personnelles. Ces rachats peuvent être modélisés avec des facteurs techniques, tels l'âge, l'échéance fiscale, le réseau de distribution, etc., et font l'objet d'études plutôt statistiques.

Les seconds sont liés quant à eux aux opportunités courantes des marchés financiers, notamment concernant les taux comme on l'a vu plus haut. C'est cette modélisation qui permet de prendre en compte les rachats dynamiques. Ils sont beaucoup plus difficiles à modéliser en raison du comportement irrationnel des assurés.

A ce titre, le comportement dynamique des assurés est un point central dans les rachats et **est l'un des risques majeurs du marché de l'assurance vie français**.

Des enjeux stratégiques

Suite à la récente crise, la surveillance du portefeuille s'est accrue, dans un contexte financier perturbé. Les rachats font ainsi partie des risques les plus contrôlés. De plus, la formalisation des rachats et leur justification s'opère dans le cadre d'une homologation du modèle interne des compagnies auprès de l'ACP.

De plus, Allianz a investi dans des options de type strikeless cap* afin de se couvrir contre le risque de rachat en cas d'une hausse significative et prolongée des taux d'intérêt. Le principe est le suivant : en cas d'une forte hausse des taux, les caps vont verser à l'assureur un revenu supplémentaire qui sera utilisé pour

- Compenser un taux distribué aux assurés bas par rapport au marché
- Eviter ainsi une forte augmentation du taux de rachats
- Eviter également des pertes sur le portefeuille d'obligations

La particularité des caps strikeless est d'avoir un strike X non fixe. Il s'exprime par la moyenne mobile des l taux CMS (swap) passés (majorée éventuellement d'un spread s).

$$X(t) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l CMS(t-i) + s$$

L'échéance de ces contrats strikeless est prévue pour mi-2011, et la couverture ne sera alors plus effective. Une étude sur le sujet des rachats dynamiques est l'opportunité d'en affiner notre compréhension et donc de minimiser le coût de cette stratégie de couverture.

Le périmètre concerné par ces rachats dynamiques est très étendu : 63% des réserves y sont exposées. Le risque de rachat sur le portefeuille général est d'autant plus problématique que la durée de l'actif s'allonge, que le nombre de produits sensibles à ce risque augmente et que les taux de rendement sont relativement bas sur les quelques dernières années. Ainsi, le comportement des assurés est clé, mais reste inconnu.

CONCLUSION

Au cours de ce deuxième chapitre, nous avons présenté les principales caractéristiques de l'option de rachat et les risques associés pour l'assureur. Le cadre réglementaire et la situation économique font des rachats dynamiques un sujet d'actualité, notamment pour le groupe Allianz. L'objectif est donc d'analyser ce comportement des assurés et de proposer une modélisation mise à jour afin de mieux prévoir et mesurer les rachats par les assurés, et donc d'assurer une plus grande stabilité du groupe.

PARTIE III : Mise à jour du paramétrage des rachats dynamiques

INTRODUCTION

Pour calculer le coût des options et garanties de son portefeuille, dont l'option de rachat, Allianz dispose d'un outil stochastique interne spécifique : ALIM, que nous allons présenter dans un premier temps. Nous exposerons ensuite la méthodologie utilisée pour mettre à jour les paramètres relatifs aux rachats dynamiques. Enfin, nous détaillerons les résultats et mesures d'impact obtenus en pratique sur le coût des options et garanties.

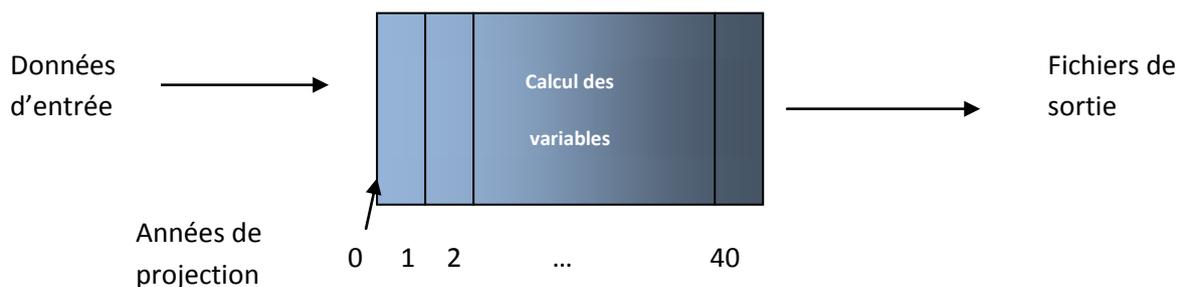
3.1) ALIM

3.1.1) Aperçu global

ALIM (Asset and Liability Interaction Model) est un modèle stochastique utilisé pour reproduire le fonctionnement et simuler l'évolution d'une compagnie d'assurance. Il prend en compte toutes les spécificités propres au métier (primes, provisions mathématiques, PRE, PPE, RDC, interactions actif-passif, rachats, comportement des assurés, etc.). Il repose sur un des principaux outils disponibles sur le marché, MoSes, qui est une plateforme de modélisation permettant aux utilisateurs de développer et de lancer des projections financières. Les modèles financiers y sont implémentés en C++. MoSes permet aussi de personnaliser les modèles afin de s'adapter à l'entreprise utilisatrice et au marché considéré, où la réglementation peut être spécifique et doit être modélisée de façon adéquate.

Allianz France dispose ainsi d'un logiciel permettant de lancer des simulations financières pour sa branche assurance vie, où sont modélisées toutes les spécificités du marché et de la réglementation française, ainsi que les particularités internes à l'entreprise (spécificités du portefeuille de contrats, de la stratégie appliquée en matière de participation aux bénéfices par exemple, etc.).

De manière très schématique, l'utilisateur prépare en amont des fichiers « d'input », qui contiennent toutes les hypothèses d'entrée qui seront utilisées lors de la projection. ALIM récupère et effectue un retraitement sur ces données, puis lance la projection du portefeuille sur 40 ans, le pas de temps étant d'1 année. Le cycle de vie des contrats et les résultats de l'entreprise y sont détaillés. En sortie, ALIM crée des fichiers « d'output », qui donnent la valeur de toutes les variables calculées au cours de la projection, et pouvant servir au reporting.



ALIM prend en compte les interactions entre les contrats (par exemple la déclaration des bonus), et aussi celles entre l'actif et la passif.

Lancement d'une simulation

Une simulation correspond à un scénario financier particulier. ALIM permet de lancer les projections soit en déterministe, c'est-à-dire en utilisant un seul scénario financier, soit

en stochastique, en utilisant un grand nombre de scénarios financiers. Dans ce dernier cas, toutes les simulations sont lancées les unes à la suite des autres.

Dans une simulation donnée (c'est-à-dire dans un scénario financier donné), à chaque pas de temps (1 an), quatre étapes et trois blocs de calcul peuvent être distingués.

(br) Before rebalancing

Les prix des actifs sont mis à jour en fonction des données du scénario financier à la date courante. Les cash-flows générés (par les coupons des obligations par exemple) sont rajoutés au montant de cash. Les valeurs comptables sont ajournées.

(ar) After rebalancing

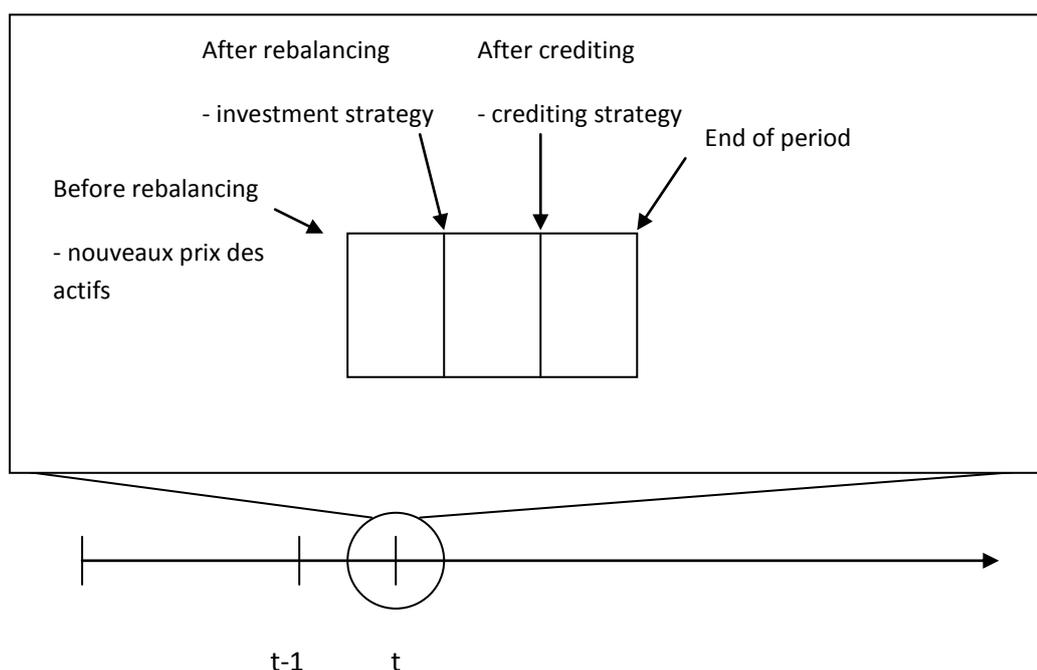
Le « rebalancing » est l'effet de l'« **investment strategy** », qui est la politique d'investissement de la compagnie en matière d'achats d'actifs et de composition du portefeuille d'actifs. Le rebalancing consiste à acheter ou à vendre certains types d'actifs pour respecter cette stratégie prédéfinie. L'effet sur la valeur comptable et sur la valeur de marché est déterminé dans cette étape.

(as) After crediting strategy

La « crediting strategy » est la politique de répartition des profits entre assurés et assureur. Des plus/moins values latentes peuvent être réalisées en vendant des actifs, les montants de certaines réserves y sont ajustés (la PPE peut par exemple être reprise ou dotée), etc.

(as) End of period

A la fin de l'année, la clôture de l'exercice est simulée en calculant les résultats de l'entreprise.



Structure du modèle

ALIM est composé de sous-modèles renfermant chacun les données relatives à une certaine partie de la compagnie d'assurance. Chaque sous-modèle contient des variables, des formules, et des fonctions effectuant des tâches élémentaires de calcul ou d'enregistrement de données. Les sous-modèles ont la structure suivante.

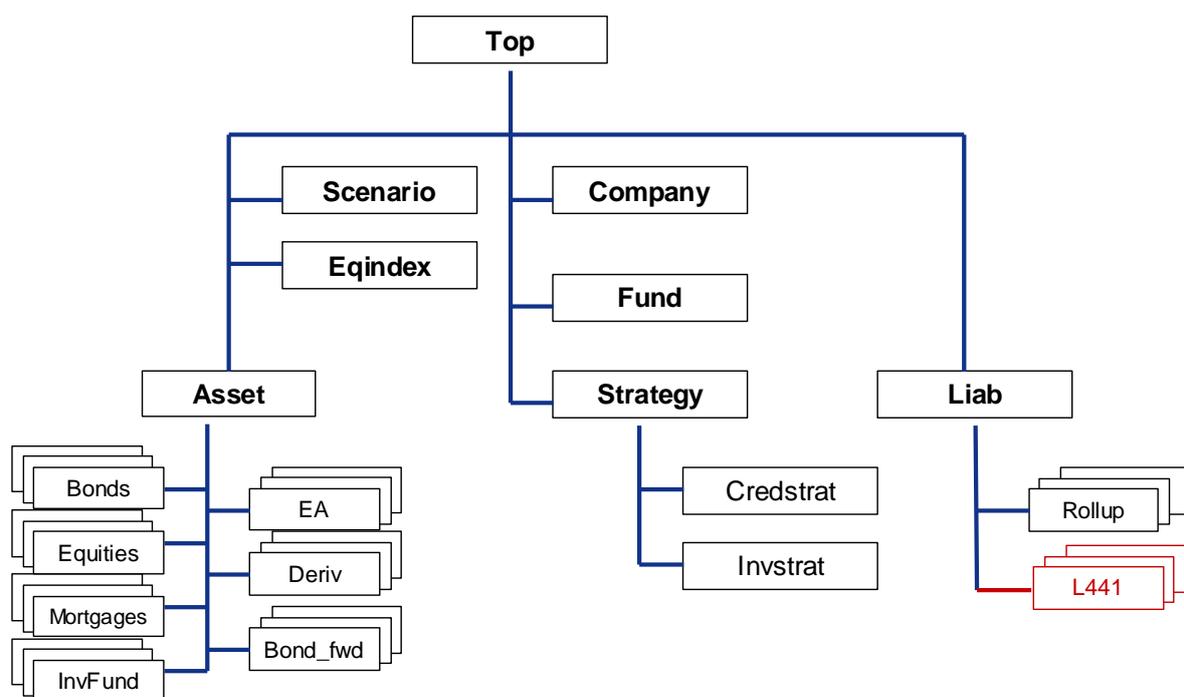


Figure 11. Structure du modèle ALIM

Le sous-modèle Top pilote les calculs au plus haut niveau (il lance les grandes étapes de la simulation, récupère les chemins des données d'input, donne les informations générales sur la projection, et force le reporting).

Modèles parents : le modèle Strategy coordonne l'investissement strategy (rebalancing), la crediting strategy, qui sont effectuées dans les deux sous-modèles correspondants, et la réalisation de plus/moins values latentes. Le modèle Asset renvoie les informations sur les actifs en portefeuille, récupérées dans les sous-modèles Bond, Equity, Deriv, etc., correspondant aux différentes classes d'actifs (valeur de marché à différents niveaux, réinvestissement, etc.). Le modèle Liab vérifie la cohérence des inputs et renvoie les informations sur le passif, à partir du modèle Rollup, qui projette les variables permettant de calculer les primes, les sinistres, etc., pour chaque produit, et contient les fonctions de comportement dynamique des assurés.

Le modèle Fund consolide toutes les données au niveau fond (compte de résultat, cash-flows, montant des réserves, passif, etc.).

Le modèle Company agrège les résultats des fonds au niveau de la société, calcule les impôts et d'autres variables au niveau global.

Le modèle Scenario possède les données des scénarios financiers suivant le type de marché considéré.

Le modèle L441 traite certains fonds très particuliers (contrats de retraite en points). Nous n'étudierons pas ici ce cas singulier.

Tous ces modèles fonctionnent sous la forme de tableaux multidimensionnels :

Modèle	Dimension	Signification
Fund	1	n° du fond
Bond/Equity/...	2	n° du fond * n° actif
Scenario	1	monnaie
Rollup	2	n° fond * n° du produit
Strategy	1	n° fond
Fund reporting	1	n° fond
Liability reporting	2	n° fond * type de produit
Asset Class reporting	2	n° fond * n° classe d'actifs

Les autres modèles sont chargés de créer les fichiers d'output (données de passif, d'actif, au niveau fond, etc.). Chacun contient un certain nombre de variables calculées automatiquement par ALIM et sont reportées dans un fichier de sortie dbf. Parmi ces fichiers, on retrouve la PVFP, qui nous servira pour le calcul des Options & Garanties.

Interface entre les modèles

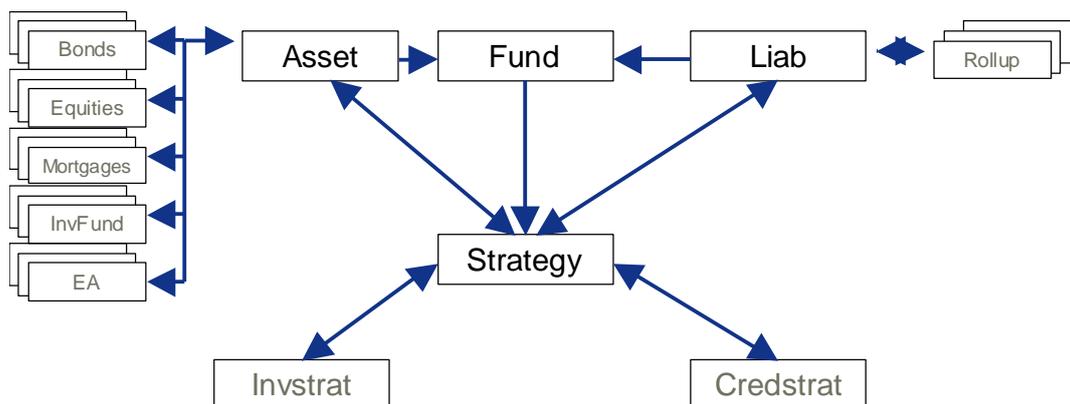


Figure 12. Liens entre les sous-modèles ALIM

Ordre de calcul

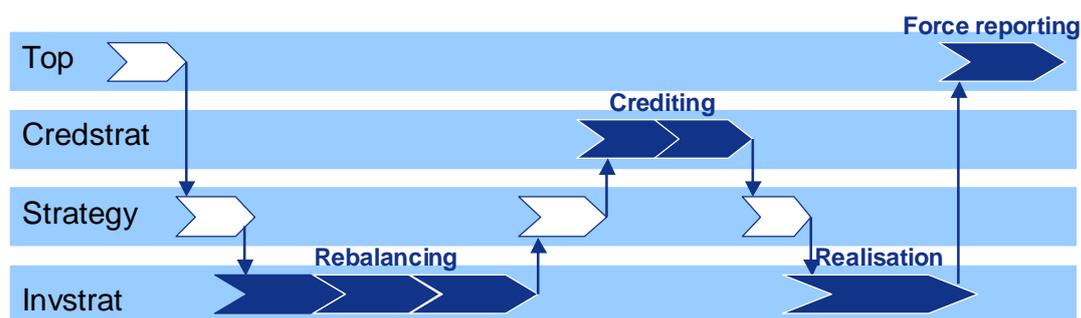


Figure 13. Chronologie d'appel des modules ALIM

Lors de la projection, ALIM va récupérer des données dans les fichiers d'inputs, que nous allons préciser dans la partie suivante.

3.1.2) Les inputs

Afin d'effectuer les calculs de PVFP, ALIM a besoin des données relatives à la situation de l'entreprise et de l'environnement économique. Ces données sont regroupées dans les 5 types de fichiers suivants.

❖ *Asset*

Il s'agit de la situation du portefeuille d'actifs, par ligne d'actif (type d'actif, valeur de marché, valeur comptable, etc.)

❖ *Corporate*

Il s'agit des données bilancielles de l'entreprise (fonds propres, marge de solvabilité, PPE, etc.), et des stratégies d'investissement (caractéristiques des types d'actif, allocation stratégique, etc.).

❖ *General*

Ce fichier contient les paramètres généraux à configurer dans la simulation (chemin des fichiers d'entrée, données sur la mortalité, etc.)

❖ *Liability*

Il s'agit des données de passif par regroupement de produits (projections de cash-flows, de stock, etc.).

❖ *Scenarios*

Les scénarios simulent une évolution possible de l'environnement économique (valeurs des taux, etc.).

Ces fichiers sont au format xls.

3.1.3) Le modèle

Nous allons présenter dans cette section les grands principes des deux modules de calcul les plus importants d'ALIM : l'investment strategy et la crediting strategy.

Investment strategy

Le but de l'investment strategy est d'atteindre une allocation cible du portefeuille d'actifs en vendant ou en achetant des actifs (c'est le rebalancing), de calculer la variation de réserve de capitalisation et de réaliser des plus/moins values demandées par la crediting strategy.

Il s'agit de la première opération réalisée au début d'une année de projection t.

Description globale du Processus

Le modèle Invstrat d'ALIM est divisé en trois principaux blocs :

- Information aggregation (IA)
- Dynamic Asset Allocation (DAA)
- Asset transaction (TA)

L'idée est de séparer les décisions effectuées par les comités de direction d'investissement (DAA) et l'implémentation réelle réalisée par les asset managers (TA).

La répartition du portefeuille est définie au niveau classe d'actifs (les plus courantes étant les obligations à taux fixes d'Etat, les obligations à taux fixes d'entreprises, les obligations à taux variables, les actions du CAC 40, les actions d'autres économies, les actions provenant de fonds d'investissements, et les dérivés). Chaque actif doit être assignable à une classe.

On cherche ainsi par exemple à atteindre 65% d'obligations d'Etat à taux fixe, 15% d'actions du CAC 40, 10% de fonds d'investissement, 7% de produits dérivés, et 3% de cash. C'est le rôle du module DAA, qui atteint pour chaque fond l'allocation cible, qu'on appelle **asset mix**, prédéterminée par classe d'actifs en déterminant le montant à acheter/vendre pour chaque classe. Pour chaque classe d'actifs sont donc définis une proportion cible ainsi qu'un intervalle autour de cette cible. Ces proportions peuvent être dépendantes du temps. L'algorithme de rebalancing est déclenché dès qu'au moins une classe d'actifs est en-dehors de son intervalle cible.

Auparavant, il faut donc consolider les valeurs et UCGL des actifs au niveau classe d'actifs, ce qui est réalisé par le module IA. Le module TA permet de répartir le montant de

vente ou d'achat à réaliser dans la classe d'actifs entre les différentes lignes d'actifs individuelles. Il détermine par actif le montant à vendre, calcule le montant de reprise/dotation de RDC, et le montant à réaliser par actif (réalisation d'UCGL par vente et rachat du même actif).

Crediting strategy

L'objectif de la crediting strategy est de déterminer les montants à distribuer aux assurés et à l'assureur, que nous appellerons respectivement **policyholder (ph)** et **shareholder (sh)**. Elle respecte toutes les contraintes réglementaires vues dans la première partie, ainsi que la stratégie particulière du groupe Allianz France, ce qui rend le programme très réaliste.

La crediting strategy est réalisée après l'investment strategy, pendant l'année t courante.

Description globale du processus

La crediting strategy est constituée de plusieurs modules de calcul, reflétant les différentes étapes amenant au versement final des montants distribués. Elle est différente entre les produits en euro et les produits en UC. Etant donné que le calcul des Options & Garanties n'est effectué que sur les produits euro, nous allons nous restreindre à ce périmètre dans la suite de cette section.

ETAPE 1 : Pour chaque fond, les produits financiers et le résultat technique sont partagés entre assurés et compagnie. ALIM vérifie si cette première répartition permet de respecter le taux minimum garanti (au niveau de chaque produit) que la compagnie doit verser aux assurés chaque année. S'ils ne sont pas atteints, des UCGL sont réalisées.

ETAPE 2 : Pour chaque fond, ALIM cherche à atteindre un montant de **participation aux bénéfiques (PB)** cible pour des raisons commerciales, et ce pour chaque produit. Ceci est réalisé en reprenant ou dotant la PPE, ou en réalisant des UCGL complémentaires. La cible est définie en fonction des taux d'intérêt et des UCGL dans le portefeuille. Elle est modulée en fonction du niveau de la PPE et des UCGL.

ETAPE 3 : ALIM atteint un objectif de résultat au niveau de la compagnie.

Nous avons vu comment se déroule la crediting strategy. Elle est responsable de l'attribution des revenus au policyholder et au shareholder, et de la gestion des provisions stratégiques (PPE notamment).

Conclusion sur ALIM

Nous avons présenté dans cette section le fonctionnement des deux principales fonctionnalités d'ALIM, l'investment strategy et la crediting strategy. Les autres sous-modèles sont également d'une importance majeure, mais leur description intégrale n'est pas l'objet de ce mémoire.

Nous allons dans la section suivante expliquer et détailler le paramétrage de l'option de rachat dynamique dont la production et le calcul des résultats s'appuient beaucoup sur l'utilisation d'ALIM.

3.2) Mise à jour des paramètres de rachats dynamiques : la méthodologie

Comme nous l'avons vu, les rachats font partie notamment du calcul du résultat technique. Leur valeur de base est donnée par les fichiers d'input « Liability » et sont éventuellement dynamisés en fonction des conditions de marché. Nous allons donc nous intéresser dans cette section au paramétrage de ce processus de dynamisation. Etudions d'abord plus en détail la modélisation des rachats dans ALIM.

3.2.1) Modélisation ALIM actuelle des rachats dynamiques

L'approche d'Allianz est de considérer que le comportement de rachat dynamique des assurés en fonction des conditions de marché respecte une forme arc tangente. La décision des assurés s'appuie sur l'écart entre un taux benchmark (indexé sur les taux d'intérêt du marché) et le taux de PB servi par l'assureur au titre de la rémunération du contrat d'assurance vie.

Si le taux de PB est « trop » inférieur au taux de référence, les assurés auront plus tendance à racheter leur contrat, « trop » pouvant être interprété comme « en-deçà d'une certaine limite ». Ainsi, le taux de rachat réellement appliqué par ALIM est issu de la formule suivante.

$$\text{Taux dynamique de rachat} = \text{Taux déterministe de rachat} * (1 + \text{déviaton})$$

La fonction déviation a la forme précisée ci-dessous.

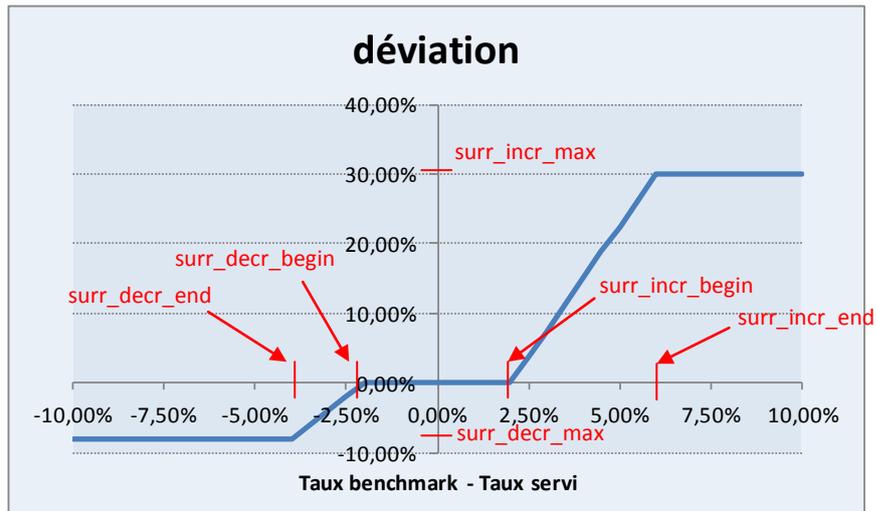


Figure 14. Modélisation des rachats dynamiques par déviation

En pratique, Allianz France utilise une modélisation prudentielle, en considérant que les rachats ne peuvent pas être diminués dynamiquement (même si le taux crédité aux assurés est très supérieur aux taux d'intérêt du marché, les rachats ne sont pas diminués). Ceci est modélisé en paramétrant à 0 la variable `surr_decr_max`.

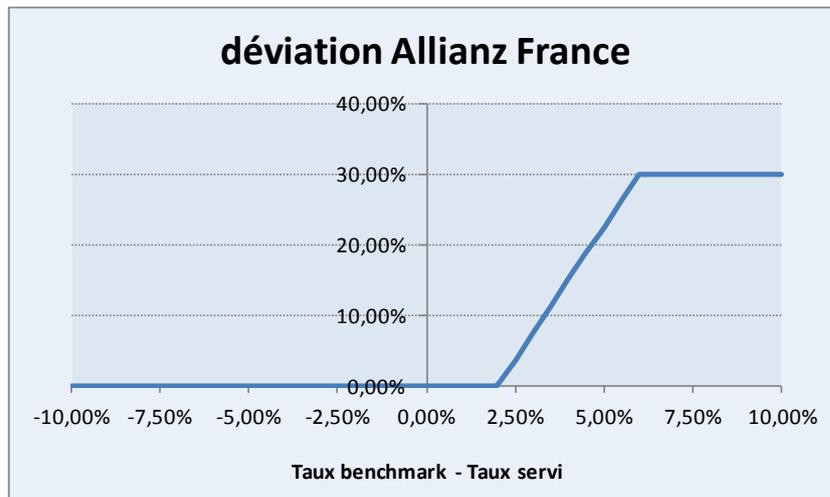


Figure 15. Modélisation Allianz des rachats dynamiques (chiffres arbitraires)

Avec ce paramétrage, tant que la différence de taux est inférieure à un certain seuil, les rachats déterministes ne sont pas ajustés. Au-delà de ce seuil et en-deçà d'un second seuil, la déviation croît linéairement jusqu'à atteindre un plafond (variable `surr_incr_max`).

Choix du taux benchmark

Le taux benchmark utilisé dans la formule de la déviation est le taux zéro-coupon à 1 an. Ce choix est issu de la meilleure corrélation entre les historiques d'évolution des taux de rachat et d'écart entre taux servi et taux zéro-coupon à différentes maturités. La meilleure corrélation trouvée entre 1994 et 2006 était avec le zéro-coupon à 1 an.

Cette propriété étant toujours vérifiée aujourd'hui, nous conserverons ce paramètre.

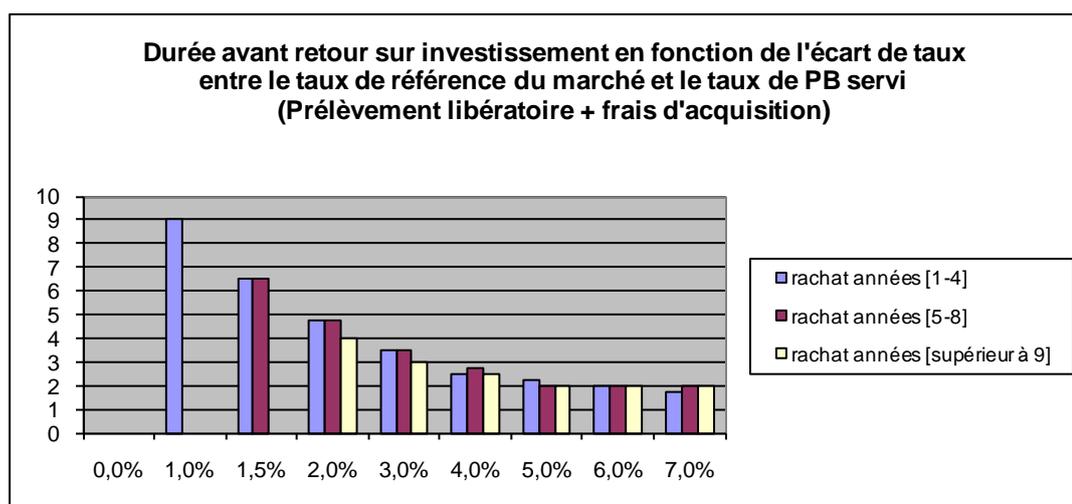
La référence la plus couramment retenue pour analyser le comportement des assurés est celle du livret A. L'inflation n'étant pas modélisée dans ALIM, le taux 1 an reflète une tendance de court terme et permet de remplacer le taux du livret A.

Choix des paramètres

Actuellement, le choix des variables `surr_incr_begin` et `surr_incr_end` repose sur le raisonnement fiscal suivant. Deux simulations de contrat d'épargne à versement unique initial V, de TMG 4,5% et de terme 15 ans ont été effectuées en supposant un déclenchement des rachats dynamiques à partir d'un taux marché à 6% :

- La première prend en compte le prélèvement forfaitaire libératoire, en cas de rachat avant 8 ans, appliqué aux plus-values auquel s'ajoutent les chargements d'acquisition de la nouvelle souscription
- La seconde considère un prélèvement forfaitaire de 10% de l'encours incluant les pénalités du premier jeu d'hypothèses et les pénalités administratives

Ensuite, on visualise graphiquement à partir de quelle durée il y a réellement un retour sur investissement (ROI) pour l'assuré, et ce pour plusieurs jeux d'écart de taux.



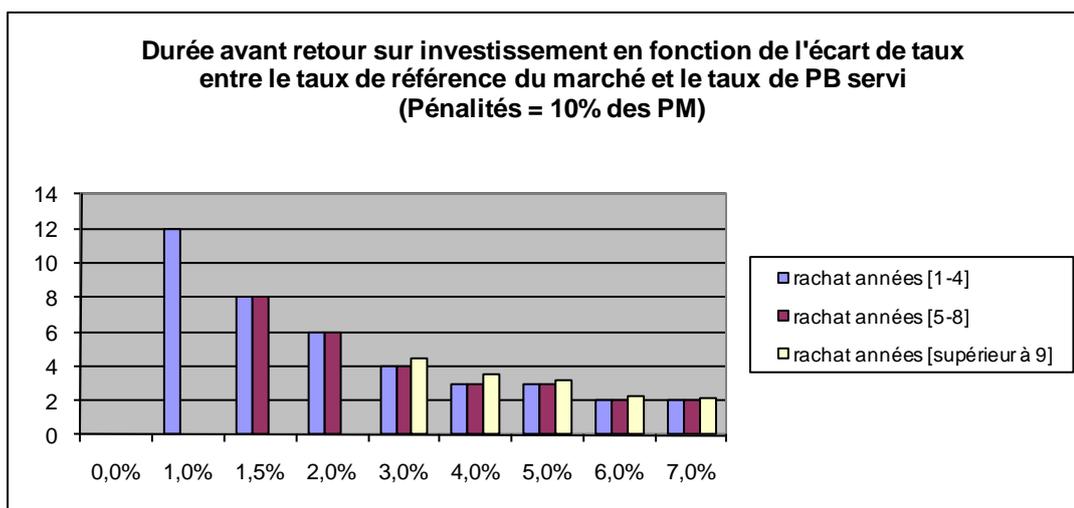


Figure 16. Méthodologie actuelle pour le calcul du seuil d'activation

C'est à partir d'un écart de taux de 1,5% que la durée de ROI devient raisonnable (6 à 8 ans), et c'est la valeur paramétrée dans tous les produits pour la variable `surr_incr_begin`, déclenchant les rachats dynamiques. De même, la durée de ROI se stabilise autour de 6% d'écart de taux, c'est la valeur utilisée dans `surr_incr_end`, seuil au-delà duquel les rachats ne sont plus augmentés dynamiquement.

La variable `surr_incr_max` est calculé par produit de façon à avoir un rachat maximal annuel de 19%. Ainsi, si par exemple on prévoit un taux de rachat moyen de 5% sur un certain produit, sa variable `surr_incr_max` sera paramétrée à $2,8 = \frac{19\%}{5\%} - 1$ car

$$19\% = \text{Taux déterministe de rachat} * (1 + \text{déviation})$$

Le choix du 19% comme taux de rachat maximal provient d'un avis d'expert. Il a en effet été estimé que la compagnie fera en sorte, le cas échéant, de maintenir le taux de rachat en-deçà de 20%. Théoriquement, il est possible d'observer des taux supérieurs, mais en pratique, il a été estimé qu'Allianz mettrait tout en œuvre, commercialement, pour conserver le taux de rachat sous les 20%. Ceci passerait notamment par des campagnes auprès des commerciaux et des agents pour « rassurer » leurs clients et en proposant de remplacer le rachat par des arbitrages.

Lien avec la réglementation

Afin de mesurer les implications concrètes de la réforme Solvabilité II, les directives européennes doivent faire l'objet d'une étude d'impact, qui s'est déroulée par étapes successives, appelées QIS (pour Quantitative Impact Studies⁸). En 2010, la Commission

⁸ Sources : EIOPA [21], ACAM [23].

Européenne a invité tous les organismes d'assurance européens à participer activement à la 5^{ème} étape (QIS5) dont les objectifs étaient :

- Fournir des renseignements détaillés des impacts quantitatifs sur le bilan,
- Vérifier l'adéquation des spécifications techniques aux principes et objectifs de la réforme,
- Collecter des données sur les options politiques,
- Collecter des données afin de parfaire le calibrage de la formule standard,
- Encourager les organismes à se préparer à l'introduction de la réforme.

QIS5 donne des indications précises sur la modélisation des lois de rachat⁹. Il y est précisé classiquement que le taux de rachat est séparé entre rachats structurels et rachats conjoncturels, comme dans ALIM. La forme des rachats conjoncturels est également précisée : il y est conseillé qu'elle soit comprise entre un plancher et un plafond qui sont représentés sur la courbe suivante. Ces paramètres sont issus de jugements d'expert.

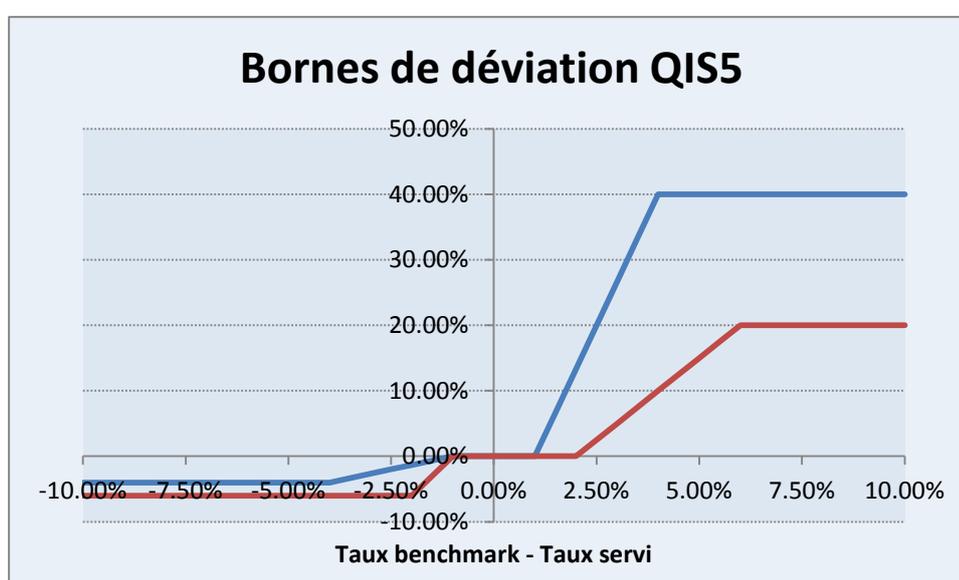


Figure 17. Modélisation réglementaire des rachats dynamiques

Il est à noter que QIS5 considère que les rachats conjoncturels doivent être additionnés aux rachats structurels. Dans la modélisation Allianz, les rachats structurels sont augmentés d'un facteur multiplicatif, ce qui constitue un choix équivalent.

3.2.2) Premières analyses

Les études précédentes ont été menées début 2008, avant le cœur de la crise financière et ne laissent pas la place à la volatilité des rachats que l'on peut pourtant observer sur les produits et sur le portefeuille général. Ainsi, un objectif de ce mémoire fut de reconsidérer le paramétrage des rachats dans ALIM en prenant en compte aussi finement

⁹ Source : QIS5 [24].

que possible le changement de comportement des assurés. Nous allons détailler dans cette section la nouvelle méthodologie que propose ce mémoire.

La démarche

La première étape a consisté à récupérer et observer les données disponibles sur les rachats. Travaillant en partenariat avec d'autres équipes internes, le périmètre d'étude considéré est celui de la vie individuelle et certains produits collectifs aux gros encours. Les données proviennent des bases SAS de l'Inventaire et remontent jusqu'à janvier 2004.

Une fois les premières analyses de base effectuées, la méthode a consisté à identifier des groupes de comportement entre les produits du périmètre concerné. L'idée est de pouvoir regrouper des produits au sein d'une même modélisation si l'on souhaite suivre de façon générale l'évolution des taux de rachat des produits.

Ensuite, la mise à jour des paramètres des lois de rachat dynamiques sous ALIM a été réalisée pour chaque produit en utilisant une nouvelle méthodologie.

Les premières analyses

Elles sont fondées sur les historiques de taux de rachat mensuels sur chacun des produits étudiés. La plupart sont des produits multisupports, comportant un fond en euro et des unités de compte (UC). Le tableau ci-dessous résume les produits étudiés (identifiés par des noms de présidents Américains dans toute la suite) et les TMG des fonds euro associés.

Produit	TMG du fond en euro
Tyler	4,5%
Jackson	3,5%
Fillmore	Livret A
Pierce	0%
Adams	0%
Monroe	0%
Lincoln	0%
Johnson	0%
Jefferson	0%
Harrison	0%
Wilson	0%
Washington	0%
Roosevelt	0%
Madison	0%
Kennedy	0%
Eisenhower	0%
Buren	0%
Hoover	Entre 3,5% et 4,5%
Truman	0%
Carter	0%
Reagan	0%

Tableau 4. Liste des produits étudiés

Cet échantillon a été choisi de façon à contenir les produits les plus représentatifs de l'ensemble du portefeuille (environ 150 produits).

Les analyses suivantes ont porté sur les taux mensuels en eux-mêmes $r(t)$ et sur les évolutions mensuelles de ces taux de rachat $\frac{r(t)-r(t-1)}{r(t-1)}$.

Statistiques générales (données 2004-2011)

Produit	Moyenne	Ecart type	Minimum	Maximum
Tyler	0,39%	0,10%	0,17%	0,67%
Jackson	0,56%	0,20%	0,18%	1,18%
Fillmore	0,56%	0,14%	0,26%	0,93%
Pierce	0,51%	0,20%	0,22%	1,13%
Adams	0,43%	0,16%	0,15%	0,87%
Monroe	0,58%	0,10%	0,38%	0,96%
Lincoln	0,32%	0,07%	0,19%	0,66%
Johnson	0,36%	0,17%	0,00%	1,02%
Jefferson	0,34%	0,18%	0,00%	0,77%
Harrison	0,38%	0,28%	0,05%	1,37%
Wilson	0,51%	0,09%	0,33%	0,74%
Washington	0,47%	0,28%	0,10%	1,58%
Roosevelt	0,51%	0,29%	0,11%	1,39%
Madison	0,28%	0,06%	0,15%	0,46%
Kennedy	0,30%	0,07%	0,16%	0,46%
Eisenhower	0,42%	0,52%	0,00%	3,10%
Buren	0,33%	0,13%	0,12%	0,76%
Hoover	0,95%	0,24%	0,51%	1,76%
Truman	0,44%	0,16%	0,10%	0,92%
Carter	0,77%	0,59%	0,18%	3,58%
Reagan	0,02%	0,03%	0,00%	0,09%

Tableau 5. Indicateurs statistiques généraux

La première observation que l'on peut émettre est la diversité des comportements des produits. Tandis que certains présentent des niveaux et volatilités de rachats faibles, d'autres comme le produit Hoover ont des rachats particulièrement élevés. Ceci peut s'expliquer par les spécificités des produits : le produit Hoover a par exemple subi de nombreuses migrations informatiques qui se sont ressenties jusqu'au niveau commercial, le produit Reagan est un produit nouveau sur lequel il est difficile d'observer de réels rachats du fait d'une antériorité fiscale très faible à ce jour.

Evolutions depuis la crise

Depuis 2008, Allianz, comme tous les autres assureurs sous l'impulsion de l'ACP, est attentif à l'évolution des rachats et au risque de dérive de ces derniers. Au vu des historiques sortis, on peut effectivement remarquer sur le portefeuille global multisupport une hausse du taux de rachat depuis septembre 2010, comme l'illustrent les graphiques ci-dessous. Ce phénomène n'est cependant pas observable sur tous les produits.

En revanche, cette hausse semble en réalité s'inscrire dans la continuité d'un cycle, observable depuis plusieurs années, comme le montre l'intégralité des historiques des deux cas présentés.

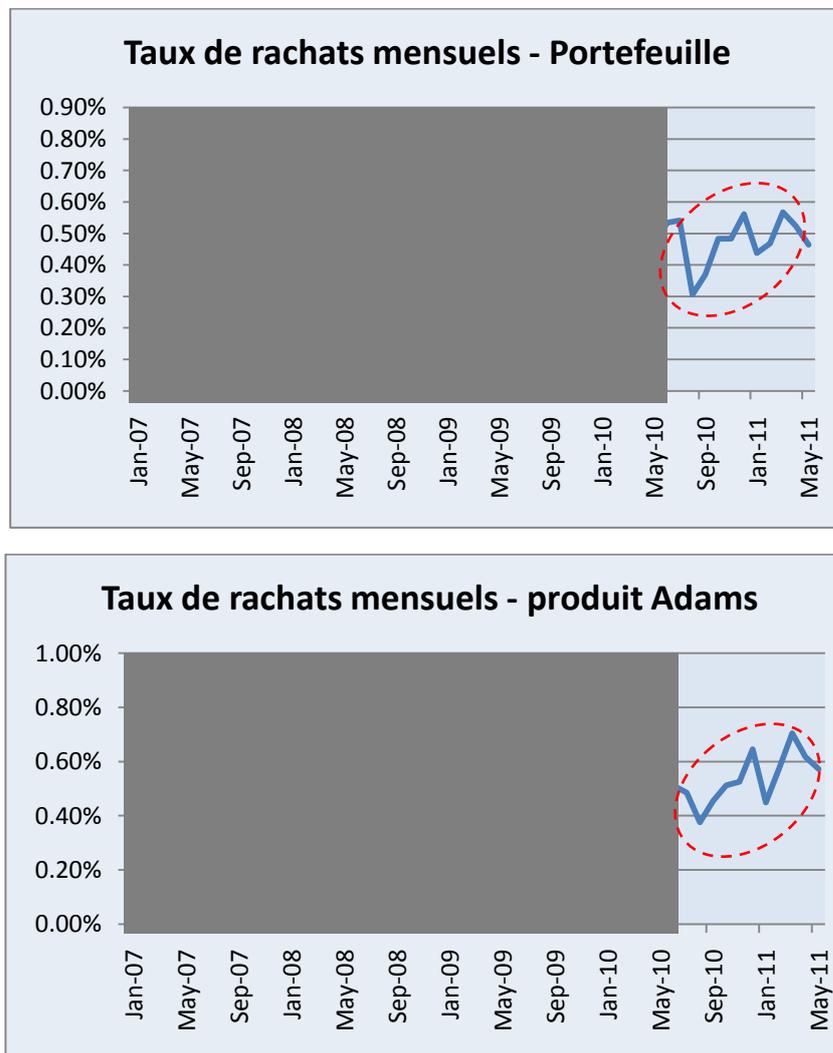


Figure 18. Historiques récents du taux de rachat

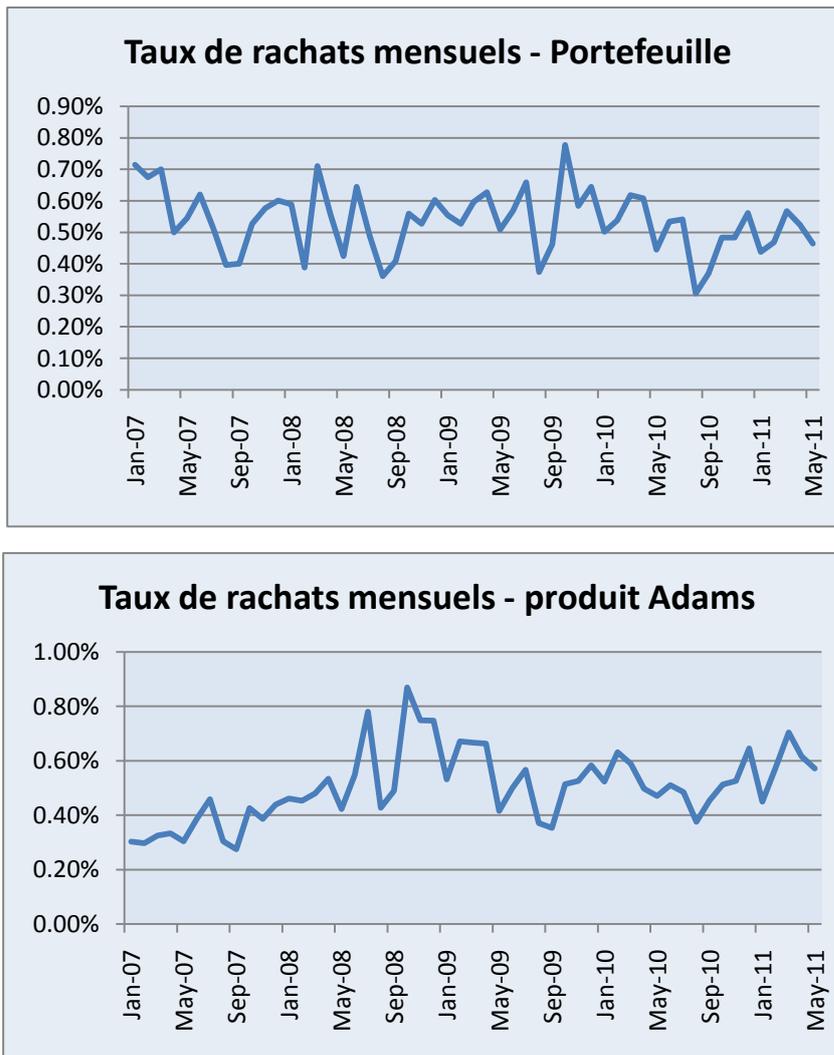


Figure 19. Historiques du taux de rachat

On peut donc s'attendre à un retour à des taux de rachat raisonnables dans les mois à venir, et dont la descente peut d'ores et déjà être observée sur les deux graphiques précédents.

Dans tous les cas, et pour tous les produits, les taux de rachats ne peuvent pas, en régime permanent, prendre des valeurs abusives sur une durée importante. Ils respectent même une certaine **saisonnalité autour d'une valeur moyenne dépendant du produit**.

Ce constat sera déterminant dans toute la suite de ce mémoire.

Des éléments d'explication peuvent être le besoin d'argent à certaines périodes de l'année (paiement des impôts, rentrée scolaire, fêtes de fin d'année, etc.).

Corrélations et groupes de volatilité

La matrice de corrélation entre les séries de rachats mensuels a été calculée, de même pour les évolutions de ces taux.

Corrélations sur les taux de rachat

	Tyler	Jackson	Fillmore	Pierce	Adams	Monroe	Lincoln	Johnson	Jefferson	Harrison	Wilson	Washington	Roosevelt	Madison	Kennedy	Eisenhower	Buren	Hoover	Truman	Carter	Reagan	
Tyler	100%																					
Jackson	59%	100%																				
Fillmore	64%	100%	100%																			
Pierce	7%	69%	64%	100%																		
Adams	23%	23%	15%	100%	100%																	
Monroe	30%	24%	24%	24%	100%	100%																
Lincoln	31%	22%	22%	40%	100%	100%	100%															
Johnson	34%	34%	38%	38%	40%	100%	100%	100%														
Jefferson	22%	27%	38%	38%	27%	27%	27%	100%	100%													
Harrison	32%	17%	28%	30%	30%	43%	48%	38%	100%	100%												
Wilson	24%	8%	23%	7%	7%	10%	-2%	-9%	10%	100%	100%											
Washington	45%	42%	48%	48%	52%	28%	28%	37%	7%	12%	100%	100%										
Roosevelt	-18%	-1%	-13%	3%	-33%	-8%	-8%	-28%	2%	-2%	100%	100%	100%									
Madison	0%	3%	9%	14%	18%	1%	1%	7%	-3%	-3%	2%	100%	100%	100%								
Kennedy	67%	38%	52%	4%	27%	53%	31%	19%	34%	12%	-7%	31%	100%	100%	100%							
Eisenhower	65%	58%	44%	47%	47%	75%	47%	48%	48%	50%	-8%	6%	6%	100%	100%	100%						
Buren	10%	20%	20%	-17%	4%	1%	4%	4%	13%	13%	-17%	18%	18%	10%	100%	100%	100%					
Hoover	49%	37%	47%	1%	24%	13%	29%	6%	4%	4%	-28%	21%	4%	4%	4%	100%	100%	100%				
Truman	33%	23%	38%	1%	20%	48%	29%	3%	1%	1%	-1%	7%	1%	1%	1%	2%	100%	100%	100%			
Carter	46%	47%	20%	-8%	14%	19%	17%	1%	13%	13%	-3%	25%	18%	1%	1%	3%	3%	100%	100%	100%		
Reagan	27%	22%	24%	24%	28%	15%	39%	34%	27%	30%	-32%	28%	27%	2%	2%	2%	2%	2%	2%	100%	100%	100%

Corrélations sur les évolutions des taux de rachat

	Tyler	Jackson	Fillmore	Pierce	Adams	Monroe	Lincoln	Johnson	Jefferson	Harrison	Wilson	Washington	Roosevelt	Madison	Kennedy	Eisenhower	Buren	Hoover	Truman	Carter	Reagan	
Tyler	100%																					
Jackson	53%	100%																				
Fillmore	7%	68%	100%																			
Pierce	43%	42%	100%	100%																		
Adams	12%	28%	28%	100%	100%																	
Monroe	37%	38%	20%	38%	100%	100%																
Lincoln	20%	28%	28%	28%	38%	100%	100%															
Johnson	28%	10%	25%	17%	28%	17%	100%	100%														
Jefferson	26%	6%	42%	7%	13%	43%	10%	100%	100%													
Harrison	13%	-1%	-1%	7%	55%	68%	18%	10%	100%	100%												
Wilson	47%	58%	58%	55%	7%	5%	6%	6%	6%	100%	100%											
Washington	4%	2%	-16%	7%	-32%	1%	-56%	-40%	0%	2%	100%	100%	100%									
Roosevelt	-3%	3%	12%	12%	-7%	1%	-14%	8%	18%	8%	18%	100%	100%	100%								
Madison	64%	39%	60%	60%	53%	53%	16%	24%	9%	9%	9%	51%	100%	100%	100%							
Kennedy	77%	48%	74%	63%	75%	52%	1%	21%	29%	29%	1%	39%	39%	100%	100%	100%						
Eisenhower	11%	10%	17%	6%	35%	37%	18%	45%	18%	18%	18%	18%	18%	18%	100%	100%	100%					
Buren	45%	36%	41%	1%	13%	29%	3%	4%	4%	4%	4%	4%	4%	4%	4%	100%	100%	100%				
Hoover	22%	12%	25%	19%	48%	33%	29%	3%	3%	3%	3%	3%	3%	3%	3%	3%	100%	100%	100%			
Truman	44%	42%	28%	28%	0%	20%	20%	6%	6%	6%	6%	6%	6%	6%	6%	6%	6%	100%	100%	100%		
Carter	26%	6%	14%	14%	15%	28%	17%	1%	1%	1%	1%	1%	1%	1%	1%	1%	1%	1%	100%	100%	100%	
Reagan	8%	2%	8%	8%	3%	7%	67%	6%	4%	4%	4%	4%	4%	4%	4%	4%	4%	4%	4%	4%	100%	100%

Regroupement empirique

Des premiers groupes de produit semblent se dégager : les produits Tyler, Jackson, Fillmore, Pierce, Monroe, Lincoln, Wilson, Madison, Kennedy semblent former un groupe corrélé. De même, les produits Harrison, Washington, Roosevelt, Eisenhower et Reagan semblent plutôt anti-corrélés au premier groupe. Ce phénomène se vérifie aussi bien sur l'étude des taux que sur leur évolution.

Aussi, en étudiant les historiques des taux de rachat, on peut remarquer plusieurs grandes catégories de comportement : les produits au comportement relativement stable, ceux au comportement erratique et ceux ne dégageant pas de réel comportement identifiable. Ci-dessous trois exemples de produits symboliques de chacun de ces types de comportements.

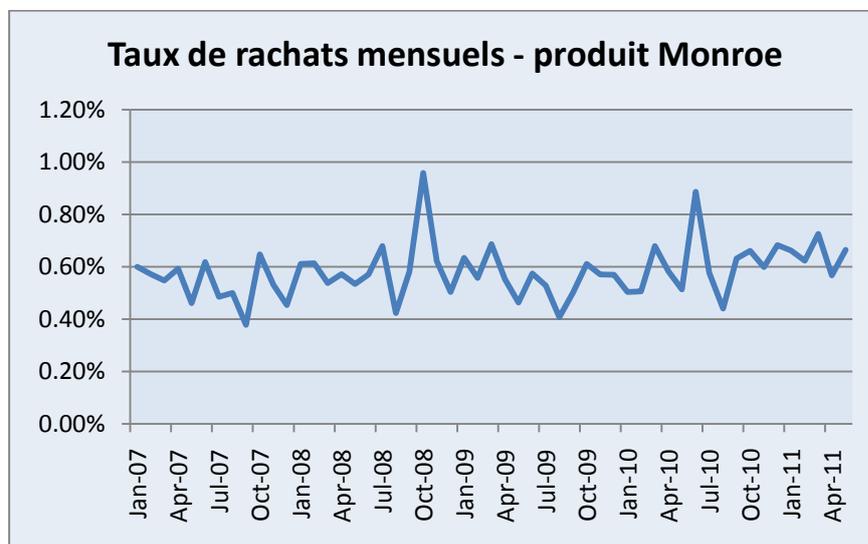


Figure 20. Un exemple de comportement stable

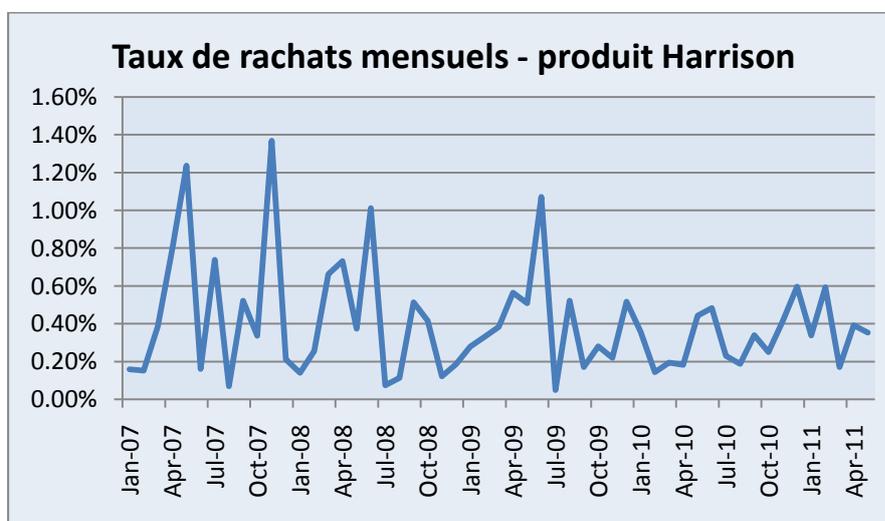


Figure 21. Un exemple de comportement erratique

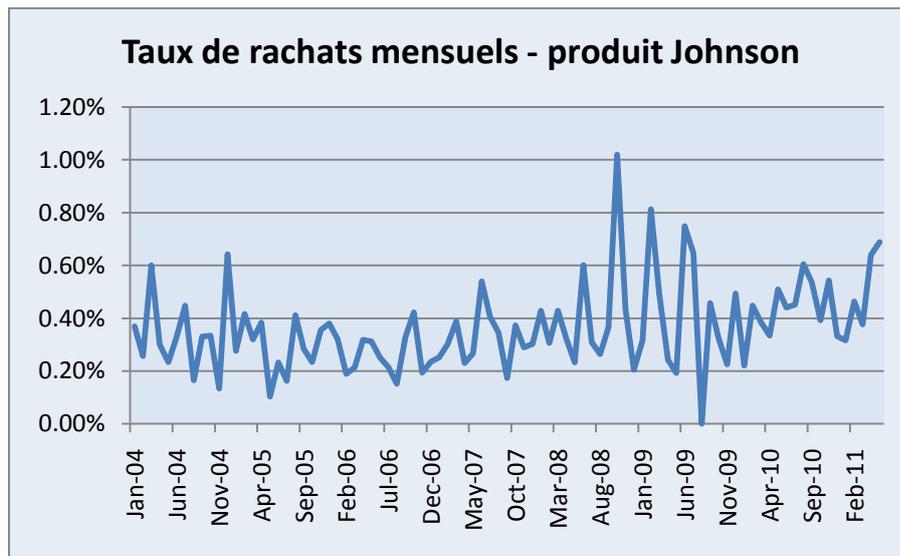


Figure 22. Un exemple de comportement intermédiaire

La première conclusion est qu'il est possible d'effectuer une distinction entre les produits suivant leur ancienneté. En effet, les vieux produits et le portefeuille dans sa globalité suivent un comportement stable, voire même une certaine saisonnalité. Une explication réside dans le fait que le principal facteur influant le taux de rachat, l'ancienneté fiscale, est neutralisé par la diversification. Ces produits présentent de gros encours (PM) et toutes les anciennetés fiscales sont représentées.

Sur les produits plus récents, proposés à la vente pour rénover la gamme, un comportement plus erratique est observé, la structure de rachat se met en place, et l'effet pic fiscal n'est pas autant neutralisé par la diversification. Un exemple d'un tel produit est Wilson, sorti début 2007 pour renouveler le produit Adams, et dont l'historique de rachat est présenté ci-dessous. Le pic fiscal de 4 ans commence à être identifiable.

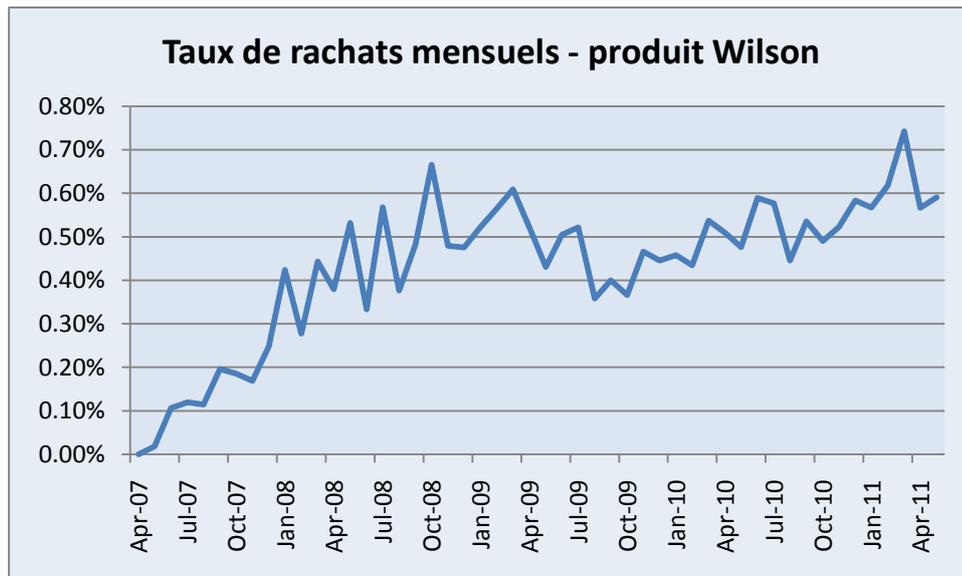


Figure 23. Un exemple de phase de mise en place du taux de rachat

Ainsi, on remarque une période d'environ 1 an après la sortie du produit pendant laquelle la structure des rachats se construit, ce qui introduit un biais dans notre étude, car nous nous intéressons au comportement des produits en régime de croisière. Ainsi, nous allons désormais systématiquement supprimer de nos données la première année de l'historique des taux de rachat.

Les deux critères a priori déterminants dans le comportement d'un produit sont l'espérance et la volatilité. Un indicateur semble pertinent pour discriminer entre les différents comportements des produits : le rapport de l'espérance sur la volatilité (« ratio de Sharpe »). Les tableaux ci-dessous donnent les produits classés par type de comportement accompagnés de leur ratio de Sharpe.

Comportement stable	Sharpe
Tyler	4,02
Monroe	5,63
Lincoln	4,57
Wilson	5,87
Madison	4,49
Kennedy	4,12
Hoover	3,97

Sharpe > 4

Comportement intermédiaire	Sharpe
Jackson	2,80
Fillmore	3,90
Pierce	2,55
Adams	2,78
Johnson	2,15
Buren	2,48
Truman	2,77

2 < Sharpe < 4

Comportement erratique	Sharpe
Jefferson	1,88
Harrison	1,34
Washington	1,69
Roosevelt	1,78
Eisenhower	0,81
Carter	1,29
Reagan	0,70

Sharpe < 2

Deux seuils semblent offrir une discrimination satisfaisante entre les comportements des produits en matière de rachats : les produits ayant un ratio de Sharpe inférieur à environ 2 ont un comportement plutôt erratique, et ceux ayant un ratio supérieur à 4 ont en général un comportement stable. Des exceptions peuvent néanmoins être trouvées, notamment le produit Hoover, qui a bien un comportement stable mais une volatilité assez importante comparée à sa valeur moyenne.

Regroupement par data clustering

Le data clustering¹⁰ est une méthode statistique permettant de diviser un ensemble de données en groupes homogènes. Cette homogénéité se traduit par des critères de proximité définis en introduisant des mesures et des classes de distance entre les objets. C'est une méthode très utilisée en marketing pour subdiviser le comportement des clients en groupes similaires et ainsi définir des « clientèles cibles ». L'idée est similaire ici : l'analogie réside dans la classification des produits suivant le comportement des assurés associés.

Il existe plusieurs algorithmes aboutissant à la classification, ou partition, des données :

- K-means
- NMF (Non negative Matrix Factorization)
- ...

La méthode NMF consiste à factoriser une matrice de données X par une matrice de coordonnées des barycentres des clusters W et une matrice H des « scores » attribués à chacun d'entre eux.

$$X = WH$$

L'algorithme consiste à initialiser la matrice des barycentres W^0 puis à l'étape t , de calculer

$$\min_{H \geq 0} \|X - W^{(t)}H\|_F$$

Puis

$$\min_{W \geq 0} \|X - WH^{(t+1)}\|_F$$

où $\| \cdot \|_F$ est la norme de Frobenius $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{i,j}|^2}$

et $H \geq 0$ signifie $\forall i, j H_{i,j} \geq 0$

La méthode choisie ici est l'algorithme des K-means, plus adaptée à notre problématique, et que nous présentons ci-dessous.

¹⁰ Voir Vayatis N. [8]

Notons $X^{(1)}, \dots, X^{(n)}$ dans \mathbf{R}^d les observations à classifier.

Commençons par donner quelques définitions.

Définition : Un cluster k est un ensemble non vide d'observations. Notons $\Pi_k = \{j | X^{(j)} \in \text{cluster } k\}$.

Définition : Le barycentre du cluster k est $m_k = \frac{1}{\text{Card } \Pi_k} \sum_{j \in \Pi_k} X^{(j)}$.

Définition : La cohérence du cluster k est $c_k = \sum_{j \in \Pi_k} d(X^{(j)}, m_k)$ où d est une distance.

Définition : Un clustering $\Pi = \{\Pi_1, \dots, \Pi_K\}$ est une partition à K clusters des données.

L'algorithme des K-means consiste à minimiser une fonction critère dépendant du clustering. Le problème se pose donc sous la formulation suivante, en prenant une fonction critère égale à la somme des cohérences des clusters.

$$\min_{\Pi} \sum_{k=1}^K \sum_{j \in \Pi_k} d(X^{(j)}, m_k)$$

Distance

Plusieurs fonctions distance sont possibles, parmi les plus courantes, on trouve

- La distance euclidienne

$$d(x_1, x_2)^2 = X^T X = \sum_{i=1}^n (x_2^i - x_1^i)^2$$

- La distance de Manhattan

$$d(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^n |x_2^i - x_1^i|$$

- La distance de Sebestyen

$$d(x_1, x_2)^2 = X^T W X = \sum_{i=1}^n w_{ii} (x_2^i - x_1^i)^2 \text{ où } W \text{ est une matrice diagonale de pondération}$$

Pour résoudre ce problème, on procède par itérations successives.

Initialisation

On commence par tirer aléatoirement une partition des données.

Etape t

On calcule les barycentres m_1^t, \dots, m_K^t des clusters obtenus à l'étape précédente.

On affecte chaque observation à son barycentre le plus proche. On obtient de nouveaux clusters.

On calcule la fonction à minimiser.

Evaluation du critère d'arrêt.

On passe à l'étape $t+1$.

Critère d'arrêt

La fonction à minimiser se stabilise après un certain nombre d'itérations. On arrête l'algorithme dès que l'écart entre deux étapes successives est inférieur à un seuil choisi par l'utilisateur, ou si on dépasse un nombre d'itérations maximal paramétrable.

Implémentation

Cet algorithme a été implémenté sur les mêmes produits considérés précédemment, en prenant en compte dans un premier temps 2 critères : moyenne et volatilité des rachats. Le positionnement des produits est le suivant.

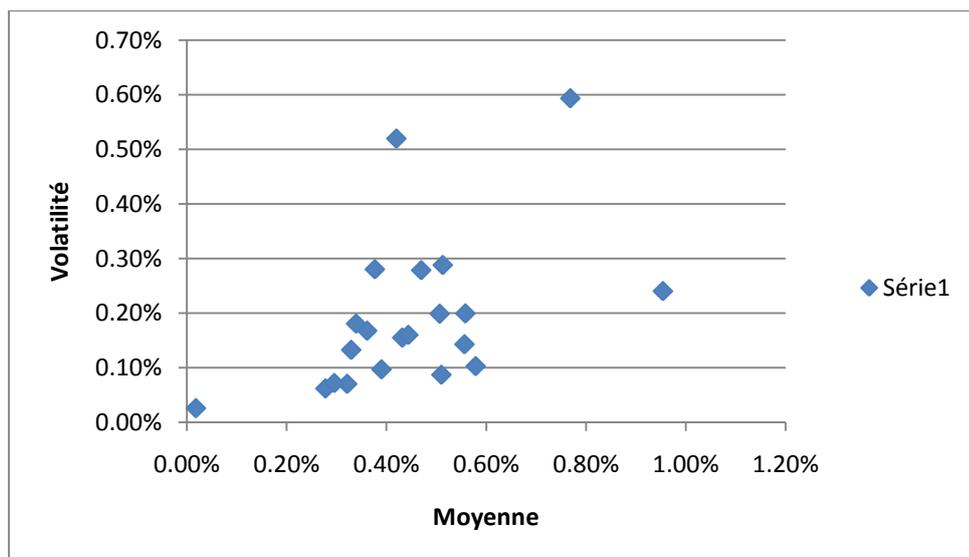


Figure 24. Cartographie des produits étudiés

Nous optons donc pour une classification en 3 clusters. L'algorithme a été lancé plusieurs fois car il peut donner des partitions différentes suivant la répartition aléatoire initiale et avec la distance choisie (les groupes formés à chaque lancement varient). Il n'est pas possible d'en déduire une classification réellement acceptable avec ces deux critères. Une solution pour y pallier est d'augmenter le nombre de clusters afin de stabiliser la classification. Ainsi, dans tous les cas, on peut remarquer la formation de certains noyaux durs, c'est-à-dire de produits apparaissant systématiquement ensemble dans le même

cluster. Ainsi, nous obtenons une classification plus détaillée, mais plus robuste. Les sous-groupes ainsi formés sont donnés ci-dessous.

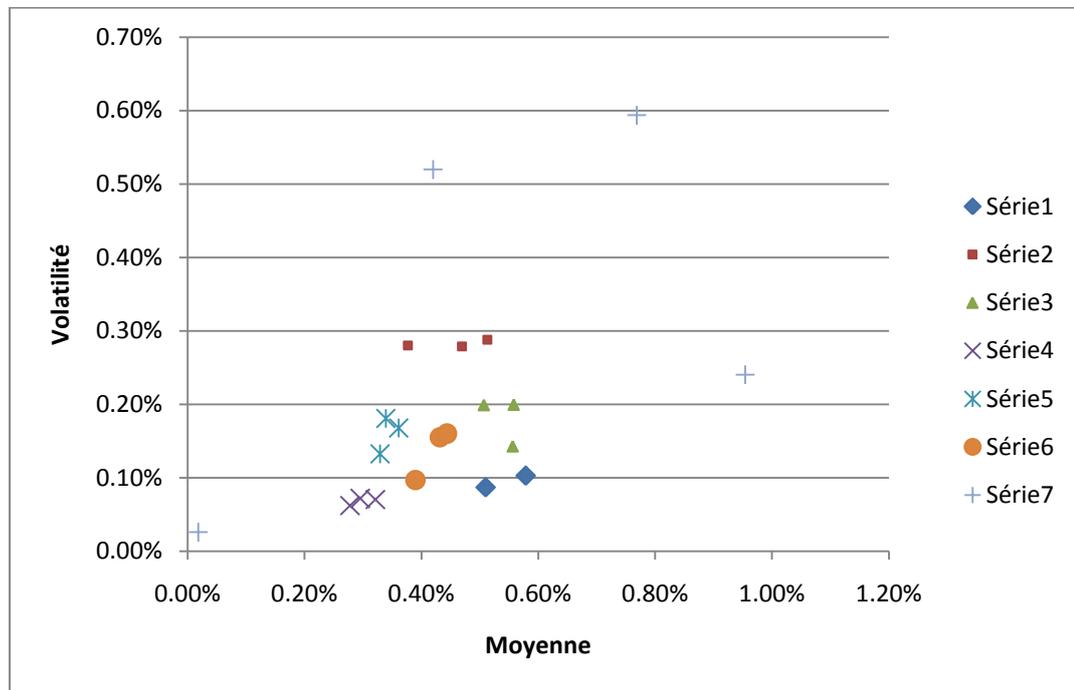


Figure 25. Résultats du clustering

La répartition des produits est détaillée ci-dessous.

Série 1	Série 2	Série 3	Série 4	Série 5	Série 6	Série 7
Monroe	Harrison	Jackson	Lincoln	Johnson	Tyler	Eisenhower
Wilson	Washington	Fillmore	Madison	Jefferson	Adams	Hoover
	Roosevelt	Pierce	Kennedy	Buren	Truman	Carter
						Reagan

Les produits de la dernière série ont des valeurs extrêmes et ont été isolés car leur comportement est très spécifique et viendrait biaiser l'étude.

Un lien peut être établi avec la méthodologie empirique : le graphique ci-dessus a été repris en représentant la partition du plan (moyenne-volatilité) suivant les 2 limites du ratio de Sharpe évalués empiriquement (égaux à 2 et 4).

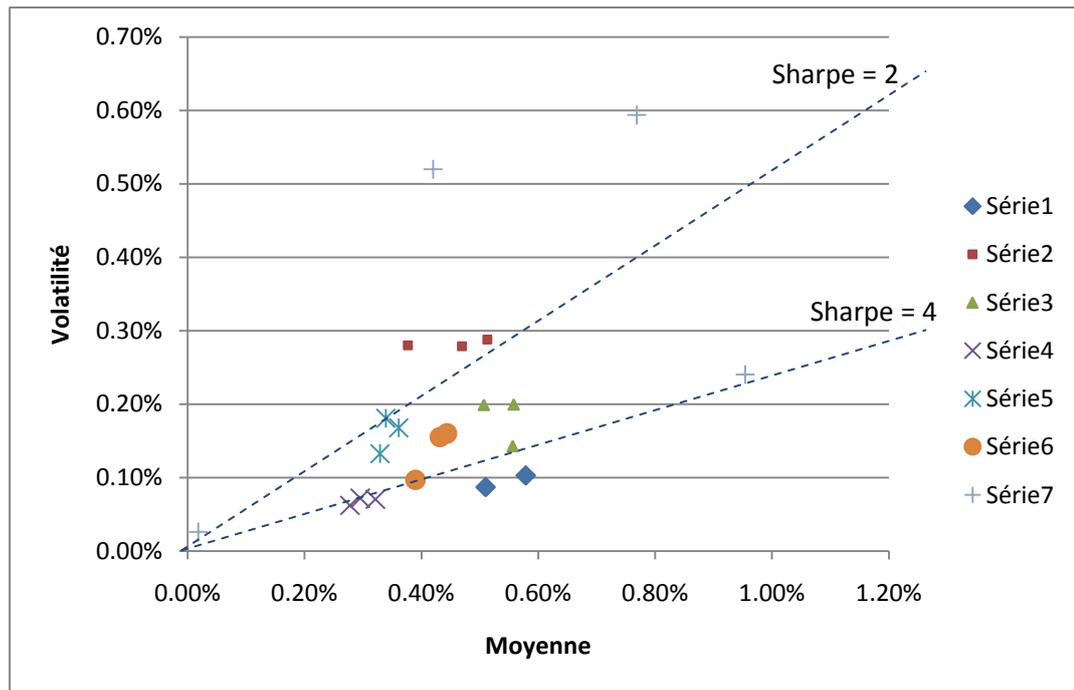


Figure 26. Lien clustering-méthode empirique

On peut ainsi remarquer que, en écartant les produits aux valeurs atypiques, chaque groupe est inclus dans l'une des 3 régions du plan, ce qui vient conforter les premières impressions empiriques.

Afin de valider les deux seuils de 2 et 4 pour le ratio de Sharpe, une autre segmentation a été effectuée avec la méthode du clustering, mais en prenant deux autres critères : à la place du couple moyenne/volatilité $(E[X], \sigma[X])$, nous prenons le couple ratio de Sharpe/ ratio Centile à 90%/moyenne $(\frac{E[X]}{\sigma[X]}, \frac{q_{0.9}(X)}{E[X]})$. Le premier est un indicateur de comportement. Le second est un indicateur de risque donnant l'éloignement des valeurs extrêmes (représenté par le taux de rachat classé à 90% de la valeur la plus forte) par rapport à la moyenne. En choisissant une répartition à 3 clusters, l'algorithme est stable et aboutit à la classification présentée ci-après.

Afin de renforcer l'étude, l'algorithme a été lancé avec plusieurs fonctions distance dans un espace de dimension 2 :

- La distance euclidienne

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

- La distance de Manhattan

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$

- La distance de Sebestyen

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{X^T W X} = \sqrt{w_{11}(x_2 - x_1)^2 + (1 - w_{11})(y_2 - y_1)^2} \text{ où } W = \begin{pmatrix} 0.75 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{pmatrix}$$

par exemple.

Plusieurs jeux de coefficients de pondération de Sebestyen ont été testés. Les résultats sont stables pour $\{w_{11}/w_{11} > \frac{1}{3}\}$, w_{11} étant le coefficient attribué au critère ratio de Sharpe.

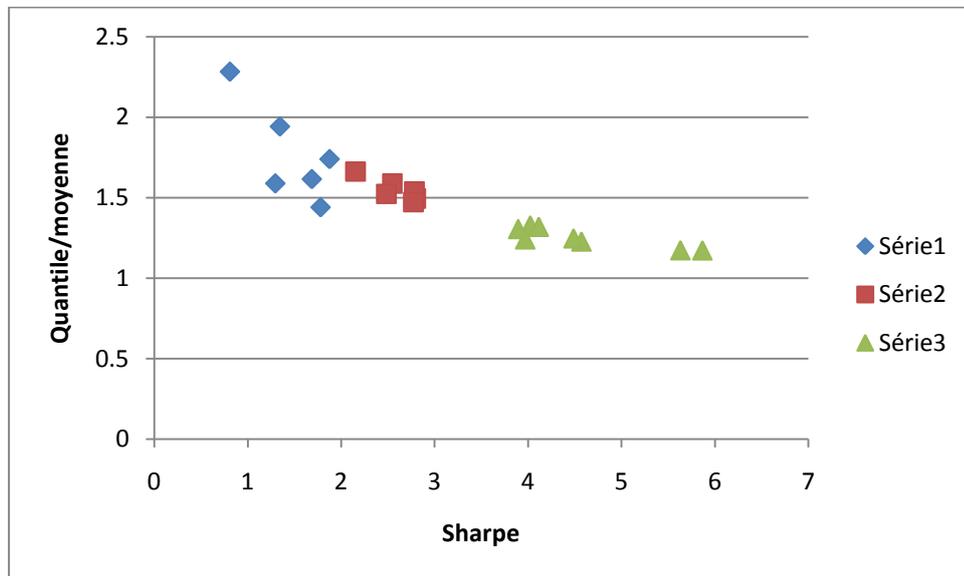


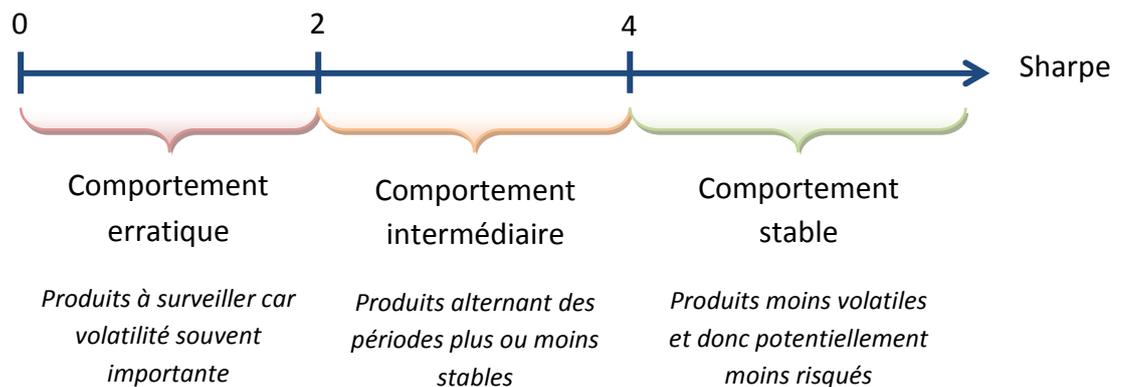
Figure 27. Clustering pour valider les seuils discriminants

Série 1	Série 2	Série 3
Jackson	Jefferson	Tyler
Pierce	Harrison	Fillmore
Adams	Washington	Monroe
Johnson	Roosevelt	Lincoln
Buren	Eisenhower	Wilson
Truman	Carter	Madison
	Reagan	Kennedy
		Hoover

La répartition obtenue par clustering avec ces 2 nouveaux critères est quasiment identique à celle obtenue empiriquement, et permet de conforter les valeurs des deux seuils retenus. L'étude a également été menée avec le couple de critères (ratio de Sharpe, ancienneté du produit) et aboutit aux mêmes résultats.

Ainsi, en conclusion, nous avons vu que les produits peuvent être classés en sous-groupes de comportement homogène. En utilisant les méthodes statistiques, on trouve qu'il faudrait théoriquement utiliser un grand nombre de clusters pour manipuler des groupes stables. Pour des raisons pratiques, on préconisera plutôt l'utilisation de la méthode

empirique qui consiste à classer les produits en fonction de la position de leur ratio de Sharpe par rapport aux seuils de 2 et 4 correspondant respectivement à la séparation entre produits erratiques/intermédiaires et produits intermédiaires/stables. De plus, les sous-groupes issus du clustering initial sont en général inclus dans un des 3 cas : $\text{Sharpe} < 2$, $2 < \text{Sharpe} < 4$ ou $\text{Sharpe} > 4$. Ces seuils ont été confortés par un clustering avec des jeux de critères différents.



3.2.3) Nouveau paramétrage

Calcul du taux de rachat en régime permanent

Comme nous l'avons mentionné plus haut, les taux de rachat oscillent, en régime permanent autour d'une valeur moyenne, de façon plus ou moins aléatoire. Nous allons proposer plusieurs manières de calculer ce taux de rachat central, dont la valeur est structurante et cruciale dans l'évaluation du risque de rachat.

Première méthode : modèle autorégressif AR(p)

- Principe

Nous disposons donc de séries temporelles correspondant aux taux de rachat mensuels et à leurs évolutions. Un ensemble de modèles classique sur les séries temporelles est la famille des processus autorégressifs d'ordre p , dits modèles AR(p). Le principe consiste à expliquer les valeurs prises par la série uniquement par ses p valeurs passées.

La modélisation des signaux aléatoires par des modèles autorégressifs est devenue une technique classique du traitement du signal. On trouve ainsi des applications dans le traitement de signaux d'antennes, en météorologie pour la reconstitution de vagues à partir de séries temporelles de vent, ou encore dans l'analyse du bruit neutronique d'un réacteur nucléaire.

- Le modèle

Un processus AR(p) est donné par la formule suivante¹¹.

$$X_t = c + a_1X_{t-1} + a_2X_{t-2} + \dots + a_pX_{t-p} + \varepsilon_t$$

Les a_i sont les paramètres du modèle à calibrer, c est une constante et les ε_t sont des variables aléatoires i.i.d. suivant une loi normale centrée d'écart-type σ .

- Ses propriétés

Un cas particulier : AR(1)

$$X_t = c + aX_{t-1} + \varepsilon_t$$

On démontre aisément par récurrence la propriété suivante.

$$E[X_t] = a^t X_0 + c \sum_{i=0}^{t-1} a^i$$

Condition de stationnarité :

$|a| < 1 \Rightarrow$ ***processus stationnaire.***

Alors,

$$E[X_t] = \frac{c}{1-a}$$

$$V[X_t] = \frac{\sigma^2}{1-a^2}$$

$|a| = 1 \Rightarrow$ ***marche aléatoire, processus non stationnaire.***

Alors,

$$E[X_t] = ct + X_0$$

$$V[X_t] = t\sigma^2$$

$|a| > 1 \Rightarrow$ ***processus explosif.***

Cas général : AR(p)

Théorème

Un processus AR(p) est stationnaire si les modules des racines du polynôme caractéristique sont strictement supérieurs à 1.

¹¹ Voir Hamilton J. D. [9]

Dans ce cas, on peut écrire :

$$E[X_t] = \frac{c}{1 - a_1 - a_2 - \dots - a_p}$$

On trouvera en annexe 7 un panorama plus complet sur la théorie des modèles du type AR(p).

- Application aux rachats

Pour chaque produit considéré, un modèle AR(p) a été calibré par la méthode des moindres carrés, avec plusieurs valeurs de p. Le choix de l'ordre p du modèle correspond au meilleur coefficient R² obtenu, mais avec un maximum de 6 retards.

La qualité du modèle retenu a ensuite été appréciée, au moyen du coefficient de détermination R² et de la comparaison entre la série obtenue par le modèle et l'historique. Les résultats sont assez différents suivant les produits, certains donnant une modélisation satisfaisante, d'autres ne permettant pas de reproduire correctement le comportement du produit. Le tableau ci-dessous synthétise les résultats obtenus sur les produits étudiés.

Produit	p	R ²
Tyler	6	0,21
Jackson	6	0,19
Fillmore	6	0,41
Pierce	6	0,67
Adams	6	0,61
Monroe	6	0,19
Lincoln	6	0,20
Johnson	6	0,19
Jefferson	6	0,05
Harrison	6	0,08
Wilson	6	0,35
Washington	6	0,23
Roosevelt	6	0,24
Madison	6	0,17
Kennedy	6	0,13
Eisenhower	4	0,08
Buren	5	0,12
Hoover	5	0,07
Truman	5	0,17
Carter	6	0,04
Reagan	6	0,24

Tableau 6. Indicateurs des modèles AR(p)

Le produit Pierce est un exemple de produit bien modélisé par un AR(6), en revanche, les modèles AR caractérisent mal un produit comme Carter, qui est un multisupport. Les

deux graphiques suivants comparent graphiquement historique et modèle pour ces deux exemples de produits.

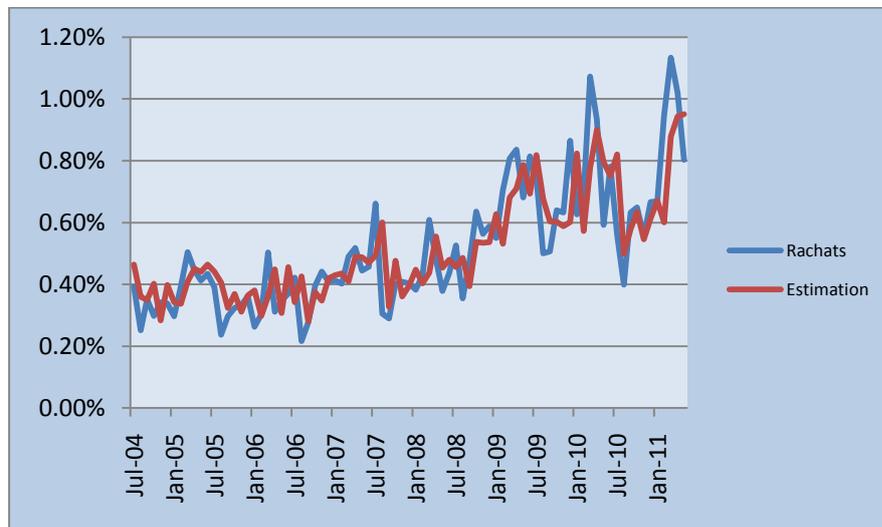


Figure 28. Produit Pierce

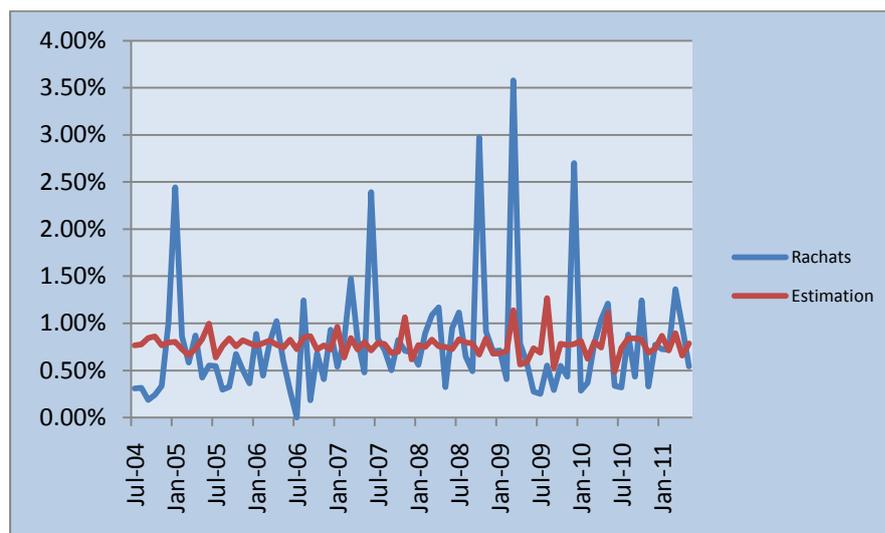


Figure 29. Produit Carter

Dans tous les cas, un test de Shapiro-Wilk¹² a été mené pour vérifier l'hypothèse de normalité des résidus. Nous rappelons ci-dessous les principes de ce test.

Test de Shapiro-Wilk

Il est fondé sur le rapport W de deux estimateurs liés à la variance de l'échantillon : l'une, fonction des étendues partielles $x_n - x_1, x_{n-1} - x_2, \text{ etc.}$, calculées sur l'échantillon ordonné, l'autre étant la somme des carrés des écarts à la moyenne des observations. Ce rapport calculé W sera comparé à une valeur théorique W_{crit} , tabulée, et correspondant à un risque choisi, qui permettra de valider ou non l'hypothèse de normalité. La région critique s'écrit $RC : W < W_{crit}$.

¹² Voir De Cremiers L. [3]

La statistique du test s'écrit, pour un échantillon de taille n ,

$$W = \frac{(\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_i (x_{(n-i+1)} - x_{(i)}))^2}{\sum_{i=1}^n (x_{(i)} - \bar{x})^2}$$

où $x_{(i)}$ représente le i ème élément de l'échantillon trié par ordre croissant
et les a_i sont des constantes tabulées

Si $W > W_{crit}$, l'hypothèse de normalité est compatible avec les données.

Exemple : produit Tyler

Nous disposons de 48 valeurs de résidus, présentées dans la première colonne du tableau ci-dessous.

X_i	$X_{(j)}$	écarts	a_i
-0,04%	-0,20%	0,42%	0,3789
-0,16%	-0,16%	0,34%	0,2604
0,18%	-0,11%	0,23%	0,2281
0,05%	-0,11%	0,22%	0,2045
0,02%	-0,10%	0,21%	0,1855
-0,01%	-0,10%	0,20%	0,1693
0,03%	-0,10%	0,19%	0,1551
0,04%	-0,09%	0,18%	0,1423
-0,09%	-0,08%	0,17%	0,1306
-0,11%	-0,07%	0,15%	0,1197
-0,10%	-0,07%	0,14%	0,1095
0,05%	-0,06%	0,11%	0,0998
-0,11%	-0,04%	0,09%	0,0906
-0,04%	-0,04%	0,09%	0,0817
0,21%	-0,04%	0,09%	0,0731
-0,01%	-0,03%	0,08%	0,0648
-0,20%	-0,02%	0,07%	0,0568
-0,01%	-0,02%	0,06%	0,0489
-0,07%	-0,01%	0,05%	0,0411
0,11%	-0,01%	0,05%	0,0335
-0,02%	-0,01%	0,03%	0,0259
-0,04%	0,00%	0,03%	0,0185
-0,07%	0,02%	0,01%	0,0111
0,08%	0,02%	0,00%	0,0037
0,04%	0,02%		
0,05%	0,02%		
0,11%	0,03%		
0,05%	0,03%		
0,07%	0,04%		
-0,02%	0,04%		
0,02%	0,04%		
0,09%	0,05%		
0,02%	0,05%		
-0,03%	0,05%		
0,00%	0,05%		
0,09%	0,05%		
0,02%	0,05%		
0,11%	0,07%		
0,05%	0,08%		
0,12%	0,08%		
0,03%	0,09%		
0,08%	0,09%		
-0,10%	0,11%		
0,04%	0,11%		
-0,10%	0,11%		
-0,06%	0,12%		
-0,08%	0,18%		
0,05%	0,21%		

Tableau 7. Test de Shapiro-Wilk

La valeur de W obtenue est 0,987, bien supérieure à la valeur critique de 0,947 correspondant à un risque de 5% pour n=48. L'hypothèse de normalité est confirmée.

Calcul du taux de rachat en régime permanent

La stationnarité a été vérifiée pour chaque produit, et la formule théorique de l'espérance d'un processus AR(p) permet de déterminer un premier estimateur du taux moyen de rachat mensuel attendu pour chaque produit. Le calcul a été réalisé sur tous les produits, les résultats sont présentés dans le tableau ci-dessous.

$$E[X_t] = \frac{c}{1 - a_1 - a_2 - \dots - a_p}$$

Produit	Taux de rachat mensuel régime permanent (1)
Tyler	0,38%
Jackson	0,56%
Fillmore	0,56%
Pierce	0,62%
Adams	0,46%
Monroe	0,59%
Lincoln	0,32%
Johnson	0,38%
Jefferson	0,35%
Harrison	0,40%
Wilson	0,52%
Washington	0,49%
Roosevelt	0,53%
Madison	0,28%
Kennedy	0,30%
Eisenhower	0,42%
Buren	0,32%
Hoover	0,94%
Truman	0,44%
Carter	0,78%
Reagan	0,002%
Global	0,53%

Tableau 8. Résultats avec modèle AR(p)

En vue d'améliorer la qualité du calibrage, une variable explicative financière supplémentaire a été ajoutée. Il ne s'agit plus à proprement parler d'un modèle AR(p) étant donné qu'on introduit une variable exogène, mais plus généralement d'un modèle logistique. Nous étudierons en partie IV ces modèles plus en profondeur. Le modèle devient ici :

$$X_t = c + a_1X_{t-1} + a_2X_{t-2} + \dots + a_pX_{t-p} + bY_t + \varepsilon_t$$

Ont été testés pour la variable Y_t , la valeur moyenne du CAC 40 sur le mois courant ou le mois précédent, la volatilité sur le mois courant ou sur le mois précédent, la moyenne

mobile à 6 mois ou 1 an, l'écart-type mobile à 6 mois ou 1 an, le taux du livret A, et le taux 1 an.

R ²	Sans Yt	CAC 40 N	CAC 40 N-1	Vol N	Vol N-1	Moy mob 6 mois	Moy mob 1 an	Vol mob 6 mois	Vol mob 1 an	LA	Taux 1 an
Tyler	20,5%	20,8%	21,2%	20,6%	20,6%	21,3%	21,7%	20,7%	20,6%	23,9%	22,9%
Jackson	18,9%	19,0%	19,3%	23,8%	19,3%	19,7%	20,6%	20,1%	19,9%	22,2%	19,9%
Fillmore	41,1%	42,9%	44,8%	42,0%	41,9%	45,3%	47,7%	41,7%	41,2%	45,0%	44,8%
Pierce	66,6%	67,1%	67,0%	66,6%	66,7%	67,0%	66,8%	66,8%	67,6%	66,6%	67,4%
Adams	61,1%	61,1%	61,3%	63,6%	63,4%	61,3%	61,5%	61,8%	61,4%	61,6%	61,2%
Monroe	18,7%	20,3%	18,7%	21,5%	20,2%	18,7%	18,8%	18,9%	19,2%	18,8%	19,0%
Lincoln	20,2%	20,8%	22,4%	22,7%	20,3%	22,5%	23,9%	22,8%	21,4%	31,0%	24,7%
Johnson	19,5%	22,0%	19,7%	28,4%	20,2%	19,6%	19,5%	20,4%	20,1%	19,7%	19,8%
Jefferson	4,7%	4,8%	11,5%	10,6%	5,9%	8,8%	9,0%	6,9%	4,9%	6,5%	5,6%
Harrison	8,3%	12,1%	11,1%	9,3%	11,4%	10,9%	11,5%	8,7%	8,6%	8,8%	11,7%
Wilson	35,5%	36,9%	40,2%	35,5%	39,0%	43,3%	38,0%	38,3%	37,0%	35,6%	35,9%
Washington	18,2%	27,4%	37,4%	28,7%	30,1%	42,2%	19,0%	20,6%	28,3%	24,0%	30,9%
Roosevelt	24,5%	32,3%	25,0%	25,7%	25,0%	29,9%	24,7%	27,8%	25,3%	26,8%	24,9%
Madison	17,5%	17,5%	17,9%	17,7%	17,9%	18,2%	18,6%	21,3%	18,6%	21,8%	19,3%
Kennedy	12,9%	34,3%	14,1%	24,5%	24,7%	14,1%	21,7%	20,7%	29,3%	24,3%	15,2%
Eisenhower	7,6%	14,4%	14,4%	9,7%	7,9%	14,6%	16,1%	10,0%	7,6%	12,9%	15,3%
Buren	11,8%	11,8%	12,0%	11,9%	13,1%	12,9%	14,9%	21,3%	17,3%	20,9%	13,8%
Hoover	7,1%	7,3%	7,4%	13,1%	7,5%	7,3%	7,1%	7,1%	10,6%	7,1%	7,4%
Truman	17,5%	21,8%	22,5%	18,3%	18,5%	22,3%	20,8%	17,5%	17,6%	18,9%	23,4%
Carter	3,9%	4,2%	3,9%	9,1%	4,6%	3,9%	4,7%	9,8%	14,3%	7,4%	4,0%
Reagan	91,0%	91,1%	93,2%	91,5%	91,1%	92,1%	93,5%	91,5%	91,8%	97,8%	93,9%

Tableau 9. Ajout d'une variable financière au modèle AR(p)

Les 2 meilleures variables explicatives sont représentées en vert dans le tableau précédent. On remarque que les résultats sont très disparates suivant les produits. En moyenne, la meilleure variable explicative est le taux du livret A, indicateur très populaire et bien connu des Français.

Bien que beaucoup de produits présentent un R² faible, le calibrage d'un modèle AR(p) permet tout de même de reproduire le niveau moyen des taux de rachat observés, ce qui est suffisant pour notre étude très particulière.

Deuxième méthode : modèle stochastique

Nous reviendrons plus en détail sur les raisons de ce choix de modélisation pour les rachats en partie IV. L'idée est nouvelle et vient d'une analogie avec le comportement des taux d'intérêt : les taux de rachat ne peuvent pas, sur une durée abusive, prendre des valeurs trop importantes. Ce phénomène peut être modélisé par une force de rappel vers une valeur moyenne. Le modèle de Vasicek semble particulièrement bien adapté pour représenter ce type d'évolution.

Modèle de Vasicek¹³

$$\begin{cases} dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t \\ r_0 = r(0) \end{cases}$$

On suppose r_0, κ, θ et σ constants. Le terme de drift de ce processus d'Ornstein-Uhlenbeck s'interprète classiquement comme un retour à la moyenne long terme ou « régime permanent » θ avec une vitesse de retour à la moyenne κ , et σ représente la volatilité du taux de rachat.

L'écriture de la forme de la solution et les propriétés associées sont les suivantes.

$$r_t = r_s e^{-\kappa(t-s)} + \theta(1 - e^{-\kappa(t-s)}) + \sigma \int_s^t e^{-\kappa(t-u)} dW_u$$

$(r_t)_{0 \leq t \leq T}$ est un processus gaussien

$$E[r_t | F_s] = r_s e^{-\kappa(t-s)} + \theta(1 - e^{-\kappa(t-s)})$$

$$V[r_t | F_s] = \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa(t-s)})$$

De nombreux produits du portefeuille Allianz sont anciens (plus de 8 ans), et il est possible de simplifier les propriétés suivantes en se plaçant en « régime permanent », ce qui simplifie le calibrage du modèle.

$$E[r_t] = \theta$$

$$V[r_t] = \frac{\sigma^2}{2\kappa}$$

Ce modèle présente plusieurs avantages importants pour la mesure du risque de rachat. Il est tout d'abord très **simple à manipuler** et ne demande pas des temps de calcul très importants, ce qui est appréciable dans le monde de l'entreprise. Ensuite, le processus de taux de rachat mensuels est gaussien, et **la manipulation de lois normales** simplifie grandement les calculs. De plus, son calibrage est simple à effectuer, il repose sur l'historique des taux de rachats passés, et il est même possible de **choisir l'historique** considéré afin de repérer des changements de comportement au cours du temps. Il permet également d'effectuer des **tests de sensibilités**, ce qui est essentiel dans le secteur de l'assurance. Enfin, étant donné qu'il se fonde sur l'analyse du comportement de l'historique du taux de rachat, **il capte tous les types de volatilité**, pas uniquement celle liée au taux, comme c'est le cas dans la modélisation actuelle. En effet, on capte notamment la volatilité opérationnelle, qui peut se révéler importante sur les produits ayant connu des phases de changement importantes.

¹³ Voir Eraker B. [4] et Muni Toke I. [6]

Ainsi, comme nous l'avons vu plus haut, le paramètre θ représente la valeur moyenne autour de laquelle le processus r_t des taux de rachat mensuels oscille. Il s'estime très simplement en calculant la moyenne historique du taux de rachat mensuel. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous.

Produit	Taux de rachat mensuel régime permanent (2)
Tyler	0,39%
Jackson	0,56%
Fillmore	0,56%
Pierce	0,51%
Adams	0,43%
Monroe	0,58%
Lincoln	0,32%
Johnson	0,36%
Jefferson	0,34%
Harrison	0,38%
Wilson	0,51%
Washington	0,47%
Roosevelt	0,51%
Madison	0,28%
Kennedy	0,30%
Eisenhower	0,42%
Buren	0,33%
Hoover	0,95%
Truman	0,44%
Carter	0,77%
Reagan	0,02%
Global	0,54%

Tableau 10. Résultats avec modèle stochastique

Troisième méthode : lois d'expérience

Les lois de rachat peuvent également être calculées à partir des observations passées et être prolongées statistiquement pour effectuer des projections (c'est une méthode aujourd'hui utilisée chez Allianz, et nous n'apporterons pas d'innovations particulières ici). Plus précisément, les rachats historiques (observés) sont séparés entre rachats partiels et rachats totaux, puis par ancienneté des contrats. Nous disposons donc, pour chaque année comptable, d'une courbe des taux de rachats en fonction de l'ancienneté. Pour chaque année comptable disponible, la loi est prolongée pour les anciennetés plus grandes en prenant la moyenne sur les 5 ou 10 dernières anciennetés de la même année comptable. Ensuite, la loi de l'année comptable courante est construite, pour une certaine année d'ancienneté, en calculant sur les dernières années comptables les taux de rachat observés de l'ancienneté considérée (en ignorant éventuellement certaines années comptables jugées aberrantes). Prenons un exemple :

Nous disposons, pour un certain produit, des données suivantes pour les années comptables 2008, 2009 et 2010. Ces données sont issues d'observations historiques et ont été retraitées des rachats exceptionnels. Ils forment ainsi les rachats structurels.

Ancienneté	2010	2009	2008
1	2,04%	3,35%	3,45%
2	2,04%	3,35%	3,45%
3	2,04%	3,35%	3,45%
4	2,04%	3,35%	3,45%
5	2,04%	3,35%	3,45%
6	2,04%	3,35%	3,86%
7	2,04%	3,38%	3,32%
8	1,94%	2,21%	2,48%
9	9,02%	12,10%	13,51%
10	4,53%	4,70%	5,73%
11	5,35%	6,48%	6,25%
12	3,30%	4,14%	5,00%
13	3,24%	3,88%	4,38%
14	2,75%	3,57%	3,72%
15	2,61%	2,74%	3,32%
16	2,19%	2,59%	2,57%
17	1,67%	2,01%	2,03%
18	1,21%	1,81%	2,07%
19	1,27%	1,75%	-
20	1,11%	-	-

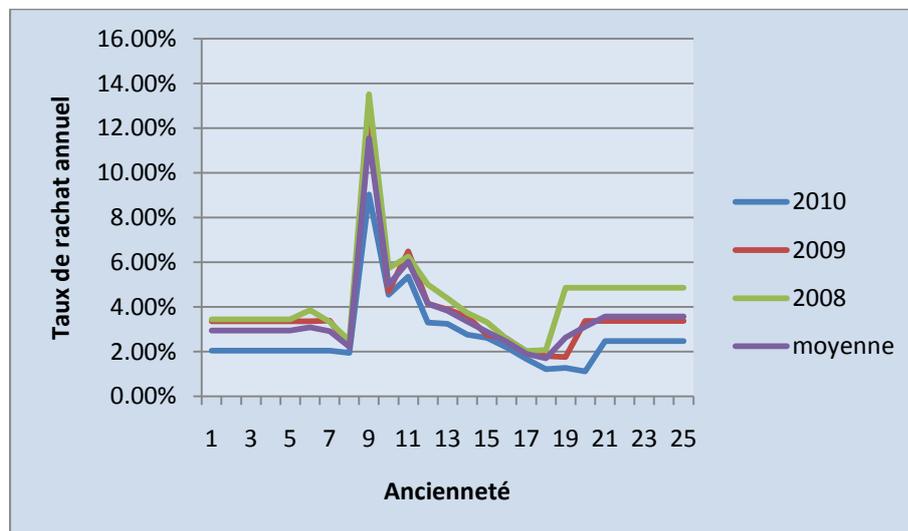
Tableau 11. Exemple de données de rachat par ancienneté

Pour des besoins de projection, la loi de l'année 2010 doit être prolongée pour les anciennetés supérieures à 20 ans. La méthode consiste à prendre un taux flat (constant) égal à la moyenne sur les n dernières anciennetés disponibles (prenons par exemple les 10 dernières anciennetés, i.e. de 11 à 20). On obtient 2,47% pour l'année 2010. De même, pour l'année 2009 (en prenant la moyenne sur les anciennetés 10 à 19), on obtient un taux de rachat de 3,37%, et il vaut 4.86% en 2008.

La loi estimée de 2011 peut être estimée en prenant, pour chaque ancienneté, la moyenne sur les 3 années comptables disponibles 2008, 2009 et 2010 des taux de rachat observés pour cette ancienneté. On obtient ainsi les résultats suivants.

Ancienneté	2011 (est.)	2010	2009	2008
1	2,95%	2,04%	3,35%	3,45%
2	2,95%	2,04%	3,35%	3,45%
3	2,95%	2,04%	3,35%	3,45%
4	2,95%	2,04%	3,35%	3,45%
5	2,95%	2,04%	3,35%	3,45%
6	3,09%	2,04%	3,35%	3,86%
7	2,91%	2,04%	3,38%	3,32%
8	2,21%	1,94%	2,21%	2,48%
9	11,54%	9,02%	12,10%	13,51%
10	4,99%	4,53%	4,70%	5,73%
11	6,03%	5,35%	6,48%	6,25%
12	4,15%	3,30%	4,14%	5,00%
13	3,83%	3,24%	3,88%	4,38%
14	3,35%	2,75%	3,57%	3,72%
15	2,89%	2,61%	2,74%	3,32%
16	2,45%	2,19%	2,59%	2,57%
17	1,90%	1,67%	2,01%	2,03%
18	1,70%	1,21%	1,81%	2,07%
19	2,63%	1,27%	1,75%	4,86%
20	3,11%	1,11%	3,37%	4,86%
21	3,56%	2,47%	3,37%	4,86%
22	3,56%	2,47%	3,37%	4,86%
23	3,56%	2,47%	3,37%	4,86%
24	3,56%	2,47%	3,37%	4,86%
25	3,56%	2,47%	3,37%	4,86%

Tableau 12. Estimation des rachats par lois d'expérience



Afin de disposer d'un taux de rachat annuel global, il suffit de sommer ces taux de rachats sur toutes les anciennetés en les pondérant par les valeurs des PM par ancienneté. Ces calculs sont effectués dans le logiciel de projection MoSes, et sont ensuite disponibles dans les fichiers 'Liability' que nous avons décrits précédemment. Les valeurs de rachat en

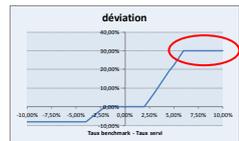
régime de croisière sont synthétisées dans le tableau suivant, où les valeurs issues des méthodes précédentes sont également rappelées.

Produit	Taux de rachat mensuel régime permanent 1 (AR)	Taux de rachat mensuel régime permanent 2 (Vasicek)	Taux de rachat mensuel régime permanent 3 (Prolongement)
Tyler	0,38%	0,39%	0,46%
Jackson	0,56%	0,56%	0,49%
Fillmore	0,56%	0,56%	0,47%
Pierce	0,62%	0,51%	0,47%
Adams	0,46%	0,43%	0,48%
Monroe	0,59%	0,58%	0,50%
Lincoln	0,32%	0,32%	0,31%
Johnson	0,38%	0,36%	0,25%
Jefferson	0,35%	0,34%	-
Harrison	0,40%	0,38%	-
Wilson	0,52%	0,51%	-
Washington	0,49%	0,47%	-
Roosevelt	0,53%	0,51%	-
Madison	0,28%	0,28%	0,26%
Kennedy	0,30%	0,30%	0,33%
Eisenhower	0,42%	0,42%	0,45%
Buren	0,32%	0,33%	0,38%
Hoover	0,94%	0,95%	0,84%
Truman	0,44%	0,44%	0,37%
Carter	0,78%	0,77%	0,68%
Reagan	0,002%	0,02%	0,40%
Global	0,53%	0,54%	0,50%

Tableau 13. Comparaison des trois approches présentées

Bien que les 3 modes de calcul proposés se fondent sur des théories très différentes, on peut remarquer des similitudes, notamment la position des produits en termes de rachats (un produit présentant un fort taux de rachat avec une méthode a aussi un fort taux de rachat avec les autres méthodes). Lorsque le taux calculé par méthode de prolongement (3) diffère des autres résultats, il s'agit souvent de contraintes opérationnelles : par exemple, les produits Tyler, Jackson, Fillmore et Pierce présentent des taux quasiment identiques car leurs lois de départ reposent sur une même loi issue d'un regroupement de produits, alors que les autres méthodes sont personnalisées au produit.

Calcul des paramètres ALIM



surr_incr_max

La modélisation actuelle est telle que le taux de rachat maximal, après dynamisation, ne puisse dépasser 19%, et ce quel que soit le produit.

Pour améliorer ce paramétrage, le modèle de Vasicek a été retenu pour le calcul de la déviation maximale à appliquer dynamiquement au rachat. Il présente l'avantage de pouvoir **prévoir le taux de rachat maximal M en fonction d'un risque choisi par le décideur**. En effet, en considérant un risque α , la probabilité pour que le taux de rachat dépasse ce seuil M recherché s'écrit, sous le modèle de Vasicek en régime permanent,

$$P(r_t > M) = \alpha$$
$$P\left(\mathfrak{N}\left(\theta, \frac{\sigma^2}{2\kappa}\right) > M\right) = \alpha$$
$$P\left(\mathfrak{N}(0,1) > \frac{M - \theta}{\frac{\sigma}{\sqrt{2\kappa}}}\right) = \alpha$$
$$M = \theta + \frac{\sigma}{\sqrt{2\kappa}} F_\alpha$$

Les valeurs de F_α sont tabulées.

L'autre principal avantage de cette modélisation est de pouvoir calculer des paramètres pour chaque produit, et donc d'avoir un paramétrage prenant en compte les spécificités du comportement de chacun d'entre eux. Ainsi, en calibrant les paramètres de Vasicek sur l'historique de chaque produit, on obtient la valeur du taux de rachat mensuel maximal attendu au risque α . Ce taux est ensuite multiplié par 12 pour avoir un taux de rachat annualisé. Enfin, on en déduit la valeur du paramètre ALIM `surr_incr_max`.

$$\text{Taux dynamique de rachat} = \text{Taux déterministe de rachat} * (1 + \text{déviation})$$

$$12 * M = \text{Taux déterministe de rachat} * (1 + \text{surr_incr_max})$$

$$\text{surr_incr_max}_\alpha = 12 * \frac{\theta + \frac{\sigma}{\sqrt{2\kappa}} F_\alpha}{\text{Taux déterministe de rachat}} - 1$$

Cette méthode de calcul est prudente à plusieurs niveaux :

- Pour le calcul pratique, on considère un risque correspondant à un événement ne se déclarant que tous les 200 ans (2 400 mois), choisi en cohérence avec Solvabilité II. Dans notre cas, $\alpha = \frac{1}{12*200}$

- L'annualisation du taux de rachat maximal est prudente car on considère que le taux mensuel maximal obtenu se reproduit sur 12 mois consécutifs
- On prend en compte toutes les volatilités, notamment opérationnelle, et pas uniquement celle due aux taux
- Il sera toujours possible d'appliquer un coefficient de sécurité supplémentaire

Le tableau ci-dessous compare le taux de rachat maximal historique, les valeurs obtenues par ce modèle à partir des historiques de rachat depuis janvier 2007, et les valeurs actuellement utilisées dans ALIM, et ce pour chaque produit présent dans les fichiers d'input ALIM.

	Tyler	Jackson	Fillmore	Pierce	Adams	Monroe	Lincoln	Johnson
<i>Rachat maximal réel</i>	5,38%	8,39%	8,43%	10,97%	7,00%	7,78%	4,59%	5,96%
Rachat maximal Modèle	8,43%	15,22%	13,66%	15,61%	11,73%	11,33%	6,96%	12,65%
Rachat maximal Actuel	19%	19%	19%	19%	19%	19%	19%	19%
<i>surr_incr_max Modèle</i>	88%	114%	98%	115%	94%	63%	84%	162%
<i>surr_incr_max Actuel</i>	220%	234%	234%	317%	233%	227%	387%	505%

	Madison	Kennedy	Buren	Hoover	Truman	Carter	Global
<i>Rachat maximal réel</i>	3,71%	3,72%	4,84%	12,90%	5,94%	11,83%	7,14%
Rachat maximal Modèle	5,85%	6,58%	9,79%	21,62%	11,69%	38,75%	10,18%
Rachat maximal Actuel	19%	19%	19%	19%	19%	19%	19%
<i>surr_incr_max Modèle</i>	79%	86%	149%	89%	133%	271%	-
<i>surr_incr_max Actuel</i>	483%	402%	296%	89%	306%	122%	-

Tableau 14. Comparaison modèle de Vasicek-méthode actuelle

Le nouveau paramétrage permet, sur la plupart des produits, de revoir à la baisse le niveau de rachat maximal attendu sur la durée de la projection ALIM. On pourra ainsi s'attendre à une diminution du coût des options & garanties. En revanche, sur certains produits (voir notamment les produits Hoover et Carter), le paramétrage actuel n'est pas assez prudent, au vu du comportement historique spécifique de ces produits (migrations, etc.). Le modèle proposé permet également de bien respecter les comportements relatifs entre produits : pour un produit ayant un taux de rachat maximal réel élevé par rapport aux autres, le modèle donne également un taux de rachat maximal relatif élevé, et inversement.

Influence de la crise

Des études supplémentaires ont été menées, afin d'observer l'évolution du comportement des rachats au cours du temps. Il est notamment intéressant de se concentrer sur les différentes phases du cycle économique : quel fut l'effet de la crise sur le comportement des assurés en termes de rachat ?

L'étude précédente a été réalisée en considérant tout l'historique depuis début 2007. Le modèle présente l'avantage de pouvoir être calibré sur un historique quelconque, et il a ainsi été possible de l'utiliser séparément sur les données de crise et sur les données post-crise. De plus, un calcul « pire cas » (resp. « meilleur cas ») a été effectué en considérant l'intégralité de l'historique, mais en utilisant comme paramètre θ non pas la moyenne empirique, mais le maximum (resp. minimum) des rachats mensuels et la plus grande (resp. plus faible) volatilité mobile à 1 an sur l'historique. Le tableau ci-dessous donne les données utilisées.

Etude	Données considérées	θ	$\frac{\sigma}{\sqrt{2\kappa}}$
Central	Toutes	Moyenne	Volatilité
Pire cas	Toutes	Max	Max vol mobile 1 an
Meilleur cas	Toutes	Min	Min vol mobile 1 an
Crise	Oct 08-mar 10	Moyenne	Volatilité
Post-crise	Jan 10-mai 11	Moyenne	volatilité

Tableau 15. Choix des données pour différentes études

Ainsi, dans la version « pire cas », on considère que la valeur moyenne autour de laquelle oscillent les rachats en régime permanent est égale au maximum des rachats mensuels observés sur l'historique et que la volatilité est égale à la plus grande volatilité mobile à 1 an observée sur ce même historique. Il s'agit donc d'un cas extrême.

Dans la version « meilleur cas », on considère que la valeur moyenne autour de laquelle oscillent les rachats en régime permanent est égale au minimum des rachats mensuels observés sur l'historique et que la volatilité est égale à la plus faible volatilité mobile à 1 an observée sur ce même historique. Il s'agit donc d'un cas extrême, davantage présenté pour information car il n'est pas utilisable en tant que tel car très imprudent.

Dans la version « crise », on revient au paramétrage classique, mais on ne considère que la partie de l'historique correspondant à la récente crise financière. Il s'agit d'isoler l'effet de la crise sur le comportement des assurés.

Dans la version « post-crise », on utilise également le paramétrage classique, mais on ne considère que la partie de l'historique correspondant à l'après-crise. Il s'agit cette fois-ci de disposer d'un paramétrage actualisé et reflétant le comportement actuel des assurés.

Pour choisir l'historique à utiliser dans les cas « crise » et « post-crise », les moyennes mobiles ont été tracées pour chaque produit et sur le portefeuille global. La moyenne mobile, en lissant les évolutions de la variable considérée, constitue un bon indicateur pour

identifier les grandes tendances et les changements de régime. Les moyennes mobiles à 6 mois et à 1 an ont été tracées, de même que les volatilités mobiles à 6 mois et 1 an. Les graphiques ci-dessous donnent des exemples de produits représentatifs et ce qu'on obtient pour le portefeuille global.

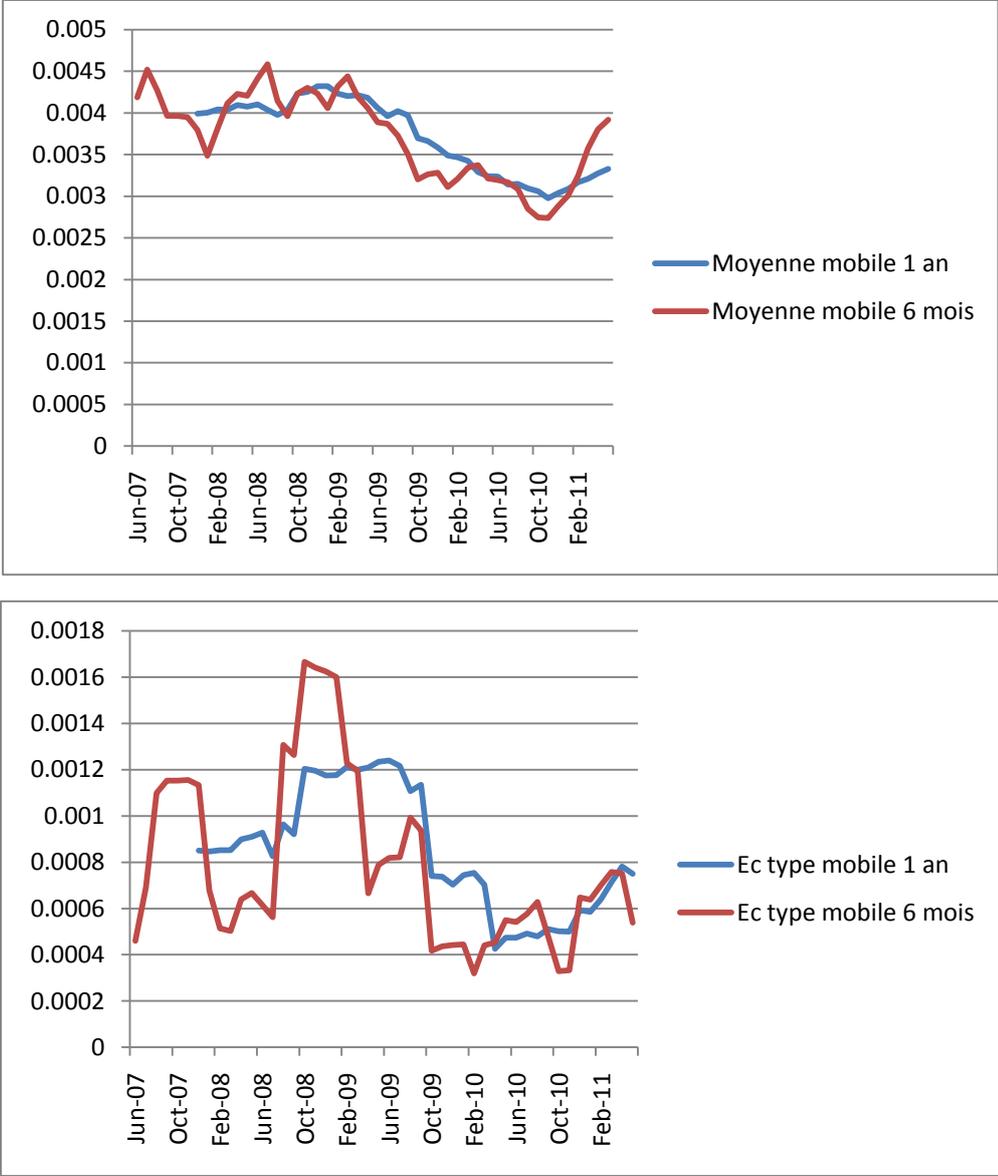


Figure 30. Produit Tyler

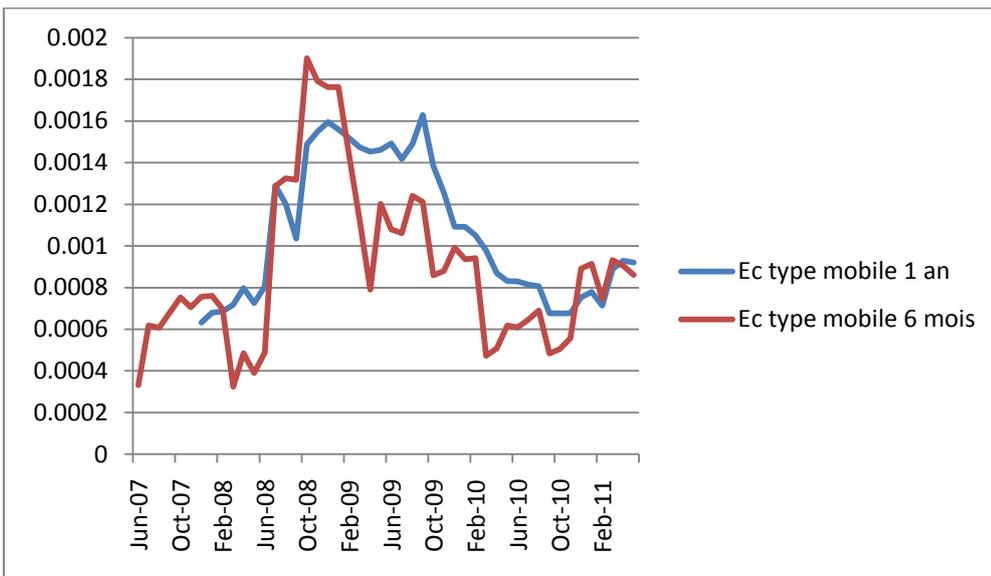
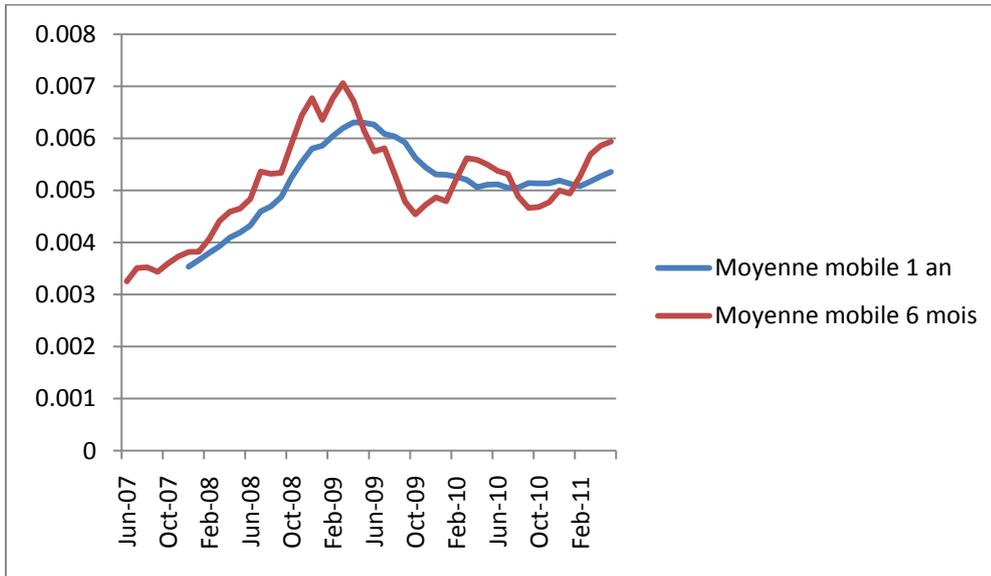


Figure 31. Produit Adams

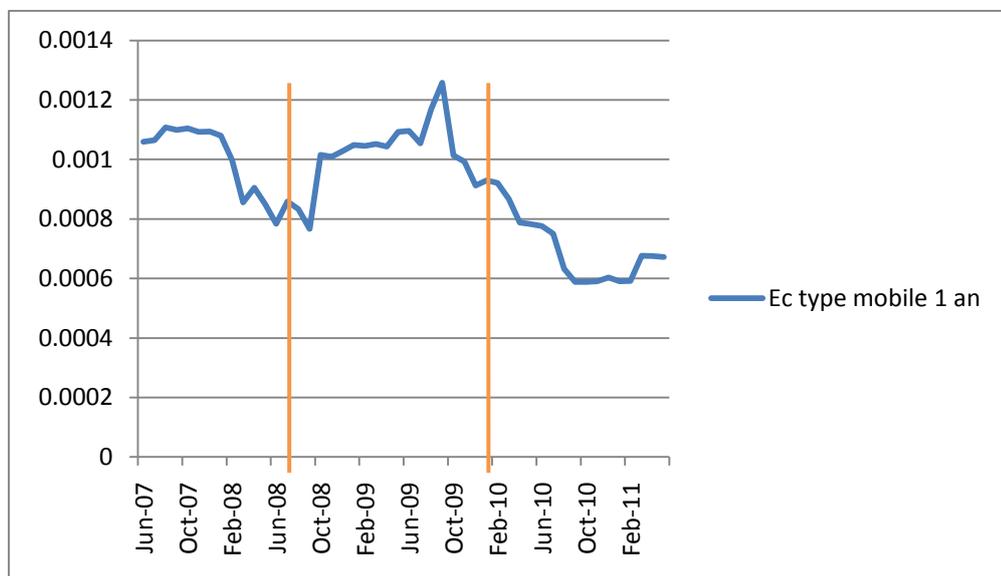
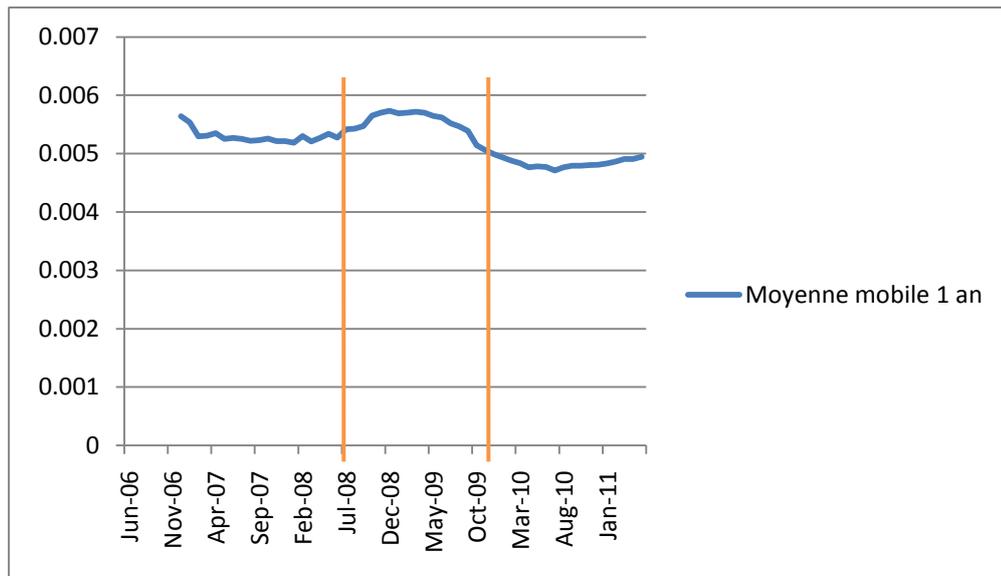


Figure 32. Portefeuille global

La période de crise est clairement identifiable sur l'historique de rachats mensuels, aussi bien en termes de niveau de rachats que de volatilité. Leurs niveaux sont revenus à des valeurs plus faibles depuis 2010, même inférieures aux valeurs connues habituellement avant la crise.

Les résultats sont synthétisés dans les tableaux suivants. Deux historiques ont été considérés afin de comparer l'évolution temporelle des résultats. Il en ressort que les valeurs sont stables, ce qui renforce la confiance dans les valeurs obtenues.

Historique depuis janvier 2007

<i>Rachat mensuel maximal</i>	Tyler	Jackson	Fillmore	Pierce	Adams	Monroe	Lincoln	Johnson
Actuel	19%	19%	19%	19%	19%	19%	19%	19%
Meilleur cas	3,87%	8,73%	7,16%	6,53%	5,98%	7,43%	3,41%	2,34%
Central	8,43%	15,22%	13,66%	15,61%	11,73%	11,33%	6,96%	12,65%
Pire cas	13,31%	25,16%	18,44%	22,68%	17,33%	17,47%	13,15%	25,77%
Crise	8,71%	15,98%	12,02%	14,47%	12,67%	11,99%	8,00%	16,38%
Post-crise	6,88%	12,26%	10,07%	17,71%	9,98%	11,81%	5,17%	10,69%

<i>Rachat mensuel maximal</i>	Madison	Kennedy	Buren	Hoover	Truman	Carter	Global
Actuel	19%	19%	19%	19%	19%	19%	19%
Meilleur cas	3,69%	3,44%	5,28%	13,09%	6,26%	13,28%	6,16%
Central	5,85%	6,58%	9,79%	21,62%	11,69%	38,75%	10,18%
Pire cas	9,07%	9,47%	16,75%	36,29%	18,34%	89,09%	14,65%
Crise	6,57%	7,40%	10,33%	19,83%	12,75%	54,28%	10,83%
Post-crise	4,78%	5,41%	7,90%	18,73%	11,23%	23,72%	8,54%

<i>surr_incr_max</i>	Tyler	Jackson	Fillmore	Pierce	Adams	Monroe	Lincoln	Johnson
Actuel	220%	234%	234%	317%	233%	227%	387%	505%
Meilleur cas	-14%	23%	4%	-10%	-1%	7%	-10%	-52%
Central	88%	114%	98%	115%	94%	63%	84%	162%
Pire cas	196%	254%	167%	212%	187%	151%	247%	435%
Crise	93%	116%	85%	74%	81%	72%	118%	226%
Post-crise	75%	100%	76%	97%	55%	59%	43%	97%

<i>surr_incr_max</i>	Madison	Kennedy	Buren	Hoover	Truman	Carter	Global
Actuel	483%	402%	296%	89%	306%	122%	-
Meilleur cas	13%	-3%	35%	14%	25%	27%	-1%
Central	79%	86%	149%	89%	133%	271%	63%
Pire cas	178%	167%	327%	217%	265%	754%	135%
Crise	90%	94%	149%	70%	155%	375%	72%
Post-crise	65%	59%	149%	71%	145%	172%	44%

Tableau 16. Paramétrage dans les différents scénarios (données récentes)

Historique depuis janvier 2004

<i>Rachat mensuel maximal</i>	Tyler	Jackson	Fillmore	Pierce	Adams	Monroe	Lincoln	Johnson
Actuel	19%	19%	19%	19%	19%	19%	19%	19%
Meilleur cas	3,87%	6,58%	6,54%	5,23%	3,36%	7,43%	3,41%	1,38%
Central	8,78%	15,14%	12,72%	14,50%	11,74%	11,30%	6,83%	11,44%
Pire cas	13,31%	25,16%	18,44%	22,68%	18,00%	17,47%	13,15%	25,77%
Crise	8,71%	15,98%	12,02%	14,47%	12,67%	11,99%	8,00%	16,38%
Post-crise	6,88%	12,26%	10,07%	17,71%	9,98%	11,81%	5,17%	10,69%

<i>Rachat mensuel maximal</i>	Madison	Kennedy	Buren	Hoover	Truman	Carter	Global
Actuel	19%	19%	19%	19%	19%	19%	19%
Meilleur cas	3,69%	3,44%	4,49%	13,09%	4,22%	10,39%	5,71%
Central	5,95%	6,58%	9,57%	21,62%	12,10%	34,36%	11,22%
Pire cas	9,07%	9,47%	16,75%	36,29%	19,98%	89,09%	16,95%
Crise	6,57%	7,40%	10,33%	19,83%	12,75%	54,28%	10,83%
Post-crise	4,78%	5,41%	7,90%	18,73%	11,23%	23,72%	8,54%

<i>surr_incr_max</i>	Tyler	Jackson	Fillmore	Pierce	Adams	Monroe	Lincoln	Johnson
Actuel	220%	234%	234%	317%	233%	227%	387%	505%
Meilleur cas	-17%	-2%	-2%	-14%	-35%	7%	-11%	-68%
Central	88%	126%	91%	139%	127%	63%	77%	164%
Pire cas	184%	276%	176%	273%	248%	152%	241%	495%
Crise	93%	116%	85%	74%	81%	72%	118%	226%
Post-crise	75%	100%	76%	97%	55%	59%	43%	97%

<i>surr_incr_max</i>	Madison	Kennedy	Buren	Hoover	Truman	Carter	Global
Actuel	483%	402%	296%	89%	306%	122%	-
Meilleur cas	11%	-3%	14%	14%	-21%	13%	-12%
Central	79%	86%	142%	89%	127%	273%	73%
Pire cas	172%	167%	324%	217%	275%	866%	162%
Crise	90%	94%	149%	70%	155%	375%	72%
Post-crise	65%	59%	149%	71%	145%	172%	44%

Tableau 17. Paramétrage dans les différents scénarios (données intégrales)

Ces résultats montrent que le paramétrage actuel de 19% est dans la plupart des cas supérieur au taux de rachat maximal auquel on peut s'attendre dans tous les scénarios, y compris le pire cas où on considère que la valeur long terme des rachats vaut le maximum observé sur l'historique.

Le graphique ci-dessous donne, sur le produit pour lequel le taux de rachat maximal du modèle est le plus proche du taux de rachat historique (donc le moins prudent) la comparaison entre ces deux taux. Même dans ce cas, la marge reste importante, y compris pendant la récente crise de 2008 où le taux de rachat observé reste éloigné du taux de rachat maximal théorique.

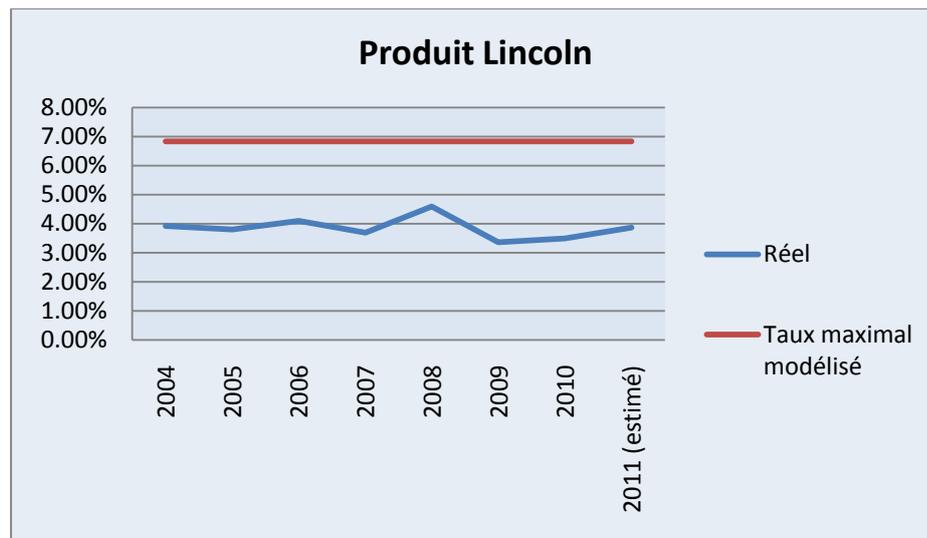
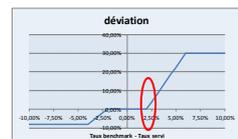


Figure 33. Positionnement du modèle sur le produit où il est le moins prudent

De plus, on remarque qu'en temps de crise, les rachats sont globalement plus élevés et donnent un paramétrage plus prudent. Suite à la crise, les rachats se sont stabilisés à un niveau inférieur et sont beaucoup moins volatiles, ce qui explique un paramétrage plus agressif.

surr_incr_begin



Une première solution envisageable serait de partir des données historiques et d'étudier, dans les cas où le taux servi par le contrat d'assurance est inférieur au taux 1 an, à partir de quelle différence de taux les rachats évoluent fortement. Ce raisonnement n'est pas applicable en pratique car, pour chaque année comptable et chaque produit, le taux servi par Allianz est toujours supérieur au taux 1 an. Ainsi, le comportement réel des assurés Allianz en cas de hausse des taux du marché par rapport au taux crédité est parfaitement inconnu. En d'autres termes, il est impossible de calibrer la variable `surr_incr_begin` à partir des données réelles disponibles. Il faut donc s'en tenir à un raisonnement théorique.

La démarche actuellement implémentée repose sur l'étude d'un unique produit ayant un TMG de 4,5%, et consiste à comparer ce TMG au taux benchmark. Les résultats sont ensuite appliqués à l'ensemble des produits.

La nouvelle méthode proposée ici permet de prendre davantage en compte les spécificités de chaque produit, rend la simulation plus réaliste et a fait l'objet d'une rationalisation. Elle est détaillée ci-dessous et repose sur un raisonnement issu du rachat de crédit, qui présente la même logique.

Mettons-nous dans la peau d'un assuré ayant ouvert un contrat d'assurance vie proposant un TMG de 2% par exemple. Chaque année, l'assureur lui communique le taux réellement crédité au titre de son contrat (supérieur ou égal à 2%). Le client, supposé rationnel, va alors comparer ce taux (et non plus simplement le TMG) avec celui que propose le marché (taux benchmark), et se demander s'il ne ferait pas mieux de racheter son contrat d'assurance vie pour placer son épargne au taux du marché. **Le rachat du contrat entraîne un certain nombre de frais** qui viendront diminuer la valeur de son nouvel investissement :

- Prélèvement de taxes sur les plus-values
- Prélèvements sociaux (CSG + CRDS)
- Eventuels frais de rachat
- Frais d'acquisition du nouveau contrat

Le graphique ci-dessous représente les 2 situations d'évolution de l'épargne pour un rachat au bout de 4 ans (sur cet exemple, l'épargne est rémunérée à 2,5% sur le contrat d'assurance vie et à 4% sur le marché).

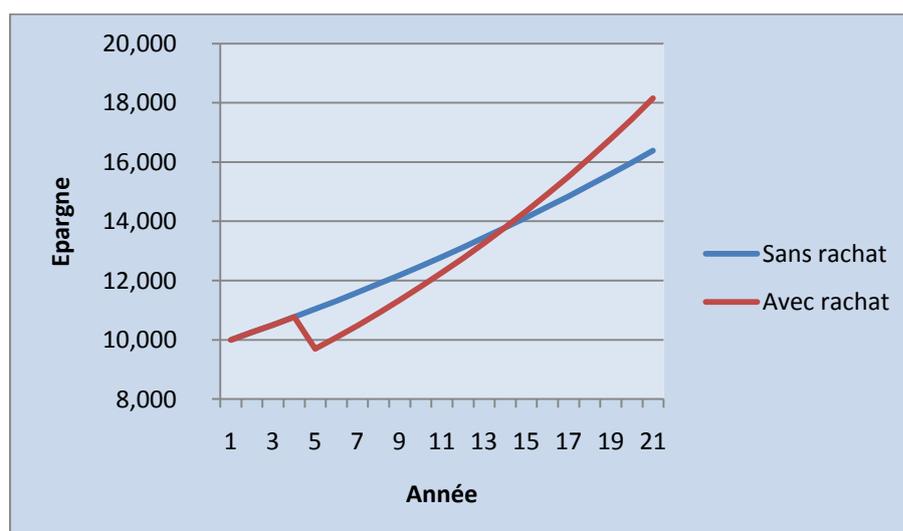


Figure 34. Faut-il racheter son contrat d'assurance vie ?

Ainsi, sa nouvelle épargne partira d'une assiette inférieure, mais sera mieux rémunérée. La décision de rachat est donc l'objet d'un arbitrage. Le nouvel investissement effectué rapportera davantage que le contrat d'assurance vie initial, mais la question est de savoir **en combien de temps**. Plus l'écart de taux est important, plus cette durée sera courte, et plus le rachat sera profitable à l'assuré.

Un autre facteur mérite d'être pris en compte : la motivation même des assurés provenant des incitations. Prenons l'exemple d'un agent immobilier¹⁴. Lorsque vous voulez vendre votre maison, vous faites appel à ses services pour dresser les caractéristiques du bien, prendre des photos, établir une annonce séduisante, faire des visites, négocier, etc. C'est une somme de travail considérable, qui, sur une vente de disons 300 000€ lui rapportera, sur les 6% de commissions habituels, une part de 1,5%, soit 4 500€, ce qui est confortable. Et si en réalité, la maison valait plus que 300 000€ ? Si en y mettant plus d'effort, de patience et quelques annonces supplémentaires, il avait pu en tirer 310 000€ ? Hors commission, cela aurait ajouté 9 400€ à votre part. Mais celle de l'agent, elle, n'aurait augmenté que de 150€ (1,5% de 10 000€). Vos objectifs ne coïncident pas. Ainsi, l'agent immobilier vous poussera à accepter la première offre raisonnable, il veut que l'affaire se fasse vite. Pourquoi ? Parce que le bénéfice qu'il tirerait d'une offre supérieure, 150€, n'a pas de quoi l'inciter à agir autrement.

Revenons à notre étude : le rachat engendre une procédure assez lourde, il faut fournir des justificatifs, effectuer des démarches administratives et le tout peut prendre plusieurs mois. Ainsi, si le nouvel investissement ne rapporte finalement qu'un faible rendement par rapport à la conservation du contrat, l'assuré, tout comme l'agent immobilier, ne va pas perdre son temps précieux pour ne gagner qu'un faible surplus. De plus, conserver son contrat d'assurance présente l'avantage d'être certain de bénéficier d'un TMG. En revanche, si le taux benchmark est le taux 1 an par exemple, il peut certes permettre de rapporter gros la première année, mais rien ne garantit qu'il conservera ce niveau élevé sur les suivantes. Ce risque que porte l'assuré est un risque de marché.

Pour modéliser ce phénomène, nous allons introduire une notion nouvelle : une **prime de risque** demandée par l'assuré à son nouvel investissement au titre de la lourdeur des démarches administratives et du risque de taux.

¹⁴ Voir Levitt Steven D., Dubner Stephen J. [15]

Analogie avec la résistance des matériaux

Cette analogie est proposée pour la première fois dans ce mémoire et va nous permettre de développer tout un nouveau modèle.

Une fois le problème ainsi posé, une analogie peut être faite avec le domaine de la résistance des matériaux. En effet, la formulation est assez similaire : prenons par exemple une poutre cylindrique de section S soumise à une contrainte normale de traction N .



La théorie¹⁵ nous dit qu'il existe pour la contrainte $\sigma = \frac{N}{S}$ un seuil au-delà duquel le matériau se rompt, appelé résistance élastique, et dépendant du matériau. La condition s'écrit $\sigma \leq \sigma_{crit} = R_e$. En-deçà de ce seuil, le matériau se fragilise mais ne rompt pas.

Dans le cas des rachats, la modélisation est similaire : tant que la différence entre le taux benchmark et le taux crédité est inférieur à un certain seuil, les rachats dynamiques ne sont pas activés, en revanche, dès qu'elle atteint ce seuil, ils apparaissent. Ainsi, la contrainte normale, représentant la pression subie par la poutre, aura pour analogue la différence entre le taux benchmark et le taux crédité, contrainte de pression que subit l'assuré. La section représente en quelque sorte l'assiette sur laquelle repose la contrainte. Une force de 1N sur 1m² est beaucoup plus faible qu'une force de 1N sur 1mm². De même, la différence de taux doit être rapportée à l'assiette sur laquelle elle est basée, qui pourrait être le taux crédité. Une différence de taux de 1% sur un taux servi de 10% n'a pas psychologiquement le même impact qu'une différence de 1% sur un taux servi de 1%. L'analogie entre les variables des deux domaines est synthétisée dans le tableau ci-dessous.

Résistance des matériaux	Rachats
Contrainte normale N	Ecart de taux
Section S	Niveau du taux crédité
Résistance élastique	A définir

On s'attend ainsi à trouver une condition de la forme suivante, où R dépend de caractéristiques « matériau », c'est-à-dire de caractéristiques du produit.

$$\frac{\tau_{bmk} - \tau_{cred}}{\tau_{cred}} \leq R$$

¹⁵ Voir Aubry D. [2]

Analogie avec la météorologie

Il est possible d'aller un cran plus loin dans la prévision.

Par les belles journées de printemps, on peut observer en levant les yeux des cumulus (figure 36). Ce sont des nuages présentant une caractéristique bien spécifique : leur base parfaitement horizontale est située à une altitude précise.



Figure 35. Un cumulus

Quel mystère de la physique autorise cette étrange propriété ? Il s'agit du processus suivant : l'air monte en raison de la convection thermique due à la chaleur du sol. A une certaine altitude, c'est-à-dire à une certaine température, la saturation est atteinte et une élévation supplémentaire provoque la condensation. C'est le même phénomène qui se produit avec la buée qui s'échappe de l'haleine lorsque la température est inférieure à 15°C. Le plancher nuageux se place ainsi à l'altitude où l'humidité de l'air atteint 100%. Plus bas, il n'y a pas de condensation, plus haut se forment les nuages. C'est à nouveau le même schéma que pour l'activation des rachats dynamiques.

La théorie de la formation des nuages donne une réponse à la question suivante : à partir de quelle température (ou altitude) T_C les nuages commencent-ils à se former ? En utilisant une température de référence T_A , on obtient une relation de la forme suivante : les nuages ne se forment pas tant que

$$\frac{T_A - T_C}{T_A} \leq \frac{K_1}{K_2 f_1(T_A) + K_3}$$

Où les K_i sont des constantes dépendant de l'enthalpie massique de vaporisation de l'eau, des masses molaires de l'eau et de l'air sec, de la capacité thermique massique à pression constante de l'air sec, de l'humidité de référence et de la constante des gaz parfaits, et où f_1 est une fonction réelle décroissante allant de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R}_+^* .

Dans notre cas, la question est à partir de quel taux les assurés vont-ils commencer à racheter (les nuages vont-ils commencer à se former) ? On peut donc s'attendre à une relation de la forme suivante.

$$\frac{\Delta}{\tau_{cred}} \leq \frac{k_1}{k_2 g_{\downarrow}(\tau_{cred}) + k_3}$$

Formalisation du problème appliqué au rachat

Formalisons le raisonnement précédent en commençant par adopter les notations suivantes.

Variable	Notation
Investissement initial	C_0
Taux réellement crédité par le contrat	τ_{cred}
Ancienneté en années du contrat au moment du rachat	i
Taux benchmark à comparer au taux crédité	τ_{bmk}
Prime de risque	λ
Frais d'acquisition du nouveau contrat	f_{acq}
Taxes sur plus-values	$Tax(i)$
Prélèvements sociaux	ps
Total des taxes	$PS(i) = ps + Tax(i)$
Facteur de capitalisation depuis souscription	$C = (1 + \tau_{cred})^i$
Ecart entre taux benchmark et taux crédité	$\Delta = \tau_{bmk} - \tau_{cred}$

Notons également x la durée en années au bout de laquelle le nouvel investissement suite au rachat est profitable par rapport à la conservation du contrat d'assurance. Le choix du paramètre `surr_incr_begin` reposera sur la valeur de x .

Les taxes dépendent de l'ancienneté (elles vont de 7,5% à 35% comme on l'a vu dans la partie précédente).

Le rachat est jugé profitable au bout de n années après rachat si la condition suivante est vérifiée :

$$PM_{sans\ rachat} * (1 + \lambda)^n \leq PM_{avec\ rachat}$$

La PM sans rachat s'écrit simplement $PM_{sans\ rachat} = C_0(1 + \tau_{cred})^{i+n} = C_0 C (1 + \tau_{cred})^n$.

La PM avec rachat se calcule comme la valeur de la PM au moment du rachat diminuée des taxes sur les plus-values et des frais d'acquisition du nouveau contrat appliqués sur la PM diminuée de ces frais, le tout capitalisé au taux τ_{bmk} .

x est donc la plus petite valeur de n vérifiant cette condition.

$$C_0 C (1 + \tau_{cred})^x (1 + \lambda)^x \leq (1 + \tau_{bmk})^x [C_0 C - PS(i)(C_0 C - C_0) - f_{acq}(C_0 C - PS(i)(C_0 C - C_0))] \\ \Leftrightarrow C (1 + \tau_{cred})^x (1 + \lambda)^x \leq (1 + \tau_{bmk})^x (C - f_{acq} C - PS(i)(C - 1)(1 - f_{acq}))$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{1 + \tau_{bmk}}{(1 + \tau_{cred})(1 + \lambda)} \right]^x \geq \frac{C(i)}{(1 - f_{acq})[C(i) - PS(i)(C(i) - 1)]}$$

Nous justifions ci-dessous la relation $\frac{1 + \tau_{bmk}}{(1 + \tau_{cred})(1 + \lambda)} > 1$.

$$x = \left\lceil \frac{-\ln \left[(1 - f_{acq}) \left[1 - PS(i) \left(1 - (1 + \tau_{cred})^{-i} \right) \right] \right]}{\ln \left[\frac{1 + \tau_{bmk}}{(1 + \tau_{cred})(1 + \lambda)} \right]} \right\rceil$$

Où $\lceil \cdot \rceil$ désigne la partie entière supérieure.

Seuil de non retour

Remarquons tout d'abord que le dénominateur s'annule pour une certaine valeur de Δ :

$$1 = \frac{(1 + \tau_{cred})(1 + \lambda)}{1 + \tau_{bmk}} \\ \Leftrightarrow 1 + \frac{\Delta_0}{1 + \tau_{cred}} = 1 + \lambda \\ \Leftrightarrow \Delta_0 = \lambda(1 + \tau_{cred})$$

Ce seuil représente la différence de taux en-deçà de laquelle le nouvel investissement ne sera jamais profitable. Pour des valeurs supérieures mais proches de ce seuil, le rachat ne sera pas profitable en pratique car la durée de retour sur investissement sera trop importante.

Nous nous placerons donc désormais sur la portion de courbe où $\Delta > \lambda(1 + \tau_{cred})$, c'est-à-dire $\frac{1 + \tau_{bmk}}{(1 + \tau_{cred})(1 + \lambda)} > 1$.

Expression simplifiée

En supposant que les valeurs des taux sont très inférieures à 1, on peut utiliser un développement limité au premier degré de la valeur générique de la solution :

$$x \approx \frac{\ln \left[(1 - f_{acq}) \left[1 - PS(i) (1 - (1 + \tau_{cred})^{-i}) \right] \right]}{\ln \left[(1 + \tau_{cred}) (1 + \lambda) (1 - \tau_{bmk}) \right]}$$

$$x \approx \frac{\ln \left[1 - f_{acq} - PS(i) (i \tau_{cred}) \right]}{\ln \left[(1 + \tau_{cred}) (1 + \lambda) (1 - \tau_{cred} - \Delta) \right]}$$

$$x \approx \frac{-f_{acq} - i \tau_{cred} PS(i)}{\ln \left[(1 + \tau_{cred} + \lambda) (1 - \tau_{cred} - \Delta) \right]}$$

$$x \approx \frac{-f_{acq} - i \tau_{cred} PS(i)}{\ln \left[1 + \tau_{cred} + \lambda - \tau_{cred} - \Delta \right]}$$

$$x \approx \frac{-f_{acq} - i \tau_{cred} PS(i)}{\lambda - \Delta}$$

$$x \approx \frac{f_{acq} + i \tau_{cred} PS(i)}{\Delta - \lambda}$$

L'allure de la courbe est une hyperbole. Le graphique ci-dessous compare la valeur théorique réelle avec la valeur approchée pour une ancienneté égale à 1.

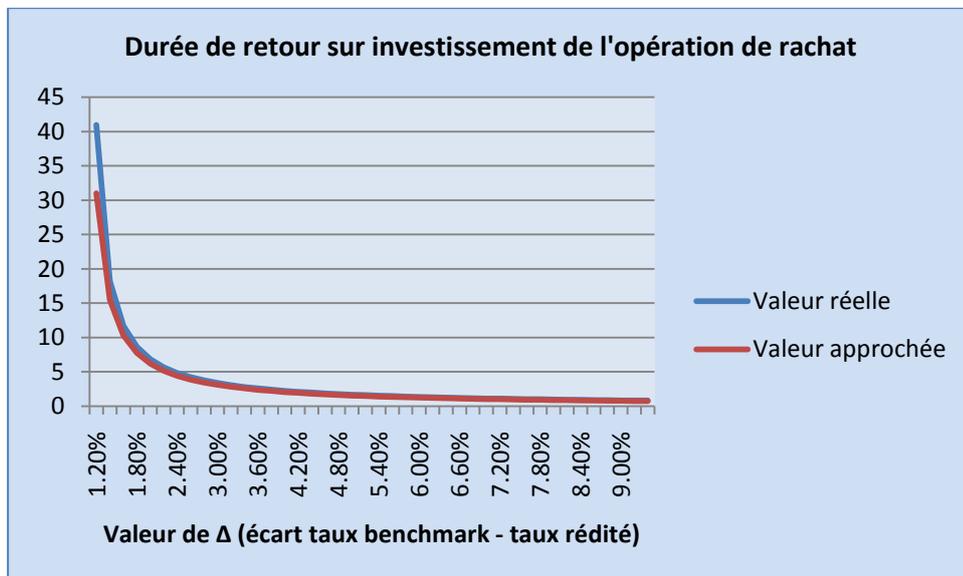


Figure 36. Comparaison formule exacte-formule approchée

Notion de résistance élastique des rachats dynamiques

L'opération de rachat est jugée profitable si la durée de retour sur investissement est inférieure à un seuil raisonnable K , disons égal à 6 ans. En reprenant la formule exacte, ceci se traduit par l'équation suivante.

$$K \leq \frac{\ln \left[\frac{(1 - f_{acq})[\mathcal{C}(i) - PS(i)(\mathcal{C}(i) - 1)]}{\mathcal{C}(i)} \right]}{\ln \left[\frac{(1 + \tau_{cred})(1 + \lambda)}{1 + \tau_{cred} + \Delta} \right]}$$

Nous noterons $f(\Delta) = \frac{\ln \left[\frac{(1 - f_{acq})[\mathcal{C}(i) - PS(i)(\mathcal{C}(i) - 1)]}{\mathcal{C}(i)} \right]}{\ln \left[\frac{(1 + \tau_{cred})(1 + \lambda)}{1 + \tau_{cred} + \Delta} \right]}$.

On se place sur la branche d'hyperbole où $\Delta > \lambda(1 + \tau_{cred})$. On a donc $\ln \left[\frac{(1 + \tau_{cred})(1 + \lambda)}{1 + \tau_{cred} + \Delta} \right] < 0$.

$$\frac{(1 - f_{acq})[\mathcal{C}(i) - PS(i)(\mathcal{C}(i) - 1)]}{\mathcal{C}(i)} \leq \frac{(1 + \tau_{cred})^K (1 + \lambda)^K}{(1 + \tau_{cred} + \Delta)^K}$$

$$\left(1 + \frac{\Delta}{1 + \tau_{cred}}\right)^K \leq \frac{\mathcal{C}(i)(1 + \lambda)^K}{(1 - f_{acq})[\mathcal{C}(i) - PS(i)(\mathcal{C}(i) - 1)]}$$

La condition de « résistance au rachat » s'écrit donc :

$$\frac{\Delta}{1 + \tau_{cred}} \leq R_{produit}$$

Avec

$$R_{produit} = (1 + \lambda)^K \sqrt{\frac{1}{(1 - f_{acq})(1 - PS(i)(1 - \frac{1}{(1 + \tau_{cred})^i}))}} - 1$$

On a bien une relation de la forme attendue. Cette résistance élastique dépend bien également des caractéristiques du produit (ancienneté, frais d'acquisition et taux servi) mais aussi de l'environnement réglementaire exogène (prélèvements sociaux et taxes sur les plus-values).

Aussi, en émettant les mêmes hypothèses que pour la théorie de la formation des nuages, on obtient la relation suivante.

$$R_{produit} = \frac{\frac{1 + \lambda}{(1 - f)^{\frac{1}{K}}}}{\frac{PS(i)}{K(1 + \tau_{cred})^i} + 1 - \frac{PS(i)}{K}} = \frac{k_1}{k_2 g_1(\tau_{cred}) + k_3}$$

Il s'agit bien à nouveau de la forme attendue.

Expressions de la prime de risque

La forme de λ peut être paramétrée. Comme nous l'avons vu, sa valeur dépend principalement du coût des démarches administratives et du risque de taux. Ainsi, plusieurs modélisations sont possibles :

- λ constant

C'est la forme la plus simple et celle que nous utiliserons en pratique. Un sondage a été réalisé au sein des équipes internes Allianz en posant le problème suivant. Vous souhaitez investir à horizon 8 ans. Vous possédez un contrat d'assurance vie vous rapportant disons 2% par an. Les taux du marché sont supérieurs, et sont tels que si vous rachetez votre contrat (engendrant des frais), l'épargne que vous atteindriez serait exactement égale à celle atteinte si vous conservez votre contrat à 2%. Vous n'allez donc pas racheter car vous n'allez pas perdre du temps et faire des efforts administratifs pour finalement obtenir le même rendement. Au-delà de quel surplus de rendement par an venant compenser ces efforts à fournir décidez-vous de racheter ?

Les résultats tournent autour de 1%. Ce sera la valeur utilisée dans nos simulations.

- λ affine ou fonction d'une courbe d'utilité

Une autre modélisation possible permettrait de prendre en compte les deux aspects de la contrainte de rachat : efforts administratifs et risque de taux. Une formule pourrait être :

$$\lambda = c + a\sigma_{taux}$$

Où c est une constante représentant les efforts administratifs et σ_{taux} est la volatilité du taux benchmark sur les 5 dernières périodes par exemple. Plus généralement, on peut considérer :

$$\lambda = c + af(\sigma_{taux})$$

Où f est la fonction d'utilité des assurés pour le critère volatilité du taux benchmark (concave s'ils sont averses au risque et convexe s'ils sont risquophiles).

- λ forfaitaire

On pourrait également penser à une prime de risque forfaitaire dont le montant, en % de la PM, représenterait le coût des démarches administratives. Dans notre modélisation, cela signifierait que λ dépend de x , rendant les équations non linéaires et demandant une résolution par un algorithme de type Newton-Raphson par exemple.

Calcul de $surr_incr_begin$

Nous disposons désormais d'une courbe de la durée de retour sur investissement de l'opération consistant à racheter son contrat d'assurance vie fonction de l'écart de taux, pour une année d'ancienneté donnée et un taux crédité donné. Afin de choisir une valeur de $surr_incr_begin$ (i.e. Δ dans nos notations), nous allons calculer la valeur de Δ correspondant à une durée de retour sur investissement (ROI) de 5-6 ans, pour plusieurs valeurs d'ancienneté et pour chacun des taux réellement crédités pour le produit étudié. En effet, cette durée de ROI dépend du taux crédité, et sa valeur change donc d'une année à l'autre. Nous adoptons la démarche de calculer sa valeur avec plusieurs valeurs de taux crédités afin de vérifier sa stabilité et de choisir une valeur unique.

Prenons l'exemple du produit Pierce. Nous disposons des taux crédités nets depuis 2006 pour ce produit : 4,31% en 2006, 4,16% en 2007, 4,16% en 2008, 3,63% en 2009 et 3,31% en 2010.

Pour chacun de ces taux, nous calculons le delta de taux pour lequel la durée de ROI devient inférieure à 6 ans, et ce pour chaque ancienneté, en appliquant les formules précédentes. Par exemple, pour l'ancienneté 1 an et un taux crédité à 4,31%, nous obtenons la courbe suivante.

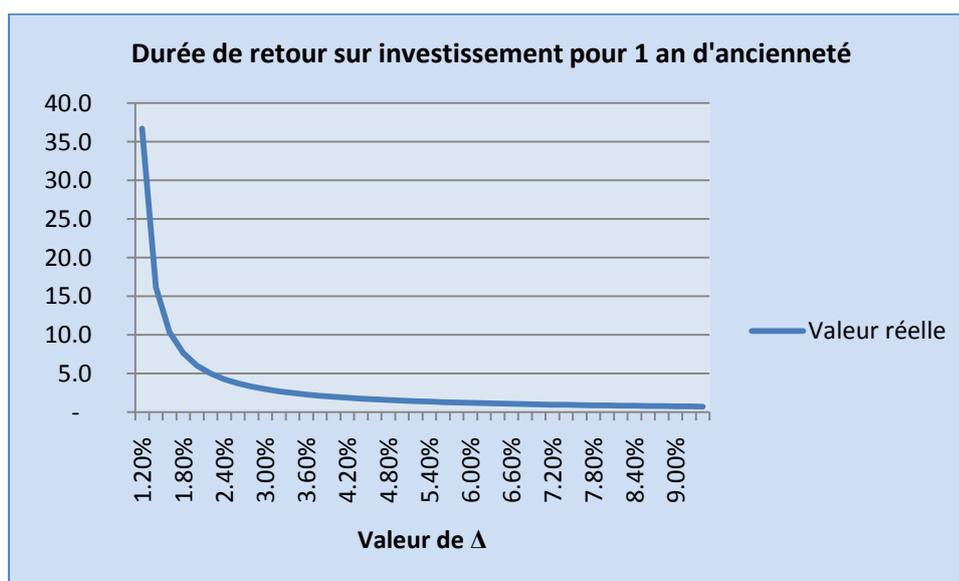


Figure 37. Un exemple de durée de ROI

La valeur de $\Delta = (1 + \tau_{cred})R_{produit}$ cherchée est de 2.01%. Nous reproduisons le calcul pour toutes les principales anciennetés. Les résultats pour le produit Pierce sont synthétisés dans le tableau ci-après.

$i \backslash \tau_{cred}$	4.31%	4.16%	3.63%	3.31%
1	2,01%	1,99%	1,94%	1,91%
2	2,36%	2,33%	2,24%	2,18%
3	2,70%	2,66%	2,53%	2,44%
4	3,04%	2,99%	2,81%	2,71%
5	2,64%	2,60%	2,48%	2,40%
6	2,82%	2,78%	2,63%	2,54%
7	2,99%	2,95%	2,78%	2,68%
8	3,16%	3,11%	2,93%	2,82%
9	2,87%	2,83%	2,68%	2,60%
10	2,98%	2,94%	2,79%	2,69%
11	3,09%	3,05%	2,88%	2,78%
Moyenne	2,79%	2,75%	2,61%	2,52%

Tableau 18. Un exemple de calcul du seuil de déclenchement

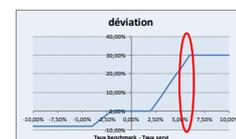
La valeur de Δ est relativement stable, et nous pouvons choisir une valeur de `surr_incr_begin` égale à 2,7%, moyenne des résultats. En revanche, pour des raisons de prudence, on pourra plutôt opter pour la valeur minimale obtenue sur toutes les anciennetés et tous les taux crédités, soit 1,9% sur l'exemple précédent. Ce raisonnement est réitéré pour chaque produit concerné par les rachats dynamiques.

`surr_incr_end`

Nous rappelons que la variable `surr_incr_end` représente l'écart de taux au-delà duquel les rachats sont augmentés à leur niveau maximal. Au-delà de ce taux, on considère que tous les assurés pouvant racheter leur contrat dynamiquement l'ont fait et demeurent **insensibles à une hausse plus importante** de cet écart de taux.

De même que pour `surr_incr_begin`, la détermination de `surr_incr_end` ne peut reposer sur le calibrage d'un modèle à partir de données historiques, car la situation dans laquelle les taux benchmark étaient plus élevés que le taux crédité ne s'est pas encore produite. Ainsi, étant donné que le raisonnement et la psychologie de comportement des assurés paraissent similaires à ceux étudiés dans le cas de `surr_incr_begin`, nous allons utiliser le même modèle que pour ce dernier paramètre.

Comme nous l'avons vu, la forme de la courbe représentant la durée de ROI en fonction de l'écart de taux a la forme générale d'une hyperbole. Ainsi, pour les fortes valeurs de Δ , la durée de ROI ne varie que très lentement, ce qu'on peut interpréter de la façon suivante. Pour un écart de taux réellement élevé, augmenter un peu sa valeur ne va pas changer radicalement la décision de l'assuré, il est de toute façon dans la zone de décision



de rachat. Les assurés sont moins sensibles à l'écart de taux lorsque ce dernier est élevé, car il rachètera de toute façon son contrat. C'est cette valeur d'écart de taux qui va nous intéresser : celle au-delà de laquelle la durée de ROI devient quasiment constante, et où donc les assurés deviennent insensibles à une nouvelle hausse du taux benchmark, ce qui correspond exactement à la définition de `surr_incr_end`. La forme hyperbolique est caractéristique de ce comportement et permet une estimation de notre paramètre.

La démarche consiste donc à trouver la valeur de Δ correspondant à une stabilisation de la durée de ROI. Pour cela, nous allons calculer la variation de cette dernière en fonction de Δ , et considérer que la courbe est stable lorsqu'elle devient inférieure à un certain seuil k , que l'on choisira en fonction du pas $\delta\Delta$ de discrétisation de Δ . Un pas de 0.2% associé à un seuil de 5% semble satisfaisant, (la relation générale $k = 25 \delta\Delta$ est adoptée si l'on souhaite changer le pas).

En posant k le seuil de matérialité considéré (fixé à 5% dans notre cas), la condition s'écrit de la façon suivante.

$$\frac{f(\Delta + \delta\Delta) - f(\Delta)}{f(\Delta)} \geq -k$$

Soit :

$$\frac{\ln \left[\frac{1 + \tau_{cred} + \Delta}{(1 + \tau_{cred})(1 + \lambda)} \right]}{\ln \left[\frac{1 + \tau_{cred} + \Delta + \delta\Delta}{(1 + \tau_{cred})(1 + \lambda)} \right]} \geq 1 - k$$

On remarque que cette condition est indépendante de l'ancienneté i et du taux des frais d'acquisition f_{acq} . En effet, nous sommes dans le cas où les taux du marché sont très supérieurs au taux crédité, ainsi, les frais, les taxes, ou l'horizon d'investissement ne viendront pas freiner la décision de rachat. Par souci de simplicité, nous utiliserons un raisonnement graphique pour trouver la valeur de Δ satisfaisant cette condition.

Poursuivons avec l'exemple du produit Pierce. Nous traçons la courbe donnant les écarts relatifs entre deux valeurs successives de $f(\Delta)$, durée de ROI, en fonction de Δ . La valeur de `surr_incr_end` retenue est celle correspondant à un écart absolu de moins de 5%, soit 5% sur notre exemple ci-dessous. Cette valeur est identique quelle que soit le taux crédité observé τ_{cred} , la sensibilité à ce paramètre étant faible, nous validons donc notre choix.

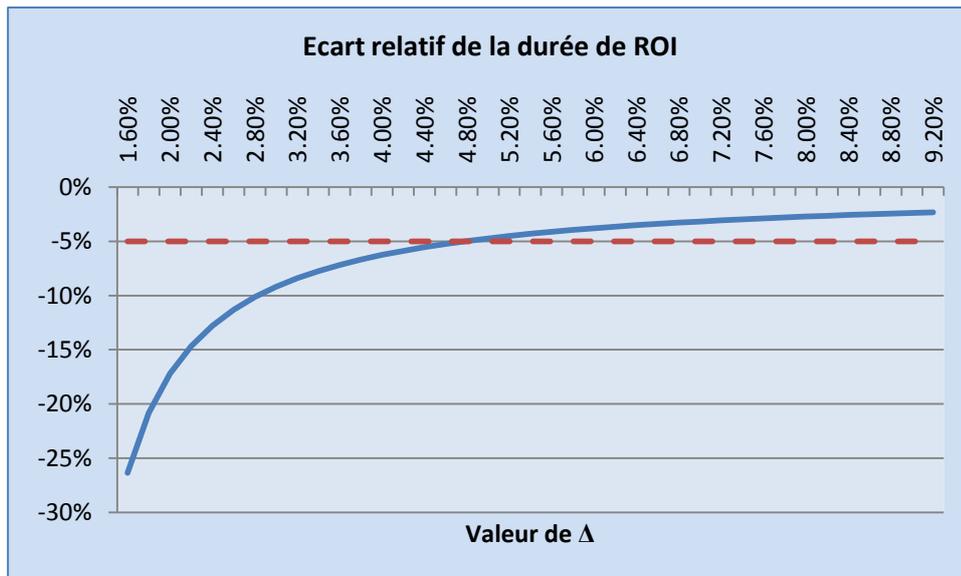


Figure 38. Un exemple de calcul du seuil d'atteinte du taux maximal

Sensibilités aux paramètres

Les paramètres *surr_incr_begin* et *surr_incr_end* sont déterminés à partir de raisonnements théoriques, et dépendent d'un certain nombre de paramètres. Il convient d'étudier les différentes sensibilités afin de connaître ceux demandant une attention particulière.

surr_incr_begin

Rappel de la formule utilisée :

$$surr_incr_begin = (1 + \tau_{cred}) \left[(1 + \lambda) \sqrt[K]{\frac{1}{(1 - f_{acq})(1 - PS(i)(1 - \frac{1}{(1 + \tau_{cred})^i}))}} - 1 \right]$$

Où K est le seuil raisonnable d'une bonne durée de retour sur investissement.

Nous prenons comme valeurs de base des paramètres celles d'un produit typique : Pierce.

Variable	Valeur de base
τ_{cred}	4%
i	4 ans
f_{acq}	3,38%
λ	1%
K	6 ans
$Tax(i)$	De 7,5% à 35%
ps	13,5%

- Taux crédité

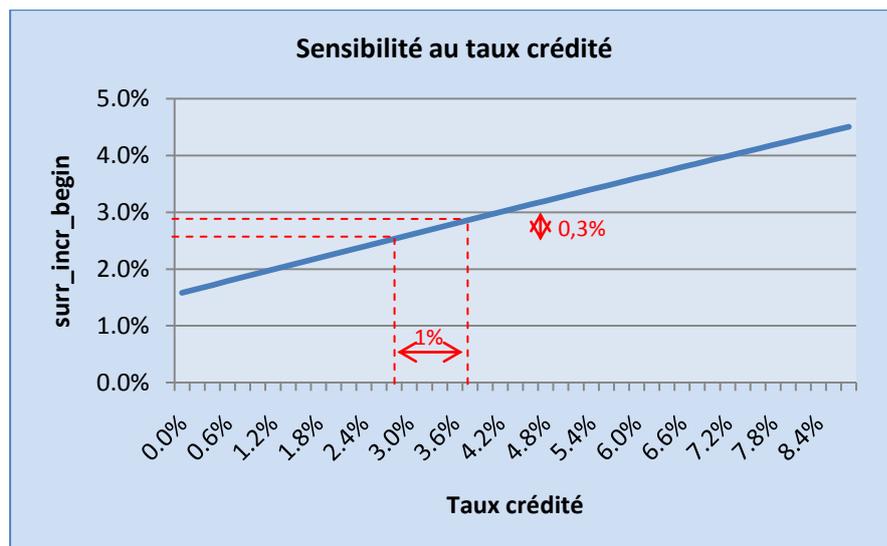


Figure 39. Sensibilité de $surr_incr_begin$ au taux crédité

La sensibilité est quasi-linéaire. Pour une augmentation du taux crédité de 0,1%, $surr_incr_begin$ augmente d'environ 0,03%. En pratique, la politique de l'assureur tente de faire en sorte que le taux crédité soit le plus stable possible au fil des années. Ainsi, la sensibilité au taux crédité reste en principe maîtrisée.

Le fait que la pente soit inférieure à 1, c'est-à-dire que $surr_incr_begin$ augmente moins vite que le taux crédité traduit le fait que les assurés sont exigeants envers l'assureur. En effet, si l'assureur augmente ses taux crédités de 1%, un écart de taux de seulement 0,3%

supplémentaire suffira à déclencher le rachat. On retiendra, de façon générale, une pente d'1/3.

- Ancienneté

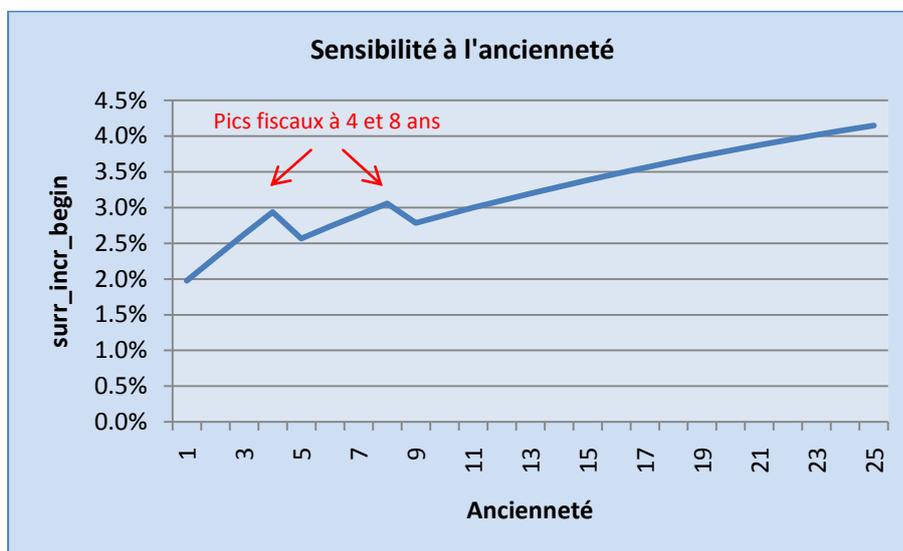


Figure 40. Sensibilité de $surr_incr_begin$ à l'ancienneté

Comme on pouvait s'y attendre, la forme de la courbe dépend fortement de celle des taxes sur plus-values (qui dépendent de l'ancienneté). On voit clairement qu'il vaut mieux attendre d'avoir passé les pics fiscaux pour transférer son épargne. Pour consolider un portefeuille et déterminer son $surr_incr_begin$, on pourra calculer l'ancienneté moyenne pondérée par les PM.

Sur chaque tronçon fiscal, la pente de la courbe décroît avec l'ancienneté. En effet, le seul terme faisant intervenir l'ancienneté dans la formule est l'impôt sur les plus-values et les prélèvements sociaux. Il s'applique au coefficient de capitalisation $(1 + \tau_{cred})^i$, qui croît de manière exponentielle. Ainsi, plus le produit est ancien, plus il sera intéressant de racheter car le coût dû aux taxes est proportionnellement plus faible du fait de la convexité de la courbe. Il suffit donc d'un écart de taux inférieur pour décider l'assuré à racheter. Reprenons ce raisonnement mathématiquement : supposons pour simplifier les autres frais nuls. En notant C_i l'épargne atteinte au temps i , la décision de rachat coûte $ps(C_i - C_0)$. Ramené à la nouvelle PM, ce montant représente $\frac{ps(C_i - C_0)}{C_i - ps(C_i - C_0)}$, qu'il faut rattraper avec le nouvel investissement.

Si on attend l'année suivante pour racheter, le montant à rattraper représente $\frac{ps((1+\tau)C_i - C_0)}{(1+\tau)C_i - ps((1+\tau)C_i - C_0)}$. Pour comparer ces 2 options, il nous faut donc comparer

$$\frac{(1 - \frac{C_0}{(1 + \tau)C_i})}{1 - ps(1 - \frac{C_0}{(1 + \tau)C_i})} \text{ avec } \frac{(1 - \frac{C_0}{C_i})}{1 - ps(1 - \frac{C_0}{C_i})}$$

Etudions pour cela la fonction suivante.

$$f(x) = \frac{1 - x}{1 - a(1 - x)}$$

$$f'(x) = \frac{-1 + a(1 - x) - a(1 - x)}{(1 - a(1 - x))^2}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{(1 - a(1 - x))^2} < 0$$

f est donc décroissante, et étant donné que $(1 + \tau)C_i > C_i$, on a :

$$\frac{(1 - \frac{C_0}{(1 + \tau)C_i})}{1 - ps(1 - \frac{C_0}{(1 + \tau)C_i})} < \frac{(1 - \frac{C_0}{C_i})}{1 - ps(1 - \frac{C_0}{C_i})}$$

On demandera donc un supplément de rémunération inférieur en attendant une année de plus.

Sur chaque tronçon fiscal, la courbe est donc bien concave.

Notons également que l'élasticité e des assurés pour la variable `surr_incr_begin` (SIB) à l'ancienneté est à peu près constante et égale à 1/3.

$$e = \frac{\frac{\Delta SIB}{SIB}}{\frac{\Delta i}{i}}$$

- Frais d'acquisition

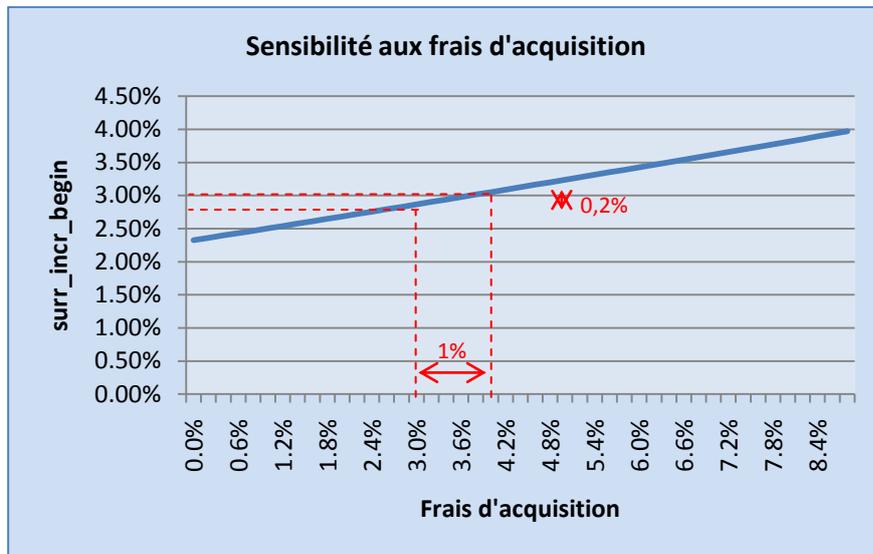


Figure 41. Sensibilité de surr_incr_begin aux frais

La sensibilité est quasi-linéaire. Pour une augmentation des frais de 0,1%, surr_incr_begin augmente d'environ 0,02%. En pratique, la politique de l'assureur tente de faire en sorte que les frais soient le plus stable possible au fil des années. Ainsi, la sensibilité aux frais reste en principe maîtrisée.

Le fait que la pente soit inférieure à 1, c'est-à-dire que surr_incr_begin augmente moins vite que les chargements traduit à nouveau le fait que les assurés sont exigeants envers l'assureur. En effet, si l'assureur augmente ses frais d'acquisition de 1%, un écart de taux de seulement 0,2% supplémentaire suffira à déclencher le rachat. On retiendra, de façon générale, une pente d'1/5.

- Prime de risque

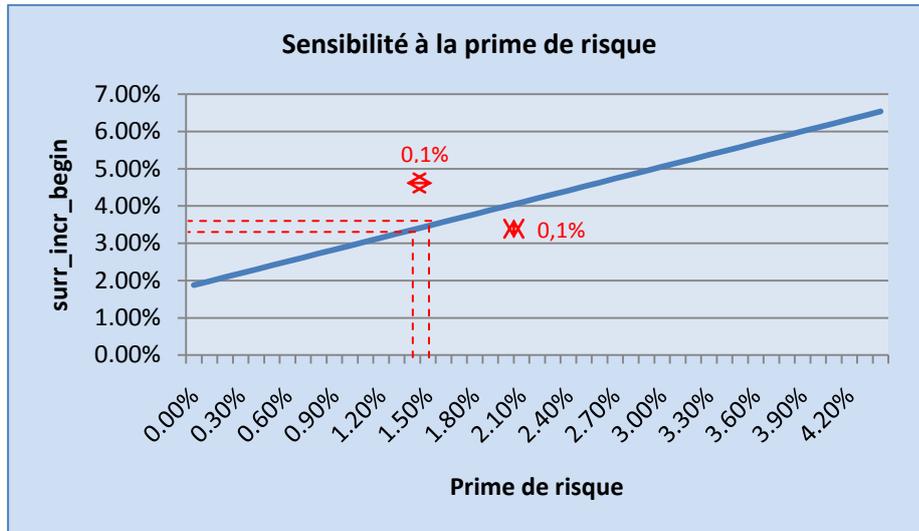


Figure 42. Sensibilité de surr_incr_begin à la prime de risque

La sensibilité est parfaitement linéaire, ce qu'on peut retrouver par le calcul :

$$\frac{\partial \text{surr_incr_begin}}{\partial \lambda} = (1 + \tau_{cred})^k \sqrt{\frac{1}{(1 - f_{acq})(1 - PS(i)(1 - \frac{1}{(1 + \tau_{cred})^i}))}}$$

La valeur numérique donne une sensibilité de 1,06. Lorsqu'on augmente la prime de risque de 0.1%, surr_incr_begin augmente d'environ 0.106%. La pente est cette-fois-ci supérieure à 1. La prime de risque est un facteur qui permet de freiner la hausse de surr_incr_begin et offre ainsi une possibilité de pilotage du coût des options des garanties. La sensibilité étant plus forte ici, c'est un paramètre qu'il conviendra d'estimer régulièrement.

- Prélèvements sociaux

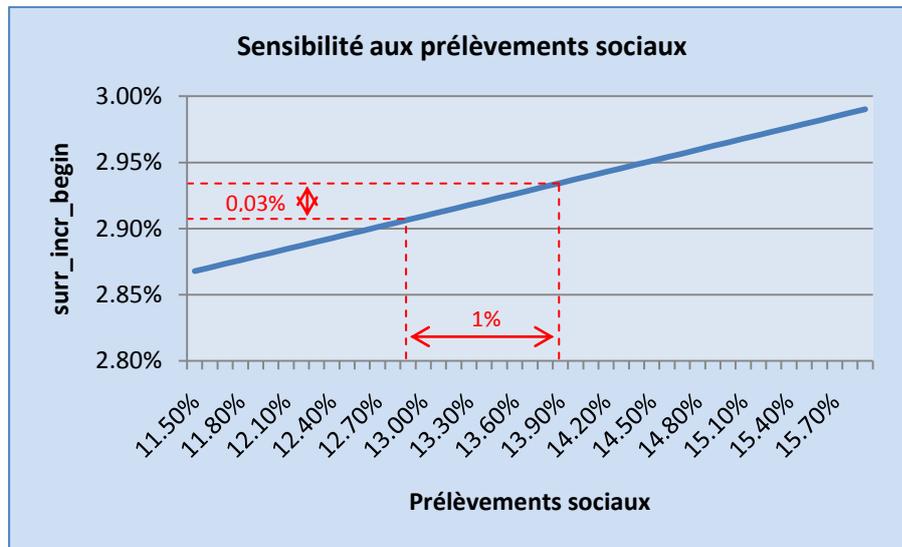


Figure 43. Sensibilité de surr_incr_begin aux prélèvements sociaux

Cette étude permet d'étudier le comportement du portefeuille en cas de hausse des prélèvements sociaux par les autorités. La sensibilité est quasi-linéaire (quasi-stable en pratique si on observe l'échelle). Pour une augmentation des prélèvements sociaux de 0,1%, surr_incr_begin augmente d'environ 0,003%. En pratique, les prélèvements sociaux sont stables mais peuvent faire l'objet d'une hausse assez faible certaines années. Ainsi, la sensibilité à ce paramètre exogène reste en principe maîtrisée. On retiendra, de façon générale, une pente d'1/40.

Synthèse

Le tableau suivant résume les principaux résultats des études de sensibilité.

Sensibilité	Hausse du paramètre	Hausse de surr_incr_begin associée
τ_{cred} (taux crédit)	0,1%	0,03%
i (ancienneté)	---	Elasticité de 40% ---
f_{acq} (frais)	0,1%	0,02%
λ (prime de risque)	0,1%	0,106%
ps (prél. soc.)	0,1%	0,003%

surr_incr_end

Rappel du critère de décision :

$$\frac{\ln \left[\frac{1 + \tau_{cred} + \Delta}{(1 + \tau_{cred})(1 + \lambda)} \right]}{\ln \left[\frac{1 + \tau_{cred} + \Delta + \delta\Delta}{(1 + \tau_{cred})(1 + \lambda)} \right]} \geq 1 - 5\%$$

Nous prenons comme valeurs de base des paramètres celles d'un produit typique :
Pierce.

Variable	Valeur de base
τ_{cred}	4%
λ	1%

- Taux crédité

La valeur de `surr_incr_end` reste quasiment identique quelle que soit la valeur du taux crédité entre 0% et 10%. On retiendra que ce paramètre est insensible à ce paramètre pour les valeurs usuelles du taux crédité.

- Prime de risque

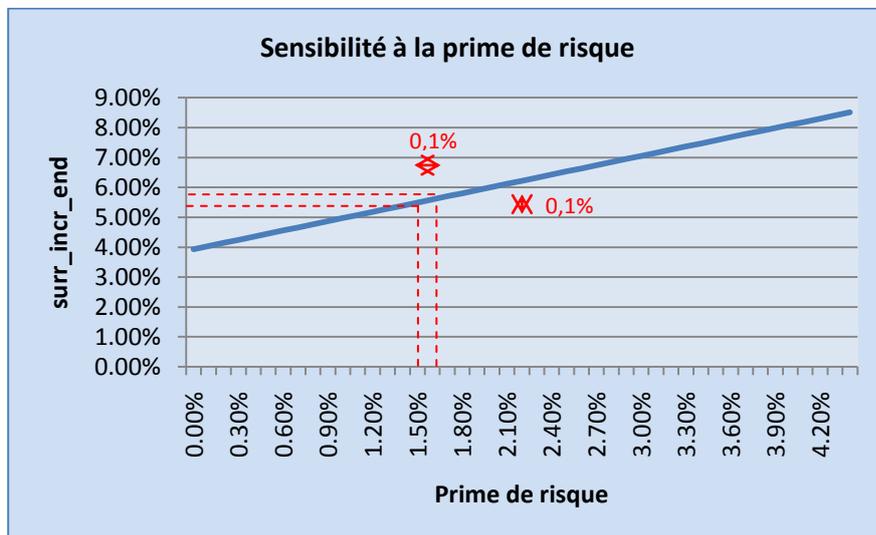


Figure 44. Sensibilité de `surr_incr_end` à la prime de risque

La sensibilité est quasi-linéaire. Pour une augmentation de la prime de risque de 0,1%, `surr_incr_end` augmente d'environ 0,104%. Ce paramètre est à nouveau l'un des plus sensibles. On retiendra, de façon générale, une pente de 1.

Synthèse

Le tableau suivant résume les principaux résultats des études de sensibilité.

Sensibilité	Hausse du paramètre	Hausse de surr_incr_end associée
τ_{cred}	0,1%	0%
λ	0,1%	0,104%

3.3) Mise à jour des paramètres de rachats dynamiques : les résultats

Nous disposons désormais d'un paramétrage mis à jour pour les lois de rachats dynamiques permettant de prendre en compte davantage de facteurs et la spécificité de chaque produit. Il convient maintenant de mesurer l'impact de changement de paramétrage sur la MCEV de la compagnie à travers le coût des O&G.

C'est l'outil stochastique ALIM qui permet de calculer le coût des O&G. Comme nous l'avons vu, ce dernier est calculé en effectuant la différence entre la PVFP déterministe (1 seul scénario correspondant au scénario moyen d'évolution de la situation économique et financière) et la PVFP stochastique (1 000 scénarios).

$$O\&G = PVFP \text{ déterministe} - PVFP \text{ stochastique}$$

ALIM permet de calculer séparément chacun de ces deux termes en lançant ce que l'on appelle un « run », correspondant au lancement d'une projection sur 40 ans. Pour chaque calcul d'O&G, il faut donc lancer un run déterministe et un run stochastique.

On rappelle que les hypothèses (ou inputs) sont constituées des 5 types de fichiers suivants.

- Asset

Il s'agit de la situation du portefeuille d'actifs, par ligne d'actif (type d'actif, valeur de marché, valeur comptable, etc.).

- Corporate

Il s'agit des données bilancielle de l'entreprise (fonds propres, marge de solvabilité, PPE, etc.) et des stratégies d'investissement (caractéristiques des types d'actif, allocation stratégique, etc.).

- General

Ce fichier contient les paramètres généraux à configurer pour la simulation (chemin des fichiers d'entrée, données sur la mortalité, etc.).

- Liability

Il s'agit des données de passif par regroupement de produits (projections de cash-flows, de stock, etc.).

- Scenario

Les scénarios simulent une évolution possible de l'environnement économique (valeur des taux, etc.).

Ainsi, la situation de référence sera calculée à partir d'un jeu fichiers d'input particulier qui ne serait pas utilisé pour un objectif de publication de chiffres officiels, mais qui permet de calculer l'ordre de grandeur de la mesure d'impact. Il est utilisé avec l'ancien paramétrage de rachats dynamiques. Ce calcul de référence sera comparé à la même situation mais en appliquant la mise à jour des rachats dynamiques détaillée précédemment.

Les O&G peuvent être calculées par canton, mais nous ne donnerons ici que leur coût au total de la compagnie.

Les résultats avec les données de référence sont les suivants.

PVFP déterministe	PVFP stochastique	O&G
4 214 543 k€	3 923 195 k€	291 348 k€

Les effets de chaque paramètre ont été calculés en « standalone » (la mesure d'impact de chaque paramètre a été isolée). Le tableau suivant donne pour chaque étude le coût des O&G associées.

Etude	PVFP déterministe	PVFP stochastique	O&G	Ecart avec référence (%)
Référence	4 214 543 k€	3 923 195 k€	291 348 k€	-
MAJ surr_incr_max	4 214 543 k€	3 987 090 k€	227 453 k€	-22%
MAJ surr_incr_begin	4 214 543 k€	3 996 763 k€	217 780 k€	-25%
MAJ surr_incr_end	4 214 543 k€	3 865 599 k€	348 944 k€	+20%

Tableau 19. Impact en standalone de la mise à jour des paramètres

La première chose importante à remarquer est l'obtention de la même PVFP déterministe dans chaque cas. En effet, cette dernière correspond à une projection dans un scénario central reposant sur l'hypothèse que le marché évolue dans la continuité de la situation actuelle. Or, dans la situation actuelle, les actifs rapportent suffisamment pour offrir des taux sur les contrats d'assurance vie supérieurs au taux benchmark. Les rachats dynamiques ne sont donc pas activés. En revanche, en stochastique, il existe des scénarios où l'assureur devra subir un coût supplémentaire dû à une situation économique défavorable, par exemple un taux benchmark très élevé et donc une vague de rachat venant diminuer la PVFP.

L'interprétation des chiffres obtenus est intuitive : la mise à jour de `surr_incr_max` a consisté, en général, à revoir à la baisse le taux de rachat maximal attendu. Ainsi, dans les scénarios extrêmes où le taux benchmark est très supérieur au taux crédité, les assurés rachètent moins, ce qui augmente la PVFP stochastique et donc diminue le coût des O&G.

De même, nous avons augmenté la valeur de `surr_incr_begin` par rapport à la situation de référence. Ainsi, les rachats dynamiques sont moins souvent activés car il faut une différence de taux plus importante, ce qui diminue le coût des O&G.

En revanche, nous avons abaissé la valeur de `surr_incr_end`, ce qui signifie que le taux maximal est atteint plus facilement : il faut en effet une différence de taux moins importante pour arriver au taux de rachat maximal. Ceci augmente le coût des O&G.

On peut aussi effectuer une analyse de mouvement pour arriver à la situation finale où tous les paramètres ont été mis à jour. Elle est synthétisée dans le tableau suivant.

Etape	PVFP déterministe	PVFP stochastique	O&G	Ecart avec référence (%)
Référence	4 214 543 k€	3 923 195 k€	291 348 k€	-
MAJ <code>surr_incr_begin</code>	4 214 543 k€	3 996 763 k€	217 780 k€	-25%
MAJ <code>surr_incr_begin</code> et <code>surr_incr_end</code>	4 214 543 k€	3 936 393 k€	278 150 k€	-5%
MAJ totale	4 214 543 k€	3 992 391 k€	222 152 k€	-24%

Tableau 20. Analyse de mouvement de la mise à jour des paramètres

On peut voir que la mise à jour de `surr_incr_begin` et de `surr_incr_end` se compensent au global. Au final, la revue de méthodologie pour le calcul des paramètres des lois de rachats dynamiques autorise **une baisse de 25% du coût des O&G**. En pratique, cela correspond à un gain de €70 millions bruts d'impôt sur la valeur de l'entreprise.

Cette étude a été réalisée sur un portefeuille spécifique (Vie Individuelle), la prochaine étape sera de tester cette méthode sur les autres portefeuilles afin de pouvoir retenir ces paramètres. Dans le cadre du pilier III de Solvabilité II relatif à la gouvernance actuarielle, une revue indépendante de la méthode est prévue par tous les utilisateurs de l'outil actif-passif, ainsi que par les managers des équipes Actuariat/Métier en assurance de personne/Risques pour jugement d'expert.

CONCLUSION

Afin de segmenter les produits selon plusieurs profils de risque en matière de rachat, le ratio de Sharpe a été introduit et permet de discriminer les trois comportements majeurs identifiés empiriquement. Le paramétrage des lois de rachat dynamique utilisé jusqu'à présent reposait principalement sur des jugements d'expert. L'utilisation du modèle de Vasicek et la rationalisation du processus de décision de rachat ont permis d'obtenir de nouvelles valeurs de paramètres, prenant en compte les spécificités de chaque produit et permettant également de choisir le risque auquel on s'expose en ce qui concerne l'estimation du taux de rachat maximal. Etant donné que le calcul repose sur un calibrage aux données historiques, il conviendra de mettre à jour périodiquement ce paramétrage, par exemple annuellement, pour prendre en compte l'évolution temporelle du comportement des clients. Ainsi, la mise à jour des lois de rachats dynamiques devrait permettre, après finalisation du processus d'approbation d'un changement d'hypothèse majeur, une baisse du coût des O&G de l'ordre de 25%.

PARTIE IV : Propositions de modélisation des rachats

INTRODUCTION

Dans la partie précédente, nous avons vu comment mettre à jour le paramétrage de la modélisation existante en matière de rachats dynamiques. Cette dernière partie propose d'explorer de nouveaux horizons sur les rachats, en ouvrant davantage le champ de la modélisation et en se libérant de ses contraintes classiques.

Le rachat peut être défini ou caractérisé de nombreuses façons différentes. Son observation même suggère qu'il s'agit d'un processus aléatoire avec retour à la moyenne. Nous commencerons donc par le modéliser à l'aide d'un modèle de Vasicek. Sa saisonnalité nous conduira à considérer un modèle de Black & Scholes en utilisant un drift déterministe. Le rachat est ensuite, par définition, une option pour l'assuré, et la théorie de l'évaluation d'options financières pourrait, a priori, être applicable. Il s'agit également d'un sinistre dont la période de déclaration survient un certain nombre d'années après la signature du contrat, un modèle de Chain-Ladder semble ici particulièrement adapté. Enfin, le rachat est un processus reflétant le comportement des assurés en réponse à des conditions macroéconomiques particulières, nous tenterons donc de voir s'il évolue en fonction de certaines variables macroéconomiques en le modélisant par régression logistique. Nous allons ainsi, dans cette partie, présenter une série de modèles pour les rachats, en tentant d'expliquer, lorsque c'est possible, comment les utiliser en pratique. Tous les modèles utilisent une approche combinée fréquence-sévérité, ils peuvent s'appliquer directement au taux de rachat effectif.

Chacun correspond à un point de vue unique, à un angle différent, à un aspect particulier du même phénomène qu'est celui de la décision de rachat. Une démarche en trois étapes sera adoptée : explication du modèle et établissement des limites a priori, développement de la modélisation, puis avantages et inconvénients réels. Nous verrons que les véritables limites sont parfois différentes de celles prévues initialement.

4.1) Modèle de Vasicek

Constat - remarques a priori

Dans la modélisation actuelle des rachats, il est supposé que le comportement des assurés est rationnel et qu'ils comparent régulièrement les taux du marché avec le taux crédité sur leurs contrats. Cette hypothèse paraît très forte dans le sens où, premièrement, tous les clients ne se tiennent pas informés régulièrement des évolutions de taux, ne se lancent pas dans des calculs rationnels pour leur décision de rachat, ni même ne connaissent tous les mécanismes sous-jacents à l'assurance, et deuxièmement, quand bien même tous adopteraient cette démarche, le côté psychologique, irrationnel et humain du processus de décision vient fortement interférer dans l'affaire. Ainsi, nous allons nous focaliser en priorité sur les processus stochastiques, qui, par la présence intrinsèque même de l'aléa, vont nous permettre de prendre en compte ces éléments et d'accepter cette irrationalité.

En observant les historiques de taux de rachat depuis début 2004, on se rend compte que, quel que soit le produit, quelle que soit la période ou l'échelle considérée, le niveau des rachats peut s'autoriser des sauts, mais reste toujours maîtrisée et oscille autour d'une valeur « moyenne ».

Nous allons ainsi dans cette première section utiliser le modèle de Vasicek (plus souvent utilisé pour modéliser les taux courts) pour représenter les rachats. Les problèmes que l'on va a priori rencontrer sont la possibilité d'obtenir des taux négatifs et la constance des paramètres du modèle étant donné que l'on considère des horizons de temps importants.

Modélisation

Définition

Ce modèle a été proposé par Vasicek en 1977. On se place sur un espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$. On suppose que sous une probabilité risque-neutre Q , le taux court instantané r suit un processus d'Ornstein-Uhlenbeck à coefficients constants :

$$\begin{cases} dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t \\ r_0 = r(0) \end{cases} \quad Q - p.s.$$

Avec κ, r_0, θ et σ constantes positives et W un Q -mouvement brownien \mathcal{F}_t -adapté. Le terme de drift s'interprète comme un retour à la moyenne long-terme θ avec une vitesse de retour à la moyenne κ . σ est la volatilité du taux court.

Propriétés

Appliquons le lemme d'Itô au processus $r_t e^{\kappa t}$.

$$d(r_t e^{\kappa t}) = dr_t e^{\kappa t} + \kappa r_t e^{\kappa t} dt + 0$$

$$d(r_t e^{\kappa t}) = \kappa \theta e^{\kappa t} dt + \sigma e^{\kappa t} dW_t$$

$$r_t e^{\kappa t} - r_s e^{\kappa s} = \theta (e^{\kappa t} - e^{\kappa s}) + \sigma \int_s^t e^{\kappa u} dW_u$$

$$r_t = r_s e^{-\kappa(t-s)} + \theta (1 - e^{-\kappa(t-s)}) + \sigma \int_s^t e^{-\kappa(t-u)} dW_u$$

r_t suit donc une loi normale conditionnellement à $\mathcal{F}_s, s < t$ de moyenne et de variance :

$$E[r_t | \mathcal{F}_s] = r_s e^{-\kappa(t-s)} + \theta (1 - e^{-\kappa(t-s)})$$

$$V[r_t | \mathcal{F}_s] = \sigma^2 \int_s^t e^{-2\kappa(t-u)} du = \frac{\sigma^2}{2\kappa} [e^{-2\kappa(t-u)}]_s^t$$

$$V[r_t | \mathcal{F}_s] = \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa(t-s)})$$

Valeurs long terme

Toutes les trajectoires de r oscilleront autour d'une valeur moyenne de long terme égale à θ avec une variance égale à $\frac{\sigma^2}{2\kappa}$.

Les paramètres κ et θ ont des effets compensatoires : augmenter σ fait naturellement augmenter la volatilité, mais augmenter κ fait aussi augmenter la vitesse à laquelle le système se stabilise statistiquement autour de la moyenne.

Ces valeurs long terme se retrouvent par les formules précédentes en prenant la limite quand $t \rightarrow +\infty$.

Prix des obligations zéro-coupons

On ne donne ici que le résultat¹⁶. La démonstration est abondamment développée dans la littérature.

Le prix à la date t d'une obligation zéro-coupon de maturité T s'écrit de la manière suivante.

$$P(t, T) = A(t, T) e^{-B(t, T) r_t}$$

¹⁶ Voir Eraker B. [4] et Muni Toke I. [6]

Avec

$$\begin{cases} A(t, T) = \exp \left[\left(\theta - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} \right) (B(t, T) - (T - t)) - \frac{\sigma^2}{4\kappa} B(t, T)^2 \right] \\ B(t, T) = \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} \end{cases}$$

Application pratique aux rachats

Afin d'être utilisable en pratique, il reste à estimer les paramètres du modèle. Nous proposons ci-dessous dans ce mémoire une méthodologie de calibrage qui a été créée spécifiquement pour être applicable aux rachats.

Calibrage

Les paramètres à estimer sont θ , κ et σ . En se plaçant sur la période de croisière de l'historique de rachat, on peut déjà estimer θ par la moyenne empirique des données. Aussi, le rapport $\frac{\sigma^2}{2\kappa}$ vaut la variance empirique. Il reste donc à calibrer κ .

D'un point de vue opérationnel, on dispose d'un historique de taux de rachat. Si l'on discrétisait le modèle on obtiendrait :

$$r_{t+dt} - r_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma\mathcal{N}(0, dt)$$

En espérance, un estimateur peut être, en moyennant sur les données,

$$\hat{\kappa} = E \left[\frac{r_{t+dt} - r_t}{dt(\theta - r_t)} \right]$$

On en déduit ensuite la volatilité.

$$\hat{\sigma} = \sqrt{2\hat{\kappa}V[r]}$$

Et on a toujours :

$$\hat{\theta} = E[r]$$

En pratique, on pourra éventuellement supprimer les valeurs aberrantes. Les valeurs traditionnelles obtenues pour la moyenne long terme et la volatilité sont telles que la probabilité d'obtenir des taux négatifs est très faible, et on pourra au pire minorer les taux par 0. Cette faiblesse a priori du modèle que nous avons mentionnée précédemment peut ainsi être écartée.

Le graphique ci-dessous représente un exemple de simulation par les différences finies avec des données calibrées sur le produit Monroe. En simulant de nombreuses trajectoires, les ordres de grandeur sont corrects, de même que l'amplitude des pics, en comparant avec l'historique disponible.

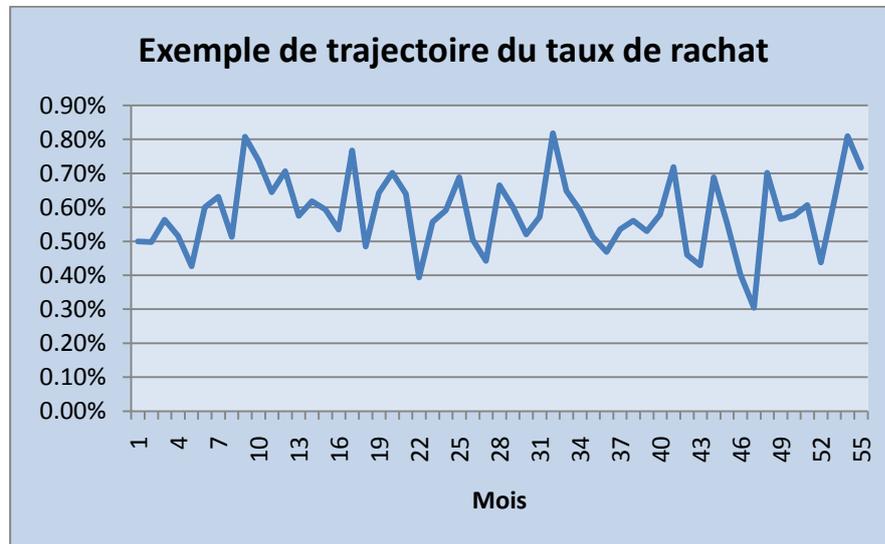


Figure 45. Un exemple de simulation avec le modèle de Vasicek calibré

Effectuons un test du χ^2 sur cet exemple pour conforter la pertinence du modèle. L'estimation des paramètres par la méthode décrite précédemment sur le produit Monroe donne les résultats suivants.

$$\hat{\kappa} = 10$$

$$\hat{\sigma} = 0,46\%$$

$$\hat{\theta} = 0,58\%$$

Ainsi, l'hypothèse à tester H_0 est : le taux de rachat suit une loi normale d'espérance 0,58% et d'écart-type 0,103%. Après avoir regroupé les données par classes d'effectifs supérieurs à 5, les effectifs théoriques de chaque classe ont été calculés. En notant k le nombre de classes, N_i l'effectif empirique de la classe i , n la taille de l'échantillon (égal à 55 mois dans notre cas) et p_i la probabilité théorique d'appartenir à la classe i , on obtient les résultats suivants.

Classe	N_i	np_i
$\leq 0,45\%$	7	5,69
$]0,45\%; 0,52\%]$	9	9,70
$]0,52\%; 0,59\%]$	13	14,2
$]0,59\%; 0,66\%]$	13	13,34
$]0,66\%; 0,73\%]$	8	8,05
$> 0,73\%$	5	4,03

La statistique à considérer est¹⁷ :

$$d^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(N_i - np_i)^2}{np_i}$$

Elle suit une loi du χ^2 à $k - r - 1$ degrés de liberté où r est le nombre de paramètres estimés par le modèle. On considèrera donc une loi du χ^2 à 5 degrés de liberté dans notre exemple. En choisissant un risque de première espèce α , on compare la position de la statistique par rapport au seuil critique K : si $d^2 > K$, on rejette l'hypothèse de départ H_0 , dans le cas contraire, on la garde.

Dans notre cas, la statistique d^2 vaut 0,70. Or, en considérant un risque à 5%, on a $\chi_{0,95}^2(5) = 11,07$, ce qui valide le modèle.

Contexte et applications

Ce modèle permet, dans l'utilisation actuelle des rachats dynamiques, de calculer le paramètre de taux de rachat maximal pour un produit donné. On pourra se référer à la partie III pour l'utilisation pratique et le calibrage.

Il permet également de simuler des trajectoires de taux de rachats pour des projections stochastiques. En effet, le calcul d'options & garanties actuel repose sur une simulation de Monte-Carlo. Pour chacun des 1 000 scénarios, le taux de rachat utilisé en année n est le taux de rachat déterministe rentré en paramètre et éventuellement ajusté dynamiquement en fonction des conditions financières. En utilisant le modèle de Vasicek, la logique peut être différente : il est possible de simuler 1 000 trajectoires de rachat et de les utiliser directement pour la projection des rachats dans chacun des scénarios de simulation. Ceci rend ainsi obsolète la notion de dynamisation des rachats, car le facteur financier est déjà présent dans l'historique des taux de rachat.

Il est enfin possible de l'utiliser pour calculer de façon très simple le taux de rachat en régime stationnaire, et ce pour n'importe quelle maille du portefeuille (ligne client, produit, model point, canton, portefeuille total, etc.). Cette variable est essentielle dans l'appréciation du risque de rachat et constitue un indicateur et une hypothèse majeurs dans les projections et calculs de MCEV.

Avantages et limites

Avantages

Ce modèle présente plusieurs avantages importants pour la mesure du risque de rachat. Il est tout d'abord très **simple à manipuler** et ne demande pas des temps de calcul très importants, ce qui est appréciable dans le monde de l'entreprise.

Ensuite, le processus de taux de rachat mensuels est gaussien, et **la manipulation de lois normales** simplifie grandement les calculs.

¹⁷ Voir Phan T. [7]

De plus, son calibrage est simple à effectuer, il repose sur l'historique des taux de rachats passés, et il est même possible de **choisir l'historique** considéré afin de repérer des changements de comportement au cours du temps.

Il permet également d'effectuer des **tests de sensibilités**, ce qui est essentiel dans le secteur de l'assurance.

Enfin, étant donné qu'il se fonde sur l'analyse du comportement de l'historique du taux de rachat, il **capte tous les types de volatilité**, pas uniquement celle liée au taux, comme c'est le cas dans la modélisation actuelle. En effet, on capte notamment la volatilité opérationnelle, qui peut se révéler importante sur les produits ayant connu des phases de changement importantes, comme des migrations informatiques par exemple.

Limites du modèle

Le premier inconvénient du modèle de Vasicek est dû à la normalité du taux de rachat, qui ne garantit pas des valeurs de taux positives (bien que dans notre cas, il se pourrait théoriquement qu'on assiste à des annulations de rachat). En pratique, ce souci peut être résolu.

De plus, il suppose que le comportement passé se reproduira dans le futur, d'autant plus que les paramètres sont constants. C'est une hypothèse forte qui a d'ailleurs provoqué bon nombre de crises historiques.

Extension

Le fait d'utiliser des paramètres constants empêche, dans les projections, la simulation de périodes atypiques, telles les crises. Ces dernières sont pourtant bien existantes, surtout en considérant la durée des périodes classiques de projection en assurance, qui s'étalent sur une cinquantaine d'années.

Ainsi, afin de pallier à ce problème, nous proposons dans ce mémoire de rendre les paramètres dynamiques, à travers une dépendance au temps ou à d'autres agrégats. Ainsi, par exemple, en cas de crise, la panique des marchés peut se propager jusque dans nos produits d'assurance et augmenter ponctuellement le taux « régime de croisière » du taux de rachat et sa volatilité. Le modèle général suivant permet d'améliorer le modèle de Vasicek.

$$\begin{cases} dr_t = (b_t - ar_t)dt + \sigma_t dW_t \\ r_0 = r(0) \quad Q - p.s. \end{cases}$$

Comme précédemment, en appliquant le lemme d'Itô au processus $r_t e^{at}$, on obtient :

$$r_t = r_s e^{-a(t-s)} + \int_s^t e^{-a(t-u)} b_u du + \int_s^t e^{-a(t-u)} \sigma_u dW_u$$

Nous allons développer ci-dessous deux exemples (cas particuliers) de ce modèle général, qui ont été testés lors de la réalisation de ce mémoire.

Un premier exemple

De nombreuses formes sont envisageables pour b_u et σ_u . Dans notre contexte, on peut penser à une forme sinusoïdale déterministe reproduisant la cyclicité de l'économie et donc le comportement associé des assurés.

$$b_u = \vartheta + k_1 \cos\left(\frac{2\pi u}{T}\right)$$

$$\sigma_u = \tilde{\sigma} + k_2 \cos\left(\frac{2\pi u}{T}\right)$$

Où T est calibré à la période observée des cycles économiques. Le niveau des rachats et leur volatilité dépendent ainsi de la situation économique dans sa globalité, ce qui est effectivement observable dans les historiques disponibles. Avec ces hypothèses, le taux de rachat devient un processus gaussien et on peut calculer son espérance et sa variance conditionnelle.

$$E[r_t | \mathcal{F}_s] = r_s e^{-a(t-s)} + \int_s^t e^{-a(t-u)} (\vartheta + k_1 \cos \frac{2\pi u}{T}) du$$

$$E[r_t | \mathcal{F}_s] = r_s e^{-a(t-s)} + \frac{\vartheta}{a} (1 - e^{-a(t-s)}) + k_1 \int_s^t e^{-a(t-u)} \cos \frac{2\pi u}{T} du$$

$$E[r_t | \mathcal{F}_s] = r_s e^{-a(t-s)} + \frac{\vartheta}{a} (1 - e^{-a(t-s)}) + k_1 \operatorname{Re} \left[\int_s^t e^{-a(t-u) + \frac{2i\pi u}{T}} du \right]$$

$$E[r_t | \mathcal{F}_s] = r_s e^{-a(t-s)} + \frac{\vartheta}{a} (1 - e^{-a(t-s)}) + k_1 e^{-at} \operatorname{Re} \left[\int_s^t e^{(a + \frac{2i\pi}{T})u} du \right]$$

$$E[r_t | \mathcal{F}_s] = r_s e^{-a(t-s)} + \frac{\vartheta}{a} (1 - e^{-a(t-s)}) + k_1 e^{-at} \operatorname{Re} \left[\frac{e^{(a + \frac{2i\pi}{T})t} - e^{(a + \frac{2i\pi}{T})s}}{a + \frac{2i\pi}{T}} \right]$$

$$E[r_t|\mathcal{F}_s] = r_s e^{-a(t-s)} + \frac{\vartheta}{a} (1 - e^{-a(t-s)}) + \frac{k_1}{a^2 + \frac{4\pi^2}{T^2}} \left[a \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + \frac{2\pi}{T} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) - a e^{-a(t-s)} \cos\left(\frac{2\pi s}{T}\right) - \frac{2\pi}{T} e^{-a(t-s)} \sin\left(\frac{2\pi s}{T}\right) \right]$$

$$V[r_t|\mathcal{F}_s] = \int_s^t e^{-2a(t-u)} \left(\tilde{\sigma} + k_2 \cos\frac{2\pi u}{T} \right)^2 du$$

$$V[r_t|\mathcal{F}_s] = \frac{\tilde{\sigma}^2}{2a} (1 - e^{-2a(t-s)}) + 2k_2 \tilde{\sigma} e^{-2at} \operatorname{Re} \left[\int_s^t e^{2au + \frac{2i\pi u}{T}} du \right] + \frac{k_2^2}{2} \int_s^t e^{-2a(t-u)} \left(1 + \cos\frac{4\pi u}{T} \right) du$$

$$V[r_t|\mathcal{F}_s] = \left(\tilde{\sigma}^2 + \frac{k_2^2}{2} \right) \frac{1 - e^{-2a(t-s)}}{2a} + \frac{k_2 \tilde{\sigma}}{a^2 + \frac{\pi^2}{T^2}} \left(a \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + \frac{\pi}{T} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) - a e^{-2a(t-s)} \cos\left(\frac{2\pi s}{T}\right) - \frac{\pi}{T} e^{-2a(t-s)} \sin\left(\frac{2\pi s}{T}\right) \right) + \frac{k_2^2}{2} e^{-2at} \operatorname{Re} \left[\int_s^t e^{2au + \frac{4i\pi u}{T}} du \right]$$

$$V[r_t|\mathcal{F}_s] = \left(\tilde{\sigma}^2 + \frac{k_2^2}{2} \right) \frac{1 - e^{-2a(t-s)}}{2a} + \frac{k_2 \tilde{\sigma}}{a^2 + \frac{\pi^2}{T^2}} \left(a \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + \frac{\pi}{T} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) - a e^{-2a(t-s)} \cos\left(\frac{2\pi s}{T}\right) - \frac{\pi}{T} e^{-2a(t-s)} \sin\left(\frac{2\pi s}{T}\right) \right) + \frac{k_2^2}{4 \left(a^2 + \frac{4\pi^2}{T^2} \right)} \left(a \cos\left(\frac{4\pi t}{T}\right) + \frac{2\pi}{T} \sin\left(\frac{4\pi t}{T}\right) - a e^{-2a(t-s)} \cos\left(\frac{4\pi s}{T}\right) - \frac{2\pi}{T} e^{-2a(t-s)} \sin\left(\frac{4\pi s}{T}\right) \right)$$

Ces expressions sont plus lourdes à implémenter. En revanche, on peut en extraire les valeurs en régime permanent (t grand).

$$E[r_t] = \frac{\vartheta}{a} + \frac{k_1}{a^2 + \frac{4\pi^2}{T^2}} \left[a \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + \frac{2\pi}{T} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right]$$

$$V[r_t] = \frac{\tilde{\sigma}^2 + \frac{k_2^2}{2}}{2a} + \frac{k_2 \tilde{\sigma}}{a^2 + \frac{\pi^2}{T^2}} \left(a \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + \frac{\pi}{T} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right) + \frac{k_2^2}{4\left(a^2 + \frac{4\pi^2}{T^2}\right)} \left(a \cos\left(\frac{4\pi t}{T}\right) + \frac{2\pi}{T} \sin\left(\frac{4\pi t}{T}\right) \right)$$

Est donné ci-dessous un exemple de trajectoire obtenue en simulant par différences finies cette extension du modèle de Vasicek sur une période de 100 ans. On ne s'intéressera ici qu'aux valeurs de long terme du taux de rachat.

Paramètre	Valeur utilisée pour l'exemple
ϑ	6%
k_1	1,2%
$\tilde{\sigma}$	0,86%
k_2	0,17%
T	20 ans
a	0,83
r_0	6%
dt	1 an

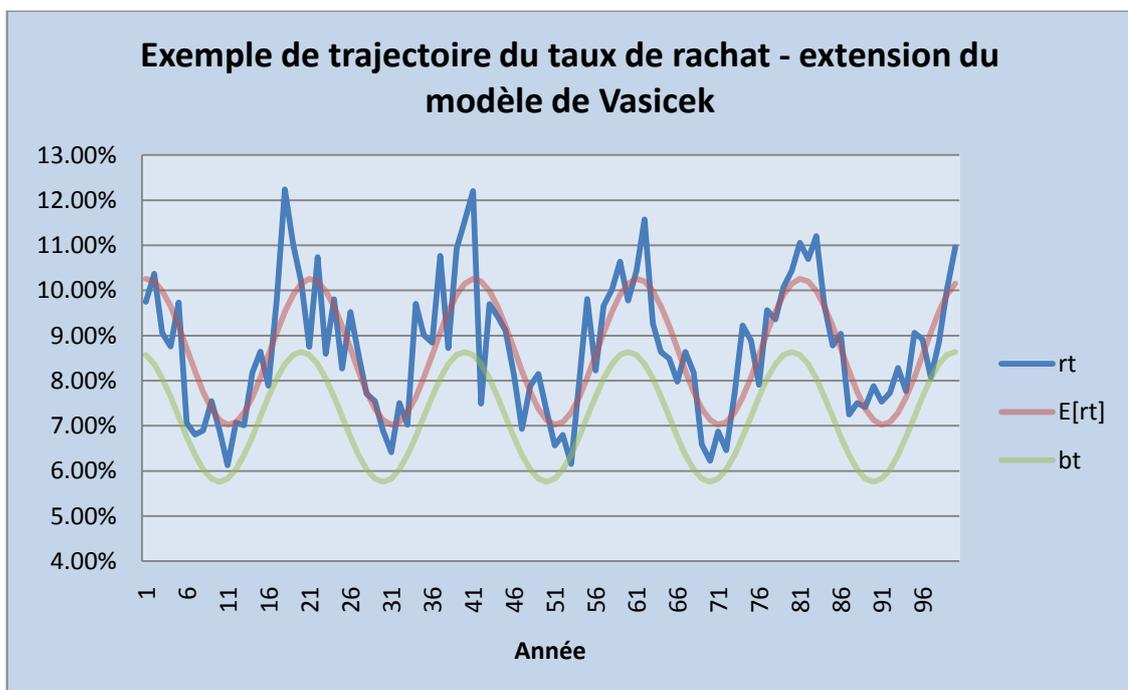


Figure 46. Une première extension du modèle de Vasicek

On remarque bien que les rachats suivent les cycles économiques. Cette modélisation introduit aussi un décalage de phase entre les taux de rachat et la courbe de b_t , valeur de référence, phénomène effectivement observé sur les historiques. En effet, le calcul des extrema de b_t (annulation de sa dérivée) donne :

$$\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) = 0$$

Soit

$$t_k = \frac{kT}{2}$$

Les extrema de $E[r_t]$ sont quant à eux caractérisés par l'équation suivante.

$$-a \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + \frac{2\pi}{T} \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) = 0$$

Soit

$$t_k = \frac{kT}{2} + \frac{T}{2\pi} \arctan\left(\frac{2\pi}{aT}\right)$$

Le déphasage est donc égal à :

$$\varphi = \frac{T}{2\pi} \arctan\left(\frac{2\pi}{aT}\right)$$

Son calcul donne un déphasage d'environ 1 an sur notre exemple, ce qui est effectivement observable sur la trajectoire. Il s'agit du temps de réaction des rachats face à la situation économique. Les assurés réagissent en effet avec un certain décalage par rapport à l'information que leur donne l'environnement économique, ils l'assimilent et prennent le temps de la réflexion avant de prendre une décision. Ce temps de réaction dépend de la force de rappel, comprise dans le paramètre a , et est bien une fonction décroissante de ce dernier : si a augmente, la force de rappel augmente et le temps de réaction (le déphasage) diminue.

Cette expression du déphasage fait penser à un domaine complètement différent : l'électronique. Considérons en effet le circuit électronique suivant.

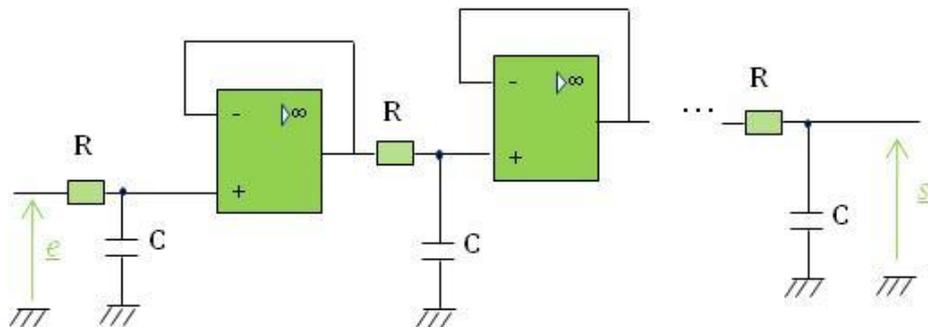


Figure 47. Circuit électronique reproduisant le comportement des rachats

En appliquant un signal sinusoïdal \underline{e} à l'entrée de ce circuit, on obtient, en sortie, un signal \underline{s} , également sinusoïdal, qui est modulé par rapport au signal d'entrée (son amplitude est modifiée) et qui est surtout déphasé. Déphasé de combien ? Déphasé de la valeur ci-dessous.

$$\varphi = \frac{T}{2\pi} \arctan \left(\frac{2\pi RC}{T} \right)$$

Il s'agit de la même forme que pour nos rachats. On peut définir une force de rappel

$$a = \frac{1}{RC}$$

Comment interpréter ce résultat ?

Le signal d'entrée \underline{e} est l'excitation appliquée au circuit, dans notre cas, il s'agit de la situation de l'économie que nous avons supposée cyclique (bien sinusoïdal dans notre modèle). L'application de ce signal fait circuler un courant dans le circuit, c'est le flux d'information qui est transmis par l'excitation, c'est-à-dire toute l'information véhiculée par la situation de l'économie. Face à cela, le courant va traverser un premier composant : une résistance (mesurée en Ohm (Ω) et notée R). En effet, avant de prendre toute décision, l'assuré va spontanément « résister » à l'information qu'il reçoit. Ce n'est pas parce qu'on annonce qu'une banque essuie des pertes que nous allons immédiatement retirer toute l'épargne que nous domicilions dans ladite banque. En parallèle, le circuit est constitué d'un condensateur (dont la capacité est mesurée en Farad (F) et notée C), dont une fonction première est d'accumuler de l'énergie. En effet, l'assuré, en recevant l'information de l'environnement économique, va l'assimiler, la digérer, l'accumuler, avant de prendre toute décision. Plus la « résistance » R des assurés est importante, plus ils vont mettre du temps à réagir car il faut des incitations fortes pour changer leur comportement. De même, plus la « capacité » C des assurés est importante, plus ils vont être capables d'assimiler et de digérer une quantité importante d'information, repoussant d'autant leur décision de rachat.

Ensuite, nous trouvons l'amplificateur opérationnel, qui est souvent considérée comme une boîte noire. Il va représenter pour nous le cerveau de l'assuré, renfermant tout le processus de réflexion, d'utilisation et de transformation de l'information, et de prise de décision. Ce schéma est réitéré un certain nombre de fois, avant de fournir en sortie un signal sinusoïdal, modulé et déphasé, qui est, dans notre cas, la décision de rachat.

Un second exemple

D'autres formes sont possibles, par exemple pour prendre en compte la sensibilité des assurés au niveau et à la volatilité des marchés, on pourra introduire dans les formules de b_u et σ_u une dépendance à ces indicateurs.

$$b_u = \vartheta + \mu_1 S_u$$

$$\sigma_u = \tilde{\sigma} + \mu_2 \sigma_u^M$$

Où S_u représente le niveau des marchés, et qu'on pourra modéliser par les formules de Black & Scholes, et σ_u^M représente la volatilité du marché action, suivant un processus de diffusion. Tout comportement de ce type des assurés face au marché peut ainsi être modélisé avec cette approche.

Un test a été effectué avec le modèle de Heston¹⁸ pour simuler le niveau et la volatilité du marché.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS_t}{S_t} = Rdt + \sigma_t^M dW_t \\ dv_t = k(\theta - v_t)dt + \delta\sqrt{v_t}dW'_t \\ v_t = (\sigma_u^M)^2 \\ d\langle W, W' \rangle_t = \rho dt \end{array} \right.$$

La trajectoire donnée ci-dessous est un exemple obtenu avec une simulation par différences finies de ce modèle.

Paramètre	Valeur utilisée pour l'exemple
ϑ	6%
μ_1	0,01%
$\tilde{\sigma}$	0,86%
μ_2	0,77%
T	20 ans
a	0,83
r_0	6%
dt	1 an

Paramètre S_t	Valeur utilisée pour l'exemple
R	3%
S_0	100
ρ	0,2

Paramètre v_t	Valeur utilisée pour l'exemple
k	0,5
θ	0,04
v_0	0,03
δ	0,07

¹⁸ Voir Heston S.L. [10]

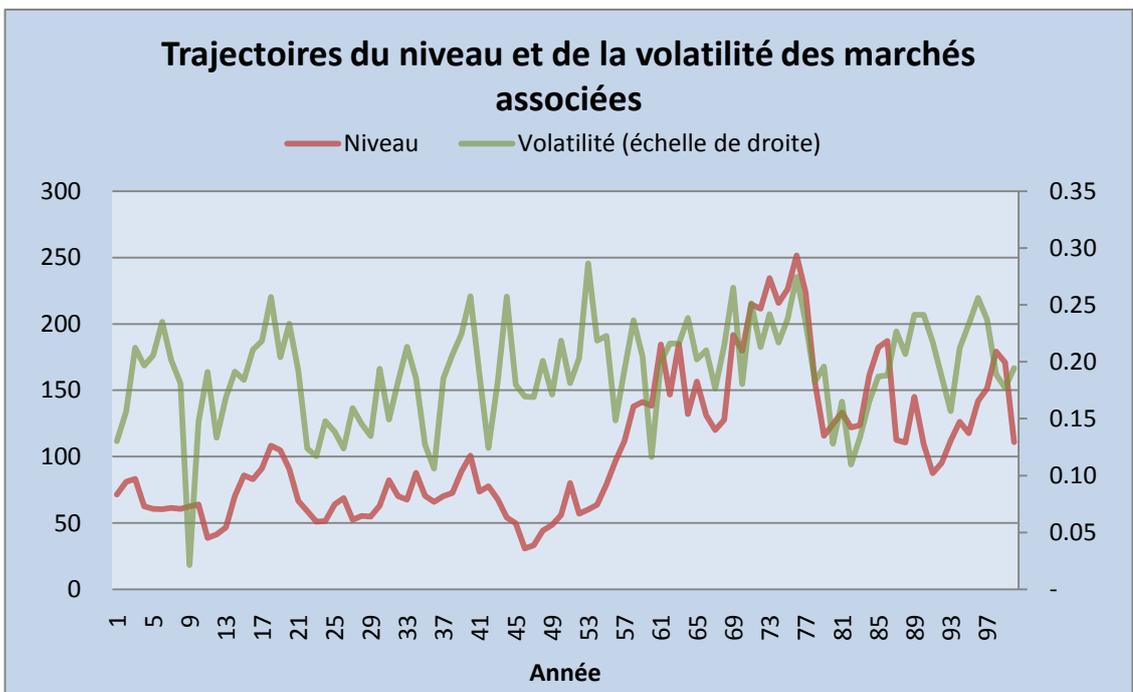
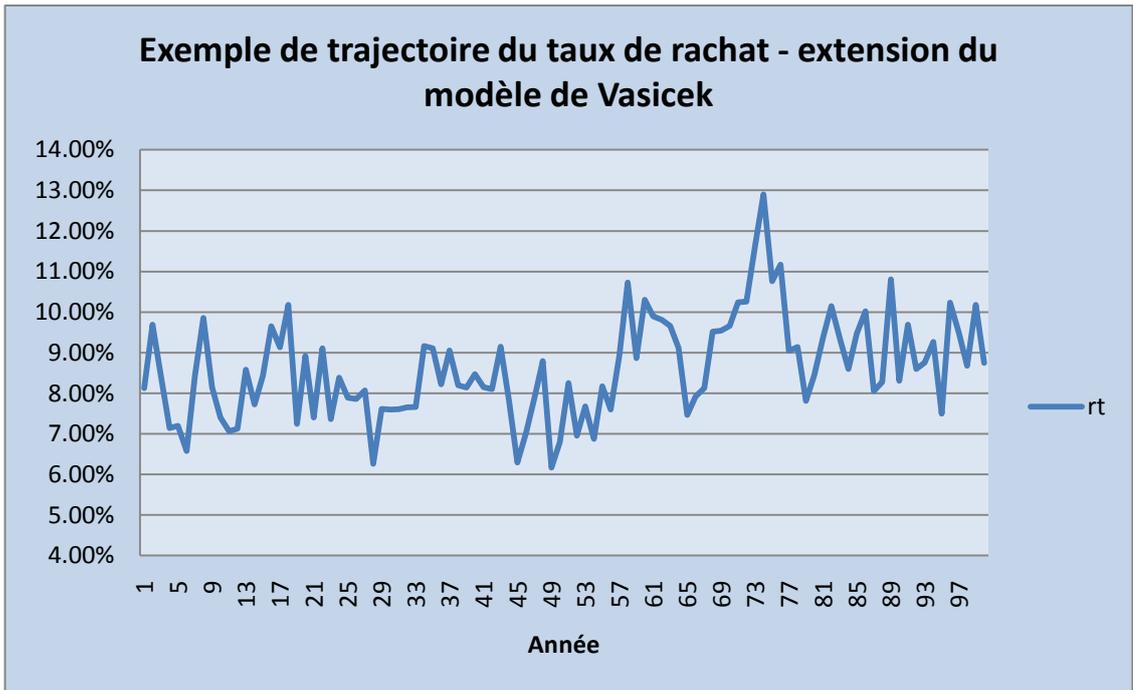


Figure 48. Une seconde extension du modèle de Vasicek

Ce modèle reproduit finement les comportements théoriques attendus du taux de rachat. Les trajectoires obtenues en lançant de nombreuses simulations sont étonnamment proches des courbes réelles présentes en portefeuille.

On ne peut pas effectuer de test du χ^2 à proprement parler sur ces exemples, l'espérance et la variance de la loi dépendant du temps.

L'inconvénient majeur est que l'on perd le caractère gaussien du taux de rachat, et qu'il faut modéliser en parallèle l'évolution des marchés et celle de leur volatilité, rendant le tout plus difficile à implémenter. Etant donné le nombre important de paramètres, le calibrage est également complexe.

Les limites prévues initialement ont donc pu être résolues au détriment du côté simple et pratique. En gardant les paramètres constants, on obtient un modèle simple très bien adapté aux rachats sur de longues périodes.

4.2) Modèle de Black & Scholes saisonnier

Constat - remarques a priori

Les taux mensuels des rachats semblent respecter une certaine saisonnalité. L'idée nouvelle consiste ici à utiliser le modèle de Black & Scholes, classiquement utilisé en finance, mais en utilisant un drift déterministe et sinusoïdal pour reproduire ce comportement. Les problèmes que nous allons a priori rencontrer sont l'utilisation de paramètres constants et le calibrage du modèle (nombre de paramètres important et sensibilité aux données notamment).

La période des rachats semble être d'environ 4 mois. On remarque en effet des pics de rachat autour de janvier, avril, juillet, et octobre. Des éléments d'explication peuvent résider dans des facteurs sociologiques comme le besoin d'argent suite aux fêtes de fin d'année, pour préparer les vacances d'été ou pour le paiement des impôts.

Modélisation

Définition

On suppose donc que le taux de rachat suit l'EDS suivante.

$$\begin{cases} dr_t = \left(a + b \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right) r_t dt + \sigma r_t dW_t \\ r_0 = r(0) \end{cases}$$

Avec a, b, T et σ des constantes positives. La période pourra être ajustée par rapport aux données disponibles.

Propriétés

Appliquons le lemme d'Itô au processus $\ln(r_t)$.

$$d(\ln(r_t)) = \frac{dr_t}{r_t} - \frac{1}{2} \frac{1}{r_t^2} \sigma^2 r_t^2 dt$$

$$d(\ln(r_t)) = \left(a + b \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right) dt - \frac{\sigma^2}{2} dt + \sigma dW_t$$

$$\ln(r_t) - \ln(r_s) = \int_s^t \left(a + b \cos\left(\frac{2\pi u}{T}\right)\right) du - \frac{\sigma^2}{2} (t - s) + \sigma(W_t - W_s)$$

$$r_t = r_s \exp \left(\frac{bT}{2\pi} \left(\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) - \sin\left(\frac{2\pi s}{T}\right) \right) + \left(a - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t - s) + \sigma(W_t - W_s) \right)$$

On capte ainsi les 3 effets escomptés, correspondant aux différents termes de l'exponentielle de l'équation précédente : la saisonnalité, la tendance à la hausse ou à la baisse et l'aléa.

On peut en déduire l'espérance du taux de rachat conditionnellement à \mathcal{F}_s .

$$E[r_t | \mathcal{F}_s] = r_s e^{\frac{bT}{2\pi} (\sin(\frac{2\pi t}{T}) - \sin(\frac{2\pi s}{T})) + a(t-s)}$$

Application pratique aux rachats

Comme pour le modèle de Vasicek, nous utilisons pour la première fois le modèle de Black & Scholes pour représenter les rachats, il faut donc adapter le calibrage.

Calibrage

Là encore, nous supposons qu'il faut partir d'un historique de données. Nous avons :

$$\ln\left(\frac{r_{t+dt}}{r_t}\right) = \frac{bT}{2\pi} \left(\sin\left(\frac{2\pi(t+dt)}{T}\right) - \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right) + \left(a - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma(W_{t+dt} - W_t)$$

$$\ln\left(\frac{r_{t+dt}}{r_t}\right) = \frac{bT}{\pi} \cos\left(\frac{2\pi(2t+dt)}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi dt}{T}\right) + \left(a - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma(W_{t+dt} - W_t)$$

$$V\left[\ln\left(\frac{r_{t+dt}}{r_t}\right)\right] = \sigma^2 dt$$

On a un premier estimateur de la volatilité.

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{V\left[\ln\left(\frac{r_{t+dt}}{r_t}\right)\right]}{dt}}$$

Le terme $\left(a - \frac{\sigma^2}{2}\right)$ peut être approximé comme la tendance de la courbe $\ln\left(\frac{r_{t+dt}}{r_t}\right)$.

$$\hat{a} = \frac{\hat{\sigma}^2}{2} + \text{pente}\left(\ln\left(\frac{r_{t+dt}}{r_t}\right)\right)$$

Enfin, en considérant dt fixe, la courbe $E[\ln\left(\frac{r_{t+dt}}{r_t}\right) - (a - \frac{\sigma^2}{2})dt]$ présente des oscillations dont l'amplitude est $\frac{bT}{\pi} \sin\left(\frac{2\pi dt}{T}\right)$.

$$\hat{b} = \frac{\pi * \text{amplitude}(E[\ln\left(\frac{r_{t+dt}}{r_t}\right) - (\hat{a} - \frac{\hat{\sigma}^2}{2})dt])}{T \sin\left(\frac{2\pi dt}{T}\right)}$$

Le graphique ci-dessous donne un exemple de trajectoire obtenue avec cette modélisation. Là encore, les ordres de grandeurs sont bons et les phénomènes attendus reproduits.

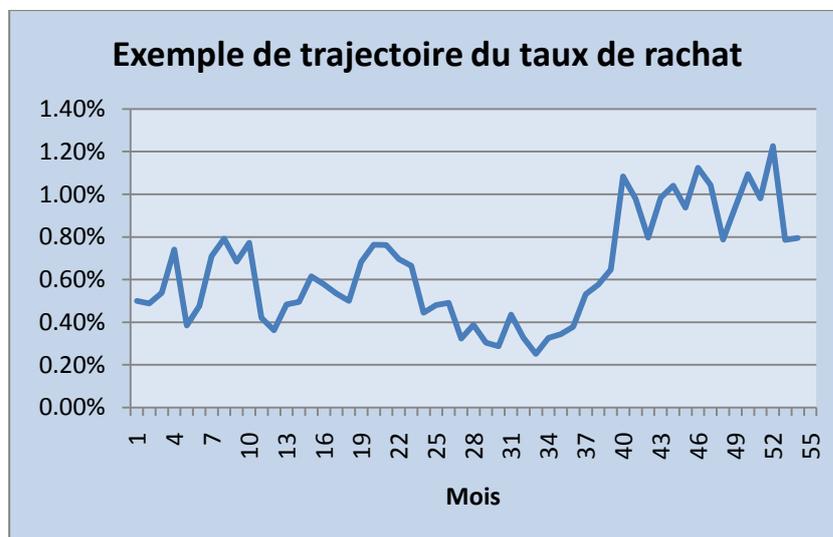


Figure 49. Un exemple de simulation avec le modèle de Black & Scholes saisonnier calibré

On ne peut pas effectuer de test du χ^2 à proprement parler sur cet exemple, l'espérance et la variance de la loi dépendant du temps.

Avantages et limites

Avantages

En plus de prendre en compte l'aspect saisonnier des rachats, ce modèle permet de reproduire le drift naturel de chaque produit. En effet, même si sa valeur est très faible, on peut observer une tendance naturelle, à la hausse ou à la baisse, du taux de rachat au fil du temps, qui est comprise dans le terme en $(a - \frac{\sigma^2}{2})dt$.

Limites du modèle

Ce modèle est cependant plus lourd à implémenter, et le calibrage des paramètres reste assez sensible aux données, d'autant plus qu'il suppose que $\ln\left(\frac{r_{t+dt}}{r_t}\right)$ est censé être périodique. Il peut donc ne pas convenir dans toutes les situations.

La constance des paramètres n'est finalement pas très gênante. En revanche, le terme de drift est certes faible mais rend les rachats soit très faibles, soit explosifs au bout d'un certain temps. L'horizon de projection devra donc rester raisonnable.

4.3) Vision évaluation d'option financière

Constat - remarques a priori

Le rachat est une option permettant à l'assuré, lorsqu'il l'exerce, de retirer tout ou partie de son épargne à tout moment avant la date d'échéance prévue au contrat. Comme nous l'avons vu, une partie de ces rachats est due à des facteurs structurels, une autre partie est due à des facteurs financiers conjoncturels. Afin d'évaluer le coût de cette option dû aux facteurs financiers, l'analogie suivante peut être considérée.

En finance, l'évaluation d'options permet de trouver un prix de vente pour l'acquisition du droit associé à cette option. Elle repose souvent sur le calcul d'une espérance. En effet, par exemple¹⁹, sous la probabilité risque neutre, toute option européenne définie par une variable aléatoire h (le payoff) positive, \mathcal{F}_T -mesurable et telle que $E[h^2] < \infty$ peut être évaluée par $V_t = E[e^{-r(T-t)}h|\mathcal{F}_t]$.

Dans notre cas, nous allons utiliser cette théorie afin d'évaluer une option américaine, car le rachat peut être effectué à tout instant précédant la maturité. La faiblesse a priori de ce modèle est l'absence de prise en compte de l'irrationalité des assurés, car le raisonnement suppose que la frontière entre décision de rachat et renonciation au rachat est nette.

Modélisation

Définition

Pour définir le payoff associé à l'option de rachat, nous allons reprendre le raisonnement utilisé pour le calcul des paramètres relatifs aux bornes de déclenchement de la dynamisation (`surr_incr_begin` et `surr_incr_end`). L'actif sous-jacent à l'option est l'épargne obtenue en cas de rachat au temps T , horizon d'investissement. On va donc chercher à évaluer le taux de rachat par :

$$R_t = E \left[\mathbb{1}_{\left\{ e^{-\int_t^T r_u du} (PM_{avec\ rachat,T} - e^{\lambda(T-t)} PM_{sans\ rachat,T}) > 0 \right\}} \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

¹⁹ Voir Gabet L. [5]

De façon analogue à la partie III, et en reprenant les mêmes notations, on obtient les expressions équivalentes suivantes des PM avec et sans rachat, en utilisant la forme exponentielle.

$$\begin{aligned}
 R_t &= E \left[\mathbb{1}_{\left\{ e^{-\int_t^T r_u du} (PM_{avec\ rachat,T} - e^{\lambda(T-t)} PM_{sans\ rachat,T}) > 0 \right\}} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
 &= E \left[\mathbb{1}_{\left\{ e^{-\int_t^T r_u du} \left((C_0 e^{t\tau} - PS(t)(C_0 e^{t\tau} - C_0)) - facq (C_0 e^{t\tau} - PS(t)(C_0 e^{t\tau} - C_0)) \right) e^{\int_t^T r_u du} - C_0 e^{\tau T} e^{\lambda(T-t)} \right\}} > 0 \right] \\
 &= E \left[\mathbb{1}_{\left\{ (1-facq)(1-PS(t)(1-e^{-t\tau})) - e^{(\tau+\lambda)(T-t)} e^{-\int_t^T r_u du} > 0 \right\}} \middle| \mathcal{F}_t \right]
 \end{aligned}$$

Cette expression s'apparente à une option de type digitale américaine. Nous proposons dans ce mémoire de tester le cas particulier suivant.

Cas particulier : Vasicek

On peut encore simplifier cette expression lorsque r_t suit le modèle de Vasicek. Pour r_t processus gaussien à trajectoires continues, l'intégrale $\int_t^T r_u du$ est également gaussienne conditionnellement à \mathcal{F}_t , et on peut calculer, dans le cadre de Vasicek, sa moyenne et sa variance conditionnellement à \mathcal{F}_t par les expressions suivantes.

$$\begin{aligned}
 E \left[\int_t^T r_u du \right] &= \theta(T-t) + (r_t - \theta) \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} \\
 V \left[\int_t^T r_u du \right] &= \frac{\sigma^2}{\kappa^2} \left[(T-t) - 2 \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} + \frac{1 - e^{-2\kappa(T-t)}}{2\kappa} \right]
 \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned}
 R_t^{Vasicek} &= E \left[\mathbb{1}_{\left\{ (1-facq)(1-PS(t)(1-e^{-t\tau})) e^{-(\tau+\lambda)(T-t)} > e^{-\int_t^T r_u du} \right\}} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
 R_t^{Vasicek} &= E \left[\mathbb{1}_{\left\{ \int_t^T r_u du > (\tau+\lambda)(T-t) - \ln((1-facq)(1-PS(t)(1-e^{-t\tau}))) \right\}} \middle| \mathcal{F}_t \right]
 \end{aligned}$$

$$= 1 - \Phi \left(\frac{(\tau + \lambda - \theta)(T-t) - \ln((1-facq)(1-PS(t)(1-e^{-t\tau}))) - (r_t - \theta) \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa}}{\frac{\sigma}{\kappa} \sqrt{(T-t) - 2 \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} + \frac{1 - e^{-2\kappa(T-t)}}{2\kappa}}} \right)$$

Où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Application pratique aux rachats

Cette valeur de taux de rachat conjoncturel pour l'ancienneté t pourra être estimée soit par formule fermée, soit par méthode de Monte-Carlo selon la modélisation choisie pour le taux r_t (Vasicek, CIR, Hull & White, etc.).

Un simulateur très simple a été implémenté pour tester ce modèle. On considère la situation et un produit aux caractéristiques suivantes (les paramètres de Vasicek sont simplement pris aux valeurs arbitraires usuelles, sans calibrage).

Variable	Valeur
f_{acq}	4,26%
t	1 an
T	8 ans
τ	3,31%
$PS(t)$	35% + 8,2%
r_0	3,5%
λ	1%
κ Vasicek	0,25
σ Vasicek	1%
θ Vasicek	3,6%

Avec ces valeurs, la formule fermée précédente donne un taux de rachat conjoncturel d'environ 3,3%, ce qui est un bon ordre de grandeur.

Avantages et limites

Avantages

Ce modèle, simple à implémenter, permet de prendre en compte non pas seulement la situation financière actuelle, mais également son évolution en effectuant des projections. En effet, en partie III, nous avons supposé que le taux benchmark était maintenu chaque année jusqu'à maturité. Ici, nous faisons varier en stochastique ce taux benchmark.

L'autre avantage est de disposer, dans le cadre du modèle de Vasicek notamment, d'une formule fermée du taux de rachat, il n'est donc pas nécessaire de procéder à des simulations de type Monte-Carlo.

Limites du modèle

Ce modèle ne permet de prendre en compte que l'aspect financier des rachats conjoncturels. Il est également sensible aux mêmes limites que les modèles de taux sous-jacents.

Il suppose également que l'option sera exercée dès que la PM après rachat franchit un seuil (digitale). En pratique, la décision de l'assuré n'est pas aussi nette : lorsqu'il se situe proche de cette frontière, la décision de rachat dépend fortement de la psychologie de l'assuré.

4.4) Triangles de Chain-Ladder

Constat - remarques a priori

Le facteur ancienneté est indéniablement l'un des « drivers » majeurs du taux de rachat en raison notamment de la fiscalité. Le calcul Allianz best estimate du taux de rachat est effectué par ancienneté. En pratique, les assureurs disposent, pour plusieurs années, de la répartition des taux de rachat par année d'ancienneté. Leur problématique consiste ensuite à estimer l'évolution de cette courbe, c'est-à-dire quels seront les taux de rachat par ancienneté dans le futur.

Posé ainsi, ce problème fait penser à l'assurance Dommages, en particulier au provisionnement par la méthode de Chain-Ladder. En effet, de façon similaire, les assureurs non-vie disposent, par année de survenance des sinistres, de leur répartition par année de règlement (dans certaines branches, par exemple l'automobile, les sinistres sont déclarés plusieurs mois, voire plusieurs années après leur survenance). L'enjeu est ensuite de trouver, pour les sinistres survenus récemment, le montant que l'assureur aura à déboursier dans les années suivantes. Ce mémoire propose ainsi de considérer la souscription d'un nouveau contrat d'assurance vie comme un sinistre dont la date de déclaration correspond à la date de rachat.

La faiblesse a priori de cette modélisation est l'hypothèse que le comportement passé se reproduira dans le futur.

Modélisation

Définition

Considérons une branche de durée maximale N ans, et notons $S_{s,d}$ le montant des sinistres survenus l'année s , mais déclaré avant l'année d . On raisonne ainsi sur des données cumulées. Les données disponibles peuvent être regroupées dans un tableau.

$s \backslash d$	0	1	2	...	N
n	$S_{n,0}$	$S_{n,1}$	$S_{n,2}$...	$S_{n,N}$
$n+1$	$S_{n+1,0}$	$S_{n+1,1}$			
$n+2$...				
...	...				
$n+N$	$S_{n+N,0}$				

Toutes les cases bleutées sont des données historiques et disponibles. Pour connaître le montant des provisions à constituer pour couvrir les frais des sinistres survenus, mais non déclarés (IBNR, Incurred But Not Reported), il faut estimer le montant des cases blanches du tableau (triangle inférieur). Pour cela, la méthode de Chain-Ladder est traditionnellement utilisée, et est présentée ci-dessous.

La méthode consiste à calculer à partir des données passées, un coefficient de passage, appelé facteur de développement λ_d , d'une année de déclaration à la suivante. On a :

$$\forall d \geq 1, \lambda_d = \frac{\sum_{s=0}^{N-d} S_{n+s,d}}{\sum_{s=0}^{N-d} S_{n+s,d-1}}$$

Ce coefficient est ensuite appliqué aux données manquantes pour compléter le triangle inférieur.

$$\forall j > n + i, S_{n+i,j} = S_{n+i,i} \prod_{k=i+1}^j \lambda_k$$

Prenons l'exemple suivant d'une branche de durée 5 ans.

$s \backslash d$	0	1	2	3	4
2006	500	600	650	660	665
2007	450	580	630	640	
2008	480	600	635		
2009	510	630			
2010	490				



x 1,24 x 1,08 x 1,02 x 1,01

En particulier,

$$\lambda_1 = \frac{600 + 580 + 600 + 630}{500 + 450 + 480 + 510} = 1,24$$

Application pratique aux rachats

L'idée consiste à appliquer la méthode de Chain-Ladder en travaillant directement sur les taux de rachat en remplaçant l'année de survenance par l'année de souscription du contrat et l'année de déclaration par l'ancienneté au moment du rachat.

Supposons que l'on dispose, pour chaque année comptable passée, du taux de rachat observé par ancienneté. Il est possible d'en extrapoler une prévision des taux de rachat futurs en développant le triangle des données. Prenons un exemple simplifié d'un contrat de maturité 8 ans, dont l'historique des taux de rachat par ancienneté est le suivant.

<i>s</i> \ <i>d</i>	0	1	2	3	4	5	6	7
2003	1,79%	1,79%	3,14%	4,00%	2,95%	2,91%	2,32%	8,28%
2004	1,76%	1,77%	3,33%	3,72%	3,11%	3,68%	2,39%	
2005	1,80%	1,80%	3,30%	3,70%	3,10%	3,70%		
2006	1,35%	1,38%	3,00%	3,68%	2,99%			
2007	1,68%	1,71%	3,10%	3,85%				
2008	1,71%	1,72%	3,25%					
2009	2,06%	2,10%						
2010	1,90%							

Les facteurs de développement sont les suivants.

<i>i</i>	1	2	3	4	5	6	7
λ_i	1,01	1,88	1,19	0,80	1,12	0,71	3,57

On en déduit ensuite les taux de rachat estimés futurs.

$s \backslash d$	0	1	2	3	4	5	6	7
2003	1,79%	1,79%	3,14%	4,00%	2,95%	2,91%	2,32%	8,28%
2004	1,76%	1,77%	3,33%	3,72%	3,11%	3,68%	2,39%	8,53%
2005	1,80%	1,80%	3,30%	3,70%	3,10%	3,70%	2,64%	9,44%
2006	1,35%	1,38%	3,00%	3,68%	2,99%	3,36%	2,40%	8,57%
2007	1,68%	1,71%	3,10%	3,85%	3,10%	3,48%	2,49%	8,88%
2008	1,71%	1,72%	3,25%	3,88%	3,12%	3,51%	2,51%	8,95%
2009	2,06%	2,10%	3,95%	4,71%	3,79%	4,26%	3,05%	10,87%
2010	1,90%	1,92%	3,61%	4,31%	3,47%	3,89%	2,78%	9,93%

Tableau 21. Exemple d'application de la méthode Chain-Ladder aux rachats

Le taux de rachat total peut se lire sur une diagonale en pondérant par les PM les taux de rachat par ancienneté présents dans le tableau.

Avantages et limites

Avantages

On met davantage ici en lumière l'ancienneté du contrat en tant que facteur explicatif du taux de rachat. La méthode est très simple à utiliser et est typique du monde assurantiel.

L'avantage de ces triangles de liquidation est d'extrapoler les taux de rachat futurs à partir des données observées, ce qui permet de prendre en compte en réalité tous les facteurs explicatifs, y compris financiers, faisant varier le taux de rachat.

Limites du modèle

Cette méthode nécessite que l'on dispose de suffisamment de données pour remonter loin dans l'historique de rachat, ce qui n'est pas toujours le cas en pratique. Il n'est pas non plus adapté pour prendre réellement en compte les crises ni les scénarios extrêmes.

De plus, ce modèle part du principe que l'expérience passée se reproduira en moyenne dans le futur, ce qui est à nouveau une hypothèse forte.

4.5) Analyse macroéconomique

Constat - remarques a priori

Le rachat est intrinsèquement lié au comportement des assurés, à la situation économique globale et surtout à la vision qu'ont les premiers de la seconde. De nombreuses variables peuvent ainsi potentiellement être considérées comme explicatives de la décision de rachat sur les contrats d'assurance. Le rachat n'est finalement qu'une décision binaire prise par seulement une partie des assurés : la décision de rachat est prise ou non. On peut donc poser le problème de la façon suivante : quelle partie de la population des assurés va exercer son option de rachat ?

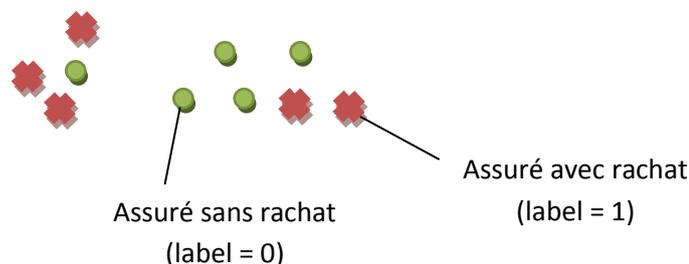
Une méthode classique et simple consiste à trouver les facteurs qui influent sur la décision de rachat des assurés et effectuer une régression logistique. Nous allons détailler ce modèle et considérer de nombreuses variables du domaine macroéconomique comme candidates explicatives du taux de rachat.

Les problèmes que nous allons a priori rencontrer sont le choix des variables explicatives (quel critère choisir pour considérer une variable comme explicative ou non explicative ?) et la reproduction fidèle du caractère aléatoire des rachats.

Modélisation

Définition

On considère le problème général de la classification binaire en d dimensions²⁰. Soit $(x_n)_{n \in I} \in \mathbb{R}^d$ et $(y_n)_{n \in I} \in \{0,1\}$ leurs labels (0 pour sain et 1 pour malade par exemple). En médecine, on peut ainsi chercher à segmenter la population entre sujets sains et sujets malades à partir de la valeur des facteurs qui influent sur leur santé (par exemple, pour l'étude de bactéries : conditions de température et de pression, taux de salinité, quantité de carbone, d'azote, etc.).



Si un nouvel assuré (ou un patient) arrive dans des conditions macroéconomiques (ou avec ses données) $x \in \mathbb{R}^d$, que vaut son label ? La description discriminative consiste à considérer une probabilité a posteriori :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \eta(x) = P(Y = 1 | X = x) = E[Y | X = x]$$

²⁰ Voir Vayatis N. [8], Dr Mancini J. [11], Theodoridis S., Koutroumbas K. [12]

On appelle classifieur toute fonction mesurable g de \mathbb{R}^d dans $\{0,1\}$. L'erreur de classification associée au classifieur g est :

$$L(g) = P(Y \neq g(X))$$

Où Y est le label et $g(X)$ est la prédiction de ce label compte tenu des données X .

Règle de Bayes :

$$\exists g^* t. q. L(g^*) \leq L(g) \quad \forall g \text{ classifieur}$$

$$g^*(x) = 11_{\{\eta(x) > \frac{1}{2}\}}$$

La régression logistique consiste à modéliser $\text{logit}(\eta(x))$ par un modèle linéaire $\beta^T x + \beta_0, \beta_0 \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}^d$.

$$\ln\left(\frac{\eta(x)}{1-\eta(x)}\right) = \beta_0 + \beta^T x$$

Pour estimer les paramètres, on pourra utiliser le maximum de vraisemblance en supposant les observations $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ i.i.d. On obtient les résultats suivants, dont la démonstration est donnée en annexe 8.

$$X^T(Y - H(b)) = 0$$

$$\text{Où } X = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_i^1 & \dots & x_i^d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} \vdots \\ y_i \\ \vdots \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, H(b) = \begin{pmatrix} \vdots \\ \eta(x_i) \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

La solution b^* est implicite et on pourra utiliser l'algorithme de Newton-Raphson pour obtenir une approximation de b^* . L'annexe 8 en détaille le principe.

Application pratique aux rachats

Notre label Y sera ici la décision de rachat. Notre individu $X \in \mathbb{R}^d$ sera la situation macroéconomique modélisée par d variables choisies dans les données disponibles. Notre probabilité de rachat recherchée est donc $\eta(x) = P(Y = 1 | X = x)$ et sera caractérisée par $\ln\left(\frac{\eta(x)}{1-\eta(x)}\right) = \beta_0 + \beta^T x$, où β_0 et β sont les paramètres à estimer.

1^{ère} étape : sélection des variables explicatives.

La première étape a consisté à choisir les variables économiques explicatives pour la régression logistique. Pour être le plus exhaustif possible, une liste d'indicateurs macroéconomiques a été sélectionnée, sans préjugé ni a priori sur leur caractère explicatif ou non du taux de rachat, et des historiques mensuels ont ensuite été récupérés pour chacun d'entre eux²¹. La liste des variables considérées est donnée en annexe 9.

²¹ Sources : Bases de données de l'INSEE [18], European Central Bank [19].

Ensuite, pour chaque produit et chaque variable macroéconomique, la corrélation entre l'historique du taux de rachat et celui de l'indicateur a été calculée, depuis 2004 et depuis 2007 pour étudier l'évolution de leurs dépendances.

Les variables conservées pour la régression logistique d'un produit sont celles présentant les meilleures corrélations. On supprime ensuite les variables fortement corrélées entre elles. A titre d'exemple, les variables retenues pour le produit Kennedy sont le nombre de défauts d'entreprises du secteur immobilier, l'opinion sur le niveau de vie futur, et le nombre de défauts d'entreprises dans l'industrie.

Analyse qualitative des résultats

Des remarques qualitatives assez intéressantes peuvent être formulées au regard des ces premières analyses. Il ne s'agit que d'observations statistiques sur un périmètre particulier. Elles ne sont pas toujours intuitives.

Tout d'abord, en comparant les corrélations depuis 2004 et les corrélations depuis 2007, on s'aperçoit d'un certain nombre de changements. Les taux de rachat sont davantage corrélés aux différents taux financiers depuis début 2007, laissant supposer une certaine rationalisation par rapport à ce type d'indicateur. Il en va de même pour toutes les variables relatives au CAC40. Précisons ici qu'il y a eu une généralisation des campagnes à taux promo à partir de 2007 chez Allianz.

Ensuite, on peut observer une modification du comportement des rachats face à la consommation des ménages, notamment une baisse de la corrélation. Ainsi, certains produits qui y étaient positivement corrélés se retrouvent négativement corrélés.

En ce qui concerne l'opinion des Français sur leur situation économique et leur niveau de vie, des changements sont observables, mais dépendent des produits.

La corrélation au nombre de défauts augmente également entre 2004 et 2007, laissant penser à une rationalisation, à l'exception faite des défauts d'entreprises du secteur financier, pour lesquelles la corrélation a baissé, confirmant que ce secteur joue un rôle particulier dans l'opinion des assurés.

On remarque une baisse notoire de la corrélation par rapport à la population française sur les produits étudiés.

Les corrélations entre rachats et cours des matières premières sont en baisse de façon générale, certaines deviennent même négatives alors qu'elles étaient positives.

Les mêmes corrélations ont été calculées non pas entre les rachats et les variables mais entre leurs moyennes mobiles à 6 mois, pour davantage cerner les tendances globales. Les phénomènes précédents sont amplifiés : l'augmentation de la corrélation aux taux et la baisse de celle aux cours des matières premières sont notamment très nettes.

Beaucoup de produits sont positivement corrélés aux taux. En revanche, certains y sont anti-corrélés, c'est le cas notamment du produit Pierce ou des nouveaux produits Wilson, Washington et Roosevelt, ce qui peut paraître contre-intuitif.

Enfin, certains exotismes peuvent être répertoriés, notamment la très forte corrélation entre les rachats sur le produit Pierce et l'indice des salaires de base (> 70%), la population française (> 70%), le nombre de créations d'entreprises (85%), ou encore l'indice des prix des denrées tropicales (78%) ! Les rachats sur le produit Adams sont quant à eux anti-corrélés au cours de l'huile d'olive à hauteur de -60%, et corrélés aux cours du cacao, du riz et du soja à plus de 60%. Il ne s'agit ici que d'analyses statistiques, et il ne faut pas en conclure que les rachats sont expliqués par ces variables (lorsque X et Y sont fortement corrélées, ce n'est pas forcément X qui est la cause de Y, c'est peut-être Y qui cause X ou même une autre variable Z qui explique à la fois X et Y). En revanche, ces résultats sont intéressants et pourraient faire l'objet d'analyses plus approfondies pour expliquer ces corrélations.

Les rachats du produit Adams semblent plus particulièrement sensibles aux différents indicateurs de niveau de vie et de situation économique des assurés. Ceci peut s'expliquer par le caractère grand public de ce produit.

Dans le même genre d'idées, le produit Monroe est le plus sensible au nombre de défauts d'entreprises, tous secteurs confondus.

2^{ème} étape : régression.

Le principe est le même que pour les modèles AR(p). On va chercher ici de façon simplifiée les coefficients de la régression à l'aide des fonctions Excel, qui utilisent non pas le maximum de vraisemblance mais la méthode des moindres carrés.

$$\ln\left(\frac{\eta(x)}{1-\eta(x)}\right) = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}^T x$$

On en déduit une estimation du taux de rachat en inversant cette formule.

$$\hat{\eta}(x) = \frac{e^{\widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}^T x}}{1 + e^{\widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}^T x}}$$

Sur le produit Kennedy par exemple, on obtient, en gardant seulement comme variables explicatives le nombre de défauts d'entreprises dans l'immobilier, l'opinion sur le niveau de vie futur et le nombre de défauts d'entreprises dans l'industrie, les résultats suivants pour un R² de 75%.

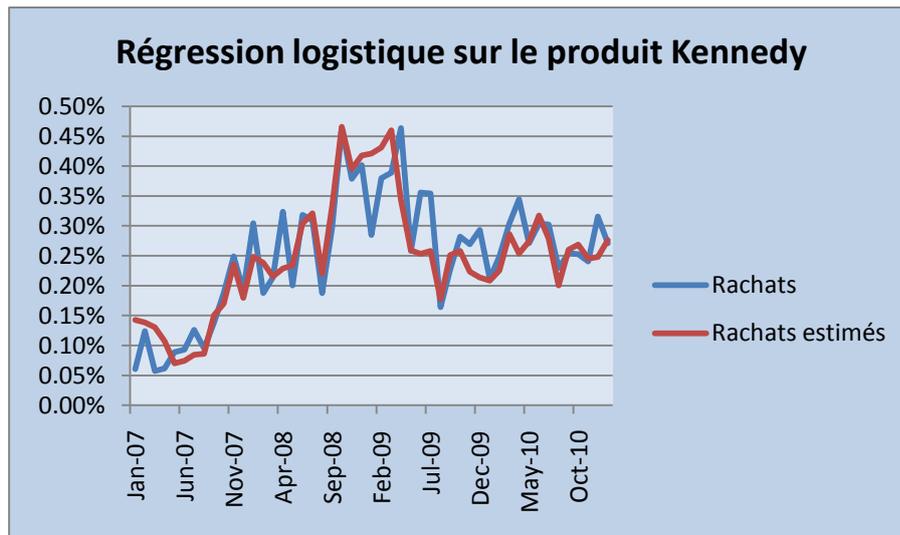


Figure 50. Un exemple d'application de régression logistique

Une régression sur le produit Kennedy a également été effectuée mais en considérant non pas le taux de rachat et les variables macroéconomiques, mais leurs moyennes mobiles respectives. Les variables explicatives retenues sont le niveau moyen du CAC 40 sur le mois, l'opinion sur le niveau de vie futur, le nombre de défauts d'entreprises immobilières, et les cours du nickel et du zinc. On obtient un R^2 supérieur à 97%.

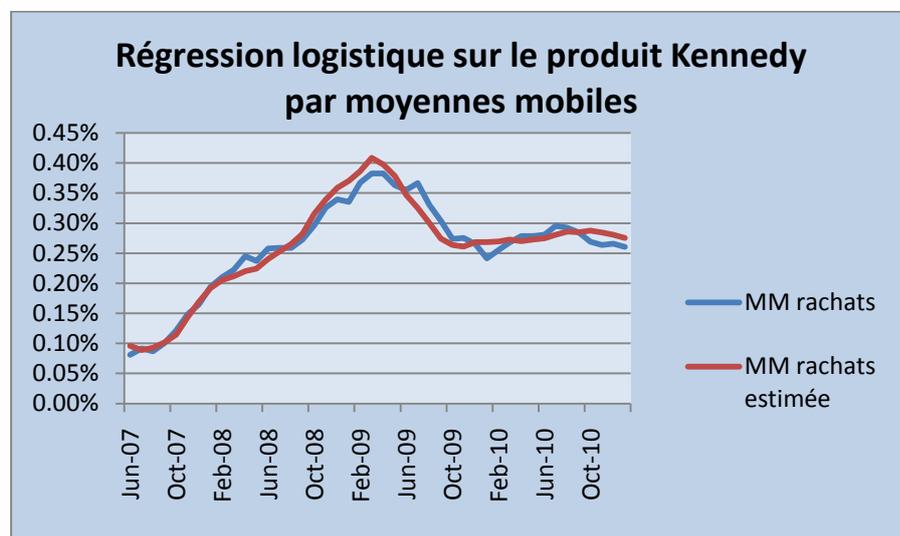


Figure 51. Un exemple de régression logistique sur les moyennes mobiles

Dans un souci de prévision des taux de rachat futurs, il est également possible d'effectuer une régression logistique sur des données décalées. En effet, on peut postuler que le taux de rachat du mois courant dépend des valeurs des variables économiques du mois précédent. Ainsi, il serait possible, en fonction de la situation économique courante, de prévoir le taux de rachat futur en appliquant la formule de régression obtenue. Pour des

projections lointaines, il faudrait prévoir et modéliser les variables explicatives elles-mêmes, mais l'utilisation de cette méthode en décalé permettrait de prévoir la tendance sur les quelques mois à venir par exemple. Toujours pour le produit Kennedy, les variables retenues dans ce cas sont l'indice de confiance des ménages, l'opinion sur le niveau de vie futur, le nombre de défauts dans les transports et dans l'immobilier, et le cours du zinc. On obtient les résultats suivants, pour un R^2 de 70%.

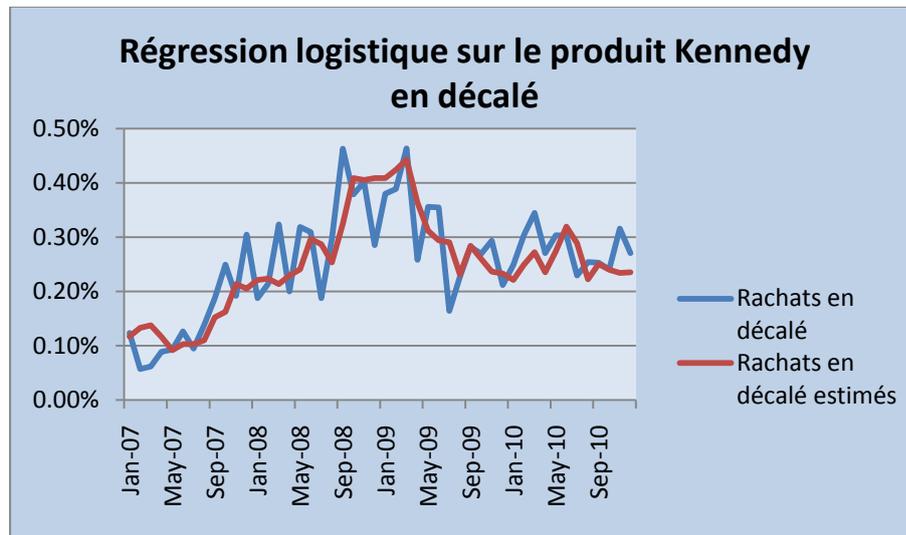


Figure 52. Un exemple de régression logistique sur les données décalées

Enfin, on peut mélanger l'idée des modèles autorégressifs de la partie III avec la régression logistique, il suffit d'ajouter comme variables explicatives les taux de rachat des mois précédents. On obtient les résultats suivants avec un R^2 de 81%.

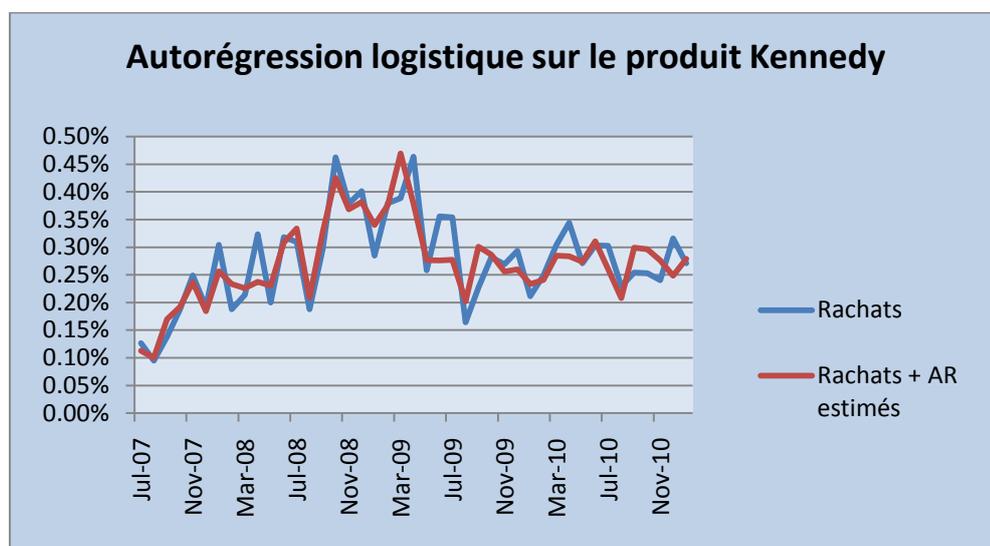


Figure 53. Un exemple "d'autorégression logistique"

Cette idée de faire dépendre une variable de ses valeurs précédentes par régression logistique est utilisée dans la prévision de la hauteur de vagues. En effet, en utilisant comme variables explicatives les valeurs aux temps précédents, on autorise la prise en compte d'un phénomène de propagation, de contagion d'un événement. C'est très exactement le cas pour une vague, qui est la propagation d'une onde à la surface de l'océan provoquée par le vent ou une autre source, comme une rupture de la croûte terrestre soulevant, par son énergie une grande masse d'eau, et pouvant provoquer des tsunamis dévastateurs.

En introduisant ce phénomène dans notre modèle pour les rachats, que remarque-t-on ? On remarque que l'on améliore le calibrage aux données en plein pendant la crise de 2008 (comparer la régression classique avec « l'autorégression »). Ceci vient nous conforter dans notre idée que la crise est une crise de confiance, une crise de propagation, une crise de contagion.

3^{ème} étape : analyses complémentaires.

Nous allons déterminer quelles variables macroéconomiques sont les plus influentes sur le comportement des assurés en matière de rachat et étudier l'évolution de ces corrélations entre 2004 et 2007. Ainsi, parmi les 150 variables disponibles a été sélectionnée la quinzaine d'entre elles expliquant le mieux les rachats au global. Elles ont également été choisies de façon à couvrir le spectre des agrégats macroéconomiques (il n'y a pas 15 taux différents, mais un ou deux taux, une variable sur le PIB, une ou deux sur les matières premières, etc.).

Le critère utilisé pour le choix des variables est la maximisation de la somme, sur tous les produits du périmètre étudié, des carrés des corrélations. Cette étude a été menée sur l'historique depuis 2004 et celui depuis 2007.

Les meilleures variables explicatives des taux de rachat depuis 2004 sont :

- Le taux des bons du Trésor à 1 mois
- L'EONIA
- La volatilité du CAC 40 sur 1 an
- L'Indice des Prix à la Consommation
- La consommation des ménages en équipement du logement
- L'opinion sur la situation financière future
- L'indice de référence des loyers
- Le nombre de défauts d'entreprises dans l'immobilier
- L'indice des taux de salaire des ouvriers des secteurs non agricoles
- La population française
- Le nombre d'immatriculations de voitures particulières neuves
- Le nombre de créations d'entreprises
- L'indice de prix des denrées tropicales
- Le cours de l'huile d'olive
- Le cours de l'or
- L'indice de la production industrielle en biens d'investissement

Une régression sur le produit Pierce par exemple avec ces variables donne les résultats suivants.

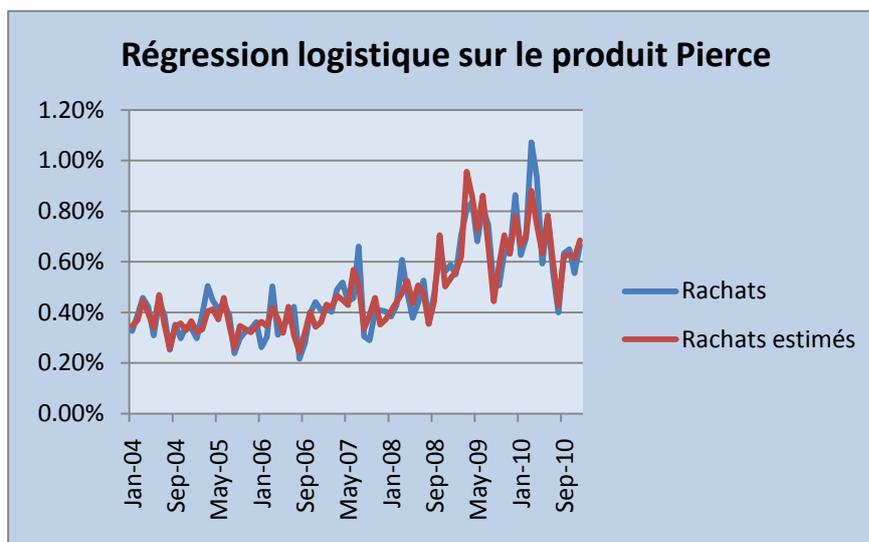


Figure 54. Qualité de la régression logistique

La même étude a donc été menée sur l'historique depuis 2007. Les meilleures variables explicatives des taux de rachat depuis 2007 sont les suivantes (celles suivies d'un (*) sont nouvelles par rapport à l'étude avec l'historique depuis 2004).

- L'EURIBOR à 1 mois (*)
- Le taux du Livret A (*)
- La moyenne mobile à 1 an du CAC 40 (*)
- Le SMIC horaire brut (*)
- L'Indice des Prix à la Consommation
- Le taux de change EUR/YEN (*)
- La consommation des ménages en équipement du logement
- L'opinion sur le niveau de vie futur (*)
- L'indice de référence des loyers
- Le nombre de défauts d'entreprises dans l'industrie manufacturière (*)
- Le taux de chômage (*)
- L'indice des taux de salaire horaire des ouvriers des secteurs non agricoles
- La population française
- L'indice des prix des denrées tropicales
- Le cours de l'or
- L'indice de la production industrielle en biens d'investissement

De façon globale, on peut ainsi remarquer que les variables explicatives principales sont davantage tournées aujourd'hui sur la situation personnelle des assurés, leur quotidien, et moins sur les grands indicateurs nationaux de croissance de l'économie. Ainsi, l'opinion de la situation financière future disparaît au profit de l'opinion sur le niveau de vie futur (définanciarisation, recentrage sur le confort du foyer). Le nombre de créations

d'entreprises, moteur de croissance, et le nombre de défauts dans le secteur immobilier sont remplacés par le SMIC, le taux de chômage, le nombre de faillites dans l'industrie manufacturière, indicateurs beaucoup plus révélateurs du quotidien des foyers.

Avantages et limites

Avantages

Cette modélisation permet de prendre en compte la situation économique dans son ensemble comme variable explicative du taux de rachat. Elle permet de généraliser l'approche par auto-régression étudiée en partie III. On peut enfin découvrir les dépendances entre le comportement des clients et les variables macroéconomiques et leurs évolutions.

Notons également que le caractère aléatoire et saisonnier des rachats est bien rendu par cette modélisation, contrairement à l'a priori initial. De plus, le choix des variables explicatives a pu être effectué par des critères rationnels, transformant ainsi une limite initiale en force. Ce modèle permet donc d'aboutir à des conclusions plus intéressantes et surprenantes que prévu.

Limites du modèle

La modélisation dépend fondamentalement des corrélations historiques entre taux de rachat et variables macroéconomiques. Il ne s'agit que de statistiques, et il peut paraître peu intuitif de modéliser nos taux de rachat par des variables telles le cours des matières premières ou le nombre de créations d'entreprises en France.

CONCLUSION

Les quelques modèles présentés dans cette dernière partie sont autant de propositions différentes pour expliquer un même phénomène qui est celui du rachat.

Le modèle de Vasicek est le mieux adapté pour effectuer des projections de rachat sur de nombreuses années, il est simple et facile à calibrer. Son extension lui sera préférée afin de capter davantage d'effets, mais son implémentation nécessite une modélisation plus lourde. Le modèle saisonnier de Black & Scholes est mieux adapté pour une plus grande finesse de modélisation, mais sur un horizon de temps assez court. Une approche de type Monte Carlo y serait adaptée. La vision option financière présente l'avantage d'obtenir une formule fermée du taux de rachat conjoncturel et prend en compte le risque de taux. Elle pourra être utilisée comme benchmark de l'ordre de grandeur du taux de rachat. L'utilisation des triangles de développement de Chain-Ladder sera préférée si l'entreprise dispose de données de rachat nombreuses et solides, et si elle souhaite mettre l'accent sur l'ancienneté comme variable explicative. Enfin, l'approche par régression logistique permet de « mesurer » la psychologie des assurés et de connaître quels sont les grands agrégats macroéconomiques qui gouvernent leur comportement. Elle constitue un outil d'analyse et de suivi du risque qui pourra être très apprécié des décideurs, et permet de mesurer, à partir des données sur la situation macroéconomique actuelle, quel impact aura cette dernière sur les rachats de notre portefeuille.

Modèle	Limites a priori	Limites a posteriori	Avantages	Conseils d'utilisation
Vasicek	Taux < 0, Paramètres constants	Paramètres constants	Simple, choix de l'historique, adaptable	Projections longues, études de sensibilité
<i>Extension</i>		Lourd à implémenter	Modélisation des assurés face au marché	Etudes fines pour modéliser des caractéristiques précises des rachats
B&S saisonnier	Paramètres constants, calibrage	Lourd, cas d'utilisation, court terme	Drift, saisonnalité	Projections Monte Carlo fines sur de courtes périodes
Option financière	Pas d'irrationalité	Pas d'irrationalité	Formule fermée, risque de taux	Calcul rapide, ordre de grandeur
Chain- Ladder	Le passé se reproduit dans le futur	Données (hors crises), le passé se reproduit dans le futur	Mise en lumière de l'ancienneté	En cas d'une bonne base de données
Régression logistique	Choix variables explicatives, absence d'aléa	Repose sur des statistiques passées	Macroéconomie, saisonnalité, aléa	Prise de décision en fonction de la situation économique

Il sera en tout état de cause impossible de prévoir rationnellement le niveau des rachats futurs en raison de la nature même de cette option. En revanche, il est profitable d'en étudier le plus grand nombre d'aspects possible, pour apprendre à mieux le maîtriser et surtout dans l'optique de gérer les risques qui lui sont associés.

Conclusion

En introduisant l'option de rachat sur leurs contrats d'assurance vie, les compagnies d'assurance apportaient une innovation commerciale qui leur a permis d'attirer de nombreux clients, séduits par une liquidité accrue de leur placement. La simplicité apparente de la définition du rachat cache cependant une complexité étonnante. Il fait en effet, entre autres, intervenir et interagir trois parties, l'assuré, l'assureur et le marché, soulève des problématiques de gestion actif-passif et dépend du comportement plus ou moins irrationnel des assurés. Le rachat s'est ainsi petit à petit transformé en un risque, probablement sous-estimé lors de sa création, au point de devenir la cause de faillites d'entreprises et l'un des risques les plus redoutés du marché français de l'assurance vie. Il est de plus aujourd'hui mis en lumière par les réformes réglementaires et la singularité de la situation économique actuelle.

Dans ce mémoire, nous n'avons pas considéré cette complexité comme une difficulté, un problème, un obstacle, mais nous l'avons au contraire abordé comme une force, une opportunité, un tremplin. Nous l'avons exploitée, en utilisant ses multiples facettes pour éclairer l'option de rachat sous des angles différents. Tout comme dans le domaine de la photographie, nous avons observé le même sujet avec des filtres, des objectifs et des éclairages différents. C'est cette même complexité qui nous a permis d'établir des analogies avec d'autres secteurs et d'en tirer le meilleur parti pour mettre à jour les paramètres de lois de rachats dynamiques et proposer de nouvelles modélisations. Nous disposons désormais d'une méthodologie prenant en compte les spécificités du portefeuille dans le paramétrage des rachats dynamiques ainsi que de nouveaux modèles adaptés aux différents besoins d'une compagnie d'assurance en matière de rachats.

En raison de la richesse du risque de rachat et notamment des interactions entre les facteurs dont il dépend, de nombreuses études peuvent être menées afin de mieux comprendre son fonctionnement, sa sensibilité, son évolution. Ainsi, par exemple, le niveau du taux minimum garanti a un fort impact sur le taux réellement crédité et donc sur le niveau de rachat. La mesure de la sensibilité à ce paramètre pourrait ainsi faire l'objet d'une étude spécifique. Aussi, nous avons comparé dans ce mémoire le rachat à l'option de remboursement anticipé de crédit. D'autres options, telles le versement libre, miroir du rachat, ou l'option d'arbitrage, ou des compositions de ces options pourront également être considérées.

Annexes

ANNEXE 1 : Lexique.....	188
ANNEXE 2 : Rappel des abréviations utilisées	189
ANNEXE 3 : Modélisation de la gestion d'un contrat en UC.....	191
ANNEXE 4 : Evaluation de la valeur d'une obligation	194
ANNEXE 5 : Article L.132-23, Assurances dépourvues de réduction ou de rachat	196
ANNEXE 6 : Market Consistent Embedded Value (MCEV) Principles	198
ANNEXE 7 : Modèles autorégressifs AR(p)	203
ANNEXE 8 : Régression logistique	206
ANNEXE 9 : Liste des variables macroéconomiques considérées	209

ANNEXE 1 : Lexique.

Canton : C'est le résultat du regroupement de passifs et des actifs correspondants affectés à une section distincte du bilan. Ceci permet une gestion particulière d'un groupe homogène de contrats. On met en place pour chacun d'entre eux des provisions techniques, des résultats, etc. On peut les considérer comme des portefeuilles à part entière.

Cap : Option d'achat sur les taux d'intérêt. L'acheteur d'un cap détermine au préalable le taux maximum auquel il est prêt à payer son emprunt (dont le montant est appelé nominal). Le vendeur s'engage à verser à l'acheteur la différence de taux s'il dépasse le niveau convenu. L'acheteur a ainsi la certitude de pouvoir emprunter à un taux d'intérêt maximal pendant une période déterminée. L'option est dite strikeless si ce taux maximal n'est pas constant au cours du temps.

Solvabilité : Capacité d'une entreprise d'assurance à honorer les engagements pris envers ses assurés et bénéficiaires de contrats.

Spread de signature : Supplément de rendement sur le taux d'intérêt demandé par le marché aux émetteurs privés en contrepartie du risque de défaillance de paiement. Il s'agit d'une prime de risque qui dépend de l'émetteur. Ceux-ci sont classés par rating selon leur capacité à ne pas faire défaut (notations AAA, AA, A, BBB, etc.). Egalement appelé spread de défaut.

Taux forward : Ce sont les taux d'emprunt ou de placement, pour des périodes futures, implicites dans les taux zéro-coupons d'aujourd'hui. Par exemple, le taux forward pour l'année 2 est le taux d'intérêt déduit de la courbe des taux ZC pour la période d'un an entre la fin de la première année et la fin de la deuxième année. Il est calculé à partir du taux ZC 1 an et du taux ZC 2 ans. C'est le taux à appliquer en année 2 pour que, combiné au taux ZC 1 an en année 1, il donne le taux ZC 2 ans.

Zéro – coupon : Placement de type obligataire pour lequel les intérêts sont reversés intégralement à l'échéance, et non périodiquement.

ANNEXE 2 : Rappel des abréviations utilisées.

BV = Book value, ou valeur comptable d'un actif.

CA = chiffre d'affaires.

EMS = Exigence de marge de solvabilité.

EV = Embedded Value.

IF = In Force (affaires existantes).

MCR = Minimum Capital Requirement.

MV = Market value, ou valeur de marché d'un actif.

NB = New Business (affaires nouvelles).

O&G = Options et garanties.

PAF = Provision pour aléas financiers.

PB = Participation aux bénéfices.

PGG = Provision globale de gestion.

PM = Provisions mathématiques.

PRE = Provision pour risque d'exigibilité.

PPE = Provision pour participation aux excédents (pour le lissage de la PB dans le temps).

PVFP = Present value of future profits.

RDC = Réserve de capitalisation.

SCR = Solvency Capital Requirement.

TME = Taux moyen d'emprunt d'Etat (taux auquel emprunte l'Etat).

TMG = Taux minimum garanti (rémunération minimum sur un contrat d'assurance).

UAR = PPE.

UC = Unités de compte (contrats reposant sur des titres).

UCGL = Unrealized capital gains/losses, ou plus/moins values latentes.

VAP = Valeur actuelle probable (flux * probabilité du flux * taux d'actualisation).

VaR = Value at Risk (quantile).

ANNEXE 3 : Modélisation de la gestion d'un contrat en UC.

Rappel : Le terme unités de compte (UC) désigne les formes d'assurance pour lesquelles la totalité de la prestation est exprimée dans une unité de compte différente de la monnaie ayant cours sur le marché d'émission du contrat. Les UC correspondent en général à des parts de fonds d'investissement. La valeur monétaire de la prestation est fixée seulement au moment de son paiement, en fonction de la valeur de marché courante de chaque unité individuelle. Les risques liés à l'évolution de leurs valeurs pèsent sur le souscripteur et non sur l'assureur. Ce dernier peut néanmoins en assumer une part, en distribuant une garantie de prestation minimale. On peut comprendre que la confrontation des primes et des prestations requiert une approche différente de celle des contrats en euro. Nous allons voir à travers un exemple de contrat moderne ce mécanisme.

On considère un contrat d'assurance en unités de compte de type mixte, sans garantie de prestation minimale sur la somme assurée en cas de vie. On adopte les notations suivantes pour un contrat en portefeuille à l'année $t - 1$.

Notation	Signification
w_t	Valeur de l'unité de compte à la date t
P_{t-1}	Prime (totale) payée à la date $t-1$
m_{t-1}	Nombre d'unités de compte acquises à la date $t-1$ avec la prime P_{t-1}
M_t	Nombre d'unités de compte accumulées par le souscripteur à la date t , s'il est en vie
C_t	Prestation à la date t en cas de décès
$\gamma_{t-1}P_{t-1}$	Chargement imputé au contrat à la date $t-1$, au titre de frais de gestion

On notera également $q_x = q_{0/1,x}$ pour alléger les notations.

La provision mathématique à la date t s'exprime comme²² :

$$V_t = M_t w_t \quad (\text{A3.1})$$

V_t correspond au fond accumulé par le contrat, étant donné qu'une telle quantité représente la valeur courante de l'investissement du souscripteur.

En supposant que la prime, nette de toutes commissions, soit totalement investie en UC, on a alors :

$$m_{t-1} = \frac{(1 - \gamma_{t-1})P_{t-1}}{w_{t-1}} \quad (\text{A3.2})$$

La nécessité de gérer le contrat de manière équilibrée s'écrit

$$(V_{t-1} + (1 - \gamma_{t-1})P_{t-1}) \frac{w_t}{w_{t-1}} = (C_t - V_t)q_{x+t-1} + V_t \quad (\text{A3.3})$$

$$\Leftrightarrow (M_{t-1} + m_{t-1}) w_t = (C_t - M_t w_t)q_{x+t-1} + M_t w_t \quad (\text{A3.4})$$

²² Voir Olivieri A., Pitacco E. [16]

Ces deux équations correspondent à l'équation de récurrence des provisions pour les formes d'assurance traditionnelles. Une différence essentielle tient à ce que l'évaluation financière est fondée pour les contrats en euro sur le taux minimum garanti i , tandis qu'on utilise pour les contrats en UC le rendement de l'unité de compte pendant l'année (égal à $\frac{w_t}{w_{t-1}} - 1$). On voit donc que la base technique utilisée pour les contrats en UC se compose de la seule table de survie, avec laquelle les probabilités annuelles de décès q_{x+t+1} sont calculées. L'équation (A3.4) permet de calculer le nombre de parts accumulées par le contrat à la fin de l'année. Ceci requiert donc de définir C_t , la prestation en cas de décès. Des exemples de spécification sont :

$$C_t = (1 + \alpha)V_t \quad (\text{A3.5})$$

$$C_t = \max(G_t, V_t) \quad (\text{A3.6})$$

Où α est habituellement préfixé à la signature du contrat, tandis que le montant G_t peut être fixé soit à la signature, soit au début de chaque année, en fonction des valeurs passées des provisions (par exemple $G_t = \max(V_h)_{h=0,1,\dots,t-1}$). Dans le cas de la prestation définie en (A3.5), le calcul du nombre de parts M_t est exact et ne requiert pas de prévisions des valeurs futures de la part, puisque l'équation (A3.4) se simplifie alors en :

$$M_{t-1} + m_{t-1} = \alpha M_t q_{x+t-1} + M_t \quad (\text{A3.7})$$

Dans le cas donné par la formule (A3.6), au contraire, le nombre M_t peut s'obtenir seulement de manière approchée et requiert aussi la prévision de la valeur de la part en fin d'année. En effet, la prestation en cas de décès prend sa source dans la confrontation entre un montant donné en début d'année (G_t) et un montant aléatoire (V_t). Dans chaque cas, le financement de la prestation en cas de décès entraîne une consommation d'unités de compte. On a donc habituellement $M_t < M_{t-1} + m_{t-1}$, sauf si la prestation en cas de décès coïncide avec certitude avec V_t (on a alors égalité).

La formule (A3.6) fournit un exemple de garantie de prestation minimale où nécessairement $C_t \geq G_t$, G_t étant un montant connu. S'il s'agit d'une garantie octroyée en cas de décès, elle possède un double but. Habituellement, l'ordre de grandeur de G_t est tel que $G_t > V_t$ pendant les premières années du contrat, où V_t a approximativement l'ordre de grandeur des versements déjà effectués par le souscripteur. Le premier but de la garantie minimale est de fournir une prestation d'importance non négligeable par rapport aux primes payées pour un contrat en cas de décès, et lorsque celui-ci survient tôt. Quand V_t atteint l'ordre de grandeur de G_t , la garantie a un rôle purement financier : elle sert à couvrir les réductions possibles de rendement de la part.

L'introduction d'une éventuelle garantie minimale pour la prestation en cas de survie a une raison essentiellement financière. Dans sa formule la plus simple, la prestation garantie est donnée par :

$$S_n = \max(G, V_n) \quad (\text{A3.8})$$

Avec G le montant préfixé à l'ouverture du contrat.

Cette formule peut aussi s'écrire

$$S_n = V_n + \max(G - V_n, 0) \quad (A3.8)$$

La quantité $\max(G - V_n, 0)$ est la valeur à l'échéance d'une option de vente européenne de prix d'exercice G , et représente la garantie accordée. Evaluer ce type de garantie pose des problèmes techniques, car l'importance des provisions à l'échéance ne dépend pas seulement du rendement de la part, mais aussi de l'importance des versements effectués durant toute la période contractuelle. Une part de la prime périodique doit de toute façon être employée pour financer la garantie.

ANNEXE 4 : Evaluation de la valeur d'une obligation.

Plusieurs méthodes d'évaluation sont possibles.

- La première et la plus simple est fondée sur la duration moyenne du portefeuille.

La duration d'une série de flux fixes F_{t_i} (définition qui convient très bien aux actifs obligataires) est définie par :

$$\text{Duration} = \sum_{i=1}^n t_i \frac{F_{t_i}}{VA (1+r)^{t_i}}$$

Où VA est la valeur actuelle de l'obligation.

$$VA = \sum_{i=1}^n \frac{F_{t_i}}{(1+r)^{t_i}}$$

Les F_{t_i} sont les flux de l'obligation.

On peut définir, connaissant la valeur de marché MV de l'obligation, le taux de rendement actuariel, ou taux implicite défini par la valeur de r telle que

$$MV = \sum_{i=1}^n \frac{F_{t_i}}{(1+r)^{t_i}}$$

Après un changement de taux, la valeur d'un portefeuille d'obligations est :

$$V_{\text{après choc}} = V_{\text{avant choc}} * \frac{(1+r_{\text{avant choc}})^{\text{duration}}}{(1+r_{\text{après choc}})^{\text{duration}}}$$

Où $r_{\text{avant choc}}$ est le taux de rendement implicite du portefeuille obtenu à partir de la valeur de marché à la date présente, et $r_{\text{après choc}}$ le taux de rendement simulé du portefeuille dans le scénario envisagé. $r_{\text{après choc}}$ est égal à $r_{\text{avant choc}}$ auquel on retranche la différence entre le taux d'emprunt d'état à 10 ans à la date présente et le taux simulé.

- Une deuxième approche plus fine calcule actif par actif le taux implicite.

La formule est la même que la précédente à ceci près qu'on remplace les valeurs du portefeuille par celles d'une seule obligation.

- La troisième approche consiste à utiliser les flux.

$$V_{\text{après choc}} = \sum_{i=1}^n \frac{F_i}{(1+r_{\text{après choc}})^{t_i}}$$

Où les F_i sont les flux financiers de l'obligation et $r_{\text{après choc}}$ est égal à $r_{\text{avant choc}}$ auquel on retranche la différence entre le taux d'emprunt d'état à 10 ans à la date présente et le taux simulé.

➤ Une quatrième méthode consiste à utiliser les zéro-coupons.

La formule est analogue à la troisième méthode, mais on remplace $r_{\text{après choc}}$ par le taux zéro-coupon (ou taux spot) à i années.

Taux actuariel d'une obligation

Le taux actuariel d'une obligation est le taux d'actualisation qui, appliqué identiquement à tous les flux, donne le prix de marché de l'obligation. Si par exemple, une obligation à 4 ans de coupon 3% est cotée 98,39€, le taux actuariel y vérifie l'équation

$$3 e^{-y*1} + 3 e^{-y*2} + 3 e^{-y*3} + 103 e^{-y*4} = 98,39$$

Ce genre d'équation est obtenu par une méthode itérative du type Newton-Raphson. Elle permet de résoudre des équations non-linéaires du type $f(y)=0$. Elle débute en estimant une première possibilité y_0 , et en construisant une suite itérative (y_n) définie par

$$y_{i+1} = y_i - \frac{f(y_i)}{f'(y_i)}$$

ANNEXE 5 : Article L. 132-23, Assurances dépourvues de réduction ou de rachat.

Les assurances temporaires en cas de décès ainsi que les rentes viagères immédiates ou en cours de service ne peuvent comporter ni réduction ni rachat. Les assurances de capitaux de survie et de rente de survie, les assurances en cas de vie sans contre-assurance et les rentes viagères différées sans contre-assurance ne peuvent comporter de rachat.

Les contrats d'assurance de groupe en cas de vie dont les prestations sont liées à la cessation d'activité professionnelle, y compris les contrats qui relèvent du régime de retraite complémentaire institué par la Caisse nationale de prévoyance de la fonction publique, ne comportent pas de possibilité de rachat. Les contrats qui relèvent du régime de retraite complémentaire institué par la Caisse nationale de prévoyance de la fonction publique peuvent prévoir, à la date de cessation d'activité professionnelle, une possibilité de rachat dans la limite de 20 % de la valeur des droits individuels résultant de ces contrats. Toutefois, ces contrats doivent prévoir une faculté de rachat intervenant lorsque se produisent l'un ou plusieurs des événements suivants :

- expiration des droits de l'assuré aux allocations chômage prévues par le code du travail en cas de licenciement, ou le fait pour un assuré qui a exercé des fonctions d'administrateur, de membre du directoire ou de membre de conseil de surveillance, et n'a pas liquidé sa pension dans un régime obligatoire d'assurance vieillesse, de ne pas être titulaire d'un contrat de travail ou d'un mandat social depuis deux ans au moins à compter du non-renouvellement de son mandat social ou de sa révocation ;
- cessation d'activité non salariée de l'assuré à la suite d'un jugement de liquidation judiciaire en application des dispositions du livre VI du code de commerce ou toute situation justifiant ce rachat selon le président du tribunal de commerce auprès duquel est instituée une procédure de conciliation telle que visée à l'article L. 611-4 du code de commerce, qui en effectue la demande avec l'accord de l'assuré ;
- invalidité de l'assuré correspondant au classement dans les deuxième ou troisième catégories prévues à l'article L. 341-4 du code de la sécurité sociale ;
- décès du conjoint ou du partenaire lié par un pacte civil de solidarité ;
- situation de surendettement de l'assuré définie à l'article L. 330-1 du code de la consommation, sur demande adressée à l'assureur, soit par le président de la commission de surendettement des particuliers, soit par le juge lorsque le déblocage

des droits individuels résultant de ces contrats paraît nécessaire à l'apurement du passif de l'intéressé.

Les droits individuels résultant des contrats d'assurance de groupe en cas de vie dont les prestations sont liées à la cessation d'activité professionnelle, y compris les contrats qui relèvent du régime de retraite complémentaire institué par la Caisse nationale de prévoyance de la fonction publique, sont transférables, dans des conditions fixées par décret.

Pour les autres assurances sur la vie et pour les opérations de capitalisation, l'assureur ne peut refuser la réduction ou le rachat.

L'assureur peut d'office substituer le rachat à la réduction si la valeur de rachat est inférieure à un montant fixé par décret.

ANNEXE 6 : Market Consistent Embedded Value (MCEV) Principles.

Dans le cadre de la MCEV, les évaluations doivent être menées en respectant une cohérence avec des observations réalisées sur les marchés financiers. Les flux engendrés par l'activité d'assurance sont valorisés de la même façon qu'ils le seraient dans le cadre d'un instrument financier portant les mêmes risques et coté sur un marché financier²³.

Principe 1 : La MCEV est une mesure de la valeur des revenus consolidés de l'assureur générés par le portefeuille de contrats existants.

Principe 2 : Le portefeuille de contrats considéré doit être clairement identifié et défini.

Il doit comporter au minimum tous les contrats considérés comme des contrats d'assurance-vie à long-terme.

Principe 3 : La MCEV représente la valeur actuelle des profits de l'assureur provenant des revenus distribuables des actifs alloués au portefeuille existant, en prenant en compte tous les risques associés. La considération de ces risques doit être calibrée sur la valeur de marché observée de ces risques, lorsqu'elle est suffisamment fiable. La MCEV est constituée des éléments suivants :

- **Le free surplus alloué au portefeuille existant**
- **Le required capital**
- **La VIF**

La valeur des affaires nouvelles (New Business) est exclue du calcul. Le concept de cohérence avec les marchés consiste à évaluer les passifs d'assurance, et donc des profits de l'assureur, comme s'ils étaient des actifs échangés sur les marchés avec des cash-flows identiques.

Principe 4 : Le free surplus est la valeur de marché de tous les actifs alloués au portefeuille existant qui ne sont pas requis pour son adossement.

Elle est déterminée en prenant la valeur de marché des actifs non adossés au passif et en excès du required capital en support du portefeuille existant.

Principe 5 : Le required capital est la valeur de marché des actifs non adossés au passif sur le portefeuille existant, et dont la distribution aux actionnaires est restreinte.

Il doit être au moins égal au montant de capital requis par les normes Solvency.

Principe 6 : La valeur de l'In-Force (VIF) est constituée des éléments suivants.

- **Present value of future profits (où les profits sont les cash-flows après impôts de l'assureur provenant du portefeuille existant) ou PVFP**
- **La valeur temps des options et garanties**
- **Le coût de friction du required capital**
- **Le coût des risques non couvrables**

²³ Source : CFO Forum [20].

Les cash-flows et le passif projetés sont nets de réassurance. La PVFP comprend la valeur intrinsèque des options et garanties.

Principe 7 : La MCEV doit prendre en compte l'impact de toutes les options et garanties financières sur les cash-flows futurs de l'assureur issus du portefeuille actuel. Ce calcul doit être fondé sur des techniques stochastiques et des méthodes et hypothèses cohérentes avec l'embedded value sous-jacente. Tous les cash-flows projetés doivent être évalués à l'aide d'hypothèses économiques en cohérence avec les prix de cash-flows similaires qui sont échangés sur les marchés financiers.

L'évaluation des options et garanties doit prendre comme condition initiale la répartition d'actif observée à la date d'évaluation.

Certains aspects du comportement de l'assureur et de l'assuré doivent être pris en compte, comme le paiement des sinistres quelle que soit la situation de l'actif, le respect des lois et des garanties contractuelles, des changements dans les décisions de taux crédités et des bonus aux assurés, variant selon l'environnement économique, le comportement dynamique des assurés, etc.

Les techniques utilisées pour le calcul des options et garanties doivent prendre en compte une variation stochastique dans les conditions économiques futures en cohérence avec le principe 15. Les projections économiques doivent respecter les principes 12, 13 et 14.

Principe 8 : Les coûts de friction du required capital doivent être pris en compte.

Ces coûts de friction reflètent les impôts et les coûts d'investissement appliqués sur les actifs adossés au required capital.

Principe 9 : Les coûts des risques financiers et non-financiers non couvrables (hors ceux des options et garanties et de la PVFP) doivent être pris en compte.

C'est le cas par exemple lorsque les modèles utilisés ne calibrent pas avec les données de marché (absence de marché ou illiquidité).

Principe 10 : Le New Business est défini par les ventes de nouveaux contrats d'assurance ou par l'augmentation des contrats du portefeuille existant sur la période considérée. La MCEV ne prend pas en compte le New Business.

Les exemples suivants sont considérés comme du New Business :

- Signature d'un nouveau contrat
- Nouvelle police d'assurance
- Nouveaux tarifs

La valeur du New Business est calculée après impôts et après coût des options et garanties, après CReC, et après CNHR.

Principe 11 : L'estimation des hypothèses utilisées pour les projections futures doit être fondée sur l'expérience passée, présente, et attendue dans le futur, et sur toute autre donnée d'expérience.

Il y a primauté du particulier sur le général. Ces hypothèses doivent faire l'objet d'une réévaluation fréquente, au moins annuelle.

Les données de mortalité et de coût reposeront de préférence sur les données internes.

Principe 12 : Les hypothèses économiques doivent être cohérentes avec les données internes à l'entreprise et doivent être déterminées de façon cohérente avec les prix de marché de cash-flows similaires.

Les hypothèses économiques doivent être réévaluées à chaque nouveau calcul de MCEV.

Les hypothèses d'inflation doivent provenir des données de marché.

La valeur des actifs considérés ne doit pas être modifiée par rapport à leur valeur observée sur les marchés.

Les retours d'investissement doivent être ceux réellement observés.

Principe 13 : La VIF doit être actualisée en utilisant des taux identiques à ceux qui seraient utilisés pour évaluer les mêmes cash-flows sur les marchés de capitaux.

Pour les cash-flows qui ne dépendent pas, ou varient linéairement avec les marchés, on peut supposer que les actifs rapportent un taux de référence défini au principe 14.

Pour les cash-flows comportant des options et garanties financières qui ne varient pas linéairement avec les marchés, les cash-flows des actifs peuvent être projetés et tous les autres cash-flows peuvent être actualisés en utilisant des modèles stochastiques risque-neutre. Les taux de référence sont utilisés en tant que taux sans risque.

Principe 14 : Le taux de référence est utilisé à la place du taux sans risque, et est approprié à la monnaie, à l'échéance et à la liquidité des cash-flows du passif considérées.

- Pour les passifs liquides, le taux de référence sera pris, dans la mesure du possible, à partir de la courbe des taux swap de la monnaie considérée.

- Pour les passifs non liquides, le taux de référence sera pris à partir de la courbe des taux swap avec inclusion d'une prime de liquidité.

Si les données de marché sur les courbes de taux n'ont pas une échéance suffisante, on pourra supposer que les taux restent constants à longue échéance, ou utiliser une courbe des taux d'obligations d'Etat si elle existe.

Si l'échéance n'est pas disponible dans les données de marché, on pourra procéder par interpolation.

Si l'entreprise investit dans des actifs à taux fixes mais différents des taux de référence, elle doit procéder à des ajustements pour coller avec les valeurs de marché des actifs.

Principe 15 : Les modèles stochastiques et les paramètres associés doivent être appropriés par rapport au portefeuille existant, aux données internes à l'entreprise, et fondés sur les données de marché les plus récentes. Les hypothèses de volatilité doivent reposer sur les volatilités implicites des produits dérivés plutôt que sur les données historiques des instruments sous-jacents.

Le calibrage du modèle doit reposer sur les volatilités implicites des options sur actions, des taux swap, etc., avec la plus grande précision possible.

Si des données récentes ne sont pas disponibles, des avis d'experts pourront être utilisés.

Les corrélations entre taux de rendement des actifs doivent reposer sur des données couvrant un nombre d'années suffisant. La méthode pour déterminer ces corrélations ne devrait pas évoluer d'une année à l'autre.

Principe 16 : Des hypothèses doivent être déterminées quant aux taux de bonus futurs et quant à la répartition des profits entre assureur et assurés. Elles doivent reposer sur les pratiques de l'entreprise et les prix observés sur les marchés.

Les réglementations en matière de participation aux bénéfices doivent être respectées.

Les montants des bonus projetés doivent dépendre des rendements futurs projetés.

Les pratiques de l'entreprise en la matière doivent être prises en compte.

Lorsqu'il existe une pratique spécifique sur l'allocation des bonus, y compris la réalisation d'UCGL, les hypothèses de projection doivent prendre en compte la pratique observée dans le passé et l'influence du marché.

Principe 17 : Les résultats MCEV doivent être publiés au niveau du groupe consolidé, en précisant clairement quel est le périmètre considéré dans les calculs. Sauf en cas de non matérialité, la conformité aux principes MCEV est obligatoire et doit être explicitement démontrée.

La MCEV doit être calculée au moins une fois par an.

Il est nécessaire de préciser comment les hypothèses économiques et internes sont déterminées, quels taux de marché de référence sont utilisés, quelles méthodes sont employées pour le calcul des volatilités et des corrélations, quels taux de change sont utilisés.

Une description brève et claire du portefeuille existant est demandée, les retraitements de consolidation, y compris réassurance sont à expliciter. Le détail du calcul de la MCEV et de ses composantes est à donner, ainsi que les méthodes utilisées.

Le montant, la nature et l'impact d'un éventuel développement ou coût exceptionnel sont à expliquer.

Un résumé des caractéristiques des modèles utilisés pour les options et garanties doit être fourni, ainsi que le résultat du calibrage et de la réconciliation.

Une analyse de mouvement est à mener pour expliquer le passage de la valeur de l'année passée à la valeur actuelle.

Une Group MCEV (MCEV + New Business) doit également être présentée.

Des tests de sensibilité doivent être effectués au moins chaque année. Pour les entreprises publiant leur MCEV plus fréquemment, il n'est pas nécessaire de mettre à jour les valeurs de sensibilités pour les périodes intermédiaires. Les sensibilités à calculer sont au minimum les suivantes.

- +/- 100 points de base sur les taux

L'objectif est d'étudier l'impact d'un changement brutal de la courbe des taux. Toute la courbe est translatée parallèlement, mais les taux doivent rester positifs. Un tel changement de taux provoque également un changement d'autres hypothèses, phénomène qui doit être pris en compte.

- - 10% sur la valeur des actions

L'objectif est d'étudier l'impact d'un changement brutal des valeurs de marchés de certains actifs.

- +25% sur la volatilité implicite des actions

Cette sensibilité permet de quantifier l'impact d'un tel changement de volatilité sur le coût des options et garanties.

- +25% sur la volatilité des swaptions

Cette sensibilité permet de quantifier l'impact d'un tel changement de volatilité sur le coût des options et garanties.

- -10% sur les coûts de gestion

Cette sensibilité est appliquée aux coûts projetés.

- -10% sur les taux de rachat (un taux de 5% devient 4,5%)

Cette sensibilité doit refléter une baisse des taux de rachat. Une analyse séparée des contrats influencés positivement ou négativement à ce choc n'est pas nécessaire.

- -5% appliqué proportionnellement aux taux de mortalité et de longévité

Il est intéressant pour une compagnie d'assurance de connaître séparément l'effet d'un changement des tables de mortalité sur les contrats d'assurance vie et sur les contrats en rente, étant donné que le comportement futur de ces deux classes de population assurées peut varier significativement. Cette sensibilité doit aussi inclure une description de la manière dont sont modélisées ou non les futures décisions managériales en réaction à ce changement de tables de mortalité (modifications des tarifs par exemple).

- Required capital égal au capital minimum défini par Solvency

Le calcul du required capital peut reposer sur d'autres mesures économiques que celles données par Solvency. Dans cette sensibilité, le montant du required capital doit être égal au montant de capital défini par Solvency, celui-ci devant être précisé.

ANNEXE 7 : Modèles autorégressifs AR(p).

Définition

Un processus autorégressif d'ordre p, noté AR(p) est donné par²⁴ :

$$X_t = c + a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + \dots + a_p X_{t-p} + \varepsilon_t$$

Les coefficients a_i sont les paramètres du modèle, et les ε_t sont des bruits blancs i.i.d. d'espérance nulle et de variance σ^2 et indépendant des X_t .

Cas d'un AR(1) $X_t = c + aX_{t-1} + \varepsilon_t$

$$E[X_t] = a^t X_0 + c \sum_{i=0}^{t-1} a^i$$

Preuve par récurrence

- $E[X_1] = c + aE[X_0] = aX_0 + c * 1$
- Pour $t \geq 2$, on suppose la propriété vraie au rang t-1

Par définition, $E[X_t] = c + aE[X_{t-1}]$

$$E[X_t] = c + a * a^{t-1} X_0 + a * c \sum_{i=0}^{t-2} a^i$$

$$E[X_t] = c + a * a^{t-1} X_0 + a * c \sum_{i=0}^{t-2} a^i$$

$$E[X_t] = c + a^t X_0 + c \sum_{i=1}^{t-1} a^i$$

$$E[X_t] = a^t X_0 + c \sum_{i=0}^{t-1} a^i$$

Condition de stationnarité

Théorème

Si $|a| < 1$, le processus est stationnaire.

$$\text{Dans ce cas, } E[X_t] = \frac{c}{1-a}, V[X_t] = \frac{c^2}{1-a^2}$$

Si $|a| = 1$, le processus est une marche aléatoire.

Si $|a| > 1$, le processus est explosif.

²⁴ Voir Hamilton J. D. [9]

Cas d'un AR(p)

Sans perte de généralité, on peut supposer la constante nulle.

Le problème $X_t = c + a_1X_{t-1} + a_2X_{t-2} + \dots + a_pX_{t-p} + \varepsilon_t$ peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} X_t \\ X_{t-1} \\ \vdots \\ X_1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_p \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} X_{t-1} \\ X_{t-2} \\ \vdots \\ X_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{soit } Y_t = MY_{t-1} + \varepsilon_t$$

On est ramené au cas d'un modèle AR(1).

Pour étudier la stationnarité, on considère le problème $y_t = My_{t-1} = M^{t-1}y_1$.

Etudions alors les valeurs propres de M, en résolvant :

$$\det(M - \lambda Id) = \begin{vmatrix} a_1 - \lambda & a_2 & \dots & a_p \\ 1 & -\lambda & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-1)^p \lambda^p + (-1)^{p-1} a_1 \lambda^{p-1} - (-1)^{p-2} a_2 \lambda^{p-2} + \dots + (-1)^{p-1} a_{p-1} \lambda^1 + (-1)^{p-1} a_p = 0$$

$$\boxed{\lambda^p - a_1 \lambda^{p-1} - \dots - a_{p-1} \lambda - a_p = 0}$$

Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les racines complexes de ce polynôme caractéristique. On

$$\text{a } M = C^{-1}DC \text{ où } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}$$

$$\text{Il vient } y_t = M^{t-1}y_1 = C^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1^{t-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{t-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_p^{t-1} \end{pmatrix} C y_1$$

Théorème

Le processus AR(p) est stationnaire si les modules des racines du polynôme caractéristique sont tous strictement inférieurs à 1.

Propriétés

Dans le cas d'un processus stationnaire, la moyenne se calcule par :

$$\begin{aligned}X_t &= c + a_1X_{t-1} + a_2X_{t-2} + \dots + a_pX_{t-p} + \varepsilon_t \\E[X_t] &= c + a_1E[X_{t-1}] + a_2E[X_{t-2}] + \dots + a_pE[X_{t-p}] \\ \mu &= c + a_1\mu + a_2\mu + \dots + a_p\mu\end{aligned}$$

$$\mu = \frac{c}{1 - \sum_{i=1}^p a_i}$$

La variance, les auto-covariances et les auto-corrélations sont obtenues à partir des formules suivantes (en supposant la constante nulle sans perte de généralité).

$$E[X_tX_{t-j}] = a_1E[X_{t-1}X_{t-j}] + a_2E[X_{t-2}X_{t-j}] + \dots + a_pE[X_{t-p}X_{t-j}] + E[\varepsilon_tX_{t-j}]$$

Pour $j=0$, on trouve la variance $\gamma_0 = a_1\gamma_1 + \dots + a_p\gamma_p + \sigma^2$ car $E[\varepsilon_tX_t] = E[\varepsilon_t(a_1X_{t-1} + a_2X_{t-2} + \dots + a_pX_{t-p} + \varepsilon_t)] = E[\varepsilon_t^2] = \sigma^2$

En notant $\rho_i = \frac{\gamma_i}{\gamma_0}$, on obtient :

$$\gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1 - \sum_{i=1}^p a_i\rho_i}$$

Si $j>0$, $\gamma_j = a_1\gamma_{j-1} + \dots + a_p\gamma_{j-p}$. En divisant par γ_0 , on a :

$$\rho_j = \sum_{i=1}^p a_i\rho_{j-i}$$

Choix du retard p

Dans la plupart des situations, on ignore quelle valeur doit prendre p. Le choix s'effectue au cas par cas, mais il convient de remarquer de façon générale que :

- Si p est trop petit, le modèle souffrira d'un biais de spécification, et les résidus peuvent ne pas suivre une loi normale,
- Si p est trop grand, le modèle sera lourd et complexe à manipuler,
- On conserve en général tous les degrés du polynôme caractéristique. Dans un AR(4) par exemple, on n'omet pas les retards 2 et 3.

ANNEXE 8 : Régression logistique.

Rappel du modèle²⁵

$$\ln\left(\frac{\eta(x)}{1-\eta(x)}\right) = \beta_0 + \beta^T x$$

Vraisemblance conditionnelle

$$\eta(x) = \frac{e^{\beta_0 + \beta^T x}}{1 + e^{\beta_0 + \beta^T x}}$$

On cherche $l(b) = P(Y = y_1 | X = x_1, \dots, Y = y_n | X = x_n)$

On suppose les observations i.i.d.

$$l(b) = \prod_{i=1}^n P(Y = y_i | X = x_i)$$

$$\mathcal{L}(b) = \ln(l(b)) = \sum_{i=1}^n \ln(P(Y = y_i | X = x_i))$$

Comme $y_i = 0$ ou 1 ,

$$\mathcal{L}(b) = \sum_{i=1}^n \ln[y_i \eta(x_i) + (1 - y_i)(1 - \eta(x_i))]$$

$$\mathcal{L}(b) = \sum_{i=1}^n y_i \ln(\eta(x_i)) + (1 - y_i) \ln(1 - \eta(x_i))$$

Car $y_i = 0$ ou 1 .

$$\mathcal{L}(b) = \sum_{i=1}^n y_i \ln\left(\frac{\eta(x_i)}{1 - \eta(x_i)}\right) + \ln(1 - \eta(x_i))$$

$$\mathcal{L}(b) = \sum_{i=1}^n y_i (\beta_0 + \beta^T x_i) - \ln(1 + e^{\beta_0 + \beta^T x_i})$$

En posant $b = (\beta_0, \beta^T)$ et $z_i = \begin{pmatrix} 1 \\ x_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+1}$,

$$\mathcal{L}(b) = \sum_{i=1}^n y_i \beta^T z_i - \ln(1 + e^{\beta^T z_i})$$

²⁵ Voir Vayatis N. [8], Dr Mancini J. [11], Theodoridis S., Koutroumbas K. [12]

Estimateurs des paramètres

L'optimisation de $\mathcal{L}(b)$ donne les équations suivantes.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b}(b) = \sum_{i=1}^n y_i z_i - \frac{z_i e^{\beta^T z_i}}{1 + e^{\beta^T z_i}} = 0$$
$$\sum_{i=1}^n z_i (y_i - \eta(z_i)) = 0$$

Ici, la solution b^* n'est pas explicite. On peut en revanche obtenir des résultats en continuant à dériver.

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial b \partial b^T}(b) = - \sum_{i=1}^n z_i z_i^T \frac{e^{\beta^T z_i} (1 + e^{\beta^T z_i}) - e^{\beta^T z_i} e^{\beta^T z_i}}{(1 + e^{\beta^T z_i})^2}$$
$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial b \partial b^T}(b) = - \sum_{i=1}^n z_i z_i^T \frac{e^{\beta^T z_i}}{(1 + e^{\beta^T z_i})^2}$$
$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial b \partial b^T}(b) = - \sum_{i=1}^n z_i z_i^T \eta(z_i) (1 - \eta(z_i))$$

En résumé, nous avons donc :

$$\nabla \mathcal{L}(b) = \sum_{i=1}^n z_i (y_i - \eta(z_i)) = X^T (Y - H(b))$$

$$\text{Où } X = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{1} & x_i^1 & \dots & x_i^d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

$$\nabla^2 \mathcal{L}(b) = -X^T W(b) X$$

Où $W = \text{diag}(\eta(z_i)(1 - \eta(z_i)))_{1 \leq i \leq n}$.

Algorithme de Newton-Raphson

Il s'écrit dans notre cas sous la forme suivante.

$$b^{(t+1)} = b^{(t)} - \left(\nabla^2 \mathcal{L}(b^{(t)}) \right)^{-1} \nabla \mathcal{L}(b^{(t)})$$

Ce qui donne, en simplifiant les expressions précédentes,

$$b^{(t+1)} = b^{(t)} + (X^T W X)^{-1} X^T (Y - H)$$

$$b^{(t+1)} = (X^T W X)^{-1} X^T W [X b^{(t)} + W^{-1} (Y - H)]$$

Il s'agit de l'estimateur des moindres carrés pondérés par W .

ANNEXE 9 : Liste des variables macroéconomiques considérées.

Les variables étudiées pour la régression logistique sont les suivantes.

TEC 1 an (Taux Echéance Constante)

TEC 2 ans

TEC 3 ans

TEC 5 ans

TEC 7 ans

TEC 10 ans

TEC 15 ans

TEC 20 ans

TEC 25 ans

TEC 30 ans

Taux de référence des Bons du Trésor à 1 mois – moyenne mensuelle

Taux de référence des Bons du Trésor à 3 mois – moyenne mensuelle

Taux de référence des Bons du Trésor à 6 mois – moyenne mensuelle

Taux de référence des Bons du Trésor à 9 mois – moyenne mensuelle

Taux de référence des Bons du Trésor à 12 mois – moyenne mensuelle

Taux de référence des Bons du Trésor à 2 ans – moyenne mensuelle

Taux de référence des Bons du Trésor à 5 ans – moyenne mensuelle

Taux de l'emprunt phare français à 10 ans

Taux de l'emprunt phare français à 30 ans

Taux interbancaire de l'argent au jour le jour (EONIA) – moyenne mensuelle

Taux de l'EURIBOR à 1 mois – moyenne mensuelle

Taux de l'EURIBOR à 3 mois – moyenne mensuelle

Taux de l'EURIBOR à 6 mois – moyenne mensuelle

Taux de l'EURIBOR à 9 mois – moyenne mensuelle

Taux de l'EURIBOR à 12 mois – moyenne mensuelle

TME (Taux moyen des emprunts d'Etat)

Taux livret A

CAC 40 – ouverture 1^{er} jour du mois

CAC 40 – moyenne mensuelle

CAC 40 – moyenne mobile à 6 mois

CAC 40 – moyenne mobile à 1 an

CAC 40 – volatilité sur le mois

CAC 40 – volatilité sur 6 mois

CAC 40 – volatilité sur 1 an

SMIC horaire brut

IPC (Indice des Prix à la Consommation)

Inflation mensuelle – m/m-1

Inflation glissante – m/m-12

IPC – Carburants et lubrifiants

IPC – Achats de véhicules

IPC – Utilisation de véhicules personnels

IPC – Services de transport

Taux de change EUR/USD

Taux de change EUR/YEN

Consommation mensuelle des ménages en biens – Biens durables

Consommation mensuelle des ménages en biens – Textile, cuir

Consommation mensuelle des ménages en biens – Autres biens fabriqués

Consommation mensuelle des ménages en biens – Produits fabriqués (total des 3)

Consommation mensuelle des ménages en biens – Equipement du logement

Consommation mensuelle des ménages en biens – Automobiles

Consommation mensuelle des ménages en biens – Produits manufacturés

Consommation mensuelle des ménages en biens – Biens durables d'équipement personnel

Consommation mensuelle des ménages en biens – Energie, eau, traitement des déchets

Consommation mensuelle des ménages en biens – Produits pétroliers

Consommation mensuelle des ménages en biens – Energie, eau, traitement des déchets, hors produits pétroliers

Consommation mensuelle des ménages en biens – Alimentaire

Consommation mensuelle des ménages en biens – Biens

PIB trimestriel

Croissance

Balance des paiements – Solde – Comptes de transactions courantes

Indicateur de climat des affaires – Tous secteurs – France métropolitaine

Indicateur de retournement – Tous secteurs – France métropolitaine

Opinion sur le niveau de vie passé en France – Solde des réponses « amélioration » - « détérioration » (%)

Opinion sur le niveau de vie futur en France – Solde des réponses « amélioration » - « détérioration »

Opinion sur l'opportunité d'épargner – Solde des réponses « favorable » - « défavorable »

Opinion sur leur capacité d'épargne actuelle – Solde des réponses « favorable » - « défavorable »

Opinion sur leur situation financière passée – Solde des réponses « amélioration » - « détérioration »

Opinion sur leur situation financière future – Solde des réponses « amélioration » - « détérioration »

Opinion sur leur capacité d'épargne future – Solde des réponses « amélioration » - « détérioration »

Indicateur résumé de confiance des ménages – Moyenne arithmétique d'indicateurs

Intentions d'achats de voitures – Solde des réponses « Intentions d'achats » - « Pas d'achat envisagé »

Intentions d'achats de logement (dans un délai de 2 ans) – Solde des réponses « Intentions d'achats » - « Pas d'achat envisagé »

Indice de référence des loyers (IRL – Base 100 4^{ème} trimestre 1998)

Nombre de défaillances d'entreprises par date de jugement – France entière – Industrie

Nombre de défaillances d'entreprises par date de jugement – France entière – Industrie manufacturière

Nombre de défaillances d'entreprises par date de jugement – France entière – Construction

Nombre de défaillances d'entreprises par date de jugement – France entière – Commerce, transports, hébergement et restauration

Nombre de défaillances d'entreprises par date de jugement – France entière – Commerce

Nombre de défaillances d'entreprises par date de jugement – France entière – Transport

Nombre de défaillances d'entreprises par date de jugement – France entière – Hébergement et restauration

Nombre de défaillances d'entreprises par date de jugement – France entière – Information et télécommunication

Nombre de défaillances d'entreprises par date de jugement – France entière – Activités financières

Nombre de défaillances d'entreprises par date de jugement – France entière – Activités immobilières

Nombre de défaillances d'entreprises par date de jugement – France entière – Activités de service

Nombre de défaillances d'entreprises par date de jugement – France entière – Enseignements, santé, action sociale

Nombre de défaillances d'entreprises par date de jugement – France entière – Autres activités de service

Nombre de défaillances d'entreprises par date de jugement – France entière – Ensemble

Taux de chômage au sens du BIT – Ensemble France métropolitaine

Indice des taux de salaire horaire des ouvriers par activité – Ensemble des secteurs non agricoles

Indice des salaires mensuels de base par activité – Ensemble des secteurs non agricoles

Indice du coût du travail, salaires et charges – Ensemble des secteurs

Population en France métropolitaine

Taux de nuptialité en France métropolitaine (mariages pour 1 000 habitants)

Taux de natalité en France métropolitaine (naissances pour 1 000 habitants)

Taux de mortalité en France métropolitaine (décédés pour 1 000 habitants)

Construction logement – Situation de la construction – Logements autorisés

Transports – Fret aérien (millions de tonnes) – Aéroports de Paris

Transports – Secteur automobile – Immatriculations de voitures particulières neuves

Transports – Secteur automobile – Production de voitures particulières (en milliers)

Transports – Voyageurs SNCF (milliards de voyageurs-km) – Ile-de-France

Transports – Voyageurs – Paris vols internationaux (milliers de passagers)

Démographie des entreprises – Créations d'entreprises

Indice des prix internationaux des matières premières importées – Ensemble

Indice des prix internationaux des matières premières importées – Matières alimentaires – Ensemble

Indice des prix internationaux des matières premières importées – Denrées tropicales

Indice des prix internationaux des matières premières importées – Oléagineux

Indice des prix internationaux des matières premières importées – Céréales

Indice des prix internationaux des matières premières importées – Sucre

Indice des prix internationaux des matières premières importées – Viande de bœuf empaquetée

Cours internationaux des matières premières importées – Aluminium (Londres - \$/t)

Cours internationaux des matières premières importées – Argent (US - cents/once)

Cours internationaux des matières premières importées – Blé (Chicago - cents/bois – 60lb)

Cours internationaux des matières premières importées – Bois tropicaux sciés (Royaume-Uni - \$/m³)

Cours internationaux des matières premières importées – Caoutchouc naturel SMR 20 (Malaisie - ringgits/kg)

Cours internationaux des matières premières importées – Cacao (New York - \$/t)

Cours internationaux des matières premières importées – Café Arabica (New York - cents/lb)

Cours internationaux des matières premières importées – Café Robusta (New York - cents/lb)

Cours internationaux des matières premières importées – Conifère scié (Colombie Britannique - \$/1 000 board feet)

Cours internationaux des matières premières importées – Coton (Liverpool - cents/lb)

Cours internationaux des matières premières importées – Cuir de bovin (US - cents/livre)

Cours internationaux des matières premières importées – Cuivre (Londres - \$/t)

Cours internationaux des matières premières importées – Huile d'olive (£/t)

Cours internationaux des matières premières importées – Huile de palme (\$/t)

Cours internationaux des matières premières importées – Huile de tournesol (£/t)

Cours internationaux des matières premières importées – Maïs (cents/boisseau)

Cours internationaux des matières premières importées – Minerai de fer brésilien (\$ FE UNIT)

Cours internationaux des matières premières importées – Nickel (Londres - \$/t)

Cours internationaux des matières premières importées – Or (Londres - \$/troy oz)

Cours internationaux des matières premières importées – Palladium (Londres - \$/troy oz)

Cours internationaux des matières premières importées – Pâte à papier (\$/t)

Cours internationaux des matières premières importées – Platine (Londres - \$/troy oz)

Cours internationaux des matières premières importées – Plomb (Londres - \$/t)

Cours internationaux des matières premières importées – Riz long Thaï blanc (Bangkok - \$/t)

Cours internationaux des matières premières importées – Soja (graines)

Cours internationaux des matières premières importées – Sucre (New York - cents/lb)

Cours internationaux des matières premières importées – Thé (best BP1 Keynia - \$/kg)

Cours internationaux des matières premières importées – Titane 70% Ferrotitanium (US - \$/livre)

Cours internationaux des matières premières importées – Tourteaux de soja (Chicago - \$/once)

Cours internationaux des matières premières importées – Viande de bœuf empaquetée (Omaha - \$/livre)

Cours internationaux des matières premières importées – Zinc (Londres - \$/t)

Indice de prix et cours internationaux des matières premières importées – Indice Moody's

Indice de prix et cours internationaux des matières premières importées – Indice Reuter

Indice de la production industrielle – Indices bruts – Biens d'investissement

Indice de la production industrielle – Indices bruts – Biens intermédiaires

Indice de la production industrielle – Indices bruts – Biens de consommation durables

Indice de la production industrielle – Indices bruts – Biens de consommation non durables

Bibliographie

- [1] *Code des Assurances*. 2011.
- [2] **Aubry D.**, *Mécanique*. Paris, Ecole Centrale Paris, 2008.
- [3] **De Cremiers L.**, *Statistique approfondie*. Paris, Université Paris Dauphine, 2010.
- [4] **Eraker B.**, *The Vasicek Model*. Wisconsin School of Business, 2010.
- [5] **Gabet L.**, *Mathématiques financières*. Paris, Ecole Centrale Paris, 2010.
- [6] **Muni Toke I.**, *Modèles stochastiques de taux d'intérêt*. Paris, Ecole Centrale Paris, 2010.
- [7] **Phan T.**, *Statistique*. Paris, Ecole Centrale Paris, 2007.
- [8] **Vayatis N.**, *Statistiques et data-mining*. Paris, Ecole Centrale Paris, 2010.
- [9] **Hamilton J. D.**, *Time Series Analysis*, Princeton N.J., Princeton University Press, 1994.
- [10] **Heston S. L.**, *A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options*, Yale CT, The review of financial studies, Oxford University Press, 1993.
- [11] **Dr Mancini J.**, *Régression logistique*. Marseille, Faculté de Médecine de Marseille, Université de la Méditerranée, 2010.
- [12] **Theodoridis S., Koutroumbas K.**, *Pattern recognition*. Elsevier, USA, Academic Press, 2006.
- [13] **Le Vallois F., Tosetti A., Palsky P., Paris B.**, *Gestion actif passif en assurance vie*, Economica, 2003.
- [14] **Befec Price Waterhouse**, *Assurance vie: normes et réglementation comptables*, L'Argus, 1999.
- [15] **Levitt Steven D., Dubner Stephen J.**, *Freakonomics*, William Morrow, 2005.
- [16] **Olivieri A., Pitacco E.**, *Assurance-vie : évaluer les contrats et les portefeuilles*, Village Mondial, 2008.
- [17] Fiscalité de l'assurance vie. (2011) <http://assurance-vie.lesdossiers.com/fiches-pratiques/fiscalite-assurance-vie>
- [18] Bases de données de l'Insee. (2011) <http://www.insee.fr/fr/bases-de-donnees/default.asp?page=indices.htm>
- [19] European Central Bank. (2011) <http://www.ecb.int/ecb/html/index.fr.html>

- [20] CFO Forum. (2011) <http://www.cfoforum.nl/>
- [21] EIOPA. (2011) <https://eiopa.europa.eu/home/index.html>
- [22] **Lunven S.**, *Le rachat : un droit pour l'assuré, un risque pour l'assureur.* Mémoire d'actuariat EURIA, 2008.
- [23] ACAM. *QIS4, orientations nationales complémentaires aux spécifications techniques*, mai 2008.
- [24] Commission Européenne. *QIS5 technical specifications*, 2010.
- [25] Allianz. *Allianz Group Facts & Figures Fiscal Year 2010*, mai 2011.
- [26] Allianz. *Embedded Value Guidelines 2010*, 2010.